

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

LARGURAS EFETIVAS EM LAJES COGUMELO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Eng. Sergio Eduardo Ramella

Orientador: Prof. Dr. Ilio Montanari

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS, 1981

AGRADECIMENTOS

Primeiramente desejo expressar meus agradecimentos a meus pais, meus avôs e meu irmão pois, graças ao incentivo e apoio deles tornou-se viável o término dessa dissertação.

Desejo agradecer ao Professor Dr. Ilio Montanari, orientador desta dissertação, pelas valiosas sugestões que foram dadas no transcorrer da sua elaboração.

Também quero agradecer a Themag Engenharia Ltda, firma a qual pertença, em especial ao Engenheiro Dr. Lothar Korbmacher, por ter-me concedido licença com a qual foi possível fazer a complementação das deduções.

Finalmente agradeço aos senhores Rednei Aparecido Botelho, Wilma Provinciali Vall, Sylvia Helena Moretti e João Paulo Moretti do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos pela datilografia do manuscrito e confecção dos desenhos.

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade principal a determinação de larguras efetivas de lajes cogumelo calculadas no regime elástico, sujeitas a cargas verticais uniformemente distribuídas, com diversas condições de contorno.

As hipóteses para o cálculo basearam-se no comportamento das reações de lajes sobre vigas flexíveis.

Deu-se maior importância à laje cogumelo contínua pois é a mais usual na prática, por exemplo, em pisos de pavimentos de edifícios.

Inicialmente estudou-se a laje isolada quadrada; comparando-a com um processo apresentado por Hahn, ref. 6, concluiu-se que neste se fica muito a favor da segurança.

Para a laje isolada retangular, com as larguras efetivas obtidas calcularam-se os momentos nos quartos de vão, cujos valores estão bem próximos dos momentos calculados por diferenças finitas, segundo Tarzi e Nessim, ref. [16].

Para a laje cogumelo contínua, calcularam-se as larguras efetivas referentes a momentos positivos e negativos; da comparação com as normas ACI-318/77, DIN 1045/1972 e NB-1/78 chegou-se às seguintes conclusões:

- a) para carregamento total, as larguras efetivas prescritas pelas normas, em geral são bem maiores;
- b) para carregamento parcial, as larguras efetivas prescritas para momentos positivos são bem menores numa direção e bem maiores na outra.

Tendo em vista que foram feitas hipóteses para simplificar e tornar possíveis os cálculos, é conveniente uma comprovação adicional através de um outro método e, principalmente, comprovação experimental.

ABSTRACT

The chief aim of this work is the search of the effective width of flat slabs on elastic path, under uniform distributed vertical loads and with several boundary conditions.

The assumptions of the work out are based on the behaviour of the reactions of slabs on elastic beams.

It was given special attention to continuous flat slab because it is the most usual in practice, for instance, as floors of high buildings.

It was first analysed an isolated square slab; a comparison was made, between this process and that presented by Hahn, ref. 6, and it was concluded that this process is more safe.

For an isolated rectangular slab it was worked out, with effective width, the bending moments at each quarter of the span, which values are very near of those one worked out by finite differences, as Tarzi and Nessin, ref. 16.

For the continuous flat slab it was worked out the effective widths for positives and negatives moments; from comparison with the ACI-318/77, DIN 1045/1972 and NB-1/78 we can conclude as follows:

- a) for total loads, the standard effective widths are, in general, greater.
- b) for parcial loads, the standard effective widths for positive moments are smaller in one direction and greater in the another one.

In this work assumptions were made in order to simplify the work out so, it is convenient an additional study based on another methods and mainly experimental work.

NOTAÇÕES

- a,b: vãos da laje isolada, ou dimensões dos painéis da laje contínua
- b_{xm} : largura efetiva para momento fletor m_{xm} no meio do vão entre apoios (para simplificar a notação, também será chamada de b_x)
- b_{xa} : largura efetiva para momento fletor m_{xa} no apoio
- b_{ym} : largura efetiva para momento fletor m_{ym} no meio do vão entre apoios (para simplificar a notação, também será chamada de b_y)
- b_{ya} : largura efetiva para momento fletor m_{ya} no apoio
- c: raio do pilar circular equivalente
- D: rigidez à flexão da placa $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$
- E: módulo de deformação longitudinal do concreto
- f: deslocamento vertical de um ponto da laje (flecha)

Í N D I C E

APRESENTAÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	3
1.1 - Considerações gerais sobre lajes cogumelo.....	3
1.2 - Definições	4
1.3 - Prescrições de algumas normas.....	6
1.3.1 - Prescrições do ACI318/77	6
1.3.2 - Prescrições da DIN 1045-1972	9
1.3.3 - Prescrições da NB-1/78	11
1.4 - Hipóteses gerais	14
1.5 - Considerações adicionais para determinação das larguras efetivas	15
CAPÍTULO 2 - LAJE ISOLADA SOBRE QUATRO APOIOS PUNTI- FORMES	17
2.1 - Laje quadrada	17
2.1.1 - Cálculo das larguras efetivas segundo as hipóteses dos itens 1.2, 1.4 e 1.5 .	17
2.1.2 - Cálculo das larguras efetivas segundo Hahn, referência [6]	22
2.1.3 - Conclusões	23
2.2 - Laje retangular	25
2.2.1 - Cálculo das larguras efetivas segundo as hipóteses dos itens 1.2, 1.4 e 1.5 .	25
2.2.2 - Verificação dos momentos nos quartos de vão	31
2.2.3 - Conclusões	33
CAPÍTULO 3 - LAJE CONTÍNUA RETANGULAR SOBRE APOIOS CIRCULARES	36
3.1 - Painel interno: carga uniformemente distribuída em todos os painéis	36

- h: espessura da laje
- I, I_v : momento de inércia de viga
- m: momento por unidade de largura da laje (p.ex. N·m/m)
- M: momento de viga (p.ex. N·m)
- M_x, m_x : momento fletor que exige armadura na direção x
- M_y, m_y : momento fletor que exige armadura na direção y
- p: carga uniformemente distribuída aplicada à laje (p.ex. N/m²)
- p_i : carga por unidade de comprimento numa seção de viga equivalente (p. ex. N/m)
- R: reação total de um pilar (p. ex. N)
- R_i : reação de um pilar em uma viga equivalente (p.ex. N)
- W_L : módulo de resistência de uma faixa de laje de largura unitária
- W_v : módulo de resistência de uma viga equivalente
- γ : relação entre os vãos a e b : $\gamma = \frac{a}{b}$
- λ : relação entre os vãos b e a : $\lambda = \frac{b}{a}$
- ν : coeficiente de Poisson
- σ_x : tensão na viga ou na laje na direção x
- $k = \frac{P_1}{P_2}$: relação entre as cargas por unidade de comprimento que recebem as vigas 1 e 2 respectivamente.

3.1.1 - Cálculo das larguras efetivas b_{xm} e b_{ym} para momentos positivos	37
3.1.2 - Cálculo das larguras efetivas b_{xa} e b_{ya} para momentos negativos	46
3.1.3 - Conclusões	48
3.2 - Painel interno: carga uniformemente distribuída em faixas alternadas	54
3.2.1 - Carregamento para momento máximo posi <u>t</u> i vo na direção x	54
3.2.2 - Carregamento para momento máximo posi <u>t</u> i vo na direção y	60
3.2.3 - Conclusões	64
3.3 - Roteiro de cálculo	66
 CAPÍTULO 4 - LAJE ISOLADA RETANGULAR COM UMA BORDA SIM PLESMENTE APOIADA E A BORDA OPOSTA SOBRE APOIOS PUNTIFORMES	71
 CAPÍTULO 5 - EXEMPLO NUMÉRICO	78
 CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES FINAIS	90
 BIBLIOGRAFIA	92
 ANEXO: CONJUNTO DAS TABELAS DE MOMENTOS FLETORES E FLE CHAS DAS LAJES UTILIZADAS NO TRABALHO	95
 REFERÊNCIA 1	96
 REFERÊNCIA 16	104

APRESENTAÇÃO

O objetivo desta dissertação é a determinação de larguras efetivas para momentos fletores em lajes cogumelo de concreto armado, sujeitas à cargas verticais uniformemente distribuídas.

A largura efetiva indica qual a faixa em que devemos distribuir a armadura, além de possibilitar a verificação das tensões de compressão no concreto.

Em geral, nas bibliografias sobre lajes cogumelo, os autores calculam momentos e flechas para o seu dimensionamento, mas não indicam as larguras das faixas onde devem ser distribuídas as armaduras.

Sobre esse aspecto existem apenas recomendações de diversas normas (ACI, DIN, NB-1/78), sugerindo as larguras daquelas faixas de uma maneira muito simplificada.

Este trabalho visa determinar as referidas larguras efetivas através de uma formulação matemática, permitindo uma distribuição de armadura mais adequada.

No cap. 1 apresenta-se a introdução: no item 1.1 descrevem-se as considerações gerais nas lajes cogumelo e no item 1.2 definem-se as palavras-chave do trabalho. No item

1.3 mostram-se prescrições de três normas. Nos itens 1.4 e 1.5 descrevem-se as hipóteses gerais e as considerações adicionais para determinação das larguras efetivas.

No cap. 2 estuda-se o caso de laje isolada retangular sobre apoios puntiformes.

No cap. 3 trata-se o caso usual na prática de um painel interno de uma laje cogumelo contínua de um pavimento de um edifício. No item 3.1 as cargas uniformes estão distribuídas em todos os painéis, enquanto que no item 3.2 as cargas uniformes estão distribuídas em faixas alternadas de modo a resultar momentos positivos máximos nos vãos. Determinam-se as larguras efetivas para momentos positivos e negativos.

No cap. 4 deduz-se o caso da laje isolada retangular com uma borda simplesmente apoiada e a borda oposta sobre apoios puntiformes, com a qual pode-se calcular aproximadamente as larguras efetivas para momentos positivos de um painel de borda de uma laje cogumelo contínua.

Não se analisou painel de canto de uma laje cogumelo contínua porque não existe bibliografia completa com cálculo de momentos e flechas principalmente, conforme comentado na ref. 12, pag. 108.

No cap. 5 faz-se um exemplo numérico e compara-se com os resultados utilizando-se ACI 318/77, DIN 1045/1972 e NB-1/78.

No final de cada capítulo, tiram-se conclusões parciais.

Em seguida, chegam-se às conclusões finais.

Em anexo, conjunto das tabelas de momentos fletores e flechas das lajes, utilizadas nos diversos capítulos.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE LAJES COGUMELO

As lajes cogumelo são estruturas de uso ainda relativamente restrito no Brasil, situação essa que tende a modificar-se devido às vantagens que tal tipo de estrutura apresenta sobre as soluções usuais com lajes e vigas.

Utilizando como solução estrutural a laje cogumelo consegue-se uma substancial economia, bem como uma grande simplificação nos serviços de execução de formas, montagem de armadura e concretagem, o que leva a uma maior rapidez de execução. Além disso, consegue-se uma iluminação mais uniforme do ambiente, melhor ventilação, menor acúmulo de insetos com vantagem também da higiene. Além de se facilitar muito a colocação de condutores elétricos e tubulações hidráulicas, também a estética do local melhora. Por último, ganha-se altura nos locais onde se requer economia da altura total do edifício ao reduzir a espessura total de cada piso de pavimento.

Apesar das vantagens construtivas, as lajes cogumelo têm desvantagens como solução estrutural devido à pequena rigidez que apresentam para resistir a esforços hori

zontais, se comparadas com a solução usual de lajes e vigas. Esta condição exige que seja garantida a estabilidade e resistência da estrutura, principalmente no caso de edifícios com vários pavimentos e/ou poucas linhas de pilares, p.ex., ligando a laje a um núcleo de rigidez (paredes de poço de elevador, etc.), projetando-se vigas nas bordas das lajes dos pavimentos e outras soluções.

Outro problema que surge no projeto de estruturas em lajes cogumelo é a verificação à punção da laje para a introdução das reações dos pilares. Tal problema ainda não está totalmente resolvido, havendo grandes divergências nos valores das tensões últimas de punção que se encontram especificadas nas diversas normas e, principalmente, divergências de critérios para verificação da punção nos casos em que a reação do pilar é constituída por uma força não centrada, ou seja, nos casos em que a laje cogumelo introduz no pilar, além da força normal, também momento fletor.

1.2 - DEFINIÇÕES

Laje cogumelo é uma estrutura formada por uma placa de concreto isolada ou contínua que se apoia diretamente sobre pilares, com ou sem alargamento nos topos dos mesmos.

Painel é uma região da placa limitada pelas linhas que unem os centros de quatro pilares contíguos, dispostos nos vértices de uma malha ortogonal.

Painel interno: se as dimensões da laje contínua são grandes em comparação com as dimensões do painel, pode ser assumido que a flexão de painéis internos não é afetada pelas bordas, de modo que a análise pode então ser confinada apenas a um painel.

Placa delgada é aquela cujo efeito da deformação por força cortante é desprezível em relação ao efeito da deformação por flexão.

Largura efetiva para momento fletor é a largura de uma faixa de laje que, atuando como uma viga, que no que segue, será chamada de viga equivalente, com a tensão máxima uniforme e igual à máxima tensão da laje naquela dire

ção, desenvolve momento resistente igual ao da laje (Ref. 13, pag. 188).

Da definição de largura efetiva dada acima e utilizando as hipóteses do item 1.4, temos na direção x (ver Fig. 1):

- tensão máxima na laje: $\sigma_{x,L} = \frac{m_{xm}}{W_L} \quad (1)$, onde $W_L = \frac{h^2}{6}$

- tensão máxima na viga equivalente, (viga 1): $\sigma_{x,v} = \frac{M_{xm}}{W_v} \quad (2)$,
onde $W_v = \frac{b_{xm} h^2}{6}$

Pela definição, igualando as expressões (1) e (2), vem:

$$\frac{6m_{xm}}{h^2} = \frac{6M_{xm}}{b_{xm} h^2} \rightarrow b_{xm} = \frac{M_{xm}}{m_{xm}} \quad (3)$$

Analogamente na direção y chega-se a:

$$b_{ym} = \frac{M_{ym}}{m_{ym}} \quad (4)$$

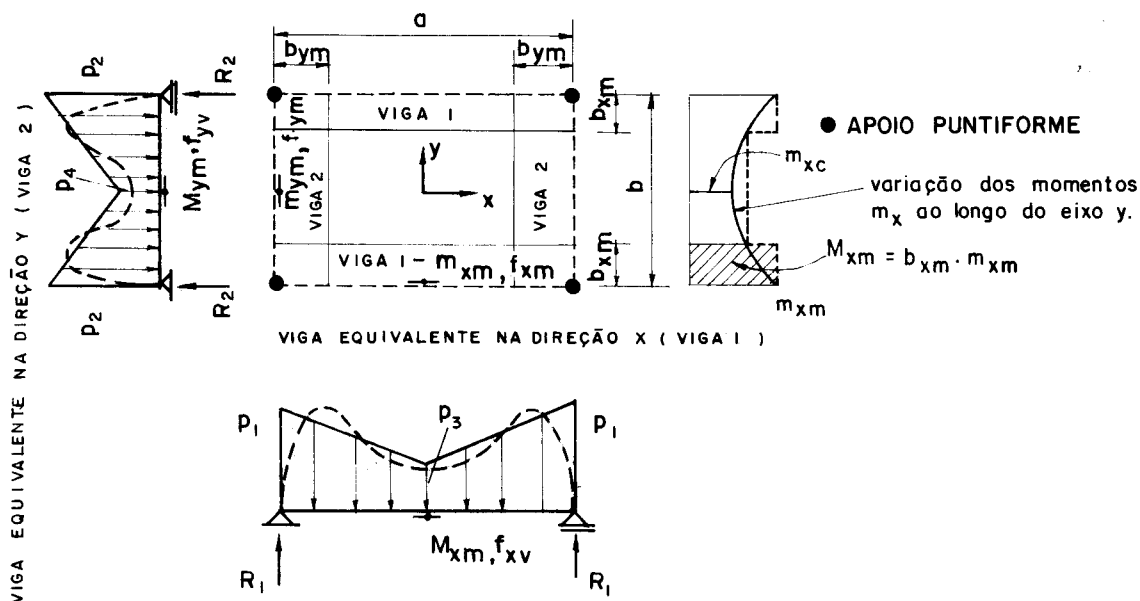


Fig.1 - Exemplo de painel isolado

Então a largura efetiva referente a uma determinada direção é a relação entre o momento máximo da viga equivalente e o momento máximo da laje naquela direção.

As cargas sobre as vigas equivalentes serão estudadas no item 1.5.

1.3 - PRESCRIÇÕES DE ALGUMAS NORMAS

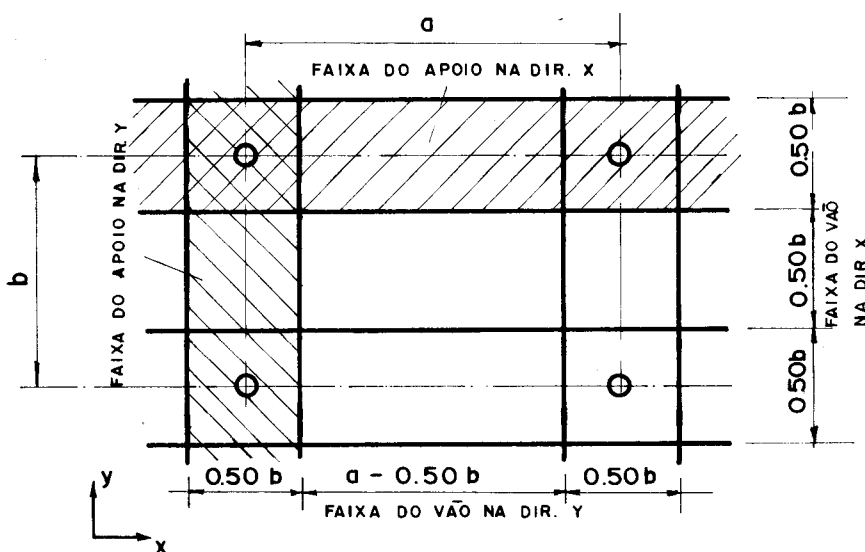
Serão expostas em seguida, prescrições de três normas para determinação das larguras efetivas.

1.3.1 - ACI 318-77

O American Concrete Institute 318-77 apresenta um método de cálculo para o projeto de lajes cogumelo contínuas com flexão em duas direções.

O método da estrutura equivalente consiste em dividir a estrutura tridimensional formada pela placa e seus apoios em uma série de pórticos, chamados pórticos equivalentes, os quais são analisados para as cargas que agem nos seus planos.

As faixas do apoio e as faixas do vão têm as seguintes larguras:



RESTRIÇÃO :

$$b < a$$

Fig. 2

Cada pórtico é tomado sobre uma linha de pilares e é formado por duas partes (ver Fig. 3):

- a) uma faixa de laje limitada pelos eixos dos painéis adjacentes;
- b) pilares ou outros suportes verticais.

O ACI 318-77 considera como momento negativo para dimensionamento, o momento negativo na face do apoio mas, no máximo, a 17,5% do vão respectivo a partir do centro do apoio.

Os pilares de forma regular, deverão ser tratados como pilares quadrados de mesma área.

Os momentos positivos e negativos calculados para os pórticos equivalentes são então distribuídos nas faixas do apoio e nas faixas do vão, de acordo com o que segue (v. Fig. 4):

As faixas do apoio serão solicitadas por 75% do momento negativo e 60% do momento positivo.

As semi-faixas do vão, que formam juntamente com a faixa do apoio o trecho da estrutura em estudo, serão so

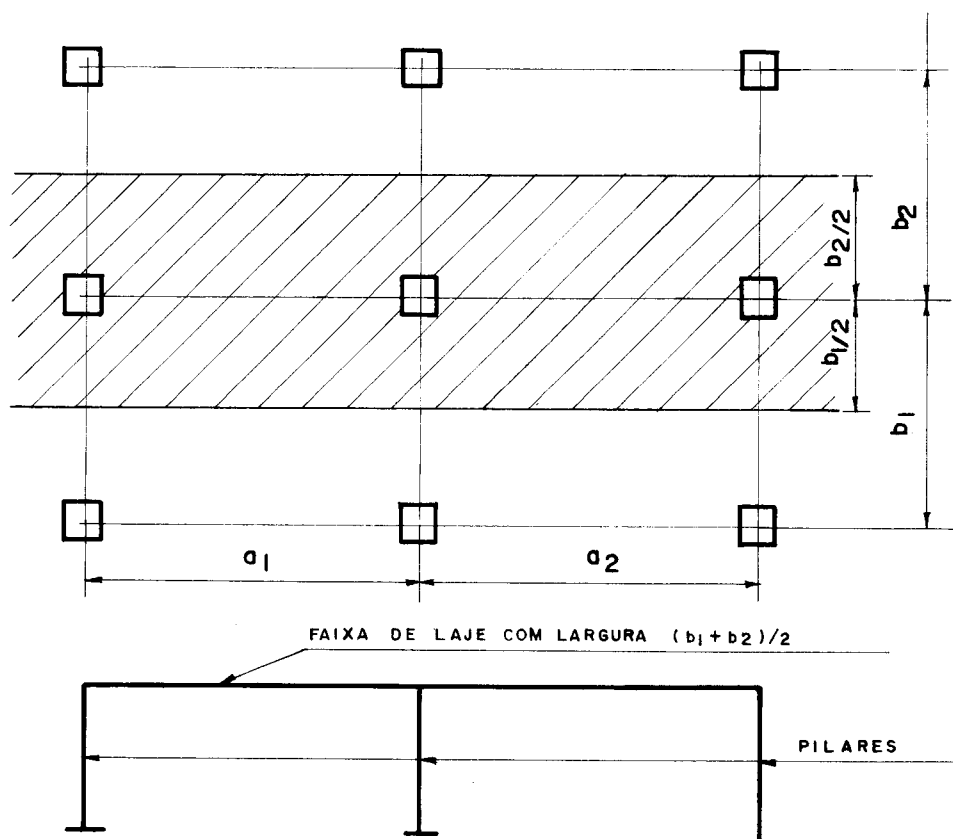


FIG. 3

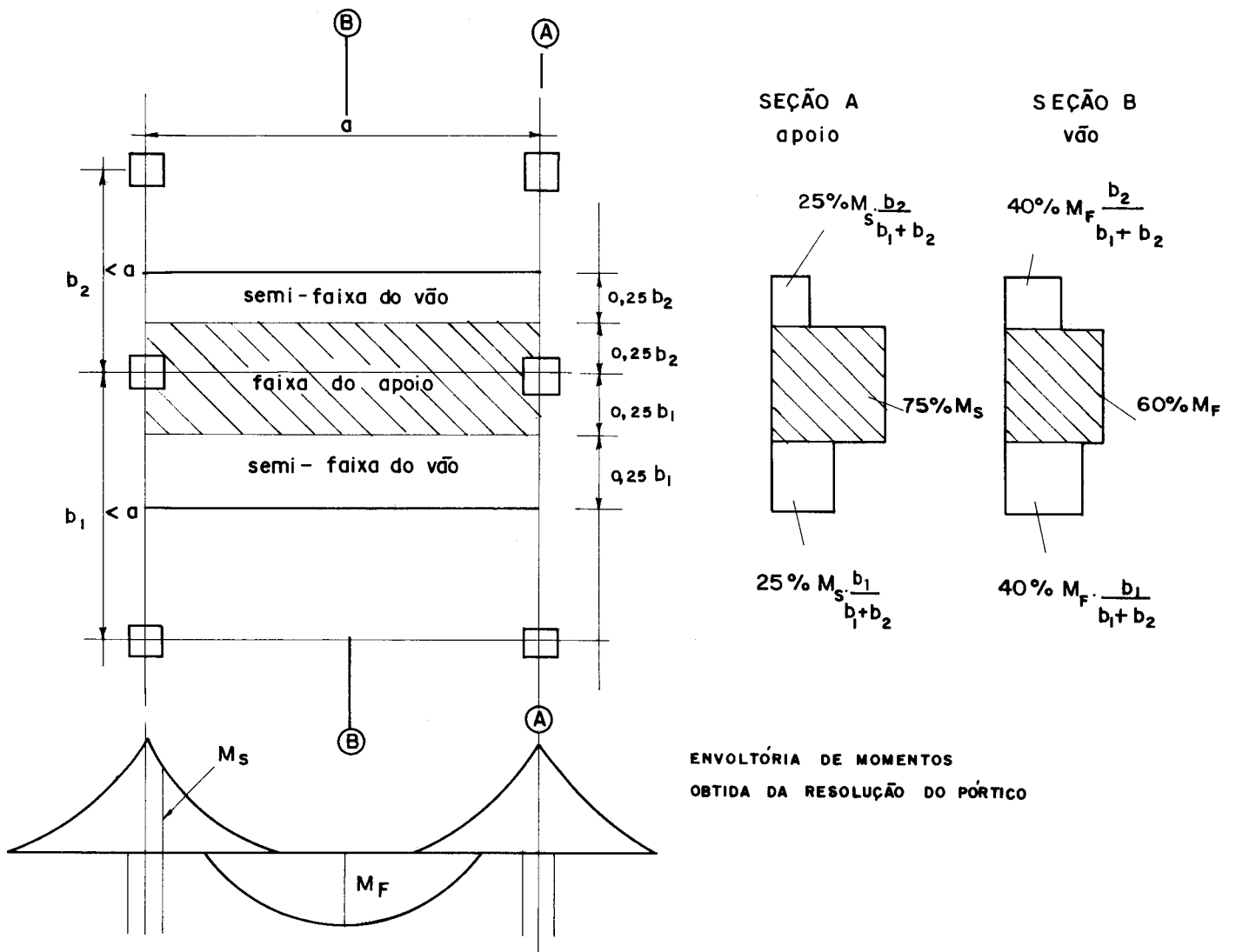


FIG. 4 - DISTRIBUIÇÃO DOS MOMENTOS POSITIVOS E NEGATIVOS NAS FAIXAS DO VÃO E DO APOIO DE ACORDO COM ACI 318-77

licitadas pelos restantes 25% do momento negativo e pelos restantes 40% do momento positivo.

Essas parcelas deverão ser divididas entre as semi-faixas do vão proporcionalmente às suas larguras.

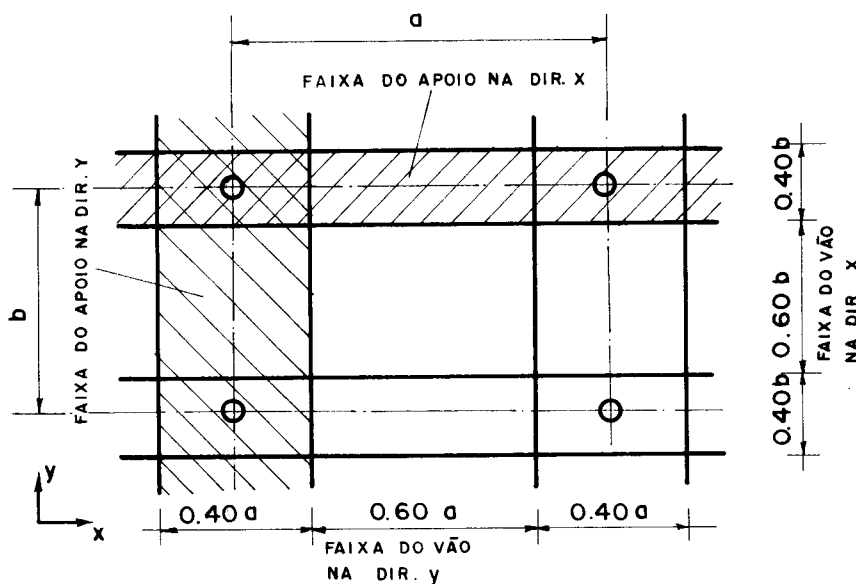
Cada faixa do vão será solicitada pela soma dos momentos das duas semi-faixas que a compõem.

Veja-se no item 3.1.3 a comparação das larguras das faixas com as larguras efetivas calculadas no presente trabalho.

1.3.2 - DIN 1045-1972, item 22.3.1

O método consiste em dividir a laje em dois sistemas de vigas, longitudinais e transversais, as quais, devem ser analisadas juntamente com os pilares, formando pórticos, como se as vigas fossem continuamente apoiadas pelas linhas de pilares que se estendem na direção transversal (v. Fig. 6).

As faixas de apoio e as faixas do vão têm as seguintes larguras:



RESTRIÇÃO:

$$0,75 \leq \frac{a}{b} \leq 1,33$$

Fig. 5

Os momentos fletores obtidos da análise do pórtico descrito devem ser distribuídos pelas faixas do vão e do apoio conforme indica a Fig. 7.

Os momentos numa faixa do vão devem ser adotados como as médias dos momentos das duas semi-faixas adjacentes que a compõem.

Veja-se também no item 3.1.3 a comparação com os resultados do presente trabalho.

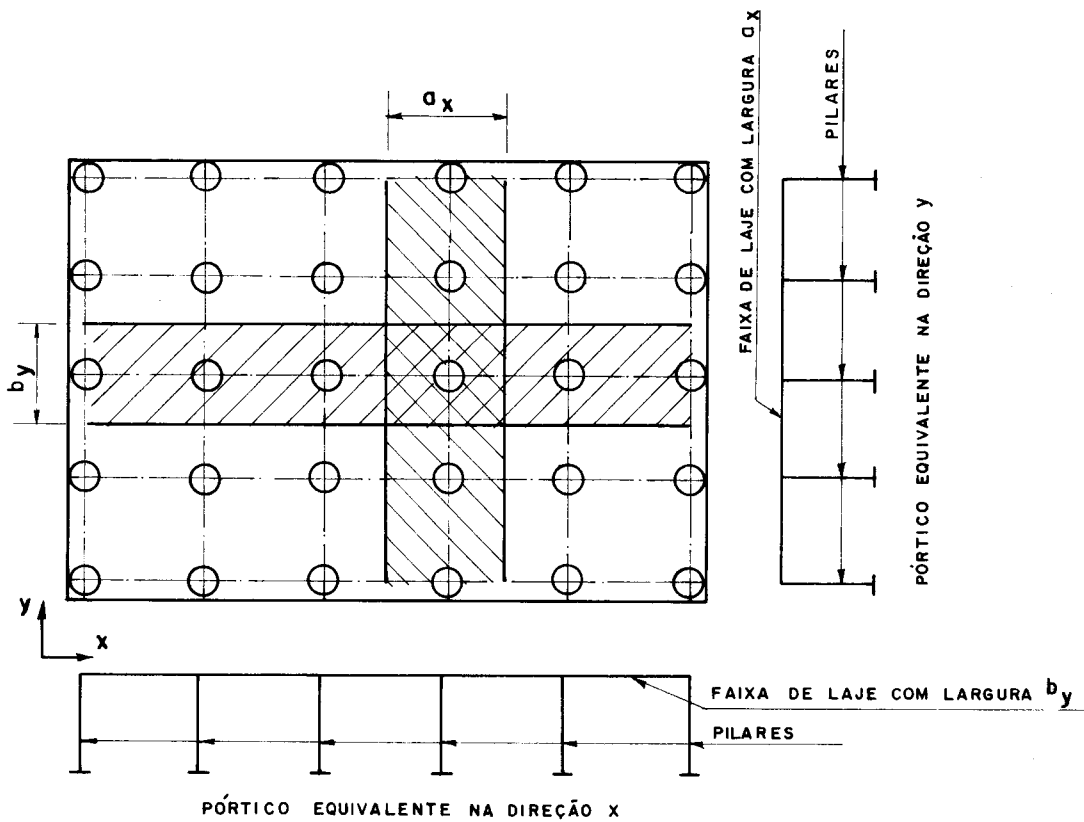


Fig. 6

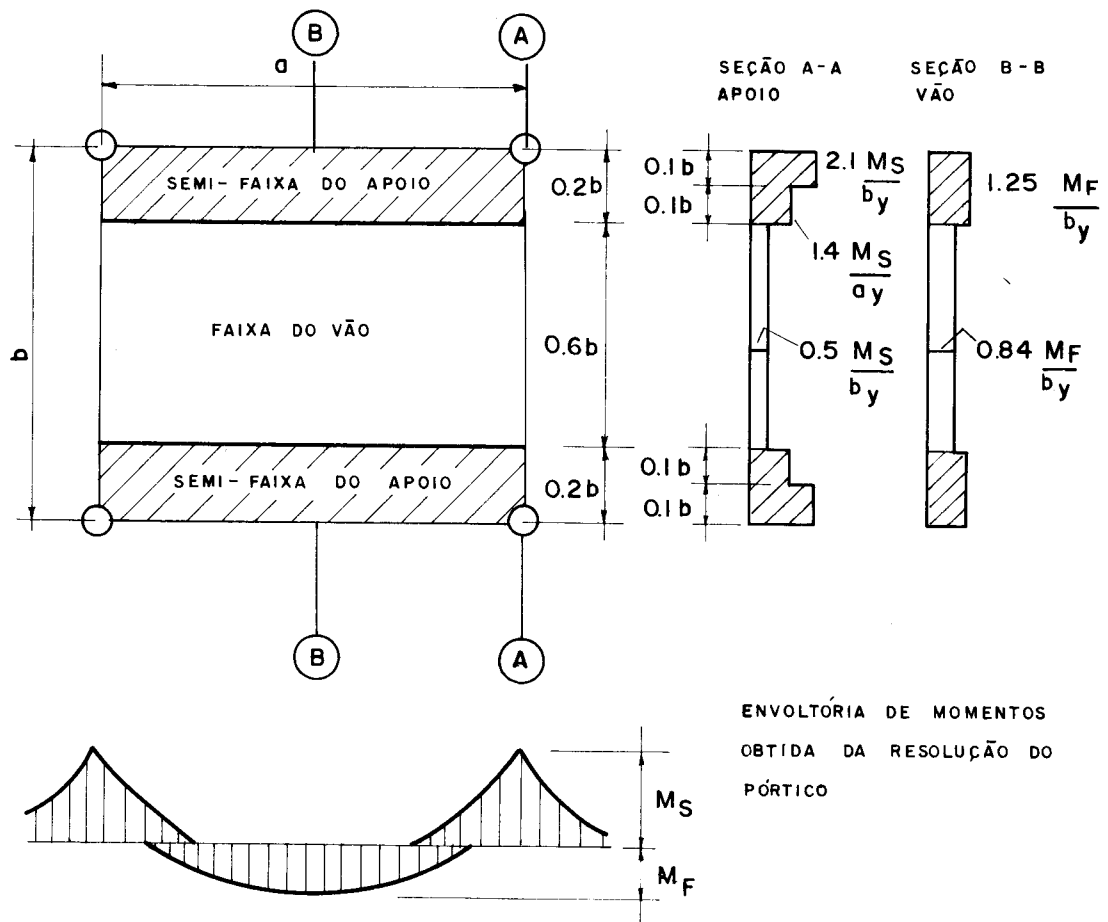


Fig.7 - Distribuição dos momentos positivos e negativos nas faixas do vão e do apoio de acordo com a norma DIN 1045

1.3.3 - NB-1/78, item 3.3.2.11

O item 3.3.2.11 da NB-1/78 é o seguinte:

"As lajes apoiadas diretamente sobre pilares serão calculadas em regime elástico ou rígido plástico de acordo com os itens 3.3.2.1 e 3.3.2.2.

