

DIFERENÇAS FINITAS  
NA INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES  
DE TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

ENG: SÉRGIO PERCIVAL BARONCINI PROENÇA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR:

PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

BANCA EXAMINADORA:

PROF. DR. JOSÉ ELIAS LAIER

PROF. DR. WALTER SAVASSI

PROF. DR. MÁRIO FRANCO

Aos meus pais

Leopoldo e Dirce

### AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. José Elias Laier pelos trabalhos de orientação.

- Ao Laboratório de Computação do Departamento de Computação e Estatística do Campus de São Carlos-USP, pela cessão do seu equipamento.

- Aos amigos que com seu apoio e incentivo contribuíram para a conclusão deste trabalho.

- Aos funcionários do Departamento de Estruturas, João Paulo Moretti, Sylvia Helena Moretti, pelos serviços de desenho, e à Sra. Wilma Provinciali Vall pela valiosa colaboração prestada nos serviços de datilografia.

- A DEUS, pai e amigo, por sua presença constante.

## ABSTRACT

The basic aim of this work is to apply the Finite Differences Method to the integration of the differential equations resulting from tall buildings analysis by the Continuous Medium Technique. In particular, arbitrary meshes of points are used.

The text has been arranged so that the basic concepts of the Continuous Medium Technique are first exposed. Then difference operators for arbitrary meshes are deduced. Finally, a preliminary study of the behavior of non-uniform frame panels is presented.

To illustrate the importance of this study, the text includes some numerical examples.

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo primordial mostrar a viabilidade e eficiência do emprego do Método das Diferenças Finitas, mediante malhas arbitrárias, na integração numérica das equações diferenciais resultantes da aplicação da Técnica do Meio Contínuo no estudo de estruturas de edifícios altos.

Para tanto são, inicialmente, apresentados os conceitos básicos da Técnica do Meio Contínuo e em seguida formulados os operadores de diferenças para malhas arbitrárias. Por último, e em destaque, tratam-se, em pormenores, as estruturas aporticadas, principalmente, as constituídas de colunas inclinadas.

Diversos exemplos de aplicação arrolados permitem evidenciar a importância dos propósitos buscados.

### NOTAÇÃO

Não há aqui o objetivo de enumerar todas as grandezas dado que muitas delas possuem significado evidente à medida em que aparecem no desenvolvimento do texto. Entretanto, é de interesse definir alguns dos símbolos, ainda que apresentem emprego já consagrado na literatura clássica.

#### a) Sistemas de referência

oxz - sistema de eixos coordenados ortogonais no plano do painel.

OXYZ - Sistema de eixos coordenados ortogonais no espaço tridimensional.

#### b) Índices

f - caracteriza grandezas referentes aos pórticos.

w - caracteriza grandezas referentes às paredes.

tℓ - caracteriza grandezas referentes à torção livre.

ft - caracteriza grandezas referentes à flexo torção.

#### c) Deslocamentos

u - deslocamentos segundo ox ou OX.

v - deslocamentos segundo OY.

w - rotações segundo OZ.

#### d) Esforços

M - momento fletor.

Q - força cortante.

$M_{t\ell}$  - momento de torção livre.

$M_{ft}$  - momento de flexo torção.

e) Parâmetros elásticos e geométricos

E - módulo de elasticidade longitudinal.

J - momento de inércia de seção transversal.

$J_t$  - momento de inércia à torção livre.

$J_\omega$  - momento setorial de inércia.

$j_w$  - produto de rigidez da parede  $EJ_w$ .

$s_t$  - produto de rigidez de torção livre  $J_t$

$j_t$  - produto de rigidez de flexo torção  $EJ_\omega$

$s_f$  - rigidez do pórtico à força cortante.

$J_p$  - momento de inércia do pilar.

$J_v$  - momento de inércia da viga.

$\ell$  - comprimento.

$K_p$  - rigidez  $\frac{J_p}{\ell_i^3}$  do pilar i de comprimento  $\ell$ .

$K_v$  - rigidez  $\frac{J_v}{\ell_i^3}$  da viga i de comprimento  $\ell$ .

h - pé direito.

L - altura total da estrutura.

$\xi$  - coordenada adimensional  $\frac{z}{L}$  ou  $\frac{Z}{L}$  no painel.

$\lambda = L^2 \frac{s_f}{j_w}$  parâmetro de rigidez relativa entre pórtico e parede.

f) Símbolos matriciais

{ } - matriz coluna

[ ] - matriz quadrada

T - como expoente indica transposta.

## ÍNDICE

NOTAÇÃO .....	i
 <u>CAPÍTULO I</u>	
INTRODUÇÃO .....	1
 <u>CAPÍTULO II - APLICAÇÃO DA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO AO ESTUDO DE EDIFÍCIOS ALTOS</u>	
2.1 - INTRODUÇÃO .....	4
2.2 - PAINEL PAREDE .....	4
2.3 - PAINEL PÓRTICO .....	5
2.4 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE PAINÉIS .....	8
2.5 - ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS .....	9
 <u>CAPÍTULO III - OPERADORES DE DIFERENÇAS</u>	
3.1 - INTRODUÇÃO .....	17
3.2 - OPERADORES DE DERIVADAS ORDINÁRIAS .....	18
3.2.1 - Operadores ascendentes de derivadas ..	26
3.2.2 - Operadores centrais de derivadas .....	27
3.2.3 - Operadores descendentes de derivadas .	29
3.3 - ANÁLISE DA ASSOCIAÇÃO DE PAINÉIS MEDIANTE OPERADORES DE DIFERENÇAS .....	31
3.3.1 - Associação plana de painéis .....	31
3.3.2 - Associação tridimensional de painéis .	36
3.4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS .....	49
3.4.1 - Considerações sobre a malha .....	49
3.4.2 - Emprego dos operadores .....	51
3.4.3 - Geração do sistema de equações lineares .....	52



#### CAPÍTULO IV - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO NUMÉRICA

4.1 - INTRODUÇÃO .....	57
4.2 - PRIMEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO .....	58
4.3 - SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO .....	63
4.4 - TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO .....	86
4.5 - QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO .....	93

#### CAPÍTULO V - TÓPICOS ESPECIAIS EM ESTRUTURAS APORTICADAS

5.1 - INTRODUÇÃO .....	99
5.2 - INFLUÊNCIA DA POSIÇÃO DE PONTO DE INFLEXÃO NOS PILARES DA REGIÃO DA BASE .....	102
5.2.1 - Quinto exemplo de aplicação .....	106
5.3 - EFEITO DA INCLINAÇÃO DAS COLUNAS .....	109
5.3.1 - Sexto exemplo de aplicação .....	116
5.4 - SÉTIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO .....	120

#### CAPÍTULO VI

6.1 - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS .....	124
APÊNDICE .....	127
A.1 - .....	127
A.2 - .....	142
A.3 - .....	164
BIBLIOGRAFIA .....	173

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A Técnica do Meio Contínuo constitui uma variante de grande eficácia no estudo do comportamento de estruturas de edifícios altos. O elevado número de contribuições, a partir do trabalho pioneiro de ALBIGÉS e GOULET (1), viabilizou o estudo de inúmeros sistemas estruturais com o auxílio de tal técnica. Em nosso meio, merecem destaque os trabalhos de STAMATO (2) (3), FRANCO (4), MANCINI (5) e FERREIRA (6). É oportuno frisar que STAMATO (2) estendeu de maneira expedita e eficiente a Técnica do Meio Contínuo no sentido de tornar viável análises tridimensionais, chamando a atenção para a importância dos eixos centrais da estrutura, cujas particularidades governam o comportamento do conjunto.

Na Técnica do Meio Contínuo, a estrutura é assimilada a um consolo contínuo (meio contínuo) equivalente no que respeita à rigidez, e, assim sendo, as condições de equilíbrio passam a ser expressas por meio de equações diferenciais. Tais equações possuem coeficientes que dependem de um número pequeno de parâmetros elásticos e geométricos da estrutura. Por outro lado, esses coeficientes podem ser constantes, quando tratar-se de estrutura com rigidez constante ao longo da altura, ou variáveis, em caso contrário.

Nos casos de estrutura com rigidez constante ao longo da altura, a integração das correspondentes equações diferenciais é imediata; porém, nas demais, a integração é, em geral, somente viável por meios numéricos. Nesse sentido, diversos métodos de integração numérica mostram-se sugestivos. Todavia, cabe ressaltar que o Método das Diferenças Finitas, já utilizado por MANCINI (5), conduz a resultados satisfatórios com trabalho numérico até de pequeno vulto.

O presente trabalho tem por objetivo principal

estender as aplicações do Método das Diferenças Finitas na análise de estruturas de edifícios altos, formulada por meio da Técnica do Meio Contínuo, através da utilização de redes de malhas arbitrárias. É oportuno frizar que a utilização de redes de malhas arbitrárias permite, por exemplo, estudos de efeitos localizados, com mais requinte, sem aumento considerável do trabalho numérico HURLEY (15), PERRONE (16), LAIER (17).

A formulação dos operadores de diferenças para a aquele tipo de malha é, no presente trabalho, desenvolvida segundo a clássica variante lagrangeana baseada em condições de interpolação. Por outro lado, tais operadores são colocados em termos matriciais, tendo em vista agilizar o procedimento resultante, no sentido computacional.

No segundo capítulo são expostos os conceitos fundamentais da Técnica do Meio Contínuo de maneira sumária. Inicialmente, apresenta-se um estudo individual dos painéis comumente empregados, e, em seguida, o estudo de associações planas de painéis. Finalizando, apresenta-se a análise da associação tridimensional de painéis de contraventamento, dando-se um destaque especial para o caso de associações tridimensionais sô contendo pórticos.

O terceiro capítulo é dedicado ao desenvolvimento dos operadores de diferenças para rede de malhas arbitrárias, segundo notações matriciais, conforme já foi mencionado. O conteúdo do quarto capítulo são alguns exemplos de aplicações. Convém adiantar que um destaque especial é dado, aí, ao estudo do comportamento de associações planas de parede e pórtico com rigidez variável, no sentido de evidenciar, por meios numéricos, a influência de tal variação em alguns casos de interesse.

Um estudo pormenorizado de estruturas aporticadas é objeto de quinto capítulo. De início, analisa-se a influência da posição dos pontos de inflexão na estimativa da rigidez do pórtico ao esforço cortante, bem como analisam-se, também, implicações das perturbações criadas pelo

engastes das colunas na base. Em seguida, estudam-se efeitos adicionais oriundos da inclinação concorrente das colunas, encerrando-se com um exemplo de aplicação tridimensional. Cabe ressaltar que os efeitos adicionais apontados são evidenciados e quantificados por meio de particulares exemplos numéricos.

É oportuno acrescentar que, em vista do caráter não tão abrangente a que se propõe o trabalho, alguns efeitos complementares, cuja importância é bastante notória em se tratando de edifícios altos, foram negligenciados. Dentre eles cabe apontar, por exemplo, influência da deformação axial dos pilares, engastamento elástico na base, efeitos de segunda ordem e influência da geometria dos nós na rigidez do conjunto.

As observações finais e conclusões são conteúdos do último capítulo. É oportuno adiantar, que as diversas considerações arroladas, evidenciam que o Método das Diferenças Finitas, utilizando de rede de malhas arbitrárias, constitui uma alternativa de grande eficiência no estudo do comportamento de estruturas de edifícios altos através da Técnica do Meio Contínuo.

A documentação dos programas desenvolvidos e utilizados na resolução numérica dos diversos exemplos de aplicação apresentados encontra-se em apêndice.

## CAPÍTULO II

### TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

A Técnica do Meio Contínuo é aqui abordada em seus aspectos essenciais e de modo expedito. Assim, inicialmente apresenta-se o estudo do comportamento dos painéis típicos isolados, e suas associações planas. Por último é apresentado o estudo das associações tridimensionais, destacando o caso da associação só contendo pórticos, no intuito de chamar a atenção para alguns pormenores de grande importância no particular estudo objeto do capítulo V.

#### 2.2 - PAINEL PAREDE

Parede é um painel plano deformável predominantemente por momento fletor e de rigidez transversal desprezível. Além disso, apresenta deformação por força cortante insignificante e tem o seu comportamento, em termos práticos, descrito pela teoria técnica de flexão.

Para o que segue, considere-se a parede sujeita a uma carga continuamente distribuída  $q_w$  e uma eventual carga concentrada no topo  $P_w$ , conforme mostra-se na figura 2.1.a. Sob tal carregamento a deformada da parede apresenta concavidade voltada para sotavento, como mostra-se na figura 2.1.b. Além disso, por considerações de equilíbrio, tem-se (v. fig. 2.1.c):

$$\frac{dM_w}{dz} = -Q_w \quad \dots (2.1)$$

$$\frac{dQ_w}{dz} = -q_w \quad \dots (2.2)$$

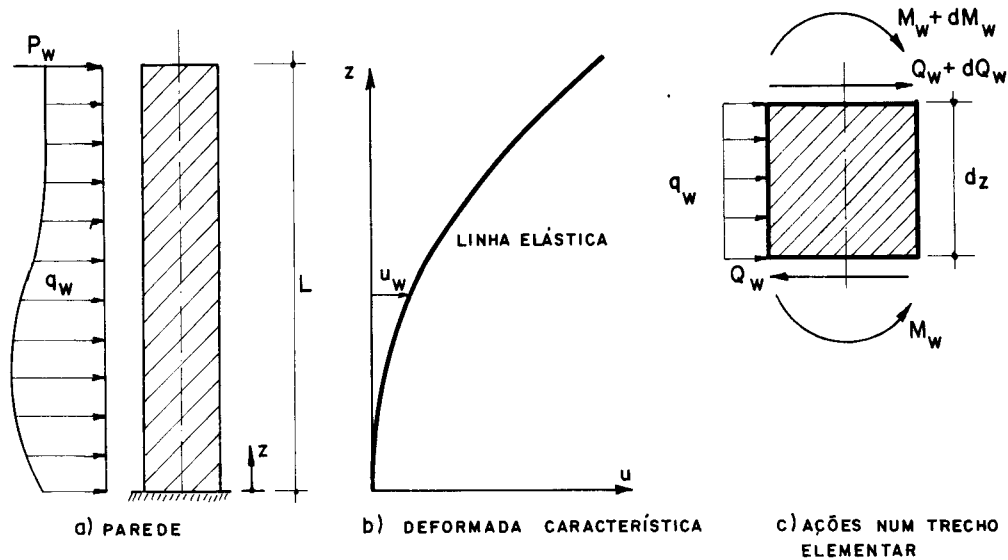


FIG. 2.1 - PAINEL PAREDE

Por outro lado, a teoria técnica da flexão permite escrever a relação momento-curvatura

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{M}{j_w} \quad \dots (2.3)$$

onde  $j_w$  é o produto de rigidez da parede  $EJ_w$ .

Combinando convenientemente as equações (2.1), e (2.3), chega-se à seguinte relação:

$$Q_w = -j_w \cdot \frac{d^3 u}{dz^3} \quad \dots (2.4)$$

lembrando, contudo, o fato de se considerar, dessa forma, invariável a rigidez da parede ao longo da altura.

### 2.3 - PAINEL PÓRTICO

Pórtico é um painel plano deformável predominantemente

temente por força cortante e que apresenta deformação por momento fletor desprezível; sendo também desprezível a rigidez transversal. Os painéis de contraventamento usuais que apresentam tais características são os pórticos regulares, onde a rigidez dos pilares não é exageradamente maior que a das vigas, e os painéis treliçados com diagonais bastante deformáveis, STAMATO (3).

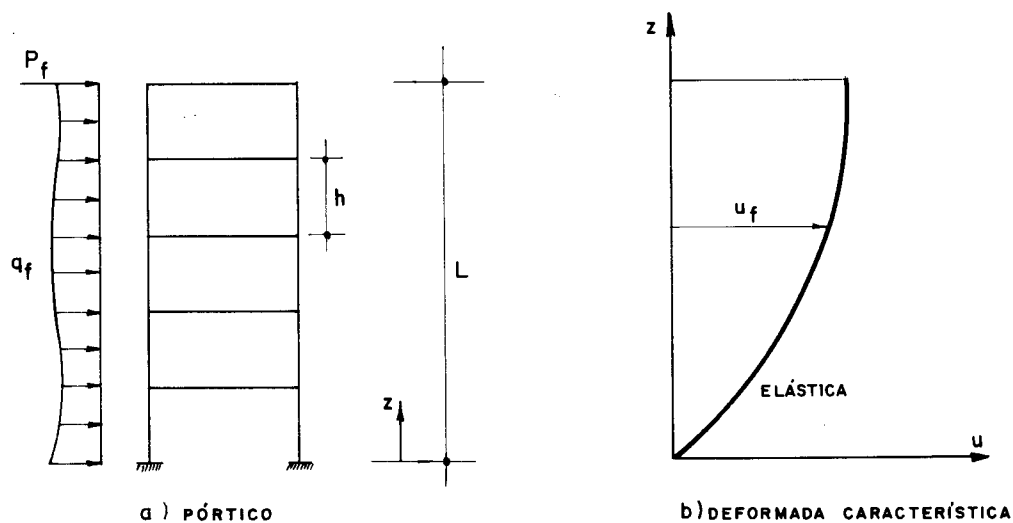


FIG. 2.2 - PAINEL PÓRTICO

Na figura 2.2.a, exibe-se um pórtico sujeito a um carregamento horizontal genérico constituído de uma carga  $q_f$  e uma eventual carga concentrada  $P_f$ , no topo. A elástica correspondente apresenta o aspecto mostrado na figura 2.2.b, com concavidade voltada para barlavento.

Assimilando o pórtico a um consolo vertical contínuo, em conformidade com as hipóteses da Técnica do Meio Contínuo, as considerações de equilíbrio são semelhantes àquelas feitas para a parede, por independermos do comportamento elástico. Em consequência, tem-se:

$$\frac{dM_f}{dz} = -Q_f \quad \dots (2.5)$$

$$\frac{dQ_f}{dz} = -q_f \quad \dots (2.6)$$

Por outro lado, a elástica está relacionada com o esforço solicitante através da expressão seguinte, STAMATO (2)

$$\frac{du_f}{dz} = \frac{Q_f}{s_f} \quad \dots (2.7)$$

Sendo que a rigidez  $s_f$ , no caso, por exemplo, dos pórticos regulares, é dada por:

$$s_f = \frac{12 \cdot E}{h} n \cdot a \left[ K_{p \cdot n} \cdot \frac{\sum K_v \cdot v \cdot n}{\sum K \cdot b \cdot n} \right] \quad \dots (2.8)$$

onde

$h$  = pé direito do andar.

$K$  = relação  $J/\ell$  ou  $J/h$  do tramo de viga ou pilar considerado, respectivamente.

$\sum_{n \cdot a}$  = somatória estendida a todos os nós do andar considerado.

$K_{p \cdot n}$  = relação  $J/h$  do tramo do pilar logo abaixo do nó considerado.

$\sum_{v \cdot n}$  = somatória que se estende aos tramos de vigas que concorrem no nó considerado.

$\sum_{b \cdot n}$  = somatória que se estende aos tramos de todas as barras que concorrem no nó considerado.

Vale lembrar que essa expressão resulta da consideração de momentos fletores nulos nos centros dos vãos de vigas e pilares, admitindo-se, naturalmente, iguais as rotações dos nós da viga de um dado andar, bem como dos nós consecutivos dos pilares. Tal consideração, implica em algumas discrepâncias de comportamento na base e no topo do painel, dadas as descontinuidades aí existentes. Todavia, tratam-se de discrepâncias, em geral, perfeitamente toleráveis em termos práticos, GRINTER (7). A propósito, no capítulo V desenvolve-se um estudo mais detalhado a esse respeito.



## 2.4 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE PAINÉIS

A associação de pórticos e paredes apresenta grande interesse prático. Um exame do comportamento desses painéis evidencia que eles se completam, pois a parede mostra-se pouco deformável na base e o pórtico pouco deformável no topo.

A união do pórtico à parede é aqui simulada através de barras biarticuladas indeformáveis, que representam, aproximadamente, o efeito das lajes. A exemplo dos estudos anteriores, o carregamento é constituído de uma carga  $q$  continuamente distribuída ao longo da altura e uma eventual carga concentrada  $P$ , no topo. Posto isso, as condições de equilíbrio são expressas por:

$$q = q_w + q_f \quad \dots (2.9)$$

$$Q = Q_w + Q_f \quad \dots (2.10)$$

$$M = M_w + M_f \quad \dots (2.11)$$

onde  $Q$  e  $M$  são a força cortante e o momento fletor provenientes do carregamento externo.

A figura 2.3.a, mostra o aspecto típico da associação aqui considerada; enquanto que a figura 2.3.b ilustra, de modo esquemático, o comportamento do conjunto em presença das elásticas dos painéis isolados, mostradas em linhas pontilhadas.

Em virtude do movimento solidário dos painéis assim associados ( $u = u_f = u_w$ ), e, tendo em vista as expressões (2.4), (2.7) e (2.10), torna-se lícito escrever:

$$Q = -j_w u''' + s_f u' \quad \dots (2.12)$$

sendo que as condições de contorno a serem satisfeitas pela solução correspondente são:

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dz}(0) = 0 \quad \dots (2.13)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}(L) = 0$$

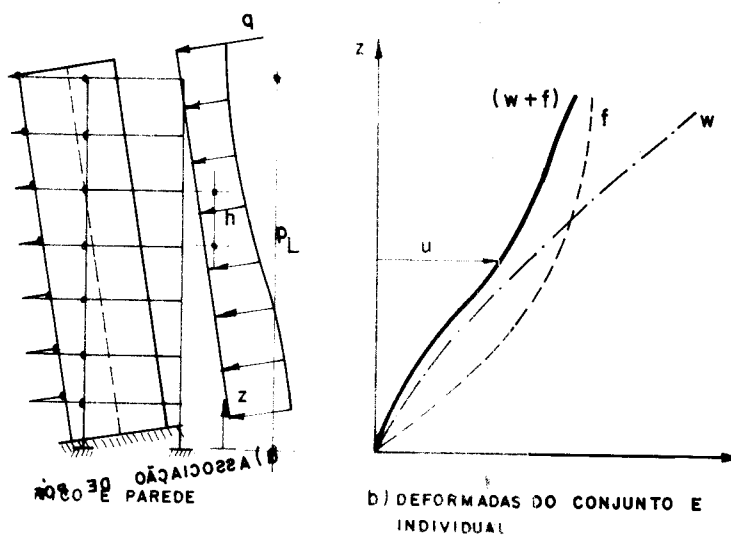


FIG. 2.17  
ASSOCIAÇÃO PLANA DE PAINÉIS

A primeira das condições diz respeito ao deslocamento nulo no plano da base. A segunda e terceira são imposições da parede; respectivamente, rotação nula no plano da base e curvatura nula no topo (engastamento da parede na base e momento fletor nulo no topo).

## 2.5 - ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PAINÉIS

A estrutura tridimensional de edifícios altos é idealizada, na Técnica do Meio Contínuo, como um conjunto de painéis verticais travados horizontalmente por uma infinidade de diafragmas uniformemente distribuídos ao longo da altura. Tais diafragmas, são considerados extremamente rígidos em seus planos e desprovidos de rigidez transver

sal, simulando, assim, o comportamento das lajes. Além disso, uma eventual parede de seção aberta ou núcleo resistente, pode ser substituída, STAMATO (8), por duas paredes planas independentes (vide fig. 2.4), passando pelo centro de torção e orientadas segundo os eixos principais de inércia  $W_1$  e  $W_2$ ; equivalentes, no que diz respeito à flexão, possuindo, por conseguinte, rigidezes  $EJ_1$  e  $EJ_2$ , respectivamente, onde  $J_1$  e  $J_2$  são os momentos principais de inércia da seção aberta.

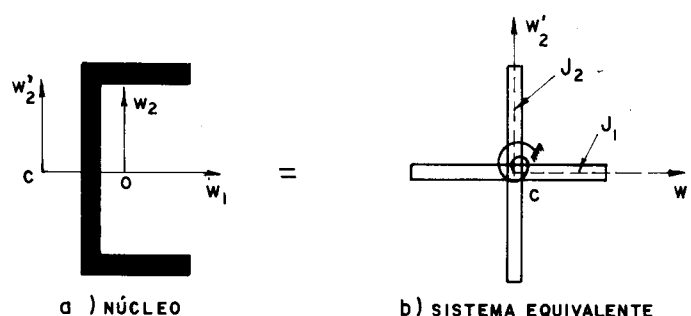


FIG. 2.4- PAREDE DE SEÇÃO ABERTA

A essas paredes, acrescenta-se ainda uma mola de torção com rigidezes  $GJ_t$  e  $EJ_\omega$  obtidas, respectivamente, pela teoria de Saint Venant e pela teoria de flexo torção. Convém ainda esclarecer que as possíveis interações verticais entre painéis que se interceptam não são aqui abordadas.

O carregamento atuante no conjunto é suposto contido num plano vertical  $\pi$  (vide fig. 2.5), consistindo de uma carga horizontal  $q$  continuamente distribuída ao longo da altura, acrescida, eventualmente, de uma carga concentrada  $P$  no topo, também horizontal.

Um sistema de eixos coordenados  $OXYZ$  com origem na base, sendo os eixos  $OX$  e  $OY$  horizontais e  $OZ$  vertical, é adotado para o conjunto. O carregamento é caracterizado nesse sistema mediante coordenadas  $a$ ,  $b$  e  $c$  de um versor horizontal do plano  $\pi$ , com o mesmo sentido do carregamento, onde  $a$  e  $b$  são os componentes deste versor segundo  $OX$  e  $OY$ , respectivamente e  $c$  é a distância do plano  $\pi$  ao eixo  $OZ$ ;

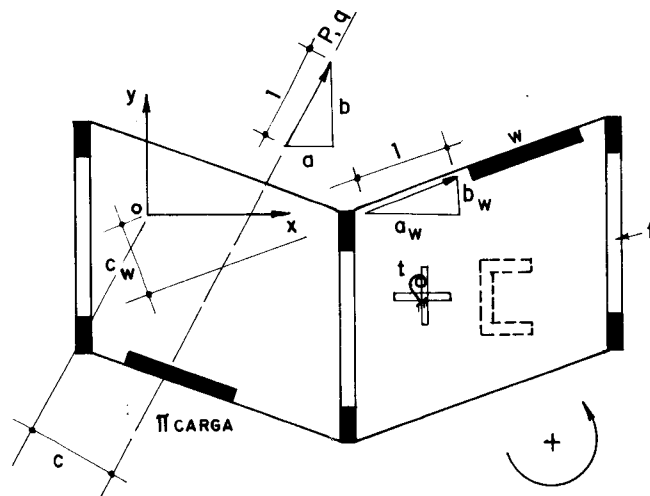


FIG. 2.5 - PLANTA DA ESTRUTURA

convencionada positiva se for dextrorso o momento de tal versor em relação ao eixo  $OZ$ .

Um sistema local de referência  $oxz$  é adotado para cada painel. A posição em planta de cada painel pode ser caracterizada pelas coordenadas  $a$ ,  $b$  e  $c$  de um versor horizontal, de sentido concordante com  $ox$ , contido no plano do painel e indexados de acordo com seu tipo específico -  $w$  para parede e  $f$  para pórtico -, sendo  $a$  e  $b$  as componentes de tal versor segundo  $OX$  e  $OY$ , e  $c$  é a distância do plano do painel ao eixo  $OZ$ , convencionada positiva se for dextrorso o momento do versor em relação ao eixo  $OZ$ .

Em conformidade com o modelo idealizado para o edifício, cada diafragma, suposto extremamente rígido em seu plano, pode experimentar três movimentos independentes, ou seja, uma rotação segundo o eixo  $OZ$  e translações segundo os eixos  $OX$  e  $OY$ . Assim, chamando de  $Oz$  o ponto onde o eixo  $OZ$  intercepta o plano do diafragma genérico de cota  $Z$ , definem-se os movimentos:

- a)  $u$  é o movimento de  $Oz$  segundo  $OX$ .
- b)  $v$  é o movimento de  $Oz$  segundo  $OY$ .
- c)  $w$  é a rotação do diafragma segundo  $OZ$ .

Deste modo, tais movimentos, funções da variável Z, caracterizam o estado de deslocamento do conjunto.

Posto isto, por superposição dos efeitos de u, v e w, obtêm-se os deslocamentos dos painéis p<sub>ó</sub>r<sub>t</sub>ico e p<sub>a</sub>r<sub>e</sub>de, e da mola gen<sub>é</sub>rica, como funções lineares de u, v e w, ou seja:

$$\begin{aligned}u_w &= a_w \cdot u + b_w \cdot v + c_w \cdot w \\u_f &= a_f \cdot u + b_f \cdot v + c_f \cdot w \quad \dots (2.14) \\w_t &= w\end{aligned}$$

Cabe ressaltar que a mola gen<sub>é</sub>rica é um elemento idealizado capaz de receber apenas momento de torç<sub>ã</sub>o  $M_t$ , convencionado positivo no sentido dextrorso, segundo OZ. A partir destas consideraç<sub>õ</sub>es, a equaç<sub>ã</sub>o diferencial das rotaç<sub>õ</sub>es  $w_t$  da mola, dada pela teoria de flexo torç<sub>ã</sub>o, LANGENDONCK (9), assim se expressa:

$$M_t = s_t w_t' - j_t w_t''' \quad \dots (2.15)$$

onde  $s_t$  e  $j_t$  representam, respectivamente, os produtos  $GJ_t$  e  $EJ_w$  da parede de seç<sub>ã</sub>o aberta equivalente à mola dada, no que respeita à sollicitaç<sub>ã</sub>o por torç<sub>ã</sub>o.

Levando-se em conta que Q é a resultante das forç<sub>a</sub>s externas aplicadas acima da cota Z, o equil<sub>í</sub>br<sub>i</sub>o da parte do edif<sub>í</sub>cio acima desta cota, conduz às seguintes relaç<sub>õ</sub>es, segundo, respectivamente, os eixos coordenados OX, OY e OZ:

$$\begin{aligned}\sum_1^{n_w} Q_w a_w + \sum_1^{n_f} Q_f a_f &= Q \cdot a \\ \sum_1^{n_w} Q_w b_w + \sum_1^{n_f} Q_f b_f &= Q \cdot b\end{aligned}$$

$$\sum_1^{n_w} Q_w c_w + \sum_1^{n_f} Q_f c_f + \sum_1^{n_t} M_t = Q \cdot c \quad \dots (2.16)$$

onde os índices  $n_w$ ,  $n_f$  e  $n_t$  representam, respectivamente, o número de paredes, pórticos e molas de torção presentes no conjunto.

Tendo em vista as equações (2.4), (2.7), (2.15) e (2.14), os esforços cortantes nos painéis passam a ser relacionados com os movimentos do conjunto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Q_w &= -j_w (a_w u''' + b_w v''' + c_w w''') \\ Q_f &= s_f (a_f u' + b_f v' + c_f w') \quad \dots (2.17) \\ M_t &= s_t w' - j_t w''' \end{aligned}$$

que, substituídas em (2.16), levam ao sistema de equações diferenciais que rege o comportamento do conjunto:

$$- [J] \cdot [U'''] + [S] [U'] = Q \cdot [A] \quad \dots (2.18)$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc}^* \end{bmatrix} \quad \dots (2.19)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ca} & S_{cb} & S_{cc}^* \end{bmatrix} \quad \dots (2.20)$$

$$J_{de} = \sum_1^{n_w} j_w \cdot d_w \cdot e_w$$

$$S_{de} = \sum_1^{n_f} s_f \cdot d_f \cdot e_f \quad \dots (2.21)$$

$$J_{cc}^* = J_{cc} + \sum_1^{n_t} j_t$$

$$S_{cc}^* = S_{cc} + \sum_1^{n_t} s_t$$

com "d" e "e" podendo ser qualquer uma das coordenadas dos painéis a, b e c. Ainda na equação (2.18), definem-se os vetores:

$$[U] = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \dots (2.22)$$

$$[A] = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad \dots (2.23)$$

onde em  $[U]$  estão contidos os movimentos do conjunto e em  $[A]$ , as coordenadas geométricas do carregamento.

As condições de contorno relativas a esse tipo de associação de painéis, exprimem-se:

a) Deslocamento nulo na base da associação

$$u(o) = 0$$

$$v(o) = 0 \quad \dots (2.24)$$

$$w(o) = 0$$

b) Pela presença de um conjunto de paredes suposto não degenerado, as derivadas dos deslocamentos na base devem ser nulas, ou seja:

$$\begin{aligned}u'(0) &= 0 \\v'(0) &= 0 \quad \dots (2.25) \\w'(0) &= 0\end{aligned}$$

c) No topo, por serem nulos os momentos nas paredes, tem-se:

$$\begin{aligned}u''(L) &= 0 \\v''(L) &= 0 \quad \dots (2.26) \\w''(L) &= 0\end{aligned}$$

As matrizes  $[J]$  e  $[S]$  podem ser diagonalizadas mediante a escolha de convenientes sistemas de referência: um para o conjunto de paredes e um para o conjunto de pórticos. Em estruturas com dois planos de simetria tais sistemas coincidem, e, nesse caso particular, denominam-se, geralmente, de eixos centrais da estrutura. Assim, as matrizes  $[J]$  e  $[S]$  experimentam diagonalização simultânea, conduzindo, por conseguinte, a um sistema de equações diferenciais desacoplado nos movimentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Um caso particular que merece destaque é aquele em que a estrutura é constituída apenas de pórticos. Assim sendo, em relação aos eixos centrais do conjunto, agora só de pórticos, as equações (2.16) passam a escrever-se:

$$\begin{aligned}S_{aa} \cdot u' &= Q \cdot a \\S_{bb} \cdot v' &= Q \cdot b \quad \dots (2.27) \\S_{cc} \cdot w' &= Q \cdot c\end{aligned}$$



Por outro lado, as condições de contorno impostas pelo conjunto de paredes deixam de existir, e, assim, as condições de contorno restantes são apenas referentes à indeslocabilidade do conjunto na base, ou seja:

$$\begin{aligned}u(o) &= 0 \\v(o) &= 0 \qquad \dots (2.28) \\w(o) &= 0\end{aligned}$$

Finalizando, observe-se, ainda, que o caso particular de estrutura constituída apenas de p $\ddot{o}$ r $\ddot{t}$ icos n $\tilde{a}$ o corresponde, rigorosamente, a um caso limite com a rigidez do conjunto de paredes tendendo para zero; pois, dessa forma, permaneceria a condi $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ o de rota $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ o nula na base. Essa situa $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ o singular ocorre tamb $\tilde{e}$ m em outros casos, onde eventuais degenera $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s do conjunto de paredes implicam na elimina $\tilde{c}$ o $\tilde{a}$ o de algumas condi $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s de contorno, STAMATO (2).

### CAPÍTULO III

#### OPERADORES DE DIFERENÇAS

##### 3.1 - INTRODUÇÃO

O Método das Diferenças Finitas constitui, de um modo geral, uma alternativa sugestiva e de grande eficiência no tratamento numérico de equações diferenciais. Tal tratamento consiste, basicamente, na determinação de valores da função desconhecida em um certo número de pontos contidos no domínio de integração. A literatura clássica, em geral, aborda o assunto segundo a formulação lagrangeana na FORSHYTE (10), YOUNG (11), SALVADORI (12), KETTER (13), CURTIS (14), e, além disso, mediante a utilização de rede de malhas regulares, que corresponde, naturalmente, a uma configuração com pontos igualmente espaçados. Convém esclarecer que a utilização de rede de malhas regulares permite, por exemplo, explicitar a ordem do erro contido na solução; todavia, apresenta inconvenientes em domínios de contorno irregular, bem como, não permite um estudo localizado com mais requinte sem um conseqüente aumento do trabalho numérico, LAIER (17). Tais inconvenientes deixam de existir, mediante a utilização de rede de malhas arbitrárias, HURLEY (15), PERRONE (16), (17), tornando, no entanto, desconhecida a ordem do erro contido na solução. Entretanto, esse particular inconveniente, comum também a outros métodos de integração numérica como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos, não representa grande restrição em termos práticos.

Os operadores de diferenças para rede de malhas arbitrárias são aqui desenvolvidos de acordo com os conceitos de interpolação lagrangeana (11). Dessa forma, as derivadas da função desconhecida passam a ser expressas, de maneira aproximada, em termos das correspondentes derivadas

da função interpoladora, que consiste, naturalmente, num polinômio cujo grau depende do número de pontos envolvidos na interpolação.

De início, são desenvolvidos os operadores de derivadas ordinárias, mostrando, em seguida, pormenores referentes aos diversos tipos de operadores: operador central, ascendente e descendente. Na sequência, formulam-se as equações diferenciais da Técnica do Meio Contínuo mediante operadores de diferenças. Finalizando, apresenta-se um breve comentário a respeito da distribuição dos pontos no domínio de integração, bem como, detalhes relativos à montagem do sistema de equações lineares resultante e alguns pormenores computacionais.

### 3.2 - OPERADORES DE DERIVADAS ORDINÁRIAS

Pretende-se, aqui, ressaltar apenas alguns pormenores da formulação matemática do Método das Diferenças Finitas, que atentam para o lado prático. Para tanto considere-se, por exemplo, a função genérica  $f(x)$  indicada na figura 3.1, cujo valor  $y = f(x)$  é conhecido, por exemplo, em  $n+1$  valores distintos da variável  $x$ . Admitindo-se que a função em tela e suas derivadas apresentam continuidade, o polinômio interpolador de grau  $n$

$$y_a(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1} \dots (3.1)$$

que assume para aqueles valores de variável  $x$  o mesmo valor da função  $f(x)$ , constitui uma aproximação dessa função, DEMIDOVICH (18). O polinômio interpolador será tanto mais próximo da função real quanto menor for o intervalo de interpolação; ou, de outro modo, para um mesmo intervalo, quanto maior for o grau do polinômio - o que implica,

naturalmente, em um número maior de pontos considerados na interpolação:

Posto isto, tem-se:

$$y(x) \approx y_a(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1} \quad \dots (3.2)$$

ou, em notação matricial

$$y(x) \approx y_a(x) = \{x\}^T \cdot \{a\} \quad \dots (3.3)$$

sendo

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x^n \\ x^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots (3.4)$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{Bmatrix}$$

O caráter aproximado do polinômio interpolador é transferido em grau menor para os níveis de derivadas. Assim, tem-se, por exemplo:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &\tilde{=} y'_a(x) = \frac{d}{dx} \{x\}^T \{a\} \\
 y''(x) &\tilde{=} y''_a(x) = \frac{d^2}{dx^2} \{x\}^T \{a\} && \dots (3.5) \\
 &\vdots && \vdots \\
 &\vdots && \vdots \\
 &\vdots && \vdots \\
 y^n(x) &\tilde{=} y^n_a(x) = \frac{d^n}{dx^n} \{x\}^T \{a\}
 \end{aligned}$$

A condição de interpolação permite, por outro lado, relacionar os parâmetros generalizados contidos na matriz  $\{a\}$  com os valores conhecidos da função, porquanto, tal condição implica em (v. fig. 3.1)

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_a(x_1) \\
 y_2 &= y_a(x_2) && \dots (3.6) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 y_{n+1} &= y_a(x_{n+1})
 \end{aligned}$$

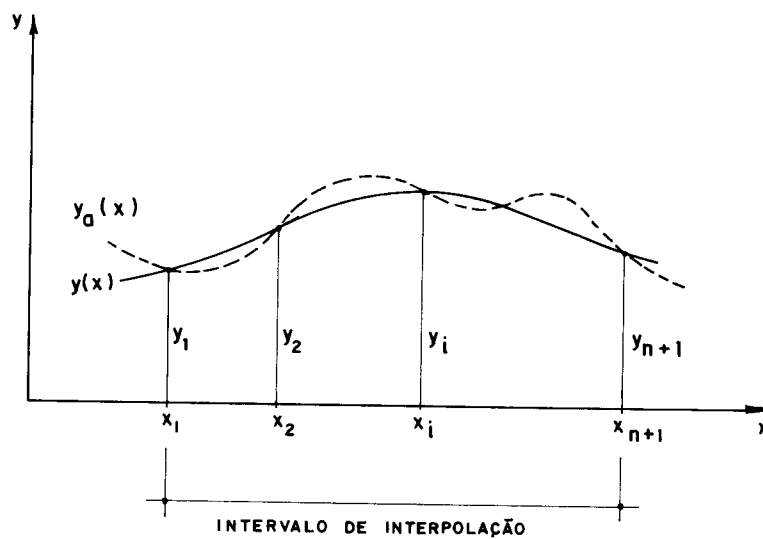


FIG. 3.1 - DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO INTERPOLADORA

A mesma condição de interpolação escrita em forma matricial resulta:

$$\{y\} = [X] \cdot \{a\} \quad \dots (3.7)$$

onde

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n+1} \end{Bmatrix} \quad \dots (3.8)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes da função aproximadora podem ser determinados a partir do sistema expresso em (3.7), tendo-se em vista a não singularidade da matriz  $[X]$ , (11), portanto:

$$\{a\} = [C] \cdot \{y\} \quad \dots (3.9)$$

sendo

$$[C] = [X]^{-1}$$

Finalmente, considerando-se as expressões (3.9) e (3.3), o polinômio interpolador passa a ser expresso por:

$$y_a(x) = \{x\}^T \cdot [C] \cdot \{y\} \quad \dots (3.10)$$

O procedimento de colocar a função aproximadora em termos de parâmetros homogêneos  $\{y\}$  (parâmetros de mesma dimensão), até aqui exposto, é comum em outros métodos de integração numérica; no entanto, tais métodos assumem características próprias a partir do modo segundo o qual são obtidos os valores numéricos da função desconhecida, presentes no vetor  $\{y\}$ . No Método das Diferenças Finitas, o procedimento que leva à determinação dos parâmetros desconhecidos, contidos no vetor  $\{y\}$ , consiste, basicamente, na substituição das derivadas presentes na equação diferencial pelos operadores de derivadas da função aproximadora adotada. Assim, a condição expressa na equação diferencial passa a ser, num certo ponto  $i$  genérico da malha, dada por uma combinação linear dos valores da função no ponto  $i$  e em seus vizinhos. Analogamente, as condições de contorno, por sua vez, também passam a ser expressas nessa forma. Posto isso, o conjunto formado por todas as relações, no domínio correspondentes à equação diferencial e no contorno pelas relações correspondentes em termos de diferenças, conduz ao sistema de equações lineares nos parâmetros indeterminados contidos no vetor  $\{y\}$ . Cabe esclarecer que, a toda malha dada, corresponde, sempre, um número de relações compatíveis com o número de parâmetros indeterminados.

Neste trabalho, face à utilização da rede de malhas arbitrárias, a expressão (3.10) assume algumas características que devem ser comentadas.

Em primeiro lugar, cabe ressaltar que os nós, ou pontos, da malha arbitrária encontram-se caracterizados geometricamente por meio de suas coordenadas  $x_i$ . Todavia, torna-se mais conveniente tratar da interpolação no subdomínio que contém o ponto  $i$  e os seus vizinhos mediante coordenadas locais, referidas a uma origem suposta no ponto  $i$ . Assim, as novas coordenadas são dadas por:

$$\eta_j = x_j - x_i \quad \dots (3.11)$$

com  $j$  variando, naturalmente, segundo o número de pontos vizinhos considerados na interpolação. Nessa nova coordenada, as condições estabelecidas anteriormente em (3.6) passam a escrever-se:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_i \\ y(\eta_1) &= y_{i+1} \\ y(\eta_2) &= y_{i+2} \quad \dots (3.12) \\ &\vdots \\ y(\eta_n) &= y_{i+n} \end{aligned}$$

Da primeira dessas condições segue, de modo imediato, que:

$$a_{n+1} = y_i$$

e, deste modo, o sistema (3.7) pode ser escrito na forma:

$$\begin{Bmatrix} y_{i+1} - y_i \\ y_{i+2} - y_i \\ \vdots \\ y_{i+n} - y_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1^n & \eta_1^{n-1} & \dots & \eta_1 \\ \eta_2^n & \eta_2^{n-1} & \dots & \eta_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \eta_n^n & \eta_n^{n-1} & \dots & \eta_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

ou, de maneira condensada

$$\{y\}_i = [M]_i \{a\}_i \quad \dots (3.13)$$

Finalmente, a expressão (3.10), em termos da nova coordenada passa a ser dada por:

$$y(\eta)_a = \{\eta\}^T [C]_i \{y\}_i \quad \dots (3.14)$$



onde

$$\{ \eta \}_i = \begin{Bmatrix} \eta^n \\ \eta^{n-1} \\ \vdots \\ \eta \end{Bmatrix} \quad \dots (3.15)$$

$$[c]_i = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,n} \end{bmatrix} = [M]_i^{-1} \quad \dots (3.16)$$

Com base na expressão (3.14), obtêm-se as derivadas sucessivas da função aproximadora da maneira seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{dy_a}{d\eta} &= \left( \frac{d}{d\eta} \{ \eta \}^T \right) [c]_i \{ y \}_i \\ \frac{d^2 y_a}{d\eta^2} &= \left( \frac{d^2}{d\eta^2} \{ \eta \}^T \right) [c]_i \{ y \}_i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{d^n y_a}{d\eta^n} &= \left( \frac{d^n}{d\eta^n} \{ \eta \}^T \right) [c]_i \{ y \}_i \end{aligned} \quad \dots (3.17)$$

onde, em particular, na origem  $i$ , tendo em vista que  $\eta_i = x_i - x_i = 0$ , segue, de modo imediato, que:

$$\frac{d}{d\eta}\{\eta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\{\eta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots (3.18)$$

$$\frac{d^3}{d\eta^3}\{\eta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nas expressões (3.17), os produtos

$$\left(\frac{d^j}{d\eta^j}\{\eta\}\right) [C]_i \dots (3.19)$$

com  $j$  indicando, agora, o grau de derivação, exprimem em forma matricial os operadores de derivadas.

A matriz  $[M]_i$  presente na expressão (3.13), e consequentemente a matriz  $[C]_i$  presente na expressão (3.14), assume particulares características dependendo da posição do nó  $i$  em relação aos nós vizinhos. Basicamente, existem três configurações de interesse, e que são, no presente trabalho, consideradas:

- a) configuração ascendente, onde os nós vizinhos encontram-se no sentido crescente da variável  $\eta$  ( $\eta_j$  é positivo para todo  $j$  considerado - vide expressão 3.11);

- b) configuração central, onde o nó  $i$  ocupa posição central, ou seja, o número de nós vizinhos no sentido decrescente da variável  $\eta$  é o mesmo que o do sentido crescente da variável  $\eta$ . Isso implica, naturalmente, num número ímpar de pontos a serem considerados.
- c) configuração descendente, onde os nós vizinhos encontram-se no sentido decrescente da variável  $\eta$  ( $\eta_j$  é negativo para todo  $j$  considerado - vide expressão (3.11)).

Aquelas características e, inclusive, outros por menores de interesse no desenvolvimento dos procedimentos computacionais são objeto dos itens seguintes.

### 3.2.1 - Operadores ascendentes de derivadas

A fig. 3.2 exhibe, de um modo genérico, a configuração de pontos vizinhos situados no sentido crescente da variável  $\eta$ .

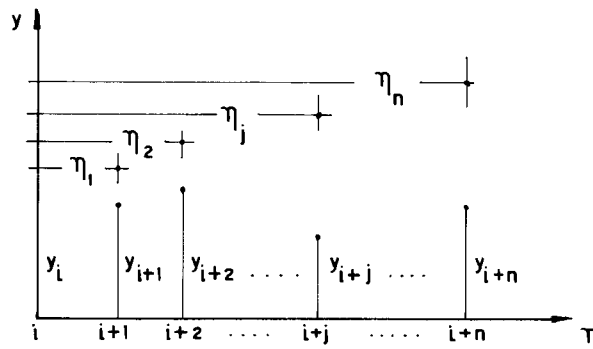


FIG.3.2 - DISTRIBUIÇÃO ASCENDENTE DE PONTOS

A indexação ordenada permite exprimir as coordenadas dos nós vizinhos através do algoritmo (vide fig. 3.2):

$$\eta_j = x_{i+j} - x_i \quad \dots (3.20)$$

com  $j$  variando, naturalmente de 1 a  $n$ . Por outro lado, as três primeiras derivadas no ponto  $i$  passam a ser, tendo em vista as expressões (3.17) e (3.18), expressas através dos algoritmos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{j=1}^n C_{n,j} y_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot y_i \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} y_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot y_i \right] \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= 6 \cdot \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} y_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot y_i \right] \\ &\dots (3.21) \end{aligned}$$

lembrando, outrossim, que  $n$  é o grau do polinômio interpolador e, ao mesmo tempo, o número de pontos vizinhos considerados.

### 3.2.2 - Operadores centrais de derivadas

Na figura 3.3, ilustra-se uma distribuição de pontos onde o ponto  $i$  ocupa, agora, a posição central (central no sentido de que existe o mesmo número de pontos vizinhos antes e depois deste ponto).

Adota-se para os pontos em consideração uma indexação ordenada do sentido negativo para o positivo. Todavia, a indexação das coordenadas dos pontos em relação ao ponto  $i$  segue uma ordenação alternada, conforme indica-se na figura 3.3. Assim, os algoritmos de geração das coordenadas exprimem-se:

$$\begin{aligned} \eta_{2j-1} &= x_{i+j} - x_i \\ \eta_{2j} &= x_{i-j} - x_i \end{aligned} \dots (3.22)$$

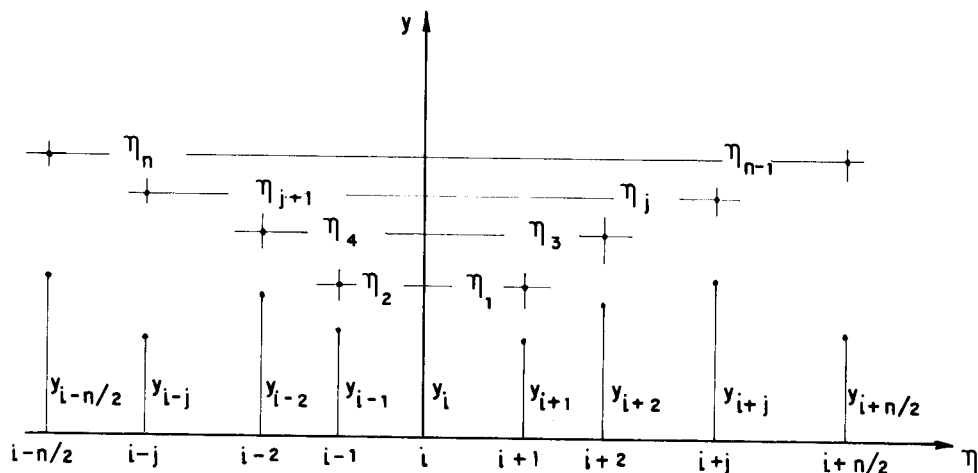


FIG. 3.3 - DISTRIBUIÇÃO CENTRAL DE PONTOS

com  $j$  variando entre os valores 1 a  $n/2$ .

Por outro lado, convém notar que o vetor  $\{y\}_i$  passa a assumir, nesse caso, a seguinte formação (vide expressões (3.12)):

$$\{y\}_i = \begin{Bmatrix} y_{i+1} - y_i \\ y_{i-1} - y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{i+\frac{n}{2}} - y_i \\ y_{i-\frac{n}{2}} - y_i \end{Bmatrix} \dots (3.23)$$

Com essas considerações, as expressões das três primeiras derivadas no ponto  $i$ , tendo em vista as expressões (3.17) e (3.18), assumem a forma:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot y_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2 \cdot j} \cdot y_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot y_i$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1, 2 \cdot j - 1} \cdot y_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1, 2 \cdot j} \cdot y_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1, j} \right) \cdot y_i \right]$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 6 \cdot \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2, 2 \cdot j - 1} \cdot y_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2, 2 \cdot j} \cdot y_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2, j} \right) \cdot y_i \right]$$

.... (3.24)

É conveniente esclarecer que o procedimento aqui seguido, mostra-se sugestivo do ponto de vista computacional, pois os algoritmos aí envolvidos são bastante expeditos, e, além disso levam a matrizes melhor condicionadas, em geral.

### 3.2.3 - Operadores descendentes de derivadas

A figura 3.4 ilustra o caso em que a distribuição dos pontos vizinhos ao ponto  $i$  segue o sentido decrescente da variável  $\eta$ .

