

CHARNEIRAS PLÁSTICAS EM LAJES COM FORMA DE T  
ESTUDO EXPERIMENTAL

ENG. LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos da Universidade de São Paulo como  
parte dos requisitos para a obtenção do título  
de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Telemaco van Langendonck

Prof. Dr. Ilio Montanari

Prof. Dr. Dante A.O. Martinelli  
(Orientador)

Prof. Dr. Péricles Brasiliense Fusco  
(Suplente)

Prof. Dr. Regis L.R. Lima  
(Suplente)

São Carlos, dezembro de 1980

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dante A.O. Martinelli, pela orientação, pelo estímulo e, sobretudo, pela contribuição em minha formação profissional.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, que tornou possível a realização deste trabalho, fornecendo bolsa de mestrado e contribuindo na aquisição de materiais e no pagamento de serviços técnicos.

Ao Laboratório de Estruturas da EESC, nas pessoas de seus técnicos Guarino Zambon Júnior e Jorge Luiz Rodrigues Brabo entre outros, todos extremamente dedicados e atenciosos.

Ao Eng. José Samuel Giongo, pela valiosa ajuda na fase final dos experimentos.

À Dona Wilma Provinciali Vall e ao Rui Roberto Casale, pela rapidez e precisão nos serviços de datilografia.

Ao desenhista Benedito Sergio Candiano, pela disponibilidade e pela boa vontade que sempre me foi assegurada.

À Professora Lia Miranda Pinheiro Melges, pela eficiente colaboração em todas as vezes que foi solicitada.

À Tânia,  
dedico este trabalho

## SUMÁRIO

Apresenta-se estudo experimental sobre a aplicação da teoria das charneiras plásticas às lajes com forma de T dada por Langendonck (1972). Nessa aplicação foi deliberadamente desprezada a influência de alguns aspectos secundários, tais como o processo de fissuração anterior à ruína, o impedimento dos deslocamentos horizontais e a redução da armadura superior.

Ensaíram-se até a ruína 16 modelos com forma de T simétrico, uniformemente carregados, confirmando-se a pequena influência das simplificações admitidas por Langendonck.

## ABSTRACT

An experimental study on the application made by Langendonck (1972) of the Yield Lines Theory to T shaped slabs is presented. In that application, some secondary aspects were purposely neglected, namely the influence of the progress of cracking, that of the restraining of horizontal displacements and, finally, the influence of the reduction of the upper reinforcement.

Sixteen models, of symmetrical T shape and uniformly loaded, were tested up to collapse. The tests confirmed the small influence of Langendonck's simplifying assumptions.

## Í N D I C E

1 - <u>INTRODUÇÃO</u> .....	1-1
1.1 - PRELIMINARES .....	1-1
1.2 - COMPORTAMENTO DAS LAJES .....	1-4
1.2.1 - Fases de comportamento .....	1-5
1.2.2 - Efeitos de arqueamento e de membrana tracionada .....	1-6
1.3 - PANORAMA DA PESQUISA EXECUTADA .....	1-9
2 - <u>A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS</u> .....	2-1
2.1 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....	2-1
2.1.1 - Materiais elasto-plásticos e rígido-plásticos .....	2-1
2.1.2 - Hipóteses gerais .....	2-3
2.1.3 - Isotropia, anisotropia e ortotropia .....	2-4
2.1.4 - Transformação de lajes ortótropas em isotropas .....	2-6
2.2 - CONFIGURAÇÕES DAS CHARNEIRAS .....	2-7
2.3 - PROCESSO DAS FORÇAS NODAIS .....	2-10
2.4 - PROCESSO DA ENERGIA .....	2-11
2.4.1 - Energia absorvida pelas charneiras	2-12
2.4.2 - Energia desenvolvida pelas cargas	2-12
2.4.3 - Determinação do momento de plastificação .....	2-13
2.4.4 - Determinação da carga .....	2-13