Quando os pilares estiverem dispostos em filas ortogonais e a espessura da laje respeitar o mínimo do item 6.1.1.1, será permitido calcular em regime elástico o conjunto laje-pilares como pórticos múltiplos, admitindo-se a laje dividida em duas séries ortogonais de vigas e

considerando-se no cálculo de cada série o total das cargas. A distribuição dos momentos, se se dividirem os painéis das lajes, com os cantos correspondendo aos pilares, em quatro faixas iguais, será feita do seguinte modo (v. Fig. 9):

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas;
- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 37,5% dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

Deverão ser estudadas cuidadosamente as ligações das lajes com os pilares, com especial atenção nos casos em que não haja simetria de forma ou de carregamento da laje em relação ao apoio. A punção será verificada de acordo com o item 4.1.5"

De acordo com o que se prescreve nesse item, tem-se as seguintes larguras para as faixas do apoio e do vão:

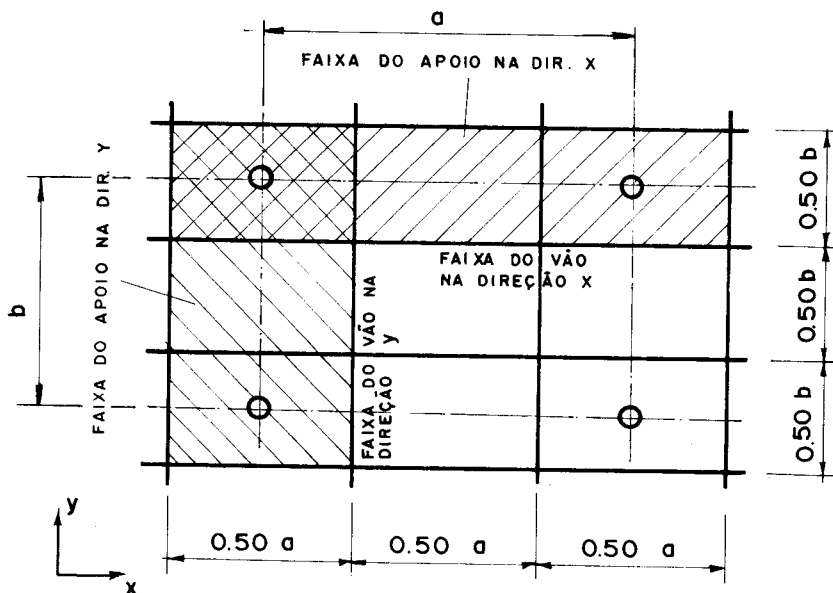


Fig. 8

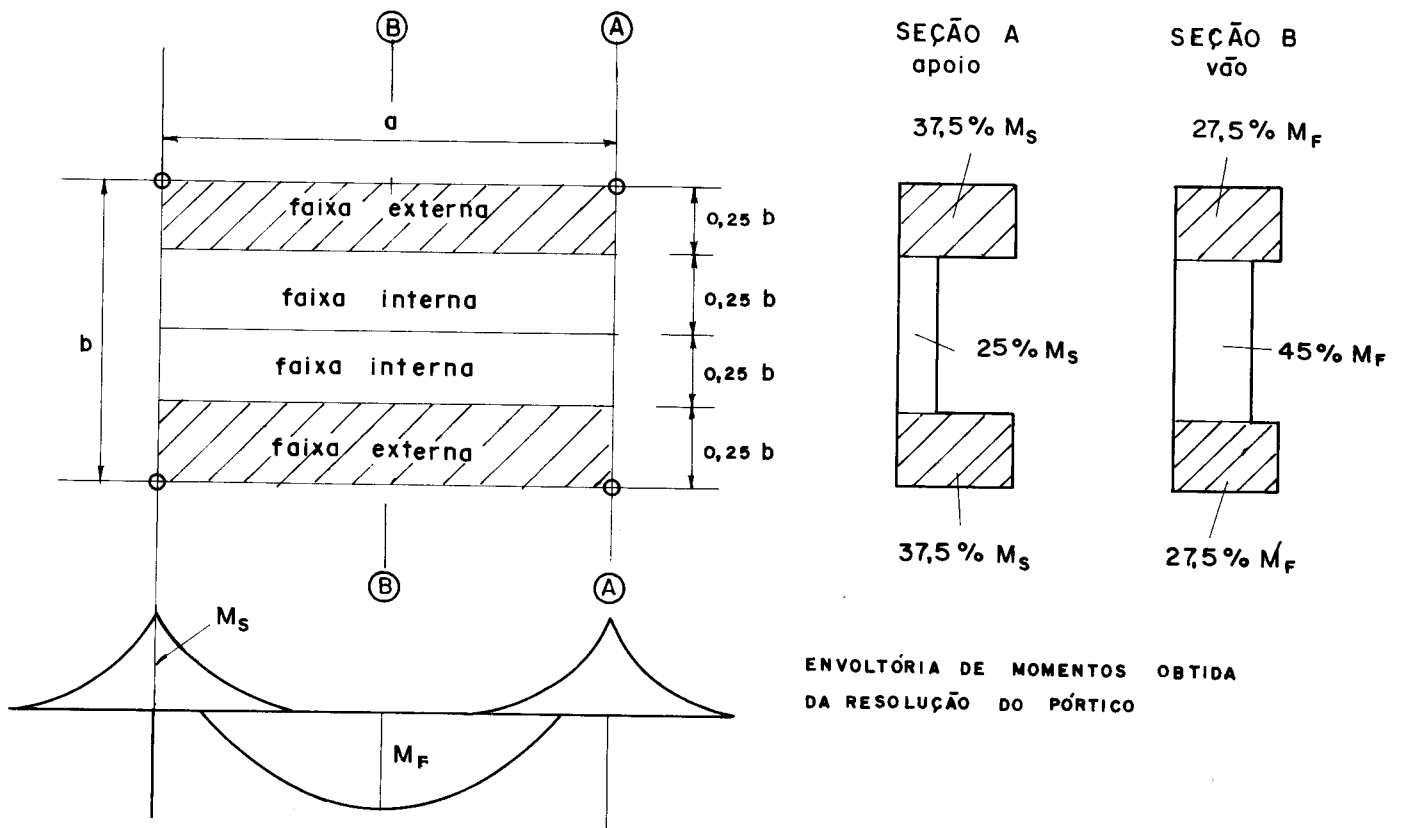


FIG. 9 - DISTRIBUIÇÃO DOS MOMENTOS POSITIVOS E NEGATIVOS NAS FAIXAS DO VÃO E DO APOIO DE ACORDO COM A NB-1/78

Veja-se igualmente no item 3.1.3, a comparação com os resultados do presente trabalho.

1.4 - HIPÓTESES GERAIS

- A laje cogumelo é delgada.
- A laje cogumelo não possui alargamento nos topos de seus apoios.
- Admite-se que, para efeito das cargas verticais, haja articulação entre a laje e os pilares de apoio.
- As cargas verticais atuantes, bem como as reações dos pilares estão aplicadas no plano médio da laje.
- Os momentos fletores e flechas serão calculados no regime elástico.

Na teoria das placas delgadas, admitem-se as seguintes hipóteses (v. ref. [10]):

- O material da placa é elástico e segue a lei de Hooke, isto é, existe proporcionalidade entre tensões e deformações.
- A placa é de material homogêneo e isótropo.
- Os deslocamentos verticais f são pequenos em relação à espessura h , ou seja, a teoria é linear sendo então válida a superposição dos efeitos (proporcionalidade entre esforços e deslocamentos).
- Uma reta normal ao plano médio mantém-se normal à superfície deformada, isto é, seções planas permanecem planas após a deformação, ou seja, as tensões e deformações são proporcionais à distância ao plano neutro.
- As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões.
- Os deslocamentos no plano da superfície média são desprezíveis.

1.5 - CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS PARA DETERMINAÇÃO DAS LARGURAS EFETIVAS

a) Distribuição da carga entre as vigas equivalentes

As vigas equivalentes são muito flexíveis, pois têm altura igual à da laje. Logo as cargas sobre as mesmas serão como desenhado na Fig. 1 (em tracejado), isto é, tenderão a concentrar mais carga próximo aos apoios e menos carga no meio dos vãos, inversamente do que aconteceria se as vigas fossem rígidas (ver ref. 3, pg. 14 e ref. 12, pg. 69).

De uma maneira análoga feita por Eichstaedt para reações de lajes apoiadas em vigas rígidas (ref. 4, pg. 224 e ref. 11 NB-1/78, item 3.3.2.9), aproximaram-se os diagramas de cargas sobre as vigas flexíveis 1 e 2 por diagramas lineares, com a finalidade de simplificar os cálculos (na Fig. 1, em traço cheio).

Assim, temos as reações a determinar: na viga 1, p_1 e p_3 ; na viga 2, p_2 e p_4 .

b) Cálculo das larguras efetivas b_{xm} e b_{ym} para momentos positivos (v. Fig. 1).

Tem-se 6 incógnitas a determinar: p_1 , p_3 , p_2 , p_4 , b_{xm} e b_{ym} .

Tem-se as seguintes equações:

- equilíbrio vertical, isto é, a soma das reações de um pilar nas vigas 1 e 2 deve ser igual à reação total do pilar.

$$\text{Então: } R_1 + R_2 = R$$

- igualdade de momentos nas direções x e y, isto é, os momentos máximos por unidade de largura das vigas 1 e 2 respectivamente iguais aos momentos máximos da laje (da definição de largura efetiva). Então tem-se:

Na viga 1: $\frac{M_{xm}}{b_{xm}} = m_{xm}$; na viga 2: $\frac{M_{ym}}{b_{ym}} = m_{ym}$

- igualdade de flechas em x e y, isto é, as flechas máximas das vigas 1 e 2 respectivamente iguais às flechas máximas da laje. Daí decorre:

Na viga 1: $f_{xv} = f_{xm}$; na viga 2: $f_{yv} = f_{ym}$

- a 6^a equação resulta da relação entre p_1 e p_2 que será desenvolvida no decorrer do estudo.

Os momentos, as flechas e as reações das lajes, são valores conhecidos, calculados como mencionado anteriormente, pela teoria elástica das placas.

A seguir, será inicialmente estudada a laje isolada quadrada onde, por simetria, a 6^a equação resulta $p_1 = p_2$.

CAPÍTULO 2

LAJE ISOLADA SOBRE 4 APOIOS PUNTIFORMES

2.1 - LAJE QUADRADA

2.1.1 - Cálculo das larguras efetivas segundo as hipóteses dos ítems 1.2, 1.4 e 1.5.

- Esquema da laje

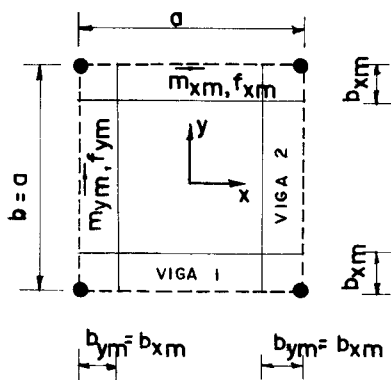


Fig. 10

- Momentos e flechas da laje (ref. [1], pg. 97): $v = 0$
(V. Anexo).

$$m_{xm} = m_{ym} = 0,1604 \text{ pa}^2$$

$$f_{xm} = f_{ym} = 0,210 \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (6)$$

- Reação total de um pilar

$$R = \frac{pa^2}{4} \quad (7)$$

- Esquema da viga 1 = viga 2

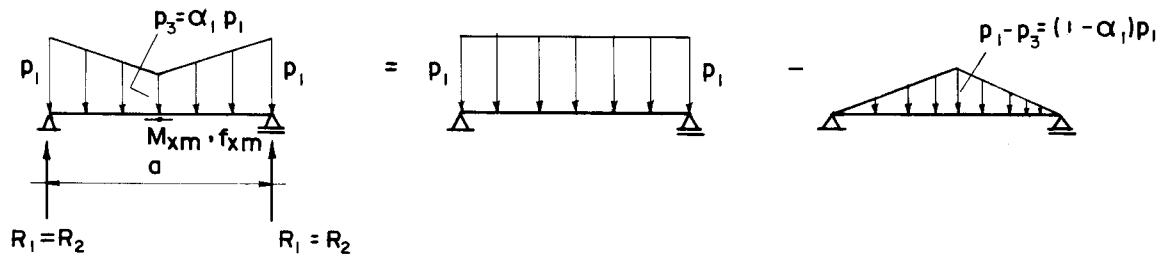


Fig. II

- Momento e flecha no meio do vão da viga 1 = viga 2

$$M_{xm} = M_{ym} = \frac{p_1 a^2}{8} - (1 - \alpha_1) \frac{p_1 a^2}{12} = \frac{(1 + 2\alpha_1)p_1 a^2}{24} \rightarrow$$

$$m_{xm} = m_{ym} = \frac{(1 + 2\alpha_1)p_1 a^2}{24b_{xm}} \quad (8)$$

$$f_{xm} = f_{ym} = \frac{5p_1 a^4}{384EI} - \frac{(1 - \alpha_1)p_1 a^4}{120EI} \quad (9)$$

onde

$$I = I_1 = I_2 = \frac{b_{xm} h^3}{12} \quad (10)$$

Substituindo (10) em (9), chega-se a:

$$f_{xm} = f_{ym} = \frac{(9 + 16\alpha_1)p_1 a^4}{160Eb_{xm} h^3} \quad (11)$$

- Impondo a igualdade dos momentos, isto é, da eq. (8) com a eq. (5), vem:

$$b_{xm} = \frac{(1+2\alpha_1)p_1}{3,8496 \cdot p} \quad (12)$$

Impondo a igualdade das flechas, isto é, da eq. (11) com a eq. (6), vem:

$$b_{xm} = \frac{(9+16\alpha_1)p_1}{33,6 p} \quad (13)$$

Igualando as equações (12) e (13), tem-se que $\alpha_1 = 0,1866$

- Reação de um pilar na viga 1 = viga 2

$$R_1 = \frac{p_1 a}{2} - (1-\alpha_1) \frac{p_1 a}{4} = 0,25(1+\alpha_1)p_1 a = 0,2967 p_1 a \quad (14)$$

- Igualdade da somatória das reações do pilar nas vigas 1 e 2 com a reação total do pilar

Deve-se ter

$$2R_1 = R \quad (15)$$

Substituindo (14) e (7) em (15), temos:

$$0,5933 \cdot p_1 a = \frac{pa^2}{4}$$

donde

$$p_1 = 0,4214 \cdot pa \quad e \quad p_3 = 0,0786 pa$$

Substituindo esse valor de p_1 em (13), tem-se finalmente:

$$b_{xm} = b_{ym} = 0,1503 a$$

- Diagrama de cargas sobre as vigas equivalentes:

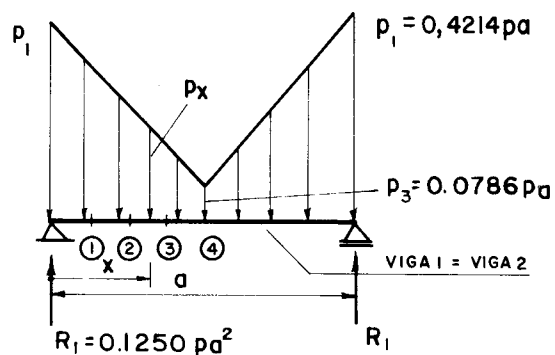


Fig. 12

Cálculo do momento m_x na seção a uma distância x do apoio, partindo do diagrama de cargas da Fig. 12 :

Tem-se na seção x :

$$p_x = 0,0786 p a + 0,3428 \left(1 - \frac{x}{0,5a}\right) \quad (16)$$

$$M_x = R_1 x - p_x \frac{x^2}{2} - (p_1 - p_x) \frac{x^2}{3} \quad (17)$$

Dividindo (17) por b_{xm} , calcula-se m_x :

Logo

$$m_x = \frac{M_x}{b_{xm}}$$

Na Tabela 1 calculam-se esses valores para as seções 1, 2 e 3. Os momentos m_x para comparação, foram tomados da ref. 16 . (V. anexo).

SEÇÃO	$\frac{x}{0,5a}$	$\frac{p_x}{pa}$	$\frac{M_x}{pa^3}$	$\frac{m_x}{pa^2}$	$\frac{m_x}{pa^2}$ ref. [16]
1	0,25	0,3357	0,01256	0,0836	0,0863
2	0,50	0,2510	0,01986	0,1321	0,1290
3	0,75	0,1643	0,02327	0,1548	0,1516
4	1,00	0,0786	0,02411	0,1604	0,1604

Tabela 1

A variação dos momentos fletores m_x com o eixo y (v. fig. 10) é a seguinte (valores segundo ref. 16) :

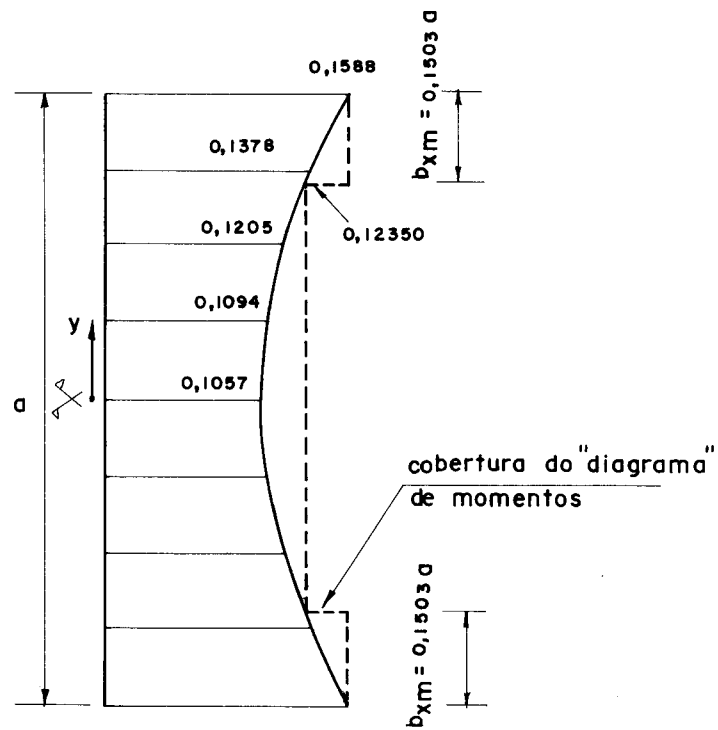
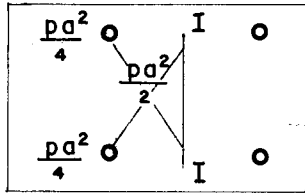


FIG. 13 : VALORES DE $\frac{m_x}{pa^2}$

Integral dos momentos m_x que atuam perpendicularmente à seção passando pelo eixo y . Deve-se ter:

$$\int_{-a/2}^{a/2} m_x dy = \frac{p \cdot a^3}{8} = M_I,$$



Assumindo interpolação linear entre os valores, verifica-se o equilíbrio na quarta casa decimal.

2.1.2 - Segundo Hahn, J.: "Vigas contínuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre lecho elástico" ref.[6]

Neste livro, Hahn apresenta apenas uma breve introdução ao assunto.

Calcula, como um dos exemplos, as larguras efetivas (iguais por simetria) de uma laje cogumelo isolada quadrada (v. esquema da laje na Fig.10. Sua grande imprecisão reside na hipótese de cargas para as vigas equivalentes, quando supõe que as cargas sobre as mesmas são de forma triangular, como se as vigas fossem rígidas (v. Fig.14).

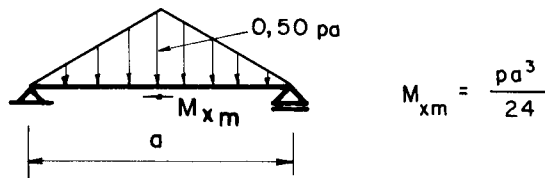


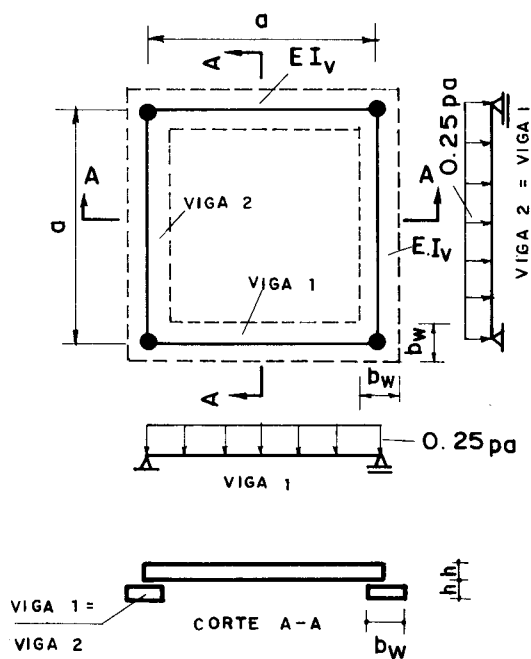
Fig. 14 - Esquema da viga 1 = viga 2

Impondo a igualdade do momento M_{xm} dividido pela largura efetiva b_{xm} com o momento de laje (dado por (5)), o autor chega ao valor $b_{xm} = b_{ym} = 0,260 a$. Comparando com o valor calculado pelas hipóteses admitidas no presente trabalho ($b_{xm} = b_{ym} = 0,1503 a$), vê-se que empregando o processo simplificado utilizado naquela bibliografia, a largura efetiva resulta 73% maior.

2.1.3 - Conclusões

1) Conhecida a largura efetiva b_{xm} no meio do vão, pode-se calcular, com boa aproximação, os momentos de laje ao longo da borda: a penúltima coluna da tabela 1, quando comparada com a última coluna, vê-se que é perfeitamente aceitável.

2) Da teoria de placa quadrada sobre apoios deformáveis, ref. [9], pg. 145, sabe-se que: quando a relação H entre a rigidez da viga de apoio EI_v e a rigidez da placa D for igual a 0,5, as cargas sobre as vigas serão uniformemente distribuídas (v. Fig. 15).



$$H = \frac{EI_v}{aD} = 0,50 \quad (18)$$

Fig. 15

Se as alturas das vigas forem iguais à da laje, tem-se:

$$I_v = \frac{b h^3}{12}$$

Para $\nu = 0$, a rigidez da placa fica:

$$D = \frac{Eh^3}{12}$$

Substituindo na (18), vem:

$$\frac{EI_v}{aD} = \frac{b_w}{a} = 0,50 \rightarrow b_w = 0,50 a$$

isto é, a largura da viga de altura igual à da laje, para que a carga sobre a mesma seja uniforme é igual à metade do vão da laje.

No caso analisado, a viga equivalente tem altura igual à da laje e largura $b_{xm} = b_{ym} = 0,1503a < b_w = 0,50a$, isto é, a viga equivalente não tem rigidez suficiente ($H = 0,1503$) para a carga sobre a mesma ser uniforme e, muito menos, como no item 2.1.2. Isso confirma a distribuição de cargas da Fig. 1, assumida para as vigas.

A rigor, não se assumiu a distribuição de cargas para as vigas equivalentes como na Fig.12. A imposição de igualdade de momento e flecha no meio do vão entre apoios é que implicou em $p_3 < p_1$, resultando semelhante à reação de laje isolada sobre vigas muito flexíveis.

A distribuição de cargas para as vigas em função de H é então:

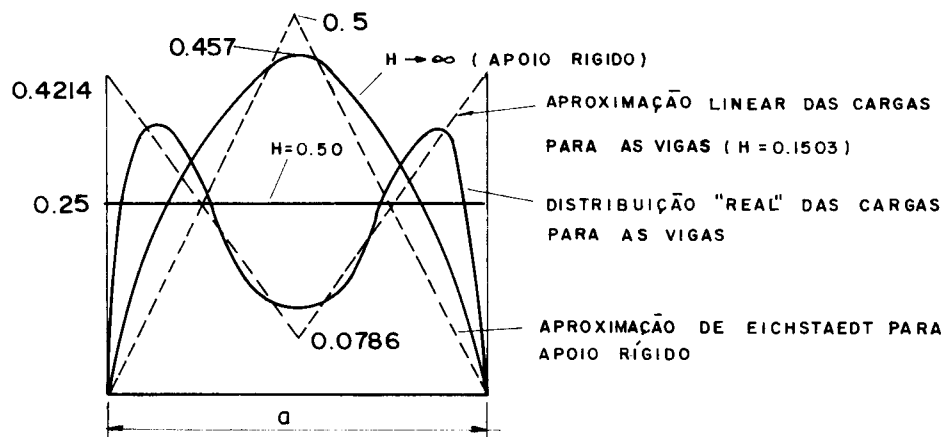


FIG.16 - VALORES DE $\frac{pi}{ps}$

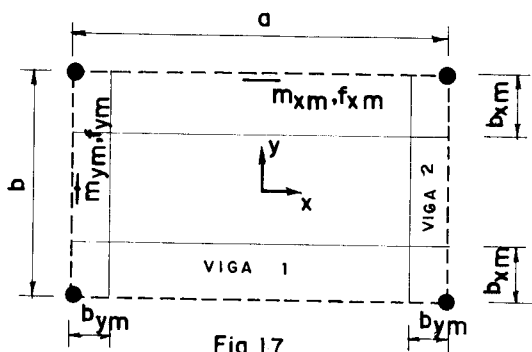
No cálculo anterior foi linearizado o diagrama de cargas para a viga equivalente de uma forma análoga feita por Eichstaedt para vigas rígidas (v. Fig.16).

3) O cálculo das larguras efetivas feito por Hahn está, portanto, muito a favor da segurança.

2.2 - LAJE RETANGULAR

2.2.1 - Cálculo das larguras efetivas segundo as hipóteses dos itens 1.2, 1.4 e 1.5.

- Esquema da laje



$$\lambda = \frac{b}{a}$$

- Momentos e flechas da laje (ref. [1], pg. 97): $v = 0$ (v. anexo).

$$m_{xm} = \beta_1 pa^2 \quad (19)$$

$$m_{ym} = \beta_2 pb^2 \quad (20)$$

$$f_{xm} = \beta_3 \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (21)$$

$$f_{ym} = \beta_4 \frac{pb^4}{Eh^3} \quad (22)$$

Os coeficientes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 estão tabelados em função de λ (v. Tab. 2).

- Reação total de um pilar

$$R = \frac{pab}{4} \quad (23)$$

- Esquema da viga 1

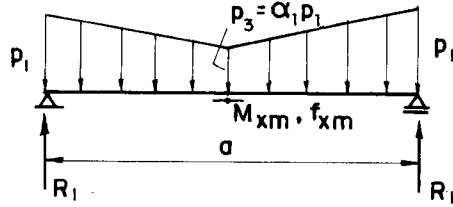


Fig. 18

Procedendo de forma análoga ao item 2.1, chega-se

a:

$$M_{xm} = \frac{(1+2\alpha_1)p_1 a^2}{24} \rightarrow m_{xm} = \frac{(1+2\alpha_1)p_1 a^2}{24b_{xm}} \quad (24)$$

$$f_{xm} = \frac{(9+16\alpha_1)p_1 a^4}{160Eb_{xm} h^3} \quad (25)$$

- Impondo a igualdade da (24) com a (19), vem:

$$b_{xm} = \frac{(1+2\alpha_1)p_1}{24\beta_1 \cdot p} \quad (26)$$

- Impondo a igualdade da (25) com a (21), vem:

$$b_{xm} = \frac{(9+16\alpha_1)p_1}{160\beta_3 \cdot p} \quad (27)$$

Igualando as equações (26) e (27), chega-se a:

$$\alpha_1 = \frac{20-27\beta_5}{48\beta_5-40} \quad \text{onde} \quad \beta_5 = \frac{\beta_1}{\beta_3} \quad (28)$$

- Reação de um pilar na viga 1

$$R_1 = 0,25 (1+\alpha_1) p_1 a \quad (29)$$

- Esquema da viga 2

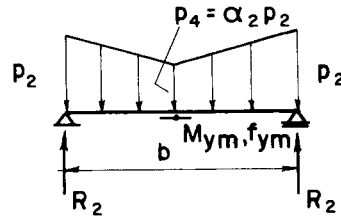


Fig. 19

Procedendo de forma análoga à viga 1, chega-se a:

$$M_{ym} = \frac{(1+2\alpha_2)p_2 b^2}{24} \rightarrow m_{ym} = \frac{(1+2\alpha_2)p_2 b^2}{24b_{ym}} \quad (30)$$

$$f_{ym} = \frac{(9+16\alpha_2)p_2 b^4}{160Eb_{ym} h^3} \quad (31)$$

Impondo a igualdade da (30) com a (20) e da (31) com a (22), vem:

$$b_{ym} = \frac{(1+2\alpha_2)p_2}{24\beta_6 p} \quad (32)$$

e

$$b_{ym} = \frac{(9+16\alpha_2)p_2}{160\beta_6 p} \quad (33)$$

Igualando as equações (32) e (33), tem-se:

$$\alpha_2 = \frac{20-27\beta_6}{48\beta_6-40} \quad \text{onde } \beta_6 = \frac{3}{3} \frac{2}{4} \quad (34)$$

- Reação de um pilar na viga 2:

$$R_2 = 0,25 (1+\alpha_2) p_2 b \quad (35)$$

- Igualdade da somatória das reações do pilar nas vigas 1 e 2 com a reação total do pilar:

$$R_1 + R_2 = R \quad (36)$$

Substituindo (29), (35) e (23) na (36), tem-se

$$0,25(1+\alpha_1)p_1a + 0,25(1+\alpha_2)p_2b = \frac{pab}{4} \quad (37)$$

Chamando $p_1 = kp_2$ (38) e substituindo em (37), tendo em vista que $a = b/\lambda$, vem:

$$p_2 \left[0,25(1+\alpha_1) \frac{k}{\lambda} + 0,25(1+\alpha_2) \right] = \frac{pb}{4\lambda} \quad (39)$$

Chamando de $\alpha_5 = 0,25(1+\alpha_2)$ e $\alpha_6 = 0,25(1+\alpha_1)$, a eq. (39) fica:

$$p_2 \left(\alpha_6 \frac{k}{\lambda} + \alpha_5 \right) = \frac{pb}{4\lambda} \quad (40)$$

- Determinação da variação de k com $\gamma = \frac{1}{\lambda} = \frac{a}{b}$

a) Por simetria, quando $\gamma = 1 \rightarrow k = 1$

b) Quando $\gamma \rightarrow 0$, a laje terá flexão somente na direção y .