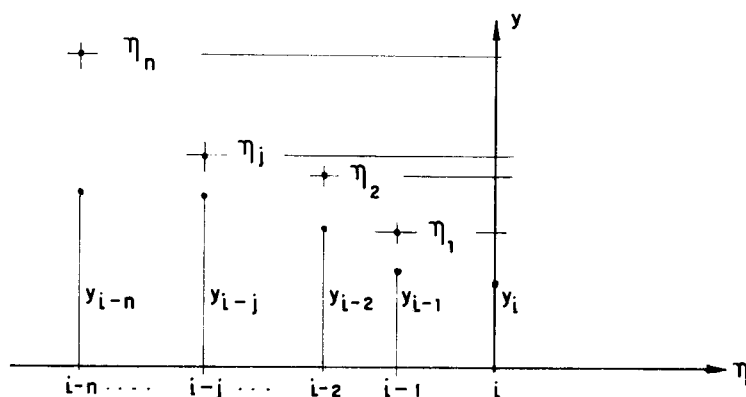


FIG. 3.4 - DISTRIBUIÇÃO DESCENDENTE DOS PONTOS

A indexação das coordenadas dos nós é, neste caso, ordenada no sentido negativo, e dada por:

$$\eta_j = x_{i-j} - x_i \quad \dots (3.25)$$

com  $j$  variando do valor 1 ao valor  $n$ .

Como consequência desta distribuição de pontos, o vetor  $\{y\}_i$  assume, agora, a seguinte formação:

$$\{y\}_i = \begin{Bmatrix} y_{i-1} - y_i \\ y_{i-2} - y_i \\ \vdots \\ y_{i-n} - y_i \end{Bmatrix} \quad \dots (3.26)$$

A partir dessas considerações, as expressões das três primeiras derivadas no ponto  $i$ , tendo em vista as expressões (3.17) e (3.18), passam a escrever-se:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot y_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot y_i \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot y_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot y_i \right] \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= 6 \cdot \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot y_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot y_i \right] \end{aligned} \quad \dots (3.27)$$

Finalizando, é oportuno ressaltar que os operadores de diferenças ascendentes, centrais e descendentes colocados na forma apresentada, respectivamente, em (3.21), (3.24) e (3.27), mostram-se bastante apropriados aos procedimentos computacionais. Convém adiantar que, nesse particular, maiores detalhes são dados mais adiante, em 3.4.

### 3.3 - ANÁLISE DA ASSOCIAÇÃO DE PAINÉIS MEDIANTE OPERADORES DE DIFERENÇAS

Os operadores de derivadas, já formulados, encontram aplicação imediata na resolução numérica das equações diferenciais ordinárias, resultantes do estudo da associação plana de painéis segundo a Técnica do Meio Contínuo. Em particular, a integração numérica do sistema de equações diferenciais, que governa o comportamento da associação tridimensional de painéis, exige, ainda, cuidados adicionais referentes à montagem do correspondente sistema de equações lineares.

No intuito de tornar os estudos desenvolvidos nos itens seguintes mais abrangentes, faz-se uso, doravante, da variável adimensional

$$\xi = \frac{z}{L} \quad \dots (3.28)$$

onde  $L$  é a altura do edifício e  $z$  a variável dimensional até agora considerada. Dessa forma, o domínio de integração torna-se, por conseguinte, restrito ao intervalo real de zero a um.

#### 3.3.1 - Associação plana de painéis

A associação plana de pórtico e parede, tratada em detalhe no item 2.4, tem o seu comportamento descrito pela equação diferencial (2.12), que em termos da variável adimensional ganha a seguinte forma:

$$-u'''' + \lambda u' = \frac{QL^3}{j_w} \quad \dots (3.29)$$

onde

$$\lambda = L^2 \cdot \frac{s_f}{j_w} \quad \dots (3.30)$$



sendo que as condições de contorno dadas pelas expressões (2.13) passam, agora, a ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \quad \dots (3.31) \\ u''(1) &= 0 \end{aligned}$$

O parâmetro  $\lambda$  expresso em (3.30), que relaciona as rigidezes dos painéis p $\bar{o}$ rtico e parede, merece algumas considerações. Em primeiro lugar, fixando-se, por exemplo, o valor da rigidez do p $\bar{o}$ rtico, tal parâmetro indica a maior ou menor participação da parede no conjunto. Além disso, esse parâmetro pode experimentar variação ao longo da altura, na medida em que a rigidez de um ou outro painel também a experimente.

Por outro lado, os esforços internos nos painéis, considerando-se o emprego da variável adimensional, passam a ser dados por:

$$\begin{aligned} M_w &= \frac{j_w}{L^2} \cdot u'' \\ Q_w &= -\frac{j_w}{L^3} \cdot u''' \quad \dots (3.32) \\ Q_f &= \frac{s_f}{L} \cdot u' \end{aligned}$$

onde  $M_w$ ,  $Q_w$  e  $Q_f$  são, respectivamente, o momento fletor na parede, a força cortante na parede e a força cortante no p $\bar{o}$ rtico.

Substituindo as derivadas contidas na equação diferencial (3.29) pelos correspondentes operadores, tem-se:

$$\left( -\frac{d^3}{d\eta^3} \{\eta\}^T \cdot [C]_i + \lambda \cdot \frac{d}{d\eta} \{\eta\}^T [C]_i \right) \cdot \{u\}_i = \frac{Q_i \cdot L^3}{j_w} \quad \dots (3.33)$$

ou ainda

$$[D]_i \{u\}_i = \frac{Q_i \cdot L^3}{j_w}$$

onde

$$[D]_i = - \frac{d^3}{d\eta^3} \{\eta\}^T [C]_i + \lambda \cdot \frac{d}{d\eta} \{\eta\} \cdot [C]_i \dots (3.34)$$

representa, em forma matricial, o operador de diferenças, por assim dizer, da equação diferencial. Tal operador apresenta algumas particularidades interessantes, a serem assinaladas, principalmente no que diz respeito aos algoritmos correspondentes às três possíveis configurações dos pontos vizinhos ao ponto  $i$ , adotadas neste trabalho. Vale esclarecer, em tempo, que  $Q_i$  é a resultante das cargas externas na altura do ponto  $i$ .

Assim, em correspondência à configuração ascendente, a expressão (3.33), na sua forma desenvolvida, assume o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} \frac{Q_i \cdot L^3}{j_w} = & \left( -6 \cdot \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} u_{i+j} + \lambda \cdot \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} \right) + \\ & + \left( 6 \cdot \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} - \lambda \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \dots (3.35) \end{aligned}$$

Ainda, tendo-se em vista a configuração ascendente, os esforços internos nos painéis, dados pela expressão (3.32), escrevem-se:

$$\begin{aligned} \frac{M_{w_i} \cdot L^2}{j_w} = & 2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \right] \cdot u_i \\ \frac{Q_{w_i} \cdot L^3}{j_w} = & -6 \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot u_i \right] \end{aligned}$$

$$\frac{Q_{f_i} \cdot L}{s_f} = \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \quad \dots (3.36)$$

De outro modo, sendo considerada, agora, a configuração central, a expressão (3.33) desenvolvida, passa a escrever-se:

$$\begin{aligned} \frac{Q_i \cdot L^3}{j_w} = & \left[ -6 \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2, 2j-1} \cdot u_{i+j} + \lambda \sum_{j=1}^{n/2} C_{n, 2j-1} \cdot u_{i+j} \right] + \\ & + \left[ -6 \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2, 2j} \cdot u_{i-j} + \lambda \sum_{j=1}^{n/2} C_{n, 2j} \cdot u_{i-j} \right] + \\ & + \left[ +6 \cdot \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2, j} \right) - \lambda \left( \sum_{j=1}^n C_{n, j} \right) \right] \cdot u_i \quad \dots (3.37) \end{aligned}$$

Os esforços nos painéis, em correspondência à mesma configuração central, passam a ser dados por:

$$\frac{M_{w_i} \cdot L^2}{j_w} = 2 \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1, 2j-1} \cdot u_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1, 2j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1, j} \right) u_i \right]$$

$$\frac{Q_{w_i} \cdot L^3}{j_w} = -6 \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2, 2j-1} \cdot u_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2, 2j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2, j} \right) \cdot u_i \right]$$

$$\frac{Q_{f_i} \cdot L}{s_f} = \sum_{j=1}^{n/2} C_{n, 2j-1} \cdot u_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n, 2j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n, j} \right) \cdot u_i \quad \dots (3.38)$$

Analogamente aos dois procedimentos anteriores, a consideração de uma configuração descendente de pontos vizinhos ao ponto  $i$  leva a uma particularização da expressão (3.33), que, desenvolvida segundo os operadores correspondentes, fica escrita na forma:

$$\frac{Q_i \cdot L^3}{j_w} = \left[ -6 \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot u_{i-j} + \lambda \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i-j} \right] + \left[ +6 \sum_{j=1}^n C_{n-2,j}^{-\lambda} \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right] \cdot u_i \quad \dots (3.39)$$

e também os esforços têm suas expressões alteradas para:

$$\begin{aligned} \frac{M_{w_i} \cdot L^2}{j_w} &= 2 \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot u_i \right] \\ \frac{Q_{w_i} \cdot L^3}{j_w} &= -6 \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot u_i \right] \\ \frac{Q_{f_i} \cdot L}{s_f} &= \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \quad \dots (3.40) \end{aligned}$$

A condição de contorno que exprime a indeslocabilidade do conjunto na base, primeira das (3.31), é, em termos de diferenças, imediata, porquanto implica na nulidade do deslocamento do nó situado na base. Por sua vez, a condição de rotação nula na base, segunda das expressões (3.31) exprime-se, em termos de diferenças ascendentes, na forma:

$$\sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i = 0 \quad \dots (3.41)$$

Por último a condição de contorno que implica em curvatura do conjunto nula no topo, terceira das equações (3.31), exprime-se, em termos, agora, de diferenças descendentes, na

seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^n C_{n-1,j} u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot u_i = 0 \dots (3.42)$$

Finalizando, cabe observar que as diferentes formulações da equação diferencial (3.33) em termos de diferenças, tem o seu emprego definido de acordo com a colocação do nó em consideração na malha de pontos. Assim, por exemplo, para os nós próximos à base utiliza-se a formulação ascendente, para os nós próximos do topo a formulação descendente e para os demais nós, a formulação central. Vale ainda esclarecer, que o termo próximo, aqui empregado, é quantificável em função do grau do polinômio aproximador considerado. Essas e outras observações são objeto de maiores comentários no ítem 3.4, em que se propõe esclarecer os aspectos computacionais pertinentes à programação do método em questão.

### 3.3.2 - Associação tridimensional de painéis

Conforme mostrado no item 2.5, o comportamento da estrutura tridimensional de edifícios altos pode ser estudado, segundo a Técnica do Meio Contínuo, através da solução de um sistema de três equações diferenciais. Tal sistema, expresso na forma (2.18), passa, em termos de variável adimensional, a escrever-se:

$$- \{U'''\} + [K] \{U'\} = \{Q^*\} \dots (3.43)$$

onde os vetores  $\{U'''\}$  e  $\{U'\}$ , de ordem  $3 \times 1$ , contêm as derivadas das componentes do estado de deslocamento da estrutura ( $u$ ,  $v$  e  $w$ ). Por sua vez, a matriz  $[K]$ , de ordem  $3 \times 3$ , é dada por:

$$[K] = L^2 \cdot [J]^{-1} \cdot [S] \dots (3.44)$$

lembrando, outrossim, que as matrizes  $[J]$  e  $[S]$  foram definidas, respectivamente, pelas expressões (2.19) e (2.20). Em particular, a matriz  $[K]$  pode ser constituída de valores constantes, no caso em que a estrutura apresenta rigidez constante ao longo da altura, mas, nos demais casos, tal matriz passa a conter elementos que variam com a altura. Cabe ainda observar que o vetor  $\{Q^*\}$  é dado por:

$$\{Q^*\} = L^3 \cdot [J]^{-1} \cdot \{A\} \cdot Q \quad \dots (3.45)$$

onde o vetor  $\{A\}$  contém os componentes do versor que define o plano de atuação do carregamento, conforme definido na expressão (2.23), e  $Q$  é o valor da resultante das cargas externas, função, naturalmente, da ordenada  $\xi$ .

As condições de contorno do sistema de equações (3.43) são, em termos da variável adimensional e em conformidade com as expressões dadas em (2.24), (2.25) e (2.26), respectivamente, expressas por:

$$\begin{aligned} u(0) &= v(0) = 0 \\ w(0) &= 0 \end{aligned} \quad \dots (3.46)$$

$$\begin{aligned} u'(0) &= v'(0) = 0 \\ w'(0) &= 0 \end{aligned} \quad \dots (3.47)$$

$$\begin{aligned} u''(1) &= v''(1) = 0 \\ w''(1) &= 0 \end{aligned} \quad \dots (3.48)$$

A formulação do sistema de equações diferenciais (3.43), segundo operadores de diferenças, leva, num dado nó genérico  $i$ , a um sistema de equações lineares, que pode ser colocado na forma:

$$[D]_i \{U\}_i = \{Q^*\}_i \quad \dots (3.49)$$

onde o operador  $\left[ D \right]_i$ , de ordem  $3 \times 3n$ , lembrando, em tempo, que  $n$  é o grau do polinômio interpolador adotado, assume a seguinte configuração:

$$\left[ \begin{array}{ccc} -\frac{d^3}{dn^3} \{n\}^T [c]_i + \kappa_{11} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i & \kappa_{12} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i & \kappa_{13} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i \\ \kappa_{21} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i & -\frac{d^3}{dn^3} \{n\}^T [c]_i + \kappa_{22} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i & \kappa_{23} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i \\ \kappa_{31} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i & \kappa_{32} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i & -\frac{d^3}{dn^3} \{n\}^T [c]_i + \kappa_{33} \frac{d}{dn} \{n\}^T [c]_i \end{array} \right] \dots (3.50)$$

e o vetor deslocamento  $\{U\}_i$ , de ordem  $3n \times 1$ , assume, por exemplo para a configuração ascendente, a forma:

$$\{U\}_i = \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} - u_i \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{i+n} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{i+n} - v_i \\ w_{i+1} - w_i \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{i+n} - w_i \end{array} \right\} \dots (3.51)$$

sendo que a indexação dos elementos do vetor passa a ser análoga à adotada para o vetor  $\{y\}_i$ , e mostrada nos itens 3.2.2 e 3.2.3, quando se tratar de configuração central e descendente, respectivamente. Ainda na expressão (3.49), a parece o vetor  $\{Q^*\}_i$  dado por:

$$\{Q^*\}_i = \begin{Bmatrix} Q_{11}^* \\ Q_{21}^* \\ Q_{31}^* \end{Bmatrix} \dots (3.52)$$

onde  $Q_{11}^*$ ,  $Q_{21}^*$  e  $Q_{31}^*$  são obtidos a partir das componentes da resultante do carregamento externo na altura do nó  $i$  segundo, respectivamente, os eixos coordenados  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ , conforme expressão (3.45).

A utilização dos operadores de diferenças ascendentes, centrais ou descendentes na formulação do operador indicado na expressão (3.49), leva, a exemplo do exposto no item 3.3.1, a algoritmos bastante simples de geração dos coeficientes.

Assim, em termos de operadores ascendentes tem-se, por exemplo:

$$\begin{aligned} 6 \cdot & \left[ - \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot u_{i+j} + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot u_i \right] + \\ & + K_{11} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] - \\ & - K_{12} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] - \\ & - K_{13} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = \\ & = Q_{11}^* \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & K_{21} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + \\
 & + 6 \left[ - \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot v_{i+j} + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & + K_{22} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & + K_{23} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = \\
 & = Q_{21}^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & K_{31} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + \\
 & + K_{32} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & + 6 \left[ - \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot w_{i+j} + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] + \\
 & + K_{33} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = \\
 & = Q_{31}^* \qquad \dots (3.53)
 \end{aligned}$$

e, em termos de operadores centrais, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & 6 \left[ - \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j-1} \cdot u_{i+j} - \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j} \cdot u_{i+j} + \right. \\
 & \left. + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot u_i \right] + K_{11} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot u_{i+j} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) u_i \right] + \\
 & + K_{12} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot v_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot v_{i-j} - \right. \\
 & \left. - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + K_{13} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot w_{i+j} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = Q_{11}^* \\
 \\
 & K_{21} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot u_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot u_{i-j} - \right. \\
 & \left. - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + 6 \left[ - \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j-1} \cdot v_{i+j} - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j} \cdot v_{i-j} + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot v_i \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{22} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot v_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot v_{i-j} - \right. \\
 & \left. - \left( \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + K_{23} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot w_{i+j} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = Q_{21}^* \\
 \\
 & K_{31} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot u_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot u_{i-j} - \right. \\
 & \left. - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + K_{32} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot v_{i+j} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & +6 \left[ - \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j-1} \cdot w_{i+j} - \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j} \cdot w_{i-j} + \right. \\
 & \left. + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] + K_{33} \left[ + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot w_{i+j} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = Q_{31}^* \\
 & \dots (3.54)
 \end{aligned}$$

e, finalmente, em termos de operadores descendentes, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & 6 \left[ - \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot u_i \right] + \\
 & + K_{11} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + \\
 & + K_{12} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & + K_{13} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = Q_{11}^* \\
 & K_{21} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + \\
 & + 6 \left[ - \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot v_{i-j} + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & + K_{22} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i-j} + \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & + K_{23} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = Q_{21}^* \\
 & K_{31} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + \\
 & + K_{32} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & + 6 \left[ - \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot w_{i-j} + \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] + \\
 & + K_{33} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] = Q_{31}^* \\
 & \dots (3.55)
 \end{aligned}$$

As condições de contorno podem, também, ser colocadas por meio de expressões de diferenças finitas. Para isto, faz-se uso dos mesmos critérios adotados no caso plano, isto é, condições de contorno na base da associação são formuladas com o emprego de operadores ascendentes e no topo, com operadores descendentes. Assim, em correspondência àquelas condições que envolvem as primeiras derivadas das funções deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$ , no ponto genérico  $i$  da base, valem, respectivamente, as expressões:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i &= 0 \end{aligned} \quad \dots (3.56)$$

No ponto  $i$  situado no topo, as condições de segundas derivadas nulas, respectivamente para as funções  $u$ ,  $v$  e  $w$ , ficam definidas por:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) u_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot v_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot w_i &= 0 \end{aligned} \quad \dots (3.57)$$

Finalizando, os esforços internos nos painéis, momento fletor na parede, força cortante na parede e força cor

tante no pórtico, formulados em função da coordenada adimensional, ficam expressos, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} M_{w_i} \cdot L^2 &= j_w \left[ a_w \cdot u'' + b_w \cdot v'' + c_w \cdot w'' \right] \\ Q_{w_i} \cdot L^3 &= -j_w \left[ a_w \cdot u''' + b_w \cdot v''' + c_w \cdot w''' \right] \\ Q_{f_i} \cdot L &= s_f \left[ a_f \cdot u' + b_f \cdot v' + c_f \cdot w' \right] \quad \dots (3.58) \end{aligned}$$

Além desses esforços, é de grande interesse, também, o momento de torção livre e o momento de flexo-torção na mola genérica, dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} M_{t\ell} \cdot L &= s_t \cdot w' \\ M_{ft} \cdot L^3 &= -j_t \cdot w''' \end{aligned} \quad \dots (3.59)$$

As expressões (3.58) e (3.59), em termos de diferenças ascendentes, assumem a forma:

$$\begin{aligned} M_{w_i} &= \frac{2 \cdot j_w}{L^2} \left\{ a_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot u_i \right] + \right. \\ &+ b_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot v_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot v_i \right] + \\ &\left. + c_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot w_i \right] \right\} \\ Q_{w_i} &= - \frac{6 \cdot j_w}{L^3} \left\{ a_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot u_i \right] + \right. \\ &+ b_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot v_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot v_i \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + c_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] \\
 Q_{fi} & = \frac{s_f}{L} \left\{ a_f \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + \right. \\
 & + b_f \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 & \left. + c_f \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] \right\} \\
 & \dots (3.60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{t\ell} & = \frac{s_t}{L} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] \\
 M_{ft} & = -\frac{6j_t}{L^3} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot w_{i+j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] \\
 & \dots (3.61)
 \end{aligned}$$

As mesmas expressões formuladas, agora, com operadores centrais resultam:

$$\begin{aligned}
 M_{wi} & = \frac{2j_w}{L^2} \left\{ a_w \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1,2j-1} \cdot u_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1,2j} \cdot u_{i-j} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) u_i \right] + b_w \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1,2j-1} \cdot v_{i+j} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1,2j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot v_i \right] + \right. \\
 & \left. + c_w \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1,2j-1} \cdot w_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-1,2j} \cdot w_{i-j} - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \Bigg] \Bigg\} \\
 Q_{fi} &= \frac{s_f}{L} \left\{ a_w \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot u_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot u_{i-j} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + b_w \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot v_{i+j} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \right. \\
 & \left. + c_w \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot w_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot w_{i-j} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] \right\} \dots (3.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{t\ell} &= \frac{s_t}{L} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j-1} \cdot w_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n,2j} \cdot w_{i-j} - \right. \\
 & \left. - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] \\
 M_{ft} &= - \frac{6j_t}{L^3} \left[ \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j-1} \cdot w_{i+j} + \sum_{j=1}^{n/2} C_{n-2,2j} \cdot w_{i-j} - \right. \\
 & \left. - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] \dots (3.63)
 \end{aligned}$$

Completando, apresentam-se, finalmente, os esforços formulados com operadores descendentes:



$$\begin{aligned}
 M_{wi} &= \frac{2j_w}{L^2} \left\{ a_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot u_i \right] + \right. \\
 &+ b_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 &+ \left. c_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-1,j} \right) \cdot w_i \right] \right\} \\
 Q_{wi} &= - \frac{6j_w}{L^3} \left\{ a_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot u_i \right] + \right. \\
 &+ b_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 &+ \left. c_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] \right\} \\
 Q_f &= \frac{s_f}{L} \left\{ a_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot u_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) u_i \right] + \right. \\
 &+ b_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot v_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot v_i \right] + \\
 &+ \left. c_w \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) \cdot w_i \right] \right\} \\
 &\dots (3.64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{t\ell} &= \frac{s_t}{L} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n,j} \right) w_i \right] \\
 M_{ft} &= - \frac{6j_t}{L^3} \left[ \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \cdot w_{i-j} - \left( \sum_{j=1}^n C_{n-2,j} \right) \cdot w_i \right] \\
 &\dots (3.65)
 \end{aligned}$$

Os operadores de diferenças aqui desenvolvidos, levam a procedimentos computacionais bastante expeditos, facilitando, enormemente, a geração automática das matrizes envolvidas. Pormenores a esse respeito são fornecidos em seguida.

### 3.4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS

A programação do Método das Diferenças Finitas, utilizando malhas irregulares, difere da programação usual, baseada no emprego de malhas regulares, no que diz respeito, essencialmente, à necessidade de geração dos operadores de diferenças para cada nó da malha, uma vez que a matriz  $[M]_i$ , correspondente à matriz  $[C]_i$ , assume configuração diferente de um nó para outro (vide expressão (3.19)). Além disso, vale acrescentar que a formulação desenvolvida permite a utilização de polinômios interpoladores de diferentes graus e, mais ainda, permite lançar mão de configurações ascendentes, centrais e descendentes de pontos envolvidos na interpolação. Assim sendo, torna-se necessário estabelecer, de início, alguns critérios no sentido de levar a bom termo a utilização das liberdades, por assim dizer, que a formulação em apreço apresenta.

#### 3.4.1 - Considerações sobre a malha

Após exaustivos testes com inúmeras configurações de pontos, optou-se pela malha de 15 nós, indicada na figura 3.5, sendo que 12 nós estão contidos no domínio e três são auxiliares, fora do domínio. Os nós auxiliares, um na região da base e dois na região do topo, proporcionam um melhor condicionamento dos operadores correspondentes às condições de contorno, mais especificamente as condições de rotação nula na base e curvatura nula no topo.

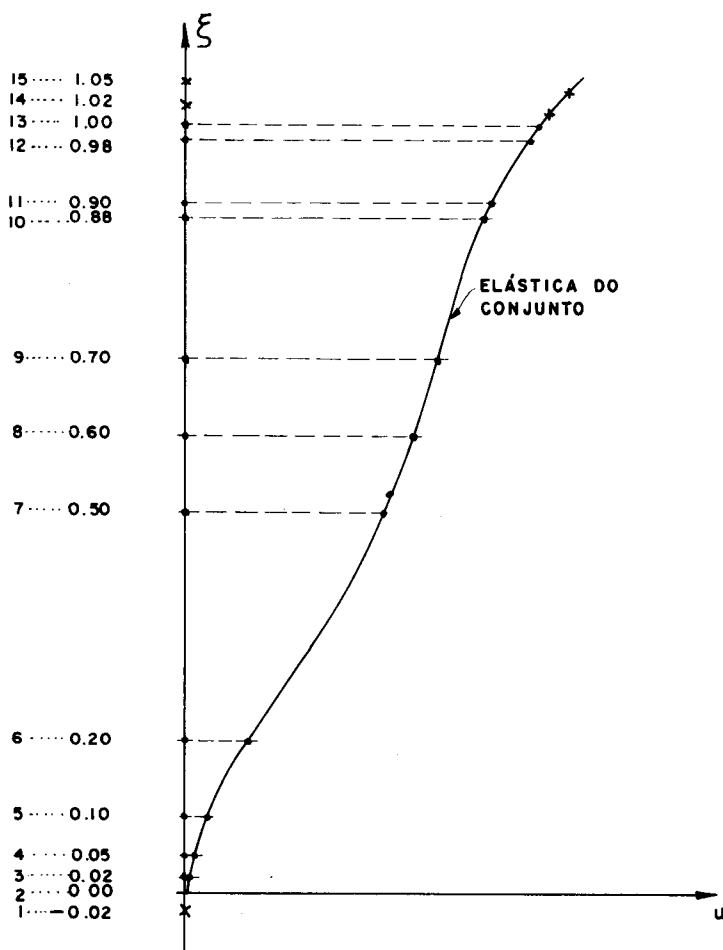


FIG. 3.5 - MALHA CONSIDERADA

Convém esclarecer que a opção pela malha em apreço merece alguns comentários.

Em primeiro lugar, deve-se dizer que a pesquisa da malha, tendo por base o estudo da associação plana de pórtico e parede, foi feita varrendo-se uma vasta gama de rigidez relativa  $\lambda$ . Essa possibilidade de variação na rigidez relativa, permite estudar um sistema estrutural, cujo comportamento é, por assim dizer, representativo e muito próximo dos demais. Basta verificar, por exemplo, que para  $\lambda$  entre 0 e em torno de 9, a deformada do conjunto apresenta características de predominância de deformação por flexão; para um  $\lambda$  próximo ou igual a mais ou menos 100 a deformada mostra-se com uma predominância de deformação por força cortante; nos casos intermediários de rigidez relativa, o comportamento do conjunto apresenta uma deformada

mista, ou seja, a deformada não indica haver predominância por um ou outro dos tipos básicos de deformação.

A concentração dos nós nas extremidades e na região central, um pouco mais espaçados, tem uma razão muito plausível. Na base, a condição de rotação nula, implica, principalmente para rigidez relativa  $\lambda$  elevada, em curvatura muito acentuada nessa região. Na região do topo ocorre uma forte interação por força concentrada entre o pórtico e a parede para valores de rigidez relativa nas proximidades de 3. Assim, ocorre uma sensível variação, por assim dizer, da curvatura na vizinhança do topo, lembrando, em tempo, que no topo a curvatura é nula. Finalmente, o comportamento da associação de pórtico e parede indica haver inflexão da deformada na região central, daí, a necessidade de alguns pontos também nessa região.

Convém assinalar, ainda, que a imposição de um polinômio interpolador do oitavo grau à malha de 15 pontos, tendo os nós uma distribuição como mostra a figura 3.5, proporciona resultados muito satisfatórios e, mais que isso, suficientemente precisos em termos práticos. Essa mesma malha com esse grau de polinômio, é utilizada nos diversos exemplos numéricos apresentados no capítulo seguinte.

#### 3.4.2 - Emprego dos operadores

Os operadores ascendentes são utilizados, conforme já foi mencionado, na região da base. Um critério bastante simples para definir tal região é o seguinte: os nós de número 2 a  $n/2$  (vide figura 3.5), seguindo uma numeração sequencial dos nós no sentido crescente da variável  $\xi$ , estão contidos na região da base; observe-se que  $n$  é o grau do polinômio. A região central é definida pelos nós de número  $(n/2+1)$  a  $(N-n/2)$ , inclusive, e nesses nós são utilizados os operadores centrais. Convém lembrar que  $N$  é o número

mero de nós da malha adotada. Finalmente, os nós de número  $(N - \frac{n}{2} + 1)$  a  $(N - 2)$  são considerados contidos na região do topo, e neles são utilizados os operadores descendentes. Cabe ainda esclarecer, neste ponto, que devem ser utilizados polinômios de grau par, sendo que o menor grau compatível com a integração das equações abordadas no presente trabalho é 4, porquanto a ordem da maior derivada que aparece é 3. Além disso, o maior valor de  $n$  possível de ser empregado numa determinada malha de  $N$  pontos, fica restrito a  $\frac{2 \cdot N}{3}$  ou o maior inteiro par logo abaixo deste valor.

### 3.4.3 - Geração do sistema de equações lineares

A aplicação dos operadores, como formulados em (3.34) para o caso plano e em (3.50) para o caso tridimensional, nos nós da malha considerada (vide item 3.4.1), conduz a um sistema de equações lineares nas incógnitas deslocamento - componentes do estado de deslocamento da estrutura. De um modo geral, tal sistema apresenta-se na forma:

$$[B] \cdot \{F\} = \{G\} \quad \dots (3.66)$$

sendo que na matriz  $[B]$  estão contidos, de maneira ordenada segundo as linhas, os coeficientes dos operadores; o vetor  $\{F\}$  corresponde ao vetor incógnito, isto é, o vetor dos deslocamentos incógnitos; e, finalmente, no vetor  $\{G\}$  estão contidos os termos independentes, que dependem, naturalmente, do carregamento externo. Assim o vetor  $\{F\}$  é constituído da seguinte maneira no caso de associações planas:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{Bmatrix} \quad \dots (3.67)$$

tendo-se em conta que  $N$  é o número total de pontos da malha. O vetor  $\{G\}$ , de modo similar, tem a seguinte formação

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{N-2} \end{Bmatrix} \dots (3.68)$$

Com relação à lei de formação da matriz  $[B]$ , é interessante tecer alguns esclarecimentos, tendo-se como exemplo a formação da matriz mostrada na figura 3.6, a qual provém da consideração da malha de 15 pontos, mediante emprego de operadores derivados do polinômio interpolador do oitavo grau.

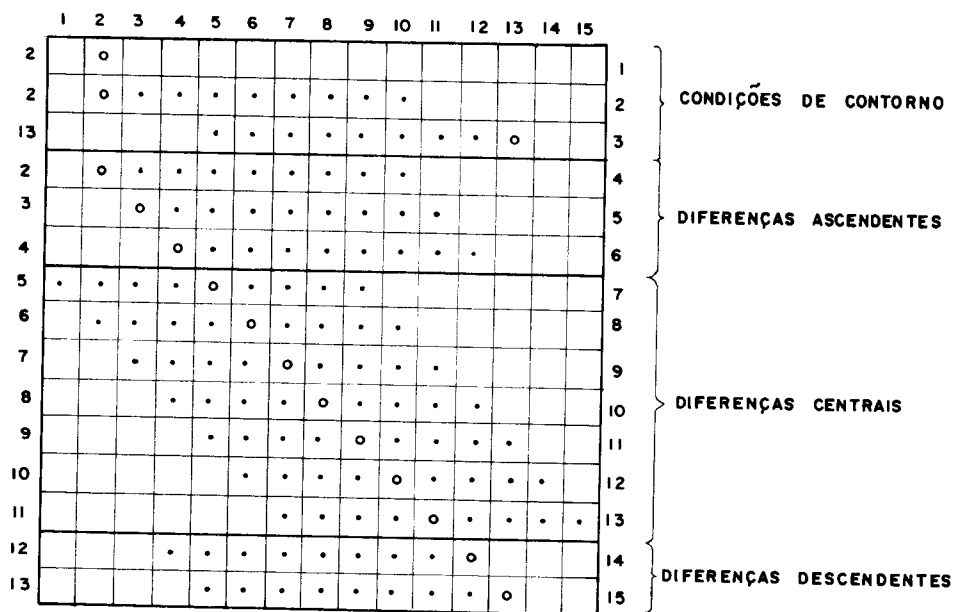


FIG.3.6 - MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA MALHA DE 15 PONTOS E POLINÔMIO DO OITAVO GRAU.

As três condições de contorno expressas em (3.31) compõem, respectivamente, as três primeiras equações. As três equações seguintes são montadas a partir da equação diferencial em forma de diferenças ascendentes. Da sétima à décima terceira equação, utiliza-se a equação diferencial formulada segundo operadores centrais, e, finalmente as duas últimas equações lineares têm por base a equação diferencial formulada com operadores descendentes. Convém notar que, conforme indicação na figura 3.6, apenas oito pontos são envolvidos, de cada vez, na aplicação dos operadores; e, isso se explica no fato, já mencionado, de serem tais operadores, derivados do polinômio do oitavo grau. Ainda na figura 3.6 apresentam-se duas convenções: o pequeno círculo indica o ponto de aplicação do operador e o ponto cheio indica os demais pontos envolvidos. Dessa forma tem-se, de maneira visual, um melhor entendimento da ordenação sequencial das equações. Por outro lado, no sentido de mostrar a correspondência entre o ponto da malha ao qual está sendo aplicado um operador e o número da linha correspondente da matriz  $[B]$ , convencionou-se a numeração vertical da esquerda como sendo aquela referente ao ponto da malha, e a da direita, como sendo o número da linha correspondente na matriz  $[B]$ .

Na análise da associação tridimensional de painéis de contraventamento, o vetor  $\{F\}$  assume a seguinte configuração:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \\ w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \dots (3.69)$$

e o vetor  $\{G\}$ , em correspondência, assume a formação

$$\{G\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{11}^*(2) \\ \vdots \\ Q_{11}^*(N-2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{12}^*(2) \\ \vdots \\ Q_{12}^*(N-2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{13}^*(2) \\ \vdots \\ Q_{13}^*(N-2) \end{pmatrix} \dots (3.70)$$

Por outro lado, a matriz  $[B]$  apresenta a lei de formação ilustrada na figura 3.7, novamente exemplificada para uma malha de quinze pontos e polinômio interpolador do oitavo grau.

Os coeficientes relativos ao movimento  $u$  são colocados nas quinze primeiras colunas, os relativos ao movimento  $v$  nas quinze seguintes, e, finalmente, as quinze últimas colunas são reservadas para os coeficientes relativos ao movimento  $w$ . Correspondentemente, as quinze primeiras linhas correspondem às equações diferenciais segundo a direção do movimento  $u$ , as quinze seguintes relativas à direção do movimento  $v$  e as quinze últimas à direção do movimento  $w$ .



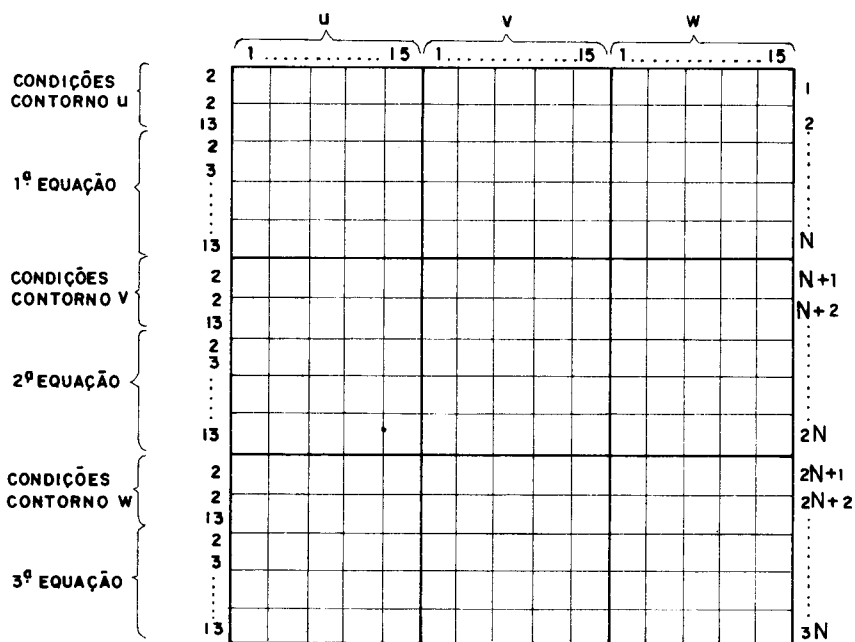


FIG. 3.7 - MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA MALHA DE 15 PONTOS.

As três primeiras equações em cada grupo, referentes às direções dos movimentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , são as condições de contorno dadas em (3.46), (3.47) e (3.48). De resto, a lei de formação das demais linhas, em cada grupo, é a mesma já mencionada na exposição sobre o caso de associações planas.

Por último é oportuno ressaltar que o procedimento aqui seguido pode ser estendido facilmente a uma malha com um número maior de pontos, bem como, abordar operadores de diferenças derivados de polinômios interpoladores de graus mais elevados, bastando, para isso, expandir, por exemplo, o número de linhas e colunas, bem como o número de pontos envolvidos, de cada vez, na aplicação dos operadores.

## CAPÍTULO IV

### EXEMPLOS DE APLICAÇÃO NUMÉRICA

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

A eficiência do Método das Diferenças Finitas na integração numérica das equações da Técnica do Meio Contínuo, já foi comprovada em nosso meio, merecendo destaque o trabalho de MANCINI (5). Entretanto, os exemplos de aplicação, aqui apresentados, mostram que soluções mais requintadas podem ser conseguidas mediante a utilização de rede de malhas arbitrarias.

A convergência do Método em questão, como proposto e formulado no presente trabalho, é testada e discutida em pormenores no primeiro exemplo numérico, a partir do estudo de associações planas regulares de pórtico e parede. No sentido de estudar a convergência de um modo mais abrangente, abordam-se, no primeiro exemplo numérico, associações planas de pórtico e parede com rigidez relativa  $\lambda$  variando entre 9 e 100. Bons resultados foram alcançados com uma malha de 15 nós, cuja configuração foi objeto de comentários mais detalhados no item 3.4.1. Por outro lado, vale acrescentar que o Método das Diferenças Finitas, dada a particularidade de efetuar a integração numérica por pontos, permite estudar associações de painéis com a consideração de eventuais variações de rigidez ao longo da altura.

O segundo e o terceiro exemplos de aplicações, têm por objetivo quantificar a influência, no comportamento do conjunto, da variação de rigidez ao longo da altura experimentada por, respectivamente, pórtico e parede. São considerados apenas alguns casos particulares, onde a variação de rigidez segue uma lei de variação linear. Finalizando, o quarto exemplo de aplicação consiste no estudo do comporta

da rigidez relativa  $\lambda$ , foram considerados apenas os mais característicos, ou seja,  $\lambda = 9$ ,  $\lambda = 25$  e  $\lambda = 100$ . Vale ressaltar que para  $\lambda = 9$ , o conjunto apresenta um comportamento particularmente interessante, porquanto o esforço cortante no pórtico é bastante uniforme, (2); tratando-se assim, de uma situação bastante sugestiva. Para  $\lambda = 25$ , tem-se um comportamento onde, ainda, não se destaca a predominância do pórtico ou da parede no desempenho do conjunto. Trata-se, pois, de uma situação intermediária. Por último, para  $\lambda = 100$ , já se tem uma situação onde o comportamento do conjunto exibe uma nítida predominância do pórtico. Particularmente, essa situação merece alguns comentários. A condição de rotação nula do conjunto na base, consiste numa imposição da parede; todavia, para  $\lambda = 100$ , a parede tem, no conjunto, uma participação particularmente desprezível, exceto pela imposição de rotação nula na base. Com isso, a deformada do conjunto, onde predomina a participação do pórtico, sujeita-se a fortes curvaturas na região da base e, assim sendo, o condicionamento numérico do procedimento ora proposto evidencia a necessidade de trabalhar com operadores de diferenças derivados de polinômios interpoladores de grau mais elevado.

Os resultados arrolados nas tabelas T1, T2 e T3 indicam que os operadores de diferenças derivados do polinômio interpolador do quarto grau, mostram-se bastante impróprios. Por outro lado, bons resultados são conseguidos com os operadores derivados do polinômio interpolador do sexto grau; e, mais ainda, os resultados alcançados com os operadores de diferenças derivados do polinômio do oitavo grau, são extremamente precisos.

mento de uma associação tridimensional de pórticos e paredes. Trata-se de um exemplo já estudado por MANCINI (5), e, desta feita, bastante adequado para testar, de modo objetivo, o bom desempenho do procedimento proposto, também em análises tridimensionais.

#### 4.2 - Primeiro exemplo de aplicação

Neste exemplo de aplicação, estuda-se o comportamento de associações planas de pórtico e parede com rigidez constante ao longo da altura, sujeitas a uma carga horizontal uniformemente distribuída ao longo da altura, conforme ilustra-se na figura 4.1.

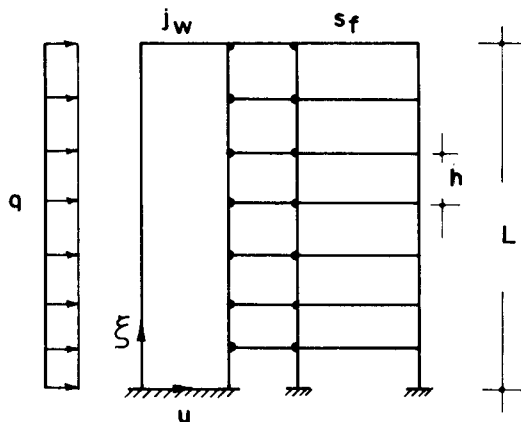


FIG. 4.1 - CARACTERÍSTICAS DAS ASSOCIAÇÕES PLANAS

O objetivo principal, aqui buscado, consiste, conforme foi mencionado, em evidenciar por meios numéricos a eficiência da malha comentada no item 3.4.1. Mais ainda, procura-se, também, mostrar por meios numéricos a excelente afinidade apresentada com a utilização dos operadores de diferenças derivadas do polinômio interpolador do oitavo grau.

Os resultados de maior interesse prático estão arrolados nas tabelas T1, T2 e T3. Dentre os valores usuais

λ	9				25				100			
	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS (2)	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS (2)	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS (2)
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,10	0,015	0,009	0,009	0,009	0,043	0,016	0,016	0,016	-0,036	0,032	0,032	0,032
0,20	0,058	0,031	0,031	0,031	0,168	0,054	0,054	0,054	-0,237	0,096	0,095	0,094
0,50	0,312	0,129	0,129	0,129	1,162	0,196	0,194	0,194	-0,758	0,301	0,276	0,276
0,60	0,373	0,162	0,161	0,162	1,295	0,237	0,235	0,235	-0,768	0,347	0,320	0,320
0,70	0,426	0,192	0,192	0,192	1,389	0,272	0,269	0,269	-0,781	0,383	0,356	0,356
0,90	0,511	0,245	0,245	0,245	1,478	0,323	0,320	0,320	-0,719	0,425	0,399	0,399
1,00	0,548	0,269	0,268	0,268	1,514	0,343	0,339	0,339	-0,714	0,436	0,411	0,410

TABELA TI - VALORES DOS DESLOCAMENTOS  $u/q \cdot L^2 / s_f$

λ	9				25				100			
	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS(2)	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS(2)	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS(2)
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,10	0,300	0,168	0,168	0,168	0,844	0,297	0,295	0,295	-0,878	0,543	0,533	0,532
0,20	0,571	0,270	0,269	0,269	1,878	0,439	0,435	0,435	-0,725	0,695	0,667	0,665
0,50	0,698	0,337	0,337	0,337	1,913	0,438	0,433	0,434	-0,674	0,521	0,493	0,494
0,60	0,567	0,318	0,317	0,318	1,104	0,379	0,376	0,376	-0,916	0,406	0,399	0,399
0,70	0,486	0,291	0,290	0,291	0,723	0,314	0,313	0,313	0,707	0,306	0,305	0,304
0,90	0,382	0,242	0,241	0,241	0,356	0,207	0,206	0,206	1,134	0,135	0,142	0,137
1,00	0,368	0,232	0,232	0,232	0,345	0,187	0,187	0,187	0,091	0,100	0,104	0,100

TABELA T2 - VALORES DOS ESFORÇOS CORTANTES NO PÓRTICO  $Q_f/q \cdot L$

λ	9					25					100					
	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS (2)	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS (2)	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS (2)	POLIN. 4ºGrau	POLIN. 6ºGrau	POLIN. 8ºGrau	VALORES EXATOS (2)
0,00	0,377	0,232	0,232	0,232	0,371	0,161	0,161	0,161	-0,035	0,091	0,091	0,090				
0,10	0,299	0,146	0,145	0,146	0,322	0,083	0,081	0,082	-0,135	0,027	0,023	0,027				
0,20	0,323	0,083	0,083	0,083	0,571	0,035	0,034	0,034	-1,437	0,007	0,003	0,004				
0,50	-0,207	-0,015	-0,015	-0,015	-0,545	-0,021	-0,020	-0,020	1,511	-0,014	-0,009	-0,009				
0,60	-0,096	-0,027	-0,027	-0,027	-0,154	-0,025	-0,025	-0,025	-0,081	-0,010	-0,009	-0,010				
0,70	-0,085	-0,031	-0,031	-0,031	-0,160	-0,025	-0,025	-0,025	0,481	-0,010	-0,009	-0,009				
0,90	-0,030	-0,018	-0,018	-0,019	-0,014	-0,014	-0,014	-0,014	-0,174	-0,006	-0,007	-0,006				
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00				

TABELA T3 - VALORES DOS MOMENTOS FLETORES NA PAREDE  $M_w/q \cdot L^2$

#### 4.3 - SEGUNDO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O objetivo deste exemplo de aplicação consiste, primordialmente, em qualificar a influência da variação de rigidez do pórtico no comportamento da associação plana de pórtico e parede. Estudam-se apenas alguns casos particulares onde a variação de rigidez segue uma lei linear, conforme ilustra-se na figura 4.2.

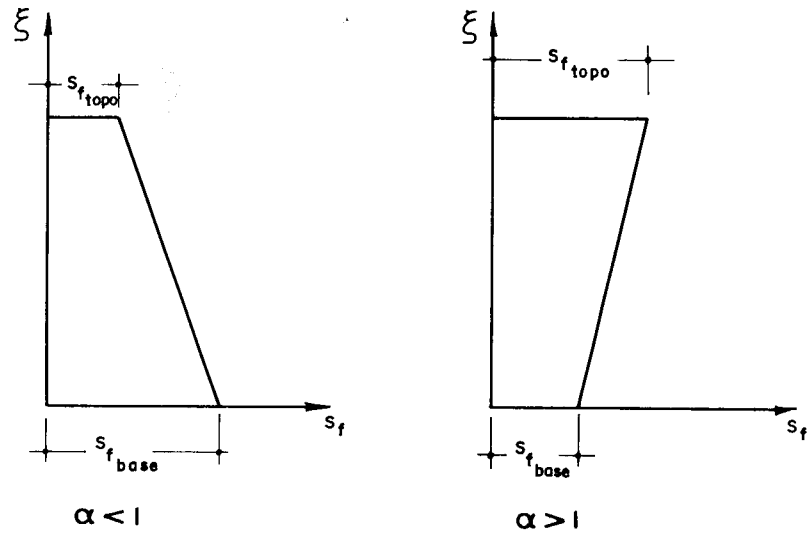


FIG. 4.2 - LEI DE VARIAÇÃO DE RIGIDEZ DO PÓRTICO

Define-se, de início, um parâmetro  $\alpha$ , que corresponde à relação entre a rigidez do pórtico no topo e a rigidez do pórtico na base, ou seja:

$$\alpha = \frac{s_{f(\text{topo})}}{s_{f(\text{base})}} \quad \dots (4.1)$$

Assim, a rigidez ao longo da altura passa a ser dada por:

$$s_f(\xi) = s_{f(\text{base})} (1 - \xi + \alpha \xi) \quad \dots (4.2)$$

Por outro lado, a rigidez média fica sendo dada por:



$$s_{f_m} = s_{f_{base}} \cdot \frac{1+\alpha}{2} \quad \dots (4.3)$$

e a rigidez relativa média, conseqüentemente, por:

$$\lambda_m = \lambda_{base} \cdot \frac{1+\alpha}{2} \quad \dots (4.4)$$

Como no exemplo de aplicação anterior, consideram-se apenas três casos de rigidez relativa, a saber:  $\lambda=9$ ,  $\lambda = 25$  e  $\lambda = 100$ ; sendo, agora, estes valores tomados junto à base do conjunto. No tocante ao parâmetro  $\alpha$ , consideram-se, em cada um dos casos de rigidez relativa, alguns valores do parâmetro  $\alpha$ , destacando-se como os mais significativos:  $\alpha = 0,2$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 1,5$  nos casos de  $\lambda = 9$  e  $\lambda = 25$ ; e,  $\alpha = 0,2$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,8$  para o caso de  $\lambda = 100$ .

Os resultados obtidos encontram-se nas tabelas T1, T2 e T3, e foram lançados nos gráficos das figuras 4.3 a 4.12. Convém esclarecer que nos gráficos das 4.3.a), b) e c), foram lançados, respectivamente, para os valores de rigidez relativa  $\lambda = 9$ ,  $\lambda = 25$  e  $\lambda = 100$ , os deslocamentos do conjunto correspondentes aos vários valores de  $\alpha$  e, também, para  $\alpha = 1$  que consiste, obviamente, no caso de rigidez constante. Tais gráficos evidenciam, por exemplo, que à medida que a rigidez relativa da base aumenta, aumenta também a influência da variação da rigidez, como era de se esperar; porquanto o aumento da rigidez relativa implica numa maior participação do pórtico no conjunto, e, dessa forma, mais destaque ganha tal variação.