2.5 - LAJES POLIGONAIS UNIFORMEMENTE CARREGADAS	2-13
2.5.1 - Configurações com um único vértice interno .....	2-14
2.5.2 - Configurações com dois ou mais vértices internos .....	2-19
2.5.3 - Expressões gerais .....	2-21
2.5.4 - Aplicação no modelo com forma de T	2-22
2.6 - BIFURCAÇÃO DAS CHARNEIRAS NOS CANTOS .....	2-23
2.6.1 - Ocorrência das bifurcações .....	2-24
2.6.2 - Efeito das bifurcações .....	2-24
2.6.3 - Efeito das bifurcações no modelo .	2-26
2.7 - SUPRESSÃO PARCIAL DA ARMADURA SUPERIOR ...	2-28
3 - <u>AS LAJES COM FORMA DE T</u> .....	3-1
3.1 - NOTAÇÃO EMPREGADA .....	3-1
3.2 - CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS DE RUÍNA DAS LAJES T .....	3-3
3.2.1 - Ruína total .....	3-4
3.2.2 - Ruína em cone circular .....	3-7
3.2.3 - Ruína parcial da mesa .....	3-8
3.2.4 - Ruína parcial da perna .....	3-12
3.3 - DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA .....	3-14
3.3.1 - Marcha de cálculo .....	3-15
3.3.2 - Tabelas auxiliares .....	3-16
3.3.3 - Cálculo dos modelos .....	3-24
4 - <u>A EXPERIMENTAÇÃO</u> .....	4-1
4.1 - CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS E DOS ENSAIOS	4-1
4.2 - ENSAIOS ACESSÓRIOS .....	4-4
4.2.1 - Ensaio do micro-concreto .....	4-4
4.2.2 - Ensaio das armaduras .....	4-5
4.2.3 - Ensaio das faixas .....	4-5

4.3	- CONFEÇÃO DOS MODELOS .....	4-6
4.3.1	- Composição do micro-concreto .....	4-6
4.3.2	- Confeção das armaduras .....	4-9
4.3.3	- Formas para a concretagem .....	4-12
4.3.4	- Moldagem e cura .....	4-14
4.4	- EQUIPAMENTOS UTILIZADOS .....	4-15
4.4.1	- Sistemas de apoio .....	4-16
4.4.2	- Estrutura de reação .....	4-18
4.4.3	- Distribuição da carga .....	4-24
4.4.4	- Aparelhos de medida .....	4-27
4.5	- PREPARAÇÃO DOS MODELOS E EXECUÇÃO DOS ENSAIOS .....	4-28
4.6	- DOCUMENTAÇÃO FOTOGRÁFICA .....	4-29
5	- <u>OS RESULTADOS</u> .....	5-1
5.1	- RESULTADOS DOS ENSAIOS DOS MODELOS .....	5-1
5.1.1	- Principais valores das cargas e das correspondentes flechas .....	5-1
5.1.2	- Gráficos cargas-flechas .....	5-2
5.1.3	- Configurações de ruína .....	5-2
5.1.4	- Progresso da fissuração .....	5-2
5.2	- RESULTADOS DOS ENSAIOS ACESSÓRIOS .....	5-33
5.2.1	- Características mecânicas do micro-concreto .....	5-34
5.2.2	- Características mecânicas das armaduras .....	5-37
5.2.3	- Resultados dos ensaios das faixas	5-38
6	- <u>ANÁLISE DOS RESULTADOS</u> .....	6-1
6.1	- ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS SEÇÕES .....	6-1
6.1.1	- Pré-dimensionamento .....	6-1
6.1.2	- Momento resistente da seção suposta sem armadura .....	6-3
6.1.3	- Momentos resistentes das seções fissuradas .....	6-5
6.1.4	- Momentos resistentes teóricos e experimentais .....	6-6