Então $p_1 = p_3 \rightarrow 0$ e $p_2 = p_4 \rightarrow \frac{pa}{2}$. Logo, $k = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow 0$
e $b_{xm} \rightarrow 0$, $b_{ym} \rightarrow \frac{a}{2}$

c) Inversamente, quando $\gamma \rightarrow \infty$, a laje terá flexão somente na direção x . Daí $p_2 = p_4 \rightarrow 0$ e $p_1 = p_3 \rightarrow \frac{pb}{2}$. Logo $k = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow \infty$ e $b_{xm} \rightarrow \frac{b}{2}$, $b_{ym} \rightarrow 0$.

d) $k(\gamma)$, portanto, é uma função tal que:

$$.k(0) = 0; .k(1) = 1; .k(\infty) = \infty; .k\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{k(\gamma)}$$

Genericamente, pode-se ter: $k = \gamma^n$ onde $n > 0$

Adota-se $n = 1$, isto é, faz-se interpolação linear em

tre $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$. Então, $k = \gamma = \frac{1}{\lambda}$ (41)

- Substituindo (41) em (40), tem-se:

$$p_2 \left(\alpha_5 + \frac{\alpha_6}{\lambda^2} \right) = \frac{pb}{4\lambda}. \text{ Chamando de } \alpha_7 = \alpha_5 + \frac{\alpha_6}{\lambda^2}, \text{ vem:}$$
$$p_2 = \frac{pb}{4\lambda\alpha_7} \quad (42)$$

Substituindo (42) em (38), chega-se \tilde{a} :

$$p_1 = \frac{pb}{4\lambda\alpha_7} \quad (43)$$

Nas equações (26) e (32), chamando:

$$\alpha_3 = \frac{1+2\alpha_1}{24} \text{ e } \alpha_4 = \frac{1+2\alpha_2}{24} \quad (44), \text{ tem-se respectiva}$$

mente:

$$b_{xm} = \frac{\alpha_3 p_1}{\beta_1 p} \text{ e } b_{ym} = \frac{\alpha_4 p_2}{3_2 p} \quad (45)$$

Substituindo (43) e (42) respectivamente nas (45), chega-se finalmente \tilde{a} :

$$b_{xm} = \frac{\alpha_3}{4\beta_1 \alpha_7 \lambda^2} b \text{ e } b_{ym} = \frac{\alpha_4}{4\beta_2 \alpha_7} a \quad (46)$$

Na Tabela 2 calculam-se os parâmetros auxiliares, p_i ($i=1 \rightarrow 4$), e as larguras efetivas b_{xm} e b_{ym} para λ variando de 0,50 a 1,00.

Na Fig. 20 traçam-se os gráficos de $\frac{b_{xm}}{b}$ e $\frac{b_{ym}}{a}$ em função de λ .

TABELA 2 - PARÂMETROS AUXILIARES E CÁLCULO DOS P_i ($i=1 \rightarrow 4$), b_{xm} E b_{ym}

λ	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	α_1	α_3	f_6	α_2	α_4	β_7	$\frac{P_1}{P_A}$	$\frac{P_3}{P_A}$	$\frac{P_2}{P_B}$	$\frac{P_4}{P_B}$	$\frac{b_{xm}}{b}$	$\frac{b_{ym}}{a}$
0,50	0,1300	0,2620	0,1680	0,3456	0,7738	0,3125	0,0677	0,7581	0,1298	0,0525	1,5949	0,3135	0,0980	0,3135	0,0407	0,3265	0,0314
0,60	0,1345	0,2251	0,1740	0,2963	0,7730	0,3006	0,0667	0,7597	0,1449	0,0537	1,1894	0,3503	0,1053	0,3503	0,0507	0,2895	0,0501
0,70	0,1395	0,1996	0,1812	0,2599	0,7699	0,2581	0,0632	0,7680	0,2345	0,0612	0,9505	0,3757	0,0970	0,3757	0,0881	0,2432	0,0806
0,80	0,1459	0,1821	0,1908	0,2402	0,7647	0,1961	0,0580	0,7581	0,1300	0,0525	0,7497	0,4168	0,0817	0,4168	0,0542	0,2071	0,0961
0,90	0,1532	0,1695	0,2004	0,2231	0,7645	0,1938	0,0578	0,7597	0,1453	0,0538	0,6548	0,4242	0,0822	0,4242	0,0616	0,1778	0,1212
1,00	0,1604	0,1604	0,2100	0,2100	0,7638	0,1866	0,0572	0,7638	0,1866	0,0572	0,5932	0,4214	0,0786	0,4214	0,0786	0,1503	0,1503

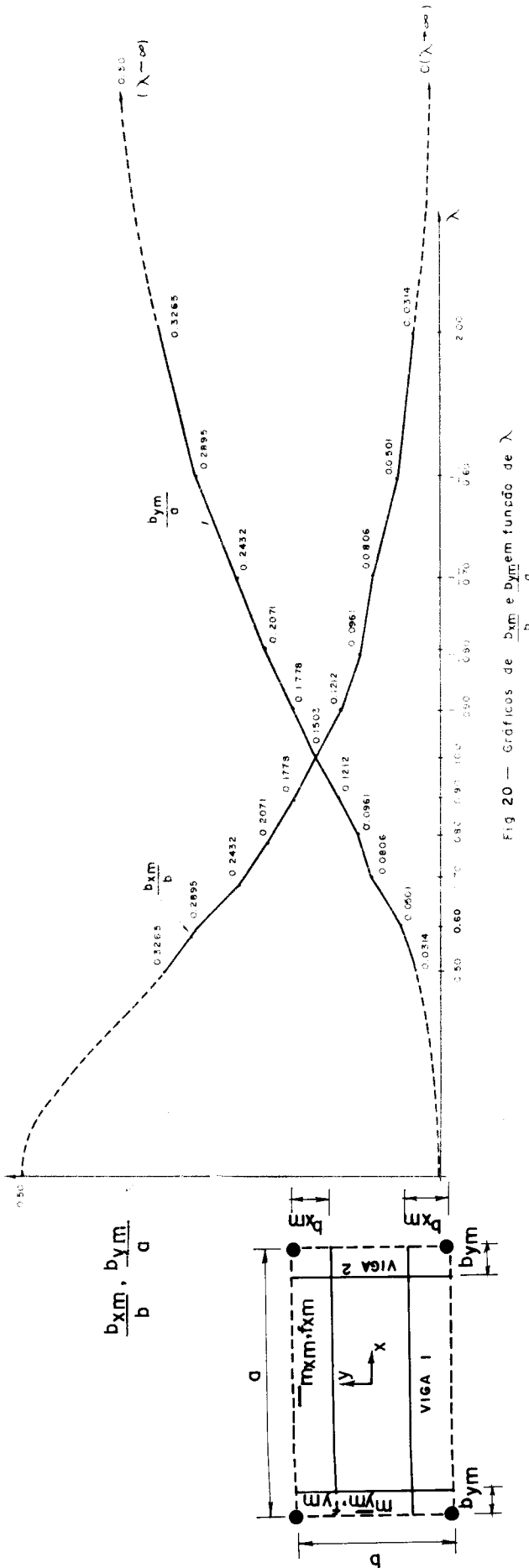
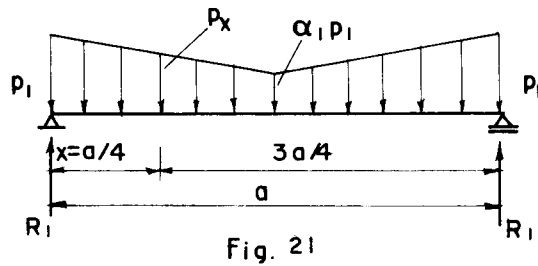


Fig 20 — Gráficos de $\frac{b_{xm}}{b}$ e $\frac{b_{ym}}{a}$ em função de λ

2.2.2 - Verificação dos momentos nos quartos de vão entre apoios utilizando as larguras efetivas calculadas:

a) Viga 1



- A carga p_x no ponto x distante $\frac{a}{4}$ do apoio esquerdo vale:

$$p_x = \frac{(1+\alpha_1)}{2} p_1$$

- Cálculo do momento de viga M_x :

$$M_x = R_1 \cdot \frac{a}{4} - p_x \frac{a^2}{32} - (p_1 - p_x) \cdot \frac{a^2}{48}$$

Substituindo o valor de p_x acima e R_1 da eq. (29), chega-se a:

$$M_x = (7+11\alpha_1) \frac{p_1 a^2}{192}$$

Logo, o momento de laje será:

$$m_x = \frac{(7+11\alpha_1) p_1 a^2}{192 b_{xm}}$$

b) Viga 2

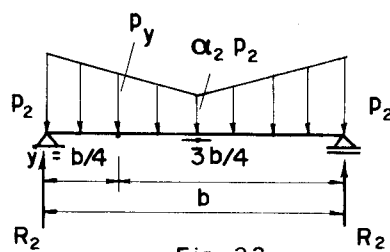


Fig. 22

Fazendo analogamente à viga 1, chega-se a:

$$m_y = \frac{(7+11\alpha_2)p_2 b^2}{192 b_{ym}}$$

Na Tab. 3 calculam-se os parâmetros auxiliares e os momentos m_x e m_y nos quartos de vão e os respectivos momentos tirados da ref. [16], que foram calculados por diferenças finitas (v. anexo). Nos gráficos da Fig. 23, comparam-se esses momentos.

TABELA 3

λ	α_1	$\frac{p_1}{pa}$	$\frac{b_{xm}}{a}$	$\frac{m_x}{pa^2}$	$\frac{m_x}{pa^2}$ ref. 16	α_2	$\frac{p_2}{pb}$	$\frac{b_{ym}}{b}$	$\frac{m_y}{pb^2}$	$\frac{m_y}{pb^2}$ ref. 16
0,50	0,3125	0,3135	0,1632	0,1044	não tabelado	0,1298	0,3135	0,0628	0,2191	não tabelado
0,60	0,3006	0,3503	0,1737	0,1083	não tabelado	0,1449	0,3503	0,0835	0,1878	não tabelado
0,70	0,2581	0,3757	0,1702	0,1131	0,107	0,2345	0,3757	0,1151	0,1629	0,138
0,80	0,1961	0,4168	0,1657	0,1200	0,118	0,1300	0,4168	0,1201	0,1524	0,144
0,90	0,1938	0,4242	0,1600	0,1261	0,123	0,1453	0,4242	0,1347	0,1410	0,136
1,00	0,1866	0,4214	0,1503	0,1322	0,129	0,1866	0,4214	0,1503	0,1322	0,129

2.2.3 - Conclusões

1) Para $0,8 \leq \lambda \leq 1,3$ os momentos nos quartos de vão estão com valores bem próximos dos calculados na bibliografia [16] (v. Fig. 23).

2) Foram calculados os momentos para $x = \frac{a}{8}$, $\frac{3a}{8}$ e $y = \frac{b}{8}$, $\frac{3b}{8}$. Os resultados também estão bem próximos dos da ref. [16] para aquela faixa.

3) Para $\lambda < 0,8$ e $\lambda > 1,3$ surgem diferenças sensíveis entre os valores calculados e os da referência mencionada. Todavia, nessa referência, para λ nas faixas acima, os momentos no meio dos vãos, quando comparados com os das ref. [1] e [15] também diferem sensivelmente. Isso nos parece indicar que poderá haver imprecisão nos cálculos da ref. [16] para essas faixas de λ .

4) Pode-se dizer então que a aproximação das bordas da laje por vigas equivalentes com cargas linearizadas reproduz bem o comportamento real das suas bordas, pelo menos, para $0,8 \leq \lambda \leq 1,3$.

5) A hipótese da linearização entre k e γ , isto é, fez-se $k = \gamma$, parece estar coerente, pois levou a valores de momentos em outras seções próximas dos calculados pela teoria da elasticidade.

6) Os limites de b_{xm}/b e b_{ym}/a quando $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ indicam a acurácia do método e das hipóteses adotadas, isto é, as larguras efetivas estão convergindo para aqueles limites que foram calculados fisicamente.

7) Da definição de largura efetiva, tem-se: $b_{xm} = \frac{M_{xm}}{m_{xm}}$. Da igualdade de flechas entre laje e viga, vem: ver Fig. 17 e equação (25):

$$f_{xmv} = \frac{f_{xmv}(b_{xm}=1)}{b_{xm}} = f_{xm} \rightarrow b_{xm} = \frac{f_{xmv}(b_{xm}=1)}{f_{xm}}$$

Então, igualando as duas expressões de b_{xm} , tem-se:

$$\frac{M_{xm}}{m_{xm}} = \frac{f_{xmv} (b_{xm}=1)}{f_{xm}} \rightarrow \frac{m_{xm}}{f_{xm}} = \frac{M_{xm}}{f_{xmv} (b_{xm}=1)}$$

Substituindo as equações (19), (21), (24) e (25), chega-se a:

$$\frac{\beta_1}{\beta_3} = \beta_5 = \frac{\frac{(1+2\alpha_1)}{24}}{\frac{(9+16\alpha_1)}{160}}$$

- a) quando $p_3 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \rightarrow \beta_5 = 0,7407$
- b) quando $p_3 = p_1 \rightarrow \alpha_1 = 1 \rightarrow \beta_5 = 0,8000$
- c) quando $0 \leq p_3 \leq p_1 \rightarrow 0,7407 \leq \beta_5 \leq 0,800$, isto é, é necessário que a relação entre o coeficiente β_1 do momento de laje m_{xm} e o coeficiente β_3 da flecha f_{xm} da laje esteja entre esses valores para que a distribuição de cargas sobre a viga equivalente seja como na Fig. 18.
- d) Analogamente essa condição deverá ser satisfeita na direção y , isto é, $0,7407 \leq \beta_6 \leq 0,800$

Examinando-se a Tab. 2, verifica-se que as condições c) e d) são satisfeitas, isto é, a aproximação linear da Fig. 18 é possível.

8) Com as cargas sobre as vigas equivalentes (p_i , $i=1 \rightarrow 4$) e as larguras efetivas tabeladas, calcula-se as bordas da laje como vigas: os meios dos vãos entre apoios terão momentos e flechas exatamente iguais aos da laje. Além disso, pode-se calcular as tensões de compressão no estádio I:

$$\sigma_c = \frac{M_{xm}}{W_v} \quad \text{onde} \quad W_v = \frac{b_{xm} \cdot h^2}{6}$$

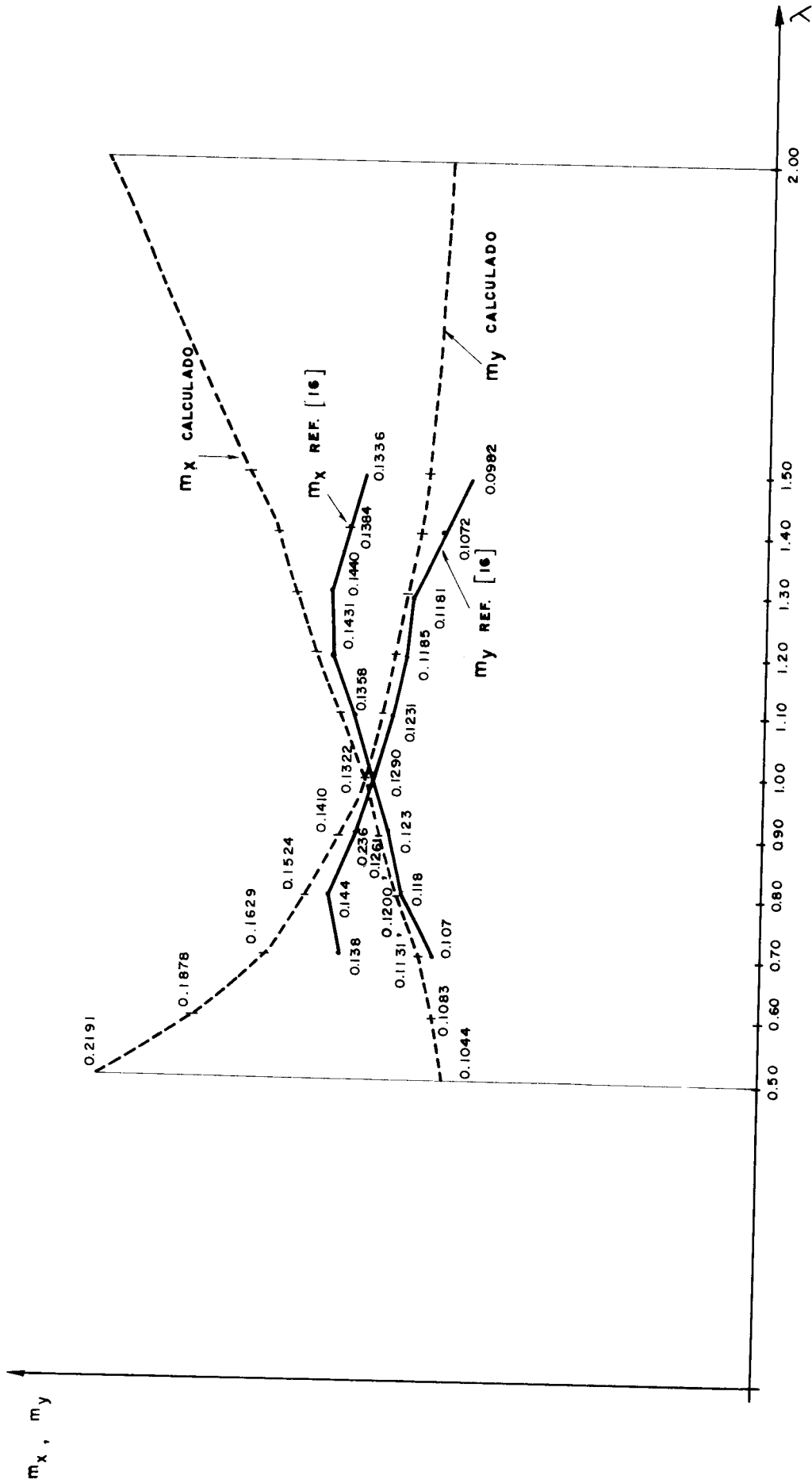


Fig. 23 - Comparação dos momentos m_x e m_y nos quartos de vão

CAPÍTULO 3

LAJE CONTÍNUA RETANGULAR SOBRE APOIOS CIRCULARES

3.1 - PAINEL INTERNO - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM TODOS OS PAINÉIS

- Esquema da laje para momento positivo

- Esquema da laje para momento negativo

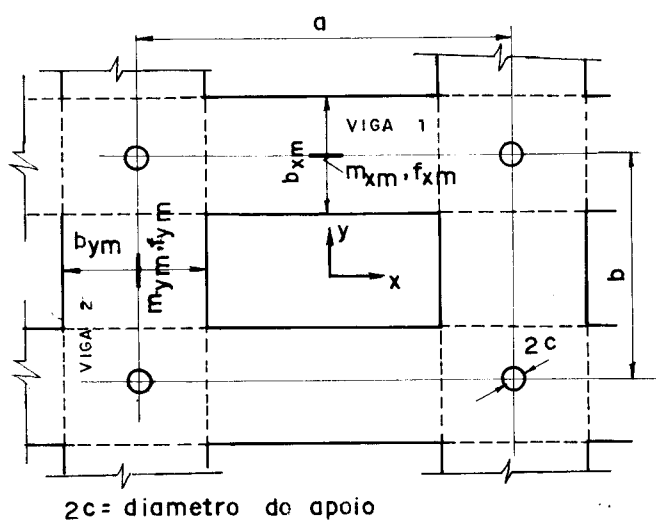
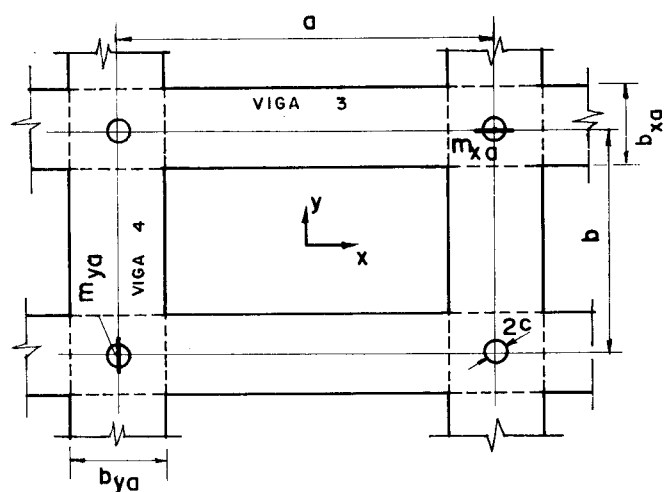


Fig. 24



- Momentos e flechas da laje (ref. [1], pg. 380-382) $v = 0$
(V.anexo).

$$m_{xm} = \beta_1 p a^2 \quad (47)$$

$$m_{ym} = \beta_2 p b^2 \quad (48)$$

$$m_{xa} = \beta_3 p a^2 \quad (49)$$

$$m_{ya} = \beta_4 p b^2 \quad (50)$$

$$f_{xm} = \beta_5 \frac{p a^4}{Eh^3} \quad (51)$$

$$f_{ym} = \beta_6 \frac{p b^4}{Eh^3} \quad (52)$$

Os coeficientes β_i ($i=1 \rightarrow 6$) estão tabelados em função de λ
(v. Tab. 4 e Tab. 6).

- Reação total de um pilar:

$$R = pab \quad (53)$$

3.1.1 - Cálculo das larguras efetivas b_{xm} e b_{ym} para momentos positivos

Admite-se, nesta fase de cálculo, que os momentos positivos independem das dimensões dos apoios (v. ref. [1], pg. 378 - v. anexo).

- Esquema da viga 1:

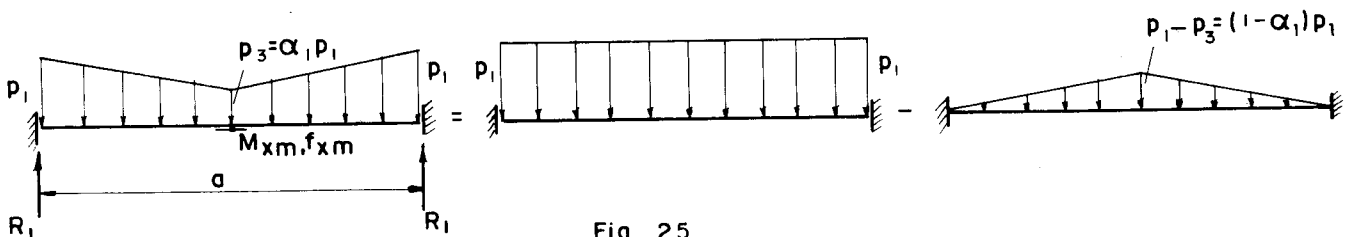


Fig. 25

- Momento e flecha no meio do vão:

$$\begin{aligned} M_{xm} &= \frac{p_1 a^2}{24} - \frac{(1-\alpha_1)p_1 a^2}{32} = \frac{(1+3\alpha_1)p_1 a^2}{96} \rightarrow m_{xm} = \\ &= \frac{(1+3\alpha_1)p_1 a^2}{96 b_{xm}} \end{aligned} \quad (54)$$

$$f_{xm} = \frac{p_1 a^4}{384EI_1} - \frac{7(1-\alpha_1)p_1 a^4}{3840EI_1} \quad (55)$$

onde

$$I_1 = \frac{b_{xm} h^3}{12} \quad (56)$$

Substituindo (56) em (55), chega-se a:

$$f_{xm} = \frac{(3+7\alpha_1)p_1 a^4}{320 E b_{xm} h^3} \quad (57)$$

- Impondo a igualdade da (54) com a (47), vem:

$$b_{xm} = \frac{(1+3\alpha_1)p_1}{96\beta_1 p} \quad (58)$$

- Impondo a igualdade da (57) com a (51), vem:

$$b_{xm} = \frac{(3+7\alpha_1)p_1}{320\beta_5 p} \quad (59)$$

- Igualando as equações (58) e (59), chega-se a:

$$\alpha_1 = \frac{9\beta_7 - 10}{30 - 21\beta_7} \quad \text{onde} \quad \beta_7 = \frac{\beta_1}{\beta_5} \quad (60)$$

- Reação de um pilar na viga 1:

$$R_1 = 0,25(1+\alpha_1)p_1 a \quad (61)$$

- Esquema da viga 2

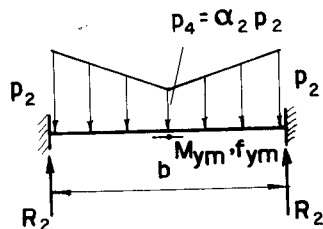


Fig. 26

Procedendo de forma análoga à viga 1, chega-se a:

$$M_{ym} = \frac{(1+3\alpha_2)p_2 b^2}{96} \rightarrow m_{ym} = \frac{(1+3\alpha_2)p_2 b^2}{96 b_{ym}} \quad (62)$$

$$f_{ym} = \frac{(3+7\alpha_2)p_2 b^4}{320 E b_{ym} h^3} \quad (63)$$

Impondo a igualdade da (62) com a (48), vem:

$$b_{ym} = \frac{(1+3\alpha_2)p_2}{96\beta_2 p} \quad (64)$$

Impondo a igualdade da (63) com a (53), vem:

$$b_{ym} = \frac{(3+7\alpha_2)p_2}{320\beta_6 p} \quad (65)$$

Igualando as equações (64) e (65), resulta:

$$\alpha_2 = \frac{9\beta_8 - 10}{30 - 21\beta_8} \quad \text{onde} \quad \beta_8 = \frac{\beta_2}{\beta_6} \quad (66)$$

- Reação de um pilar na viga 2:

$$R_2 = 0,25(1+\alpha_2)p_2 b \quad (67)$$

- Igualdade da somatória das reações do pilar nas vigas 1 e 2 com a reação total do pilar:

$$2(R_1 + R_2) = R \rightarrow R_1 + R_2 = \frac{R}{2} \quad (68)$$

Substituindo (61), (67) e (53) na (68), resulta:

$$0,25(1+\alpha_1)p_1 a + 0,25(1+\alpha_2)p_2 b = \frac{pab}{2} \quad (69)$$

Chamando $p_1 = kp_2$ (70) e substituindo em (69), tendo em vista que $a = \frac{b}{\lambda}$, vem:

$$p_2 \left[0,25(1+\alpha_1) \frac{k}{\lambda} + 0,25(1+\alpha_2) \right] = \frac{pb}{2\lambda} \quad (70)$$

Chamando, de maneira análoga ao item 2.2), de:

$$\alpha_5 = 0,25(1+\alpha_2) \quad \text{e} \quad \alpha_6 = 0,25(1+\alpha_1), \quad \text{a eq. (70)}$$

fica:

$$p_2 \left(\alpha_6 \frac{k}{\lambda} + \alpha_5 \right) = \frac{pb}{2\lambda} \quad (71)$$

- Determinação da variação de k com $\gamma = \frac{1}{\lambda} = \frac{a}{b}$

a) Por simetria, quando $\gamma = 1 \rightarrow k = 1$

b) Quando $\gamma \rightarrow 0$, a laje terá flexão somente na direção y

$$\text{Então } p_1 = p_3 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad p_2 = p_4 \rightarrow pa. \quad \text{Logo } k = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow 0$$

$$\text{e } b_{xm} = b_{xa} \rightarrow 0, \quad b_{ym} = b_{ya} \rightarrow a$$

c) Inversamente, quando $\gamma \rightarrow \infty$, a laje terá flexão somente na direção x . Daí, $p_2 = p_4 \rightarrow 0$ e $p_1 = p_3 \rightarrow p.b$ Logo

$$k = \frac{p_1}{p_2} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad b_{xm} = b_{xa} \rightarrow b, \quad b_{ym} = b_{ya} \rightarrow 0.$$

d) $k(\gamma)$, portanto, é uma função tal que:

$$k(0) = 0; \quad k(1) = 1; \quad k(\infty) = \infty, \quad k\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{k(\gamma)}$$

Genericamente pode-se ter: $k = \gamma^n$, onde $n > 0$.

Analogamente ao item (2.2), adota-se interpolação linear entre: $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$. Então $k = \gamma = \frac{1}{\lambda}$ (72)

Substituindo (72) em (71), tem-se:

$$p_2 \left(\alpha_5 + \frac{\alpha_6}{\lambda^2} \right) = \frac{pb}{2\lambda}. \text{ Chamando de } \alpha_7 = \alpha_5 + \frac{\alpha_6}{\lambda^2}, \text{ vem:}$$

$$p_2 = \frac{pb}{2\lambda\alpha_7} \quad (73)$$

Substituindo (73) em (70), chega-se a:

$$p_1 = \frac{pa}{2\lambda\alpha_7} \quad (74)$$

Nas equações (58) e (64), chamando de

$$\alpha_3 = \frac{1+3\alpha_1}{96} \text{ e } \alpha_4 = \frac{1+3\alpha_2}{96} \quad (75)$$

tem-se respectivamente:

$$b_{xm} = \frac{\alpha_3 p_1}{\beta_1 p} \text{ e } b_{ym} = \frac{\alpha_4 p_2}{\beta_2 p} \quad (76)$$

Substituindo (74) e (73) respectivamente nas (45), chega-se finalmente a:

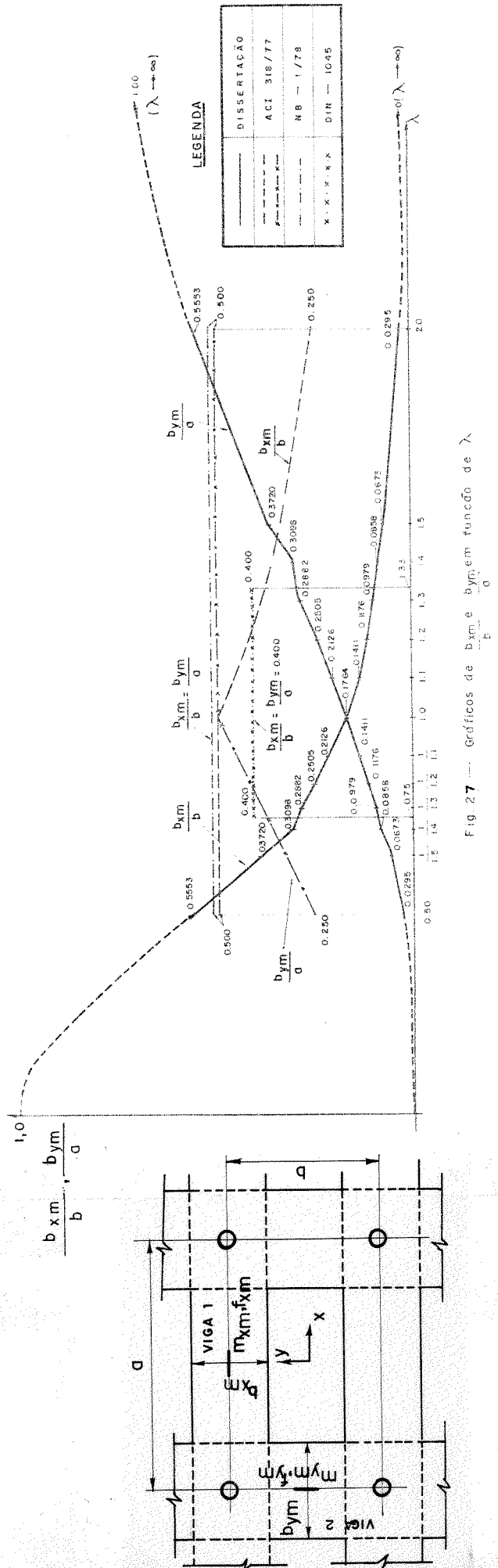
$$b_{xm} = \frac{\alpha_3}{2\beta_1\alpha_7\lambda^2} b \text{ e } b_{ym} = \frac{\alpha_4}{2\beta_2\alpha_7} a \quad (77)$$

Na tabela 4 apresenta-se o cálculo dos parâmetros auxiliares e os valores dos p_i ($i=1 \rightarrow 4$), b_{xm} e b_{ym} .

Na Fig. 27, traçam-se os gráficos de $\frac{b_{xm}}{b}$ e $\frac{b_{ym}}{b}$ em função de λ e os correspondentes valores prescritos pelo ACI 318-77, DIN 1045-1972 e NB-1/78.