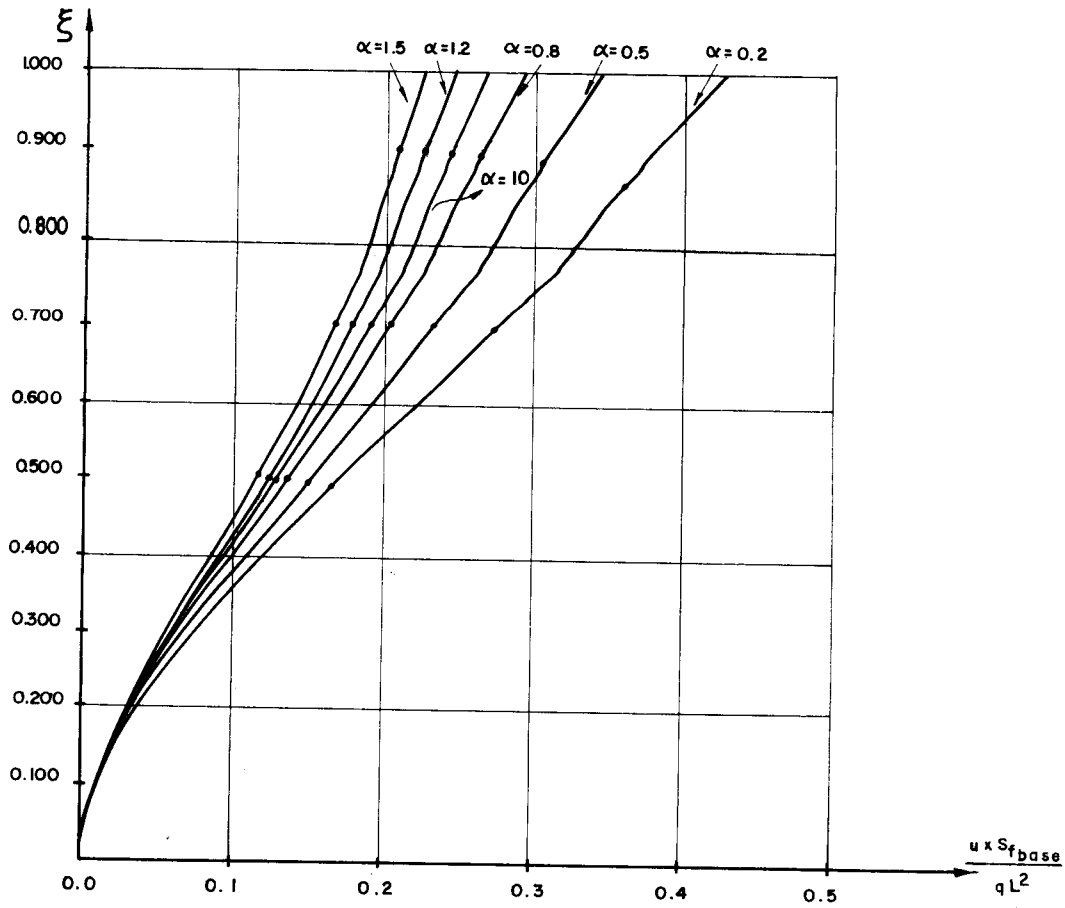


FIG. 4.3 a - ANÁLISE DA FUNÇÃO DESLOCAMENTO  $\lambda_{\text{base}} = 9$

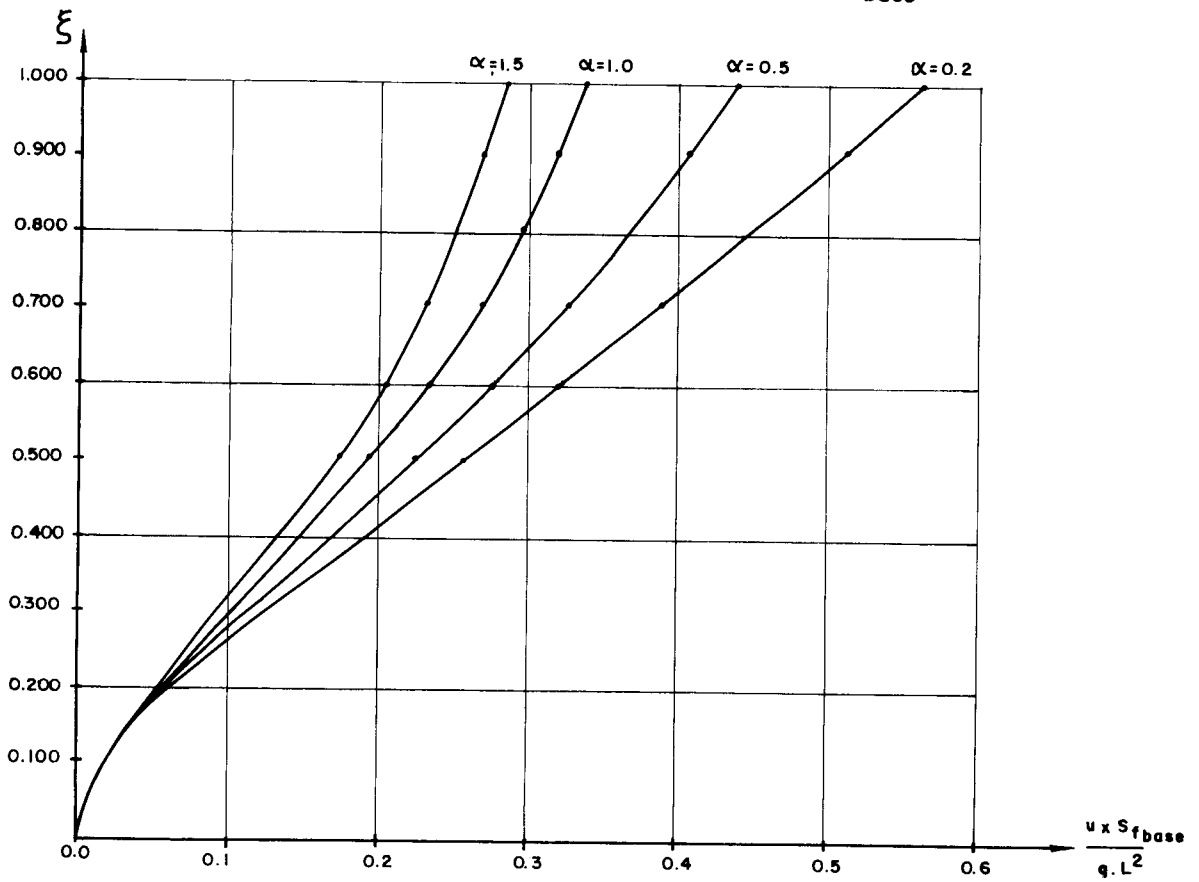


FIG. 4.3 b - ANÁLISE DA FUNÇÃO DESLOCAMENTO  $\lambda_{\text{base}} = 25$

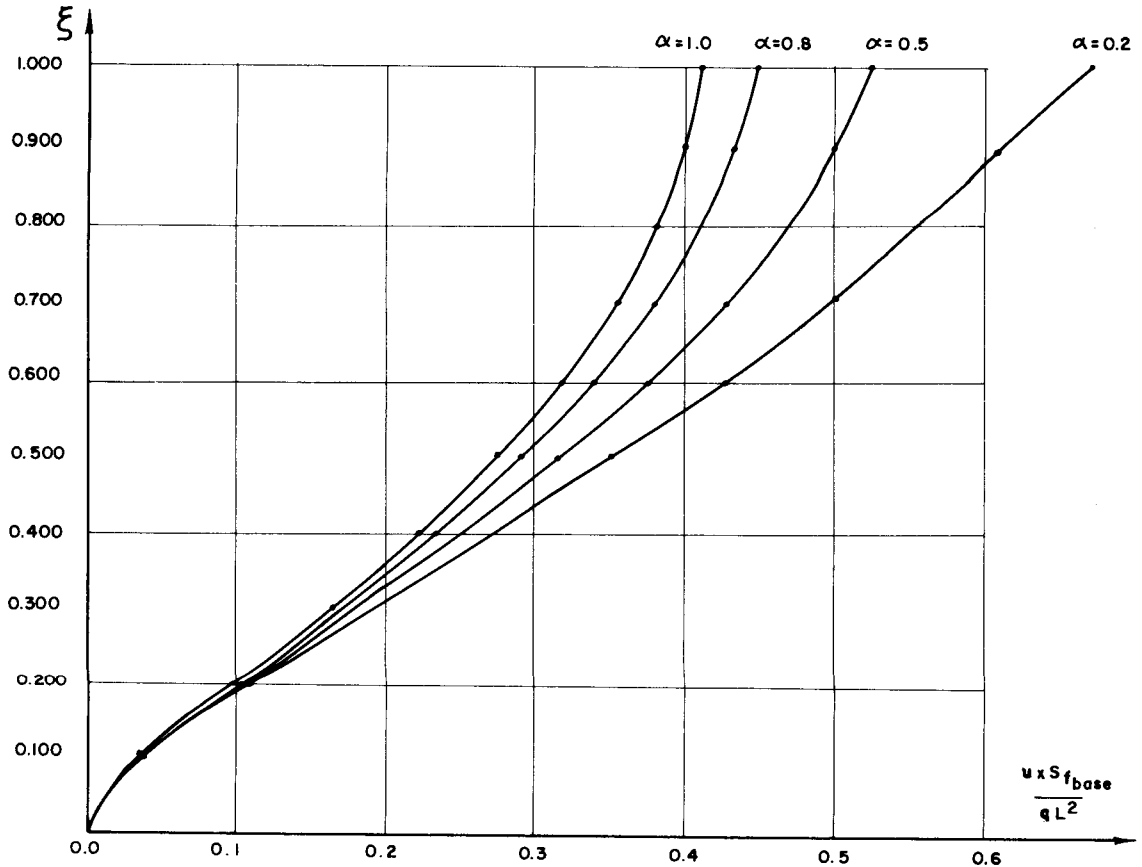


FIG. 4.3 C — ANÁLISE DA FUNÇÃO DESLOCAMENTO  $\lambda_{base} = 100$

Algumas constatações de certo interesse prático podem ser tiradas das tabelas T1, T2 e T3, bem como, visualizadas nos gráficos das figuras 4.4 a 4.12. Nessas tabelas e, conseqüentemente, nesses gráficos, confrontam-se os resultados obtidos levando-se em consideração a variação de rigidez, com os resultados obtidos por meio de uma associação de rigidez constante e igual à rigidez média, para os valores de  $\alpha$  considerados. Vale notar, por exemplo, que, para a rigidez relativa na base igual a 9 (Tabelas T1.a), b) e c), e gráficos das figuras 4.4.a), b), c); 4.5.a), b), c); e 4.6.a), b) e c)), a discrepância dos resultados, principalmente em termos de deslocamentos, é bastante reduzida. Assim, em termos práticos, as variações de rigidez consideradas equivalem a um certo aumento, ou diminuição, respectivamente, para  $\alpha > 1$  e  $\alpha < 1$ , da rigidez do conjunto, tomando por referência a rigidez da base e supondo-se tal rigidez uniforme ao longo da altura. A menos de pequenas flutuações, esse fato é também constatado para rigidez relativa na base assumindo os valores 25 e 100.

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,8$		$\alpha = 1,2$		$\alpha = 1,5$	
	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.
0,100	0,0109	0,0108	0,0100	0,0099	0,0094	0,0094	0,0087	0,088	0,0082	0,0085
0,200	0,0385	0,0383	0,0353	0,0349	0,0327	0,0327	0,030	0,034	0,0285	0,0293
0,500	0,167	0,172	0,149	0,151	0,136	0,136	0,122	0,123	0,114	0,116
0,600	0,213	0,224	0,190	0,193	0,171	0,172	0,153	0,153	0,142	0,143
0,700	0,258	0,276	0,228	0,234	0,204	0,206	0,181	0,181	0,167	0,168
0,900	0,340	0,379	0,296	0,310	0,262	0,266	0,229	0,227	0,210	0,207
1,000	0,378	0,429	0,327	0,346	0,289	0,294	0,250	0,248	0,228	0,224

TABELA T1-a QUADRO DE VALORES DOS DESLOCAMENTOS (u.s f base / q.L<sup>2</sup>)  $\lambda_{base} = 9$

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,8$		$\alpha = 1,2$		$\alpha = 1,5$	
	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.
0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,100	0,122	0,186	0,141	0,177	0,157	0,171	0,177	0,166	0,191	0,165
0,200	0,203	0,285	0,230	0,275	0,254	0,271	0,283	0,270	0,302	0,273
0,500	0,280	0,306	0,305	0,317	0,325	0,329	0,347	0,345	0,360	0,358
0,600	0,274	0,271	0,294	0,291	0,309	0,308	0,324	0,326	0,334	0,338
0,700	0,261	0,229	0,275	0,260	0,285	0,281	0,295	0,299	0,299	0,309
0,900	0,233	0,141	0,240	0,201	0,241	0,230	0,240	0,248	0,238	0,252
1,000	0,228	0,100	0,232	0,179	0,233	0,217	0,230	0,240	0,227	0,247

TABELA TI-b FORÇAS CORTANTES NO PÓRTICO ( $Q_f/q \cdot L$ )  $\lambda_{base} = 9$

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,8$		$\alpha = 1,2$		$\alpha = 1,5$	
	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.	s f méd.	s f var.
0,000	0,273	0,269	0,254	0,251	0,240	0,239	0,224	0,226	0,215	0,215
0,100	0,184	0,184	0,167	0,165	0,153	0,153	0,138	0,140	0,130	0,128
0,200	0,116	0,122	0,100	0,103	0,089	0,089	0,077	0,077	0,070	0,065
0,500	-0,002	+0,021	-0,008	0,001	-0,013	-0,010	-0,016	-0,018	-0,018	-0,026
0,600	-0,019	+0,005	-0,023	-0,013	-0,026	-0,023	-0,027	-0,030	-0,028	-0,035
0,700	-0,027	-0,005	-0,030	-0,020	-0,031	-0,028	-0,031	-0,033	-0,031	-0,037
0,900	-0,018	-0,008	-0,018	-0,014	-0,018	-0,017	-0,018	-0,019	-0,018	-0,020
1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

TABELA T1-c MOMENTOS FLETORES ( $M_w/q \cdot L^2$ )  $\lambda_{base} = 9$

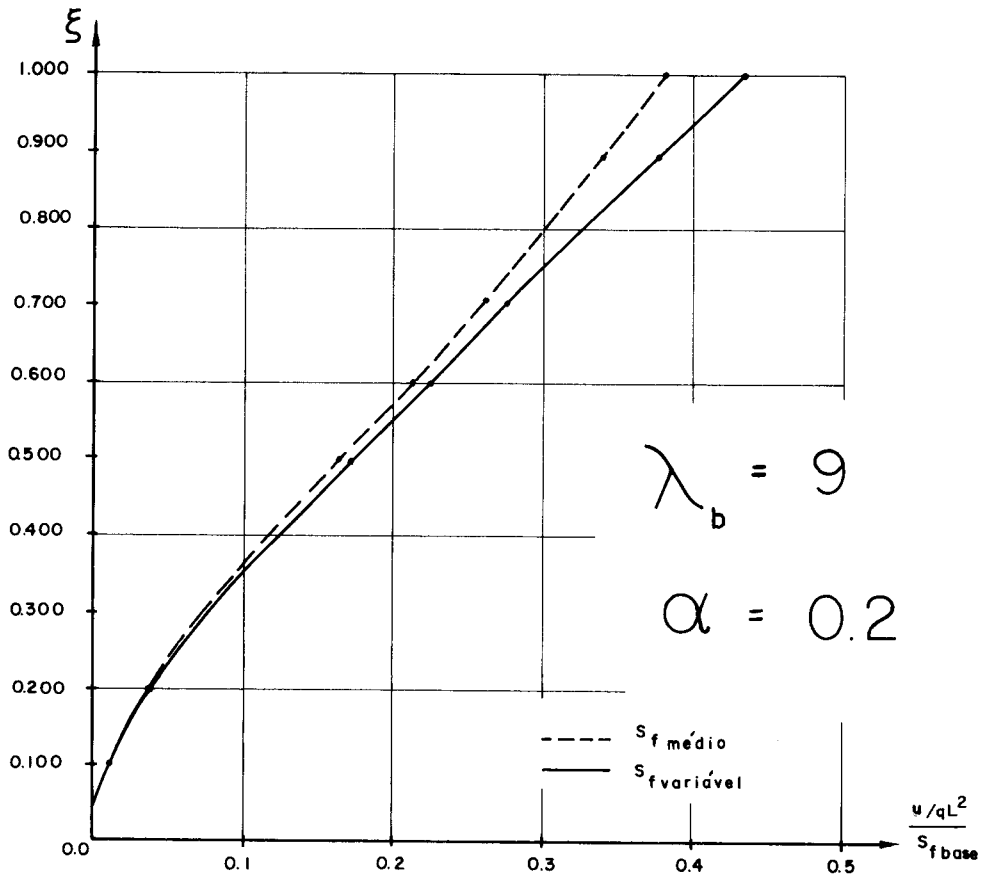


FIG. 4.4 a - DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

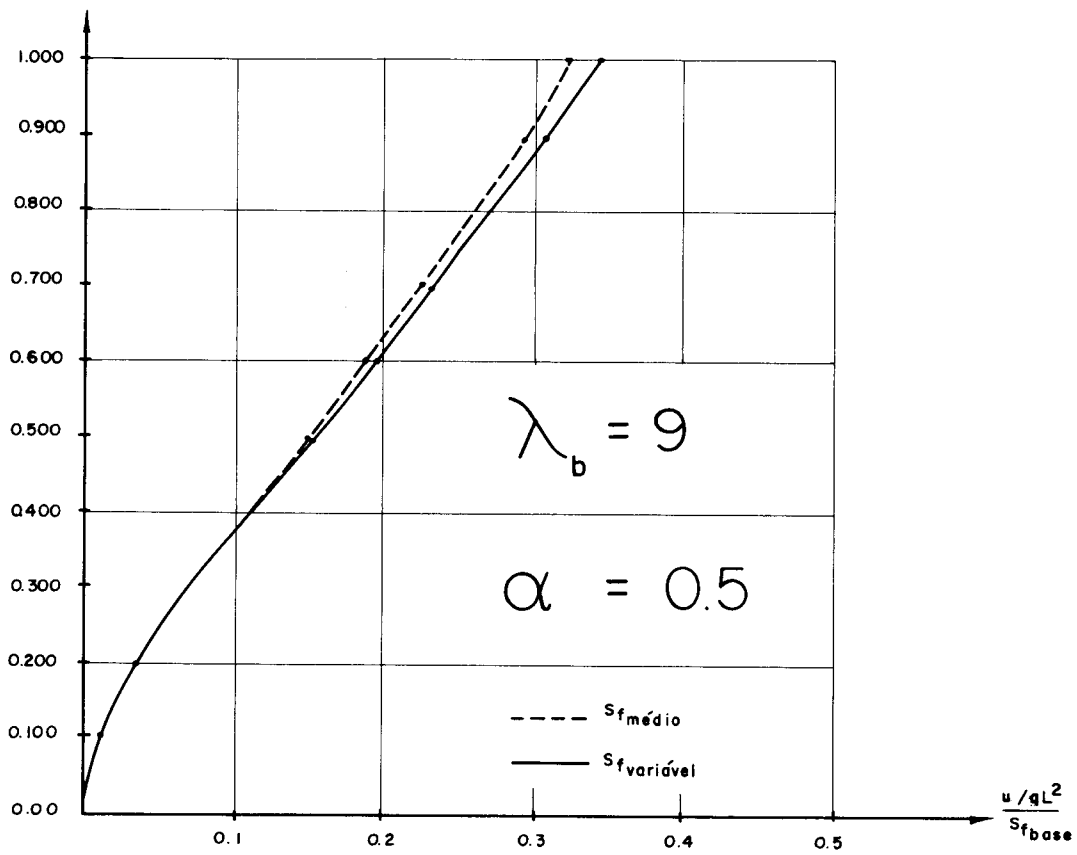


FIG. 4.4 b - DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

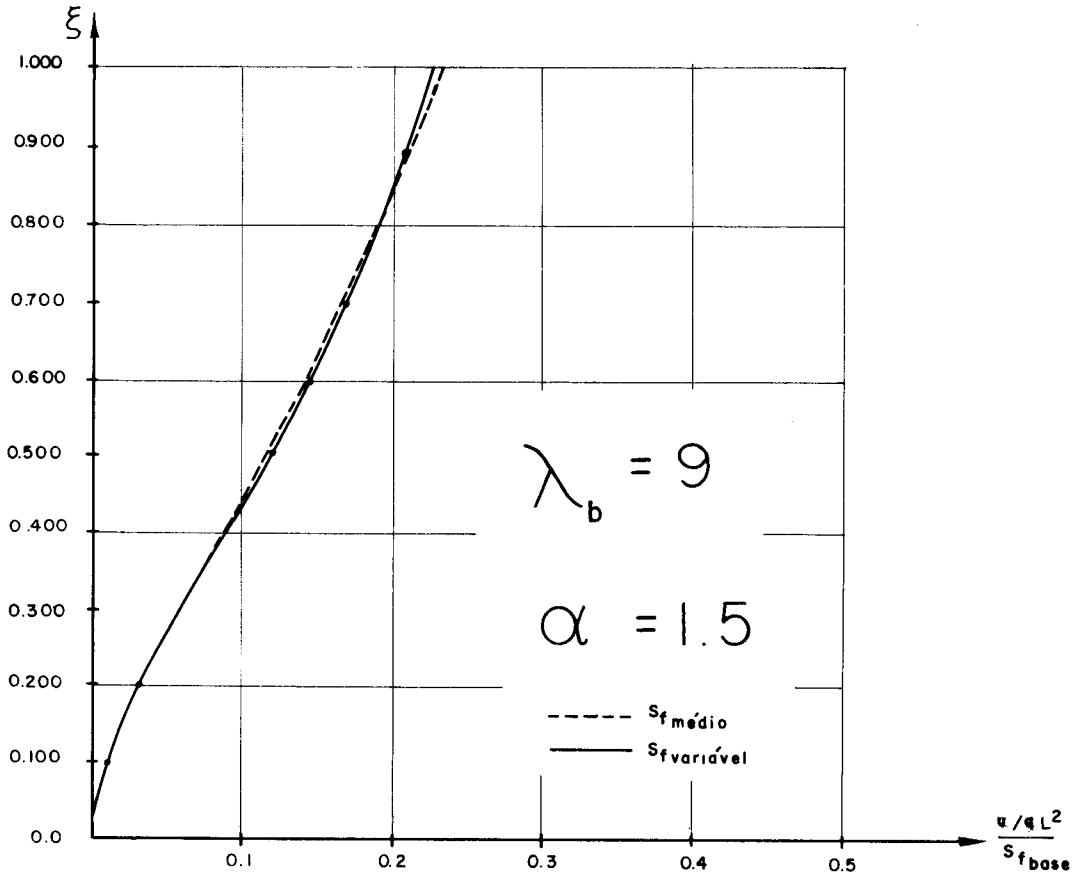


FIG. 4.4 C — DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

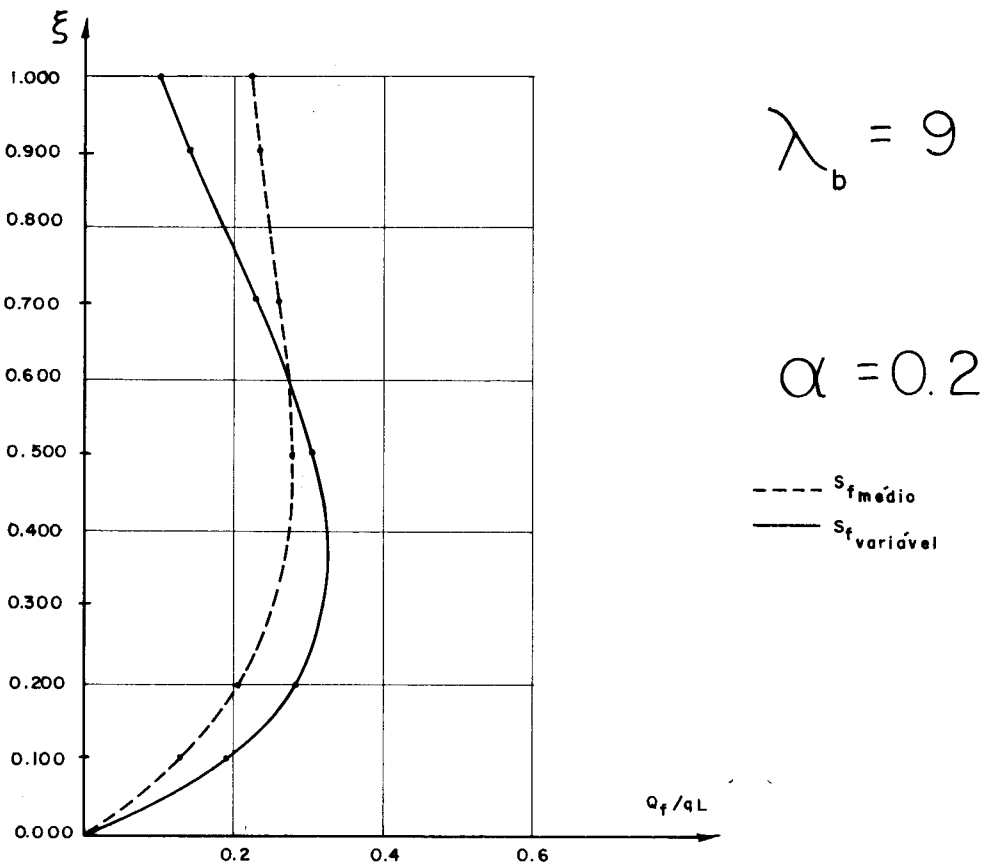


FIG. 4.5 a — FORÇAS CORTANTES



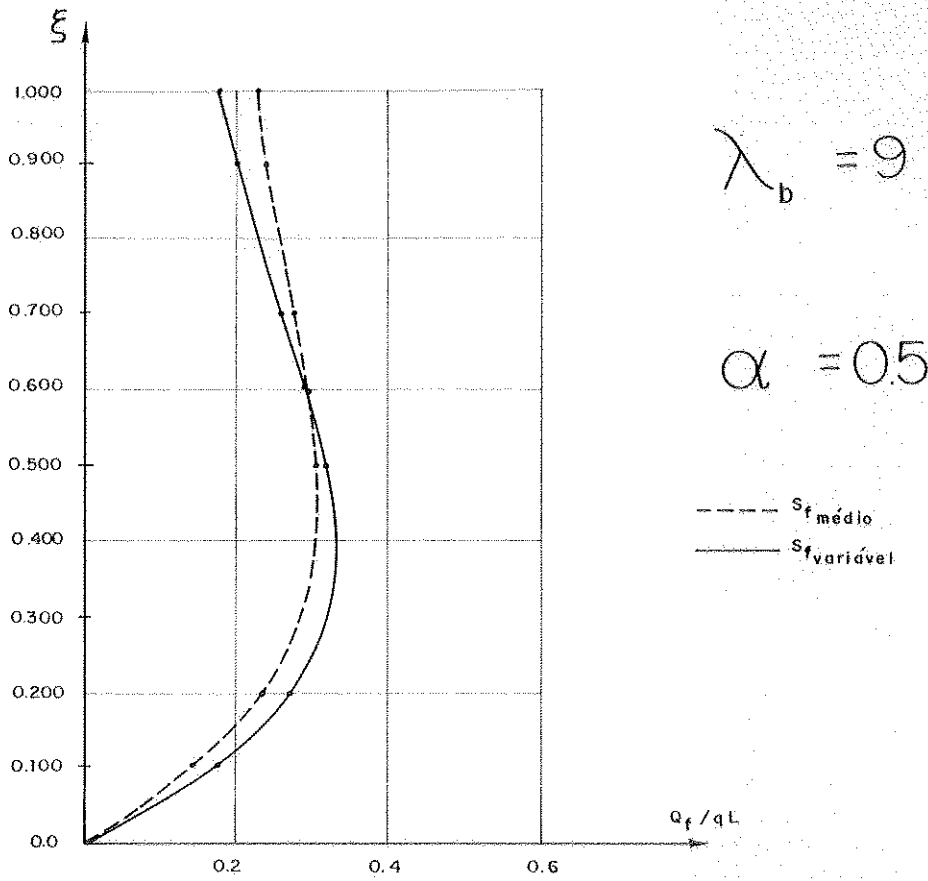


FIG. 4.5 b — FORÇAS CORTANTES

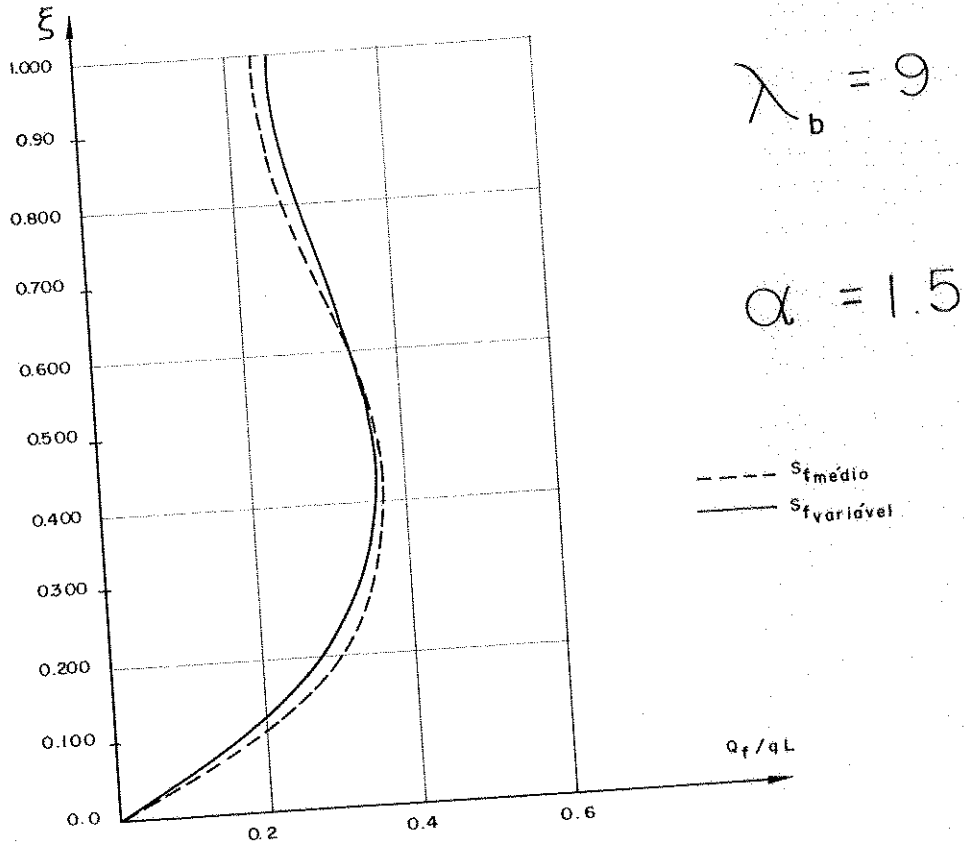


FIG. 4.5 c — FORÇAS CORTANTES

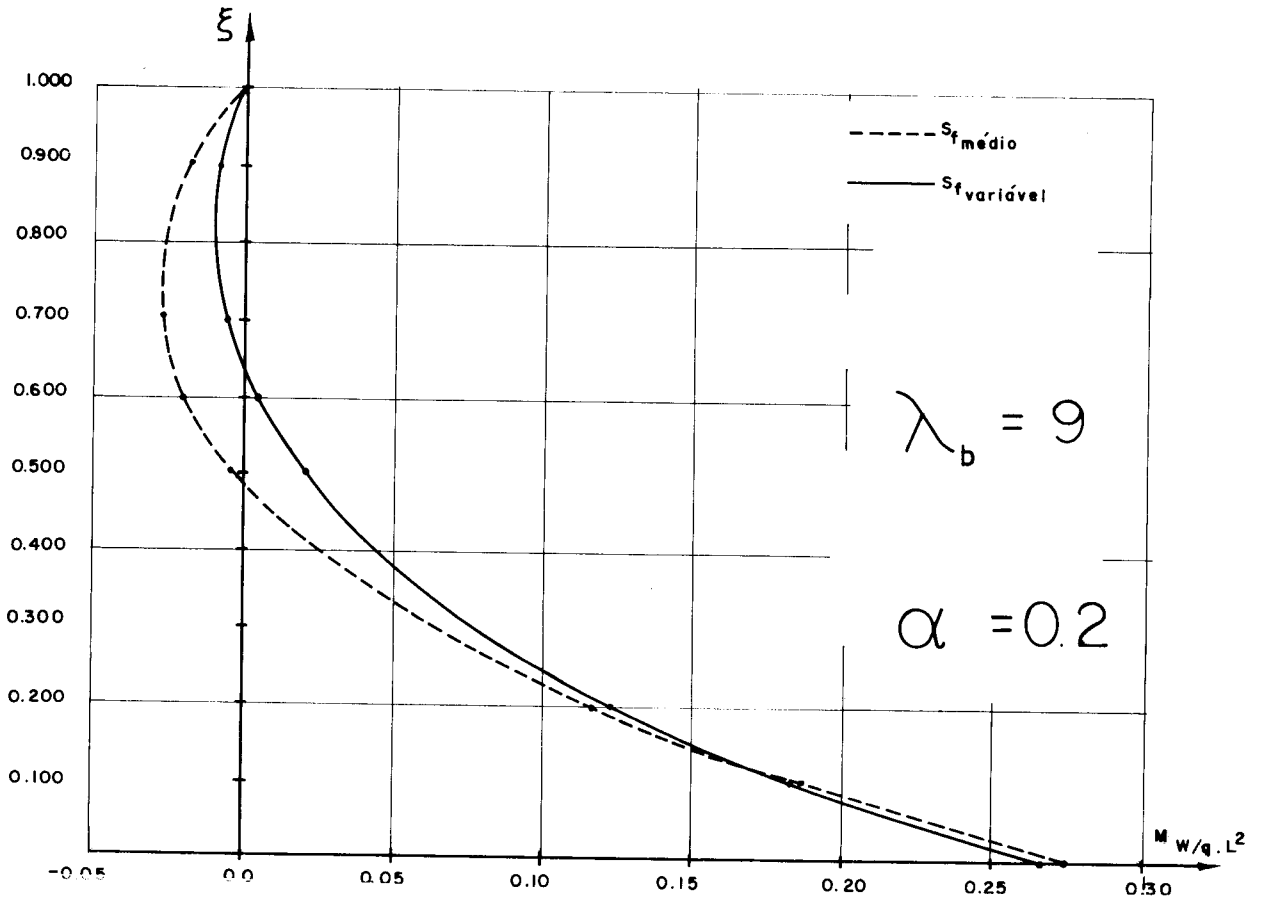


FIG. 4.6 a — MOMENTOS FLETORES

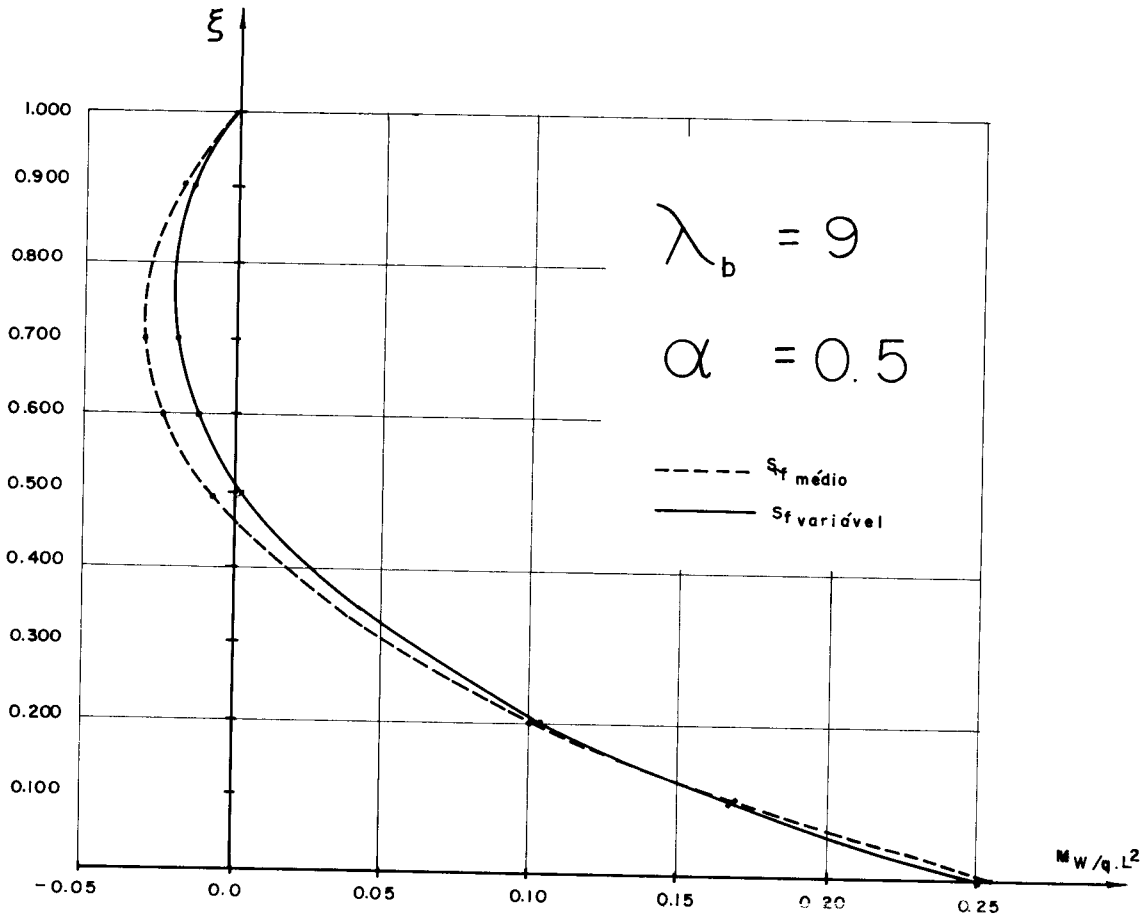


FIG. 4.6 b — MOMENTOS FLETORES

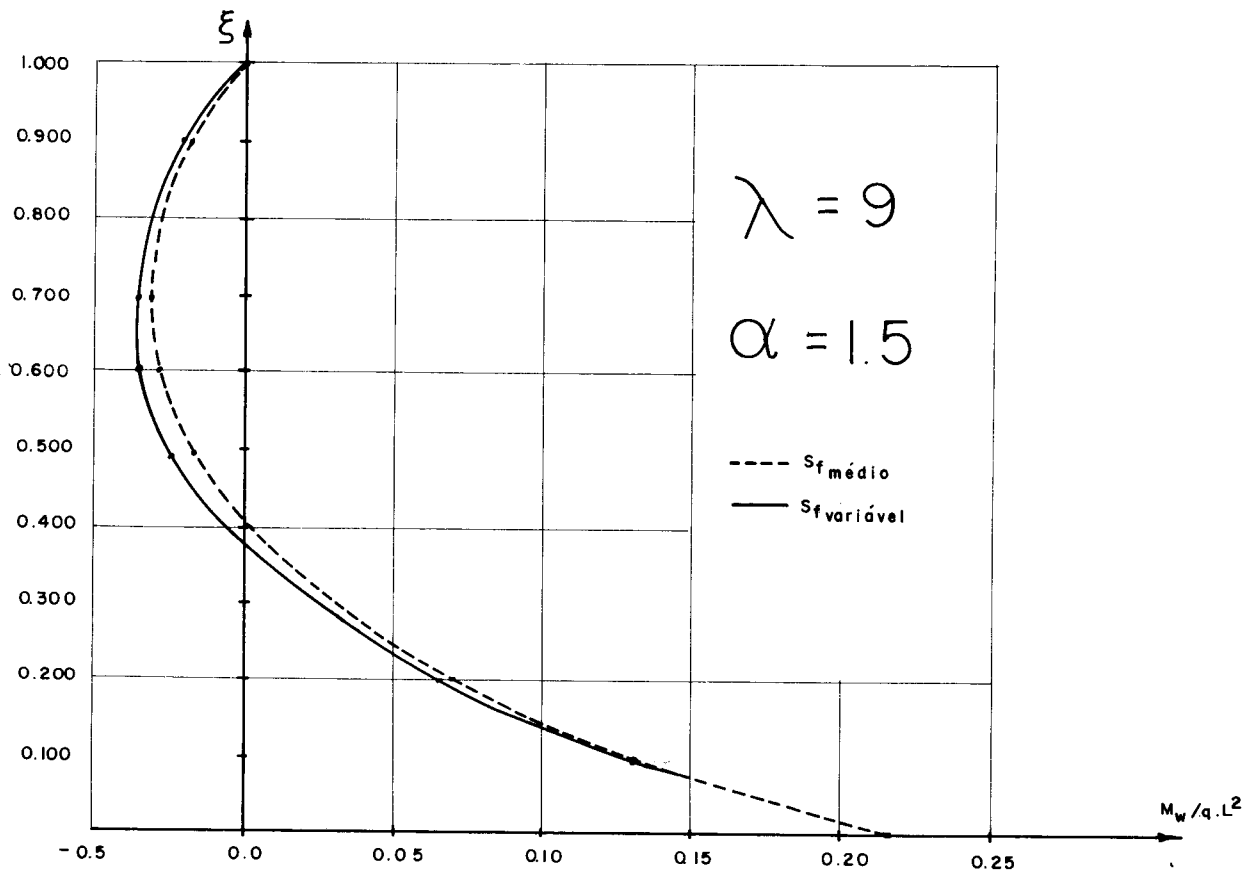


FIG. 4.6.c — MOMENTOS FLETORES

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 1,5$	
	$s_f$ méd.	$s_f$ var.	$s_f$ méd.	$s_f$ var.	$s_f$ méd.	$s_f$ ver.
0,100	0,0205	0,0186	0,0186	0,0176	0,0147	0,0158
0,200	0,0693	0,0632	0,0622	0,0587	0,0478	0,0504
0,500	0,267	0,256	0,233	0,225	0,167	0,174
0,600	0,329	0,323	0,285	0,278	0,200	0,207
0,700	0,384	0,389	0,330	0,326	0,228	0,234
0,900	0,473	0,511	0,400	0,408	0,268	0,271
1,000	0,510	0,568	0,422	0,443	0,282	0,283

TABELA T2.a VALORES DOS DESLOCAMENTOS  $(u \cdot \frac{s_{fbase}}{q \cdot L^2})$   $\lambda_{base} = 25$

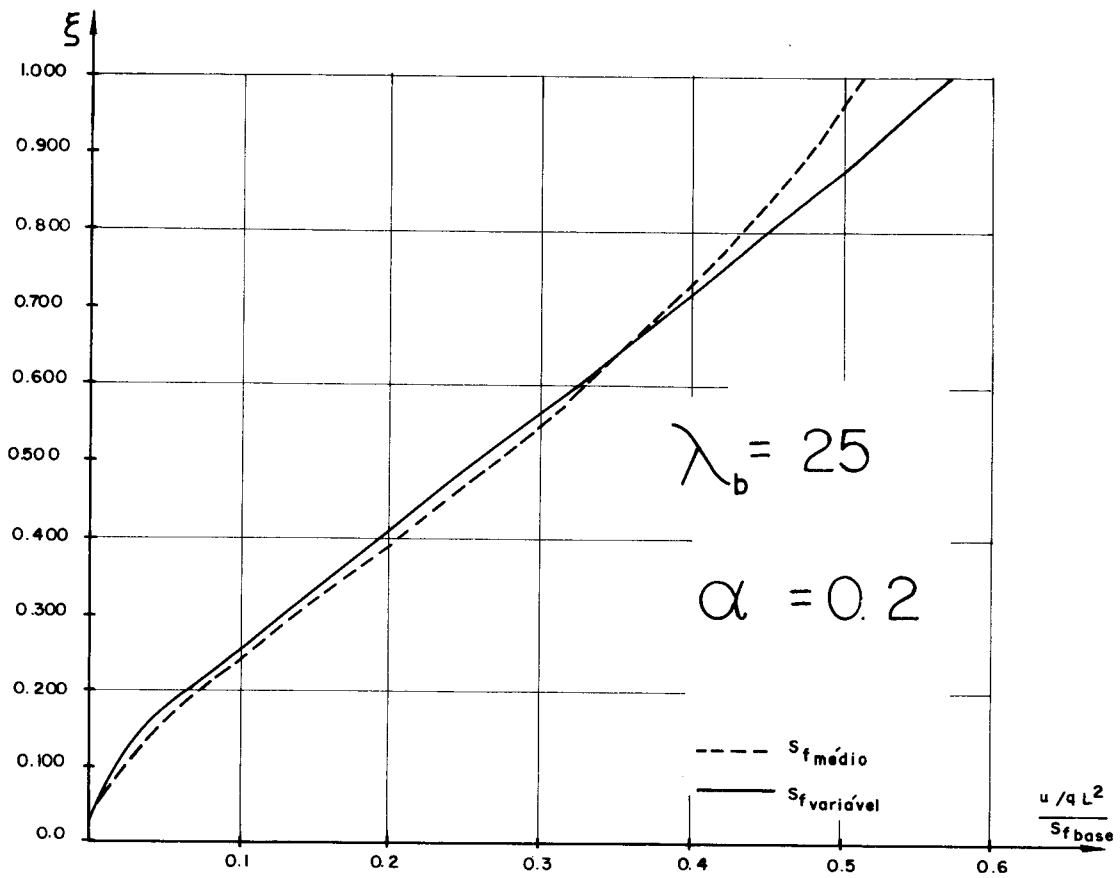


FIG. 4.7 a — DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

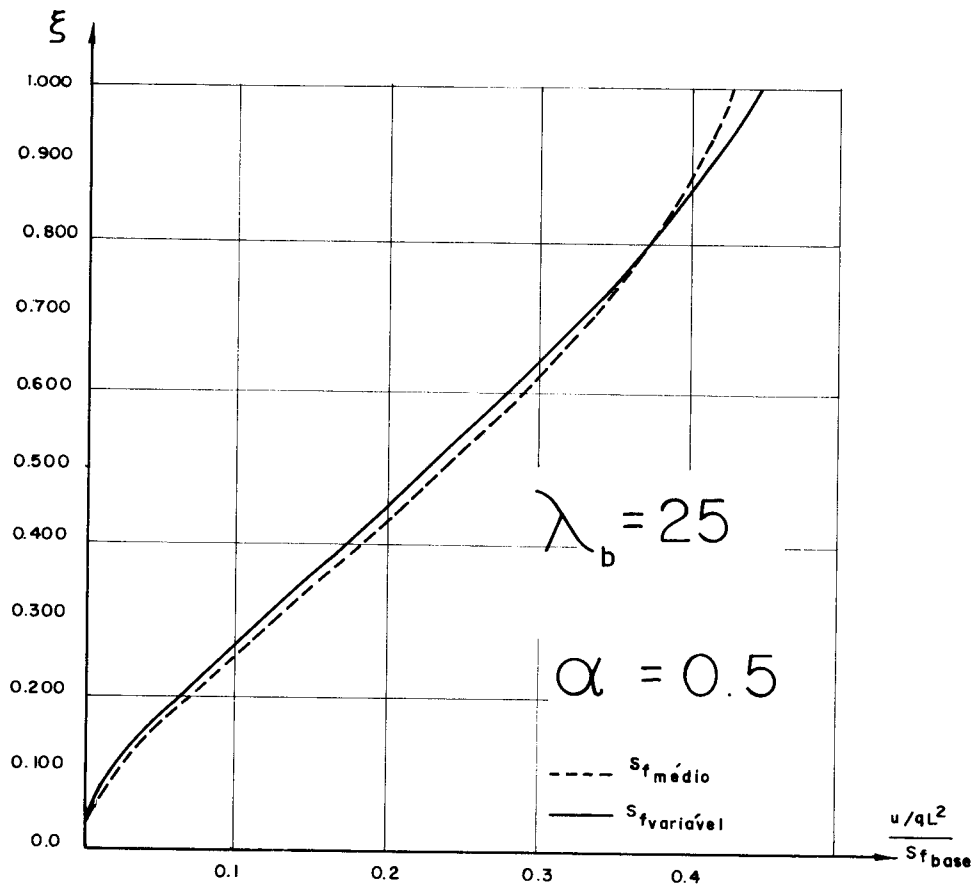


FIG. 4.7 b — DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

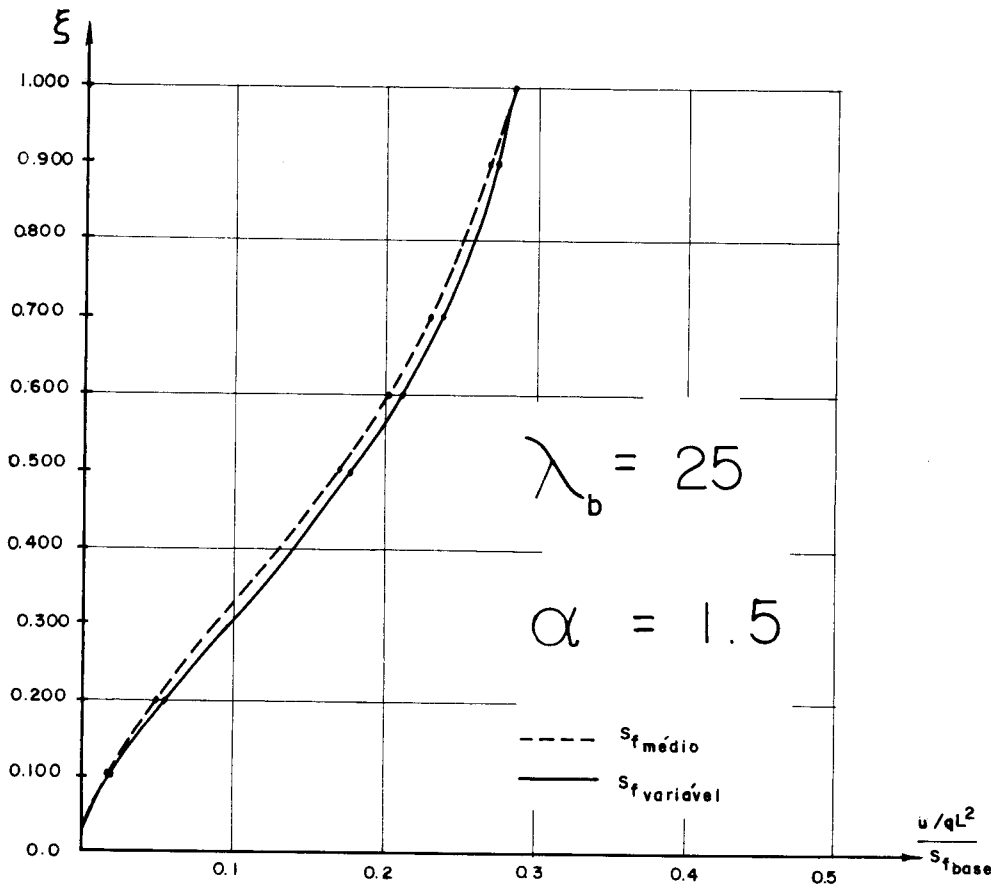


FIG. 4.7c — DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 1,5$	
	Sf méd.	Sf var.	Sf méd.	Sf var.	Sf méd.	Sf var.
0,000	0,194	0,179	0,179	0,170	0,147	0,154
0,100	0,111	0,100	0,098	0,091	0,070	0,075
0,200	0,057	0,055	0,046	0,045	0,027	0,027
0,500	-0,020	-0,002	-0,021	-0,013	-0,019	-0,023
0,600	-0,028	-0,009	-0,027	-0,020	-0,022	-0,025
0,700	-0,030	-0,012	-0,028	-0,022	-0,022	-0,025
0,900	-0,017	-0,009	-0,016	-0,013	-0,013	-0,013
1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

TABELA T2.b MOMENTOS FLETORES  $M_w/q \cdot L^2$   $\lambda_{base} = 25$

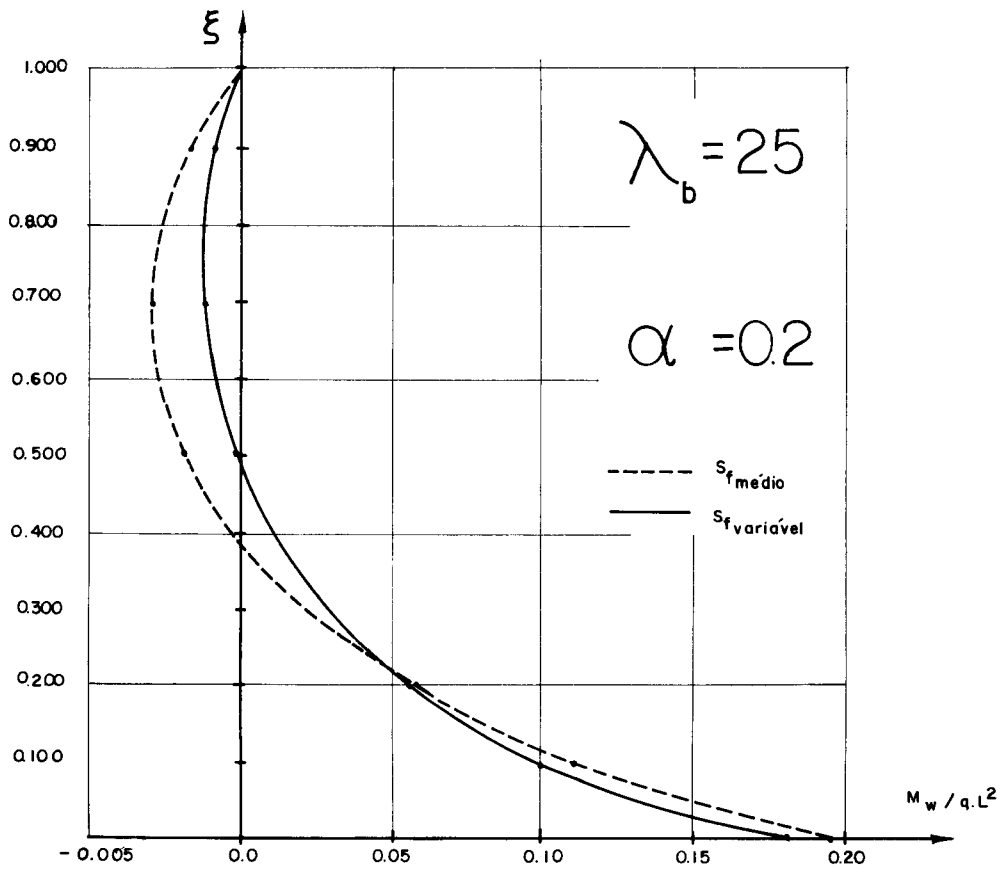


FIG. 4.8 a — MOMENTOS FLETORES

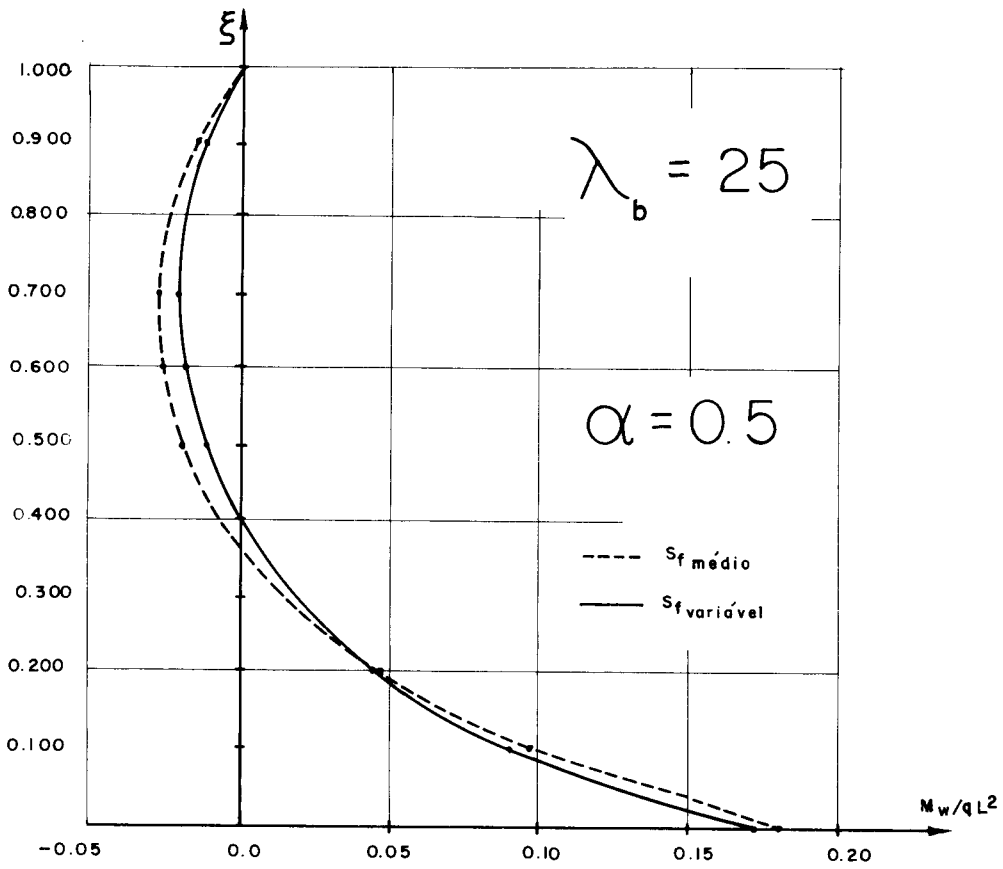


FIG. 4.8 b — MOMENTOS FLETORES

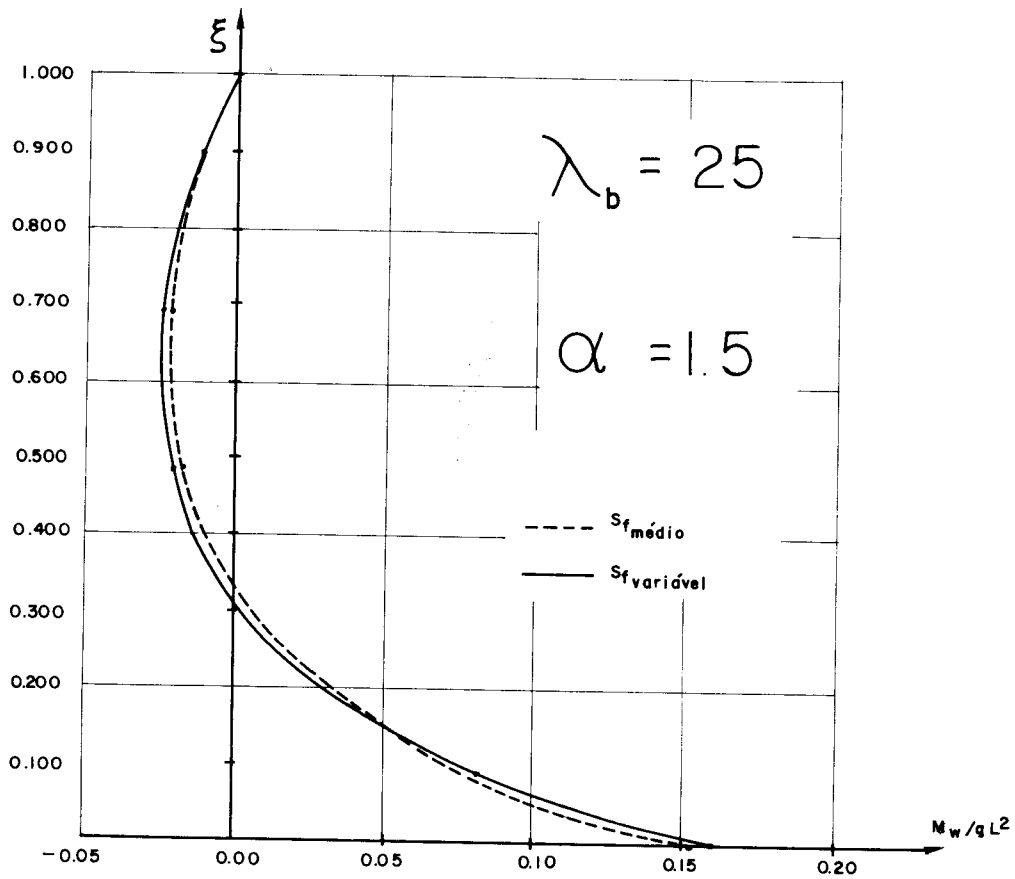


FIG. 4.8 c — MOMENTOS FLETORES

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 1,5$	
	$s_{f\text{ m\~{e}d.}}$	$s_{f\text{ var.}}$	$s_{f\text{ m\~{e}d.}}$	$s_{f\text{ var.}}$	$s_{f\text{ m\~{e}d.}}$	$s_{f\text{ var.}}$
0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,100	0,225	0,313	0,254	0,302	0,329	0,291
0,200	0,347	0,446	0,385	0,436	0,475	0,44
0,500	0,389	0,410	0,410	0,414	0,449	0,452
0,600	0,352	0,348	0,364	0,357	0,384	0,392
0,700	0,307	0,282	0,311	0,297	0,313	0,322
0,900	0,230	0,163	0,221	0,199	0,194	0,199
1,000	0,216	0,114	0,205	0,172	0,172	0,178

TABELA T2-c FORÇAS CORTANTES  $Q_f/q \cdot L$   $\lambda_{\text{base}} = 25$

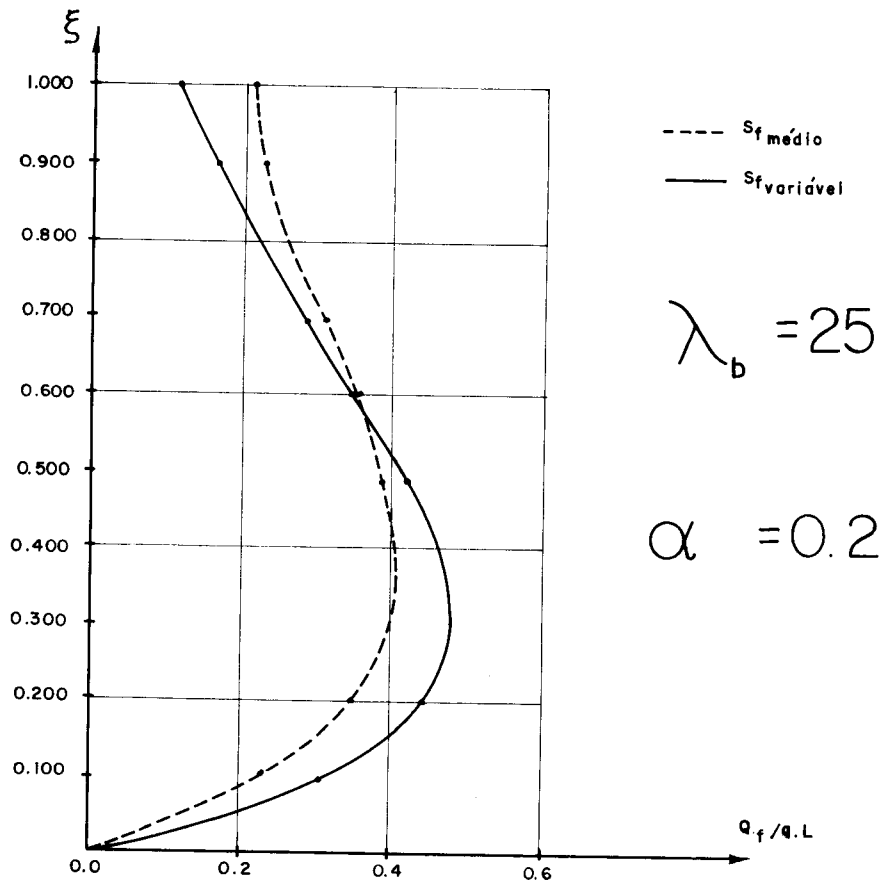


FIG. 4.9 a. FORÇAS CORTANTES

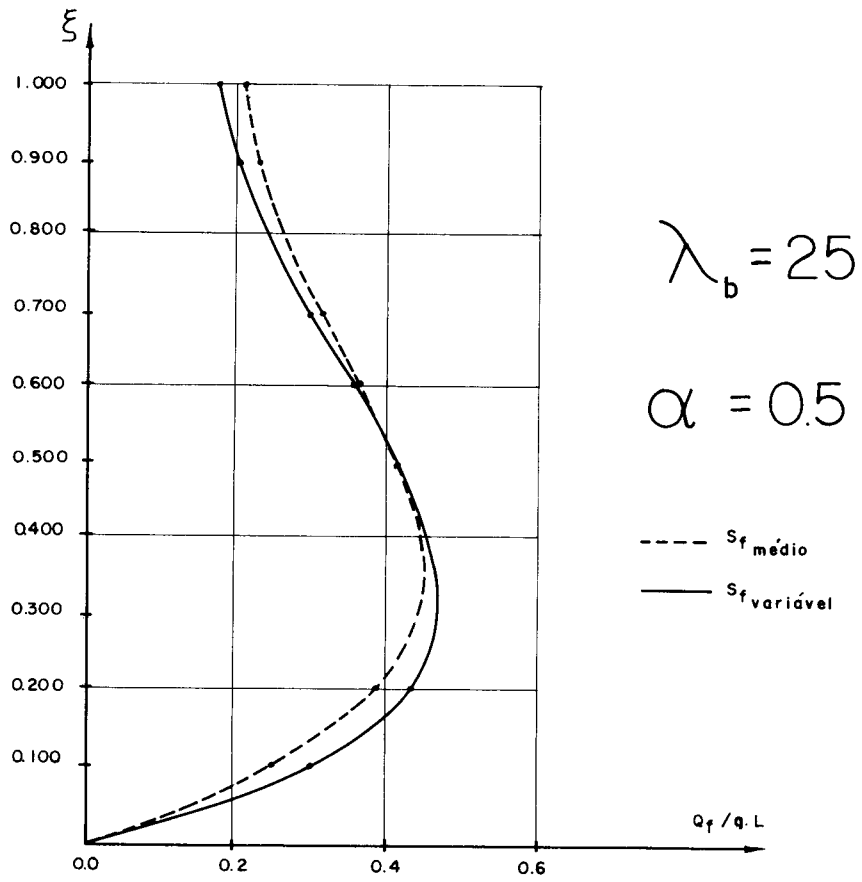


FIG. 4.9 b - FORÇAS CORTANTES



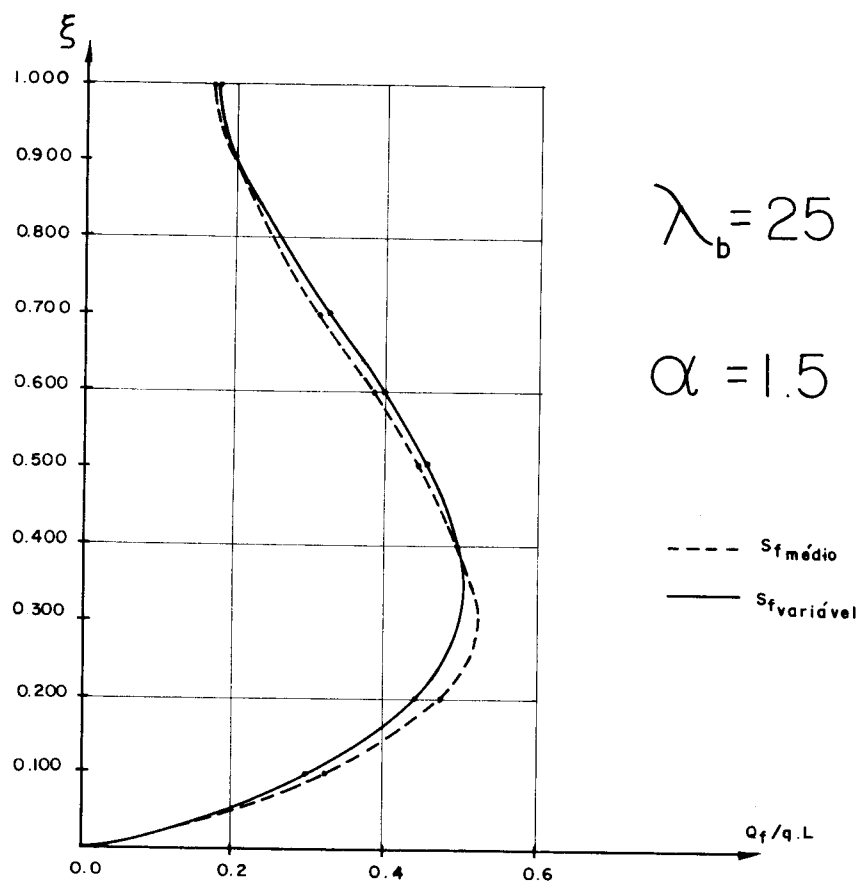


FIG. 4.9 c - FORÇAS CORTANTES

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,8$	
	$s_{f\text{ méd.}}$	$s_{f\text{ var.}}$	$s_{f\text{ méd.}}$	$s_{f\text{ var.}}$	$s_{f\text{ méd.}}$	$s_{f\text{ var.}}$
0,100	0,0425	0,035	0,0378	0,0337	0,0342	0,0326
0,200	0,131	0,106	0,114	0,101	0,101	0,0963
0,500	0,414	0,353	0,348	0,316	0,300	0,288
0,600	0,487	0,430	0,407	0,376	0,350	0,338
0,700	0,546	0,500	0,454	0,426	0,389	0,378
0,900	0,623	0,618	0,514	0,500	0,438	0,430
1,000	0,646	0,667	0,531	0,523	0,452	0,446

TABELA T3-a DESLOCAMENTOS  $(u \cdot s_{f\text{ base}} / q \cdot L^2)$   $\lambda_{\text{base}} = 100$

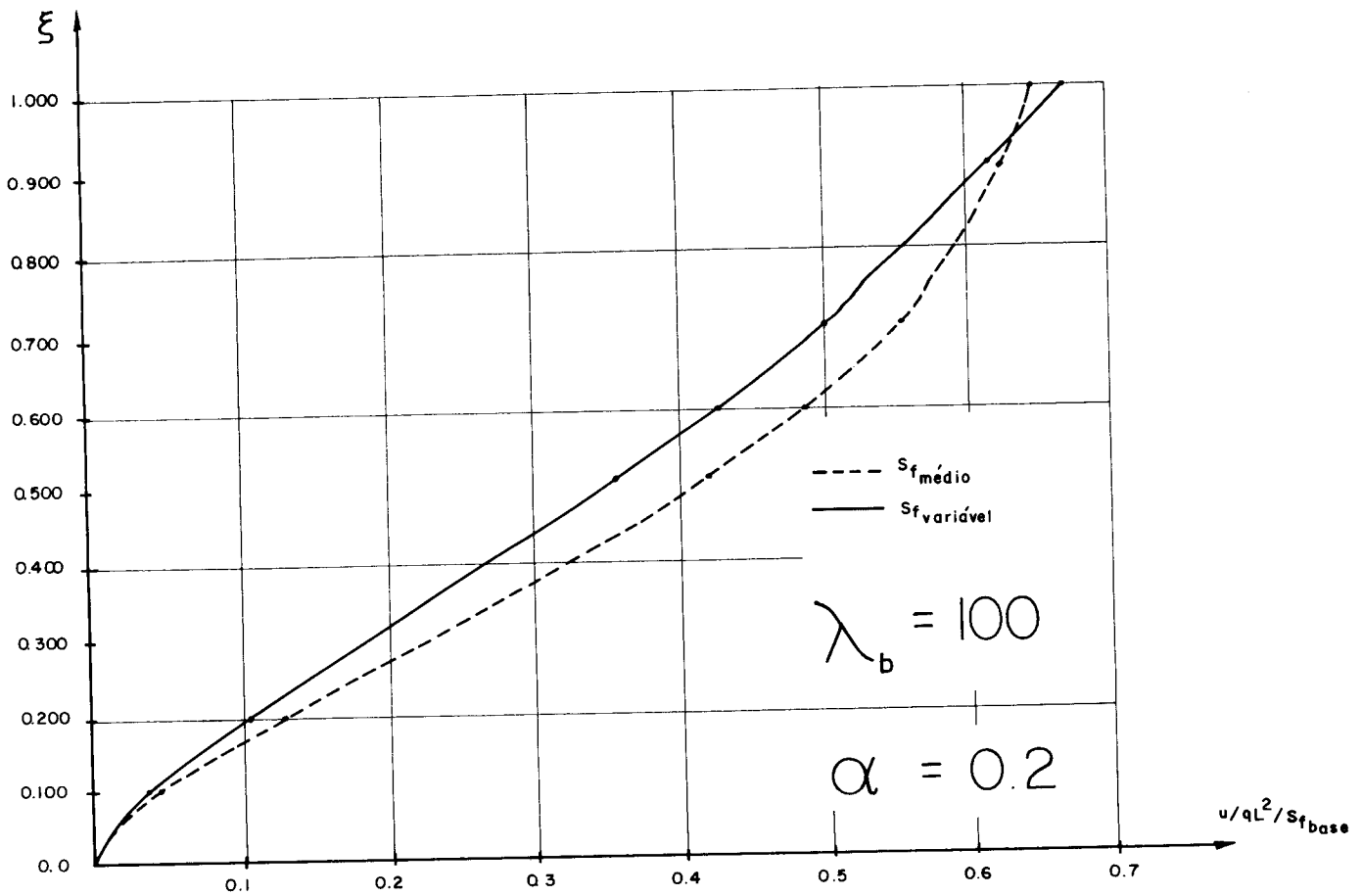


FIG. 4.10 a - DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

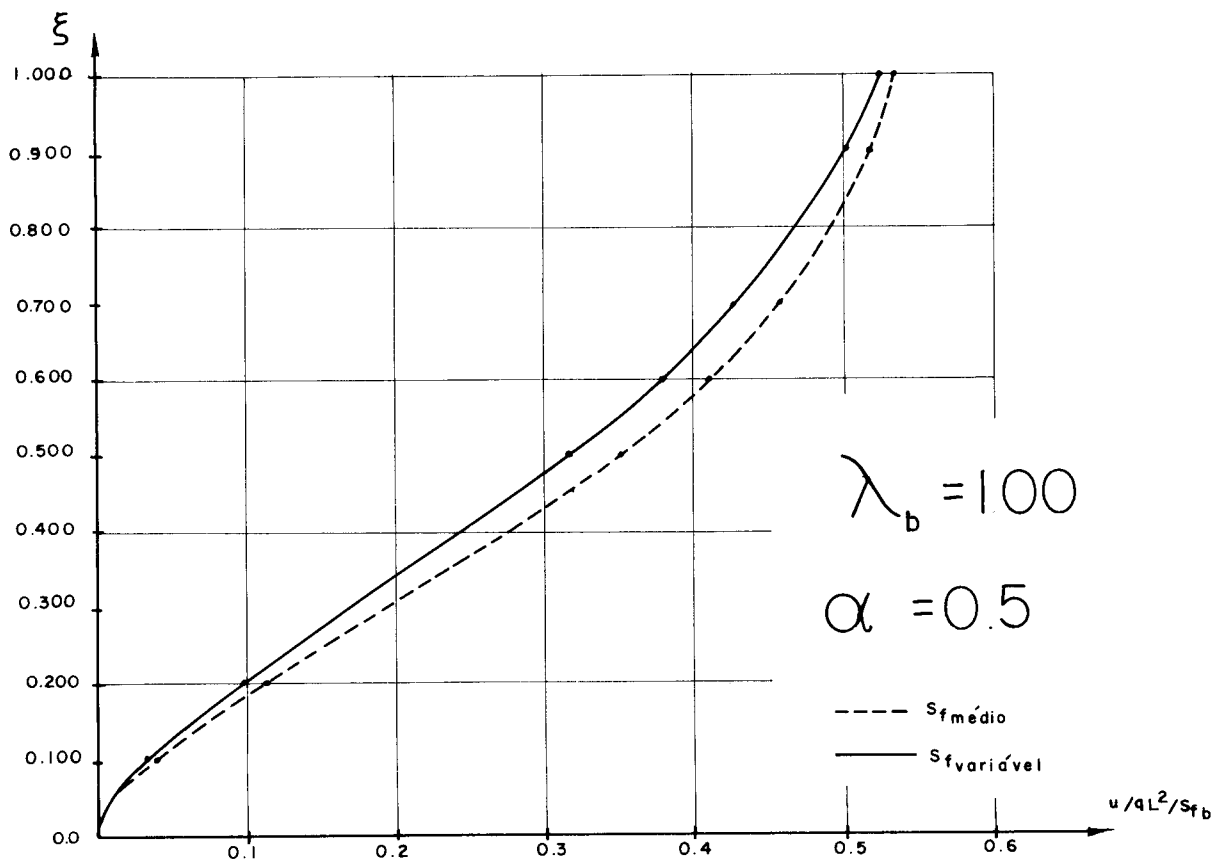


FIG. 4.10 b - DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

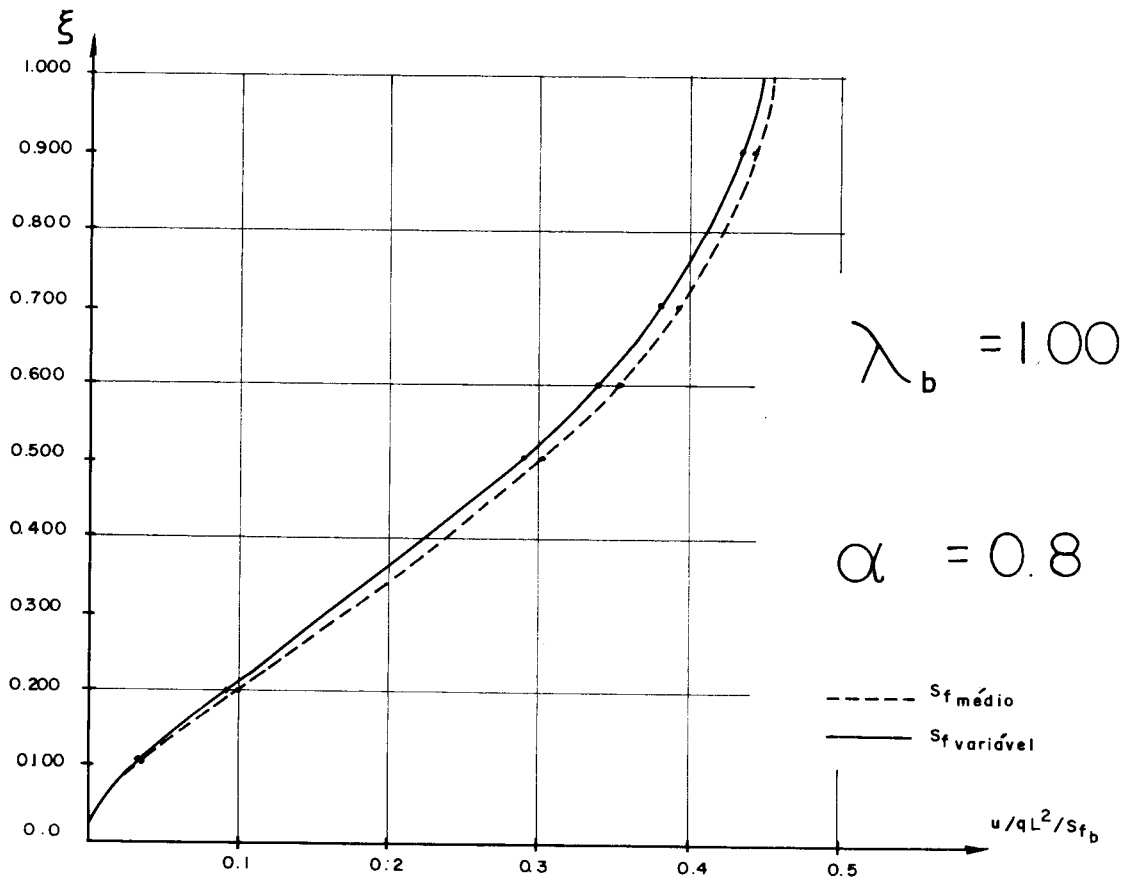


FIG. 4.10 c - DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,8$	
	Sf méd.	Sf var.	Sf méd.	Sf var.	Sf méd.	Sf var.
0,000	0,113	0,096	0,103	0,094	0,096	0,092
0,100	0,041	0,056	0,032	0,029	0,026	0,027
0,200	0,010	0,009	0,007	0,006	0,004	0,004
0,500	-0,013	-0,005	-0,011	-0,008	-0,010	-0,009
0,600	-0,014	-0,006	-0,012	-0,009	-0,010	-0,010
0,700	-0,014	-0,008	-0,012	-0,010	-0,010	-0,010
0,900	-0,009	-0,006	-0,008	-0,007	-0,007	-0,006
1,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

TABELA T3-b MOMENTOS FLETORES  $M_w/q \cdot L^2$   $\lambda_{base} = 100$

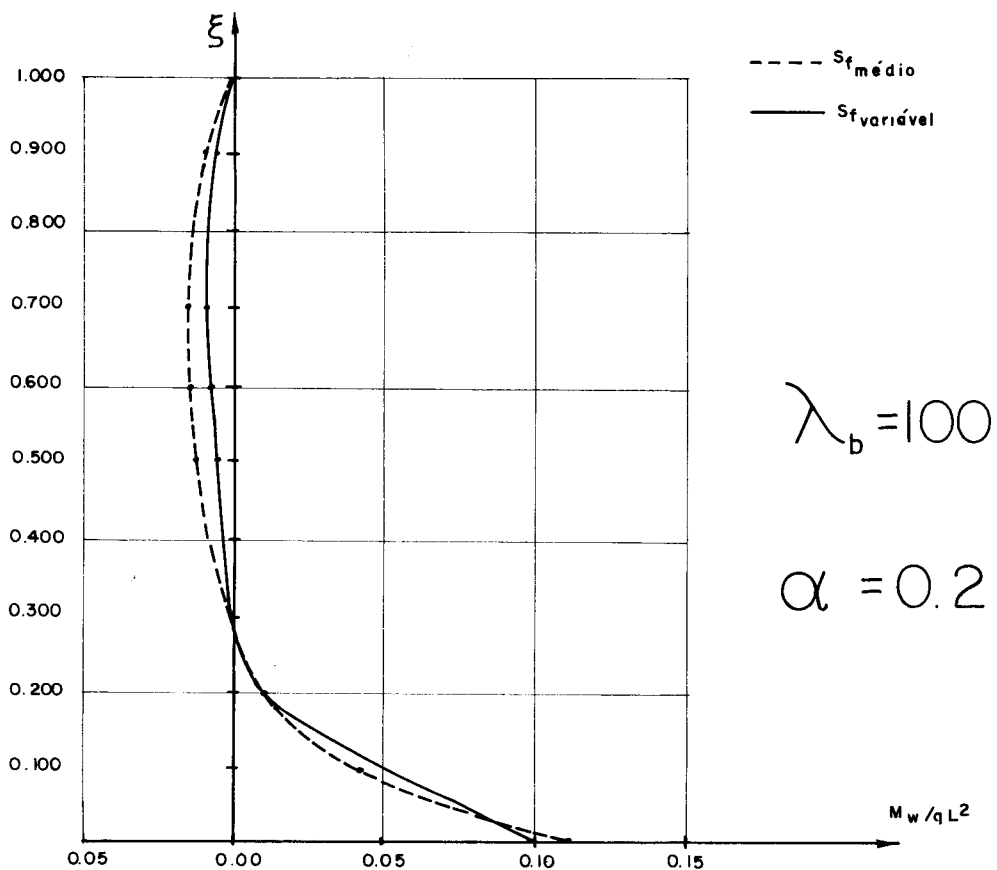


FIG. 4.11 a — MOMENTOS FLETORES

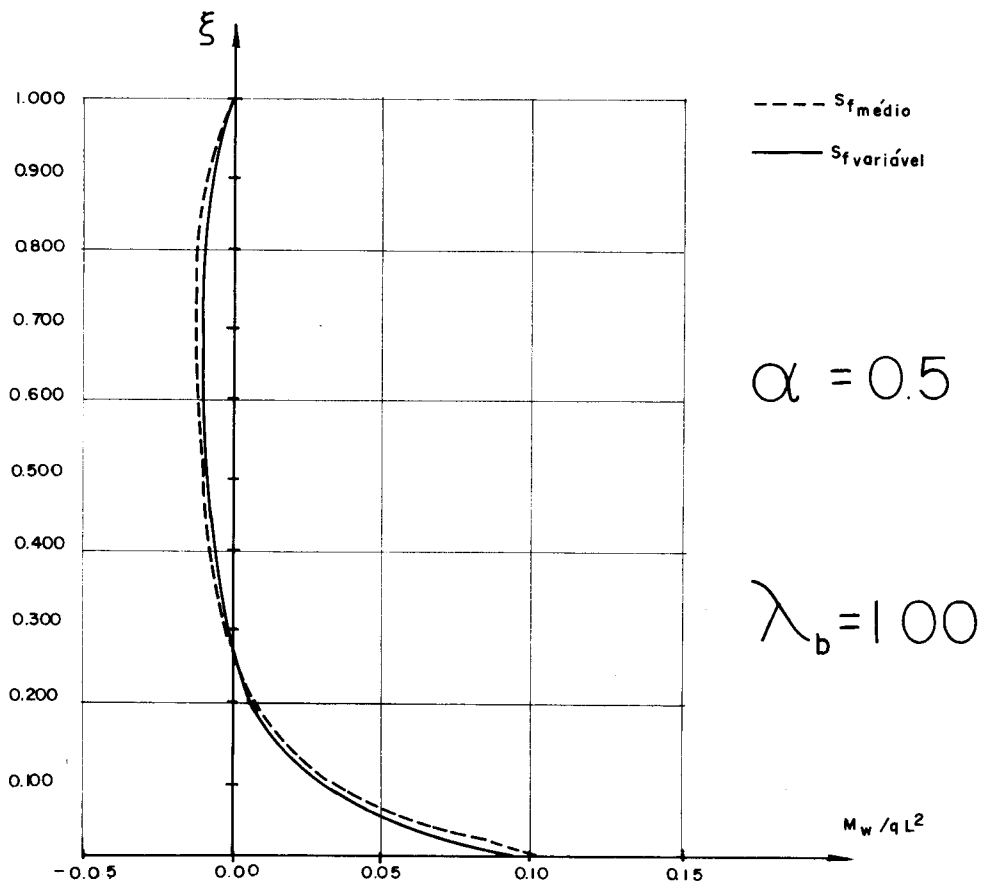


FIG. 4.11 b — MOMENTOS FLETORES

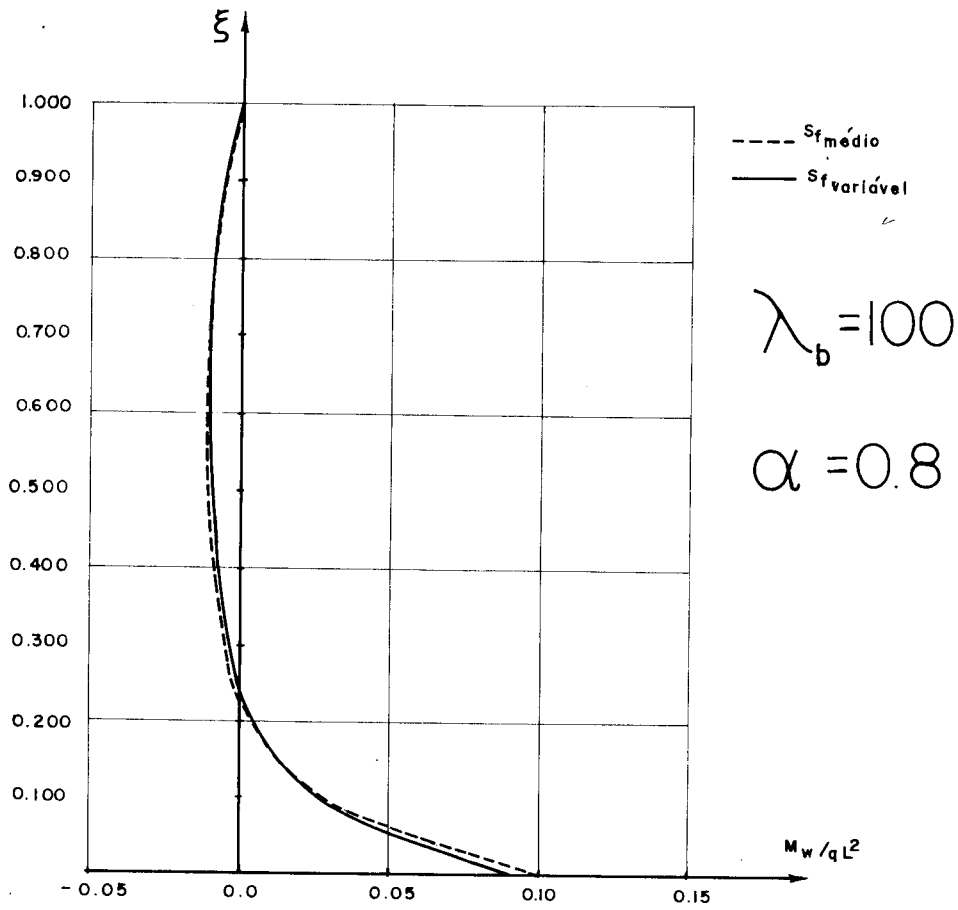


FIG. 4.11 c - MOMENTOS FLETORES

$\xi$	$\alpha = 0,2$		$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0,8$	
	$S_f$ méd.	$S_f$ var.	$S_f$ méd.	$S_f$ var.	$S_f$ méd.	$S_f$ var.
0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,100	0,439	0,551	0,480	0,544	0,513	0,539
0,200	0,588	0,662	0,624	0,659	0,652	0,659
0,500	0,481	0,478	0,487	0,481	0,491	0,488
0,600	0,396	0,384	0,398	0,389	0,399	0,395
0,700	0,309	0,294	0,307	0,298	0,306	0,303
0,900	0,161	0,145	0,152	0,151	0,145	0,147
1,000	0,131	0,096	0,119	0,115	0,110	0,110

TABELA T3-c FORÇAS CORTANTES  $Q_f/q \cdot L$   $\lambda_{base} = 100$

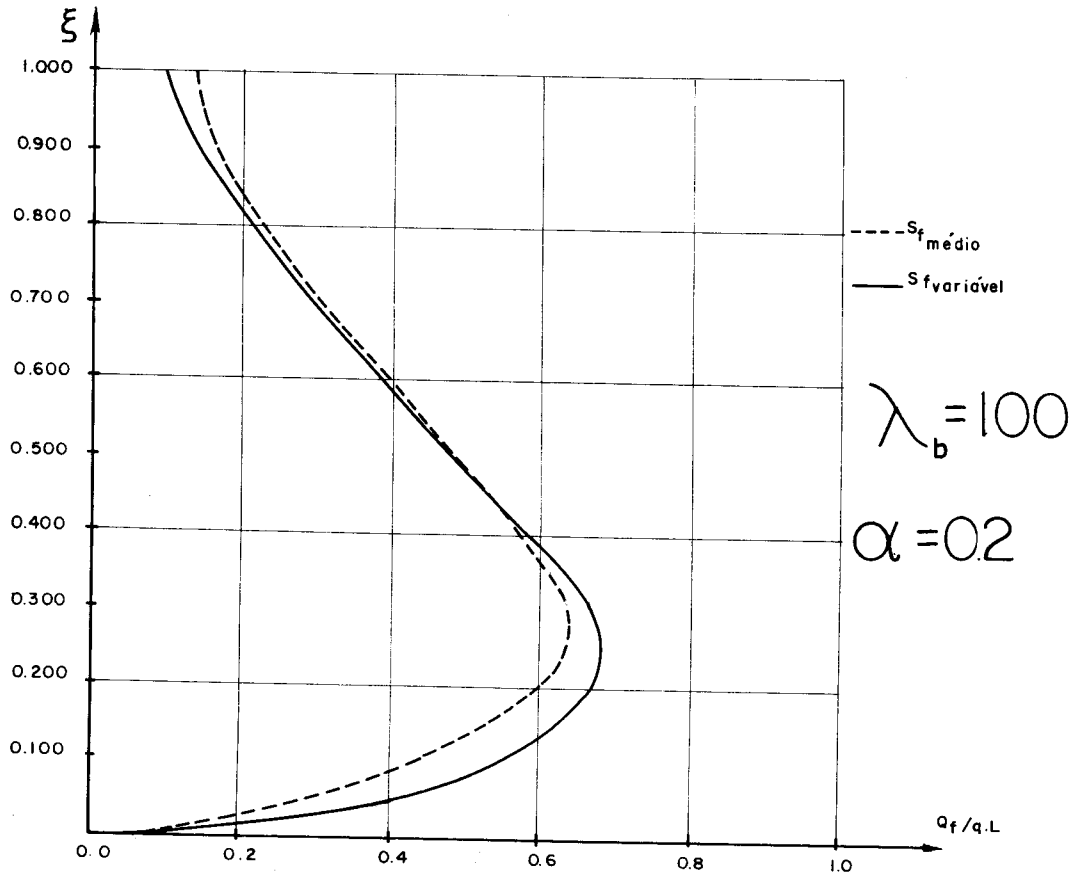


FIG. 4.12 a - FORÇAS CORTANTES

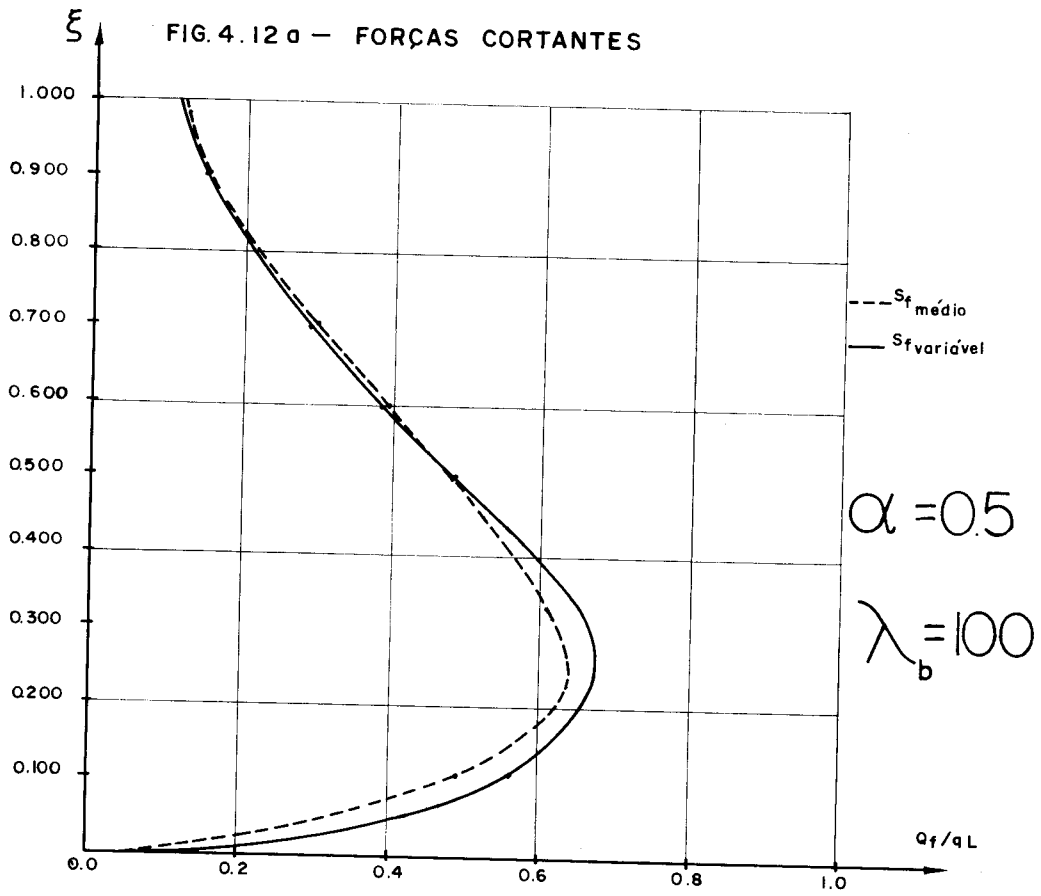


FIG. 4.12 b - FORÇAS CORTANTES

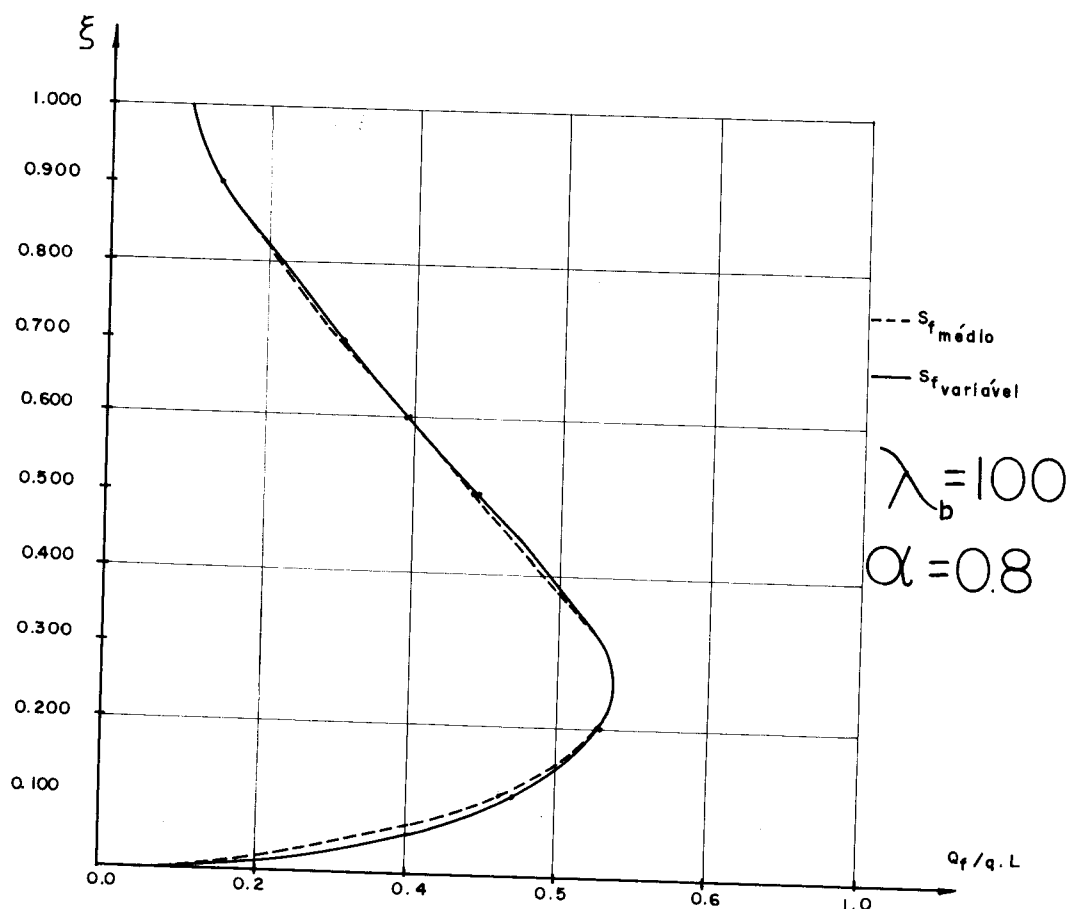


FIG.4.12c - FORÇAS CORTANTES

#### 4.4 - TERCEIRO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Este exemplo é dedicado ao estudo da influência da variação de rigidez da parede ao longo da altura no comportamento da associação plana de pórtico e parede. Cabe, antes de mais nada, esclarecer que a equação que governa, nesse caso, o comportamento do conjunto passa a ser expressa por:

$$-j_w \cdot u''' - j_w' \cdot u'' + s_f \cdot u' = Q \quad \dots (4.5)$$

onde  $j_w'$  é a derivada da rigidez da parede em relação à variável  $z$ . Acrescente-se, ainda, que a variação de rigidez não altera as condições de contorno dadas em (3.31). Por

outro lado, tal equação, em termos da variável adimensional, escreve-se:

$$-u'''' - \lambda_1 u'' + \lambda u' = Q \cdot L^3 / j_w \quad \dots (4.6)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{j'_w}{j_w} \quad \dots (4.7)$$

$$\lambda = L^2 \cdot \frac{s_f}{j_w}$$

lembrando, em tempo, que  $\lambda_1$  e  $\lambda$  são, agora, funções da variável adimensional  $\xi$ .

Como no exemplo anterior, abordam-se, aqui, também, alguns casos em que a rigidez  $j_w$  da parede, varia segundo uma lei linear. Assim, tem-se para  $j_w$  a seguinte expressão:

$$j_w(\xi) = j_{w(\text{base})} \cdot [1 - (1-\alpha)\xi] \quad \dots (4.8)$$

e para  $j'_w$ , conseqüentemente, a seguinte expressão:

$$j'_w(\xi) = j_{w(\text{base})} \cdot (\alpha-1) \quad \dots (4.9)$$

onde  $\alpha$  tem o mesmo significado dado no exemplo anterior, trocando-se  $s_f$  por  $j_w$ , ou seja:

$$\alpha = \frac{j_{w(\text{topo})}}{j_{w(\text{base})}} \quad \dots (4.10)$$

A rigidez relativa média  $\lambda_m$  é dada, agora, pela expressão:

$$\lambda_m = \int_0^1 \lambda \cdot d\xi \quad \dots (4.11)$$

resultando pois:



$$\lambda_m = \frac{L^2 \cdot s_f \cdot \ln(\alpha)}{(\alpha-1) \cdot j_w(\text{base})} \dots (4.12)$$

Uma particularidade de grande interesse, neste caso, consiste no fato de que os resultados da associação de pórtico e parede, supondo a parede de rigidez constante e igual ao valor médio da rigidez ao longo da altura, distorcem bastante daqueles verificados no caso de levar em consideração a variação de rigidez. Outrossim, resultados praticamente coincidentes são obtidos supondo a parede com rigidez uniforme, porém, igual à rigidez na base. Tal fato pode ser facilmente entendido. Em primeiro lugar, convém notar que a parede apresenta uma participação no conjunto mais acentuada na região da base, sendo no topo, mesmo nos casos onde sua rigidez é elevada em relação ao pórtico, por exemplo, para  $\lambda$  da ordem de 2 a 3, pouco expressiva. Em segundo lugar, a solicitação da parede, diminui com a altura, amortecendo assim, de certa forma, o efeito em consideração nos casos em que  $\alpha$  é menor que 1, como o que foi analisado. Os resultados obtidos foram lançados nos gráficos das figuras 4.13 a 4.16. Tais gráficos deixam evidente que a influência da variação de rigidez da parede ao longo da altura, praticamente, pode ser negligenciada, tomando-se por base, todavia, uma associação com parede de rigidez uniforme e igual à rigidez da parede na base; e não a rigidez média. Cabe lembrar, em tempo, que os resultados apresentados são relativos apenas às paredes com variação de rigidez linear ao longo da altura, tomando-se para  $\alpha$  o valor 0,5.

Finalizando, deve-se ressaltar que o procedimento exposto no item 3.3.1, com ligeiras modificações, permite integrar a equação (4.6). Deixa-se de entrar nesses pormenores, pois trata-se de assunto por demais expedito.