TABELA 4 - PARÂMETROS AUXILIARES E CÁLCULO DOS p_i ($i=1 \rightarrow 4$), b_{xm} E b_{ym}

λ	β_1	β_2	β_5	β_6	β_7	α_1	α_3	β_8	α_2	α_4	α_7	$\frac{p_1}{p_a}$	$\frac{p_3}{p_a}$	$\frac{p_2}{p_b}$	$\frac{p_4}{p_b}$	$\frac{b_{xm}}{b}$	$\frac{b_{ym}}{a}$
1,0	0,0573	0,0573	0,0521	0,0521	1,0998	-0,0147	0,00996	1,0998	-0,0147	0,00996	0,4926	1,0150	-0,0149	1,0150	-0,0149	0,1764	0,1764
1,1	0,0620	0,0534	0,0570	0,0483	1,0877	-0,0294	0,00950	1,1056	-0,0073	0,01019	0,4488	1,0128	-0,0298	1,0128	-0,0079	0,1411	0,2126
1,2	0,0671	0,0503	0,0616	0,0451	1,0893	-0,0276	0,00955	1,1153	+0,0057	0,01059	0,4202	0,9916	-0,0274	0,9916	+0,0057	0,1176	0,2505
1,3	0,0725	0,0501	0,0663	0,0440	1,0935	-0,0225	0,00971	1,1386	+0,0407	0,01169	0,4048	0,9501	-0,0214	0,9501	+0,0387	0,0979	0,2882
1,4	0,0776	0,0476	0,0705	0,0421	1,1007	-0,0136	0,00999	1,1306	+0,0281	0,01129	0,3828	0,9330	-0,0127	0,9330	+0,0262	0,0858	0,3098
1,5	0,0831	0,0452	0,0765	0,0391	1,0863	-0,0311	0,00944	1,1560	+0,0706	0,01262	0,3753	0,8882	-0,0276	0,8882	+0,0627	0,0673	0,3720
2,0	0,1104	0,0422	0,1016	0,0347	1,0866	-0,0307	0,00946	1,2161	+0,2119	0,01704	0,3636	0,6876	-0,0211	0,6876	+0,1457	0,0295	0,5553



Conclusões

1) Da teoria de placa contínua quadrada sobre a poios deformáveis, ref. [19], pg. 77, sabe-se que: quando a relação H entre a rigidez da viga de apoio EI_v e a rigidez da placa aD for igual a 1,0, as cargas sobre as vigas serão uniformemente distribuídas (v. Fig. 28).

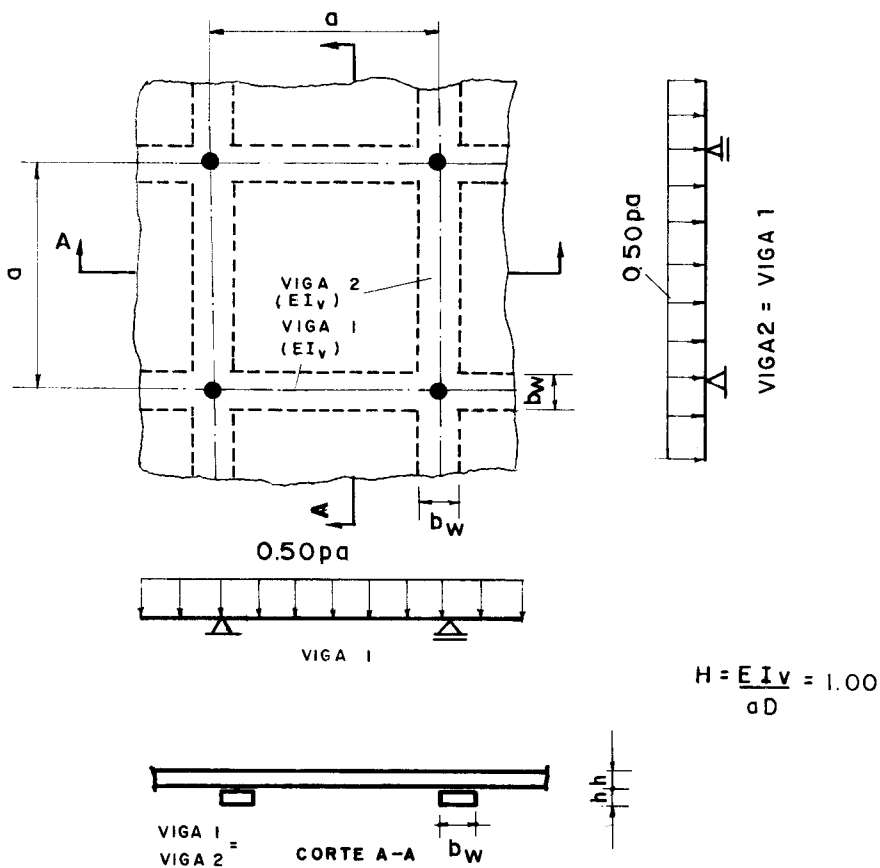


Fig. 28

Se as alturas das vigas forem iguais à da laje, tem-se:

$$I_v = \frac{b_w h^3}{12}$$

Para $\nu = 0$, a rigidez da placa fica $D = \frac{Eh^3}{12}$. Substituindo esses valores na equação de H acima, vem:

$$\frac{EI_v}{aD} = \frac{b_w}{a} = 1,00 \rightarrow b_w = a$$

isto é, a largura da viga de altura igual à da laje, para que a carga sobre a mesma seja uniforme é igual ao vão da laje.

No caso analisado anteriormente para painéis quadrados, a viga equivalente tem altura igual à da laje e largura $b_{xm} = b_{ym} = 0,1764 a \ll b_w = a$ (v. Tab.4), isto é, a viga equivalente não tem rigidez suficiente ($H = \frac{0,1764}{2} = 0,0882$) para que a carga sobre a mesma seja uniforme e muito menos, como no item 2.1.2, distribuindo portanto mais carga para os apoios e menos carga para os vãos. Isso confirma mais uma vez, a distribuição de cargas da Fig. 8, assumida para as vigas.

A rigor, não se assumiu a distribuição de cargas para as vigas equivalentes como na Fig. 29. A imposição de igualdade de momento e flecha no meio do vão entre apoios é que conduziu a $p_3 < p_1$, resultando semelhante à reação de laje contínua sobre vigas muito flexíveis.

A distribuição de cargas para as vigas em função de H resulta:

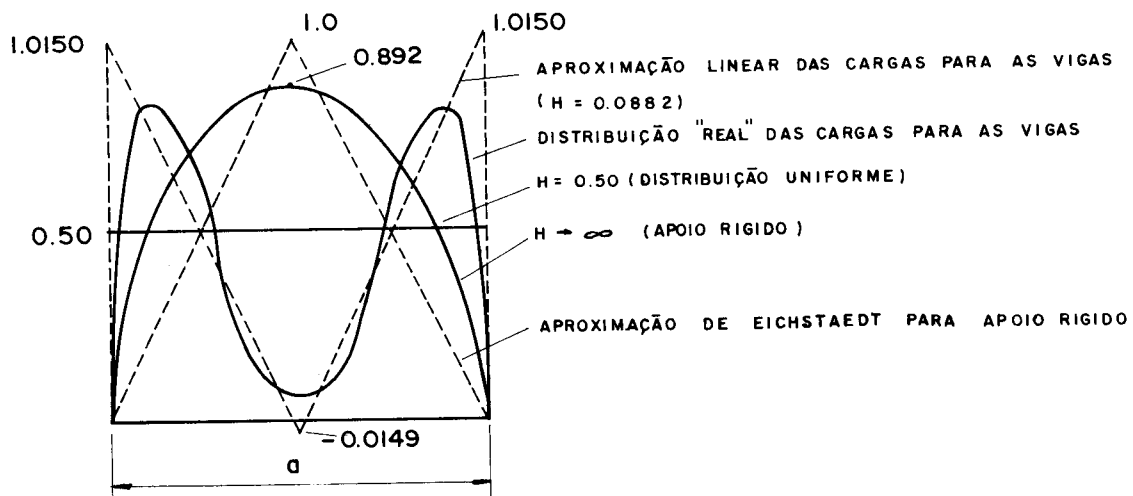


Fig. 29 - Valores de $\frac{p_i}{p_a}$

No cálculo anterior foi linearizado o diagrama de cargas para a viga equivalente de uma forma análoga feita por Eichstaedt para vigas rígidas (v. Fig. 29).

2) Comparando-se os resultados das cargas sobre as vigas equivalentes para painel contínuo quadrado (Fig. 25) com o caso do painel isolado quadrado (Fig. 11) com o dobro da carga tem-se:

	PAINEL CONTÍNUO	(PAINEL ISOLADO).2
$\frac{p_1}{pa}$	1,0150	0,8428
$\frac{p_3}{pa}$	-0,0149	0,1572

Tab. 5

Daí se conclui que, para o caso de painel contínuo, as cargas sobre as vigas equivalentes tendem a se concentrar ainda mais nos apoios do que no caso de painel isolado, como era de se esperar, devido a continuidade.

3) Os valores de α_1 e α_2 negativos calculados na Tab. 4, indicaria que estaria indo carga negativa para o meio do vão o que, fisicamente não ocorre. Esses valores negativos ocorrem porque, conforme admitido nas hipóteses iniciais, o diagrama de cargas lineares para as vigas são "equivalentes" aos diagramas reais que exibem um baixo valor dessa carga para o meio do vão, resultando um diagrama equivalente conforme mostrado na Fig. 29 (para painéis quadrados).

4) Os limites de $\frac{b}{a} \frac{x_m}{b}$ e $\frac{b}{a} \frac{y_m}{a}$ para $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ indicam a acurácia do método e das hipóteses adotadas, isto é, as larguras efetivas estão convergindo para aqueles limites, que foram calculados fisicamente.

3.1.2 - Cálculo das larguras efetivas b_{xa} e b_{ya} para momentos negativos

Os momentos negativos nos apoios variam com as dimensões do apoio. Logo, as larguras efetivas b_{xa} e b_{ya} também são funções das dimensões do apoio.

Para o cálculo dos momentos negativos pela teoria elástica das placas, as reações dos apoios foram assumidas uniformemente distribuídas ao longo da circunferência do apoio circular (ref. [1], pg. 377 - v. anexo), porque a laje ao fletir tem tendência a se levantar no centro do apoio, se apoiando então nas bordas desse apoio, ou ainda, segundo Leonhardt, vol. 2, pg. 114: "De ensaios em lajes de fundação sabe-se que a compressão no pilar concentra-se nas bordas".

- Esquema da viga 3 :

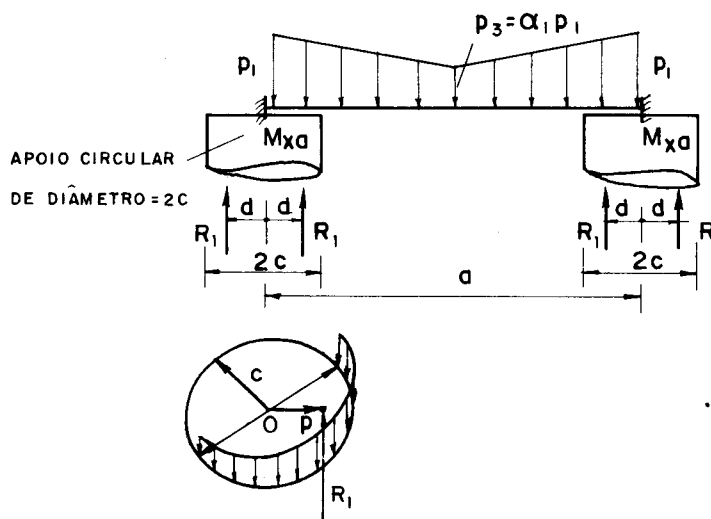


Fig. 30

p_1 ; p_3 : valores obtidos no item 3.1.1).

P : centro de gravidade das reações da metade direita do apoio, distribuídas uniformemente ao longo da semi-circunferência. Tem-se que: $\overline{OP} = d = 0,637 c$ (78)

Se os apoios são retangulares com dimensões u e v , essa dedução pode também ser utilizada para uma análise aproximada, substituindo tais apoios por apoios circulares

equivalentes de raio $c = 0,57t$, onde $t = \frac{u+v}{2}$ (ref. 1 , pg. 378 - v. anexo).

- Momento M_{xa} nos engastes da viga 3:

$$M_{xa} = \frac{p_1 a^2}{12} - \frac{5}{96}(1-\alpha_1)p_1 a^2 - \frac{R_1 d(a-d)}{a} \quad (79)$$

Chamando $n = \frac{d}{a}$ e substituindo em (79), tendo em vista (61), vem:

$$M_{xa} = \frac{p_1 a^2}{96} \left\{ 8 - 5(1-\alpha_1) - n[1-n] [48 - 24(1-\alpha_1)] \right\}$$

Fazendo $n(1-n) = r$, vem:

$$M_{xa} = \frac{p_1 a^2}{96} \left[(24r-5)(1-\alpha_1) + 8(1-6r) \right]$$

Chamando de c_1 a expressão entre colchetes, tem-se:

$$M_{xa} = \frac{c_1 p_1 a^2}{96} \rightarrow m_{xa} = \frac{c_1 p_1 a^2}{96 b_{xa}} \quad (80)$$

Impondo igualdade do momento por unidade de largura da viga (eq. 80), com o momento da laje (eq. 49), tem-se:

$$b_{xa} = \frac{p_1}{96} \frac{c_1}{3 \cdot p} \quad \text{ou} \quad b_{xa} = \frac{c_1}{96 \beta_3 \lambda} \cdot \frac{p_2}{p} \quad (81)$$

onde $\frac{p_2}{p}$ é dado por (73)

- Esquema da viga 4

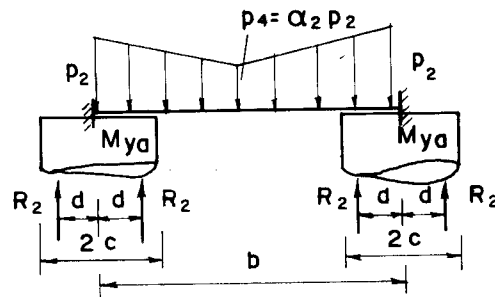


Fig. 31

$P_2 \cdot P_4$: valores obtidos no item 3.1.1)

Chamando de $m = \frac{d}{b}$ e $s = m(1-m)$ e procedendo de maneira análoga à viga 3, resulta:

$$b_{ya} = \frac{P_2}{96 \beta_4 p} c_2 \quad \text{onde} \quad c_2 = (24s-5)(1-\alpha_2) + 8(1-6s)$$

$$\text{ou } b_{ya} = \frac{\lambda c_2}{96 \beta_4} \frac{p_1}{p} \quad (82)$$

Na tabela 6 apresenta-se o cálculo dos parâmetros auxiliares, de b_{xa} e b_{ya} para λ variando de 1,0 a 2,0 e $\frac{c}{a}$ de 0,010 a 0,050.

Não foram calculadas as larguras efetivas para valores de $\frac{c}{a}$ maiores que 0,050 porque, a partir dessa relação a influência sobre os momentos fletores e flechas no meio do vão entre apoios não é desprezível (v. ref. 20), contrariamente ao admitido no item 3.1.1. Para $\frac{c}{a} > 0,050$ deveria-se tomar:

- a) momentos fletores e flechas no meio do vão entre apoios calculados em função de $\frac{c}{a}$.
- b) o esquema da viga equivalente para momentos positivos igual ao esquema para momentos negativos (v. Fig. 31).

Finalmente, na Fig. 32 desenham-se os gráficos de $\frac{b_{xa}}{b}$ e $\frac{b_{ya}}{a}$ em função de λ e de $\frac{c}{a}$ além dos correspondentes valores prescritos pelo ACI 318-77, DIN 1045-1972 e NB-1/78.

3.1.3 - Conclusões

Nos gráficos de $\frac{b_{xm}}{b}$, $\frac{b_{ym}}{a}$ e $\frac{b_{xa}}{b}$, $\frac{b_{ya}}{a}$ foram também desenhadas essas larguras efetivas atendendo às normas ACI-318/77, DIN 1045 e NB-1/78 (v. Fig. 27 e Fig. 32).

1) Da comparação com os resultados do presente trabalho, chegou-se às seguintes conclusões:

1.1) Larguras efetivas para momentos positivos (Fig. 27)

- ACI e NB-1/78: todos os valores prescritos por essas normas são bem maiores, com exceção das vizinhanças de $\lambda = 0,50$ e $\lambda = 2,00$, onde praticamente coincidem os valores de $\frac{b_{xm}}{b}$ e $\frac{b_{ym}}{a}$ respectivamente.

- DIN: todos os valores calculados por essa norma estão bem maiores.

1.2) Larguras efetivas para momentos negativos (Fig. 32)

- ACI e NB-1/78: todos os valores calculados por essas normas estão bem maiores para $\frac{c}{a} = 0,010$ e $0,020$.

Os valores prescritos de $\frac{b_{xa}}{b}$ para $0,5 \leq \lambda \leq \frac{1}{1,5}$ e de $\frac{b_{ya}}{a}$ para $1,5 \leq \lambda \leq 2,0$ são bem menores para $\frac{c}{a} = 0,040$ e $0,050$.

- DIN: os valores prescritos são bem maiores, com exceção de $\frac{b_{xa}}{b}$ nas vizinhanças de $\lambda = 0,75$ e $\frac{b_{ya}}{a}$ nas vizinhanças de $\lambda = 1,33$ onde praticamente coincidem para $\frac{c}{a} = 0,050$ e $0,040$.

Nas três normas, essas larguras independem das dimensões dos apoios, enquanto que no processo proposto chegou-se à conclusão que há dependência, isto é, as larguras efetivas aumentam com um acréscimo no diâmetro dos apoios.

2) Nas três normas, as larguras efetivas para momentos fletores positivos e negativos são independentes da relação entre os vãos, enquanto que no processo proposto chegou-se à conclusão de que há dependência.

3) Nas três normas, as larguras para momentos positivos e negativos são iguais, enquanto que no processo proposto, viu-se que não são.

4) Para $\lambda = 1$, a largura efetiva para momento positivo b_{xm} é maior do que a largura efetiva para momento ne

gativo b_{xa} para $\frac{c}{a} = 0,01 \rightarrow 0,05$ (v. Fog. 27 e 32). Isso parece ser lógico quando se vêm as linhas dos momentos principais de uma laje-cogumelo submetida a carga uniforme (Leonhardt, vol. 2, pg. 114), quando se nota que os momentos principais positivos no meio do vão entre os apoios se desenvolvem numa largura, ao passo que os momentos principais radiais negativos junto aos apoios desenvolvem-se em uma pequena largura, praticamente igual ao diâmetro do apoio.

5) Na Tabela 6 (continuação), o valor de $\frac{b_{ya}}{a}$ para $\lambda = 2$ e $\frac{c}{a} = 0,050$ deveria ser, no máximo igual à unidade. Então, pode-se concluir que, para esse valor de λ já se tem influência da dimensão do apoio no cálculo dos momentos fletores e flechas nos meios dos vãos entre apoios que iriam alterar os p_i e, conseqüentemente, b_{xa} e b_{ya} .

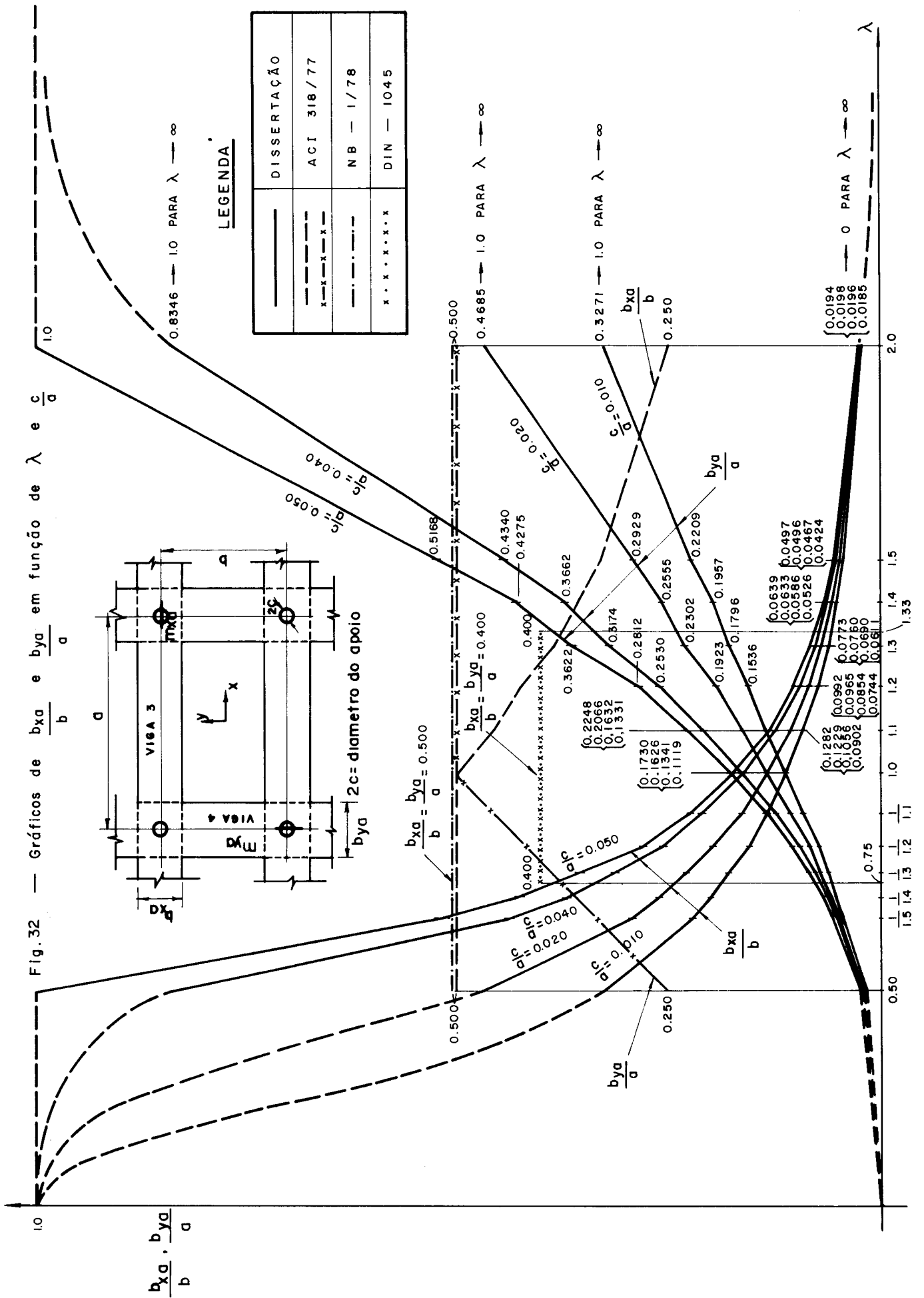
TABELA 6 - PARÂMETROS AUXILIARES E CÁLCULO DOS b_{xa} E b_{ya}

λ	$\alpha_1 = \alpha_2 = -0,0147$ $\left\{ \begin{array}{l} p_2/p = 1,0150 \\ p_1/p = 1,0150 \end{array} \right.$		$\alpha_1 = -0,0294; \alpha_2 = -0,0073$ $\left\{ \begin{array}{l} p_2/p = 1,0128 = p_1/p \\ p_1/p = 1,0128 = p_1/p \end{array} \right.$		$\alpha_1 = -0,0276; \alpha_2 = +0,0057$ $\left\{ \begin{array}{l} p_2/p = 0,9916 \\ p_1/p = 0,9916 \end{array} \right.$		$\alpha_1 = -0,0225; \alpha_2 = +0,0407$ $\left\{ \begin{array}{l} p_2/p = 0,9501 \\ p_1/p = 0,9501 \end{array} \right.$	
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,2	1,3	1,2	1,3
$\frac{c}{a}$	0,010	0,020	0,040	0,050	0,010	0,020	0,040	0,050
β_3	0,2624	0,2072	0,1521	0,1343	0,3140	0,2588	0,2037	0,1859
n	0,00637	0,01274	0,02548	0,03185	0,00637	0,01274	0,02548	0,03185
r	0,00633	0,01258	0,02483	0,03083	0,00633	0,01258	0,02483	0,03083
c_1	2,7768	2,6290	2,3393	2,1975	2,7143	2,5684	2,2825	2,1425
$\frac{b_{xa}}{b}$	0,1119	0,1341	0,1626	0,1730	0,0744	0,0854	0,0965	0,0992
$\frac{c}{b}$	0,010	0,020	0,040	0,050	0,0083	0,0167	0,0333	0,0417
ϵ_4	0,2624	0,2072	0,1521	0,1343	0,2341	0,1789	0,1238	0,1060
m	0,00637	0,01274	0,02548	0,03185	0,00531	0,01062	0,02123	0,02654
s	0,00633	0,01258	0,02483	0,03083	0,00528	0,01051	0,02078	0,02584
c_2	2,7768	2,6290	2,3393	2,1975	2,9010	2,7748	2,5269	2,4048
$\frac{b_{ya}}{a}$	0,1119	0,1341	0,1626	0,1730	0,1536	0,1923	0,2530	0,2812
								0,1796
								0,2302
								0,3174
								0,3622

continua ...

TABELA 6

λ	$\lambda_1 = -0,0136; \lambda_2 = +0,0281$ $\rho_2/\rho = \rho_1/\rho = 0,9330$			$\lambda_1 = -0,0311; \lambda_2 = +0,0704$ $\rho_2/\rho = \rho_1/\rho = 0,8882$			$\lambda_1 = -0,0397; \lambda_2 = +0,2119$ $\rho_2/\rho = \rho_1/\rho = 0,6876$		
	1,4	1,5	2,0	1,4	1,5	2,0	1,4	1,5	2,0
$\frac{b}{a}$	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010
β_1	0,3672	0,3922	0,5216	0,2819	0,3370	0,4664	0,2641	0,3935	0,5216
α	0,00637	0,00637	0,00637	0,02548	0,02548	0,02548	0,03185	0,03185	0,03185
r	0,00633	0,00633	0,00633	0,02483	0,02483	0,02483	0,03083	0,03083	0,03083
c_1	2,7821	2,6973	2,6902	2,3442	2,5520	2,2689	2,1276	2,5538	2,1293
$\frac{b}{a} - \frac{c_1}{a}$	0,0526	0,0424	0,0185	0,0633	0,0467	0,0496	0,0497	0,0198	0,0194
ρ_1	0,0072	0,0066	0,005	0,01429	0,0133	0,0267	0,0333	0,010	0,025
ρ_2	0,2106	0,2038	0,1737	0,1554	0,1486	0,0935	0,0757	0,1185	0,0456
τ	0,00455	0,00425	0,00319	0,01820	0,00849	0,01690	0,02123	0,00637	0,01592
θ	0,00453	0,00423	0,00318	0,01787	0,00842	0,01670	0,02078	0,00633	0,01567
c_2	3,0287	3,2443	3,3670	2,9179	3,1367	2,9239	2,8101	3,8754	3,6037
$\frac{b}{a} - \frac{c_2}{a}$	0,1957	0,2209	0,3271	0,2555	0,2929	0,4340	0,5163	0,4685	1,1321

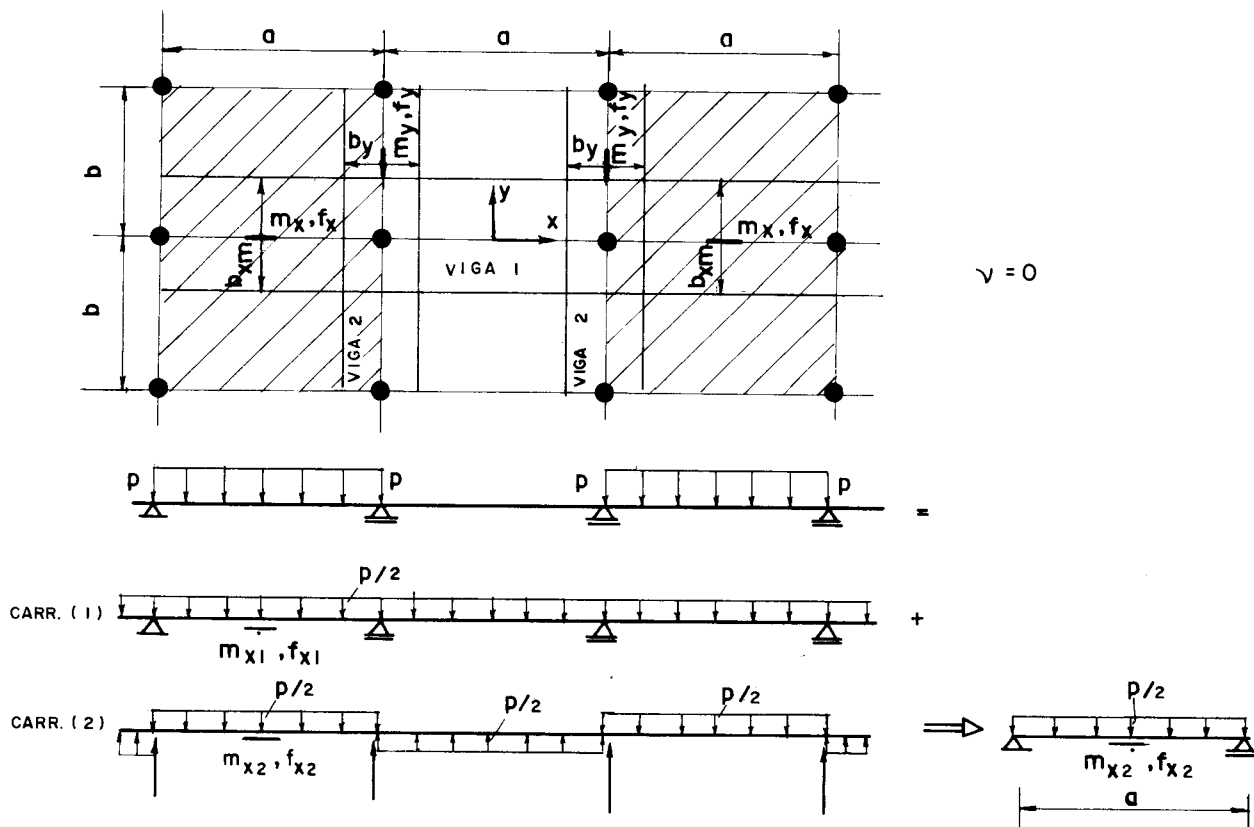


3.2 - PAINEL INTERNO - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA EM FAIXAS ALTERNADAS

Esse carregamento fornece os momentos positivos máximos nos vãos.

3.2.1 - Carregamento para momento máximo positivo na direção x

- Esquema da laje



Carga uniformemente distribuída aplicada na área toda da laje causa as condições mais desfavoráveis nas colunas somente.

Para calcular os momentos fletores máximos m_x no meio dos vãos entre apoios, a carga deve ser distribuída como na Fig. 33.

A solução para este caso de carregamento é obtida pela combinação de carga uniformemente distribuída $\frac{p}{2}$ sobre a área toda (carr. 1) com a carga $\frac{p}{2}$ (carr. 2) que troca de sinal algébrico na transição para o painel adjacente. A superfície elástica no segundo caso é evidentemente similar àquela de uma faixa de laje simplesmente apoiada tendo uma carga uniformemente distribuída $\frac{p}{2}$ (v. Fig. 33).

- Momentos e flechas da laje:

$$m_x = m_{x1} + m_{x2} \quad (83)$$

m_{x1} é o momento no meio do vão entre apoios de um painel interno de laje cogumelo com carga uniformemente distribuída $p/2$ em todos os painéis (v. item 3.1).

Da equação (47), vem:

$$m_{x1} = \frac{\beta_1}{2} pa^2 \quad (84)$$

m_{x2} é o momento no meio do vão de uma faixa infinita de laje de vão = a , sujeita a carga uniformemente distribuída $\frac{p}{2}$:

Logo
$$m_{x2} = \frac{pa^2}{16} \quad (85)$$

Substituindo (84) e (85) em (83) e chamando de

$$\beta_9 = \frac{\beta_1}{2} + \frac{1}{16}, \text{ chega-se à: } m_x = \beta_9 pa^2 \quad (86)$$

Analogamente para as flechas, tem-se:

$$f_x = f_{x1} + f_{x2} \quad (87)$$

Da equação (51), vem:

$$f_{x1} = \frac{\beta_5}{2} \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (88)$$

$$f_{x2} = \frac{5 \cdot p/2 \cdot a^4}{384 \frac{Eh^3}{12}} = \frac{5}{64} \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (89)$$

Substituindo (88) e (89) em (87) e chamando de

$$\beta_{10} = \frac{\beta_5}{2} + \frac{5}{64}, \text{ resulta: } f_x = \beta_{10} \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (90)$$

- Reação de um pilar:

$$R = \frac{pab}{2} \quad (91)$$

3.2.1.1 - Viga equivalente na direção x: Viga 1

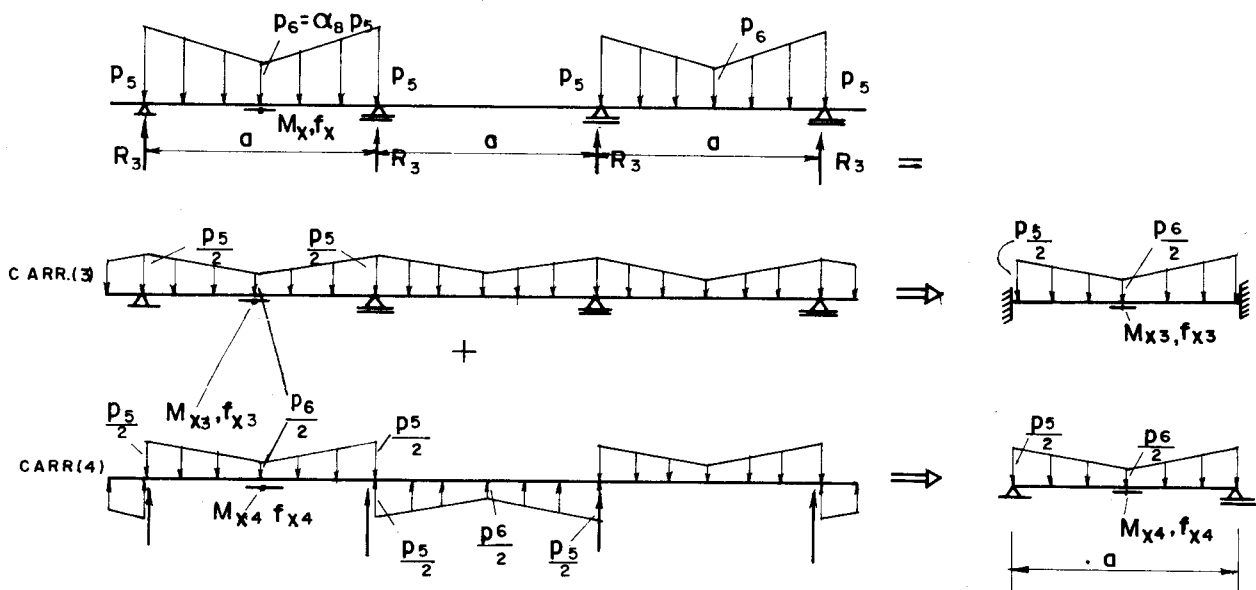


Fig. 34

Analogamente ao que se fez para a laje, a solução nesse caso também é obtida pela combinação de meia carga sobre todos os vãos (Carr. 3) com a meia carga (Carr. 4) que troca de sinal algébrico na transição para o vão adjacente. A linha elástica no segundo caso é similar àquela de uma viga simplesmente apoiada tendo meia carga distribuída como na Fig. 34.