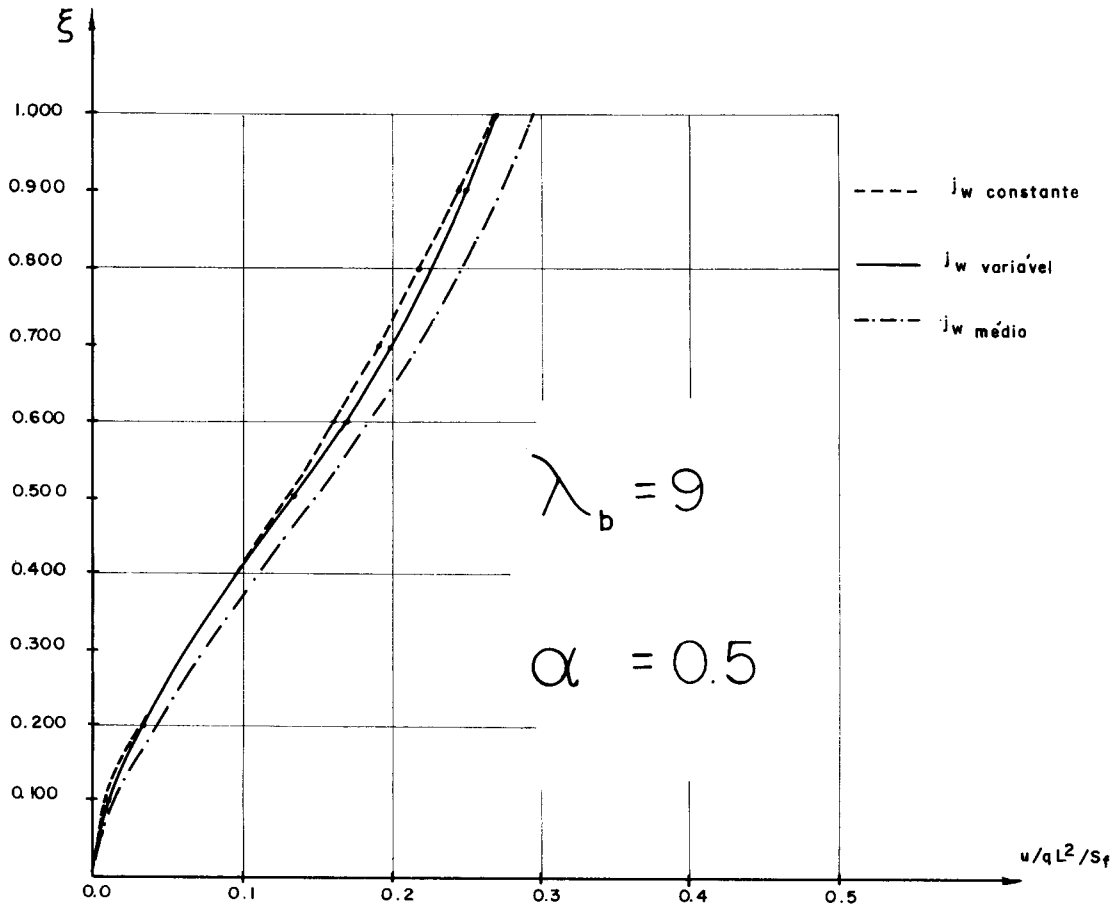


FIG. 4.13 a — DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

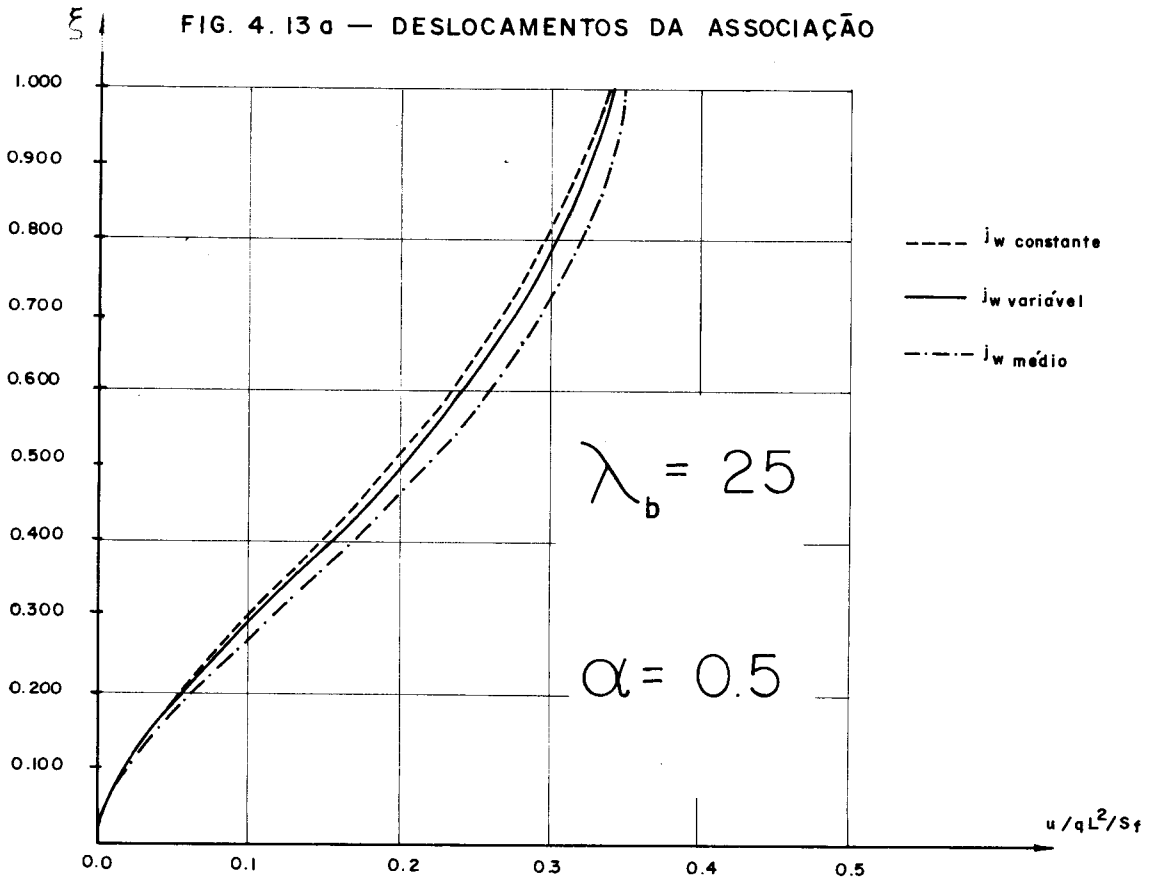


FIG. 4.13 b — DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

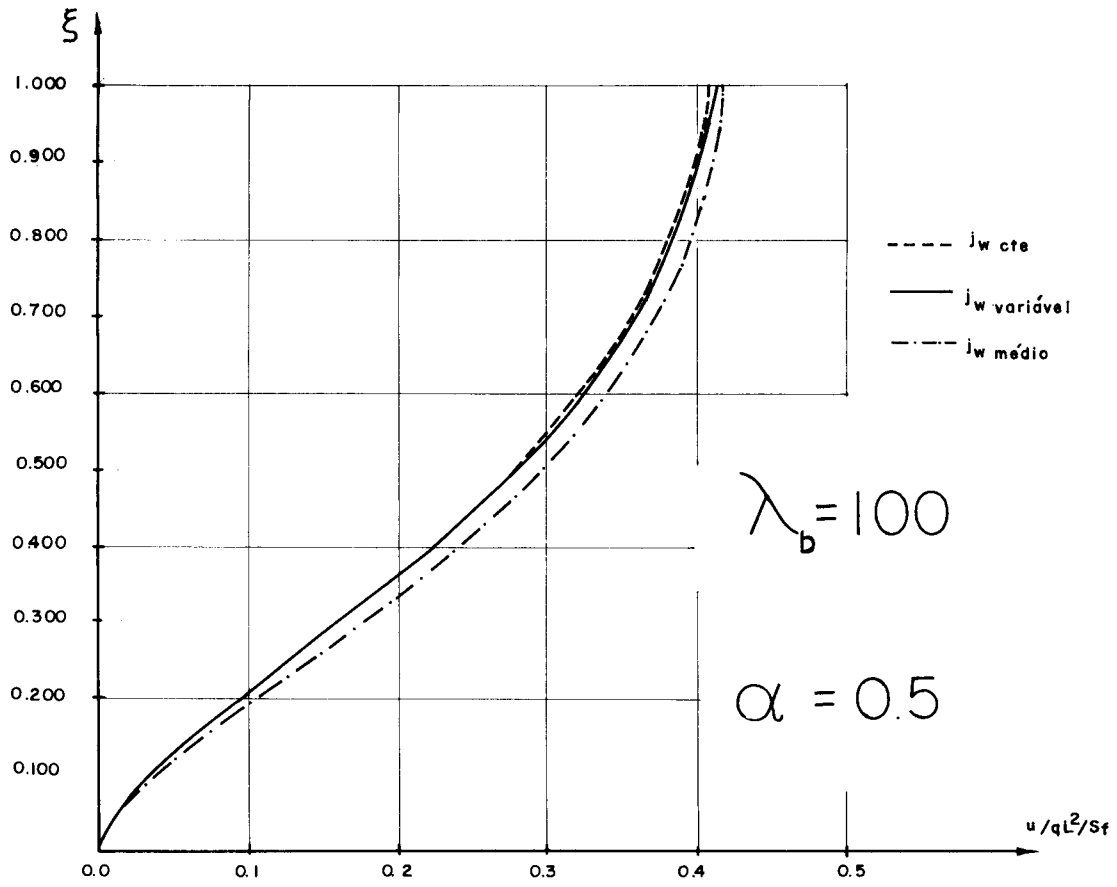


FIG. 4.13 c - DESLOCAMENTOS DA ASSOCIAÇÃO

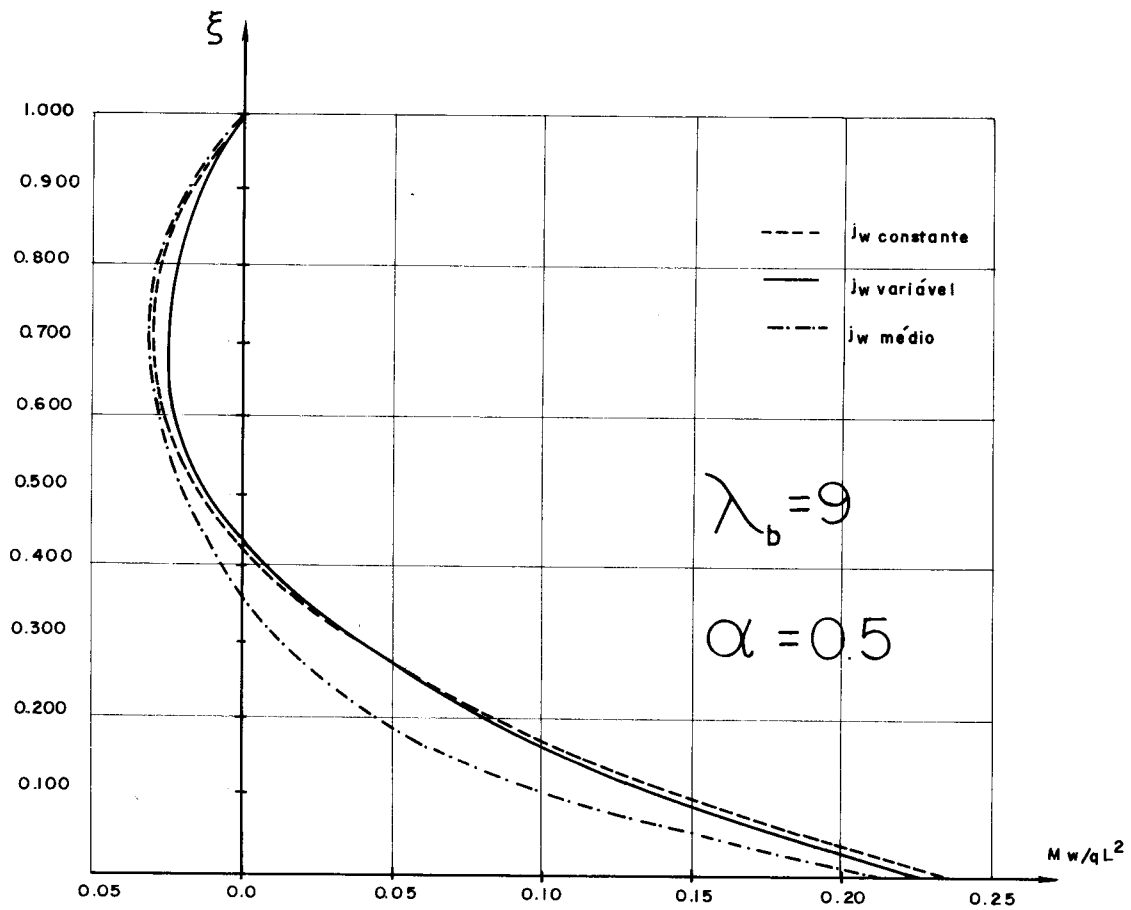


FIG. 4.14 a - MOMENTOS FLETORES NA PAREDE

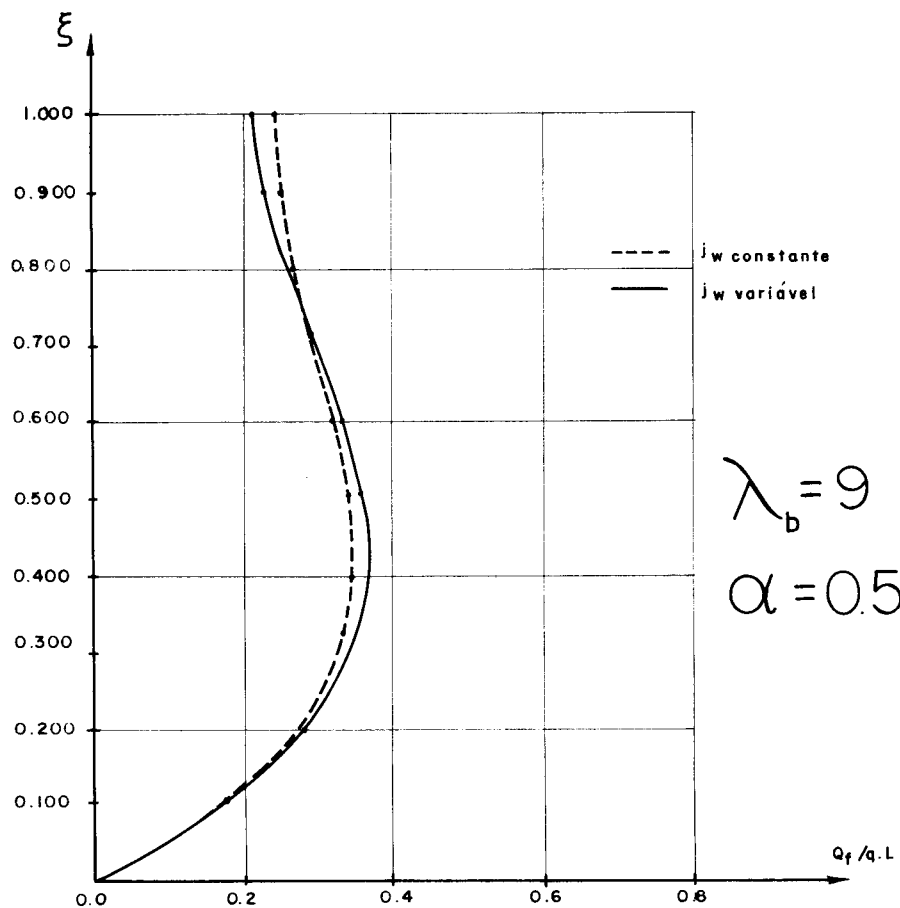


FIG. 4.14 b - FORÇAS CORTANTES NO PÓRICO

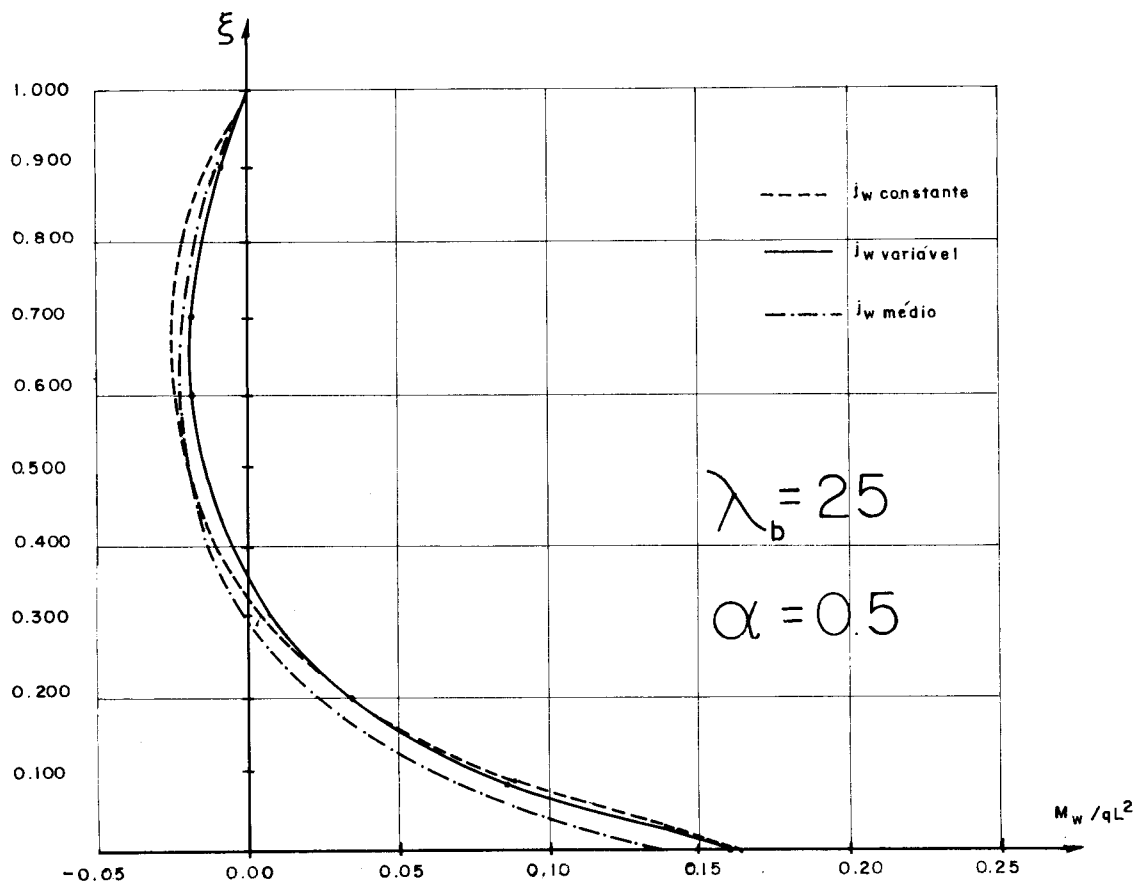


FIG. 4.15 a - MOMENTOS FLETORES NA PAREDE

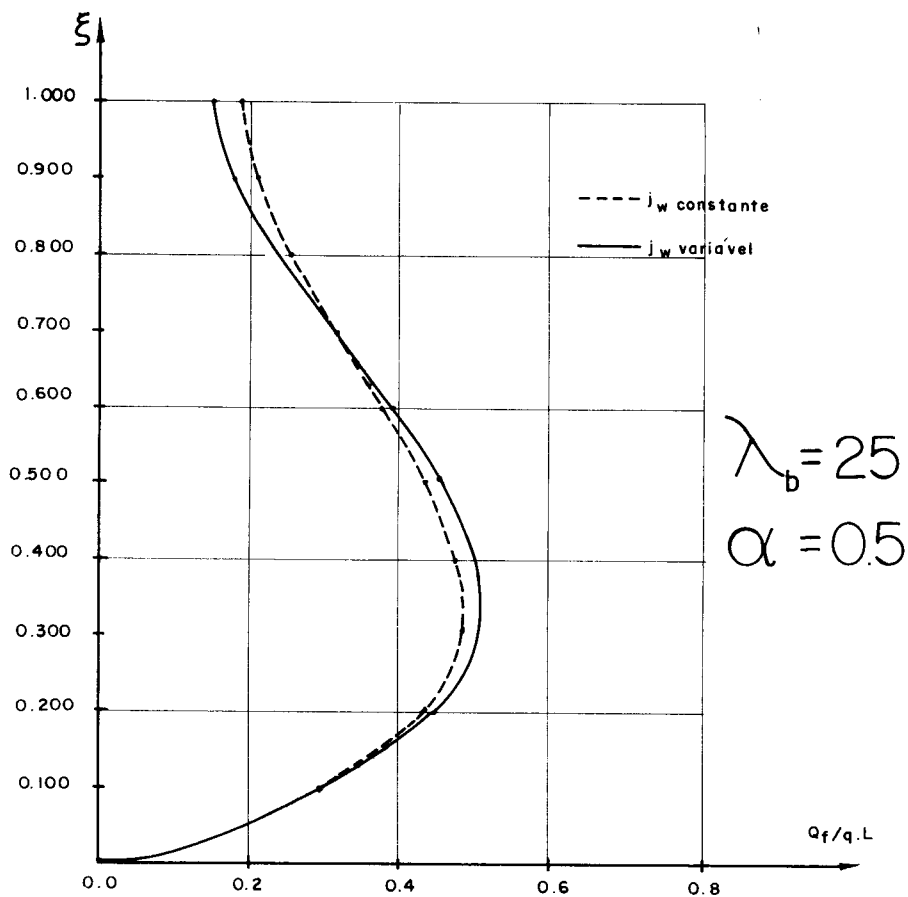


FIG. 4.15 b - FORÇAS CORTANTES NO PÓRTICO

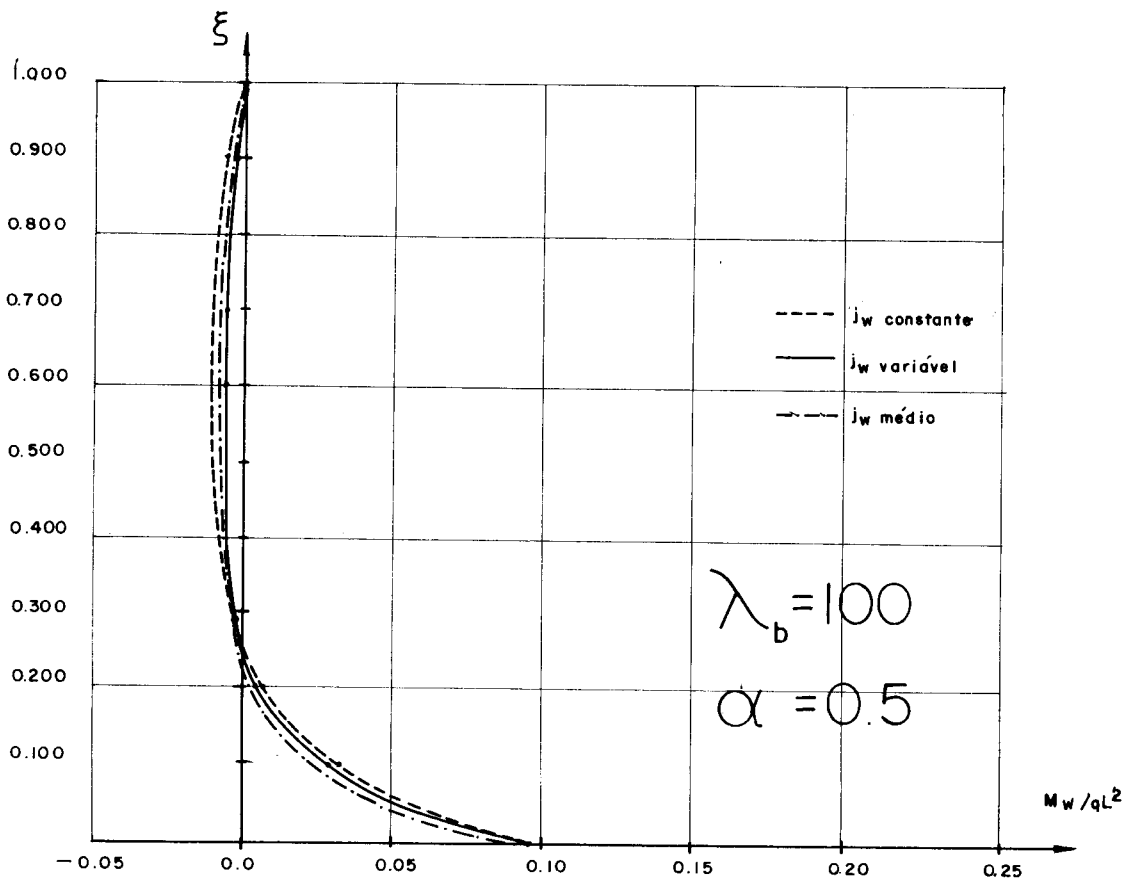


FIG. 4.16 a - MOMENTOS FLETORES NA PAREDE

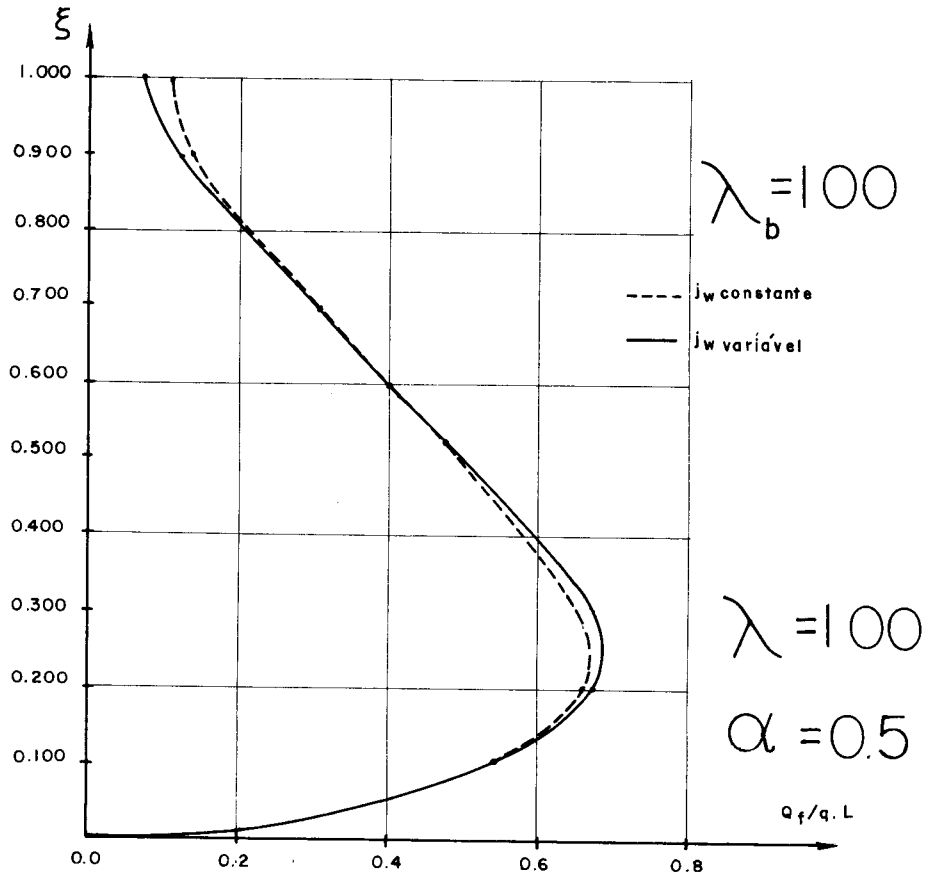


FIG. 4.16 b — FORÇAS CORTANTES NO PÓRTICO

#### 4.5 - QUARTO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A figura 4.17 esquematiza em planta a estrutura tridimensional objeto do exemplo em tela. Trata-se de uma associação tridimensional de pórticos e paredes de rigidez uniforme ao longo da altura, já analisada por MANCINI (5), utilizando o Método das Diferenças Finitas mediante o emprego de uma malha regular de 30 pontos e de operadores de diferenças derivados do polinômio interpolador do quarto grau. Aqui, esse mesmo problema é tratado através da malha de quinze pontos, já comentada no item 3.4.1 e com operadores de diferenças derivados do polinômio interpolador do oitavo grau.

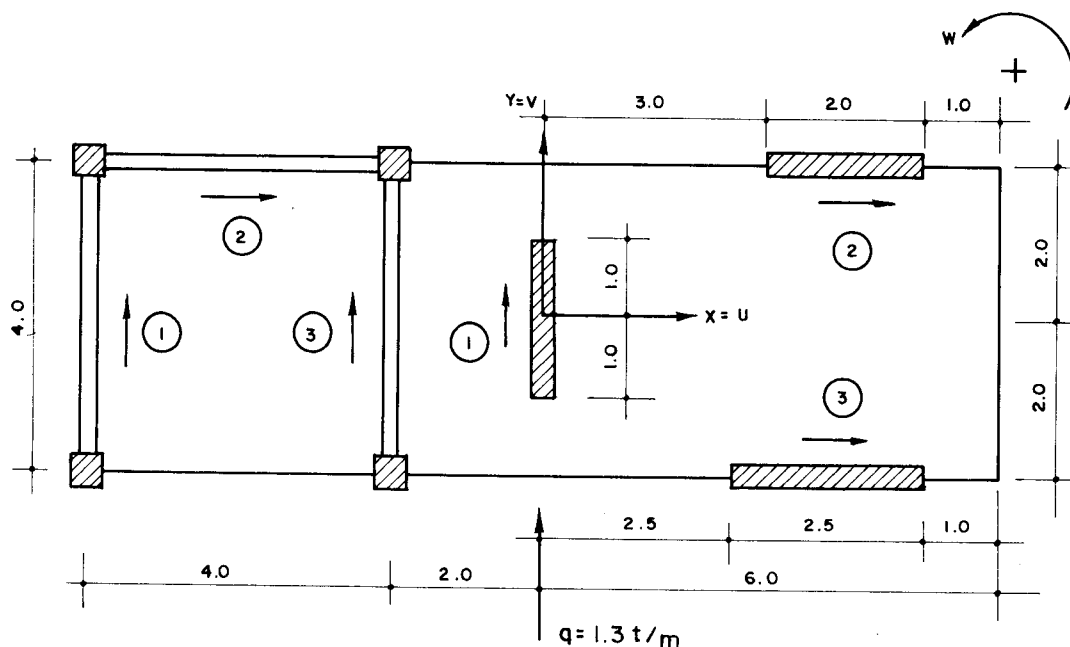


FIG. 4.17 - ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL - aspecto em planta

A estrutura em questão, mostrada em planta na figura 4.17, dispõe de 10 andares igualmente espaçados por pés direito de 3m. Os pórticos numerados na figura de 1 a 3 são idênticos e formados por vigas iguais com seção transversal de 20 x 50cm, e pilares com seção transversal de 40 x 40cm. As paredes planas, de números 1 e 2, apresentam seção transversal constante ao longo da altura de 25 x 200cm. Finalmente, a parede de número 3 possui seção transversal constante ao longo da altura de 25 x 250cm.

O carregamento externo é suposto contido no plano da parede de número 1 e constitui uma carga horizontal uniformemente distribuída ao longo da altura de 1,3 tf/m. O módulo de elasticidade do material dos componentes da estrutura é tomado igual a  $2 \times 10^6$  tf/m<sup>2</sup>.

Na figura 4.17, indicam-se, ainda, os sentidos convencionados positivos para deslocamentos e esforços no plano dos painéis, e, além disso, as demais dimensões necessárias. Os resultados de maior interesse encontram-se arrolados nas tabelas T1, em confronto com aqueles obtidos em (5), e lançados nos gráficos das figuras 4.18.

Um exame das tabelas T1 indica que as discrepâncias observadas são de pequena monta e, mais ainda, em termos práticos perfeitamente negligenciáveis. Cabe, todavia, esclarecer que a solução aqui proposta, deriva da resolução de um sistema de quarenta e cinco equações lineares; ao passo que, a solução sugerida por Mancini é derivada da resolução de um sistema de noventa equações lineares.

PONTO	MALHA REGULAR	MALHA IRREGULAR
0,00	0,000	0,000 .
0,10	$0,128 \times 10^{-3}$	$0,130 \times 10^{-3}$
0,20	$0,547 \times 10^{-3}$	$0,546 \times 10^{-3}$
0,50	$0,393 \times 10^{-2}$	$0,387 \times 10^{-2}$
0,60	$0,577 \times 10^{-2}$	$0,569 \times 10^{-2}$
0,70	$0,792 \times 10^{-2}$	$0,781 \times 10^{-2}$
0,90	$0,129 \times 10^{-2}$	$0,127 \times 10^{-1}$
1,00	$0,155 \times 10^{-1}$	$0,154 \times 10^{-1}$

TABELA T1-a DESLOCAMENTOS U(m) DOS DIAFRAGMAS



PONTO	MALHA REGULAR	MALHA IRREGULAR
0,00	0,000	0,000
0,10	$0,358 \times 10^{-2}$	$0,363 \times 10^{-2}$
0,20	$0,127 \times 10^{-1}$	$0,128 \times 10^{-1}$
0,50	$0,565 \times 10^{-1}$	$0,569 \times 10^{-1}$
0,60	$0,730 \times 10^{-1}$	$0,733 \times 10^{-1}$
0,70	$0,892 \times 10^{-1}$	$0,896 \times 10^{-1}$
0,90	0,120	0,120
1,00	0,135	0,135

TABELA T1-b DESLOCAMENTOS V(m) DOS DIAFRAGMAS

PONTO	MALHA REGULAR	MALHA IRREGULAR
0,00	0,000	0,000
0,10	$0,434 \times 10^{-3}$	$0,423 \times 10^{-3}$
0,20	$0,165 \times 10^{-2}$	$0,162 \times 10^{-2}$
0,50	$0,833 \times 10^{-2}$	$0,829 \times 10^{-2}$
0,60	$0,110 \times 10^{-1}$	$0,110 \times 10^{-1}$
0,70	$0,139 \times 10^{-1}$	$0,138 \times 10^{-1}$
0,90	$0,195 \times 10^{-1}$	$0,195 \times 10^{-1}$
1,00	$0,223 \times 10^{-1}$	$0,233 \times 10^{-1}$

TABELA T1-c ROTAÇÕES W(rad.) DOS DIAFRAGMAS

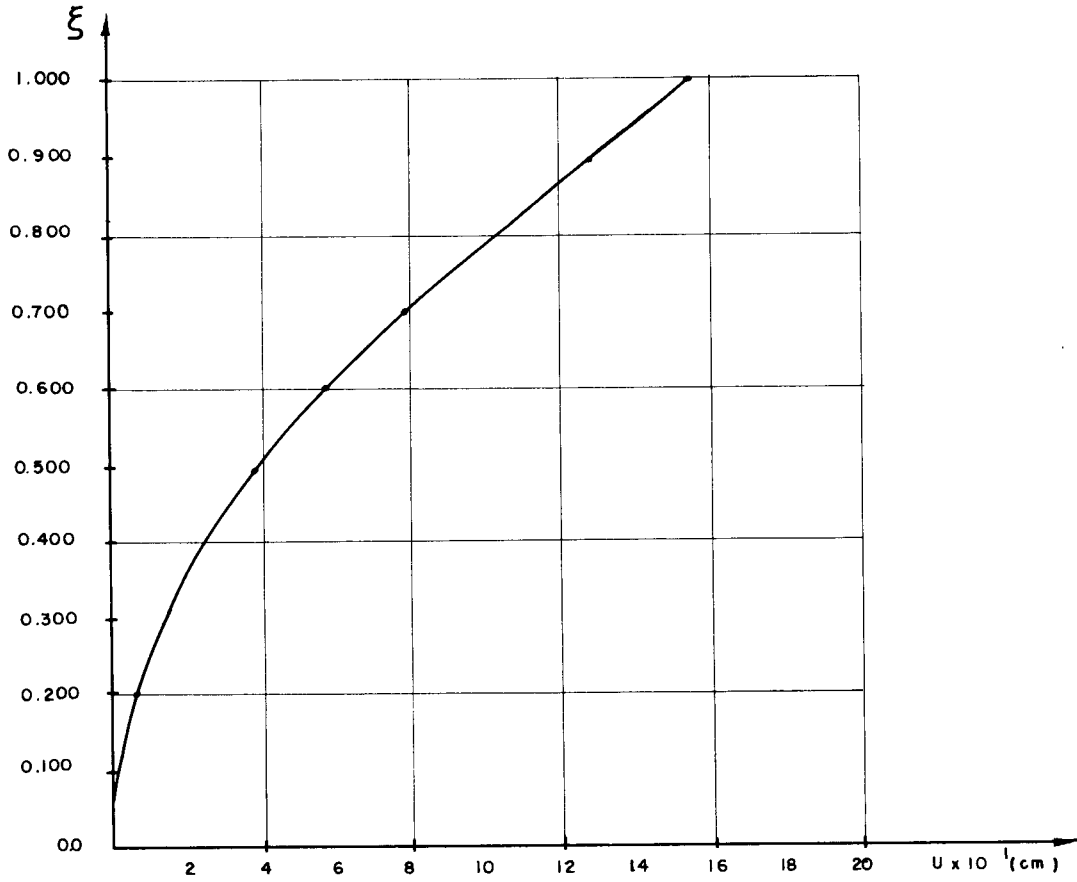


FIG. 4.18 a — DESLOCAMENTOS U DOS DIAFRAGMAS

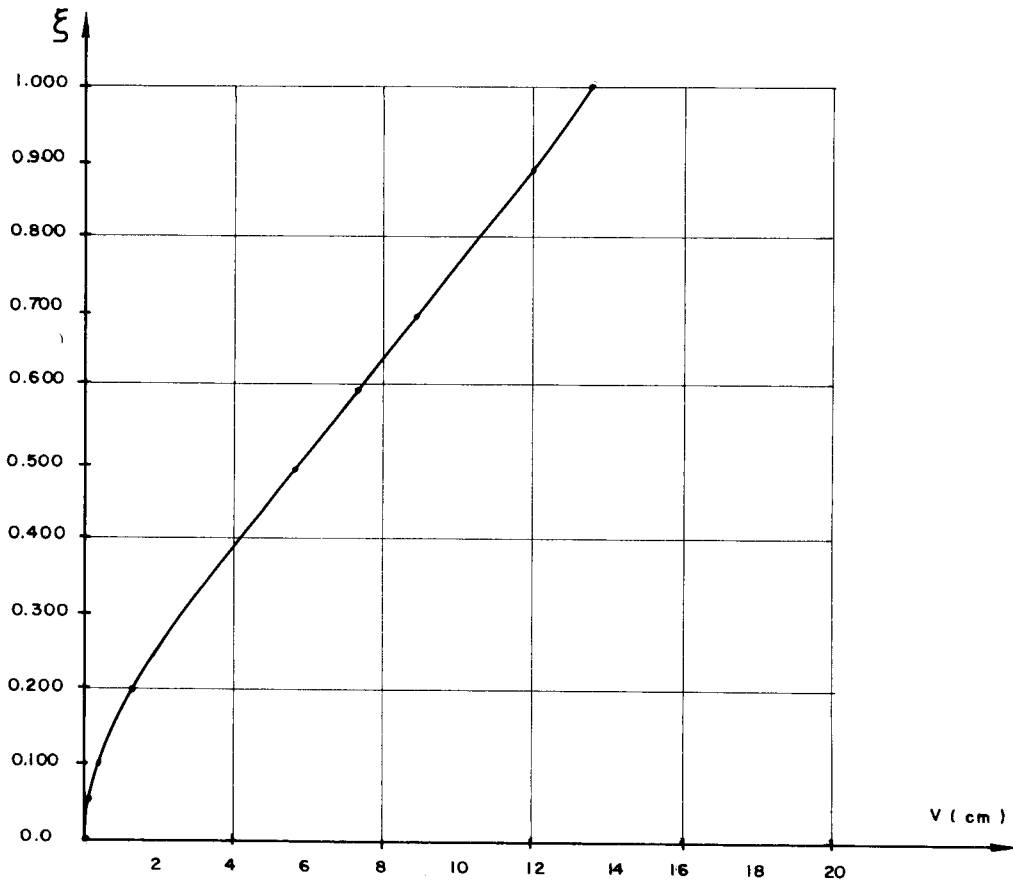


FIG. 4.18 b — DESLOCAMENTOS V DOS DIAFRAGMAS

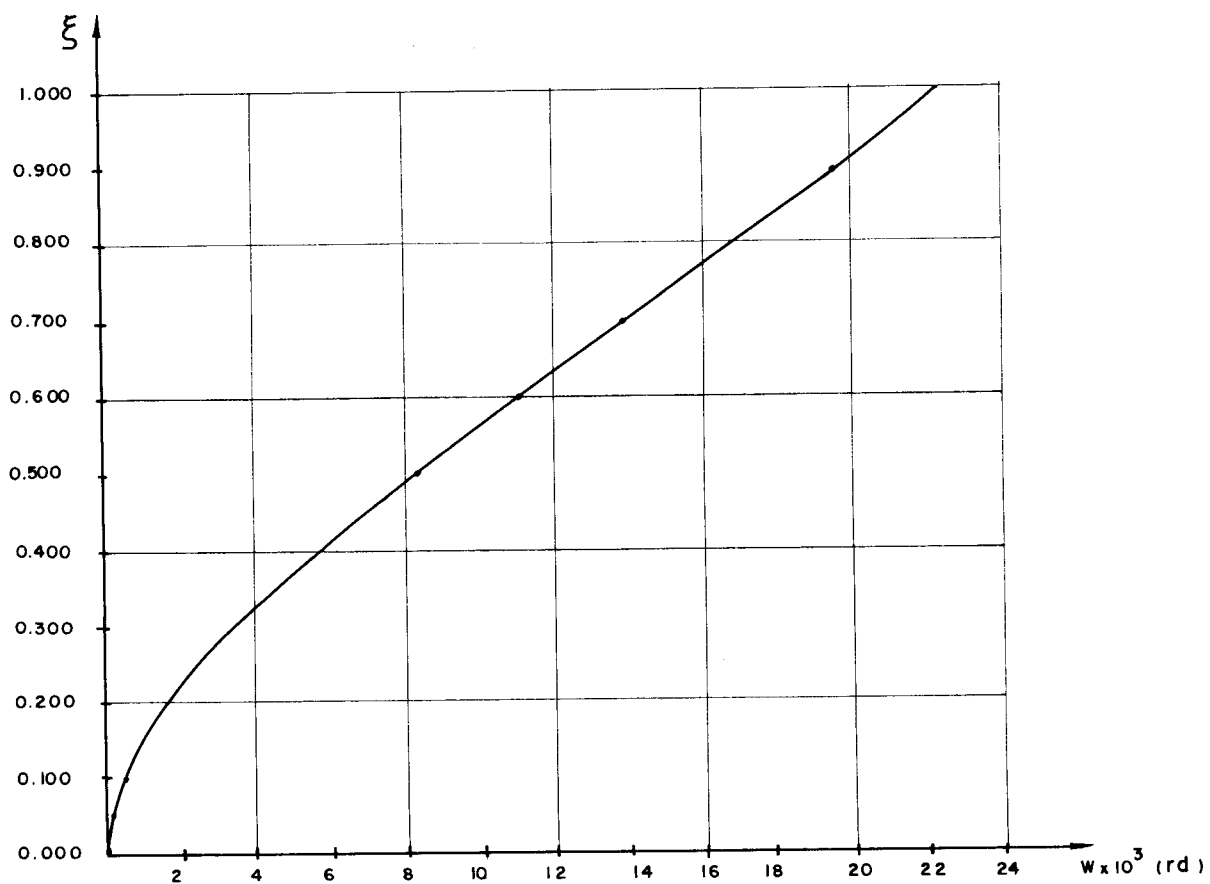


FIG. 4. 18c — ROTAÇÕES W DOS DIAFRAGMAS

## CAPÍTULO V

### TÓPICOS ESPECIAIS EM ESTRUTURAS APORTICADAS

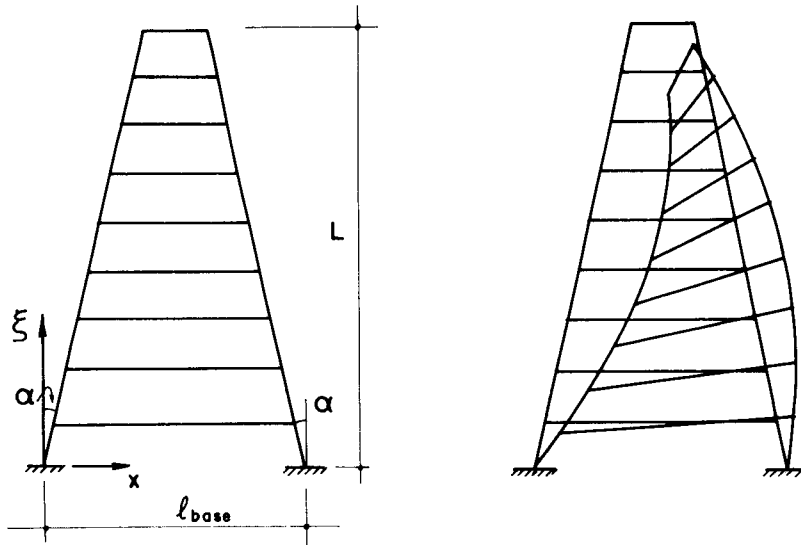
#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Na Técnica do Meio Contínuo, o pórtico é tratado, conforme exposto no item 2.3, como um consolo vertical deformável apenas por força cortante. Além disso, a inclinação da deformada, na altura de um dado andar, é tomada, de maneira aproximada, como sendo a inclinação da corda do pilar. Nesse particular, convém frizar que tal procedimento torna-se mais preciso, na medida em que o número de andares aumenta; porquanto, nessa situação, o pé direito, com maior razão, pode ser considerado um diferencial em relação à altura da estrutura.

A rigidez do pórtico à força cortante tem sido estimada, em se tratando de pórticos regulares, com base na suposição de que os pontos de inflexão, ou de momentos fletores nulos, situam-se nos pontos médios dos vãos das vigas e pilares (vide expressão (2.8)). Todavia, de acordo com orientações dadas por GRINTER (7), algumas correções nessas colocações tornam-se necessárias, principalmente na base, onde o engastamento das colunas promove um levantamento, por assim dizer, do ponto de inflexão. Segundo sugestões desse autor, o ponto de inflexão passa, na região da base, a situar-se numa distância do nó engastado de, mais ou menos, 60% do pé direito. Na região do topo isso também ocorre, porém as eventuais perturbações aí existentes, não afetam o conjunto como um todo; ao contrário das perturbações criadas na base. É oportuno esclarecer que no caso da associação de pórtico e parede, as perturbações criadas na base do pórtico pouco influem no comportamento do conjunto, dado que a parede é, nessa região, o

componente que recebe a maior parcela do carregamento externo, conforme já foi comentado anteriormente.

Um comportamento pouco comum pode ser constatado no estudo de pórticos com colunas inclinadas e concorrentes, conforme ilustra-se na figura 5.1. Sucede que a incli



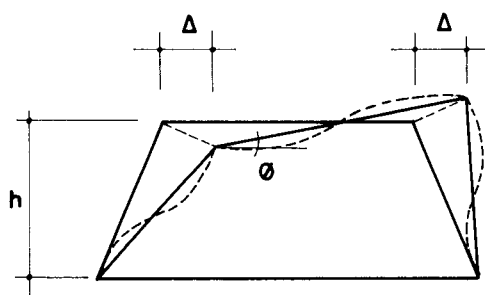
a) Pórtico com colunas inclinadas

b) Aspecto geral da deformada

FIG. 5.1 — CARACTERÍSTICAS DO PÓRTICO  
COM COLUNAS INCLINADAS

nação das colunas promove uma curvatura adicional, como ilustra-se na figura 5.2, cujo efeito contraria o da deformação por força cortante, fazendo com que a flecha máxima, no caso, por exemplo, do carregamento por força horizontal uniformemente distribuída, ocorra numa posição intermediária entre o topo e a base (vide fig. 5.1.b)).

Por outro lado, os componentes horizontais das forças normais nas colunas passam, nessa situação, a absorverem uma parcela da solicitação por força cortante, porém de pequena monta. Assim sendo, essa parcela do esforço solicitante externo deixa de promover deformação; lembrando, outrossim, que a deformação por força normal não tem influência apreciável nos pórticos com pequena inclinação de colunas.



$$\frac{\theta}{h} = \text{curvatura adicional}$$

FIG. 5.2 — DEFORMAÇÃO DO ANDAR GENÉRICO

Finalizando, é oportuno assinalar que não se tem a intenção de abordar o estudo de tais efeitos adicionais, por assim dizer, de um modo bastante amplo; porém, procura-se chamar a atenção, mediante constatações numéricas, para a influência de tais efeitos no comportamento do pórtico. Vale ressaltar que o último exemplo estudado consiste numa estrutura tridimensional aporticada, com uma configuração do tipo tronco piramidal, a exemplo das estruturas de plataformas marítimas (vide fig. 5.3).

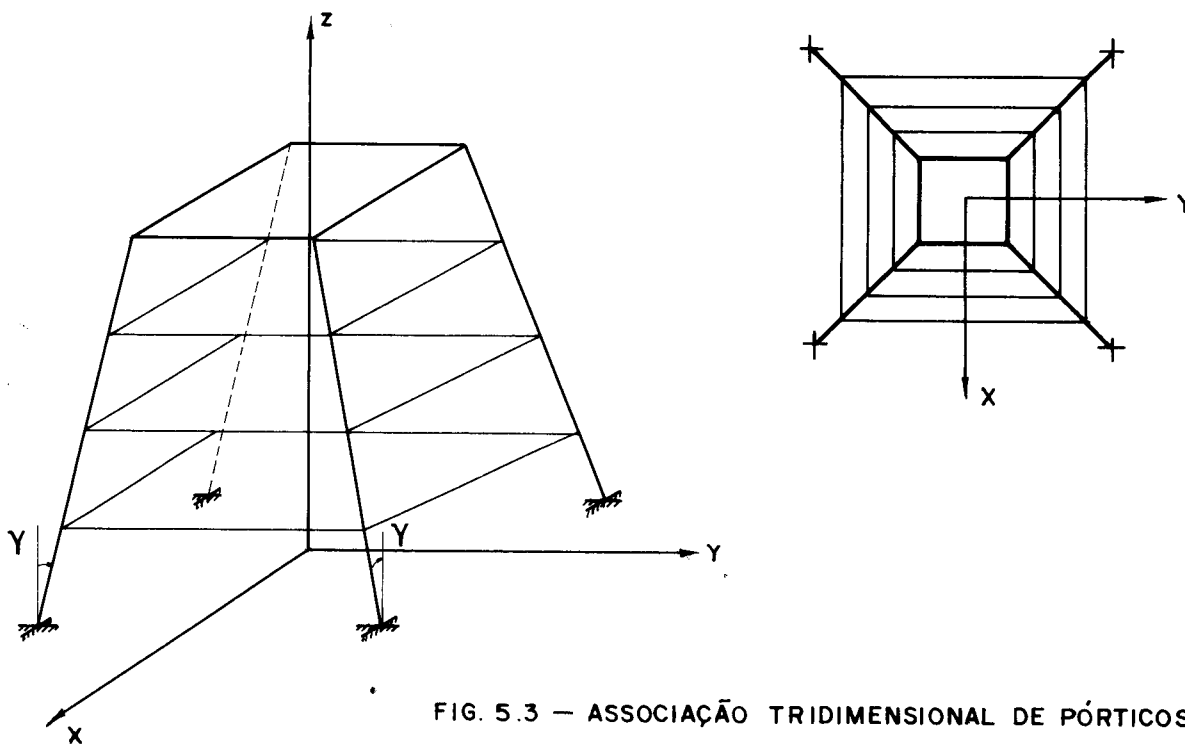


FIG. 5.3 — ASSOCIAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE PÓRTICOS

5.2 - INFLUÊNCIA DA POSIÇÃO DO PONTO DE INFLEXÃO NOS PILARES DA REGIÃO DA BASE

O parâmetro de rigidez ao esforço cortante das estruturas aperticadas,  $s_f$ , é, normalmente, determinado admitindo-se momentos fletores nulos nos centros dos vãos de vigas e pilares. Todavia, conforme já foi mencionado, esse procedimento não é recomendado na região da base e do topo, onde a posição de momentos fletores nulos, principalmente nos pilares, foge da posição central, e, mais ainda, o engastamento da coluna na base introduz nessa região uma perturbação considerável, afetando sobremaneira o comportamento do conjunto.

No intuito de simplificar a exposição, considere-se o trecho de um pórtico constituído de duas colunas iguais mostrado na figura 5.4.a). Na figura 5.4.b) ilustre-se a deformada genérica, onde indicam-se, também, os pontos de momentos fletores nulos, ou seja, tais pontos situam-se nas colunas,  $\alpha h$  acima do andar considerado e  $\beta h$  abaixo; e nas vigas permanecem, de maneira correta, nos centros dos vãos.

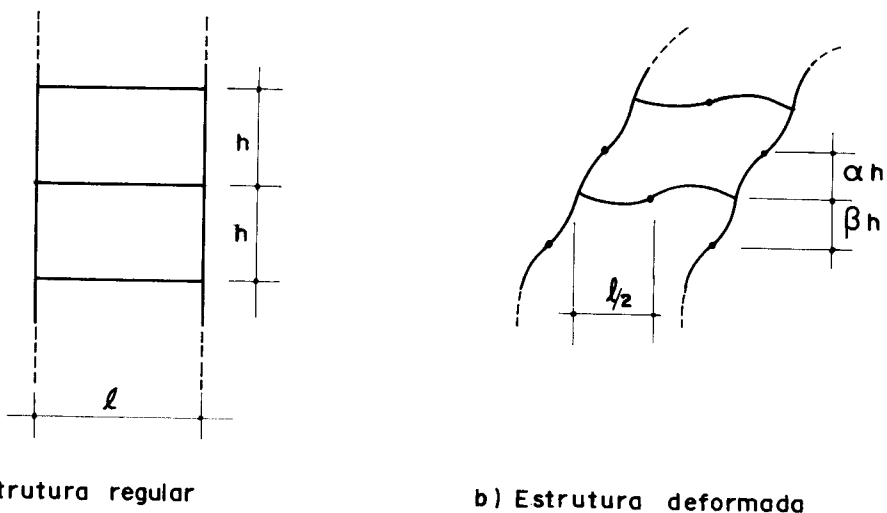


FIG. 5.4 - CONFIGURAÇÃO GENÉRICA DA ESTRUTURA DE PÓRTICO REGULAR

A deformada indicada na figura 5.4.b) pode ser alcançada através da superposição de três estados elementares de deslocamento, conforme indicado na figura 5.5.

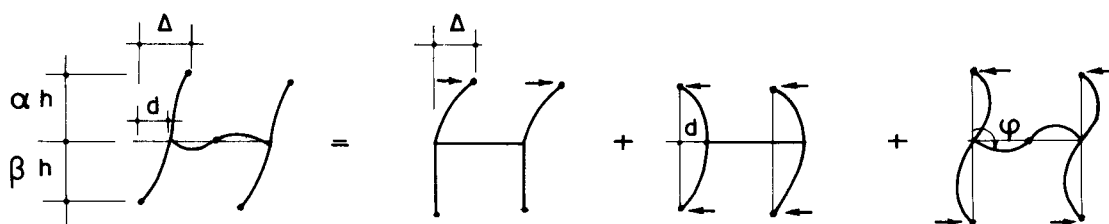


FIG. 5.5 — ESQUEMA DE DEFORMAÇÃO

Na figura 5.6 indicam-se as ações atuantes no nó da esquerda correspondentes a cada um dos estados de deslocamento indicados na figura 5.5. Vale dizer que, no caso em apreço, as ações atuantes no nó da direita são, naturalmente, idênticas.

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{T} \end{array} \right) \frac{3EJ_p \cdot \Delta}{\alpha^2 h^2} + \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{T} \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \frac{3EJ_p \cdot d}{\alpha^2 h^2} + \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{T} \\ \curvearrowright \end{array} \right) \frac{3EJ_p \cdot \varphi}{\alpha h} \\
 \frac{3EJ_p \cdot d}{\beta^2 h^2} \quad \frac{3EJ_p \cdot \varphi}{\beta h} \\
 \\
 \left( \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{T} \end{array} \right) \frac{3EJ_p \cdot \Delta}{\alpha^3 h^3} + \left( \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \end{array} \right) \frac{3EJ_p \cdot d}{\alpha^3 h^3} + \left( \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \\ \text{T} \end{array} \right) \frac{3EJ_p \cdot \varphi}{\alpha^2 h^2} \\
 \frac{3EJ_p \cdot d}{\beta^3 h^3} \quad \frac{3EJ_p \cdot \varphi}{\beta^2 h^2} \quad \frac{3EJ_v \cdot \varphi}{(l/2)^2}
 \end{array}$$

FIG. 5.6 — ESFORÇOS NO NÓ GENÉRICO



As condições de equilíbrio do nó considerado são expressas por:

$$\frac{d}{h} \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right] + \phi \cdot \alpha \left[ 1 + \frac{\alpha}{\beta} + 2 \cdot \alpha \frac{K_v}{K_p} \right] = u' \quad \dots (5.1)$$

$$\frac{d}{h} \left[ 1 + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right] + \phi \cdot \alpha \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right] = u'$$

onde, de maneira aproximada, toma-se:

$$u' = \frac{\Delta}{h} \quad \dots (5.2)$$

sendo  $K_p$  e  $K_v$  a relação entre o momento de inércia da seção transversal e o vão, respectivamente, do pilar e da viga.

Resolvendo o sistema de equações expresso em (5.1), tem-se:

$$\phi \cdot \alpha = S \cdot u' \quad \dots (5.3)$$

$$\frac{d}{h} = R \cdot u'$$

onde:

$$S = \frac{\left[ \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right]}{\left[ \frac{\alpha^3}{\beta^3} + 2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} + \left( 1 + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right) \cdot 2 \cdot \frac{K_v}{K_p} \cdot \alpha \right]} \quad \dots (5.4)$$

$$R = \frac{\left[ \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} + 2 \cdot \frac{K_v}{K_p} \cdot \alpha \right]}{\left[ \frac{\alpha^3}{\beta^3} + 2 \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} + \left( 1 + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right) \cdot 2 \cdot \frac{K_v}{K_p} \cdot \alpha \right]}$$

Finalmente, tendo-se em conta que cada coluna reage igualmente ao esforço cortante externo, tem-se a relação:

$$Q = \frac{6 \cdot E \cdot K}{\alpha^3 h} P (1-R-S) \cdot u' \quad \dots (5.5)$$

e daí,

$$s_f = \frac{6 \cdot E \cdot K}{\alpha^3 h} P (1-R-S) \quad \dots (5.6)$$

Convém ressaltar neste ponto, que a expressão (5.6) assume a forma indicada em (2.8) para o caso de  $\alpha = \beta = 0,5$ .

A título de ilustração, indicam-se na tabela T1 os valores encontrados para a rigidez  $s_f$ , dados pela expressão (5.6), para alguns valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Trata-se de um pórtico constituído de vigas e pilares de seção transversal com o mesmo momento de inércia, valendo  $7080,0 \text{ cm}^4$ , tendo por pé direito  $3,0\text{m}$  e as vigas com vão de  $15,0 \text{ m}$ . O módulo de elasticidade é tomado  $E = 2100,0 \text{ tf/cm}^2$ .

	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,45$	$\alpha = 0,4$
	$\beta = 0,5$	$\beta = 0,55$	$\beta = 0,6$
$s_f \text{ (tf)}$	360,4	358,9	356,5

TABELA T1 VALORES DE RIGIDEZ  $s_f$

Um exame dos valores arrolados na tabela T1 indica ser de pequena monta a influência da posição dos pontos de inflexão dos pilares no valor da rigidez  $s_f$ . Por outro lado, na região da base tal influência é bastante apreciável. Considere-se, por exemplo, o trecho de pilar na região do engaste, mostrado na Fig. 5.7.



FIG.5.7 - CONFIGURAÇÃO GENÉRICA PARA A REGIÃO DA BASE

Ora, nesse caso, ao invés da relação (5.5), tem-se:

$$Q = \frac{6 \cdot E \cdot K_p}{\alpha^2 h} \cdot u' \quad \dots (5.7)$$

ou seja:

$$s_f = \frac{6 \cdot E \cdot K_p}{\alpha^2 h} \quad \dots (5.8)$$

Para o mesmo pórtico considerado anteriormente, a rigidez  $s_f$  dada pela expressão (5.6), encontra-se confrontada com a dada pela expressão (5.8) na tabela T2, onde um rápido exame permite constatar o fato mencionado. Cabe, ainda, acrescentar que, segundo sugestão de GRINTER (7), toma-se para  $\alpha$ , em geral, valores próximos de 0,6.

	(5.6)	(5.8)
$s_f (tf)$	360,4	2753,3

TABELA T2 VALORES DE RIGIDEZ  $s_f$

5.2.1 - Quinto exemplo de aplicação

Desenvolve-se a seguir um interessante exemplo de aplicação, no qual pode-se notar, nitidamente, a influência do engastamento da coluna na base no comportamento do conjunto. A estrutura em questão, mostrada na figura

5.8, possui altura total de 30,0m e é constituída de 10 andares afastados com 3,0m de pé direito, tendo ainda vigas com 15,0m de vão. Vigas e pilares dispõem de  $7080,0 \text{ cm}^4$  de momento de inércia na seção transversal; e o módulo de elasticidade é tomado  $E = 2100,0 \text{ tf/m}^2$ . O carregamento lateral considerado é de  $q = 0,1 \text{ tf/m}$ .

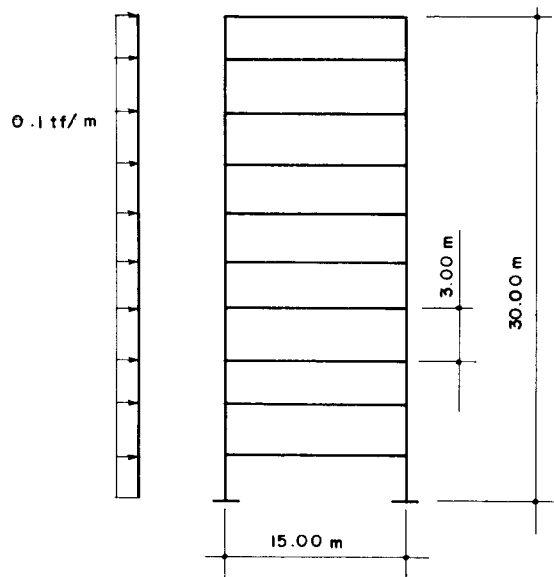


FIG. 5.8 — EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Os resultados encontrados foram lançados nos gráficos da figura 5.9; sendo que, nessa figura, a curva em traço contínuo corresponde à solução obtida com base nas expressões (5.5) e (5.7), esta última sendo empregada na região da base; a curva com a convenção em traço e ponto corresponde à solução obtida com base na expressão (2.8); e, finalmente, a em traço interrompido corresponde à solução clássica de estruturas reticulares. Cabe esclarecer que na integração numérica relativa ao primeiro caso, toma-se a rigidez dada pela expressão (5.8) até a altura do primeiro andar, ou seja, no intervalo de 0 a  $0,1 L$ .

Um exame dos gráficos mostrados na figura 5.9 evidencia, no caso em questão, uma sensível influência da

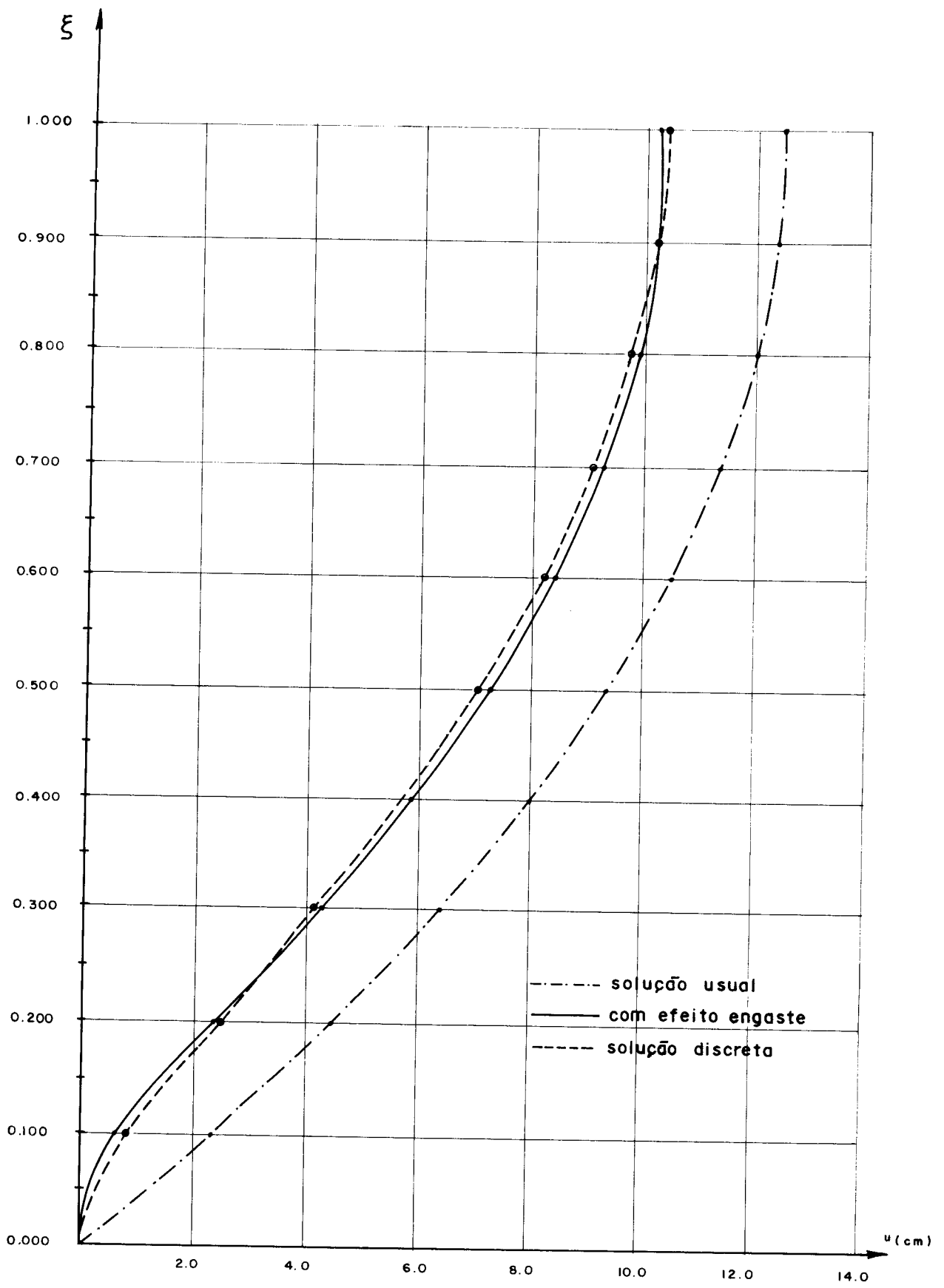


FIG.5.9 - COMPORTAMENTO DA ELÁSTICA PARA PÓRICO DE RIGIDEZ CONSTANTE

perturbação criada pelo engastamento da coluna na base. Discrepâncias da ordem de 20% podem ser observadas. Por outro lado, é oportuno verificar a incrível eficiência da correção proposta, dada a proximidade com os resultados da solução clássica.

### 5.3 - EFEITO DA INCLINAÇÃO DAS COLUNAS

A inclinação das colunas, no sentido convergente com a altura, promove na deformada da estrutura, conforme já foi mencionado, uma curvatura adicional, cujo efeito tende a reduzir os deslocamentos finais (vide fig. 5.1.b)).

A figura 5.10. a) exhibe um trecho de pórtico com colunas inclinadas, e na figura 5.10.b), esquematiza-se a deformada de tal trecho. Convém notar, de início, que a viga AB, inicialmente horizontal, passa, na configuração deformada, a ocupar uma posição que, por força da compatibilidade dos deslocamentos, apresenta uma rotação anti-horária; enquanto as colunas, sofrem rotação no sentido horário.

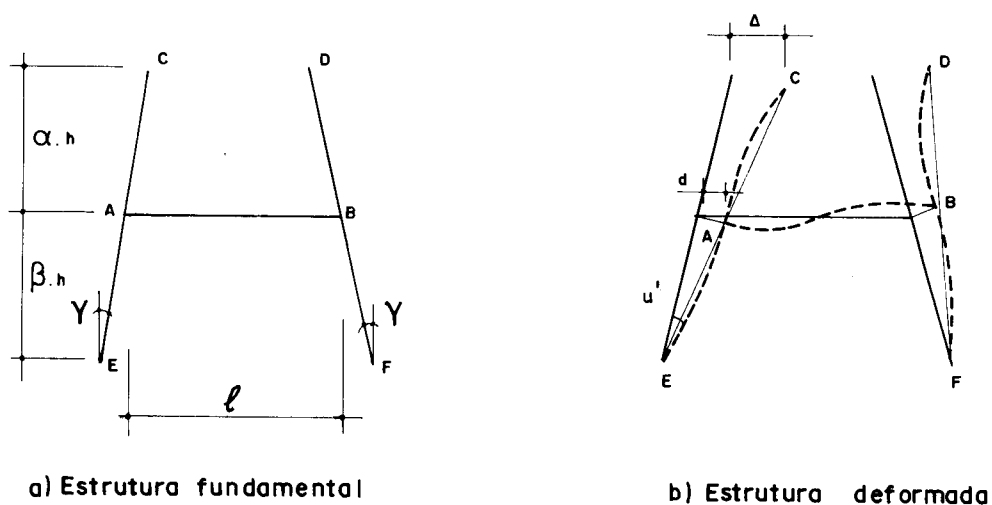


FIG. 5.10 — ELEMENTOS PARA O CÁLCULO DA RIGIDEZ  $S_f$

O estado de deslocamento mostrado na figura 5.10.b) pode ser alcançado por meio da superposição de três estados elementares de deslocamento, conforme ilustra-se na figura 5.11.

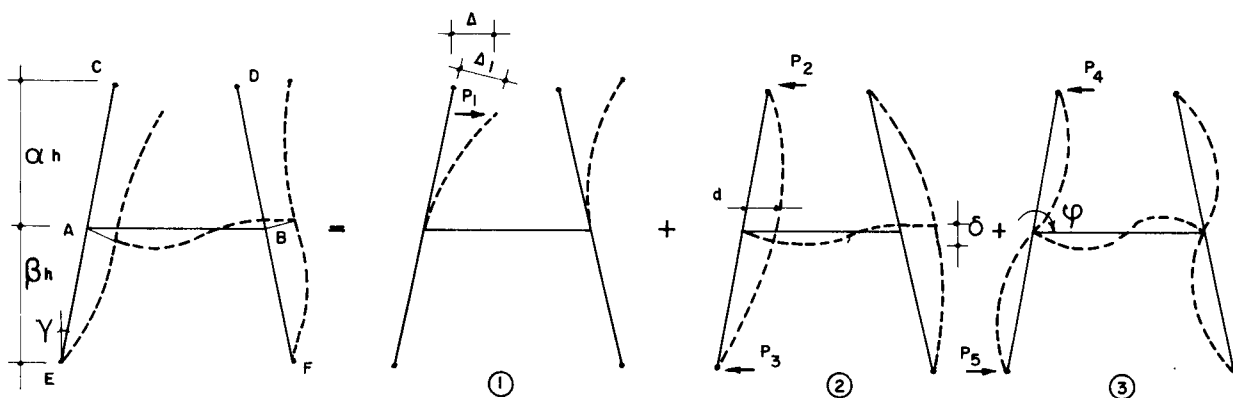


FIG. 5.11 — SUPERPOSIÇÃO DOS CASOS DE DEFORMAÇÃO

De acordo com as notações indicadas na figura 5.11, tem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{3EJ_p \cdot \cos^3 \gamma}{\alpha^3 h^3} \cdot \Delta \\
 P_2 &= \frac{3EJ_p \cdot \cos^3 \gamma}{\alpha^3 h^3} \cdot d \\
 P_3 &= \frac{3EJ_p \cdot \cos^3 \gamma}{3^3 h^3} \cdot d \quad \dots (5.9) \\
 P_4 &= \frac{3EJ_p \cdot \cos^3 \gamma}{\alpha^2 h^2} \cdot \phi \\
 P_5 &= \frac{3EJ_p \cdot \cos^3 \gamma}{\beta^2 h^2} \cdot \phi
 \end{aligned}$$

Por outro lado, as condições de equilíbrio do nó A implicam em:

$$\frac{3E \cdot J_p \cdot \cos^3 \gamma}{\alpha^2 h^2} \cdot \Delta = d \left( \frac{3E \cdot J_p \cos^3 \gamma}{\alpha^2 h^2} + \frac{6E \cdot J_v \cdot 2 \operatorname{tg} \gamma}{\ell^2} - \right. \\ \left. - \frac{3E \cdot J_p \cdot \cos^3 \gamma}{\beta^2 h^2} \right) + \phi \left( \frac{3E \cdot J_p \cdot \cos \gamma}{\alpha \cdot h} + \frac{3E J_v}{(\ell/2)} + \right. \\ \left. + \frac{3E \cdot J_p \cdot \cos \gamma}{\beta h} \right) \dots (5.10)$$

$$\frac{3E \cdot J_p \cdot \cos^3 \gamma}{\alpha^3 h^3} \cdot \Delta = d \left( \frac{3E \cdot J_p \cdot \cos^3 \gamma}{\alpha^3 h^3} + \frac{3E \cdot J_p \cdot \cos^3 \gamma}{\beta^3 h^3} \right) + \\ + \phi \left( \frac{3E \cdot J_p \cos^3 \gamma}{\alpha^2 h^2} - \frac{3E \cdot J_p \cdot \cos^3 \gamma}{\beta^2 h^2} \right)$$

Resolvendo o sistema de equações expresso em (5.10), e tomando-se:

$$K_v = \frac{J_v}{\ell} \\ K_p = \frac{J_p \cdot \cos \gamma}{h} \dots (5.11)$$

$$u' = \frac{\Delta}{h}$$

onde  $\gamma$  é o ângulo de inclinação das colunas, tem-se:

$$\frac{d}{h} = R \cdot u'$$

$$\alpha \phi = S \cdot u'$$

sendo que R e S são dados, agora, por:



$$R = \frac{(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}) - (\frac{1}{\cos^2 \gamma} + \frac{2 \cdot K_v \cdot \alpha}{K_p \cdot \cos^2 \gamma} + \frac{\alpha}{\beta \cdot \cos^2 \gamma})}{\left[ \left( 1 + \frac{4 \operatorname{tg} \gamma \cdot h \cdot K_v \cdot \alpha^2}{l \cdot \cos^2 \gamma \cdot K_p} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) - \left( 1 + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right) \cdot \left( \frac{1}{\cos^2 \gamma} + \frac{2 K_v \cdot \alpha}{K_p \cdot \cos^2 \gamma} + \frac{\alpha}{\beta \cdot \cos^2 \gamma} \right) \right]}$$

$$S = \frac{\left( 1 + \frac{4 \operatorname{tg} \gamma \cdot h \cdot K_v \cdot \alpha^2}{l \cdot \cos^2 \gamma \cdot K_p} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) - \left( 1 + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right)}{\left[ \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{4 \operatorname{tg} \gamma \cdot h \cdot K_v \cdot \alpha^2}{l \cdot \cos^2 \gamma \cdot K_p} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) - \left( 1 + \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right) \cdot \left( \frac{1}{\cos^2 \gamma} + \frac{2 K_v \cdot \alpha}{K_p \cdot \cos^2 \gamma} + \frac{\alpha}{\beta \cdot \cos^2 \gamma} \right) \right]}$$

.... (5.12)

Assim sendo, a expressão da rigidez do esforço cortante passa a ser dada por:

$$s_f = \frac{6EK}{\alpha^3 h} \cdot (1-R-S) \cos^2 \gamma \quad \text{.... (5.13)}$$

onde R e S são dados, agora, por (5.12). Convém notar que a expressão (5.13) coincide com a (2.8) para  $\gamma = 0$  e  $\alpha = \beta = 0,5$ .

A título de ilustração, são mostrados na tabela T3 alguns valores da rigidez  $s_f$  para alguns valores particulares de  $\gamma$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Tratam-se de valores correspondentes a pórticos constituídos de pilares e vigas de iguais seções transversais com momento de inércia de 7080,0 cm<sup>4</sup>. No andar considerado, a viga possui 14,0 m de vão, e o pé direito  $\bar{e}$  de 3,0m. Vale notar que a variação da posição das rótulas, pouco altera o valor da rigidez.

$\gamma$	$\alpha = 0,5$ $\beta = 0,5$	$\alpha = 0,45$ $\beta = 0,55$	$\alpha = 0,4$ $\beta = 0,6$
5°	403,00	402,80	400,60
10°	490,00	490,90	489,90

TABELA T3 VALORES DE  $s_f$

Na base, a exemplo do que foi feito no caso de colunas verticais, a rigidez passa a ser dada por:

$$s_f = \frac{6EK_p}{\alpha^2 h} \cdot \cos^2 \gamma \quad \dots (5.14)$$

Vale dizer que, a menos do termo  $\cos^2 \gamma$ , a expressão (5.14) é idêntica à (5.8). Assim, para valores de  $\gamma$  até da ordem de  $10^\circ$  tem-se resultados, praticamente, iguais com (5.14) e (5.8).

A análise do efeito da curvatura adicional, segundo a Técnica do Meio Contínuo, é aqui conduzida de um modo um tanto expedito. Para tanto, considere-se, de início, a configuração deformada de um andar genérico mostrado na figura 5.12, onde  $\theta$  é a rotação absoluta do andar inferior e  $\phi$  é a rotação relativa do andar em consideração.

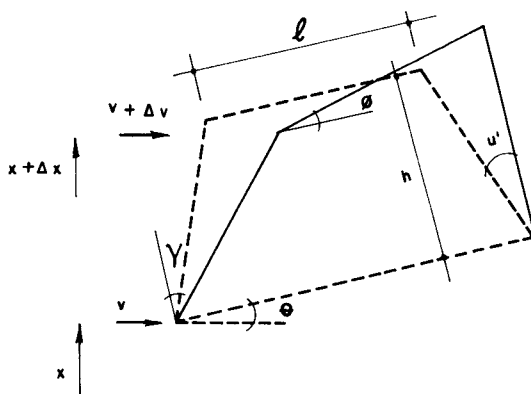


FIG. 5.12 - ELEMENTO GENÉRICO DA ESTRUTURA DEFORMADA

Chamando de  $v$  o deslocamento real da estrutura, tem-se, por considerações geométricas, a seguinte relação (vide Fig. 5.12):

$$\Delta v = u' \cdot \Delta x - \theta \cdot \Delta x \quad \dots (5.15)$$

onde  $u'$  é, por assim dizer, a distorção do andar.

A expressão (5.15) permite, de modo aproximado, escrever:

$$v' = u' - \theta \quad \dots (5.16)$$

ou, ainda:

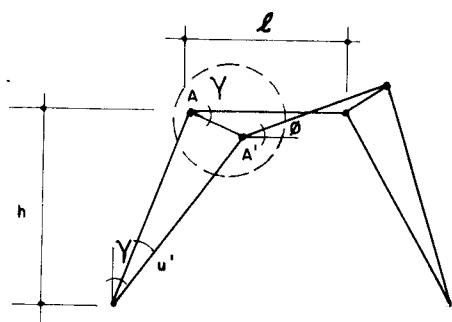
$$v = u - \int_0^x \theta \cdot dx \quad \dots (5.17)$$

Por outro lado, tendo-se em vista as conceituações da Técnica do Meio Contínuo, tem-se:

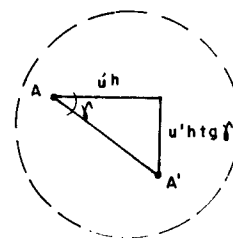
$$\theta = \int_0^x \frac{\phi}{h} dx \quad \dots (5.18)$$

A rotação  $\phi$  é proporcional, por condições geométricas, à distorção  $u'$ , conforme pode ser notado na figura 5.13, ou seja:

$$\phi = \frac{2h}{l} \operatorname{tg} \gamma \cdot u' \quad \dots (5.19)$$



a) configuração deformada



b) deslocamento do ponto A

FIG. 5.13 — DEFORMAÇÃO DO ANDAR GENÉRICO

Levando a expressão (5.19) na (5.18) e o resultado na (5.17), tem-se, finalmente:

$$v = u - \int_0^x \left( \int_0^x \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\ell} u' dx \right) dx \quad \dots (5.20)$$

ou, ainda, por derivações:

$$v'' = u'' - \frac{2}{\ell} \operatorname{tg} \gamma \cdot u' \quad \dots (5.21)$$

De outro modo, levando-se em conta que

$$u' = \frac{Q}{s_f} \quad \dots (5.22)$$

a expressão (5.21) passa a escrever-se:

$$v'' = \frac{1}{s_f} \left[ Q' - \left( \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\ell} + \frac{s_f'}{s_f} \right) Q \right] \quad \dots (5.23)$$

Finalizando, analisa-se a parcela do esforço cortante externo absorvido pelo componente horizontal da força normal nas colunas. Para tanto, considere-se a configuração de forças indicadas na figura 5.14, onde, por considerações estáticas, tem-se:

$$2N \cdot \operatorname{sen} \gamma = \Delta Q \quad \dots (5.24)$$

Por outro lado, a força normal pode ser determinada de maneira aproximada (admitindo-se  $\cos \gamma \approx 1,0$ ), através da expressão

$$N = \frac{M}{\ell} \quad \dots (5.25)$$

ou ainda,

$$N = q \frac{(L-x)^2}{2\ell} \quad \dots (5.26)$$

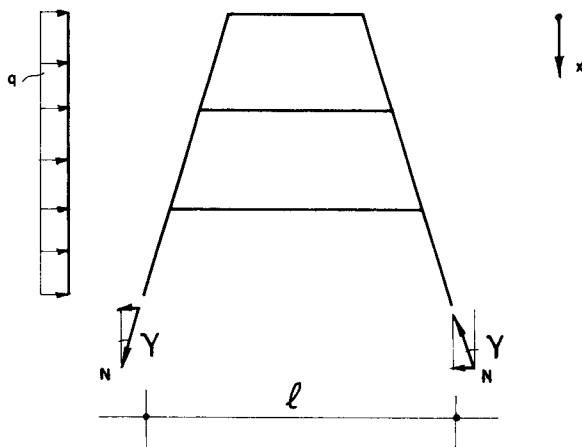


FIG. 5.14 — EFEITO DA FORÇA NORMAL

Levando-se (5.26) em (5.24), tem-se:

$$\Delta Q = q \frac{(L-x)^2}{\ell} \operatorname{sen} \gamma \quad \dots (5.27)$$

Assim sendo, a cortante que provoca distorção  $u'$  no quadro passa a ser, no caso de solicitação por força horizontal uniformemente distribuída, dada por:

$$Q_{ef} = q \cdot \left[ (L-x) - \frac{(L-x)^2}{\ell} \operatorname{sen} \gamma \right] \quad \dots (5.28)$$

Cabe, finalmente, adiantar que, para inclinações  $\gamma$  até da ordem de  $10^\circ$ , o alívio, por assim dizer, do esforço cortante que distorce o andar é de pequena monta, sendo, inclusive, desprezível.

### 5.3.1 - Sexto exemplo de aplicação

No sentido de ilustrar a magnitude das correções necessárias no tratamento de pórticos com colunas inclinadas, considere-se a estrutura mostrada na figura 5.15. Trata-se de um pórtico com 30,0m de altura, pés direito de 3,0m, sendo que na base o afastamento das colunas é de

15m. O momento de inércia da seção transversal é igual para vigas e pilares, valendo  $7080,0 \text{ cm}^4$ . O módulo de elasticidade é tomado  $E = 2100,0 \text{ tf/cm}^2$ . Dois casos são considerados:  $\gamma = 5^\circ$  e  $\gamma = 10^\circ$ . O carregamento é composto por uma carga horizontal uniformemente distribuída de  $0,1 \text{ tf/m}$ .

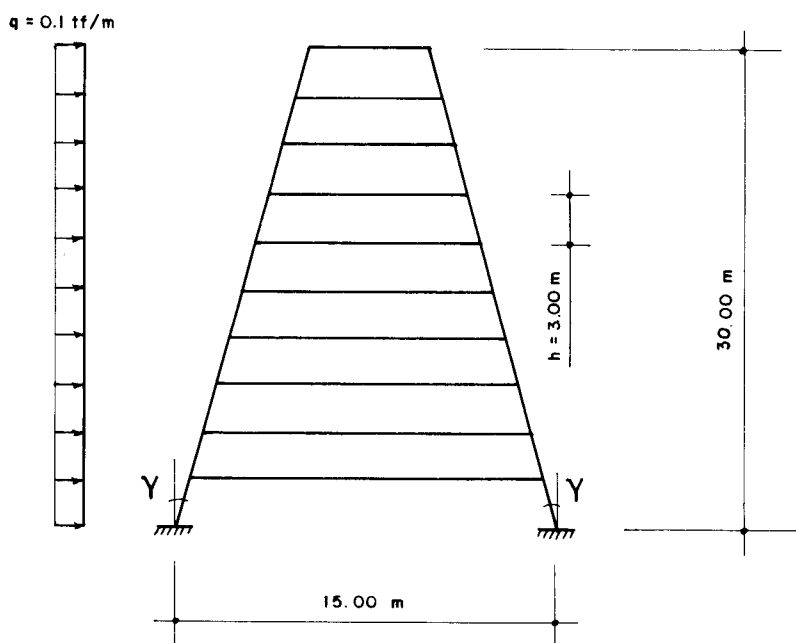


FIG. 5.15- CARACTERÍSTICAS GERAIS DOS EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os resultados para  $\gamma = 5^\circ$  foram lançados nos gráficos da figura 5.16 e, os do caso  $\gamma = 10^\circ$  nos da figura 5.17. Em ambas as figuras a curva em traço e ponto corresponde à solução usual, qual seja, a baseada unicamente na expressão da rigidez dada em (2.8); nas curvas em dois traços e ponto, leva-se em consideração o efeito do engastamento da coluna na base; na curva em pontilhado leva-se ainda em consideração o efeito da força normal; e na curva em traço contínuo acrescenta-se, finalmente, o efeito de curvatura. A título de comparação, indica-se em curva traçada o resultado obtido com a clássica solução usual discreta. Um exame dessas figuras evidencia claramente a importância das correções apontadas; efeito de engastamento das colunas e o efeito da curvatura adicional.

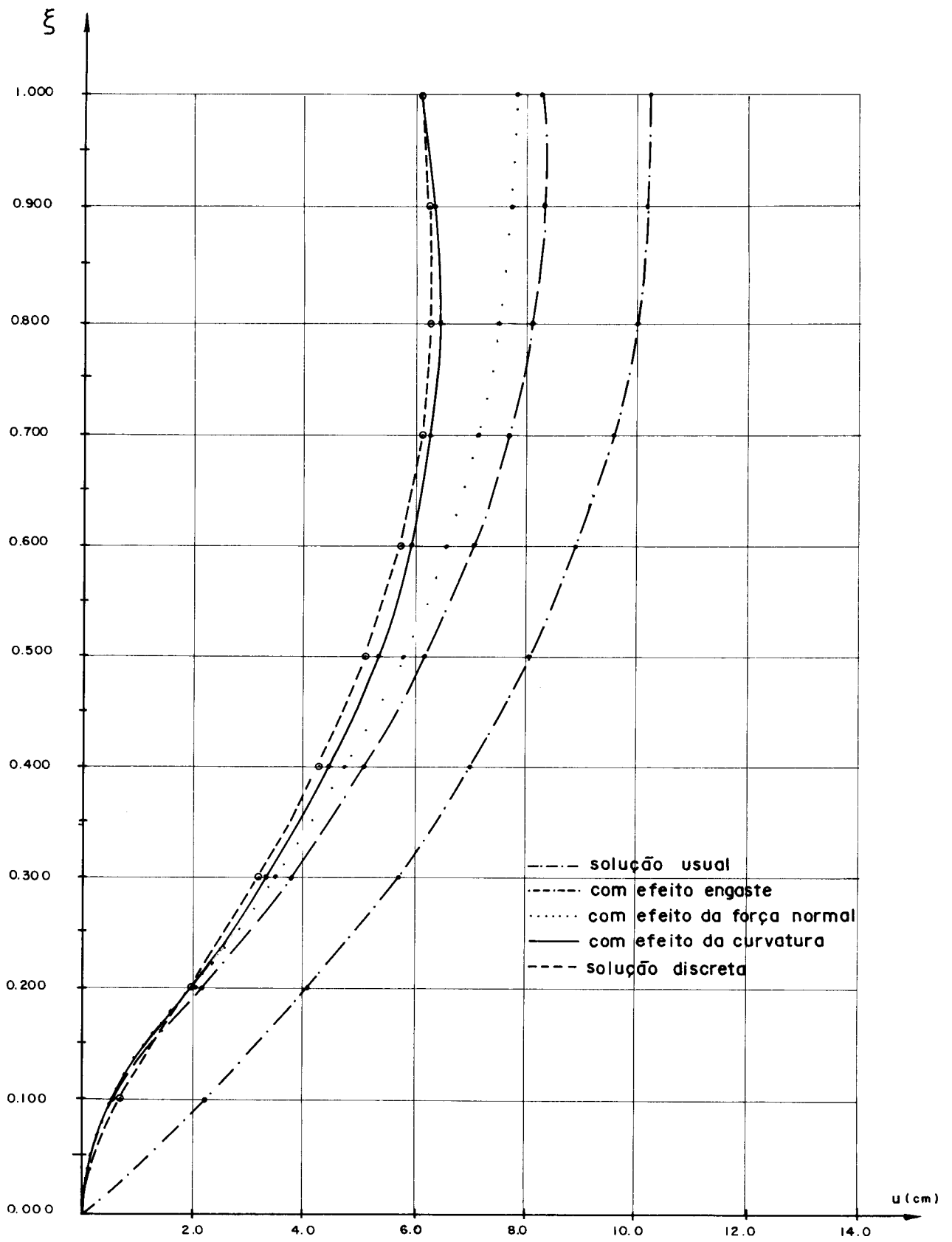


FIG. 5.16 - COMPORTAMENTO DA ELÁSTICA PARA  $\gamma = 5^\circ$

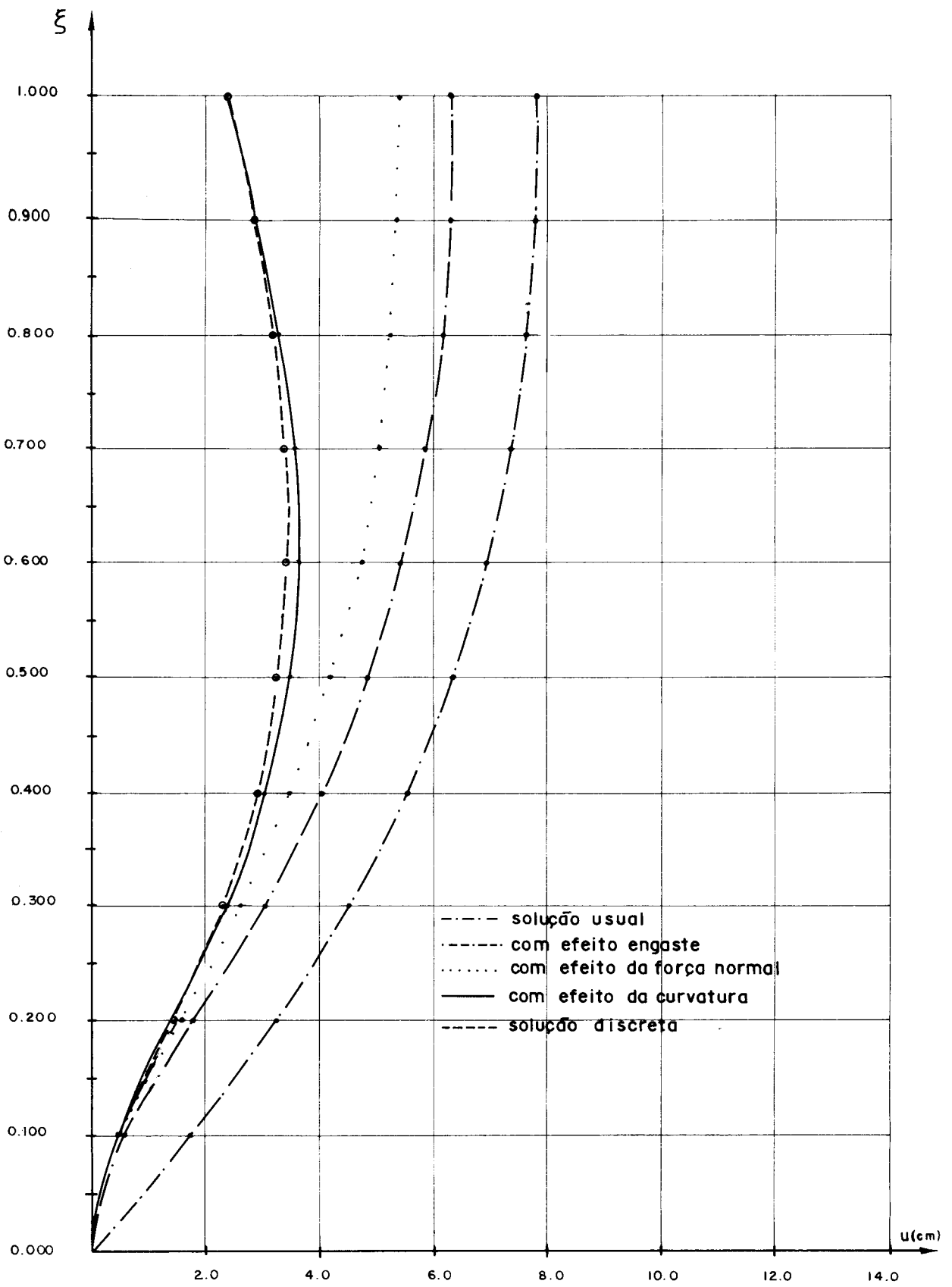


FIG. 5.17- COMPORTAMENTO DA ELÁSTICA PARA  $\gamma = 10^\circ$



#### 5.4 - SÉTIMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Estuda-se, finalmente, a associação tridimensional de quatro pórticos, idênticos ao mostrado na figura 5.15, conforme ilustra-se na figura 5.18.

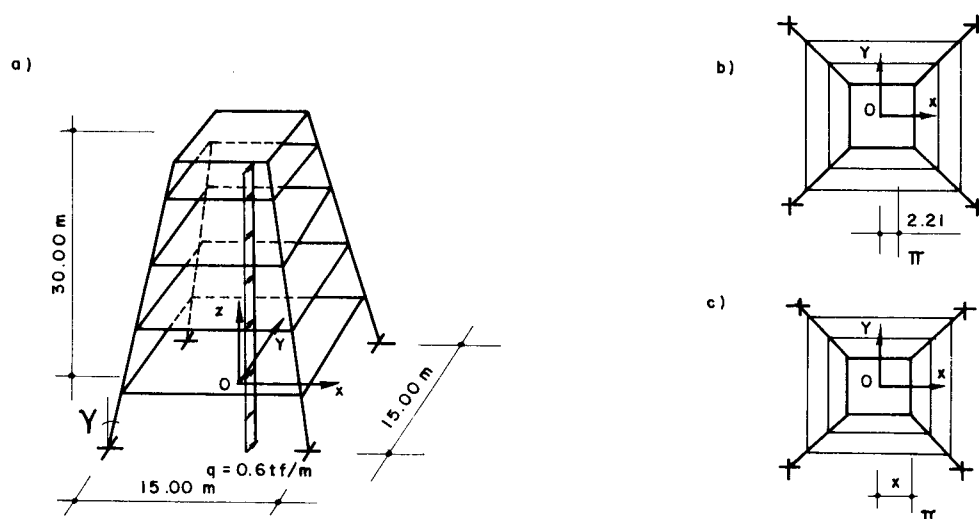


FIG. 5.18 - ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL

De início, cabe ressaltar que a dupla simetria dessa estrutura permite reduzir o estudo tridimensional, conforme comentado no item 2.5, a três estudos, por assim dizer, planos - um para cada translação (segundo OX e OY) e um para a rotação ( $w$ ). Por outro lado, na análise das translações são levadas em conta todas as correções apontadas; todavia, na análise da rotação, o efeito de curvatura deixa de existir pela ação conjunta dos painéis. Em poucas palavras, o efeito introduzido por um painel é contrário ao do outro, de sorte que em conjunto, o efeito total é nulo.

Três casos de associações são estudados, sendo cada um deles caracterizado pela inclinação  $\gamma$ , medida no plano do painel, respectivamente  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  e  $10^\circ$ . As características comuns aos três casos são: altura total de 30,0m, 10 andares com pé direito de 3,0m, afastamento das colunas

na base de 15,0 m, vigas e pilares com seção transversal de  $7080,0 \text{ cm}^4$  de momento de inércia e módulo de elasticidade de  $E = 2100,0 \text{ tf/cm}^2$ . De resto, as configurações geométricas das estruturas ocorrem como causa das diferentes inclinações.

Estudam-se três casos de carregamento, sendo o primeiro constituído de uma carga uniformemente distribuída ao longo da altura  $q = 0,6 \text{ tf/m}$ , contida no plano de simetria YZ e os outros dois são constituídos por uma carga torçora, também uniformemente distribuída. Cabe, nesse ponto, esclarecer que, conforme já foi mencionado, em virtude do desacoplamento das equações, qualquer carregamento pode ser tratado separando-se suas componentes segundo OX e OY e mais a componente torçora. Assim, no primeiro caso de carga torçora o plano do carregamento dispõe de excentricidade igual a 2,21m, conforme indica-se na figura 5.18.b), e no segundo caso o plano do carregamento é paralelo ao plano YZ, porém contendo o eixo da viga do último andar de um dos pórticos, conforme ilustra-se na figura 5.18.c), o que implica em excentricidades diferentes para cada caso de inclinação considerado.

Os resultados referentes ao primeiro caso de carregamento encontram-se lançados nos gráficos da figura 5.19. Os gráficos da figura 5.20 exibem os resultados do primeiro caso de carregamento torçor e, finalmente, os gráficos da figura 5.21 exibem os resultados encontrados para o segundo caso de carregamento torçor.

Um exame dos gráficos contidos na figura 5.19 indicam uma acentuada diferença entre os resultados correspondentes às três inclinações consideradas e, mais ainda, a sensível influência do efeito da curvatura adicional, principalmente, como era de se esperar, no caso de  $\gamma = 10^\circ$ . No tocante aos carregamentos torçores, nota-se no primeiro caso (vide fig. 5.20), excentricidade fixa, pouca discrepância; o que já não ocorre no outro caso (vide fig. 5.21), onde, para cada caso, varia-se também a excentricidade.

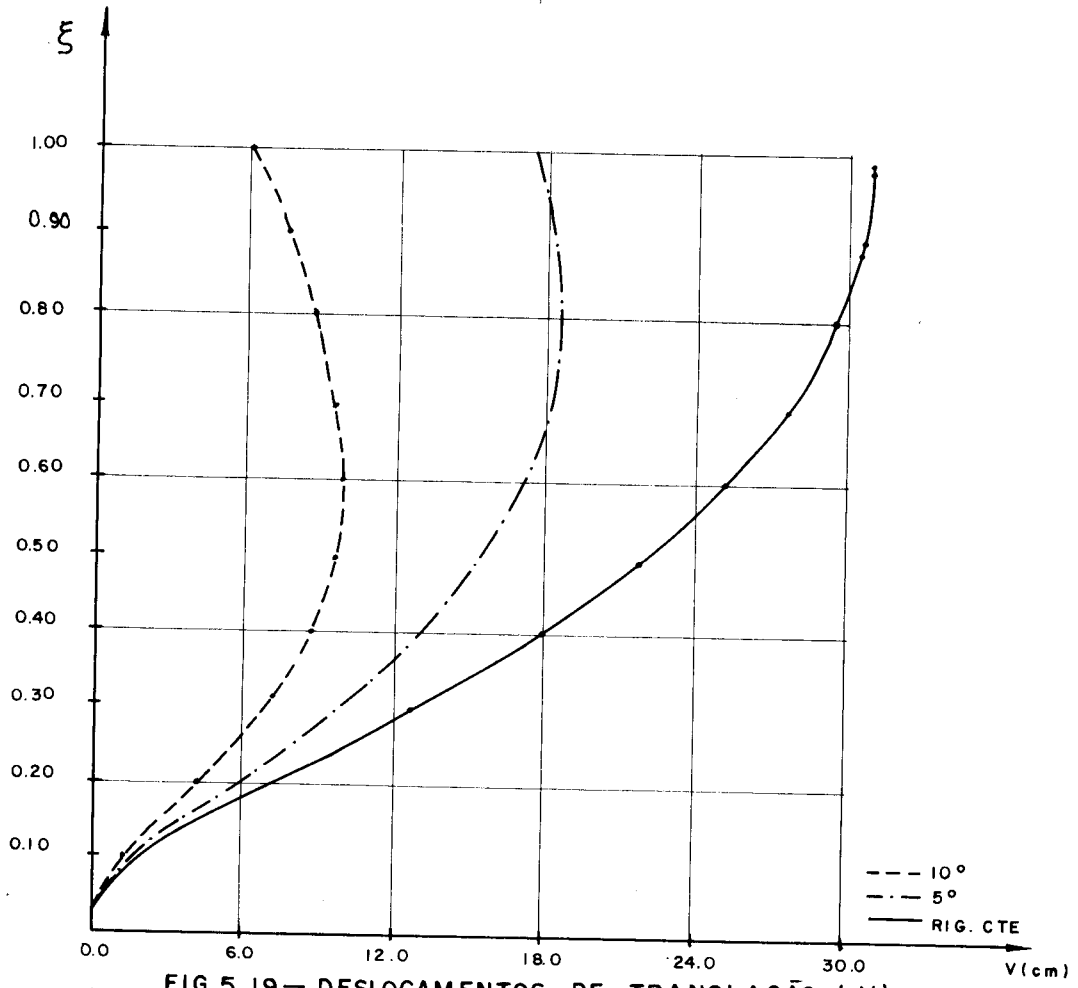


FIG.5.19— DESLOCAMENTOS DE TRANSLAÇÃO ( V )

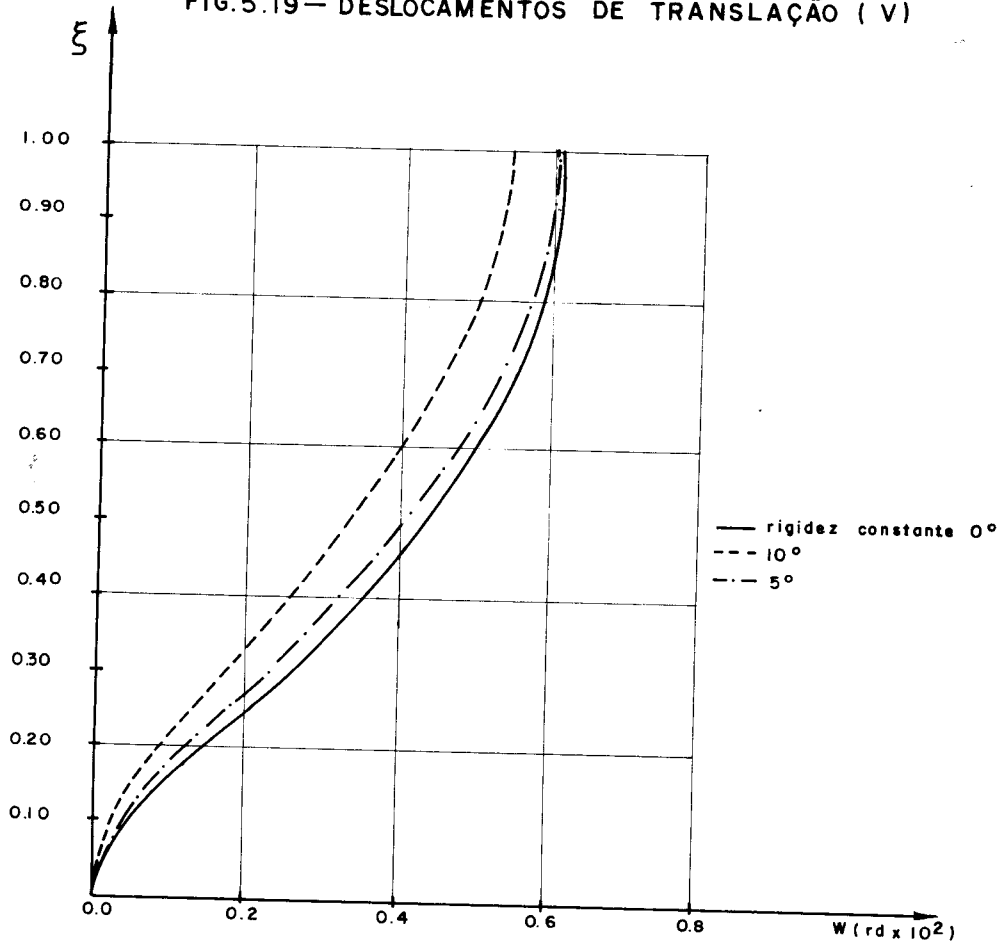


FIG. 5. 20 — DESLOCAMENTOS DE ROTAÇÃO (1° carregamento)

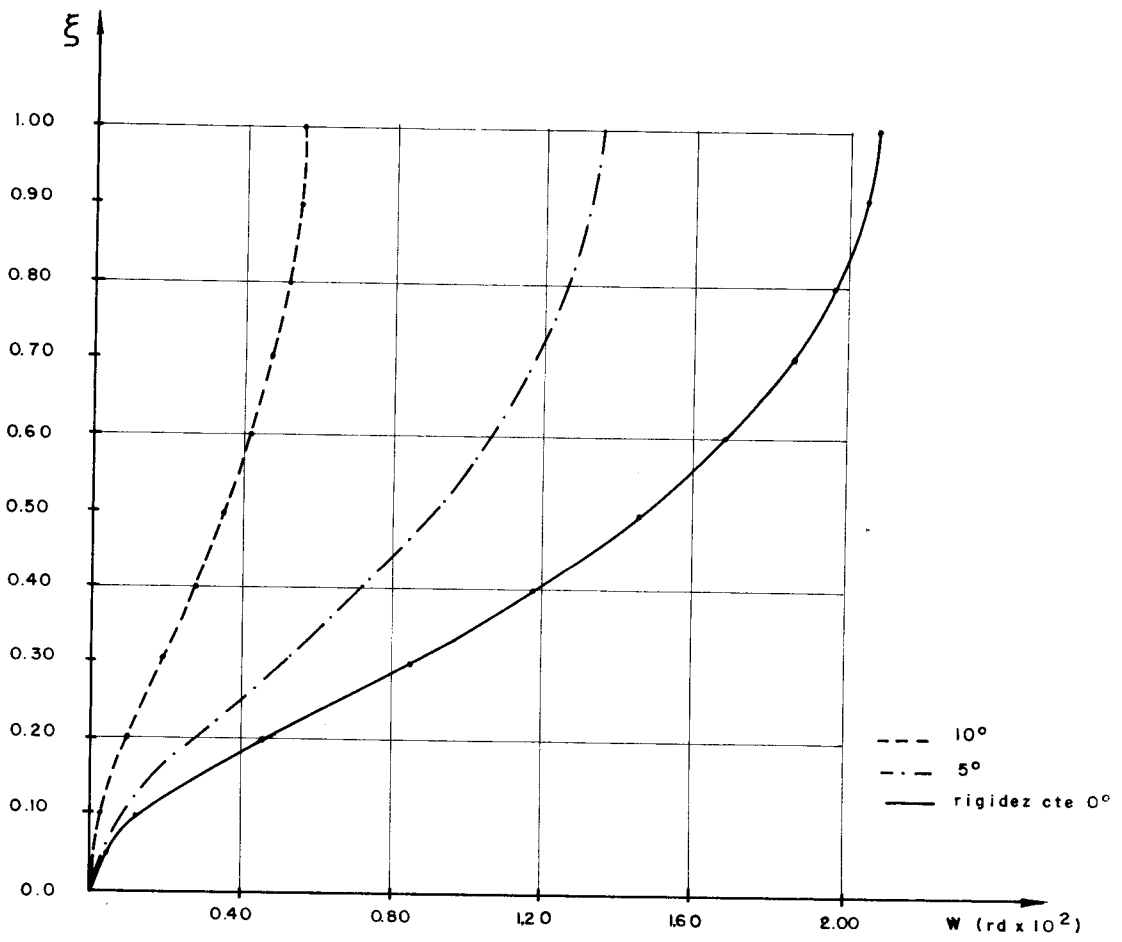


FIG. 5.21 - DESLOCAMENTOS DE ROTAÇÃO (2º carregamento)

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

O Método das Diferenças Finitas tem sido de grande utilidade na integração numérica das equações diferenciais, e isso já é um fato, por assim dizer, consagrado. Todavia, o emprego de malhas arbitrárias confere ao método requintes especiais, principalmente no sentido de permitir o tratamento de perturbações localizadas com maior precisão, sem aumento no montante relativo à parte numérica. Esse procedimento mostrou-se particularmente interessante na integração das equações diferenciais da Técnica do Meio Contínuo, conforme pode ser constatado nos diversos exemplos de aplicação arrolados, onde bons resultados foram conseguidos mediante operadores de diferenças derivados do polinômio interpolador do oitavo grau e uma malha de tão somente quinze nós.