- Momento e flecha no meio do vão carregado da viga 1:

$$M_x = M_{x3} + M_{x4} \quad (92)$$

$$M_{x3} = \frac{p_5 a^2}{48} - \frac{(1-\alpha_8) p_5 a^2}{64} \quad (93)$$

$$M_{x4} = \frac{p_5 a^2}{16} - \frac{(1-\alpha_8) p_5 a^2}{24} \quad (94)$$

Substituindo (93) e (94) em (92), resulta:

$$M_x = \frac{p_5 a^2}{12} - \frac{11(1-\alpha_8) p_5 a^2}{192} \rightarrow$$
$$m_x = [16-11(1-\alpha_8)] \frac{p_5 a^2}{192 b_{xm}} \quad (95)$$

Analogamente:

$$f_x = f_{x3} + f_{x4} \quad (96)$$

$$f_{x3} = \left[\frac{1}{32} - \frac{7}{320}(1-\alpha_8) \right] \frac{p_5 a^4}{2Eb_{xm} h^3} \quad (97)$$

$$f_{x4} = \left[\frac{5}{32} - \frac{1}{10}(1-\alpha_8) \right] \frac{p_5 a^4}{2Eb_{xm} h^3} \quad (98)$$

Substituindo (97) e (98) em (96), resulta:

$$f_x = [60-39(1-\alpha_8)] \frac{p_5 a^4}{640Eb_{xm} h^3} \quad (99)$$

- Impondo a igualdade da equação (95) com a (86), vem:

$$b_{xm} = \frac{[16-11(1-\alpha_8)] p_5}{192 \beta_9 p} \quad (100)$$

- Impondo a igualdade da equação (99) com a (90), vem:

$$b_{xm} = \frac{[60-39(1-\alpha_8)]}{640\beta_{10}} \frac{p_5}{p} \quad (101)$$

- Igualando as equações (100) e (101), chega-se a:

$$\alpha_8 = \frac{63\beta_{11}-50}{110-117\beta_{11}} \quad (102)$$

onde

$$\beta_{11} = \frac{\beta_9}{\beta_{10}}$$

- Reação total de um pilar na viga 1:

A reação de um pilar é igual à reação devido ao carregamento 3 já que o carregamento 4 é antimétrico, portanto, com reação nula.

$$R_3 = 2 \cdot \frac{p_5 a}{2} [0,25(1+\alpha_8)] \quad (103)$$

$$\text{Chamando de } \alpha_9 = 0,25(1+\alpha_8) \quad (104)$$

$$\text{vem } R_3 = \alpha_9 p_5 a \quad (105)$$

3.2.1.2 - Viga equivalente na direção y (Viga 2)

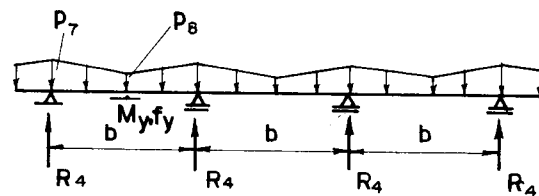


Fig. 35

O único carregamento que solicita a viga 2 na direção y é o carregamento (1) (v. Fig. 33). Então essa viga é idêntica à viga 2 do item 3.1 com meia carga; Daí se conclui;

$$p_7 = \frac{p_2}{2} \quad ; \quad p_8 = \alpha_2 p_7 \quad (106)$$

e

$$m_y = \frac{\beta_2}{2} p b^2 \quad ; \quad f_y = \frac{\beta_6}{2} \frac{p b^4}{E h^3} \quad (107)$$

A largura efetiva b_y é dada pela equação (76) com $\frac{p}{2}$ no lugar de p e p_7 no lugar de p_2 .

Logo,
$$b_y = \frac{\alpha_4}{\beta_2} \cdot \frac{p_7}{\frac{p}{2}} = \frac{\alpha_4}{\beta_2} \cdot \frac{\frac{p_2}{2}}{\frac{p}{2}} = \frac{\alpha_4 p_2}{\beta_2 p} = b_{ym} \quad \text{da eq. (76)}$$

- Reação total de um pilar na viga 2:

$R_4 = R_2$ da eq. (67) porque R_2 refere-se somente a um vão da viga, isto é:

$$R_4 = \frac{1}{2}(2 \cdot R_2) \quad \text{logo} \quad R_4 = \alpha_5 p_2 b \quad (108)$$

3.2.1.3 - Reação total de um pilar

$$R = R_3 + R_4 \quad (109)$$

Substituindo (103) e (108) em (109), resulta:

$$R = \alpha_9 p_5 a + \alpha_5 p_2 b \quad (110)$$

- Impondo a igualdade da (110) com a (91), tem-se:

$$\alpha_9 p_5 a + \alpha_5 p_2 b = \frac{pab}{2} \quad (111)$$

Dividindo e multiplicando o 2º termo do 1º membro da eq. (111) por pb e substituindo b por λa , vem:

$$\alpha_9 p_5 a + \alpha_5 \left(\frac{p_2}{pb}\right) \lambda^2 a^2 p = \frac{\lambda a^2}{2} p \quad (112)$$

O coeficiente $\left(\frac{p_2}{pb}\right)$ já está calculado na tabela 4. Chamando de $\alpha_{10} = \lambda^2 \alpha_5 \left(\frac{p_2}{pb}\right)$ e substituindo na (112), resulta:

$$p_5 = \frac{(\lambda - 2\alpha_{10})}{2\alpha_9} pa \quad (113)$$

Na equação (100), dividindo e multiplicando por a e substituindo a por $\frac{b}{\lambda}$ resulta finalmente:

$$b_{xm} = \frac{5 + 11\alpha_8}{192\lambda\beta_9} \left(\frac{p_5}{pa}\right) pb \quad (114)$$

3.2.2 - Carregamento para momento máximo positivo na direção y

- Esquema da laje

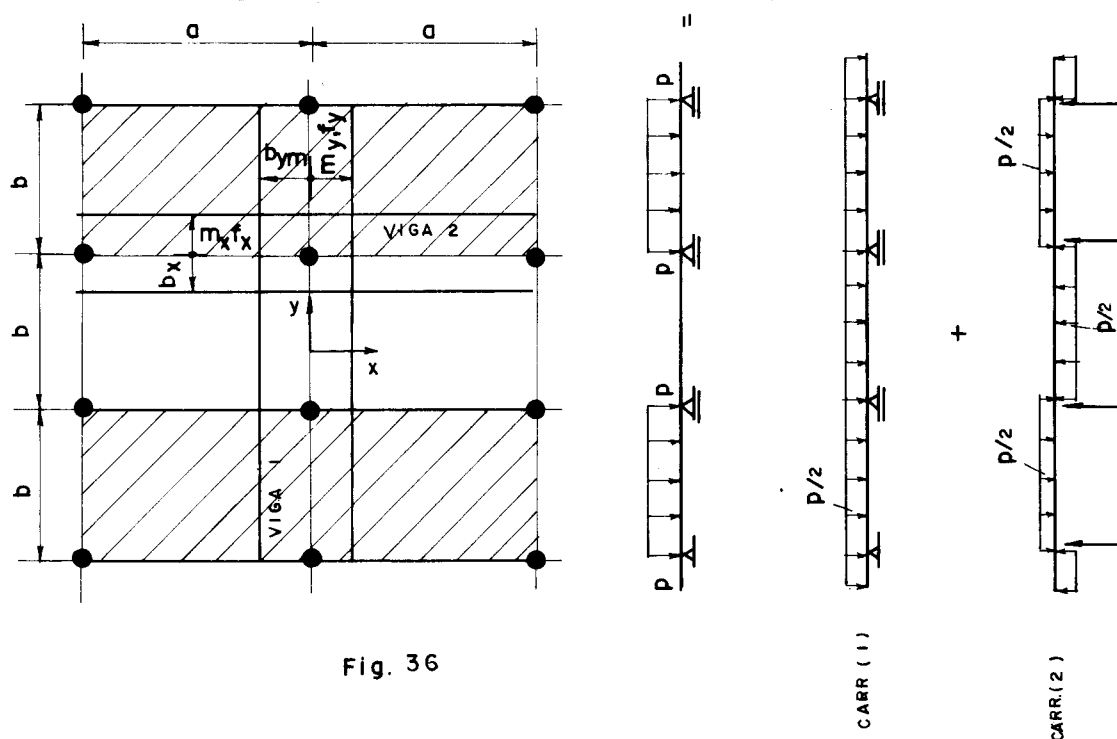


Fig. 36

Analogamente ao item anterior, tem-se:

$$m_y = \beta_{12} p b^2 \quad (115)$$

onde

$$\beta_{12} = \frac{\beta_2}{2} + \frac{1}{16}$$

$$f_y = \beta_{13} \frac{p b^4}{E h^3} \quad (116)$$

onde

$$\beta_{13} = \frac{\beta_6}{2} + \frac{5}{64}$$

- Reação de um pilar

$$R = p a b / 2 \quad (117)$$

3.2.2.1 - Viga equivalente na direção y (viga 1)

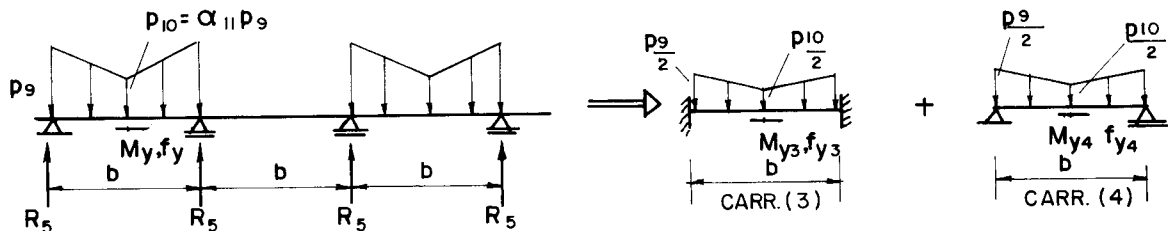


Fig. 37

- Impondo igualdade do momento M_y por unidade de largura da viga 1 com a (115), resulta:

$$b_{ym} = \frac{[16-11(1-\alpha_{11})]}{192\beta_{12}} \frac{p_9}{p} \quad (118)$$

- Impondo igualdade da flecha f_y da viga 1 com a (116), resulta:

$$b_{ym} = \frac{[60-39(1-\alpha_{11})]}{640\beta_{13}} \frac{p_9}{p} \quad (119)$$

- Igualando as equações (118) e (119), chega-se a:

$$\alpha_{11} = \frac{63\beta_{14}-50}{110-117\beta_{14}} \quad \text{onde} \quad \beta_{14} = \frac{\beta_{12}}{\beta_{13}}$$

- Reação total de um pilar na viga 1:

$$R_5 = \alpha_{12} p_9 b \quad (120)$$

onde $\alpha_{12} = 0,25(1+\alpha_{11})$

3.2.2.2 - Viga equivalente na direção x (viga 2)

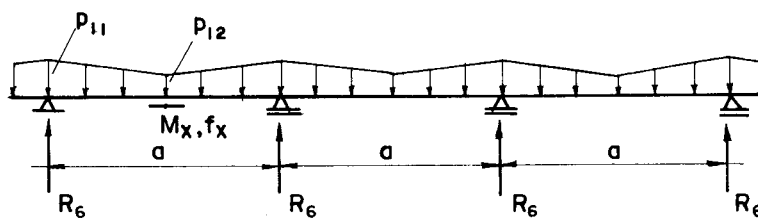


Fig. 38

O único carregamento que solicita a viga 2 na direção x é o carregamento (1) (v. Fig. 36). Então essa viga é idêntica à viga 1 do item 3.1 com meia carga.

Daí se conclui:

$$p_{11} = \frac{p_1}{2} \quad ; \quad p_{12} = \alpha_1 p_{11} \quad (121)$$

$$e \quad m_x = \frac{\beta_1}{2} p a^2 \quad ; \quad f_x = \frac{\beta_5}{2} \frac{p a^4}{E h^3} \quad (122)$$

Fazendo analogamente ao item anterior, chega-se a:

$$b_x = b_{xm} \quad \text{da eq. (76)}$$

Reação total de um pilar na viga 2:

$$R_6 = R_1 = \alpha_6 p_1 a \quad (123)$$

3.2.2.3 - Reação total de um pilar

$$R = R_5 + R_6 \quad (124)$$

Substituindo (120) e (123) em (124), resulta:

$$R = \alpha_{12} p_9 b + \alpha_6 p_1 a \quad (125)$$

- Impondo igualdade da (125) com a (117), tem-se:

$$\alpha_{12} p_9 b + \alpha_6 p_1 a = \frac{p a b}{2} \quad (126)$$

Dividindo e multiplicando o 2º termo do 1º membro da equação (126) por $p \cdot a$ e substituindo a por $\frac{b}{\lambda}$, resulta:

$$\alpha_{12} p_9 b + \alpha_6 \left(\frac{p_1}{p a}\right) \frac{b^2}{\lambda^2} p = \frac{p b^2}{2 \lambda} \quad (127)$$

O coeficiente $\left(\frac{p_1}{p a}\right)$ já está calculado na Tabela 2. Chamando de $\alpha_{13} = \frac{\alpha_6}{\lambda^2} \left(\frac{p_1}{p a}\right)$ e substituindo na (127), resulta:

$$p_9 = \frac{\left(\frac{1}{2\lambda} - \alpha_{13}\right)}{\alpha_{12}} p_b \quad (128)$$

Na equação (118) dividindo e multiplicando por b e substituindo b por λa , resulta finalmente:

$$b_{ym} = \frac{\lambda(5+11\alpha_{11})}{192\beta_{12}} \left(\frac{p_9}{p_b}\right) p_a \quad (129)$$

Na Tab. 7 calculam-se os parâmetros auxiliares, p_i ($i=5,9$), b_{xm} e b_{ym} para λ de 1,0 a 2,0.

Na Fig. 39 traçam-se os gráficos de $\frac{b_{xm}}{b}$ e $\frac{b_{ym}}{a}$ em função de λ , além dos correspondentes valores prescritos pelo ACI 318-77, DIN 1045-1972 e NB-1/78.

3.2.3 - Conclusões

1) Da comparação com os resultados do presente trabalho, chegou-se às seguintes conclusões:

- ACI: para $0,50 \leq \lambda \leq 1,0$ os valores prescritos de $\frac{b_{xm}}{b}$ são bem menores enquanto que os de $\frac{b_{ym}}{a}$ são maiores; para $1,0 \leq \lambda \leq 2,0$ a situação se inverte.

- NB-1/78: para $0,50 \leq \lambda \leq 1,0$ os valores prescritos de $\frac{b_{xm}}{b}$ são bem menores enquanto que os de $\frac{b_{ym}}{a}$ são bem maiores; para $1,0 \leq \lambda \leq 2,0$ a situação se inverte.

- DIN 1045: para $0,75 \leq \lambda \leq 1,0$ os valores prescritos de $\frac{b_{xm}}{b}$ são bem menores enquanto que os de $\frac{b_{ym}}{a}$ são maiores; para $1,0 \leq \lambda \leq 1,33$ a situação se inverte.

2) Os limites de $\frac{b_{xm}}{b}$ e $\frac{b_{ym}}{a}$ para $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ indicam a acurácia do processo e das hipóteses adotadas, isto é, as larguras efetivas estão convergindo para aqueles limites que foram calculados fisicamente.

3) As larguras efetivas para o carregamento em faixas alternadas são bem maiores do que para o caso de carregamento total (v. Fig. 27 e 39).

TABELA 7 - PARÂMETROS AUXILIARES E CÁLCULO DOS p_i (i=5,9), b_{xm} E b_{ym}

λ	α_9	β_{10}	α_8	α_9	α_5	$\frac{P_2}{P_0}$	α_{10}	$\frac{F_5}{P_0}$	$\frac{b_{xm}}{b}$	β_{12}	β_{13}	β_{14}	α_{11}	α_{12}	α_6	$\frac{P_1}{P_0}$	α_{13}	$\frac{P_0}{P_0}$	$\frac{b_{ym}}{a}$
1,0	0,0912	0,1042	0,6766	0,4192	0,2463	1,0150	0,2500	0,5964	0,4238	0,0912	0,1042	0,8752	0,6766	0,4192	0,2463	1,0150	0,2500	0,5964	0,4238
1,1	0,0935	0,1066	0,7127	0,4282	0,2482	1,0128	0,3042	0,5740	0,3732	0,0892	0,1023	0,8719	0,6179	0,4045	0,2006	1,0128	0,1679	0,7086	0,5369
1,2	0,0961	0,1089	0,8286	0,4572	0,2514	0,9916	0,3590	0,5271	0,3360	0,0877	0,1007	0,8709	0,6005	0,4001	0,1688	0,9916	0,1162	0,7510	0,6211
1,3	0,0988	0,1113	0,9649	0,4912	0,2602	0,9501	0,4178	0,4727	0,2993	0,0876	0,1001	0,8751	0,6745	0,4186	0,1446	0,9501	0,0913	0,7246	0,6956
1,4	0,1013	0,1134	1,1447	0,5362	0,2570	0,9330	0,4700	0,4289	0,2771	0,0863	0,0992	0,8700	0,5852	0,3963	0,1258	0,9330	0,0599	0,7500	0,7248
1,5	0,1041	0,1164	1,1826	0,5457	0,2677	0,8882	0,5350	0,3940	0,2367	0,0851	0,0977	0,8710	0,6027	0,4007	0,1076	0,8882	0,0425	0,7258	0,7749
2,0	0,1177	0,1289	2,3771	0,8443	0,3030	0,6876	0,8334	0,1973	0,1360	0,0836	0,0955	0,8754	0,6795	0,4199	0,0600	0,6876	0,01042	0,5706	0,8869

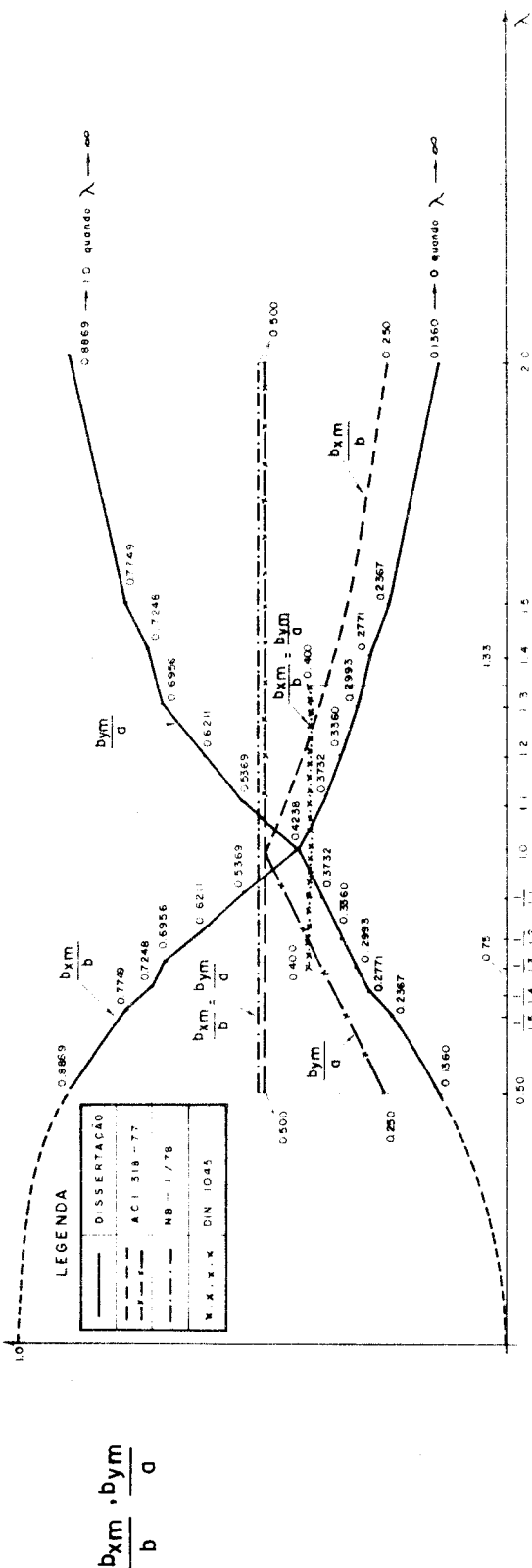


Fig 39 - Gráficos de b_{xm} e b_{ym} em função de λ

3.3 - ROTEIRO DE CÁLCULO

O roteiro que segue foi feito para lajes-cogumelo contínuas, com flexão em duas direções.

1) Dados fornecidos:

- dimensões do painel típico: $a \times b$
- diâmetro do apoio circular equivalente = $2c$
restrição: $\frac{c}{a}, \frac{c}{b} < 0,050$
- carga total uniformemente distribuída aplicada à laje: p

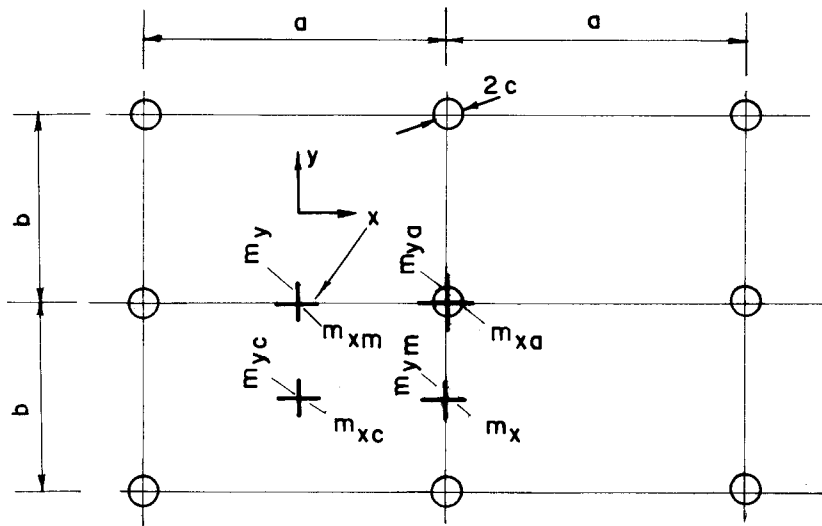


FIG. 40

2) Cálculo das larguras efetivas e momentos fletores.

2.1) Carga uniformemente distribuída em todos os painéis

Larguras efetivas:

- para momentos positivos no meio dos vãos entre apoios:

Tabela 4: $\lambda \rightarrow \frac{b_{xm}}{b}, \frac{b_{ym}}{a}$

- para momentos negativos no centro dos apoios:

Tabela 6: $\lambda, \frac{c}{a} \rightarrow \frac{b_{xa}}{b}, \frac{b_{ya}}{a}$

Momentos fletores na laje:

- positivos no meio dos vãos entre apoios:

Tabela 4: $\lambda \rightarrow \beta_1 = \frac{m_{xm}}{pa}, \beta_2 = \frac{m_{ym}}{pb^2}$

- positivos no centro do painel:

Anexo, ref. 1, Tab. 1.119: $\lambda \rightarrow \frac{m_{xc}}{pa}, \frac{m_{yc}}{pb^2}$ (no anexo a notação é: $\frac{M_{xs}}{qa}, \frac{M_{ys}}{qb}$ respectivamente)

- negativos no centro dos apoios:

Tabela 6: $\lambda, \frac{c}{a} \rightarrow \beta_3 = \frac{m_{xa}}{pa}, \beta_4 = \frac{m_{ya}}{pb^2}$

- negativos no meio dos vãos entre apoios:

Anexo, ref. 1, tab. 1.119 $\rightarrow \frac{m_x}{pa}, \frac{m_y}{pb^2}$

(no anexo, a notação é $\frac{M_{x2}}{qa}, \frac{M_{y1}}{qb^2}$ respectivamente)

Gráfico da variação dos momentos fletores positivos e negativos

- na direção y:

Momentos fletores positivos

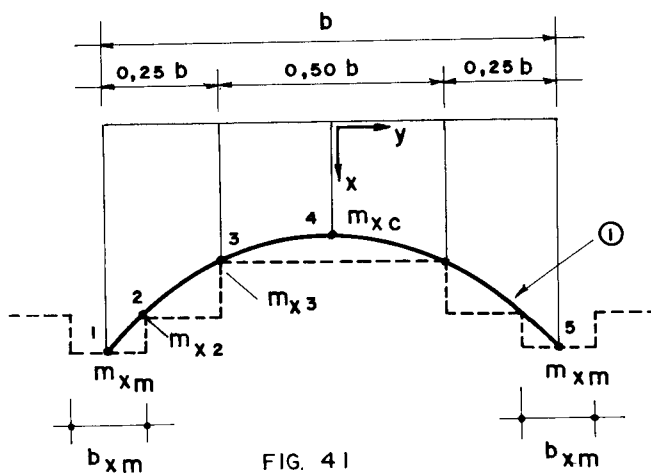


FIG. 41

A parábola (1) deve passar pelos pontos 1, 4 e 5. Desse modo, calculam-se os momentos nos pontos 2 e 3. Assim tem-se 3 faixas distintas de armadura positiva: a faixa de apoio com largura b_{xm} e momento m_{xm} , a faixa central com

largura $0,50b$ e momento m_{x3} e a faixa intermediária com largura $(0,25b - 0,50 b_{xm})$ e momento m_{x2} .

- momentos fletores negativos:

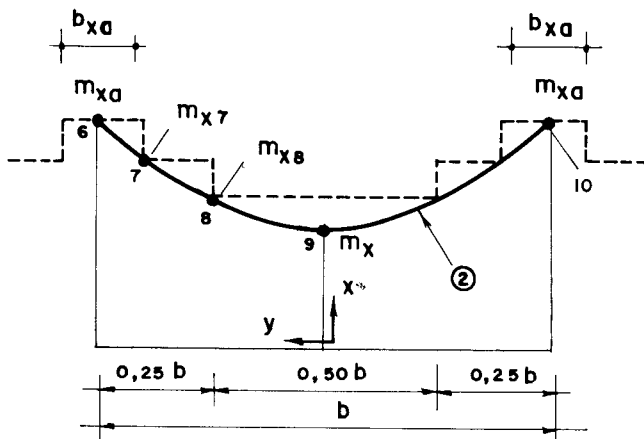


FIG. 42

Analogamente a parábola (2) deve passar pelos pontos 6, 9 e 10. Assim tem-se também 3 faixas distintas de armadura negativa: a faixa de apoio com largura b_{xa} e momento m_{xa} , a faixa central com largura $0,50b$ e momento m_{x8} e a faixa intermediária com largura $(0,25b - 0,50 b_{xa})$ e momento m_{x7} .

- na direção x

Analogamente na direção x , traça-se a variação dos momentos fletores m_y com esse eixo e a respectiva cobertura do diagrama de momentos.

2.2 - Carga uniformemente distribuída em faixas alternadas: (provoca máximo momento positivo).

Larguras efetivas:

- Para momentos positivos no meio dos vãos entre apoios:

Tabela 7: $\lambda \rightarrow \frac{b_{xm}}{b}, \frac{b_{ym}}{a}$

Momentos fletores positivos na laje:

- no meio dos vãos entre apoios:

Tabela 7: $\lambda \rightarrow \beta_9 = \frac{m_{xm}}{pa^2}$, $\beta_{12} = \frac{m_{ym}}{pb^2}$

- no centro do painel:

$\frac{m_{xc}}$

Na Fig. 33, o carregamento alternado foi decomposto em (1) + (2)

Então $m_{xc} = m_{xc}(\text{carr. 1}) + m_{xc}(\text{carr. 2})$

Anexo, ref. 1, Tab. 1.119: $\lambda \rightarrow \frac{m_{xc}}{pa^2}(\text{carr. 1})$

$m_{xc}(\text{carr. 2}) = \frac{p}{2} \cdot \frac{a^2}{8}$

$\frac{m_{yc}}$

Analogamente $m_{yc} = m_{yc}(\text{carr. 1}) + m_{yc}(\text{carr. 2})$ da Fig. 36.

Anexo, ref. 1, Tab. 1.119: $\lambda \rightarrow \frac{m_{yc}}{pb^2}(\text{carr. 1})$

$M_{yc}(\text{carr. 2}) = \frac{p}{2} \cdot \frac{b^2}{8}$

Gráfico da variação dos momentos fletores positivos:

- na direção y

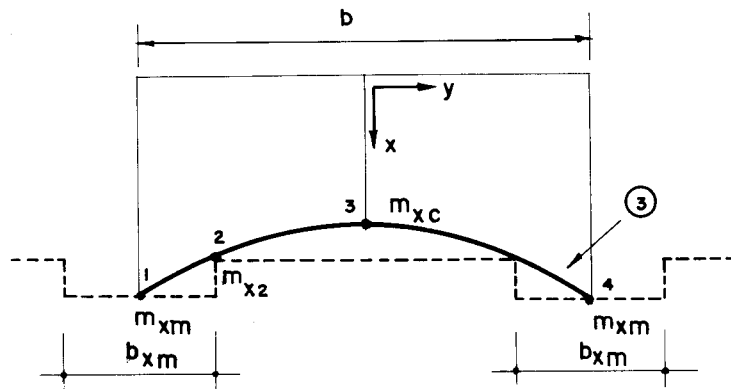


FIG. 43

A parábola 3 deve passar pelos pontos 1, 3 e 4. Desse modo calcula-se o momento no ponto 2. Assim tem-se 2

faixas distintas de armadura positiva: a faixa de apoio com largura b_{xm} e momento m_{xm} e a faixa central com largura $(b-b_{xm})$ e momento m_{x2} .

- na direção x :

Analogamente na direção x , traça-se a variação dos momentos fletores m_y com esse eixo e a respectiva cobertura do diagrama de momentos.

CAPÍTULO 4

LAJE ISOLADA RETANGULAR COM UMA BORDA SIMPLEMENTE APOIADA
E A BORDA OPOSTA SOBRE APOIOS PUNTIFORMES

- Esquema da laje

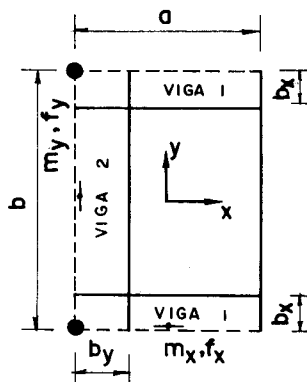


Fig. 44

Essa laje é uma aproximação do painel de borda simplesmente apoiado na borda, para larguras efetivas referentes a momentos positivos.

Não existe bibliografia completa (com cálculo de momentos e flechas principalmente) para painéis de borda de uma laje cogumelo contínua, conforme comentado na ref. [12], pg. 92. Isso implicou num método aproximado.

- Momentos e flechas da laje (Ref. [1], pg. 96 : $v = 0$ v. anexo):

$$m_x = \beta_1 pa^2 \quad (130)$$

$$m_y = \beta_2 pb^2 \quad (131)$$

$$f_x = \beta_3 \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (132)$$

$$f_y = \beta_4 \frac{pb^4}{Eh^3} \quad (133)$$

Os coeficientes β_1 , β_2 , β_3 e β_4 estão tabelados em função de λ (V. Tab. 8).