Cabe ressaltar, todavia, que a utilização de polinômios interpoladores de grau mais elevado conduz a sistemas com tendências ao mau condicionamento numérico. Tal fato pode ser melhor entendido tendo em vista que, com o aumento do grau do polinômio, aumenta-se também o número de pontos envolvidos na interpolação, e, desta feita, a ordem de grandeza dos coeficientes presentes nas matrizes tornam-se bastante discrepantes, daí a razão do mau condicionamento mencionado. Em parte esse inconveniente pode ser contornado aumentando-se o número de pontos na malha na medida em que se consideram polinômios interpoladores de grau mais elevado, procurando, com isso, reduzir aquelas discrepâncias.

Com relação à programação do procedimento resultante em computador, cabe ressaltar que constitui tarefa sem maiores complicações. As expressões envolvidas na par

particular formulação do método adotado, apresentam leis de formação que permitem compor facilmente seus algoritmos de geração.

O emprego do Método das Diferenças Finitas mostra-se particularmente interessante no caso em apreço, dada a característica peculiar de efetuar a integração por pontos. Assim sendo, no tratamento das associações de painéis de contraventamento de rigidez variável ao longo da altura, nenhum expediente adicional foi necessário acrescentar.

A propósito do estudo das associações de painéis de contraventamento de rigidez variável ao longo da altura, convém ressaltar algumas constatações. Em primeiro lugar, a experimentação numérica realizada indica que, dentro de certos limites, o efeito da variação linear de rigidez do pórtico no comportamento do conjunto é equivalente ao da consideração de um pórtico de rigidez constante e igual à rigidez média. Por outro lado, o efeito da variação linear de rigidez da parede é equivalente ao da consideração de uma parede de rigidez constante e igual à rigidez da base. Tratam-se, pois, de constatações de grande interesse prático, porquanto a integração nos casos de rigidez variável ao longo da altura, via de regra, é somente viável por meios numéricos. Assim sendo, o expediente apontado, permite o tratamento de um modo mais imediato.

No tratamento pormenorizado das estruturas aporricadas, algumas constatações interessantes podem ser levantadas.

Em primeiro lugar, o engastamento das colunas na base confere ao conjunto uma rigidez adicional considerável, e, em segundo lugar, a curvatura adicional manifestada pela presença de colunas inclinadas confere ao conjunto um comportamento pouco comum, uma vez que o seu efeito tende a reduzir a deformada preponderante oriunda da solicitação por força cortante. Por último, o estudo numérico de uma estrutura aporricada com um formato tronco piramidal i

lustra que a influência daqueles efeitos adicionais em estruturas tridimensionais são também consideráveis e, mais ainda, para algumas configurações particulares de carregamento, alguns deles deixam de manifestar.

Finalizando, uma constatação de grande interesse é a de que o procedimento resultante da formulação do Método das Diferenças Finitas, desenvolvido para o tratamento de associações planas de painéis de contraventamento, quando estendido ao tratamento de associações tridimensionais, de maneira um tanto imediata, mostra-se, também neste caso, bastante eficiente.

APÊNDICE

Apresenta-se, a seguir, a documentação dos programas empregados na resolução dos exemplos propostos nos capítulos IV e V; ressaltando, outrossim, que a linguagem de programação utilizada foi a FORTRAN. O processamento dos vários programas foi feito no computador PDP 11/45, que apresenta, como característica principal, uma configuração de 128 K palavras de memória, reservando-se, no caso do sistema utilizado, um máximo de 32 K à disposição do usuário, em cada terminal.

A listagem completa de cada programa vem acompanhada de diagramas elucidativos de seus passos principais, com uma descrição sumária dos subprogramas componentes. Completa-se a documentação com comentários sobre a entrada de dados e a saída dos resultados de interesse.

A.1 - Programa para o cálculo da associação plana de painéis pórtico e parede com rigidez constante ou variável ao longo da altura.

O programa integra, através do Método das Diferenças Finitas com emprego de malhas arbitrárias, a equação fundamental (4.6) permitindo-se, ainda, a análise de associações com painéis de rigidez constante e de associações compostas apenas de painéis parede.

a) Descrição dos subprogramas (\*)

- Subprograma DECOM

Empregado para a resolução do sistema de equa

---

(\*) Os subprogramas DECOM, SOLVE, IMPRUV e SING foram tirados da referência (20) e adaptados para o estudo em questão; o subprograma GRJIS foi tirado da referência (5).



ções através do Método de Gauss executa, inicialmente, o escalonamento na matriz dos coeficientes desenvolvendo, em seguida, a eliminação com pivotamento parcial.

- Subprograma SOLVE

Determina as incógnitas por substituição (back substitution) a partir da matriz dos coeficientes decomposta.

- Subprograma IMPRUV

Executa o refinamento da solução dada por SOLVE, empregando 30 (trinta) iterações em precisão estendida.

- Subprograma SING

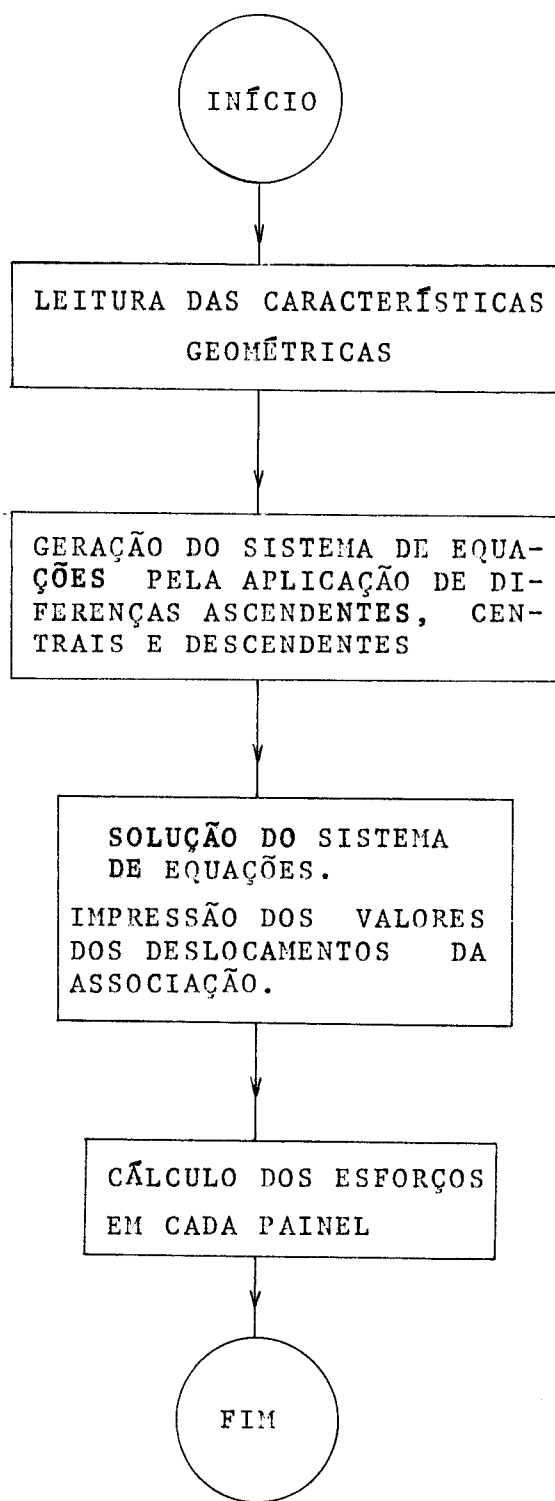
Empregado na impressão de mensagens de controle durante a solução do sistema de equações.

- Subprograma GJRI

Utilizado para a inversão de matrizes pelo Método de Gauss Jordan Ruttishauser.

b) Programa principal

O seguinte diagrama resume os passos principais desenvolvidos para a determinação dos deslocamentos e esforços nos painéis da associação.



c) Entrada de dados (\*)

O programa prevê o uso de uma malha máxima de 28 pontos e um grau de polinômio com valores 4, 6 ou 8. Os formatos adotados levam em conta o emprego do metro como unidade de comprimento e a tonelada força como unidade de força.

A sequência de cartões para a entrada de dados é a seguinte:

1) - VARIÁVEIS - N, L, P, NN, KZ, NF, NW

FORMATO - I3, 2 F6.2, 4I3

N - número total de pontos de malha.

L - altura da estrutura.

P - valor da carga externa horizontal, uniformemente distribuída.

NN - grau adotado para o polinômio interpolador.

KZ - variável que informa sobre a característica principal de associação. Assume o valor  $\emptyset$  (zero) para rigidez constante e o valor 1 para rigidez variável com a altura.

NF - indica a presença ou não do painel pórtico, asumando os valores 1 e  $\emptyset$  respectivamente.

NW - informa o número de paredes da estrutura.

2) VARIÁVEIS - X(I), I = 1,N

FORMATO - 7 F8.3

X(I) - coordenadas dos pontos i da malha, fornecidas em sequência da base para o topo.

---

(\*) Na listagem apresentada, a entrada de dados é feita via terminal.

3) - (para o caso da existência do painel p $\tilde{o}$ rtico)

VARIÁVEIS - SF(I), I = 2,N1

FORMATO - 7 F8.2

N1 = N-2

SF(I) - rigidez do painel p $\tilde{o}$ rtico nos pontos da malha pertencentes ao dom $\tilde{e}$ nio de integra $\tilde{c}$ ão.

4) VARIÁVEIS - JW2(JK,I), I = 2,N1

FORMATO - 7 F10.1

JW2(JK,I) - rigidez do painel parede JK, nos pontos da malha pertencentes ao dom $\tilde{e}$ nio de integra $\tilde{c}$ ão.

5) VARIÁVEIS - JW3(JK,I), I = 2,N1

FORMATO - 7 F10.0

JW3(JK,I) - valor da derivada da rigidez da parede nos pontos da malha pertencentes ao dom $\tilde{e}$ nio de integra $\tilde{c}$ ão.

OBS.: - a sequ $\tilde{e}$ ncia mostrada a partir do 4 $o$  passo, repete-se em fun $\tilde{c}$ ão do n $\tilde{u}$ mero de paredes.

6) VARIÁVEIS - Q(I), I = 2,N1

FORMATO - 8 F8.3

Q(I) - resultante do carregamento externo nos pontos da malha pertencentes ao dom $\tilde{e}$ nio de integra $\tilde{c}$ ão.

d) Impressão dos resultados

- Informações sobre o tipo de associação, grau do polinômio adotado e número de divisões da malha.
- Deslocamentos u da associação, nos vários pontos da malha.
- Momentos fletores e esforços cortantes da parede nos pontos da malha.
- Esforços cortantes nos pórticos definidos para os pontos da malha empregada.

e) Listagem

```
C*****
C*****
C*****      SUBPROGRAMA PARA PIVOTAMENTO E ESCALONAMENTO
C*****      PARCIAL DA MATRIZ BI DOS COEFICIENTES DO SISTEMA
C*****      DE EQUACOES, COM ORDEM NN
C*****
C*****
      SUBROUTINE DECOM(MN,BI,UL,IPS)
      DIMENSION BI(28,28),UL(28,28),SCALES(28),IPS(28)

      N=NN

      DO 5 I=1,N
      IPS(I)=I
      ROWNRM=0.
      DO 2 J=1,N
      UL(I,J)=BI(I,J)
      IF(ROWNRM - ABS(UL(I,J)))1,2,2
1 ROWNRM=ABS(UL(I,J))
2 CONTINUE
      IF(ROWNRM)3,4,3
3 SCALES(I)=1000.0/ROWNRM
      GO TO 5
4 CALL SING(1)
      SCALES(I)=0.
5 CONTINUE
C*****
C*****      ELIMINACAO DE GAUSS COM PIVOTAMENTO PARCIAL
C*****
      NM1=N-1
```

```
      DO 17 K=1,NM1
      BIG=0.
      DO 11 I=K,N
      IP=IPS(I)
      SIZE=ABS(UL(IP,K))*SCALES(IP)
      IF(SIZE-BIG)11,11,10
10     BIG=SIZE
      IDXPIV=I
11     CONTINUE
      IF(BIG)13,12,13
12     CALL SING(2)
      GO TO 17
13     IF(IDXPIV-K)14,15,14
14     J=IPS(K)
      IPS(K)=IPS(IDXPIV)
      IPS(IDXPIV)=J
15     KP=IPS(K)
      PIVOT=UL(KP,K)
      KP1=K+1
      DO 16 I=KP1,N
      IP=IPS(I)
      EM=-UL(IP,K)/PIVOT
      UL(IP,K)=-EM
      DO 16 J=KP1,N
      UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)
16     CONTINUE
17     CONTINUE
      KP=IPS(N)
      IF(UL(KP,N))19,18,19
18     CALL SING(2)
19     RETURN
      END
C*****
C*****
C*****      SUBPROGRAMA PARA SOLUCAO DO SISTEMA
C*****      A PARTIR DA MATRIZ TRIANGULARIZADA UL
C*****
C*****
      SUBROUTINE SOLVE(NN,UL,B,X,IPS)
      DIMENSION UL(28,28),B(28),X(28),IPS(28)

      N=NN
      NP1=N+1

      IP=IPS(1)
      X(1)=B(IP)
      DO 2 I=2,N
      IP=IPS(I)
      IM1=I-1
      SUM=0.
      DO 1 J=1,IM1
1     SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
2     X(I)=B(IP)-SUM
      IP=IPS(N)
      X(N)=X(N)/UL(IP,N)
      DO 4 IBACK=2,N
      I=NP1-IBACK
      IP=IPS(I)
      IP1=(I+1)
      SUM=0.
      DO 3 J=IP1,N
3     SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
4     X(I)=(X(I)-SUM)/UL(IP,I)
      RETURN
      END
C*****
```

```
C*****
C*****      SUBPROGRAMA PARA REFINAMENTO DA SOLUCAO X
C*****      DO SISTEMA DE EQUACUES
C*****
C*****
      SUBROUTINE IMPROV(NN,BI,UL,B,X,IPS)
      DIMENSION BI(28,28) ,UL(28,28),B(28),X(28),R(28),DX(28)
      DIMENSION IPS(28)
      DOUBLE PRECISION SUM

      N=NN
      EPS=1.0E-04
      ITMAX=30
      XNORM=0.0
      DO 1 I=1,N
1  XNORM=AMAX1(XNORM,ABS(X(I)))
      IF(XNORM)3,2,3
2  DIGITS=-ALOG10(EPS)
      GO TO 10
3  DO 9 ITER=1,ITMAX
      DO 5 I=1,N
      SUM=0.
      DO 4 J=1,N
4  SUM=SUM+BI(I,J)*X(J)
      SUM=B(I)-SUM
5  R(I)=SUM
      CALL SOLVE(N,UL,R,DX,IPS)
      DXNORM=0.
      DO 6 I=1,N
      T=X(I)
      X(I)=X(I)+DX(I)
      DXNORM=AMAX1(DXNORM,ABS(X(I)-T))
6  CONTINUE
      IF(ITER-1)8,7,8
7  DIGITS=-ALOG10(AMAX1(DXNORM/XNORM,EPS))
8  IF(DXNORM-EPS*XNORM)10,10,9
9  CONTINUE
      CALL SING(3)
10 RETURN
      END
C*****
C*****
C*****      SUBPROGRAMA PARA IMPRESSAO DE MENSAGENS
C*****      NA SOLUCAO DO SISTEMA
C*****
C*****
      SUBROUTINE SING(IWHY)

11 FORMAT(14X,'MATRIZ COM LINHA NULA')
12 FORMAT(14X,'MATRIZ SINGULAR.DIVISAO POR ZERO EM SOLVE')
13 FORMAT(14X,'NAO HA CONVERGENCIA EM IMPROV.MATRIZ E QUASE SING.')
```

```
      GO TO (1,2,3),IWHY
1  WRITE(5,11)
      GO TO 10
2  WRITE(5,12)
      GO TO 10
3  WRITE(5,13)
10 RETURN
      END
C*****
C*****
C*****      SUBPROGRAMA PARA INVERSAO DA MATRIZ F
C*****      DE ORDEM N, UTILIZANDO O METODO DE
C*****      GAUSS JORDAN RUTTISHAUSER
C*****
C*****
```

```
SUBROUTINE GJRIS(N,F)
DIMENSION F(28,28),B(28),C(28),IP(28),IQ(28)
DO 1 K=1,N
T=0.
DO 6 I=K,N
S=0.
DO 3 J=K,N
3 S=S+ABS(F(I,J))
IF(S)4,5,4
4 DO 2 J=K,N
IF(ABS(F(I,J))-S*T)2,2,7
7 IP(K)=I
IQ(K)=J
PIVO=F(I,J)
T=ABS(PIVO/S)
2 CONTINUE
6 CONTINUE
IF(T)101,5,101
101 IF(IP(K)-K)8,98,8
8 DO 9 J=1,N
IPK=IP(K)
Z=F(IPK,J)
F(IPK,J)=F(K,J)
9 F(K,J)=Z
98 IF(IQ(K)-K)10,20,10
10 IQK=IQ(K)
DO 11 I=1,N
Z=F(I,IQK)
F(I,IQK)=F(I,K)
11 F(I,K)=Z
20 DO 12 J=1,N
IF(J-K)13,14,13
14 B(J)=1/PIVO
C(J)=1.
GO TO 15
13 B(J)=-F(K,J)/PIVO
C(J)=F(J,K)
15 F(K,J)=0.
12 F(J,K)=0.
DO 1 I=1,N
DO 1 J=1,N
F(I,J)=F(I,J)+C(I)*B(J)
1 CONTINUE
DO 16 KAUX=1,N
K=N-KAUX+1
IF(IP(K)-K)17,18,17
17 DO 102 I=1,N
IPK=IP(K)
Z=F(I,IPK)
F(I,IPK)=F(I,K)
F(I,K)=Z
102 CONTINUE
18 IF(IQ(K)-K)104,16,104
104 DO 103 J=1,N
IQK=IQ(K)
Z=F(IQK,J)
F(IQK,J)=F(K,J)
F(K,J)=Z
103 CONTINUE
16 CONTINUE
GO TO 118
5 WRITE(5,100)
100 FORMAT(//5X'PROGRAMA NAO EXECUTADO-MATRIZ SINGULAR'//)
118 RETURN
END
C*****
```



```
C*****
C***** PROGRAMA PRINCIPAL PARA ESTUDO DA ASSOCIACAO
C***** PLANA DE PAINELIS DE CONTRAVENTAMENTO LIGADOS
C***** POR BARRAS BIARTICULADAS
C*****
C***** APLICAM-SE DIFERENCAS FINITAS DE MALHA IRREGULAR
C***** NA SOLUCAO DA EQUACAO DIFERENCIAL OBTIDA ATRAVES
C***** TECNICA DO MEIO CONTINUO
C*****
C*****
      REAL L,JW(28),MW(28),JW2(3,28),JW3(3,28),JW4(28)
      DIMENSION X(28),SF(28),Q(28),CO(8,9,28),A(28,28),BI(28,28),CC(28
*) ,
      FF(28),QW(28),GF(28),
      *H(28),SB1(28,28)
      DIMENSION IPS(28)
      CALL ASSIGN(2,'SE.DAT')
      OPEN(UNIT=5,NAME='LP:')
C*****
C***** ENTRADA DE DADOS
C*****
C***** RIGIDEZ CONSTANTE AO LONGO DA ALTURA FAZ KZ=0
C***** RIGIDEZ VARIAVEL AO LONGO DA ALTURA FAZ KZ=1
C*****
      READ(2,1)N,L,P,NN,KZ,NF,NW
      1 FORMAT(I3,2(F6.2),4I3)
      WRITE(5,99)NN
      99 FORMAT(11X,'ESTUDO DA ASSOCIACAO PLANA PORTICO PAREDE,POR DIFEREN
* CAS FINITAS DE MALHA IRREGULAR',//,11X,'POLINOMIO INTERPOLADOR DE
* GRAU',I6,/)
      N1=N-2
      READ(2,2)(X(I),I=1,N)
      2 FORMAT(7F8.3)
      IF(NF)300,300,301
      301 READ(2,3)(SF(I),I=2,N1)
      3 FORMAT(7F8.2)
      GO TO 305
      300 DO 304 I=2,N1
      304 SF(I)=0.
      305 DO 302 JK=1,NW
      READ(2,52)(JW2(JK,I),I=2,N1)
      52 FORMAT(7F10.1)
      READ(2,3820)(JW3(JK,I),I=2,N1)
      3820 FORMAT(7F10.0)
      302 CONTINUE
      DO 303 I=2,N1
      JW4(I)=0.
      JW(I)=0.
      DO 330 JK=1,NW
      JW(I)=JW(I)+JW2(JK,I)
      JW4(I)=JW4(I)+JW3(JK,I)
      330 CONTINUE
      303 CONTINUE
      IF(KZ)100,101,100
      101 I=2
      CK=(L*I*SF(I))/JW(I)
      WRITE(5,102)CK
      102 FORMAT(11X,'ASSOCIACAO PLANA COM RIGIDEZ CONSTANTE E COEFICIENTE
* ADIMENSIONAL K**2=',F8.1,/)
      GO TO 104
      100 WRITE(5,103)
      103 FORMAT(11X,'ASSOCIACAO PLANA COM RIGIDEZ DE POR-PAR VARIAVEL',/)
      104 N11=N-1
      WRITE(5,6)N11
      6 FORMAT(11X,'NUMERO DE DIVISOES',6X,I4,/)
      WRITE(5,7)
      7 FORMAT(11X,'RIGIDEZ DO PAINEL PAREDE ',//,21X,'POMIO',5X,'RIGI
```

```
*DEZ',/)
DO 54 I=2,NI
54 WRITE(5,10)I,JW(I)
10 FORMAT(21X,13,7X,F10.1,/)
DO 11 K=1,N
DO 11 J=1,N
11 A(K,J)=0.
DO 12 I=1,NN
DO 12 J=1,NN
12 SB1(I,J)=0.
C*****
C*****  CONDICAO DE DERIVADA NULA NO ENGASTE
C*****
I=2
DO 13 J=1,NN
H(J)=X(I+J)-X(I)
L2=0
DO 14 K=1,NN
L3=NN-L2
SB1(J,K)=H(J)**L3
14 L2=L2+1
13 CONTINUE
CALL GRJIS(NN,SB1)
A(1,2)=1.
CO(NN,NN+1,I)=0.0
CO(NN-1,NN+1,I)=0.0
CO(NN-2,NN+1,I)=0.0
DO 15 J=1,NN
CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
A(I,J+I)=CO(NN,J,I)
15 CONTINUE
A(I,I)=CO(NN,NN+1,I)
NN1=NN/2
C*****
C*****  APLICACAO DE DIFERENCAS ASCENDENTES
C*****
DO 16 I=2,NN1
CK=(L*L*SF(I))/JW(I)
CK1=2.*JW4(I)/JW(I)
DO 17 J=1,NN
H(J)=X(I+J)-X(I)
L2=0
DO 18 K=1,NN
L3=NN-L2
SB1(J,K)=H(J)**L3
18 L2=L2+1
17 CONTINUE
CALL GRJIS(NN,SB1)
CU(NN,NN+1,I)=0.
CO(NN-1,NN+1,I)=0.
CO(NN-2,NN+1,I)=0.
DO 19 J=1,NN
CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
19 A(I+1,I+J)=-6.*CO(NN-2,J,I)+CK*CO(NN,J,I)-CK1*CO(NN-1,J,I)
A(I+1,I)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+CK*CO(NN,NN+1,I)-CK1*CO(NN-1,NN+1,I)
16 CONTINUE
```

```
C*****
C***** APLICACAO DE DIFERENCAS CENTRAIS
C*****
      K2=NN1+1
      K3=N-NN1
      DO 20 I=K2,K3
      CK=(L*L*SF(I))/JW(I)
      CK1=2. *JW4(I)/JW(I)
      DO 21 J=1,NN1
      H(2*J-1)=X(I+J)-X(I)
      H(2*J)=X(I-J)-X(I)
      L2=0
      DO 22 KL=1,NN
      L3=NN-L2
      SB1(2*J-1,KL)=H(2*J-1)**L3
      SB1(2*J,KL)=H(2*J)**L3
22  L2=L2+1
21  CONTINUE
      CALL GRJIS(NN,SB1)
      CO(NN,NN+1,I)=0.
      CO(NN-1,NN+1,I)=0.
      CO(NN-2,NN+1,I)=0.
      DO 23 J=1,NN
      CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
      CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
      CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
      CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
      CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
      CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
23  CONTINUE
      DO 24 J=1,NN1
      A(I+1,I-J)=-6.*CO(NN-2,2*J,I)+CK*CO(NN,2*J,I)-CK1*CO(NN-1,2*J,I
      *)
24  A(I+1,I+J)=-6.*CO(NN-2,2*J-1,I)+CK*CO(NN,2*J-1,I)-CK1*CO(N
      *N-1,2*J-1,I)
      A(I+1,I)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+CK*CO(NN,NN+1,I)-CK1*CO(NN-1,NN+1,
      *I)
20  CONTINUE
```

```
C*****
C***** APLICACAO DE DIFERENCAS DESCENDENTES
C*****
```

```
      K4=K3+1
      K5=N-2
      IF(K5-K4)335,336,336
336 DO 25 I=K4,K5
      CK=(L*L*SF(I))/JW(I)
      CK1=2. *JW4(I)/JW(I)
      DO 26 J=1,NN
      H(J)=X(I-J)-X(I)
      L2=0
      DO 27 K=1,NN
      L3=NN-L2
      SB1(J,K)=H(J)**L3
27  L2=L2+1
26  CONTINUE
      CALL GRJIS(NN,SB1)
      CO(NN,NN+1,I)=0.
      CO(NN-1,NN+1,I)=0.
      CO(NN-2,NN+1,I)=0.
      DO 28 J=1,NN
      CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
      CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
      CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
      CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
      CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
      CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
```

```
A(I+1,I-J)=-6.*CU(NN-2,J,I)+CK*CU(NN,J,I)-CK1*CO(NN-1,J,I)
28 CONTINUE
A(I+1,I)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+CK*CO(NN,NN+1,I)-CK1*CO(NN-1,NN+1,I)
25 CONTINUE
C*****
C***** CONDICAO DE MOMENTO NULO NA EXTREMIDADE SUPERIOR
C*****
335 I=N1
DO 29 J=1,NN
H(J)=X(I-J)-X(I)
L2=0
DO 30 K=1,NN
L3=NN-L2
SB1(J,K)=H(J)**L3
30 L2=L2+1
29 CONTINUE
CALL GRJIS(NN,SB1)
SB1(NN-1,NN+1)=0.
CO(NN-1,NN+1,I+1)=0.0
DO 31 J=1,NN
CO(NN-1,J,I+1)=SB1(NN-1,J)
SB1(NN-1,NN+1)=-SB1(NN-1,J)+SB1(NN-1,NN+1)
CO(NN-1,NN+1,I+1)=-CO(NN-1,J,I+1)+CO(NN-1,NN+1,I+1)
31 A(I+2,I-J)=2.*SB1(NN-1,J)
A(I+2,I)=2.*SB1(NN-1,NN+1)
C*****
C***** VALORES DO CARREGAMENTO EXTERNO
C*****
READ(2,306)(Q(I),I=2,N1)
306 FORMAT(8F8.3)
DO 325 I=2,N1
Q(I)=(Q(I)*L*L*L)/JW(I)
325 CONTINUE
CC(1)=0.
CC(2)=0.
CC(N)=0.
C*****
C***** SOLUCAO DO SISTEMA
C*****

N10=N-2
DO 95 K1=2,N10
95 CC(K1+1)=Q(K1)
DO 48 I=2,N
48 A(I,2)=0.
CALL DECOM(N,A,BI,IPS)
CALL SOLVE(N,BI,CC,FF,IPS)

CALL IMPRUV(N,A,BI,CC,FF,IPS)
C*****
C***** IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS
C*****
WRITE(5,322)
322 FORMAT(11X,'DESLOCAMENTOS DA ASSOCIACAO',//,11X,'PONTO',5X,'DESLO
*CAMENTO',/)
DO 323 I=2,N1
323 WRITE(5,324)X(I),FF(I)
324 FORMAT(7X,F8.3,5X,E14.7,/)
FFT=FF(N)
C*****
C***** CALCULO DOS ESFORCOS
C*****
C***** ESFORCOS NAS PAREDES
C*****
```

```
DO 307 M1=1,NW
WRITE(5,308)M1
308 FORMAT(11X,'MOMENTOS FLETORES E CORTANTES NA PAREDE',I6,/,/,21X,'MO
*MENTO FLETOR',21X,'FORCA CORTANTE',15X,'PONTO',/)
DO 81 I=2,NN1
QW(I)=0.
DO 82 J=1,NN
QW(I)=(-6.*JW2(M1,I)/(L*L*L))*CO(NN-2,J,I)*FF(I+J)+(-2.*JW3(M1,I)
*/(L*L))*CO(NN-1,J,I)*FF(I+J)+QW(I)
82 CONTINUE
QW(I)=QW(I)+(-6.*JW2(M1,I)/(L*L*L))*CO(NN-2,NN+1,I)*FF(I)+(-2.*JW3
*(M1,I)/(L*L))*CO(NN-1,NN+1,I)*FF(I)
81 CONTINUE
K2=NN1+1
K3=N-NN1
DO 83 I=K2,K3
QW(I)=0.
DO 84 J=1,NN1
QW(I)=(-6.*JW2(M1,I)/(L*L*L))*CO(NN-2,2*J,I)*FF(I-J)+(-2.*JW3(M1,I)
*/(L*L))*CO(NN-1,2*J,I)*FF(I-J)+QW(I)
QW(I)=(-6.*JW2(M1,I)/(L*L*L))*CO(NN-2,2*J-1,I)*FF(I+J)+(-2.*JW3(M1
*,I)/(L*L))*CO(NN-1,2*J-1,I)*FF(I+J)+QW(I)
84 CONTINUE
QW(I)=(-6.*JW2(M1,I)/(L*L*L))*CO(NN-2,NN+1,I)*FF(I)+(-2.*JW3(M1,I)
*/(L*L))*CO(NN-1,NN+1,I)*FF(I)+QW(I)
83 CONTINUE
K4=K3+1
K5=N-2
IF(K5-K4)3270,3271,3271
3271 DO 85 I=K4,K5
QW(I)=0.
DO 86 J=1,NN
QW(I)=(-6.*JW2(M1,I)/(L*L*L))*CO(NN-2,J,I)*FF(I-J)+(-2.*JW3(M1,I)/
*(L*L))*CO(NN-1,J,I)*FF(I-J)+QW(I)
86 CONTINUE
QW(I)=(-6.*JW2(M1,I)/(L*L*L))*CO(NN-2,NN+1,I)*FF(I)+(-2.*JW3(M1,I)
*/(L*L))*CO(NN-1,NN+1,I)*FF(I)+QW(I)
85 CONTINUE
3270 CONTINUE
DO 3274 I=2,NN1
MW(I)=0.
DO 3275 J=1,NN
MW(I)=(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,J,I)*FF(I+J))+MW(I)
3275 CONTINUE
MW(I)=MW(I)+(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,NN+1,I)*FF(I))
3274 CONTINUE
IF(N1-K3)3276,3276,3277
3276 K3=K3-1
3277 DO 3278 I=K2,K3
MW(I)=0.
DO 3279 J=1,NN1
MW(I)=(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,2*J,I)*FF(I-J))+MW(I)
MW(I)=(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,2*J-1,I)*FF(I+J))+MW(I)
3279 CONTINUE
MW(I)=MW(I)+(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,NN+1,I)*FF(I))
3278 CONTINUE
K4=K3+1
K5=N1-1
IF(K5-K4)3280,3281,3281
3281 DO 3282 I=K4,K5
MW(I)=0.
DO 3283 J=1,NN
MW(I)=(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,J,I)*FF(I-J))+MW(I)
3283 CONTINUE
MW(I)=MW(I)+(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,NN+1,I)*FF(I))
3282 CONTINUE
3282 CONTINUE
```

```
3280 I=N1
      MW(I)=0.
      DO 3284 J=1,NN
      MW(I)=MW(I)+(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,J,I+1)*FF(I-J))
3284 CONTINUE
      MW(I)=MW(I)+(JW2(M1,I)/(L*L))*(2.*CO(NN-1,NN+1,I+1)*FF(I))
      DO 309 I=2,N1
309  WRITE(5,310)MW(I),QW(I),X(I)
310  FORMAT(21X,E14.7,21X,E14.7,6X,F8.3,/)
307  CONTINUE
C*****
C*****      ESFORCOS NOS PORTICOS
C*****
      IF(NF)213,213,311
311  DO 313 I=2,NN1
      QF(I)=0.
      DO 314 J=1,NN
      QF(I)=(SF(I)/L)*(CO(NN,J,I)*FF(I+J))+QF(I)
314  CONTINUE
      QF(I)=QF(I)+(SF(I)/L)*CO(NN,NN+1,I)*FF(I)
313  CONTINUE
      K3=N-NN1
      DO 315 I=K2,K3
      QF(I)=0.
      DO 316 J=1,NN1
      QF(I)=QF(I)+(SF(I)/L)*(CO(NN,2*J,I)*FF(I-J))
      QF(I)=QF(I)+(SF(I)/L)*(CO(NN,2*J-1,I)*FF(I+J))
316  CONTINUE
      QF(I)=QF(I)+(SF(I)/L)*(CO(NN,NN+1,I)*FF(I))
315  CONTINUE
      K4=K3+1
      K5=N-2
      IF(K5-K4)3272,3273,3273
3273 DO 317 I=K4,K5
      QF(I)=0.
      DO 318 J=1,NN
      QF(I)=QF(I)+(SF(I)/L)*(CO(NN,J,I)*FF(I-J))
318  CONTINUE
      QF(I)=QF(I)+(SF(I)/L)*(CO(NN,NN+1,I)*FF(I))
317  CONTINUE
3272 WRITE(5,319)
319  FORMAT(11X,'PONTO',5X,'CORTANTE PORTICO',/)
      DO 320 I=2,N1
320  WRITE(5,321)X(I),QF(I)
321  FORMAT(7X,F8.3,5X,E14.7,/)
213  CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

A.2 - Programa para o cálculo da associação tridimensional de painéis p $\tilde{}$ rtico e parede com rigidez constante ao longo da altura.

O programa soluciona o sistema (3.43) atrav $\tilde{}$ s do M $\tilde{}$ todo das Diferen $\tilde{}$ as Finitas, considerando os pain $\tilde{}$ is e e ventuais n $\tilde{}$ cleos resistentes com rigidez constante ao longo da altura.

a) Descri $\tilde{}$ o dos subprogramas (\*)

- Sub programa RIGST

Monta a matriz  $[S]$  pela contribui $\tilde{}$ o da rigidez dos p $\tilde{}$ rticos  $\tilde{}$  rigidez da estrutura.

- Sub programa RIGJW

Gera a matriz  $[J]$  pela contribui $\tilde{}$ o da rigidez das paredes  $\tilde{}$  rigidez da estrutura.

- Sub programa COORD

Calcula os componentes do vetor unit $\tilde{}$ rio do painel a partir das coordenadas de suas extremidades.

- Sub programa MONT 1

Determina a matriz  $[K]$  a partir do produto matricial indicado na express $\tilde{}$ o (3.44).

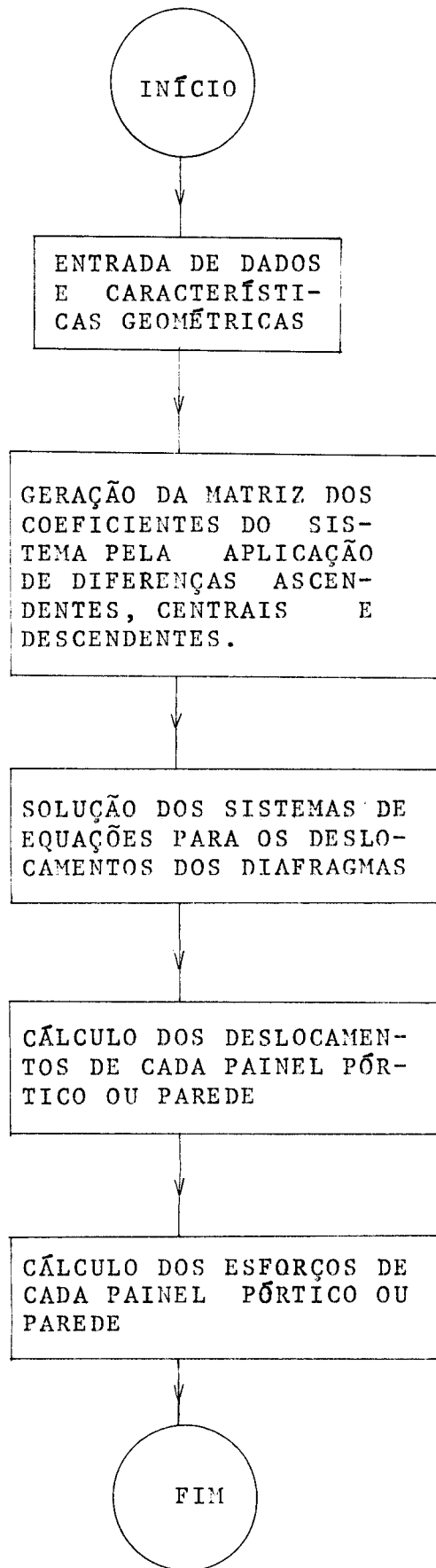
- Sub programa MONT 2

Calcula o vetor  $\{Q^*\}$  a partir do produto matricial indicado na express $\tilde{}$ o (3.45).

b) Programa principal

---

(\*) Os subprogramas descritos foram formulados pelo autor.





c) Entrada de dados

O programa prevê uma estrutura composta, no máximo, de oito painéis parede e oito painéis pórtico, tendo ainda um limite de oito molas de torção. O maior número de pontos da malha é quinze e o mais alto grau de polinômio a ser empregado é oito. Novamente, deve-se esclarecer que os formatos de entrada foram previstos para o uso das unidades metro, para comprimento e tonelada força para força.

Tendo em vista o emprego de uma malha com quinze pontos, os cartões de dados obedecem a seguinte sequência:

1) VARIÁVEIS - N, L, P, AA1, BB1, CC1, NN

FORMATO - I3, 5 F8.2, I3

N - número total de pontos da malha.

L - altura da estrutura.

P - valor da carga externa horizontal uniformemente distribuída.

AA1, BB1 - Componente de carga externa segundo os eixos globais X e Y, respectivamente.

CC1 - momento da carga externa segundo o eixo global Z.

NN - grau adotado para o polinômio interpolador.

2) VARIÁVEIS - NF, NW, NM

FORMATO - 3 I 5

NF - informa o número de pórticos.

NW - informa o número de paredes.

NM - informa o número de molas de torção.

3) VARIÁVEIS - X(I), I = 1,N

FORMATO - 10 F8.3

X(I) - coordenadas dos pontos i da malha fornecidas em sequência da base para o topo.

- 4) VARIÁVEIS - SSFF  
FORMATO - F8.2  
SSFF - rigidez do painel p $\acute{o}$ rtico.
- 5) VARIÁVEIS - JW(I)  
FORMATO - F9.1  
JW(I) - rigidez do painel parede.
- 6) VARIÁVEIS - TM(I), I = 1,NM  
FORMATO - F9.1  
TM(I) - parâmetro  $E \cdot J_t$  de torç $\tilde{a}$ o livre.
- 7) VARIÁVEIS - JT(I), I = 1,NM  
FORMATO - F9.1  
JT(I) - parâmetro  $E J_\omega$  de flexo-torç $\tilde{a}$ o
- 8) VARIÁVEIS - XW(T), XW1(I), YW(I), YW1(I)  
FORMATO - 4 F8.2  
XW(I), YW(I) - posiç $\tilde{a}$ o em planta do n $\acute{o}$  final da parede  
de I.  
XW1(I), YW1(I)- posiç $\tilde{a}$ o em planta do n $\acute{o}$  inicial da  
parede I.
- 9) VARIÁVEIS - XF(I), XF1(I), YF(I), YF1(I)  
FORMATO - 4 F8.2  
XF(I), YF(I) - posiç $\tilde{a}$ o em planta do n $\acute{o}$  final do p $\acute{o}$ rti  
tico I.  
XF1(I), YF1(I) - posiç $\tilde{a}$ o em planta do n $\acute{o}$  inicial do  
p $\acute{o}$ rtico I.

OBS. Os passos 4),9) e 5),8), repetem-se de acordo com o n $\acute{u}$ mero NF e NW de p $\acute{o}$ rticos e paredes, respectivamente.

d) Impressão dos resultados

- Impressão de títulos, grau do polinômio adotado e número de divisões da malha.
- Características de rigidez de cada um dos painéis.
- Deslocamentos U, V e W dos diafragmas genéricos.
- Deslocamentos dos painéis parede e pórtico nos vários pontos pertencentes ao domínio de integração.
- Momentos fletores e forças cortantes em cada parede nos vários pontos discretizados da malha.
- Forças cortantes nos painéis pórtico correspondentes às cotas definidas para os pontos da malha.
- Momentos de torção livre e momento de flexo torção, nos núcleos ou molas de torção.

e) Listagem

```
C*****  
C***  SUBPROGRAMA PARA INVERSAO DA MATRIZ  
C***  F DE ORDEN N  
C*****  
      SUBROUTINE GJRS(N,F)  
      DIMENSION F(8,8),R(8),C(8),IP(8),IQ(8)  
      DO 1 K=1,N  
      T=0.  
      DO 6 I=K,N  
      S=0.  
      DO 3 J=K,N  
      3 S=S+ABS(F(I,J))  
      IF(S)4,5,4  
      4 DO 2 J=K,N  
      IF(ABS(F(I,J))-S)2,2,7  
      7 IP(K)=I  
      IQ(K)=J  
      PIVO=F(I,J)  
      T=ABS(PIVO/S)  
      2 CONTINUE  
      6 CONTINUE  
      IF(T)101,5,101  
      101 IF(IP(K)-K)8,98,8  
      8 DO 9 J=1,N  
      IPK=IP(K)  
      Z=F(IPK,J)  
      F(IPK,J)=F(K,J)  
      9 F(K,J)=Z  
      98 IF(IQ(K)-K)10,20,10  
      10 IQK=IQ(K)  
      DO 11 I=1,N  
      Z=F(I,IQK)  
      F(I,IQK)=F(I,K)  
      11 F(I,K)=Z  
      20 DO 12 J=1,N  
      IF(J-K)13,14,13  
      14 R(J)=1/PIVO  
      C(J)=1.  
      GO TO 15  
      13 B(J)=-F(K,J)/PIVO  
      C(J)=F(J,K)  
      15 F(K,J)=0.  
      12 F(J,K)=0.  
      DO 1 I=1,N  
      DO 1 J=1,N  
      F(I,J)=F(I,J)+C(I)*R(J)  
      1 CONTINUE  
      DO 16 KAUX=1,N  
      K=N-KAUX+1  
      IF(IP(K)-K)17,18,17  
      17 DO 102 I=1,N  
      IPK=IP(K)  
      Z=F(I,IPK)  
      F(I,IPK)=F(I,K)  
      F(I,K)=Z  
      102 CONTINUE
```

```
18 IF(IQ(K)-K)104,16,104
104 DO 103 J=1,6
    IQK=IQ(K)
    Z=F(IQK,J)
    F(IQK,J)=F(K,J)
    F(K,J)=Z
103 CONTINUE
16 CONTINUE
   GO TO 118
   5 WRITE(5,100)
100 FORMAT(///5X'PROGRAMA NAO EXECUTADO=MATRIZ SINGULAR'//)
118 RETURN
   END
```

```
C*****
C***  SUBPROGRAMA QUE EXECUTA A
C***  MULTIPLICACAO DE MATRIZES PARA
C***  OBTEN A MATRIZ [K]
C*****
SUBROUTINE MONT1(AI1,BA,CA,DA)
DIMENSION AI1(3,3),BA(8,8),CA(3,3),DA(3,3),C1(3,3)
DO 1 I=1,3
DO 1 J=1,3
C1(I,J)=0.
DO 1 K=1,3
1 C1(I,J)=C1(I,J)+AI1(I,K)*BA(K,J)
DO 2 I=1,3
DO 2 J=1,3
DA(I,J)=0.
DO 2 K=1,3
2 DA(I,J)=DA(I,J)+C1(I,K)*CA(K,J)
RETURN
END
```

```
C*****
C***  SUBPROGRAMA QUE CALCULA A
C***  CONTRIBUICAO DOS PORTICOS
C***  A RIGIDEZ DA ESTRUTURA.(MATRIZ S)
C*****
SUBROUTINE RIGST(AI,BT,C,I,S1,T1,N1,N2,SS)
DIMENSION AI(8),BT(8),C(8),S1(8,12),T1(8),SS(3,3),A1(3)
DO 1 I1=1,3
DO 1 J1=1,3
SS(I1,J1)=0.0
DO 1 K=1,N1
A1(1)=AI(K)
A1(2)=BT(K)
A1(3)=C(K)
SS(I1,J1)=SS(I1,J1)+A1(I1)*A1(J1)*S1(K,I)
1 CONTINUE
IF(N2)3,3,2
2 DO 4 I2=1,N2
SS(3,3)=SS(3,3)+T1(I2)
4 CONTINUE
3 RETURN
END
```

```
C*****  
C*** SUBPROGRAMA PARA O CALCULO DAS  
C*** COMPONENTES DO VETOR UNITARIO DO PATINFL  
C*****  
SUBROUTINE COORD(I,XA,Y,XO,YO,AI,BT,C)  
DIMENSION XA(8),Y(8),XO(8),YO(8),AI(8),BT(8),C(8)  
H1=(XA(I)-XO(I))*(XA(I)-XO(I))+(Y(I)-YO(I))*(Y(I)-YO(I))  
H1=SQRT(H1)  
BT(I)=(Y(I)-YO(I))/H1  
AI(I)=(XA(I)-XO(I))/H1  
C(I)=XA(I)*BT(I)-Y(I)*AI(I)  
RETURN  
END
```

```
C*****  
C*** SUBPROGRAMA QUE EXECUTA A  
C*** MULTIPLICACAO DE MATRIZES PARA  
C*** OBTEN O VETOR Q*  
C*****  
SUBROUTINE MONT2(AI1,BA,CA1,DA1)  
DIMENSION AI1(3,3),BA(8,8),CA1(3),DA1(3),C1(3,3)  
DO 1 I=1,3  
DO 1 J=1,3  
C1(I,J)=0.  
DO 1 K=1,3  
1 C1(I,J)=C1(I,J)+AI1(I,K)*BA(K,J)  
DO 2 I=1,3  
DA1(I)=0.  
DO 2 K=1,3  
2 DA1(I)=DA1(I)+C1(I,K)*CA1(K)  
RETURN  
END
```

```
C*****  
C*** SUBPROGRAMA QUE CALCULA A CONTRIBUICAO  
C*** DAS PAREDES A RIGIDEZ  
C*** DA ESTRUTURA.(MATRIZ J)  
C*****  
SUBROUTINE RIGJW(AI,BT,C,J1,N,T1,NM,JJ)  
REAL J1(8),JJ(3,3)  
DIMENSION AI(8),BT(8),C(8),T1(8),A1(3)  
DO 1 I=1,3  
DO 1 J=1,3  
JJ(I,J)=0.  
DO 1 K=1,N  
A1(1)=AI(K)  
A1(2)=BT(K)  
A1(3)=C(K)  
JJ(I,J)=JJ(I,J)+A1(I)*A1(J)*J1(K)  
1 CONTINUE  
IF(NM)3,3,2  
DO 4 I1=1,NM  
JJ(3,3)=JJ(3,3)+T1(I1)  
4 CONTINUE  
3 RETURN  
END
```

```
C*****  
C***  SUBPROGRAMA PARA ESCALONAMENTO E  
C***  PIVOTAMENTO PARCIAL DA MATRIZ SA  
C***  DE ORDEN NN  
C*****  
SUBROUTINE DECOM(NN,SA,UL,IPS)  
DIMENSION SA(45,45),UL(45,45),SCALE(45),IPS(45)  
N=NN  
DO 5 I=1,N  
  IPS(I)=1  
  ROWNR=0.  
  DO 2 J=1,N  
    UL(I,J)=SA(I,J)  
    IF(ROWNR=ABS(UL(I,J)))1,2,2  
  1 ROWNR=ABS(UL(I,J))  
  2 CONTINUE  
    IF(ROWNR)3,4,3  
  3 SCALE(I)=1000.0/ROWNR  
    GO TO 5  
  4 CALL SING(1)  
    SCALE(I)=0.  
  5 CONTINUE  
  NM1=N-1  
  DO 17 K=1,NM1  
    BIG=0.  
    DO 11 I=K,N  
      IP=IPS(I)  
      SIZE=ABS(UL(IP,K))*SCALE(IP)  
      IF(SIZE>BIG)11,11,10  
  10 BIG=SIZE  
      IDXPI=I  
  11 CONTINUE  
      IF(BIG)13,12,13  
  12 CALL SING(2)  
      GO TO 17  
  13 IF(IDXPI=K)14,15,14  
  14 J=IPS(K)  
      IPS(K)=IPS(IDXPI)  
      IPS(IDXPI)=J  
  15 KP=IPS(K)  
      PIVOT=UL(KP,K)  
      KP1=K+1  
      DO 16 I=KP1,N  
        IP=IPS(I)  
        EM=-UL(IP,K)/PIVOT  
        UL(IP,K)=-EM  
        DO 18 J=KP1,N  
          UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)  
  16 CONTINUE  
  17 CONTINUE  
      KP=IPS(K)  
      IF(UL(KP,K))19,18,19  
  18 CALL SING(2)  
  19 RETURN  
END
```

```
C*****
C***  SUBPROGRAMA PARA SOLUCAO DO SISTEMA
C***  DE EQUACUES A PARTIR DA MATRIZ
C***  PIVOTADA UL, PELO METODO DE GAUSS
C*****
      SUBROUTINE SOLVE(NN,UL,B,XX,IPS)
      DIMENSION UL(45,45),B(45),XX(45),IPS(45)
      N=NN
      NP1=N+1
      IP=IPS(1)
      XX(1)=B(IP)
      DO 2 I=2,N
      IP=IPS(I)
      IM1=I-1
      SUM=0.
      DO 1 J=1,IM1
1  SUM=SUM+UL(IP,J)*XX(J)
2  XX(I)=B(IP)-SUM
      IP=IPS(N)
      XX(N)=XX(N)/UL(IP,N)
      DO 4 IHACK=2,N
      I=NP1-IHACK
      IP=IPS(I)
      IP1=(I+1)
      SUM=0.
      DO 3 J=IP1,N
3  SUM=SUM+UL(IP,J)*XX(J)
4  XX(I)=(XX(J)-SUM)/UL(IP,I)
      RETURN
      END
```