- Reação total de um pilar:

$$R = \beta_7 pab \quad (134)$$

- Os esquemas estáticos das vigas 1 e 2 são respectivamente iguais aos das vigas 1 e 2 do item 2.2. Então, impondo igualdades de momentos e flechas das vigas com os respectivos momentos e flechas da laje, chega-se a:

$$\alpha_1 = \frac{20-27\beta_5}{48\beta_5-40} \quad (135)$$

onde $\beta_5 = \frac{\beta_1}{\beta_3}$

e $\alpha_2 = \frac{20-27\beta_6}{48\beta_6-40} \quad (136)$

onde $\beta_6 = \frac{\beta_2}{\beta_4}$

Analogamente as reações dos pilares nas vigas 1 e 2 serão:

$$R_1 = \alpha_5 p_1 a \quad (137)$$

onde $\alpha_5 = 0,25(1+\alpha_1)$

$$R_2 = \alpha_6 p_2 b \quad (138)$$

onde $\alpha_6 = 0,25(1+\alpha_2)$

- Impondo a igualdade da somatória das reações do pilar nas vigas 1 e 2 com a reação total do pilar, tem-se:

$$R_1 + R_2 = R \quad (139)$$

Substituindo (137), (138) e (134) na (139), vem:

$$\alpha_5 p_1 a + \alpha_6 p_2 b = \beta_7 p a b \quad (140)$$

Chamando $p_2 = k p_1$ e substituindo em (140), tendo em vista que $b = \lambda a$, vem:

$$\alpha_5 p_1 a + \alpha_6 \lambda k p_1 a = \beta_7 \lambda p a^2$$

ou $p_1 (\alpha_5 + k \lambda \alpha_6) = \lambda \beta_7 p a \quad (141)$

- Determinação da variação de k com λ

a) Quando $\lambda = 1$, os momentos m_x e m_y diferem pouco ($\frac{m_x}{m_y} \approx 1,09$), assim como as flechas ($\frac{f_x}{f_y} \approx 1,06$). Adota-se então, $k = 1$ para $\lambda = 1$.

b) Quando $\lambda \rightarrow 0$, a laje terá flexão somente na direção x .

Daí $p_2 \rightarrow 0$ e $p_1 = p_3 \rightarrow \frac{pb}{2}$. Logo, $k \rightarrow 0$. Daí, $k(0) = 0$ e $b_x = \frac{b}{2}$, $b_y = 0$.

c) Quando $\lambda \rightarrow \infty$, a laje na sua parte central, dentro das condições normais de rigidez, não teria resistência adequada. Então, faz-se λ variar somente entre os seguintes limites usuais: $0,5 \leq \lambda \leq 2$. Lajes com $\lambda > 2$ são usualmente providas de apoios intermediários ou com vigas de borda.

d) Para λ entre 0 e 1, interpola-se linearmente (de maneira análoga ao que foi feito no item 2.2). Isso resulta:

$$k = \lambda \quad (142)$$

- Substituindo (142) em (141) e chamando de $\alpha_7 = \alpha_5 + \lambda^2 \alpha_6$, resulta:

$$p_1 = \frac{\lambda \beta_7 p a}{\alpha_7} \quad (143)$$

e

$$p_2 = \frac{\lambda \beta_7 p b}{\alpha_7} \quad (144)$$

- Definindo α_3 e α_4 como nas equações (44), isto é:

$$\alpha_3 = \frac{1+2\alpha_1}{24} \quad e \quad \alpha_4 = \frac{1+2\alpha_2}{24} \quad (145)$$

Chega-se analogamente a;

$$b_x = \frac{\alpha_3 p_1}{\beta_1 p} \quad e \quad b_y = \frac{\alpha_4 p_2}{\beta_2 p} \quad (146)$$

Substituindo as equações (143) e (144) nas (146), tem-se finalmente:

$$b_x = \frac{\alpha_3 \beta_7}{\beta_1 \alpha_7} b \quad \text{e} \quad b_y = \frac{\lambda^2 \alpha_4 \beta_7}{\beta_2 \alpha_7} a \quad (147)$$

Nos cálculos posteriores (v. Tab. 8), para $1,0 \leq \lambda \leq 2,0$ admite-se também linearidade entre k e λ , isto é, fez-se $k = \lambda$.

Na Tabela 8 calculam-se os parâmetros auxiliares, p_i ($i=1 \rightarrow 4$), b_x e b_y para λ de 0,50 a 2,00.

Na Fig. 45 traçam-se os gráficos de $\frac{b_x}{b}$ e $\frac{b_y}{a}$ em função de λ

TABELA 8

λ	ϵ_1	ϵ_2	β_3	β_4	β_5	α_1	α_3	β_6	α_2	α_4	β_7	α_7	$\frac{p_1}{p_a}$	$\frac{p_3}{p_a}$	$\frac{p_2}{p_b}$	$\frac{p_4}{p_b}$	$\frac{b_x}{b}$	$\frac{b_y}{a}$
0,50	0,1278	0,2576	0,1620	0,3456	0,7889	0,6094	0,09245	0,7454	0,0296	0,04413	0,244	0,4668	0,2414	0,1593	0,2614	0,0077	0,3781	0,0224
0,60	0,1300	0,2146	0,1544	0,2870	0,7908	0,6507	0,09672	0,7477	0,0460	0,04550	0,245	0,5093	0,2386	0,1907	0,2886	0,0133	0,3579	0,0357
0,70	0,1321	0,1833	0,1680	0,2399	0,7863	0,5451	0,08709	0,7641	0,1894	0,05745	0,241	0,5320	0,3171	0,1729	0,3171	0,0600	0,2987	0,0696
0,80	0,1345	0,1601	0,1704	0,2109	0,7893	0,6208	0,09340	0,7591	0,1394	0,05328	0,237	0,5875	0,3227	0,2003	0,3227	0,0450	0,2801	0,0859
0,90	0,1370	0,1421	0,1752	0,1866	0,7820	0,4514	0,07928	0,7615	0,1628	0,05523	0,232	0,5983	0,3490	0,1575	0,3490	0,0568	0,2244	0,1221
1,00	0,1394	0,1280	0,1788	0,1680	0,7796	0,4076	0,07563	0,7619	0,1667	0,05556	0,228	0,6436	0,3542	0,1444	0,3542	0,0550	0,1922	0,1538
$\frac{1}{0,90}$	0,1418	0,1129	0,1810	0,1487	0,7834	0,4811	0,08176	0,7592	0,1405	0,05333	0,222	0,7223	0,3415	0,1643	0,3415	0,0480	0,1772	0,1794
$\frac{1}{0,80}$	0,1443	0,0975	0,1846	0,1284	0,7817	0,4460	0,07883	0,7593	0,1414	0,05345	0,215	0,8074	0,3329	0,1485	0,3329	0,0471	0,1455	0,2281
$\frac{1}{0,70}$	0,1470	0,0822	0,1896	0,1090	0,7753	0,3352	0,06960	0,7541	0,0951	0,04959	0,208	0,8926	0,3329	0,1116	0,3329	0,0317	0,1103	0,2869
$\frac{1}{0,60}$	0,1510	0,0670	0,1941	0,0886	0,7779	0,3779	0,07316	0,7562	0,1128	0,05107	0,200	1,1173	0,2983	0,1127	0,2983	0,0336	0,0867	0,3790
$\frac{1}{0,50}$	0,1536	0,0516	0,1977	0,0684	0,7769	0,3610	0,07175	0,7544	0,0972	0,04977	0,188	1,4375	0,2516	0,0944	0,2616	0,0254	0,0611	0,5046

(*) Segundo a referência [1], $\beta_3 = 0,1920$. Esse valor parece estar incorreto. O valor da tabela foi calculado, utilizando o valor tabelado na referência [15], pág. 668, com $\nu = \frac{1}{6}$, fazendo-se a transformação para $\nu = 0$.

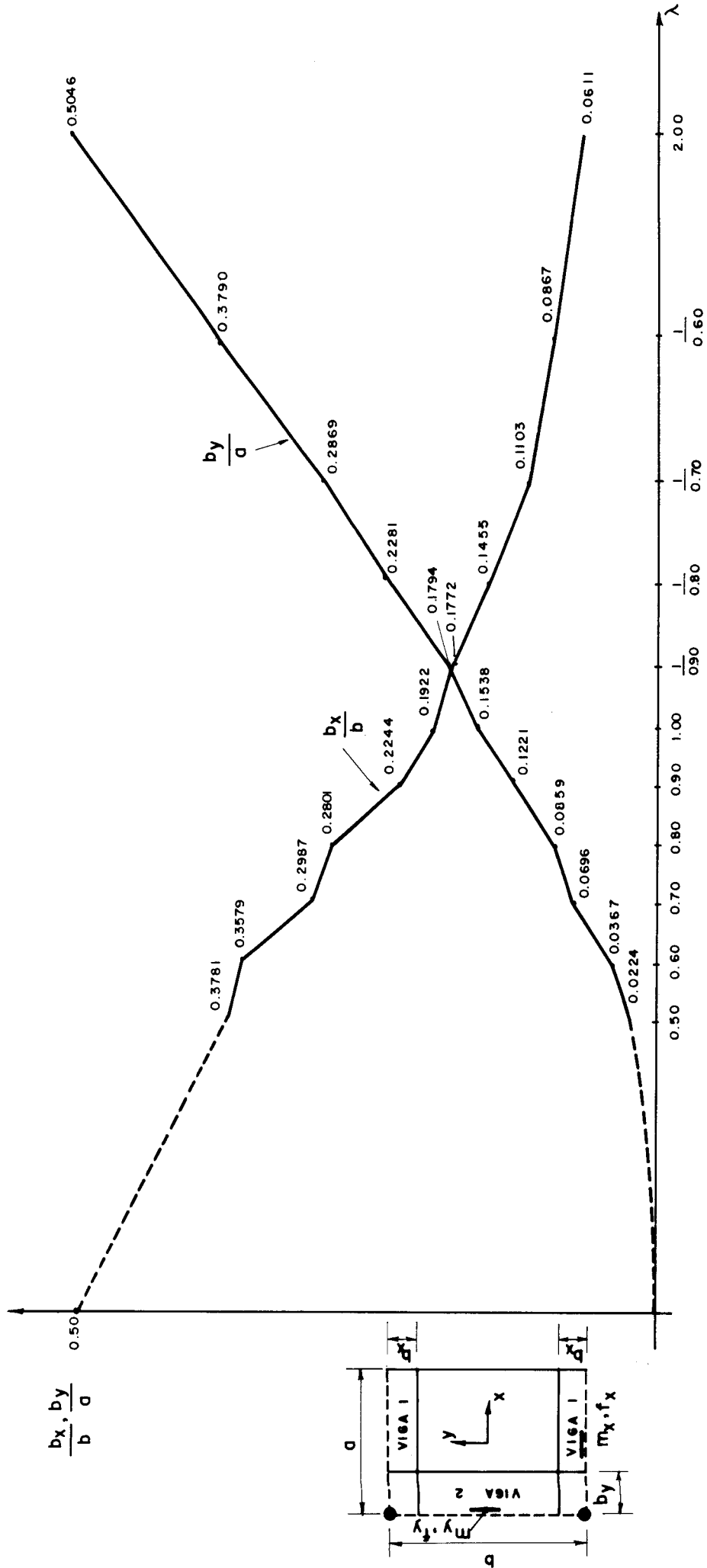


Fig. 45 - Gráficos de $\frac{b_x}{b}$ e $\frac{b_y}{a}$

CAPÍTULO 5

EXEMPLO NUMÉRICO

Seja a laje contínua da Fig. 46, constituída de painéis quadrados de lado = 6m, simplesmente apoiada em colunas de diâmetro = 60cm, submetida a uma carga uniformemente distribuída de 6,0 kN/m².

5.1 - Carga uniformemente distribuída em todos os painéis

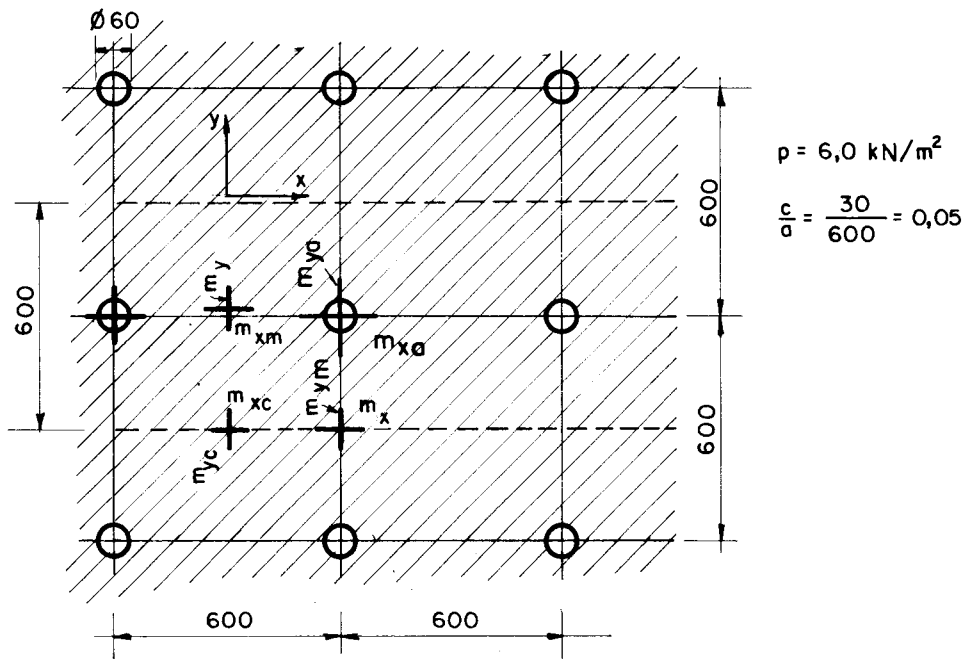


FIG. 46

5.1.1 - Cálculo pelo processo do ACI 318-77 - ver item 1.3.1

- Pórtico (viga) equivalente

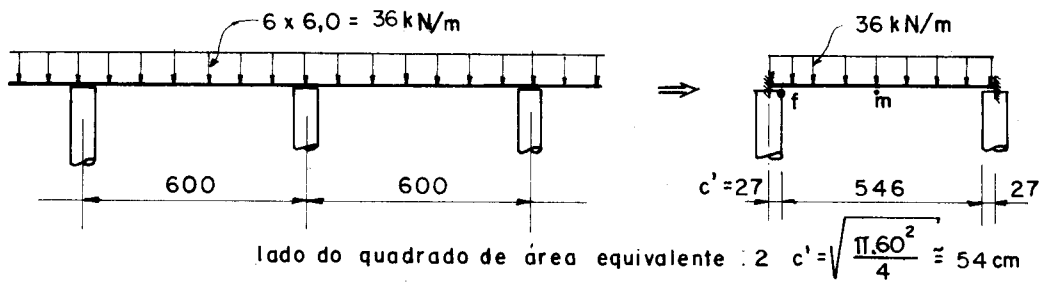


FIG. 47

- Momentos fletores na viga equivalente: $K = \frac{27}{600} = 0,045$

$$M_{xm} \oplus = 36 \times \frac{6,0^2}{24} = 54,0 \text{ kNm}$$

$$M_{xf} \ominus = 36 \times \frac{6,0^2}{12} - 0,045 \times (1 - 0,045) \times 36 \times \frac{6,0^2}{2} =$$

$$108,0 - 27,85 = 80,15 \text{ kNm}$$

- Distribuição dos momentos positivo e negativo nas faixas do vão e do apoio:

largura total da faixa do apoio: $0,500 \times 6,0 = 3,0\text{m}$

largura total da faixa do vão: $0,500 \times 6,0 = 3,0\text{m}$

	MOMENTOS TOTAIS(kN.m)	FAIXA DO APOIO		FAIXA DO VÃO	
		M(kN.m)	m = M/b (kNm/m)	M(kN.m)	m = M/b (kNm/m)
ARMAD. \ominus	80,15	75% · 80,15 = 60,11	20,04	25% · 80,15 = 20,04	6,68
ARMAD. \oplus	54,00	60% · 54,00 = 32,40	10,80	40% · 54,00 = 21,60	7,20

TAB. 9

5.1.2 - Cálculo pelo processo da DIN 1045/1972 - ver item 1.3.2

- Pórtico (viga) equivalente

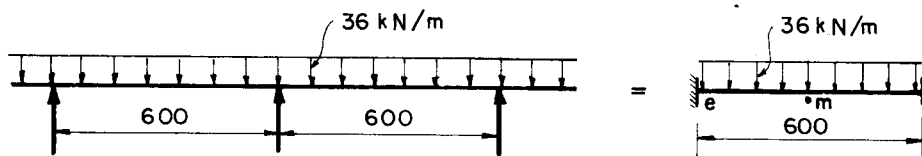


FIG. 48

- momentos fletores na viga equivalente

$$M_{xm} \oplus = \frac{36 \times 6,0^2}{24} = 54,0 \text{ kNm}$$

$$M_{xe} \ominus = \frac{36 \times 6,0^2}{12} = 108,0 \text{ kNm}$$

- distribuição dos momentos positivo e negativo nas faixas do vão e do apoio:

largura da faixa 1 do apoio = $0,200 \times 6,0 = 1,20\text{m}$

largura das faixas 2 do apoio = $0,100 \times 6,0 = 0,60\text{m}$

largura da faixa do vão = $0,600 \times 6,0 = 3,60\text{m}$

	MOMENTOS TOTAIS (kNm)	FAIXAS DO APOIO		FAIXA DO VÃO
		1	2	
		m (kNm/m)	m (kNm/m)	m (kNm/m)
ARMAD. \ominus	108,0	$2,1 \cdot \frac{108,0}{6,0} = 37,8$	$1,4 \cdot \frac{108,0}{6,0} = 25,2$	$0,5 \cdot \frac{108,0}{6,0} = 9,0$
ARMAD. \oplus	54,0	$1,25 \cdot \frac{54,0}{6,0} = 11,25$		$0,84 \cdot \frac{54,0}{6,0} = 7,56$

TAB. 10

5.1.3 - Cálculo pelo processo da NB-1/78 - ver item 1.3.3

- Pórtico (viga) equivalente (v. Fig.48)

- momentos fletores na viga equivalente

$$M_{xm} \oplus = \frac{36 \times 6,0^2}{24} = 54,0 \text{ kNm}$$

$$M_{xe} \ominus = \frac{36 \times 6,0^2}{12} = 108,0 \text{ kNm}$$

- distribuição dos momentos positivo e negativo nas faixas do vão e do apoio:

largura total da faixa do apoio = 0,500 x 6,0 = 3,0m

largura total da faixa do vão = 0,500 x 6,0 = 3,0m

	MOMENTOS TOTAIS (kNm)	FAIXA DO APOIO		FAIXA DO VÃO	
		M (kNm)	m = M/b (kNm/m)	M (kNm)	m = M/b (kNm/m)
ARMAD. ⊖	108,0	75% · 108,0 = 81,0	27,0	25% · 108,0 = 27,0	9,0
ARMAD. ⊕	54,0	55% · 54,0 = 29,7	9,9	45% · 54,0 = 24,3	8,1

TAB. 11

5.1.4 - Cálculo através do processo proposto - ver item 3.1

- Larguras efetivas

para momento positivo no meio do vão entre pilares:

Tabela 4: $\lambda = 1 \rightarrow b_{xm} = b_{ym} = 0,1764 \times 6,0 \approx 1,10 \text{ m}$

para momento negativo no centro do pilar:

Tabela 6: $\lambda = 1, \frac{c}{a} = \frac{60/2}{600} = 0,05 \rightarrow b_{xa} = b_{ya} =$
 $= 0,1730 \times 6,0 \approx 1,10 \text{ m}$

- momentos fletores na laje (v. Fig. 46)

positivo no meio do vão entre pilares

Tabela 4: $\lambda = 1 \rightarrow m_{xm} = m_{ym} = 0,0573 \times 6,0 \times \overline{6,0^2} =$
 $= 12,38 \text{ kNm/m}$

- positivo no centro do painel

$$\begin{aligned} \text{Anexo, REF. [1]: } \lambda = 1 \rightarrow m_{xc} = m_{yc} &= 0,0275 \times 6,00 \times \overline{6,0^2} = \\ &= 5,94 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

- negativo no centro do pilar:

$$\begin{aligned} \text{Tabela 6: } \lambda = 1, \frac{c}{a} = 0,05 \rightarrow m_{xa} = m_{ya} &= \\ &= 0,1343 \times 6,0 \times \overline{6,0^2} = 29,00 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

- negativo no meio do vão entre pilares

$$\begin{aligned} \text{Anexo, REF. [1]: } \lambda = 1 \rightarrow m_x = m_y &= 0,0298 \times 6,0 \times \overline{6,0^2} = \\ &= 6,44 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

- gráfico da variação dos momentos fletores positivo e negativo e valores correspondentes das larguras efetivas.

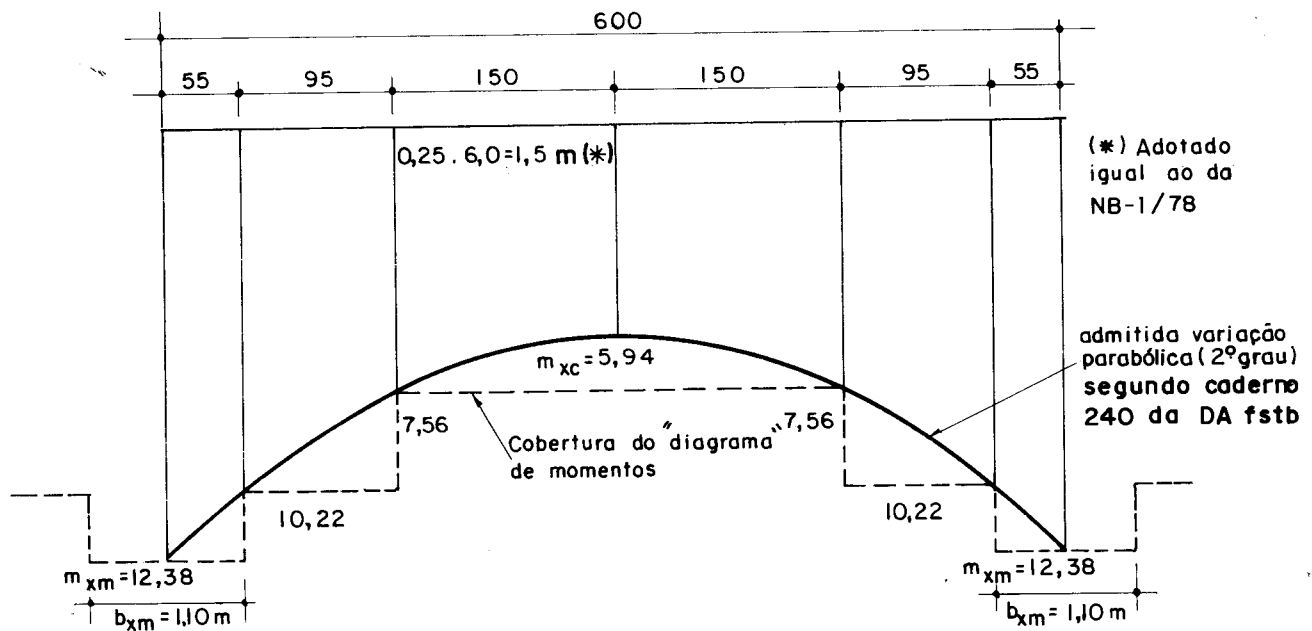


FIG. 49 - VARIAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES POSITIVOS m_x QUE ATUAM PERPENDICULARMENTE A SEÇÃO PASSANDO PELO EIXO Y (kNm/m). - v. FIG. 46

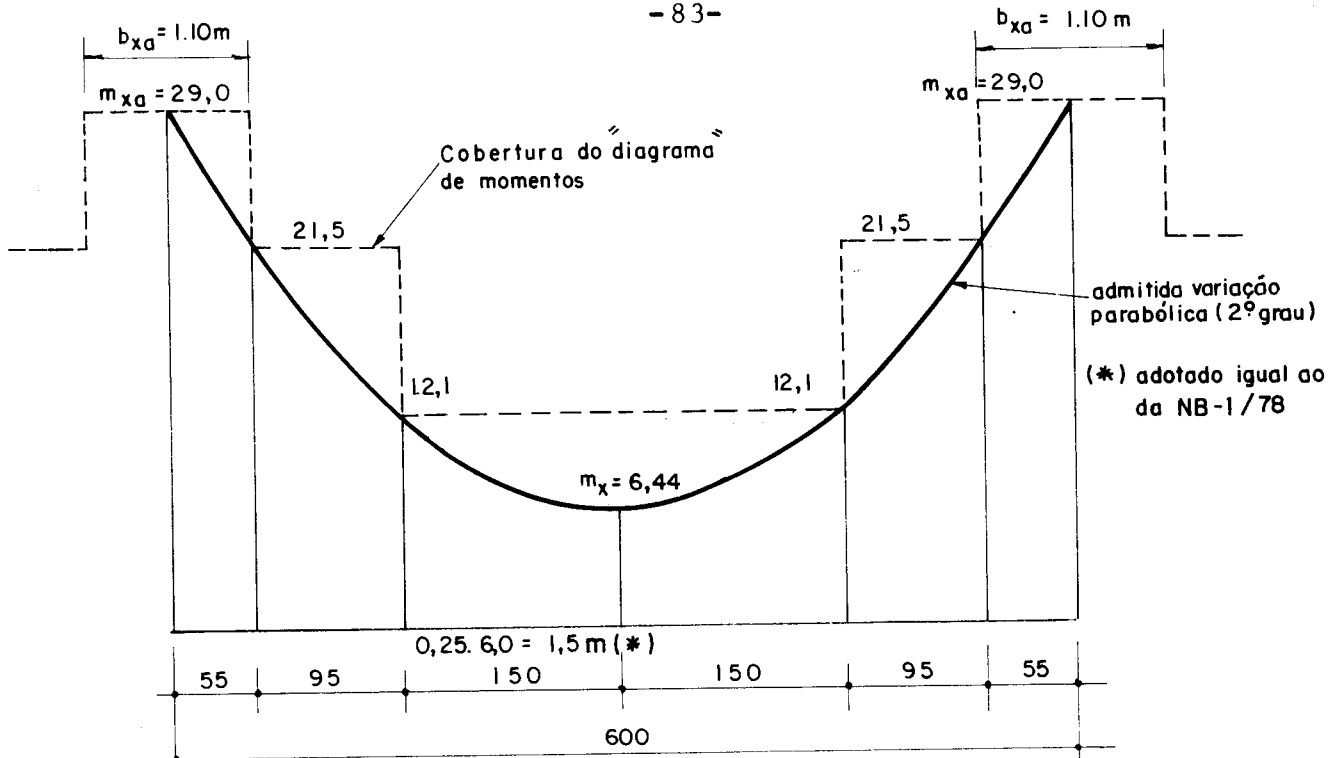
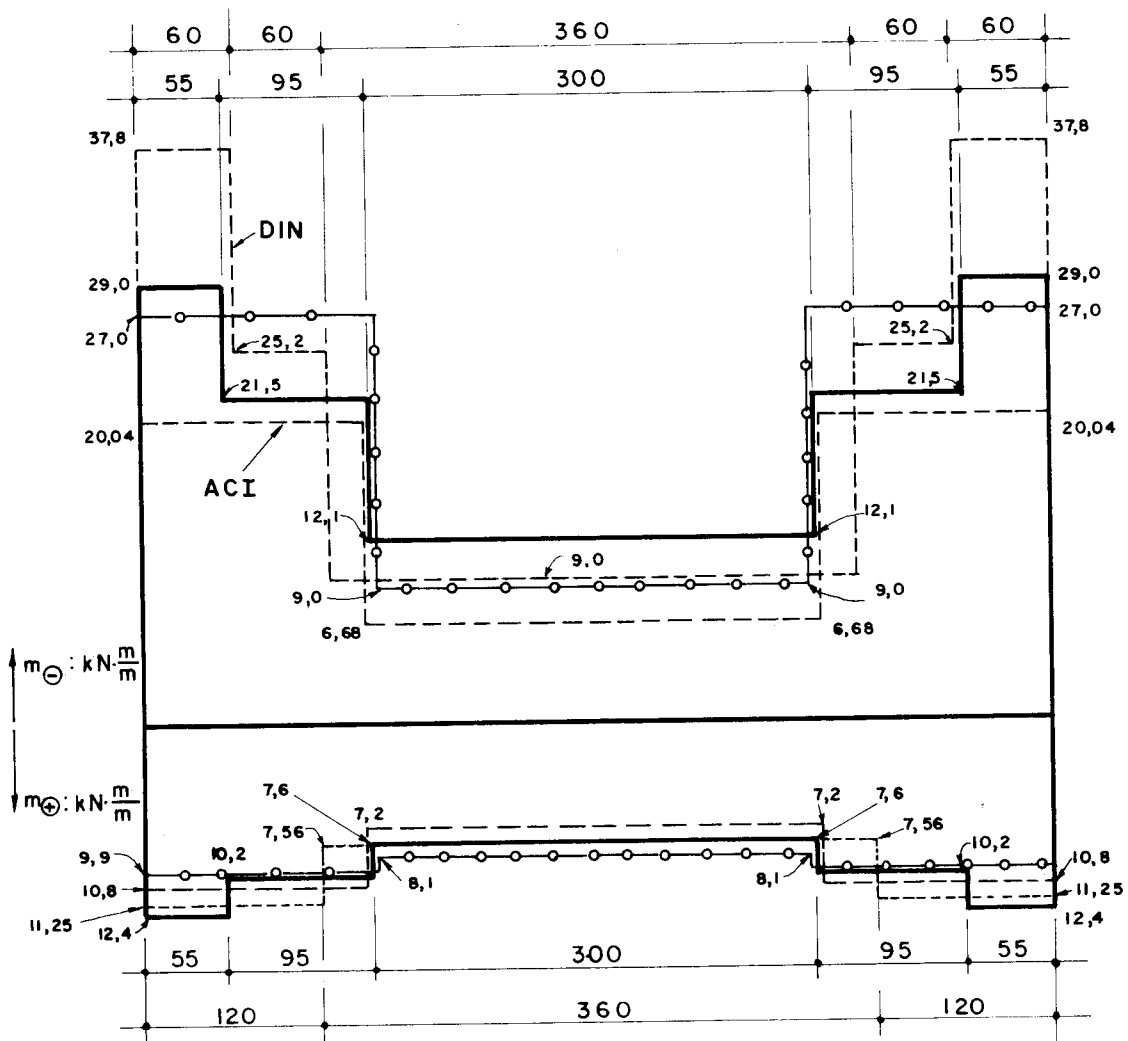


FIG. 50 - VARIÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES NEGATIVOS m_x EM FUNÇÃO DE y (kNm/m) - v. FIG. 46



CONVENÇÕES

ACI	---
DIN	...
NB-1/78	○-○
PROCESSO PROPOSTO	—

FIG. 51 - COMPARAÇÃO ENTRE OS PROCESSOS

CONCLUSÕES

- 1) As larguras das faixas externas para momentos fletores positivos e negativos segundo o processo proposto estão sensivelmente diferentes das respectivas larguras do ACI e da NB-1/78, se aproximando mais das larguras da DIN-1045.
- 2) Nas 3 normas citadas no item anterior, as larguras efetivas para momentos negativos independem das dimensões dos apoios enquanto que no processo proposto chegou-se à conclusão de que há dependência.
- 3) Com relação ao momento negativo nos apoios, tem-se:
ACI: depende das dimensões dos apoios
DIN: independe das dimensões dos apoios
NB-1/78: é omissa (no exemplo numérico, foi suposto independente)
Processo proposto: é dependente daquelas dimensões.
- 4) Comparando os momentos das normas com os momentos calculados pelo processo proposto, tem-se:
 - 4.1) Momentos negativos nos apoios:
ACI: o momento negativo no apoio é 30% menor.
DIN: o momento é 30% maior
NB-1/78: o momento é aproximadamente igual.
 - 4.2) Momentos positivos máximos
ACI: o momento positivo máximo é 13% menor.
DIN: o momento é 10% menor.
NB-1/78: o momento é 20% menor.
 - 4.3) Na faixa central, os momentos fletores positivos das normas estão com valores bem próximos dos do processo proposto enquanto que os negativos estão

- Momento fletor positivo na viga equivalente: REF. [18], p. 658:

$$M_{xm} = +0,083 \times 36 \times \overline{6,0}^2 = 107,6 \text{ kNm}$$

- distribuição do momento positivo nas faixas do vão e do apoio:

largura das faixas do vão e do apoio: (v. item 5.1.1)

	Momento Total kNm	FAIXA DO APOIO		FAIXA DO VÃO	
		M (kNm)	m = M/b kNm/m	M (kNm)	m = M/b kNm/m
Armad. ⊕	107,6	60% · 107,6 = 64,6	21,5	40% · 107,6 = 43,1	14,4

5.2.2-Cálculo pelo processo da DIN 1045-1972-ver item 1.3.2

- Viga equivalente: (V. FIG.53)
- Momento fletor positivo na viga equivalente:

$$M_{xm} = 107,6 \text{ kNm}$$

- distribuição do momento positivo nas faixas do vão e do apoio.

largura das faixas do apoio e do vão: (v. item 5.1.2)

	MOMENTO TOTAL (kNm)	FAIXAS DO APOIO		FAIXA DO VÃO
		1	2	m
		m (kNm/m)	m (kNm/m)	(kNm/m)
Armad. ⊕	107,6	$1,25 \times \frac{107,6}{6,0} = 22,4$		$0,84 \times \frac{107,6}{6,0} = 15,1$

5.2.3 - Cálculo pelo processo da NB-1/78 - ver item 1.3.3

- Viga equivalente (V. FIG. 53)

- Momento fletor positivo na viga equivalente:

$$M_{xm} = 107,6 \text{ kN.m}$$

- distribuição do momento positivo nas faixas do vão e do apoio:

larguras das faixas do apoio e do vão:(v. item 5.1.3)

	MOMENTO TOTAL (kNm)	FAIXA DO APOIO		FAIXA DO VÃO	
		M (kNm)	$m = M/b$ (kNm/m)	M (kNm)	$m = \frac{M}{b}$ (kNm/m)
Armd. ⊕	107,6	$55\% \cdot 107,6 =$ 59,2	19,7	$45\% \cdot 107,6 =$ 48,4	16,1

5.2.4 - Cálculo através do processo proposto - ver item 3.2

- largura efetiva para momento fletor positivo no meio do vão entre pilares:

Tabela 7: $\lambda = 1 \rightarrow b_{xm} = b_{ym} = 0,4238 \cdot 6,0 \approx 2,5 \text{ m}$

- Momentos fletores positivos na laje (V. FIG. 52)

no meio do vão entre pilares:

Tabela 7: $m_{xm} = m_{ym} = 0,0912 \cdot 6,0 \cdot \overline{6,0^2} = 19,7 \text{ kNm/m}$

- no centro do painel: $m_{xc} = m_{yc}$

Na FIG.33 , o carregamento alternado foi decomposto em:

(1) + (2).