```
C*****
C***  SUBPROGRAMA PARA IMPRESSAO DE MENSAGENS
C***  NA SOLUCAO DO SISTEMA
C*****
      SUBROUTINE SING(IWHY)
11  FORMAT(14X,'MATRIZ COM LINHA NULA')
12  FORMAT(14X,'MATRIZ SINGULAR, DIVISAO POR ZERO EM SOLVE')
13  FORMAT(14X,'NAO HA CONVERGENCIA EM IMPROV. MATRIZ E QUASE SING.1')
      GO TO (1,2,3),IWHY
1  WRITE(5,11)
      GO TO 10
2  WRITE(5,12)
      GO TO 10
3  WRITE(5,13)
10  RETURN
      END
```



```
C*****
C***  SUBPROGRAMA PARA REFINAMENTO
C***  DA SOLUCAO DO SISTEMA
C*****
      SUBROUTINE IMPRUV(N,SA,UL,R,XX,IPS)
      DIMENSION SA(45,45),UL(45,45),B(45),XX(45),R(45),DX(45)
      DIMENSION IPS(45)
      DOUBLE PRECISION SUM
      N=N
      EPS=1.0E-08
      ITMAX=30
      XNORM=0.0
      DO 14 I=1,N
        IF(XNORM-ABS(XX(I)))15,14,14
15     XNORM=ABS(XX(I))
14     CONTINUE
        IF(XNORM)3,2,3
      2     DIGIT=-ALOG10(EPS)
           GO TO 10
      3     DO 9 ITER=1,ITMAX
           DO 5 I=1,N
             SUM=0.
           DO 4 J=1,N
             4     SUM=SUM+SA(I,J)*XX(J)
             SUM=B(I)-SUM
           5     R(I)=SUM
           CALL SOLVE(N,UL,R,DX,IPS)
           DXNOR=0.
           DO 6 I=1,N
             T=XX(I)
             XX(I)=XX(I)+DX(I)
             IF(DXNOR-ABS(XX(I)-T))16,6,6
16     DXNOR=ABS(XX(I)-T)
           6     CONTINUE
             IF(ITER-1)8,7,8
           7     D=DXNOR/XNORM
             IF(D-EPS)19,19,18
18     DIGIT=-ALOG10(DXNOR/XNORM)
           GO TO 8
19     DIGIT=-ALOG10(EPS)
           8     IF(DXNOR-EPS*XNORM)10,10,9
           9     CONTINUE
           CALL SING(3)
10     RETURN
       END
```

```
C*****
C***  PROGRAMA PRINCIPAL PARA ANALISE
C***  DA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL, PELA
C***  TECNICA DO METO CONTINUO.
C*****
C***  O METODO DAS DIFERENCAS FINITAS
C***  E UTILIZADO NA INTEGRACAO DO SISTEMA
C***  DE EQUACOES DIFERENCIAIS.
C*****
      REAL JW(8),L,JT(8),JJ(3,3),MW(15),MFT(15),MTL(15)
      DIMENSION X(15),SF(8,15),TM(8),XW(8),XW1(8),YW(8),YW1(8),
      *AW(8),BW(8),CW(8),XF(8),XF1(8),YF(8),YF1(8),AF(8),BF(8),
      *CF(8),A(45,45),H(8),SR1(8,8),CO(8,9,15),AL(3,3),AJJ(8,8),
      *SS(3,3),AKK(3,3),ALL(3,3),AA(3),QT(3),Q(15),CC(45)
      DIMENSION UL(45,45),IPS(45),FF(45)
      DIMENSION QW(15),QF(15)
      CALL ASSIGN(2,'CR:')
      OPEN(UNIT=5,NAME='LP:')

C*****
C***  ENTRADA DE DADOS E
C***  CARACTERISTICAS GEOMETRICAS
C*****
      READ(2,1)N,L,P,AA1,BB1,CC1,NN
      1  FORMAT(I3,5F8.2,I3)
      N20=N-2
      NR=3*N
      READ(2,2)NF,NW,NM
      2  FORMAT(3I5)
      READ(2,3)(X(J),J=1,N)
      3  FORMAT(10F8.3)
      DO 4 I=1,NF
      READ(2,5)SSFF
      5  FORMAT(F8.2)
      DO 4 J=2,N20
      SF(I,J)=SSFF
      4  CONTINUE
      DO 3001 I=1,NW
      READ(2,3000)JW(I)
      3000  FORMAT(F9.1)
      3001  CONTINUE
      IF(NM)104,104,105
      105  READ(2,7)(TM(I),I=1,NM)
      7  FORMAT(F9.1)
      READ(2,8)(JI(I),I=1,NM)
      8  FORMAT(F9.1)
      104  CONTINUE

C*****
C***  CALCULO DOS COMPONENTES
C***  DO VETOR UNITARIO DE CADA PAINEL
C*****
      DO 9 I=1,NW
      READ(2,10)XW(I),XW1(I),YW(I),YW1(I)
      10  FORMAT(4F8.2)
      CALL COORD(I,XW,YW,XW1,YW1,AW,BW,CW)
      9  CONTINUE
      DO 11 I=1,NF
```

```
      READ(2,12)XF(I),XF1(I),YF(I),YF1(I)
12  FORMAT(4F8.2)
      CALL COORD(I,XF,YF,XF1,YF1,AF,BF,CF)
11  CONTINUE
      CALL RIGJW(AW,RW,C*,JW,NW,JT,NM,JO)
C*****
C***  IMPRESSAO DE TITULOS E DAS
C***  CARACTERISTICAS DE RIGIDEZ
C*****
      WRITE(5,120)NN
120  FORMAT(11X,'ANALISE TRIDIMENSIONAL DE PORTICOS E PAREDES POR DIFER
      SENCAS FINITAS DE MALHA IRREGULAR',/,11X,'POLINOMIO INTERPOLADOR DE
      S GRAU',I6,/)
      WRITE(5,15)
15  FORMAT(11X,'ASSOCIACAO TRIDIMENSIONAL COM RIGIDEZ DE PORTICOS E PA
      SREDES CONSTANTE',/)
      N1=N-1
      WRITE(5,18)N1
18  FORMAT(11X,'NUMERO DE DIVISOES',6X,I4,/)
      WRITE(5,19)
19  FORMAT(11X,'RIGIDEZ DOS PAINELIS PAREDE',/,21X,'PAREDE',5X,'RIGIDE
      SZ',/)
      DO 20 I=1,NW
      WRITE(5,21)I,JW(I)
21  FORMAT(21X,I3,7X,F9.1,/)
20  CONTINUE
      WRITE(5,22)
22  FORMAT(/,11X,'RIGIDEZ DOS PAINELIS PORTICO',/)
      DO 23 I=1,NF
      WRITE(5,24)I
24  FORMAT(21X,'PAIHEL',I6,/,21X,'RIGIDEZ',/)
      WRITE(5,25)SF(I,2)
25  FORMAT(21X,F8.2,/)
23  CONTINUE
      DO 26 I=1,N8
      DO 26 J=1,N8
26  A(I,J)=0.
C*****
C***  CONDICoes DE CONTORNO NO ENGASTE
C*****
      I=2
      DO 27 J=1,NN
      H(J)=X(1+J)-X(I)
      L2=0
      DO 28 K=1,NN
      L3=NN-I-2
      SB1(J,K)=H(J)**L3
28  L2=L2+1
27  CONTINUE
      CALL GRJIS(NN,SB1)
      A(1,2)=1.
      A(N+1,N+2)=1.
      A(2*N+1,2*N+2)=1.
      CO(NN,NN+1,I)=0.
      CO(NN-1,NN+1,I)=0.
      CO(NN-2,NN+1,I)=0.
```

```

D0 29 J=1,NN
CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
A(I,J+1)=CO(NN,J,I)
A(I+N,N+J+1)=CO(NN,J,I)
A(I+2*N,2*N+J+1)=CO(NN,J,I)
29 CONTINUE
A(2,I)=CO(NN,NN+1,I)
A(I+N,N+I)=CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N,2*N+I)=CO(NN,NN+1,I)
D0 30 I=1,3
D0 30 J=1,3
30 AL(I,J)=0.
D0 31 I=1,3
31 AL(I,I)=L*L
D0 32 I=1,3
D0 32 J=1,3
32 AJJ(I,J)=0.
D0 33 I=1,3
D0 33 J=1,3
33 AJJ(I,J)=JJ(I,J)
CALL GRJIS(3,AJJ)
NN1=NN/2
C*****
C*** DIFERENCAS ASCENDENTES
C*****
D0 34 I=2,NN1
CALL FIGST(AF,RF,CF,I,SF,FM,NF,NN,SS)
CALL MONTI(AL,AJJ,SS,AKK)
D0 35 J=1,NN
H(J)=X(I+J)-X(I)
L2=0
D0 36 K=1,NN
L3=NR-L2
SB1(J,K)=H(J)**L3
36 L2=L2+1
35 CONTINUE
CALL GRJIS(NN,SP1)
CO(NN,NN+1,I)=0.
CO(NN-1,NN+1,I)=0.
CO(NN-2,NN+1,I)=0.
D0 37 J=1,NN
CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
A(J+1,I+J)=-6.*CO(NN-2,J,I)+AKK(1,1)*CO(NN,J,I)
A(I+1,I+N+J)=AKK(1,2)*CO(NN,J,I)
A(I+1,I+2*N+J)=AKK(1,3)*CO(NN,J,I)
A(I+N+1,I+J)=AKK(2,1)*CO(NN,J,I)

```

```

A(I+N+1,I+N+J)=-6.*CO(NN-2,J,I)+AKK(2,2)*CO(NN,J,I)
A(I+N+1,I+2*N+J)=AKK(2,3)*CO(NN,J,I)
A(I+2*N+1,I+J)=AKK(3,1)*CO(NN,J,I)
A(I+2*N+1,I+N+J)=AKK(3,2)*CO(NN,J,I)
A(I+2*N+1,I+2*N+J)=-6.*CO(NN-2,J,I)+AKK(3,3)*CO(NN,J,I)
37 CONTINUE
A(I+1,I)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(1,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+1,I+G)=AKK(1,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+1,I+2*N)=AKK(1,3)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I)=AKK(2,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I+N)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(2,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I+2*N)=AKK(2,3)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I)=AKK(1,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I+N)=AKK(3,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I+2*N)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(3,3)*CO(NN,NN+1,I)
34 CONTINUE
K2=NN+1
K3=N-NN1
C*****
C***   DIFFERENCAS CENTRAIS
C*****
DO 39 I=K2,K3
CALL FIGST(AF,BF,CF,I,SE,TE,NE,NN,SS)
CALL MONTI(AL,AJJ,SS,AKK)
DO 41 J=1,NN1
H(2*J-1)=A(I+J)-X(I)
H(2*J)=X(I-J)-X(I)
L2=0
DO 42 KL=1,NN
L3=NN-L2
SB1(2*J-1,KL)=H(2*J-1)**L3
SB1(2*J,KL)=H(2*J)**L3
42 L2=L2+1
41 CONTINUE
CALL GRJIS(NN,SH1)
CO(NN,NN+1,I)=0.
CO(NN-1,NN+1,I)=0.
CO(NN-2,NN+1,I)=0.
DO 43 J=1,NN
CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
43 CONTINUE
DO 44 J=1,NN1
A(I+1,I+J)=-6.*CO(NN-2,2*J-1,I)+AKK(1,1)*CO(NN,2*J-1,I)
A(I+1,I-J)=-6.*CO(NN-2,2*J,I)+AKK(1,1)*CO(NN,2*J,I)
A(I+1,I+N+J)=AKK(1,2)*CO(NN,2*J-1,I)
A(I+1,I+N-J)=AKK(1,2)*CO(NN,2*J,I)
A(I+1,I+2*N+J)=AKK(1,3)*CO(NN,2*I-1,I)
A(I+1,I+2*N-J)=AKK(1,3)*CO(NN,2*J,I)
A(I+N+1,I+J)=AKK(2,1)*CO(NN,2*J-1,I)
A(I+N+1,I-J)=AKK(2,1)*CO(NN,2*J,I)
A(I+N+1,I+N+J)=-6.*CO(NN-2,2*J-1,I)+AKK(2,2)*CO(NN,2*J-1,I)

```

```
A(I+N+1,I+N-J)=-6.*CO(NN-2,2*J,I)+AKK(2,2)*CO(NN,2*J,I)
A(I+N+1,I+2*N+J)=AKK(2,3)*CO(NN,2*J-1,I)
A(I+N+1,I+2*N-J)=AKK(2,3)*CO(NN,2*J,I)
A(I+2*N+1,I+J)=AKK(3,1)*CO(NN,2*J-1,I)
A(I+2*N+1,I-J)=AKK(3,1)*CO(NN,2*J,I)
A(I+2*N+1,I+N+J)=AKK(3,2)*CO(NN,2*J-1,I)
A(I+2*N+1,I+N-J)=AKK(3,2)*CO(NN,2*J,I)
A(I+2*N+1,I+2*N+J)=-6.*CO(NN-2,2*J-1,I)+AKK(3,3)*CO(NN,2*J-1,I)
A(I+2*N+1,I+2*N-J)=-6.*CO(NN-2,2*J,I)+AKK(3,3)*CO(NN,2*J,I)
44 CONTINUE
A(I+1,I)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(1,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+1,I+N)=AKK(1,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+1,I+2*N)=AKK(1,3)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I)=AKK(2,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I+N)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(2,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I+2*N)=AKK(2,3)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I)=AKK(3,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I+N)=AKK(3,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I+2*N)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(3,3)*CO(NN,NN+1,I)
39 CONTINUE
K4=K3+1
K5=N-2
IF(K5-K4)3350,3360,3360
C*****
C***  DIFERENCAS DESCENDENTES
C*****
3360 DO 45 I=K4,K5
CALL RIGST(AF,RF,CF,I,SF,TF,NF,NN,SS)
CALL MONT1(AL,AJJ,SS,AKK)
DO 46 J=1,NN
H(J)=X(I-J)-X(I)
L2=0
DO 47 K=1,NN
L3=NN-I-2
SB1(J,K)=H(J)**L3
47 L2=L2+1
46 CONTINUE
CALL GRJIS(NN,SB1)
CO(NN,NN+1,I)=0.
CO(NN-1,NN+1,I)=0.
CO(NN-2,NN+1,I)=0.
DO 48 J=1,NN
CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
A(I+1,I-J)=-6.*CO(NN-2,J,I)+AKK(1,1)*CO(NN,J,I)
A(I+1,I+N-J)=AKK(1,2)*CO(NN,J,I)
A(I+1,I+2*N-J)=AKK(1,3)*CO(NN,J,I)
A(I+N+1,I-J)=AKK(2,1)*CO(NN,J,I)
A(I+N+1,I+N-J)=-6.*CO(NN-2,J,I)+AKK(2,2)*CO(NN,J,I)
A(I+N+1,I+2*N-J)=AKK(2,3)*CO(NN,J,I)
A(I+2*N+1,I-J)=AKK(3,1)*CO(NN,J,I)
A(I+2*N+1,I+N-J)=AKK(3,2)*CO(NN,J,I)
```

```

A(I+2*N+1,I+2*N-J)=-6.*CO(NN-2,J,I)+AKK(3,3)*CO(NN,J,I)
48 CONTINUE
A(J+1,I)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(1,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+1,I+N)=AKK(1,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+1,I+2*N)=AKK(1,3)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,J)=AKK(2,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I+N)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(2,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+N+1,I+2*N)=AKK(2,3)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I)=AKK(3,1)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I+N)=AKK(3,2)*CO(NN,NN+1,I)
A(I+2*N+1,I+2*N)=-6.*CO(NN-2,NN+1,I)+AKK(3,3)*CO(NN,NN+1,I)
45 CONTINUE
C*****
C***   CONDICAO DE MOMENTO NULO NA
C***   EXTREMIDADE SUPERIOR
C*****
3350 I=N-2
DO 49 J=1,NN
H(J)=X(I-J)-X(I)
L2=0
DO 50 K=1,NN
L3=NN-L2
SB1(J,K)=H(J)**L3
50 L2=L2+1
49 CONTINUE
CALL GRJ1S(NN,SB1)
CO(NN,NN+1,I)=0.
CO(NN-1,NN+1,I)=0.
CO(NN-2,NN+1,I)=0.
DO 51 J=1,NN
CO(NN,J,I)=SB1(NN,J)
CO(NN-1,J,I)=SB1(NN-1,J)
CO(NN-2,J,I)=SB1(NN-2,J)
CO(NN,NN+1,I)=-CO(NN,J,I)+CO(NN,NN+1,I)
CO(NN-1,NN+1,I)=-CO(NN-1,J,I)+CO(NN-1,NN+1,I)
CO(NN-2,NN+1,I)=-CO(NN-2,J,I)+CO(NN-2,NN+1,I)
A(I+2,I-J)=2.*CO(NN-1,J,I)
A(I+N+2,I+N-J)=2.*CO(NN-1,J,I)
A(I+2*N+2,I+2*N-J)=2.*CO(NN-1,J,I)
51 CONTINUE
A(I+2,I)=2.*CO(NN-1,NN+1,I)
A(I+N+2,N+I)=2.*CO(NN-1,NN+1,I)
A(I+2*N+2,2*N+I)=2.*CO(NN-1,NN+1,I)
DO 52 I=1,3
DO 52 J=1,3
52 ALL(I,J)=0.
DO 53 I=1,3
53 ALL(I,I)=L*L*L
AA(1)=AA1
AA(2)=BB1
AA(3)=CC1
CALL MONT2(ALL,AJJ,AA,QI)
DO 54 I=2,K5
Q(I)=(-P*X(I)*L+P*L)
54 CONTINUE
C*****

```

```
C*** VETOR DOS CORTANTES EXTERNAS
C*****
DO 55 I=2,K5
  CC(I+1)=Q(I)*QI(1)
  CC(I+N+1)=Q(I)*QI(2)
  CC(I+2*N+1)=Q(I)*QI(3)
55 CONTINUE
  CC(1)=0.
  CC(2)=0.
  CC(N+1)=0.
  CC(N+2)=0.
  CC(N)=0.
  CC(2*N+1)=0.
  CC(2*N+2)=0.
  CC(2*N)=0.
  CC(3*N)=0.
DO 68 I=2,N8
68 A(I,2)=0.
DO 69 I=1,N
69 A(I,N+2)=0.
  N3=N+2
DO 70 I=N3,N8
70 A(I,N+2)=0.
  N13=2*N
DO 71 I=1,N13
71 A(I,2*N+2)=0.
  N11=2*N+2
DO 72 I=N11,N8
72 A(I,2*N+2)=0.
C*****
C*** SOLUCAO DO SISTEMA
C*****
  CALL DECOM(N8,A,UL,IPS)
  CALL SOLVE(N8,UL,CC,FF,IPS)
  CALL IMPROV(N8,A,UL,CC,FF,IPS)
C*****
C*** VALORES DOS DESLOCAMENTOS
C*****
  WRITE(5,74)
74 FORMAT(11X,'DESLOCAMENTOS DOS DIAFRAGMAS',//,11X,'PONTO',5X,'U',20
  *X,'V',20X,'W',/)
  DO 75 I=2,N20
  K=N+I
  KK=2*N+I
75 WRITE(5,76)X(I),FF(I),FF(K),FF(KK)
76 FORMAT(9X,F8.2,4X,E14.7,6X,E14.7,6X,E14.7,/)
  DO 77 I=1,Nw
  WRITE(5,78)I
78 FORMAT(//10X,'DESLOCAMENTOS DA PAREDE',I2//8X,'PONTO',10X,'UW'//)
  DO 77 J=2,N20
  K=N+J
  KK=2*N+J
  Uw=Aw(I)*FF(J)+Bw(I)*FF(K)+Cw(I)*FF(KK)
  WRITE(5,80)X(J),Uw
80 FORMAT(9X,F6.3,3X,E14.7,/)
77 CONTINUE
```



```
DO 81 I=1,NF
WRITE(5,82)I
82 FORMAT(//10X,'DESLOCAMENTOS DO PORTICO',12//8X,'PONTO',10X,'UF'//)
DO 81 J=2,N20
K=N+J
KK=2*N+J
UF=AF(I)*FF(J)+BF(I)*FF(K)+CF(I)*FF(KK)
WRITE(5,83)X(J),UF
83 FORMAT(9X,F6.3,3X,E14.7,/)
81 CONTINUE
C*****
C*** CALCULO DOS ESFORÇOS NAS PAREDES
C*****
DO 773 M=1,NW
WRITE(5,776)M
776 FORMAT(11X,'MOMENTOS FLETORES E CORTANTES NA PAREDE',16,/,21X,'MO
SMENTO FLETOR',21X,'FORÇA CORTANTE',15X,'PONTO',/)
C*****
C*** DIFERENÇAS ASCENDENTES
C*****
DO 774 I=2,NN1
K=N+I
KK=2*N+I
QW(I)=0.
MW(I)=0.
DO 775 J=1,NN
MW(I)=MW(I)+JW(M)*2.*CO(NN-1,J,I)*(AW(M)*FF(I+J)+BW(M)*FF(K+J)+CW(
*M)*FF(KK+J))
QW(I)=QW(I)+6.*CO(NN-2,J,I)*(AW(M)*FF(I+J)+BW(M)*FF(K+J)+CW(M)*FF(
*KK+J))
775 CONTINUE
MW(I)=MW(I)+JW(M)*2.*CO(NN-1,NN+1,I)*(AW(M)*FF(I)+BW(M)*FF(K)+CW(M
)*FF(KK))
QW(I)=(QW(I)+6.*CO(NN-2,NN+1,I)*(AW(M)*FF(I)+BW(M)*FF(K)+CW(M)*FF(
*KK)))-JW(M)
MW(I)=MW(I)/(L*I)
QW(I)=QW(I)/(L*L*L)
774 CONTINUE
C*****
C*** DIFERENÇAS CENTRAIS
C*****
DO 87 J=K2,K3
K=N+1
KK=2*N+1
MW(I)=0.
QW(I)=0.
DO 88 J=1,NN1
MW(I)=MW(I)+2.*CO(NN-1,2*J-1,I)*(AW(M)*FF(I+J)+BW(M)*FF(K+J)+CW(M)
**FF(KK+J))
MW(I)=MW(I)+2.*CO(NN-1,2*J,I)*(AW(M)*FF(I-J)+BW(M)*FF(K-J)+CW(M)*F
*F(KK-J))
QW(I)=QW(I)+6.*CO(NN-2,2*J-1,J)*(AW(M)*FF(I+J)+BW(M)*FF(K+J)+CW(M)
**FF(KK+J))
QW(I)=QW(I)+6.*CO(NN-2,2*J,I)*(AW(M)*FF(I-J)+BW(M)*FF(K-J)+CW(M)*F
*F(KK-J))
88 CONTINUE
```

```
MW(I)=(MW(I)+2.*CO(NN-1,NN+1,I)*(AW(M)*FF(I)+BW(M)*FF(K)+CW(M)*FF(
*KK)))*JA(M)
QW(I)=(QW(I)+6.*CO(NN-2,NN+1,I)*(AW(M)*FF(I)+BW(M)*FF(K)+CW(M)*FF(
*KK)))*-JA(M)
MW(I)=MW(I)/(L*L)
QW(I)=QW(I)/(L*I*L)
87 CONTINUE
C*****
C***   DIFERENCAS DESCENDENTES
C*****
DO 89 I=K4,K5
K=N+I
KK=2*N+I
MW(I)=0.
QW(I)=0.
DO 90 J=1,NN
MW(I)=MW(I)+2.*CO(NN-1,J,I)*(AW(M)*FF(I-J)+BW(M)*FF(K-J)+CW(M)*FF(
*KK-J))*JA(M)
QW(I)=QW(I)+6.*CO(NN-2,J,I)*(AW(M)*FF(I-J)+BW(M)*FF(K-J)+CW(M)*FF(
*KK-J))
90 CONTINUE
QW(I)=(QW(I)+6.*CO(NN-2,NN+1,I)*(AW(M)*FF(I)+BW(M)*FF(K)+CW(M)*FF(
*KK)))*-JA(M)
MW(I)=MW(I)+JW(M)*2.*CO(NN-1,NN+1,I)*(AW(M)*FF(I)+BW(M)*FF(K)+CW(M)
*)*FF(KK))
QW(I)=QW(I)/(L*I*L)
MW(I)=MW(I)/(L*I*L)
89 CONTINUE
DO 91 I=2,N20
91 WRITE(5,92)MW(I),QW(I),X(I)
92 FORMAT(21X,E14.7,21X,E14.7,6X,F6.2,/)
773 CONTINUE
C*****
C***   CALCULO DOS ESFORÇOS NOS PORTICOS
C*****
DO 93 M=1,NF
WRITE(5,94)M
94 FORMAT(11X,'FORÇAS CORTANTES NO PORTICO',I6,/,21X,'PONTO',21X,'FU
RÇA CORTANTE',/)
C*****
C***   DIFERENCAS ASCENDENTES
C*****
DO 96 I=2,NN1
K=N+I
KK=2*N+1
QF(I)=0.
DO 97 J=1,NN
QF(I)=QF(I)+CO(NN,J,I)*(AF(M)*FF(I+J)+BF(M)*FF(K+J)+CF(M)*FF(KK+J)
*)
97 CONTINUE
QF(I)=(QF(I)+CO(NN,NN+1,I)*(AF(M)*FF(I)+BF(M)*FF(K)+CF(M)*FF(KK
*))) *SF(M,I)
QF(I)=QF(I)/L
96 CONTINUE
C*****
C***   DIFERENCAS CENTRAIS
```

```
C*****
      DO 98 I=K2,K3
      K=N+I
      KK=2*N+I
      QF(I)=0.
      DO 99 J=1,NN1
      QF(I)=QF(I)+CO(NN,2*J-1,I)*(AF(M)*FF(I+J)+BF(M)*FF(K+J)+CF(M)*FF(K
      *K+J))
      QF(I)=QF(I)+CO(NN,2*J,I)*(AF(M)*FF(I-J)+BF(M)*FF(K-J)+CF(M)*FF(KK-
      *J))
      99 CONTINUE
      QF(I)=(QF(I)+CO(NN,NN+1,I)*(AF(M)*FF(I)+BF(M)*FF(K)+CF(M)*FF(KK)))
      **SF(M,I)
      QF(I)=QF(I)/L
      98 CONTINUE
C*****
C***  DIFERENCAS DESCENDENTES
C*****
      DO 100 I=K4,K5
      K=N+I
      KK=2*N+I
      QF(I)=0.
      DO 101 J=1,NN
      QF(I)=QF(I)+CO(NN,J,I)*(AF(M)*FF(I-J)+BF(M)*FF(K-J)+CF(M)*FF(KK-J
      *))
      101 CONTINUE
      QF(I)=(QF(I)+CO(NN,NN+1,I)*(AF(M)*FF(I)+BF(M)*FF(K)+CF(M)*FF(KK)))
      **SF(M,I)
      QF(I)=QF(I)/L
      100 CONTINUE
      DO 102 I=2,N20
      102 WRITE(5,103)X(I),QF(I)
      103 FORMAT(21X,F6.3,21X,E14.7,/)
      93 CONTINUE
C*****
C***  CALCULO DOS ESFORÇOS NA MOLLA DE TORCAO
C*****
      IF(NM)500,500,501
      501 DO 502 M=1,NN
      WRITE(5,503)M
      503 FORMAT(11X,'ESFORÇOS NO NUCLEO',16,/,/,21X,'PONTO',10X,
      *'MOM. TORCAO LIVRE',10X,'MOM. FLEXO TORCAO',/)
C*****
C***  DIFERENCAS ASCENDENTES
C*****
      DO 504 I=2,NN1
      KK=2*N+I
      MTI(J)=0.
      MFT(I)=0.
      DO 505 J=1,NN
      MTL(J)=MTI(I)+CO(NN,J,I)*FF(KK+J)
      MFT(I)=MFT(I)+CO(NN-2,J,I)*FF(KK+J)
      505 CONTINUE
      MTL(I)=(MTL(I)+CO(NN,NN+1,I)*FF(KK))*TM(I)/L
      MFT(I)=- (MFT(I)+CO(NN-2,NN+1,I)*FF(KK))*JT(I)/(L*L*L)*6.
      504 CONTINUE
```

```
C*****
C***   DIFFERENCAS CENTRAIS
C*****
      DO 506 I=K2,K3
      KK=2*I+1
      MTL(I)=0.
      MFT(I)=0.
      DO 507 J=1,NN1
      MTL(I)=MTL(I)+CO(NN,2*J-1,I)*FF(KK+J)
      MTL(I)=MTL(I)+CO(NN,2*J,I)*FF(KK-J)
      MFT(I)=MFT(I)+CO(NN-2,2*J-1,I)*FF(KK+J)
      MFT(I)=MFT(I)+CO(NN-2,2*J,I)*FF(KK-J)
507 CONTINUE
      MTL(I)=(MTL(I)+CO(NN,NN+1,I)*FF(KK))*TM(I)/L
      MFT(I)=- (MFT(I)+CO(NN-2,NN+1,I)*FF(KK))*JT(I)/(L*L*L)*6.
506 CONTINUE
C*****
C***   DIFFERENCAS DESCENDENTES
C*****
      DO 508 I=K4,K5
      KK=2*I+1
      MTL(I)=0.
      MFT(I)=0.
      DO 509 J=1,NN
      MTL(I)=MTL(I)+CO(NN,J,I)*FF(KK-J)
      MFT(I)=MFT(I)+CO(NN-2,J,I)*FF(KK-J)
509 CONTINUE
      MTL(I)=(MTL(I)+CO(NN,NN+1,I)*FF(KK))*TM(I)/L
      MFT(I)=- (MFT(I)+CO(NN-2,NN+1,I)*FF(KK))*JT(I)/(L*L*L)*6.
508 CONTINUE
      DO 510 I=2,N20
      WRITE(5,511)X(I),MTL(I),MFT(I)
511 FORMAT(21X,F6.3,10X,E14.7,13X,E14.7,/)
510 CONTINUE
502 CONTINUE
500 CALL EXIT
      END
```

### A.3 - Programa para análise aproximada do painel pórtico

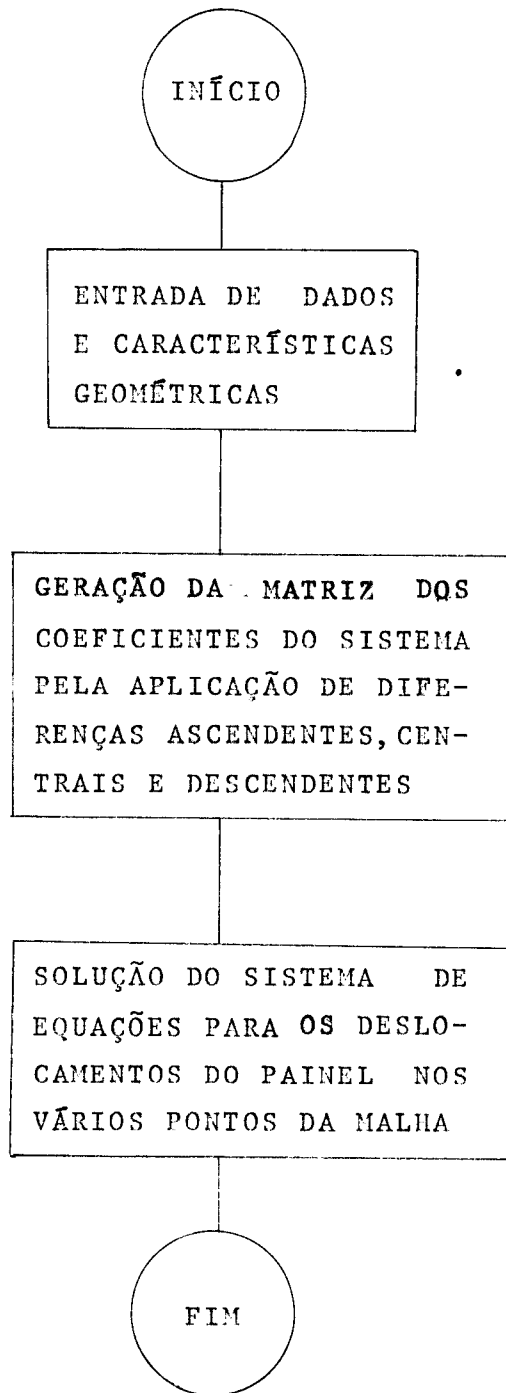
O programa executa a integração da equação diferencial, correspondente ao painel pórtico, formulada através da aplicação da Técnica do Meio Contínuo. Na resolução, específica para painel, sob a ação de um carregamento horizontal, permite-se a variação da rigidez do painel ao longo da altura da estrutura.

#### a) Descrição dos subprogramas

- Sub programa GJRIS
- Sub programa DECOM
- Sub programa SOLVE
- Sub programa IMPRU - executa o mesmo processo de refinamento da subrotina IMPRUV
- Sub programa SING

Os vários subprogramas já foram objeto de comentários sendo, portanto, desnecessárias maiores considerações a respeito.

#### b) Programa principal



c) Entrada de dados

1) VARIÁVEIS - N, L, NN, KZ

FORMATO - I3, F6.2, 2I3

N - número total de pontos da malha.

L - altura da estrutura.

NN - grau adotado para o polinômio interpolador.

KZ - variável que informa a natureza do painel. Tem valor zero para painel de rigidez constante e 1 para painel com rigidez variável com a altura.

2) VARIÁVEL - SF2

FORMATO - F 8.2

SF2 - rigidez do painel p $\ddot{o}$ rtico no caso de KZ =  $\emptyset$

3) VARIÁVEIS - SF(I), I = 2,N

FORMATO - 7 F8.2

SF(I) - rigidez do painel p $\ddot{o}$ rtico nos pontos da malha pertencentes ao dom $\tilde{a}$ nio de integra $\tilde{c}$ o.

4) VARIÁVEIS - Q(I), I = 2,N

FORMATO - 8 F8.3

Q(I) - valor da resultante do carregamento externo nos pontos de malha pertencentes ao dom $\tilde{a}$ nio de integra $\tilde{c}$ o.

d) Impress $\tilde{a}$ o dos resultados

- T $\tilde{t}$ ulos e caracter $\tilde{t}$ sticas de rigidez do painel.

- Deslocamento u do p $\ddot{o}$ rtico, nos v $\tilde{a}$ rios pontos da malha.

e) Listagem

```
C*****
C*****
C*****SUBPROGRAMA PARA INVERSAO DE MATRIZ F
C*****DE ORDEN N, UTILIZANDO O METODO DE GAUSS JORDAN BUTIHAUSER
C*****
C*****
      SUBROUTINE GJRIS(N,F)
      DIMENSION F(8,8),B(8),C(8),IP(8),IQ(8)
      DO 1 K=1,N
      T=0.
      DO 6 I=K,N
      S=0.
      DO 3 J=K,N
      3 S=S+ABS(F(I,J))
      IF(S)4,5,4
      4 DO 2 J=K,N
      IF(ABS(F(I,J))-S*T)2,2,7
      7 IP(K)=I
      IQ(K)=J
      PIVO=F(I,J)
      T=ABS(PIVO/S)
      2 CONTINUE
      6 CONTINUE
      IF(T)101,5,101
101 IF(IP(K)-K)8,98,8
      8 DO 9 J=1,N
      IPK=IP(K)
      Z=F(IPK,J)
      F(IPK,J)=F(K,J)
      9 F(K,J)=Z
      98 IF(IQ(K)-K)10,20,10
      10 IQK=IQ(K)
      DO 11 I=1,N
      Z=F(I,IQK)
      F(I,IQK)=F(I,K)
      11 F(I,K)=Z
      20 DO 12 J=1,N
      IF(J-K)13,14,13
      14 B(J)=1/PIVO
      C(J)=1.
      GO TO 15
      13 B(J)=-F(K,J)/PIVO
      C(J)=F(J,K)
      15 F(K,J)=0.
      12 F(J,K)=0.
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      F(I,J)=F(I,J)+C(I)*B(J)
      1 CONTINUE
      DO 16 KAUX=1,N
      K=N-KAUX+1
      IF(IP(K)-K)17,18,17
      17 DO 102 I=1,N
      IPK=IP(K)
      Z=F(I,IPK)
```



```
F(I,IPK)=F(I,K)
F(I,K)=Z
102 CONTINUE
18 IF(IQ(K)-K)104,16,104
104 DO 103 J=1,N
    IQK=IQ(K)
    Z=F(IQK,J)
    F(IQK,J)=F(K,J)
    F(K,J)=Z
103 CONTINUE
16 CONTINUE
    GO TO 118
    5 WRITE(5,100)
100 FORMAT(///5X'PROGRAMA NAO EXECUTADO-MATRIZ SINGULAR'//)
118 RETURN
END
C*****
C*****
C*****SUBPROGRAMA PARA PIVOTAMENTO E ESCALONAMENTO
C*****PARCIAL DA MATRIZ BI DOS COEFICIENTES DO SISTEMA
C*****DE EQUACOES, COM ORDEM NN
C*****
C*****
SUBROUTINE DECOM(NN,BI,UL,IPS)
DIMENSION BI(30,30),UL(30,30),SCALE(30),IPS(30)
N=NN
DO 5 I=1,N
    IPS(I)=I
    ROWNR=0.
    DO 2 J=1,N
        UL(I,J)=BI(I,J)
        IF(ROWNR-ABS(UL(I,J)))1,2,2
1    ROWNR=ABS(UL(I,J))
2    CONTINUE
        IF(ROWNR)3,4,3
3    SCALE(I)=1000.0/ROWNR
    GO TO 5
4    CALL SING(1)
    SCALE(I)=0.
5    CONTINUE
    NM1=N-1
    DO 17 K=1,NM1
        BIG=0.
        DO 11 I=K,N
            IP=IPS(I)
            SIZE=ABS(UL(IP,K))*SCALE(IP)
            IF(SIZE-BIG)11,11,10
10    BIG=SIZE
            IDXPI=I
11    CONTINUE
            IF(BIG)13,12,13
12    CALL SING(2)
            GO TO 17
13    IF(IDXPI-K)14,15,14
14    J=IPS(K)
            IPS(K)=IPS(IDXPI)
            IPS(IDXPI)=J
15    KP=IPS(K)
            PIVOT=UL(KP,K)
            KP1=K+1
            DO 16 I=KP1,N
                IP=IPS(I)
                EM=-UL(IP,K)/PIVOT
                UL(IP,K)=-EM
            DO 16 J=KP1,N
                UL(IP,J)=UL(IP,J)+EM*UL(KP,J)
```

```
16 CONTINUE
17 CONTINUE
   KP=IPS(N)
   IF(UL(KP,N))19,18,19
18 CALL SING(2)
19 RETURN
   END
C*****
C*****
C*****SUBPROGRAMA PARA SOLUCAO DO SISTEMA
C*****A PARTIR DA MATRIZ TRIANGULARIZADA UL
C*****
C*****
   SUBROUTINE SOLVE(NN,UL,B1,X,IPS)
   DIMENSION UL(30,30),B1(30),X(30),IPS(30)
   N=NN
   NP1=N+1
   IP=IPS(1)
   X(1)=B1(IP)
   DO 2 I=2,N
   IP=IPS(I)
   IM1=I-1
   SUM=0.
   DO 1 J=1,IM1
1  SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
2  X(I)=B1(IP)-SUM
   IP=IPS(N)
   X(N)=X(N)/UL(IP,N)
   DO 4 IBACK=2,N
   I=NP1-IBACK
   IP=IPS(I)
   IP1=(I+1)
   SUM=0.
   DO 3 J=IP1,N
3  SUM=SUM+UL(IP,J)*X(J)
4  X(I)=(X(I)-SUM)/UL(IP,I)
   RETURN
   END
C*****
C*****
C*****SUBPROGRAMA PARA REFINAMENTO DA SOLUCAO X
C*****DO SISTEMA BI DE EQUACOES
C*****
C*****
   SUBROUTINE IMPRU(NN,BI,UL,B1,X,IPS)
   DIMENSION BI(30,30),UL(30,30),X(30),R(30),DX(30),IPS(30),B1(30)
   N=NN
   EPS=1.0E-04
   ITMAX=30
   XNORM=0.0
   DO 14 I=1,N
   IF(XNORM-ABS(X(I)))15,14,14
15 XNORM=ABS(X(I))
14 CONTINUE
   IF(XNORM)3,10,3
3  DO 9 ITER=1,ITMAX
   DO 5 I=1,N
   SUM=0.
   DO 4 J=1,N
4  SUM=SUM+BI(I,J)*X(J)
   SUM=B1(I)-SUM
5  R(I)=SUM
   CALL SOLVE(N,UL,R,DX,IPS)
   DXNOR=0.
   DO 6 I=1,N
   T=X(I)
```

```
X(I)=X(I)+DX(I)
IF(DXNOR-ABS(X(I)-T))16,6,6
16 DXNOR=ABS(X(I)-T)
6 CONTINUE
IF(DXNOR-EPS*XNORM)10,10,9
9 CONTINUE
CALL SING(3)
10 RETURN
END
C*****
C*****
C*****SUBPROGRAMA PARA IMPRESSAO DE MENSAGENS
C*****NA SOLUCAO DO SISTEMA
C*****
C*****
SUBROUTINE SING(IWHY)
IF(IWHY-3)4,3,4
4 IF(IWHY-2)5,2,5
5 IF(IWHY-1)10,1,10
11 FORMAT(14X,'MATRIZ COM LINHA NULA')
12 FORMAT(14X,'MATRIZ SINGULAR.DIVISAO POR ZERO EM SOLVE')
13 FORMAT(14X,'NAO HA CONVERGENCIA EM IMPRUV.MATRIZ E QUASE SING.')
```

1 WRITE(5,11)  
GO TO 10  
2 WRITE(5,12)  
GO TO 10  
3 WRITE(5,13)  
10 RETURN  
END

```
C*****
C*****
C*****PROGRAMA PRINCIPAL PARA ESTUDO DO PAINEL
C*****PORTICO, APLICANDO DIFERENCAS FINITAS DE
C*****MALHA IRREGULAR NA SOLUCAO DA EQUACAO
C*****DIFERENCIAL OBTIDA ATRAVES DA TECNICA DO
C*****MEIO CONTINUO
C*****
C*****
REAL L
DIMENSION X(30),SF(30),SB1(8,8),H(8),CO(1,9,30),A(30,30),Q(30),
*CC(30),BI(30,30),FF(30),IPS(30)
OPEN(UNIT=5,NAME='LP:')
CALL ASSIGN(2,'CR:')
C*****
C*****ENTRADA DE DADOS E IMPRESSAO DE TITULOS
C*****
READ(2,1)N,L,NN,KZ
1 FORMAT(13,F6.2,2I3)
WRITE(5,2)NN
2 FORMAT(11X,'ESTUDO DO PAINEL PORTICO POR DIFERENCAS FINITAS DE MAL
*HA IRREGULAR',//,11X,'POLINOMIO INTERPOLADOR DE GRAU',I6,/)
READ(2,3)(X(I),I=1,N)
3 FORMAT(7F8.3)
IF(KZ)7,8,7
7 WRITE(5,9)
9 FORMAT(11X,'PAINEL PORTICO DE RIGIDEZ VARIAVEL',/)
GO TO 10
8 WRITE(5,11)
11 FORMAT(11X,'PAINEL PORTICO DE RIGIDEZ CONSTANTE',/)
READ(2,52)SF2
52 FORMAT(F8.2)
DO 53 I=2,N
SF(I)=SF2
53 CONTINUE
GO TO 55
10 READ(2,5)(SF(I),I=2,N)
```

```
5 FORMAT(7F8.2)
55 N1=N-1
   WRITE(5,12)N1
12 FORMAT(11X,'NUMERO DE DIVISOES',16,/)
   WRITE(5,13)
13 FORMAT(11X,'RIGIDEZ DO PAINEL PORTICO',//,21X,'PONTO',5X,'RIGIDEZ'
*,/)
   DO 14 I=2,N
14 WRITE(5,15)I,SF(I)
15 FORMAT(21X,I3,7X,F8.2,/)
   DO 16 I=1,N
   DO 16 J=1,N
16 A(I,J)=0.
   DO 17 I=1,NN
   DO 17 J=1,NN
17 SB1(I,J)=0.
   A(1,2)=1.
C*****
C*****APLICACAO DOS OPERADORES DE DIFERENCAS ASCENDENTES
C*****
   NN1=NN/2
   DO 21 I=2,NN1
   DO 18 J=1,NN
   H(J)=X(I+J)-X(I)
   L2=0
   DO 19 K=1,NN
   L3=NN-L2
   SB1(J,K)=H(J)**L3
19 L2=L2+1
18 CONTINUE
   CALL GRJIS(NN,SB1)
   CO(1,NN+1,I)=0.
   DO 20 J=1,NN
   CO(1,J,I)=SB1(NN,J)
   CO(1,NN+1,I)=-CO(1,J,I)+CO(1,NN+1,I)
   A(1,I+J)=CO(1,J,I)
20 CONTINUE
   A(I,I)=CO(1,NN+1,I)
21 CONTINUE
C*****
C*****APLICACAO DOS OPERADORES DE DIFERENCAS CENTRAIS
C*****
   K2=NN1+1
   K3=N-NN1
   DO 22 I=K2,K3
   DO 23 J=1,NN1
   H(2*J-1)=X(I+J)-X(I)
   H(2*J)=X(I-J)-X(I)
   L2=0
   DO 24 KL=1,NN
   L3=NN-L2
   SB1(2*J-1,KL)=H(2*J-1)**L3
   SB1(2*J,KL)=H(2*J)**L3
24 L2=L2+1
23 CONTINUE
   CALL GRJIS(NN,SB1)
   CO(1,NN+1,I)=0.
   DO 25 J=1,NN
   CO(1,J,I)=SB1(NN,J)
   CO(1,NN+1,I)=-CO(1,J,I)+CO(1,NN+1,I)
25 CONTINUE
   DO 26 J=1,NN1
   A(I,I-J)=CO(1,2*J,I)
26 A(1,I+J)=CO(1,2*J-1,I)
   A(I,I)=CO(1,NN+1,I)
22 CONTINUE
```

```
C*****
C*****APLICACAO DOS OPERADORES DE DIFERENCAS DESCENDENTES
C*****
      K4=K3+1
      DO 27 I=K4,N
      DO 28 J=1,NN
      H(J)=X(1-J)-X(1)
      L2=0
      DO 29 K=1,NN
      L3=NN-L2
      SB1(J,K)=H(J)**L3
29  L2=L2+1
28  CONTINUE
      CALL GPJIS(NN,SB1)
      CO(1,NN+1,I)=0.
      DO 30 J=1,NN
      CO(1,J,I)=SB1(NN,J)
      CO(1,NN+1,I)=-CO(1,J,I)+CO(1,NN+1,I)
      A(1,I-J)=CO(1,J,I)
30  CONTINUE
      A(1,I)=CO(1,NN+1,I)
27  CONTINUE
C*****
C*****VALORES DO CARREGAMENTO EXTERNO
C*****
      READ(2,31)(Q(I),I=2,N)
31  FORMAT(8F8.3)
      DO 32 I=2,N
      Q(I)=Q(I)*L/SF(1)
32  CONTINUE
C*****
C*****CONDICOES NO CONTORNO E SOLUCAO DO SISTEMA
C*****
      CC(1)=0.
      DO 33 I=2,N
33  CC(I)=Q(I)
      DO 34 I=2,N
34  A(1,2)=0.
      CALL DECOM(N,A,BI,IPS)
      CALL SOLVE(N,BI,CC,FF,IPS)
      CALL IMPRU(N,A,BI,CC,FF,IPS)
C*****
C*****IMPRESSAO DOS VALORES DOS DESLOCAMENTOS
C*****
      WRITE(5,35)
35  FORMAT(11X,'DESLOCAMENTOS DO PORTICO',//,11X,'PONTO',5X,'DESLOCAME
      *NTO',/)
      DO 36 I=2,N
36  WRITE(5,37)X(I),FF(1)
37  FORMAT(7X,F8.3,5X,E14.7,/)
      CALL EXIT
      END
```

BIBLIOGRAFIA

1. ALBIGÉS, M. e GOULET, J. - "Contraventament des Bâti  
ments". Annales de l'Institute Technique du Bati  
ment et des Travaux, Publics, nº 149, Maio/1960,  
pp. 473-500.
2. STAMATO, M.C. - "Associação Contínua de Painéis de Con  
traventamento". Publicação nº 157, Esc. Eng. S.Car  
los, USP, São Carlos/SP, 72 pp.
3. STAMATO, M.C. - "Distribuição das Cargas do Vento en  
tre os Painéis de Contraventamento". Escola de Enge  
nharia de São Carlos, USP, São Carlos/SP., 1966.
4. FRANCO, M. - "Alguns Problemas Relativos à Ação do Ven  
to em Edifícios de Grande Altura". Escola Politécni  
ca Univ. São Paulo (tese de doutoramento), 1966,  
pp. 1-55.
5. MANCINI, E. - "Análise Contínua de Estruturas de Edifí  
cios Elevados Sujeitos à Ação do Vento". Tese de  
doutoramento, (reimpressão), Escola de Engenharia  
de São Carlos, USP, S.Carlos/SP., 1977, 140 pp.
6. FERREIRA, L.F.O. - "Associação Plana de Pórticos com  
Pilares Parede". Dissertação de mestrado, Escola de  
Engenharia de São Carlos, USP, S.Carlos/SP., setem  
bro, 1975.
7. GRINTER, L.E. - "Theory of Modern Steel Structures".  
Vol. I, Mac Millan Company.
8. STAMATO, M.C. e MANCINI, E. - "Paredes de Seção Aberta  
Associadas a Pórticos Planos". Revista Brasileira  
de Tecnologia, Vol. 3, 1972, pp. 139-146.
9. LANGENDONCK, T.V. - "Torção de Peças de Seção Delgada".  
Revista Estrutura, nº 13, pp. 49-73, 1959.
10. FORSHYTE, G.E., WASOW, W.R. - "Finite Difference Me  
thods for Partial Differential Equations". John Wi  
ley & Sons, Inc.
11. YOUNG, D.M., GREGORY, R.T. - "A Survey of Numerical Ma

- thematics". Vol. I, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972, pp. 246-340.
12. SALVADORI, M.G., BARON, M.L. - "Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia". Publ. Esc. Eng. da Universidade de Minas Gerais, B. Horizonte/1956.
  13. KETTER, R.L. e PRAWEL Jr., S.P. - "Modern Methods of Engineering Computation". Mc Graw-Hill, 1969.
  14. CURTIS, F.G. - "Applied Numerical Analysis". 2nd edition, Addison Wesley Publishing Company.
  15. HURLEY, F.X., BACK, L. - "A Self-Adjusting Grid for Finite Difference Programs". Numerical Methods in Engineering, Int. Jul., V. 5, N. 4, Mar.-Apr.
  16. PERRONE, N., KAO, R.- "A General Finite Difference Method for Arbitrary Meshes". Computer and Structures, Int. Jul., V. 5, N. 1, Apr./1975, pp. 45-57.
  17. LAIER, J.E., MAMIYA, E.N. - "Diferenças Finitas para Malhas Arbitrárias". Iº Simpósio Nacional de Cálculo Numérico - Belo Horizonte. Dez./79.
  18. DEMIDOVICH, B.P., MARON, I.A. - "Computational Mathematics". Mir Publishers, Moscou, 1ª ed./1973.
  19. MURASHEV, V., SIGALOV, E. e BAIKOV, V. - "Design of Reinforced Concrete Structures". Mir Publ., Moscou, 2ª ed./1972.(\*)
  20. FORSHYTE, G.E. e MOLER, C.B. - "Computer Solution of Linear Algebraic Systems". Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1967, pp. 68-74.
  21. LAIER, J.E. - "Análise de Vibrações Livres de Edifícios pela Técnica do Meio Contínuo". Tese de doutoramento. Escola de Eng. São Carlos, USP., São Carlos/SP., 1978.(\*)

(\* ) Os livros marcados com asterisco não estão mencionados no texto, porém constituíram fonte de consulta no desenvolvimento do trabalho.