Então $m_{xc} = m_{xc} \text{ (Carr. 1)} + m_{xc} \text{ (Carr. 2)}$

Anexo, REF. [1]: $\lambda = 1 \rightarrow m_{xc}(\text{Carr. 1}) =$

$$= 0,0275 \times \frac{6,0}{2} \times \overline{6,0}^2 \approx 3,0 \text{ kNm/m}$$

$$m_{xc}(\text{Carr. 2}) = \frac{6,0}{2} \times \frac{\overline{6,0}^2}{8} = 13,5 \text{ kNm/m}$$

Logo, $m_{xc} = 3,0 + 13,5 \approx 16,5 \text{ kNm/m}$

- Gráfico da variação dos momentos fletores positivos e valores correspondentes das larguras efetivas:

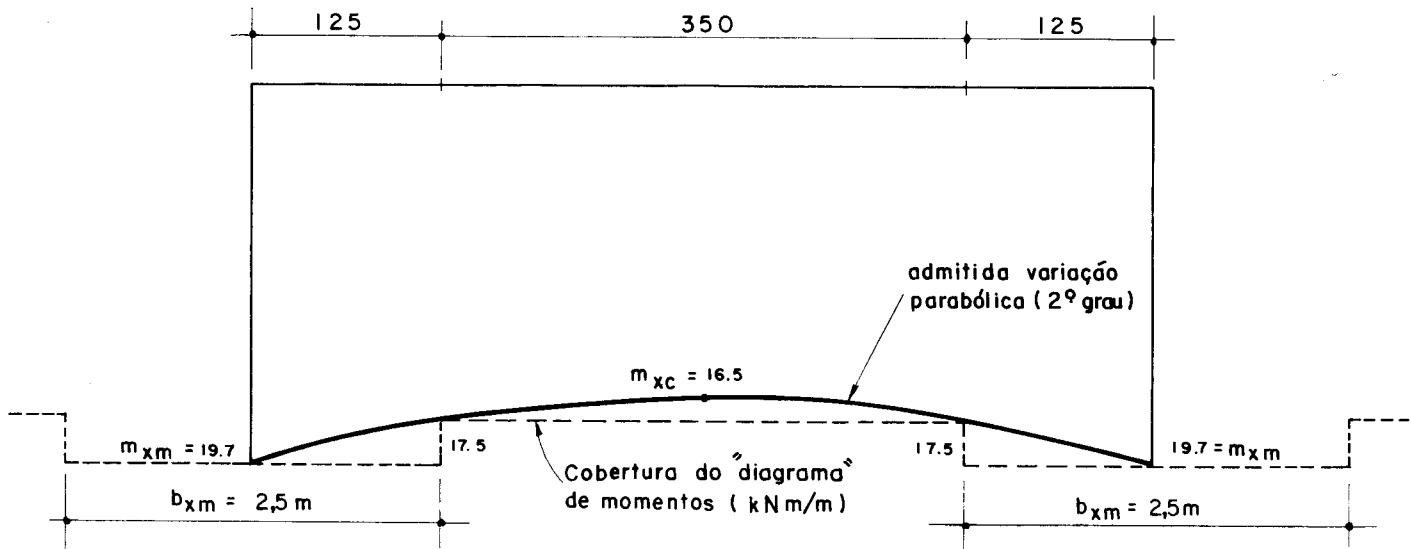


FIG. 54 - VARIAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES POSITIVOS m_x COM EIXO y - v. FIG. 52

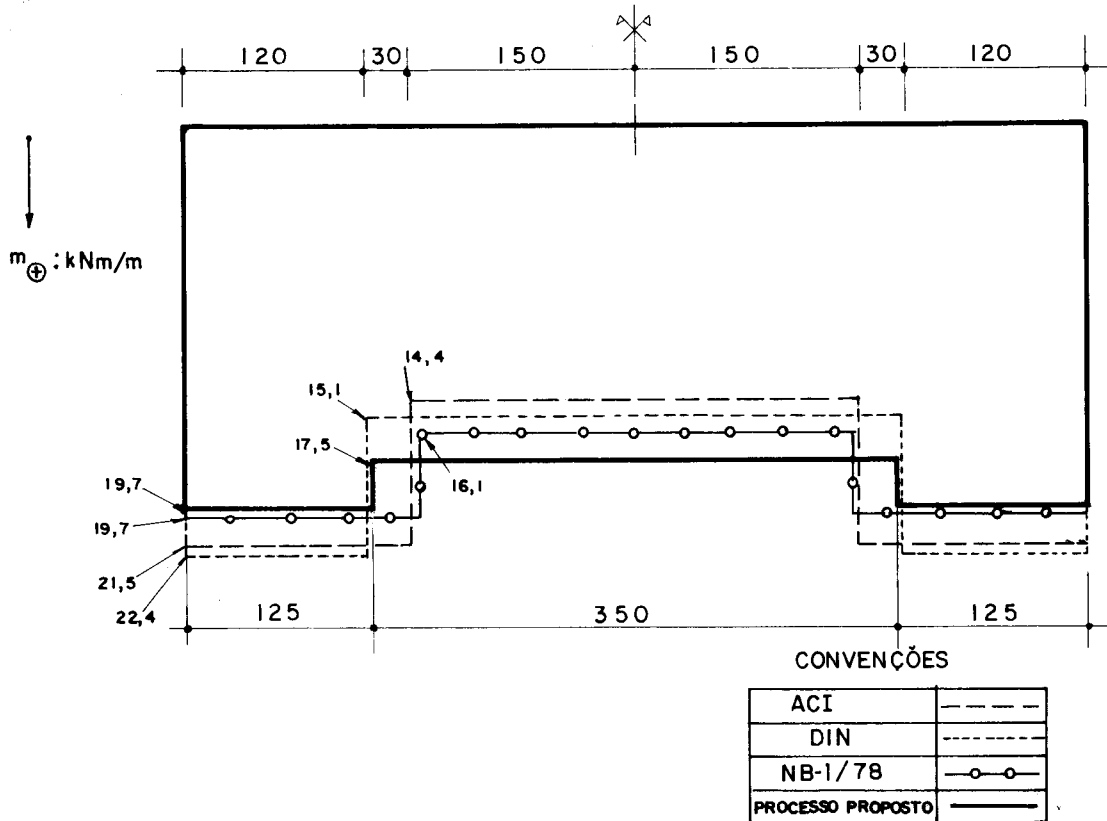


FIG. 55 - COMPARAÇÃO ENTRE OS PROCESSOS

CONCLUSÕES

- 1) As larguras das faixas externas para momentos fletores positivos, segundo o processo proposto, estão nesse caso, bem próximas das respectivas larguras das normas.
- 2) Comparando os momentos das normas com os momentos calculados pelo processo proposto, tem-se:
 - 2.1) Momentos positivos máximos:
 - ACI e DIN: os momentos dessas normas são cerca de 10% maiores.
 - NB-1/78: os momentos coincidem.
 - 2.2) Momentos positivos na faixa central:
 - Todas as normas estão com valores abaixo dos calculados pelo processo proposto:
 - ACI: o momento é 20% menor.
 - DIN: o momento é 15% menor
 - NB-1/78: o momento é 10% menor.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES FINAIS

Da comparação das larguras efetivas com as diversas normas, feitas no capítulo 3, concluiu-se que:

a) para carregamento total, as larguras prescritas pelas normas são bem maiores, com exceção de duas pequenas faixas onde as mesmas são bem menores (v. item 3.1.3);

b) para carregamento parcial, as larguras prescritas para momentos positivos são bem menores numa direção e bem maiores na outra (v. item 3.2.3).

Evidentemente, essas conclusões estão admitindo a premissa que o processo aqui desenvolvido é "exato", o que não é verdade, pois:

a) Foi assumida uma distribuição linear para as reações das vigas na laje.

b) Admitiu-se proporcionalidade entre k e λ (ou γ , dependendo do caso).

Embora haja essas duas aproximações, a comparação com momentos em outras seções da borda, feitas no item 2.2, levou a valores bem próximos dos calculados pela teoria da elasticidade.

Isso parece indicar que as aproximações a) e b) acima levam a valores de larguras efetivas próximas de valores "exatos", sendo razoáveis, portanto, as conclusões tiradas.

Mesmo assim se torna necessário uma comprovação adicional através de um outro método e, principalmente, comprovação experimental.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Barês, R.: "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic Theory". Bauverlag GmbH., Wiesbaden and Berlin - third revised and enlarged Edition 1979.
- 2 - Barês, R.: "Tablas para el calculo de placas y vigas pared". Editorial Gustavo Gili - 1^a edicion 1970.
- 3 - Bechert, H.: "Placa apoiada nos quatro lados sobre vigas flexíveis sujeita a carga vertical uniformemente distribuída". (em alemão). Beton und Stahlbetonbau, 56- 1961.
- 4 - Eichstaedt, H.J.: "Reações de apoio de placas retangulares carregadas uniformemente, atendendo à norma DIN 1045, item 23.3". (em alemão). Beton und Stahlbetonbau, 56-1961.
- 5 - Grekow, A.; Isnard, V.; Mrozowicz, P.: "Formulário del Ingeniero". Ediciones Urmo. Bilbao. España - 1971.
- 6 - Hahn, J.: "Vigas contínuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre lecho elástico - Editorial Gustavo Gili - Barcelona - 2^a edicion 1972.

- 7 - Kleinlogel, A.; Haselbach, A.: "Factores de carga" (em alemão). Verlag vom Wilhelm - Ernst & Sohn - Berlin 1956.
- 8 - Leonhardt, F.; Mönning, E.: "Construções de Concreto-Princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado". Editora Interciência Ltda., 1978.
- 9 - Mesnager, A.: "Cours de beton armé". Dunod, Editeur. Paris 1921.
- 10 - Montanari, I.; Martinelli, D.A.O.: "Placas elásticas 1-Equações gerais e placas retangulares". Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP. agosto 1976.
- 11 - Normas, NB-1/78; ACI 318-77; DIN 1045-1972.
- 12 - Prak, R.; Gamble, W.L.: "Reinforced concrete slabs". A Wiley-Interscience publication - John Wiley & Sons - 1980.
- 13 - Roark, R.J.; Young, W.C.; "Formulas for stress and strain". International student edition - McGraw-Hill, Kogakusha Ltd - 1975.
- 14 - Stiglat, K.; Wippel, H.: "Placas" (em alemão). Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn - Berlin 1973.
- 15 - Szilard, R.: "Theory of Plates". Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- 16 - Tarzi, A.I.; Nessim, A.A.: "Elastic analysis of rectangular slabs supported at corners" - revista Concrete and Constructional Engineering - London - november 1966 - p. 420-25.
- 17 - Timoshenko, S.P.; Woinowsky - Krieger, S.: "Theory of plates and shells". International student edition - second edition - 1959.
- 18 - Beton Kalender 1980. Teil I - p. 65.

- 19 - Wood, R.H.: "Studies in composite construction, Part II, The Interaction of Floors and Beams in Multistor_y Buildings". National Building Studies, Research Paper n^o 22, Department of Scientific and Industrial Research, Building Research Station, England, 1955.
- 20 - Pfaffinger, D.; Thürlimann, B.: "Tables for flat slabs". Publishing Company Ltd of the Academical Associations. Zurich, 1967.

ANEXO

CONJUNTO DAS TABELAS DE MOMENTOS FLETORES E FLECHAS DAS
LAJES, UTILIZADAS NO TRABALHO

1.3.5 Durch Säulenreihen unterstützte Platten

Sofern die Größe der Platte im Vergleich zu den Entfernungen a und b groß ist, kann man voraussetzen, daß die Biegung der inneren Felder durch die Ränder nicht beeinflußt wird, und es genügt, die Analyse nur auf ein Feld zu beschränken. Für die gleichmäßig verteilte Belastung und unter der Voraussetzung, daß die Abmessungen der Kreissäulen im Vergleich zu den Dimensionen a und b klein sind und

1.3.5 Plates supported by rows of columns

If the dimensions of the plate are large in comparison with the distances a and b , it can be assumed that the bending of the inner bays or panels of the plate are not affected by the edges, so that the analysis, can then be confined to just one bay. Timoshenko [23], for example, has derived a solution for the case of uniformly distributed load, on the assumption that the dimensions of the circular columns are small in

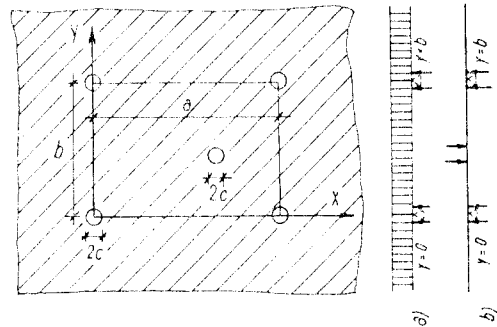
* REF. 1 : Barês, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

daß die Belastung sich auf sie gleichmäßig verteilt, wurde eine Lösung z.B. von Timoshenko [23] abgeleitet. Mit Verwendung des Lösungsverfahrens für die Platten nach [131, 132, 133] kann man analog die Werte der Durchbiegungen und der Biegemomente des inneren Feldes einer großen Platte bei verschiedenen Belastungen finden unter der Voraussetzung, daß die Auflagerkräfte und die Punktlasten längs des Kreises vom Durchmesser $2c$ verteilt sind (Fig. 1-24).

comparison with the dimensions a and b and that all the columns carry equal shares of the load. Using the analysis procedure for plates in accordance with [131, 132, 133] the deflections and bending moments in an internal bay of a large multi-bay plate under various loads can be similar determined, assuming the bearing reactions and point loads to be distributed along the circumference of the circle of diameter $2c$ (Fig. 1-24).

Fig. 1-24. a) Gleichlast (über die ganze Platte).
b) Einzellast (in einem Felde).

Fig. 1-24. a) Uniformly distributed load (on entire plate).
b) Concentrated load (on one bay).



In der Tab. 1.119 sind die erforderlichen Werte für verschiedene Verhältnisse $\lambda = \frac{b}{a}$ bei $c = 0,01 a$ und gleichmäßig verteilte Vollbelastung der Platte aufgeführt, in der Tab. 1.120 dann bei der Belastung durch eine Punktlast in der Mitte des untersuchten Feldes. In der Tab. 1.121 sind die Werte der Durchbiegungen und der Momente in der Platte mit quadratischen Feldern ($\lambda = 1,0$) bei der Belastung des inneren Feldes durch eine Punktlast in verschiedenen Lagen aufgeführt.

Im Falle, daß die Auflagerkräfte oder Einzellasten längs einer Kreislinie anderen Halbmessers verteilt sind, kann man die richtigen Werte der Stützmomente oder der Momente unter der Einzellast durch Vergrößerung (oder Verkleinerung) der Momentenbeiwerte $M_{(0,01 a)}$ aus den Tab. 1.119—1.121 nach der Beziehung

$$M_{(c)} = M_{(0,01 a)} + M_{(c)} \quad (1.100)$$

finden. Die in der Tab. 1.122 aufgeführten Werte $\Delta M_{(c)}$ unterscheiden sich für die Reduktion der Stützmomenten — bei der Gleichlast (Spalte A) und bei der Punktlast (Spalte B) —

The necessary values for various ratios $\lambda = \frac{b}{a}$ for $c = 0,01 a$ and uniformly distributed load over the entire area of the plate are given in Table 1.119, while Table 1.120 gives the values for the case where a point load is acting at the centre of the bay under consideration. The deflections and moments in the plate with square bays ($\lambda = 1,0$) when a point load is applied at various positions on the internal bay are indicated in Table 1.121.

In the case where the bearing reactions or point loads are distributed along a circle of different radius the correct values for the support moments or the moments under the concentrated load can be determined by approximately increasing (or decreasing) the bending moment coefficients $M_{(0,01 a)}$ of Tables 1.119—1.121 as follows:

The values $\Delta M_{(c)}$ presented in Table 1.122 differ for the reduction of the support moments—for uniformly distributed load (column A) and point load (column B)—and for

* REF. 1 : Barês, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

und für die Reduktion der Momente unter der Punktlast (Spalte C). Die Reduktion anderer Momente infolge der Größenänderung der Last oder der Auflagerkraft ist überflüssig.

Wenn die Säulen einen rechteckigen oder quadratischen Querschnitt mit den Abmessungen u und v haben, kann man ebenfalls angenähert mit Hilfe dieser Tabellen rechnen, sofern man einen Äquivalenzhalbmesser der zylindrischen Säule nach der Beziehung

$$c = \frac{t}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4} - 1} = 0,57 t \tag{1.101}$$

einführt, wo

where:

$$t = \frac{u + v}{2}$$

bedeutet.

Die gleichmäßige Vollbelastung der Platte gibt nur an den Säulen schon die ungünstigsten Bedingungen. Für die Berechnung der maximalen Biegemomente in der Mitte der einzelnen Felder muß die Belastung wie in der Abb. 1-25a verteilt werden. Die Lösung für diesen Belastungsfall bekommt man durch Kombination der gleichmäßigen Vollbelastung $q_1 = q/2$ (Fig. 1-25b) mit der Belastung $q_2 = q/2$, welche beim Übergang zum benachbarten Feld das Vorzeichen wechselt (Fig. 1-25c). Die Durchbiegungsfläche ist im zweiten Fall offensichtlich gleich derjenigen eines frei gelagerten Plattenstreifens der Breite a mit gleichmäßiger Belastung.

Uniformly distributed load applied to the entire area of the plate causes the most unfavourable conditions at the columns only. For calculating the maximum bending moments in the central regions of the individual bays the load should be distributed as in Fig. 1-25a. The solution for this loading case is obtained by combination of the uniformly distributed load over the entire area $q_1 = q/2$ (Fig. 1-25b) with the load $q_2 = q/2$ which changes its algebraic sign at the transition to the adjacent bay (Fig. 1-25c). The deflected surface in the second case is evidently similar to that of a freely supported plate strip of width a carrying uniformly distributed load.

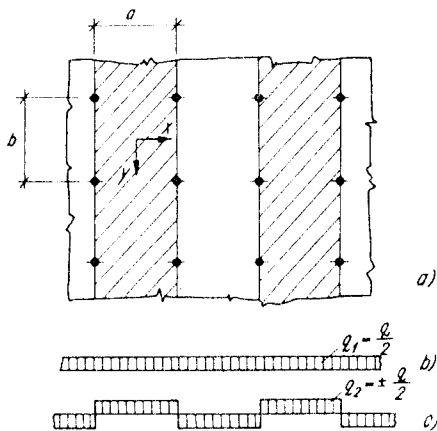


Fig. 1-25

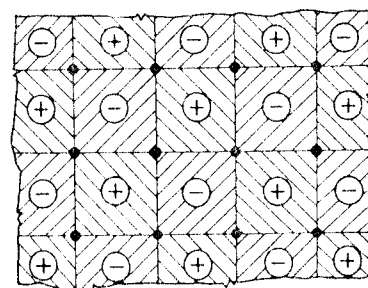


Fig. 1-26

* REF. 1 : Barê, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

Die früheren Ergebnisse wurden unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Platte an der Auflagerung nicht an der Verdrehung gehindert wird. Die Säulen sind jedoch gewöhnlich mit der Platte starr verbunden, und bei der Belastung nach Fig. 1-25 greift an ihnen neben der senkrechten Kraft auch ein Biegemoment an. Damit werden auch die Biegemomente in der Platte beeinflußt. Zur Bestimmung der genaueren Werte der Biegemomente bei wechselnder Belastung ist deshalb eine Berechnung ähnlich wie bei einem Rahmen mit starrer Verbindung der Platte mit den Säulen notwendig¹⁾.

Der Fall, wo nur ein Feld mit Gleichlast belastet ist und die benachbarten vier Felder unbelastet sind, ist durch Superposition der gleichmäßigen Belastung $q_0 = q/2$ und der Belastung $q_2 = q/2$ mit wechselndem Vorzeichen nach Fig. 1-26 zu erhalten. Im zweiten Falle verhält sich jedes Feld wie eine am Umfang frei gelagerte Platte, so daß man für alle benötigten Werte die Tab. 1.1 benutzen kann.

Die Tab. 1.119—1.121 können auch für die Randfelder der Platte so angewandt werden, daß nach der Bestimmung der Momente (wie für die mittleren Felder) der freie Rand hergestellt wird und die hier einwirkenden Momente mit umgekehrtem Vorzeichen mit Hilfe des in Kapitel 1.3.4 angeführten Verfahrens auf die anderen Felder verteilt werden unter der Voraussetzung drehbarer Unterstützung in der Verbindungslinie der Säulenachsen.

Für zwei einfache Systeme der durchlaufenden Platten sind die Werte der Biegemomente in den Tab. 1.123 [23] und 1.124 [4] berechnet.

The earlier results were derived on the assumption that the plate is not restrained from rotation at the bearings. As a rule, however, the columns will be rigidly connected to the plate (more particularly if the latter is in fact a concrete structural slab), so that, for load in accordance with Fig. 1-25, the columns are subjected to bending moment as well as vertical force. This in turn also modifies the bending moments in the plate. For determining the more accurate bending moments in a case of variable load it is therefore necessary to perform an analysis similar to that for a portal frame structure—namely, the plate with the column heads rigidly fixed to it¹⁾.

The case where only one bay carries uniformly distributed load and the four adjacent bays are not loaded can be dealt with by superposition of the uniformly distributed load $q_0 = q/2$ and the load $q_2 = q/2$ with varying algebraic sign, as indicated in Fig. 1-26. In the second case each bay behaves like a plate freely supported at its edges, so that Table 1.1 can be used for obtaining all the required values for analysing this case.

Tables 1.119—1.121 can also be used for analysing the edge bays. First, the bending moments are determined as though for an internal bay. Then one edge of this bay is assumed to be unsupported, and the moments acting here are now—with reversed algebraic sign and using the procedure described in Section 1.3.4—distributed over the other bays, on the assumption of freely rotational support on the line connecting the centres of the columns.

The bending moment values for two simple systems of cases of continuous plates with smaller dimensions are presented in Tables 1.123 [23] and 1.124 [4].

¹⁾ Die Berechnung der durch Säulen unterstützten Fußbodenplatten, die eine ganze Reihe von Tabellen und Formeln enthält, wird ausführlich für Platten mit Kapitellen z. B. in [79], für Platten ohne Kapitelle in [243] beschrieben. Für durchlaufende schiefe Platten sind die notwendigen Werte z. B. in [78, 95] angegeben.

¹⁾ The analysis of the floor slab supported on columns, with the aid of numerous tables and formulas, is dealt with for columns with enlarged heads in, for example, [79], while the flat slab on columns without enlarged heads is dealt with in [243]. For continuous skew slabs or plates see, for example [78, 95].

* REF. 1 : Barêš, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

Tab. 1.43

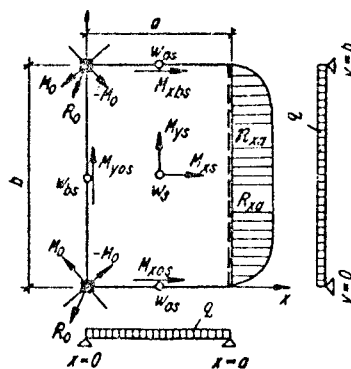
$$\mu = 0$$

$$\gamma = \frac{a}{b}$$

$$\lambda = \frac{b}{a}$$

$$M_{x0s} = M_{xbs}$$

$$M_0 = \pm \frac{R_0}{2}$$



γ	w_s	w_{as}	w_{bs}	M_{xs}	M_{x0s}	M_{ys}	M_{y0s}	R_0	R_{xa}
0,50	0,6912	0,1920	1,0944	0,1136	0,1536	0,0246	0,0516	0,188	0,624
0,55	0,5768	0,1966	0,8652	0,1137	0,1527	0,0277	0,0593	0,194	0,613
0,60	0,4900	0,1941	0,6841	0,1133	0,1510	0,0305	0,0670	0,200	0,602
0,65	0,4230	0,1880	0,5506	0,1133	0,1490	0,0331	0,0746	0,204	0,592
0,70	0,3692	0,1826	0,4541	0,1136	0,1470	0,0354	0,0822	0,208	0,584
0,75	0,3296	0,1856	0,3751	0,1141	0,1455	0,0375	0,0898	0,212	0,577
0,80	0,3018	0,1846	0,3135	0,1145	0,1443	0,0393	0,0975	0,215	0,570
0,85	0,2777	0,1813	0,2662	0,1151	0,1430	0,0405	0,1052	0,219	0,574
0,90	0,2614	0,1810	0,2267	0,1157	0,1418	0,0414	0,1129	0,222	0,555
0,95	0,2454	0,1793	0,1940	0,1163	0,1405	0,0421	0,1205	0,225	0,549
1,00	0,2316	0,1788	0,1680	0,1172	0,1394	0,0425	0,1280	0,228	0,544
V.f.	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	qa^2	qa^2	qb^2	qb^2	qab	qab
M.f.									

λ	w_s	w_{as}	w_{bs}	M_{xs}	M_{x0s}	M_{ys}	M_{y0s}	R_0	R_{xa}
0,50	0,1644	0,1620	0,0216	0,1231	0,1278	0,0300	0,2576	0,244	0,510
0,55	0,1668	0,1632	0,0288	0,1228	0,1289	0,0337	0,2343	0,245	0,509
0,60	0,1692	0,1644	0,0372	0,1224	0,1300	0,0364	0,2146	0,245	0,511
0,65	0,1740	0,1668	0,0468	0,1219	0,1310	0,0383	0,1977	0,243	0,514
0,70	0,1788	0,1680	0,0576	0,1214	0,1321	0,0398	0,1833	0,241	0,517
0,75	0,1860	0,1692	0,0708	0,1208	0,1333	0,0410	0,1709	0,240	0,521
0,80	0,1932	0,1704	0,0864	0,1202	0,1345	0,0419	0,1601	0,237	0,526
0,85	0,2016	0,1728	0,1032	0,1195	0,1395	0,0422	0,1506	0,235	0,530
0,90	0,2100	0,1752	0,1224	0,1188	0,1370	0,0423	0,1421	0,232	0,535
0,95	0,2208	0,1764	0,1440	0,1180	0,1382	0,0424	0,1346	0,239	0,540
1,00	0,2316	0,1788	0,1680	0,1172	0,1394	0,0425	0,1280	0,228	0,544
V.f.	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	qa^2	qa^2	qb^2	qb^2	qab	qab
M.f.									

* REF. [1]: Barês, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

Tab. 1.44

$$\mu = 0$$

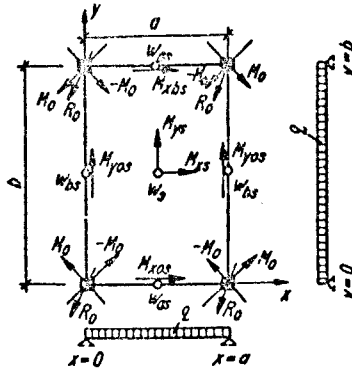
$$\gamma = \frac{a}{b}$$

$$\lambda = \frac{b}{a}$$

$$M_{y0s} = M_{yas}$$

$$M_{x0s} = M_{xbs}$$

$$M_0 = \pm \frac{R_0}{2}$$



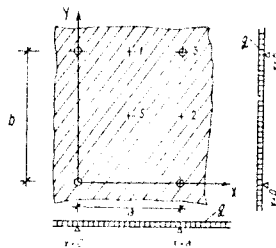
γ	w_s	w_{as}	w_{bs}	M_{xs}	M_{x0s}	M_{ys}	M_{y0s}	R_0
0,50	2,7456	0,3456	2,6880	0,0608	0,2620	0,1218	0,1300	0,250
0,55	1,9532	0,3277	1,8614	0,0677	0,2416	0,1213	0,1322	0,250
0,60	1,4329	0,2958	1,3405	0,0749	0,2251	0,1205	0,1345	0,250
0,65	1,0877	0,2753	0,9937	0,0806	0,2114	0,1198	0,1369	0,250
0,70	0,8533	0,2595	0,7535	0,0858	0,1996	0,1188	0,1395	0,250
0,75	0,6933	0,2501	0,5873	0,0906	0,1901	0,1176	0,1425	0,250
0,80	0,5771	0,2402	0,4658	0,0948	0,1821	0,1161	0,1459	0,250
0,85	0,4911	0,2318	0,3741	0,0986	0,1752	0,1143	0,1494	0,250
0,90	0,4260	0,2231	0,3053	0,1013	0,1695	0,1120	0,1532	0,250
0,95	0,3748	0,2160	0,2513	0,1036	0,1644	0,1091	0,1568	0,250
1,00	0,3384	0,2100	0,2100	0,1055	0,1604	0,1055	0,1604	0,250
V.f.	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	qa^2	qa^2	qb^2	qb^2	qab
M.f.								

λ	w_s	w_{as}	w_{bs}	M_{xs}	M_{x0s}	M_{ys}	M_{y0s}	R_0
0,50	0,1716	0,1680	0,0216	0,1218	0,1300	0,0608	0,2620	0,250
0,55	0,1788	0,1704	0,0300	0,1213	0,1322	0,0677	0,2416	0,250
0,60	0,1860	0,1740	0,0384	0,1206	0,1345	0,0749	0,2251	0,250
0,65	0,1944	0,1776	0,0492	0,1198	0,1369	0,0806	0,2114	0,250
0,70	0,2052	0,1812	0,0624	0,1188	0,1395	0,0858	0,1996	0,250
0,75	0,2195	0,1860	0,0792	0,1176	0,1425	0,0906	0,1901	0,250
0,80	0,2364	0,1908	0,0984	0,1161	0,1459	0,0948	0,1821	0,250
0,85	0,2568	0,1956	0,1212	0,1143	0,1494	0,0986	0,1752	0,250
0,90	0,2796	0,2004	0,1464	0,1120	0,1532	0,1013	0,1695	0,250
0,95	0,3060	0,2052	0,1754	0,1091	0,1568	0,1036	0,1644	0,250
1,00	0,3384	0,2100	0,2100	0,1055	0,1604	0,1055	0,1604	0,250
V.f.	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	$\frac{qa^4}{Eh^3}$	qa^2	qa^2	qb^2	qb^2	qab
M.f.								

* REF. [1]: Barê, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

Tab. 1.119

$\mu = 0$
 $\lambda = \frac{b}{a}$
 1) 2)

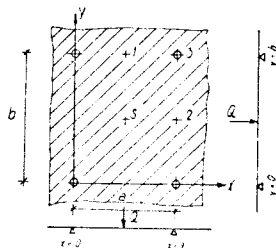


λ	w_s	w_1	w_2	M_{xs}	M_{x1}	M_{x2}	M_{x3}	M_{ys}	M_{y1}	M_{y2}	M_{y3}
1,0	0,0695	0,0521	0,0520	0,0275	0,0573	-0,0298	-0,2624	0,0275	-0,0298	0,0573	-0,2624
1,1	0,0856	0,0570	0,0707	0,0240	0,0620	-0,0254	-0,2878	0,0308	-0,0340	0,0534	-0,2465
1,2	0,1063	0,0616	0,0936	0,0206	0,0671	-0,0214	-0,3140	0,0334	-0,0378	0,0503	-0,2341
1,3	0,1387	0,0663	0,1258	0,0177	0,0725	-0,0180	-0,3412	0,0352	-0,0412	0,0501	-0,2207
1,4	0,1729	0,0705	0,1618	0,0148	0,0776	-0,0151	-0,3672	0,0372	-0,0437	0,0476	-0,2106
1,5	0,2060	0,0765	0,1979	0,0122	0,0831	-0,0125	-0,3922	0,0381	-0,0466	0,0452	-0,2038
2,0	0,5568	0,1016	0,5549	0,0042	0,1104	-0,0044	-0,5216	0,0406	-0,0556	0,0422	-0,1737
3,0											
N. f.	$\frac{qa^4}{Eb^3}$	$\frac{qa^4}{Eb^3}$	$\frac{qa^4}{Eb^3}$	qa^2	qa^2	qa^2	qa^2	qb^2	qb^2	qb^2	qb^2

- 1) Für die Berechnung der Momenten wird die Verteilung der Einzelstützung längs des Umfangs eines Kreises vom Durchmesser $0,02 a$ vorausgesetzt.
 2) Belastung über die ganze Fläche.
 1) For the calculation of the moments the concentrated bearing reaction is assumed to be distributed along the circumference of a circle with a diameter $0,02 a$.
 2) Load acting on the entire area.

Tab. 1.120

$\mu = 0$
 $\lambda = \frac{b}{a}$
 1) 2)



λ	w_s	w_1	w_2	M_{xs}	M_{x1}	M_{x2}	M_{x3}	M_{ys}	M_{y1}	M_{y2}	M_{y3}	M_{xy3}
1,0	0,1906	0,0651	0,0651	0,3185	0,0640	-0,0375	-0,0975	0,3185	-0,0375	0,0640	-0,0975	$\pm 0,0258$
1,1	0,2106	0,0598	0,0850	0,3186	0,0585	-0,0336	-0,0948	0,3268	-0,0418	0,0577	-0,1022	$\pm 0,0256$
1,2	0,2354	0,0560	0,1079	0,3188	0,0540	-0,0296	-0,0934	0,3348	0,0451	0,0752	-0,1060	$\pm 0,0255$
1,3	0,2648	0,0522	0,1362	0,3209	0,0490	-0,0268	-0,0905	0,3428	-0,0478	0,0805	-0,1098	$\pm 0,0252$
1,4	0,2965	0,0497	0,1636	0,3220	0,0462	-0,0226	-0,0892	0,3503	-0,0512	0,0854	-0,1126	$\pm 0,0249$
1,5	0,3295	0,0456	0,1915	0,3232	0,0434	-0,0194	-0,0880	0,3559	-0,0539	0,0905	-0,1152	$\pm 0,0244$
2,0	0,5500	0,0338	0,5916	0,3358	0,0322	-0,0049	-0,0802	0,3825	-0,0641	0,1122	-0,1238	$\pm 0,0277$
N. f.	$\frac{Qa^2}{Eb^3}$	$\frac{Qa^2}{Eb^3}$	$\frac{Qa^2}{Eb^3}$	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q

- 1) Für die Berechnung der Momenten wird die Verteilung der Einzellast sowie der Einzelstützung längs des Umfangs eines Kreises vom Durchmesser $0,02 a$ vorausgesetzt.
 2) Belastung nur im untersuchten Feld.
 1) For the calculation of the moments the concentrated bearing reaction and the concentrated load are assumed to be distributed along the circumference of a circle with diameter $0,02 a$.
 2) Load acting only in the bay under investigation.

* REF. [1]: Barê's, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

Fortsetzung der Tab. 1.121

Größe	0,2			0,3			0,4		0,5	V. f.		
	y/a	x/a	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,3$	$0,4$	$0,5$			
w_s		0,0785	0,1048	0,1220	0,1235	0,1266	0,1457	0,1525	0,1648	0,1753	0,1906	
$w(x, y)$		0,0989	0,1263	0,1482	0,1575	0,1515	0,1703	0,1738	0,1825	0,1841	0,1906	
w_1		0,0577	0,0869	0,1098	0,1151	0,0766	0,0963	0,0973	0,0801	0,0802	0,0651	Qa^2
w_2		0,0577	0,0548	0,0508	0,0401	0,0766	0,0698	0,0534	0,0801	0,0614	0,0651	EI^3
w_3		0,0198	0,0252	0,0276	0,0286	0,0332	0,0376	0,0397	0,0479	0,0513	0,0651	
w_4		0,0198	0,0256	0,0322	0,0401	0,0332	0,0401	0,0534	0,0479	0,0614	0,0651	
M_{xx}		0,0282	0,0532	0,0750	0,0887	0,0560	0,0957	0,1206	0,1268	0,1750	0,3185	
$M_{x(x, y)}$		0,2770	0,1065	0,3222	0,3287	0,3033	0,3177	0,3234	0,3132	0,3198	0,3185	
M_{x1}		0,0393	0,0627	0,0948	0,1400	0,0681	0,0837	0,1047	0,0782	0,0796	0,0640	
M_{x2}		0,0027	-0,0142	-0,0217	-0,0248	-0,0142	-0,0257	-0,0313	-0,0319	-0,0363	-0,0375	
M_{x3}		0,0169	0,0223	0,0258	0,0281	0,0307	0,0374	0,0377	0,0466	0,0486	0,0640	
M_{x4}		-0,0178	-0,0208	-0,0227	-0,0248	-0,0269	-0,0275	-0,0313	-0,0332	-0,0363	-0,0375	Q
M_{x5}		-0,1925	-0,2003	-0,1892	-0,1557	-0,1690	-0,1641	-0,1378	-0,1375	-0,1190	-0,0975	
M_{x6}		-0,0429	-0,0451	-0,0453	-0,0412	-0,0670	-0,0694	-0,0577	-0,0852	-0,0771	-0,0975	
M_{x7}		-0,0222	-0,0321	-0,0376	-0,0385	-0,0396	-0,0521	-0,0577	-0,0630	-0,0771	-0,0975	
M_{x8}		-0,0583	-0,0876	-0,1217	-0,1557	-0,0848	-0,0853	-0,1378	-0,0999	-0,1190	-0,0975	
M_{ys}		0,0282	0,0103	-0,0205	0,0153	0,0560	0,0621	0,0432	0,1268	0,0957	0,3185	
$M_{y(x, y)}$		0,2770	0,2757	0,2827	0,2875	0,3032	0,2995	0,3025	0,3132	0,3127	0,3185	
M_{y1}		0,0027	0,0051	0,0042	-0,0048	-0,0142	0,0192	-0,0247	-0,0319	-0,0376	-0,0375	
M_{y2}		0,0393	0,0441	0,0451	0,0355	0,0681	0,0646	0,0494	0,0782	0,0584	0,0640	
M_{y3}		-0,0178	-0,0302	-0,0312	-0,0239	-0,0269	-0,0326	-0,0311	-0,0332	-0,0352	-0,0375	Q
M_{y4}		0,0169	0,0229	0,0290	0,0355	0,0307	0,0386	0,0494	0,0466	0,0584	0,0640	
M_{y5}		-0,1905	-0,1725	-0,1502	-0,1196	-0,1690	-0,1477	-0,1170	-0,1375	-0,1100	-0,0975	
M_{y6}		-0,0583	-0,0561	-0,0531	-0,0453	-0,0848	-0,0760	-0,0637	-0,0999	-0,0802	-0,0975	
M_{y7}		-0,0222	-0,0287	-0,0372	-0,0453	-0,0396	-0,0501	-0,0637	-0,0630	-0,0802	-0,0975	
M_{y8}		-0,0429	-0,0662	-0,0911	-0,1196	-0,0670	-0,0882	-0,1170	-0,0852	-0,1100	-0,0975	
M_{xys}		-0,0224	0,0227	0,0169	0	-0,0308	-0,0248	0	-0,0321	0	0	
$M_{xy(x, y)}$		0,0291	0,0187	0,0072	0	0,0148	-0,0061	0	0,0052	0	0	
M_{xy1}		0,0262	0,0252	0,0286	0	0,0317	0,0319	0	0,0266	0	0	
M_{xy2}		0,0262	0,0267	0,0276	0,0235	0,0318	0,0272	0,0192	0,0266	0,0105	0	
M_{xy3}		-0,0075	0,0051	0,0035	0	0,0097	0,0053	0	0,0075	0	0	Q
M_{xy4}		-0,0075	-0,0103	-0,0148	-0,0235	-0,0097	-0,0132	-0,0192	-0,0075	-0,0105	0	
M_{xy5}		-0,0402	-0,0377	-0,0280	0	-0,0344	-0,0372	-0,0265	-0,0298	0	-0,0256	
M_{xy6}		0,0112	0,0177	0,0152	0,0152	0,0174	0,0206	0,0191	0,0225	0,0224	0,0256	
M_{xy7}		-0,0075	-0,0105	-0,0132	-0,0152	-0,0150	-0,0164	-0,0191	-0,0205	-0,0224	-0,0256	
M_{xy8}		0,0112	0,0192	0,0178	0	0,0174	0,0206	0,0265	0,0225	0	0,0256	

Tab. 1.122

c/a	$\Delta M(c)$			c/a	$\Delta M(c)$			c/a	$\Delta M(c)$		
	A	B	C		A	B	C		A	B	C
0,005	-0,0552	0,0138	0,0552	0,025	0,0728	0,0182	-0,0728	0,050	0,1281	0,0320	-0,1281
0,008	-0,0178	-0,0045	0,0178	0,030	0,0874	0,0218	-0,0874	0,075	0,1600	0,0400	-0,1600
0,010	0	0	0	0,035	0,0999	0,0245	-0,0999	0,100	0,1748	0,0437	-0,1748
0,015	0,0326	0,0082	-0,0326	0,040	0,1103	0,0276	-0,1103	0,150	0,2162	0,0540	-0,2162
0,020	0,0552	0,0138	-0,0552	0,045	0,1197	0,0299	-0,1197	0,200	0,2384	0,0596	-0,2384
N. f.	qab			qab			qab				

* REF. [1]: Barês, R. - "Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on elastic theory" - edition 1979.

Elastic Analysis of Rectangular Slabs Supported at Corners.

By A. I. TARZI, B.Sc.(Eng.), and A. A. NESSIM, B.Sc.(Eng.), Ph.D., A.M.I. Struct.E.

In the following the method of finite differences^(1, 2, 3) is used to determine the bending and twisting moment coefficients for a rectangular slab supported only at the four corners and loaded at right-angles to its plane. In this analysis it is assumed that the slab deforms elastically under the load and that Poisson's ratio is zero.

The basic equations⁽⁴⁾ governing the analysis are:

$$M_x = -D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; M_y = -D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; M_{xy} = -M_{yx} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};$$

and
$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

The equilibrium and boundary conditions have been derived for rectangular grids in the form of finite differences and the corresponding operating patterns for the various derived points on the grid are shown in Figs. 1 to 8. These patterns can be modified to cater for cases in which the slab is supported on elastic beams. A rectangular grid has been adopted in preference to a square one because it yields the same number of equations for all length: breadth ratios while, when a square grid is used, the number of equations to be solved is generally increased and care has to be exercised in the selection of a suitable size for the grid in order to ensure that each side of the slab divides into a whole number of squares. Two

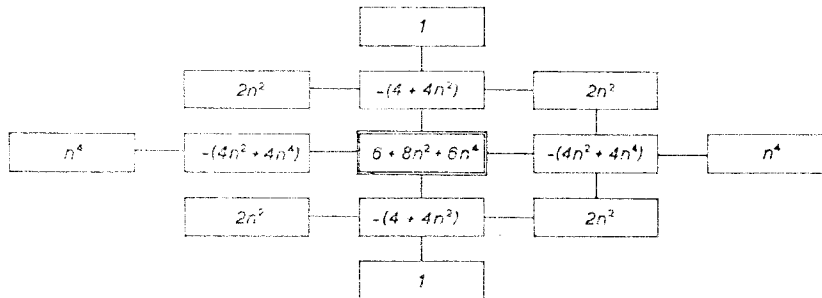


Fig. 1.—Interior Point.

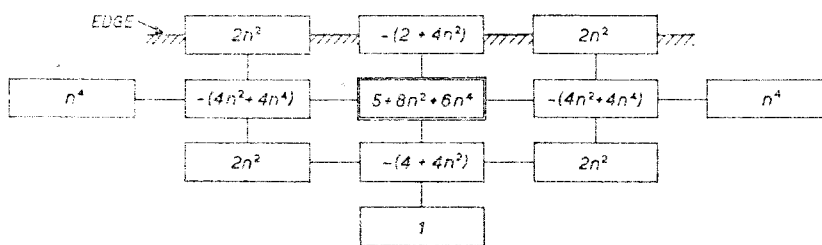


Fig. 2.—Point next to Edge in x-direction.

Operating Patterns.

November 1966

* REF. [16] - Tarzi, A.I.; Nessim, A.A. - "Elastic analysis of rectangular slabs supported at corners" - re vista Concrete and Constructional Engineering - London - november, 1966 - p. 420-25.



ELASTIC ANALYSIS OF RECTANGULAR SLABS.

loading conditions have been considered, namely a uniformly-distributed load over the entire slab, and a concentrated load situated at the centre of the slab.

Two rectangular grids of differing fineness, namely six-by-six and eight-by-eight were employed, so as to give an indication of the relative accuracy of the coefficients obtained for various length : breadth ratios. For a uniformly-distributed load, the coefficients for the central node point and the mid-point of the edge were in agreement to within 1 per cent. for length : breadth ratio of 1.0. rising to within 2 per cent. as an upper limit for the larger length : breadth ratios.

TABLE I.—BENDING-MOMENT COEFFICIENTS $\left(= \frac{B.M.}{q a^2} \right)$ FOR UNIFORM-DISTRIBUTED LOADS.

PT	E/A = 1.00			E/A = 1.10			E/A = 1.20		
	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY
1	.0863	.0000	.0000	.0910	.0000	.0000	.0958	.0000	.0000
2	.1290	.0000	.0000	.1358	.0000	.0000	.1431	.0000	.0000
3	.1525	.0000	.0000	.1593	.0000	.0000	.1676	.0000	.0000
4	.1588	.0000	.0000	.1668	.0000	.0000	.1754	.0000	.0000
5	.0000	.0863	.0000	.0000	.0910	.0000	.0000	.0958	.0000
6	.0022	.0822	.0580	.0630	.0744	.0643	.0638	.0816	.0597
7	.1054	.0494	.0392	.1073	.0606	.0436	.1090	.0730	.0473
8	.1299	.0433	.0193	.1325	.0539	.0217	.1355	.0637	.0239
9	.1378	.0414	.0000	.1406	.0519	.0000	.1436	.0623	.0000
10	.0000	.1290	.0000	.0000	.1358	.0000	.0000	.1431	.0000
11	.0494	.1054	.0392	.0486	.1073	.0224	.0478	.1073	.0419
12	.0685	.0885	.0279	.0673	.1082	.0305	.0662	.1090	.0319
13	.1125	.0788	.0145	.1115	.0982	.0157	.1100	.1095	.0170
14	.1205	.0757	.0000	.1193	.0949	.0000	.1181	.1085	.0000
15	.0000	.1290	.0000	.0000	.1358	.0000	.0000	.1431	.0000
16	.0433	.1299	.0193	.0416	.1325	.0207	.0403	.1312	.0216
17	.0762	.1125	.0145	.0761	.1132	.0153	.0734	.1144	.0147
18	.1016	.1016	.0073	.0983	.1084	.0080	.0949	.1057	.0080
19	.1094	.0980	.0000	.1059	.1027	.0000	.1023	.1001	.0000
20	.0000	.1290	.0000	.0000	.1358	.0000	.0000	.1431	.0000
21	.0414	.1378	.0000	.0397	.1363	.0000	.0380	.1322	.0000
22	.0757	.1205	.0000	.0726	.1299	.0000	.0694	.1259	.0000
23	.0980	.1094	.0000	.0940	.1060	.0000	.0899	.1033	.0000
24	.1057	.1057	.0000	.1014	.1023	.0000	.0970	.1010	.0000

PT	E/A = 1.30			E/A = 1.40			E/A = 1.50		
	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY
1	.0922	.0000	.0000	.0890	.0000	.0000	.0862	.0000	.0000
2	.1446	.0000	.0000	.1384	.0000	.0000	.1330	.0000	.0000
3	.1753	.0000	.0000	.1673	.0000	.0000	.1606	.0000	.0000
4	.1865	.0000	.0000	.1773	.0000	.0000	.1698	.0000	.0000
5	.0000	.0922	.0000	.0000	.0890	.0000	.0000	.0862	.0000
6	.0021	.0943	.0465	.0584	.1001	.0462	.0550	.1055	.0458
7	.1143	.0767	.0278	.1070	.0830	.0265	.1005	.0897	.0290
8	.1514	.0646	.0112	.1407	.0713	.0121	.1314	.0782	.0129
9	.1664	.0592	.0000	.1539	.0660	.0000	.1432	.0740	.0000
10	.0000	.1446	.0000	.0000	.1384	.0000	.0000	.1330	.0000
11	.0450	.1143	.0200	.0418	.1070	.0187	.0396	.1020	.0170
12	.0638	.1067	.0065	.0666	.1032	.0065	.0602	.1056	.0065
13	.1290	.1143	.0036	.1273	.1069	.0026	.1270	.1063	.0028
14	.1645	.1047	.0000	.1493	.1072	.0000	.1391	.1010	.0000
15	.0000	.1446	.0000	.0000	.1384	.0000	.0000	.1330	.0000
16	.0301	.1664	.0013	.0271	.1572	.0003	.0246	.1514	.0018
17	.0762	.1290	.0111	.0699	.1262	.0121	.0644	.1232	.0129
18	.1371	.1290	.0213	.1266	.1257	.0216	.1274	.1223	.0206
19	.1095	.1284	.0000	.1022	.1277	.0000	.1002	.1257	.0000
20	.0000	.1446	.0000	.0000	.1384	.0000	.0000	.1330	.0000
21	.0180	.1664	.0000	.0137	.1572	.0000	.0101	.1514	.0000
22	.0563	.1290	.0000	.0489	.1262	.0000	.0428	.1232	.0000
23	.0834	.1094	.0000	.0749	.1060	.0000	.0679	.1033	.0000
24	.1011	.1017	.0000	.0953	.1027	.0000	.0908	.1010	.0000

November 1966

* REF. [16] - Tarzi, A.I.; Nessim, A.A. - "Elastic analysis of rectangular slabs supported at corners" - revista Concrete and Constructional Engineering - London - november, 1966 - p. 420-25.

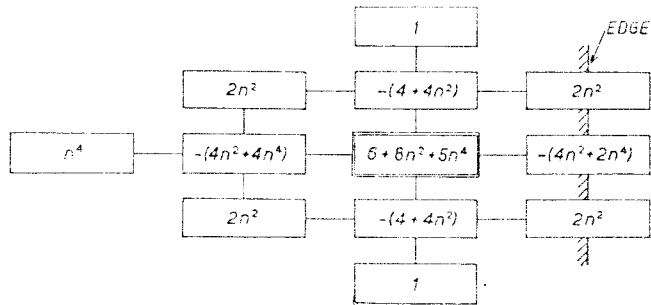


Fig. 3.—Point next to Edge in y-direction.

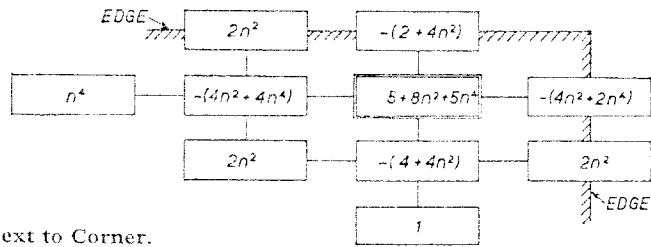


Fig. 4.—Interior Point next to Corner.

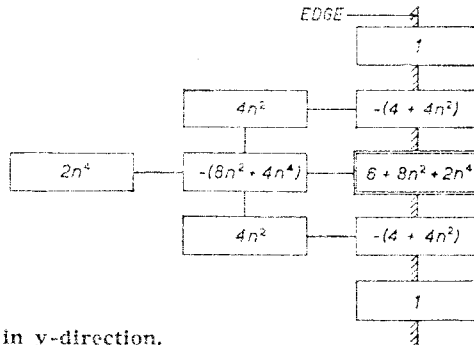


Fig. 5.—Point at Edge in y-direction.

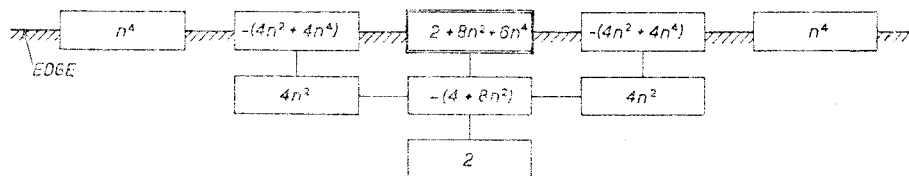


Fig. 6.—Point at Edge in x-direction.

Operating Patterns.

In the case of the central concentrated load, the agreement between the coefficients for the mid-points of the edges are again within 1 to 2 per cent.; that for the central node point is within 6 to 8 per cent. for a length: breadth ratio of 1.0, increasing to 11.5 per cent. for a length: breadth ratio of 2.0, the six-by-six grid giving the lower values.

As a check on the accuracy of the rectangular grid as compared with the

November 1966

* REF. [16] - Tarzi, A.I.; Nessim, A.A. - "Elastic analysis of rectangular slabs supported at corners" - revista Concrete and Constructional Engineering - London - november, 1966 - p. 420-25.



ELASTIC ANALYSIS OF RECTANGULAR SLABS.

square grid, a slab with a length: breadth ratio of 1.5 was analysed by both methods, and the agreement between the bending moment coefficients for a uniformly-distributed load was within 1/2 per cent. while the corresponding figures for the twisting moment coefficients were within 1 per cent. as an upper limit. An independent check on the calculations was obtained by considering the static equilibrium of the slab along all the grid lines in the x and y directions. To do this, the appropriate bending moment coefficients were summed using Simpson's rule for all points along the line and the resulting value was compared with that

TABLE II.— BENDING-MOMENT COEFFICIENTS $\left(= \frac{B.M.}{P} \right)$ FOR CENTRAL CONCENTRATED LOAD.

PT	E/A = 1.00			E/A = 1.10			E/A = 1.20		
	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY
1	.1047	.0000	.0000	.0999	.0000	.0000	.0959	.0000	.0000
2	.1680	.0000	.0000	.1565	.0000	.0000	.1507	.0000	.0000
3	.2119	.0000	.0000	.1970	.0000	.0000	.1851	.0000	.0000
4	.2297	.0000	.0000	.2119	.0000	.0000	.1979	.0000	.0000
5	.0000	.1047	.0000	.0000	.1057	.0000	.0000	.1147	.0000
6	.0717	.0767	.0471	.0711	.0637	.0470	.0694	.0585	.0463
7	.1436	.0565	.0243	.1323	.0645	.0257	.1227	.0704	.0269
8	.1902	.0445	.0068	.1786	.0570	.0056	.1679	.0517	.0100
9	.2208	.0302	.0000	.1990	.0440	.0000	.1873	.0371	.0000
10	.0000	.1660	.0000	.0000	.1785	.0000	.0000	.1857	.0000
11	.0585	.1436	.0243	.0531	.1557	.0228	.0487	.1477	.0214
12	.1233	.1233	.0065	.1118	.1358	.0065	.1022	.1482	.0065
13	.1865	.1045	-.0074	.1681	.1173	-.0059	.1525	.1304	-.0047
14	.2281	.0990	.0000	.2031	.1035	.0000	.1822	.1112	.0000
15	.0000	.2119	.0000	.0000	.2328	.0000	.0000	.2427	.0000
16	.0443	.1962	.0068	.0385	.2154	.0049	.0338	.2245	.0030
17	.1045	.1865	-.0074	.0931	.2063	-.0088	.0839	.2219	-.0100
18	.1600	.1200	-.0219	.1632	.1984	-.0218	.1491	.1955	-.0210
19	.2664	.1626	.0000	.2406	.1808	.0000	.2186	.1925	.0000
20	.0000	.2209	.0000	.0000	.2506	.0000	.0000	.2522	.0000
21	.0262	.2208	.0000	.0290	.2451	.0000	.0250	.2529	.0000
22	.0590	.2261	.0000	.0759	.2353	.0000	.0652	.2325	.0000
23	.1026	.2664	.0000	.1483	.2940	.0000	.1338	.2821	.0000
24	.3395	.3395	.0000	.3206	.3302	.0000	.3048	.3389	.0000

PT	E/A = 1.30			E/A = 1.40			E/A = 1.50		
	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY	MX	MY	MXY
1	.1007	.0000	.0000	.1058	.0000	.0000	.1109	.0000	.0000
2	.1507	.0000	.0000	.1585	.0000	.0000	.1660	.0000	.0000
3	.1763	.0000	.0000	.1854	.0000	.0000	.1949	.0000	.0000
4	.1844	.0000	.0000	.1939	.0000	.0000	.2038	.0000	.0000
5	.0000	.1280	.0000	.0000	.1451	.0000	.0000	.1624	.0000
6	.0545	.1021	.0747	.0653	.1176	.0795	.0600	.1322	.0839
7	.1111	.0864	.0557	.1120	.1010	.0554	.1148	.1117	.0589
8	.1378	.0786	.0261	.1405	.0926	.0281	.1432	.1077	.0299
9	.1485	.0762	.0000	.1495	.0900	.0000	.1524	.1000	.0000
10	.0000	.1940	.0000	.0000	.2192	.0000	.0000	.2402	.0000
11	.0470	.1769	.0477	.0462	.1904	.0499	.0453	.2177	.0517
12	.0849	.1533	.0349	.0836	.1757	.0368	.0822	.2001	.0353
13	.1086	.1428	.0182	.1071	.1681	.0192	.1055	.1953	.0201
14	.1166	.1393	.0000	.1151	.1645	.0000	.1135	.1917	.0000
15	.0000	.2290	.0000	.0000	.2604	.0000	.0000	.2933	.0000
16	.0287	.2101	.0228	.0372	.2414	.0236	.0356	.2752	.0242
17	.0706	.1956	.0171	.0678	.2257	.0178	.0649	.2559	.0183
18	.0973	.1833	.0091	.0877	.2155	.0095	.0840	.2500	.0098
19	.0684	.1797	.0000	.0946	.2119	.0000	.0907	.2486	.0000
20	.0000	.2215	.0000	.0000	.2739	.0000	.0000	.3088	.0000
21	.0302	.2230	.0000	.0345	.2502	.0000	.0327	.2920	.0000
22	.0661	.2074	.0000	.0628	.2413	.0000	.0596	.2778	.0000
23	.0656	.1971	.0000	.0614	.2315	.0000	.0772	.2664	.0000
24	.0924	.1935	.0000	.0878	.2260	.0000	.0833	.2651	.0000

November 1966

* REF. [16] - Tarzi, A.I.;Nessin. A.A. - "Elastic analysis of rectangular slabs supported at corners" - revisa Concrete and Constructional Engineering - London - november, 1966 - p. 420-25.

A. I. TARZI AND A. A. NESSIM.

CONCRETE

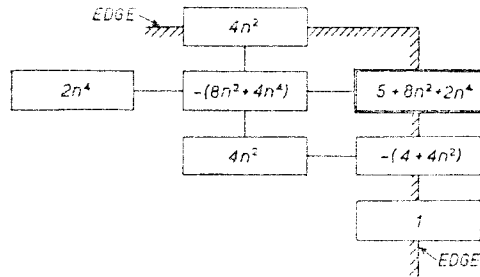


Fig. 7.—Point at Edge next to Corner in x-direction.

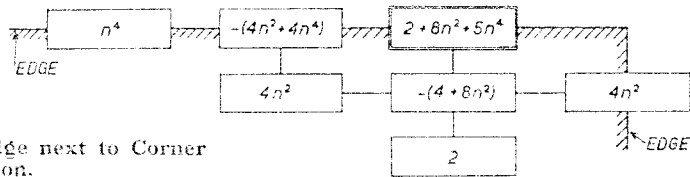


Fig. 8.—Point at Edge next to Corner in y-direction.

Operating Patterns.

obtained for a corresponding point on a freely-supported beam subjected to the same loading. For example for a slab loaded uniformly with a load of q per unit area, the foregoing summation, when applied along the centre-line parallel to the x -axis should give a moment of $\frac{1}{3}qb^2$. Similarly the corresponding summation along the centre-line parallel to the y -axis should give a moment of $\frac{1}{3}qa^2$ under the same loading condition where a and b are the lengths of the sides in directions x and y respectively, a being the shorter side. For a central concentrated load P , the summations along the centre-lines should give moments of $\frac{1}{4}Pb$ and $\frac{1}{4}Pa$, respectively, depending on the direction considered.

The bending and twisting coefficients are tabulated in *Tables I and II*, for various length : breadth ratios. To obtain the actual value of the moment per unit width of the slab under a uniformly-distributed loading, the tabulated

				b				
SUPPORT				AX	SUPPORT			
				20	15	10	5	0
				21	16	11	6	1
				22	17	12	7	2
				23	18	13	8	3
				24	19	14	9	4
								Y
								a
SUPPORT				SUPPORT				

Fig. 9.

November 1966

* REF. [16] - Tarzi, A.I.; Nessim, A.A. - "Elastic analysis of rectangular slabs supported at corners - *revista Concrete and Constructional Engineering* - London, november, 1966 - p. 420-25.

coefficients have to be multiplied by aa^2 while to obtain the corresponding f_{11} for the concentrated central load the tabulated coefficients should be multiplied by the actual value of the concentrated load P . Reference points for the grid are shown in Fig. 9.

The authors thank University of Surrey for permission to use their Ferranti Sirius computer for the foregoing work.

BIBLIOGRAPHICAL REFERENCES

1. JENSON, V. P.—University of Illinois. Bulletin No. 332.
2. WOOD, R. H.—'Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates'. Thames & Hudson. 1961.
3. NESSIM, A. A.—'Concrete and Constructional Engineering'. Feb. 1963.
4. TIMOSHENKO, S., and WOJNOWSKY-KRIEGER, S.—'Theory of Plates and Shells'. McGraw-Hill. 1959.

Examination of Older Concrete Buildings.

A RECENT examination of two outstanding structures built before World War II, namely the De la Warr Pavilion at Bexhill-on-Sea and the Gilbey Building, Camden Town, London, is reported in a publication* issued recently by the Building Research Station of the Ministry of Technology. It is a supplement to a report published in 1964, which dealt with thirteen buildings in the London area; this document was commented upon in this journal for February 1965. The present well-illustrated studies review both buildings after they had been in use for some thirty years, and thereby provide a guide to their success as regards planning and structural performance.

The De la Warr Pavilion was designed by Serge Chermayeff and Erich Medelsohn and is described as being one of the few modern buildings of architectural interest on the coast of Britain. Although basically it is an early example of a site-welded steel frame, there is much secondary concrete work in the structure and finishes. Part of the costly post-war maintenance work has been due to the initial use of some cheap components but, in spite of the lack of adequate maintenance during the war, the building is

reported to have stood up reasonably well to the marine atmosphere. It was subjected to a certain amount of war damage.

The Gilbey Building in north London was also designed by Serge Chermayeff. It was inspected in 1962, but subsequently alterations have been made. The building is reported to have continued to serve the purpose of an office block satisfactorily and compares favourably with some current construction in the working environment it provided. The structure is almost entirely of reinforced concrete, exposed faces of concrete walls and the like being painted (not rendered). Settlement of the column foundations has occurred but, with this exception, the structure is reported to be satisfactory.

Pierced Shear-walls.

IN March, April, and May 1965, a series of articles entitled 'Pierced Shear-walls' by D. Magnus appeared in this journal. MR E. LERNER of Bucharest has written to point out that in these articles, the values given by Chart I do not agree with those obtained by expression (27) and Chart IV. The Author agrees that Chart I is incorrect and thanks Mr Lerner for drawing his attention to the error. The amended Chart I is reproduced on page 426. It should also be noted that on page 98 of the number for March 1965, the term $n^2abn\sqrt{ab}$ in equation (26) should read $n^2abn\sqrt{ab}$, and that on Chart III on page 94, M_b should read M_r .

* 'Qualitative Study of Buildings.' By R. B. White. Building Research Station National Building Studies Special Report 39. Published for the Ministry of Technology by H.M.S.O. Price 27s. 6d.

* REF. [16] - Tarzi, A.I.; Nessim, A.A. - "Elastic analysis of rectangular slabs supported at corners" - revista Concrete and Constructional Engineering - London - november, 1966 - p. 420-25.