6.2 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS LAJES .....	6-8
6.2.1 - Cargas e configurações de ruína <u>pre</u> vistas .....	6-8
6.2.2 - Cargas e configurações de ruína ex- perimentais .....	6-9
6.2.3 - Comparação entre as cargas de ruína previstas e as experimentais .....	6-9
7 - <u>CONSIDERAÇÕES FINAIS</u> .....	7-1
7.1 - SOBRE OS RESULTADOS DA EXPERIMENTAÇÃO .....	7-1
7.2 - SOBRE SIMPLIFICAÇÕES NO CÁLCULO .....	7-4
7.3 - SOBRE NOVAS PESQUISAS .....	7-7
8 - <u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	8-1

## 1 - INTRODUÇÃO

### 1.1 - PRELIMINARES

A análise do comportamento estrutural tem como principal objetivo garantir à estrutura adequada segurança contra a ruína e, além disso, evitar que deformações excessivas ou fissuração inadequada a prejudiquem durante sua utilização.

Os métodos de cálculo baseados no comportamento elástico, indispensáveis no estudo do comportamento da estrutura durante sua utilização, com respeito à ruína apresentam limitações.

A primeira delas é que, para certos tipos de estruturas indeterminadas, é difícil encontrar solução precisa pelo cálculo em regime elástico, sendo adotadas, muitas vezes, soluções aproximadas ou, mesmo, apenas estimadas. É o que ocorre com as lajes pois, fora os casos das formas simples e dos carregamentos padrões, as equações diferenciais e as condições de contorno tornam-se complexas, exigindo o emprego de técnicas como a dos elementos finitos e o uso de computadores, recursos estes nem sempre de fácil acesso ao engenheiro comum.

Segunda limitação, e talvez mais séria, é que os métodos elásticos não fornecem indicação precisa da segurança, porque por ocasião da ruína o material se comporta plasticamente, contrariando portanto as hipóteses da teoria da elasticidade.

Felizmente, entretanto, os métodos elásticos não são indispensáveis, pois há técnica alternativa, baseada no comportamento plástico, que pode ser adotada. O método das linhas de ruptura de JOHANSEN (1932)(\*), também conhecido como teoria das charneiras plásticas, é excelente para encontrar soluções para o comportamento das lajes durante a ruína; não interessa quão complexa é a forma da laje ou a distribuição do carregamento, pois, eventualmente com algumas simplificações, é sempre possível obter um valor realístico da carga de ruína.

Apesar de BACH (1890(\*\*)), MÖRSCH (1916) e SUENSON (1916) já apresentarem métodos de cálculo baseados na ruptura, que no entanto só se aplicavam a alguns casos particulares, foi somente em 1921, na revista *Ingeniören*, que o dinamarquês Ingerslev iniciou a teoria das charneiras plásticas, mais corretamente tratada e desenvolvida por seu compatriota Johansen, e por isso a este atribuída.

Nesse trabalho, também publicado em Inglês (INGERSLEV, 1923), deduziu fórmulas para lajes retangulares livremente apoiadas e engastadas, baseando-se na hipótese de que elas rompessem, devido ao escoamento da armadura, segundo linhas retas, ao longo das quais o momento fletor era constante e os esforços cortantes nulos.

No trabalho publicado em dinamarquês em 1931, e divulgado no ano seguinte pela *Association Internationale des Ponts et Charpents*, Johansen criticou o trabalho de Ingerslev pela consideração errônea dos esforços cortante nulos ao longo das linhas de ruptura, introduzindo, em substituição, o conceito de forças nodais, que lhe permitiu calcular as resultantes desses esforços nos cruzamentos das linhas de ruptura e deduziu fórmulas para momentos de ruptura em diversos tipos de laje. Apesar de também haver restrições, como se verá no item 2.3, quanto à aplicação

---

(\*) Autor e data identificam as referências bibliográficas, ordenadas alfabeticamente no capítulo 8.

(\*\*) O método de Bach também pode ser encontrado em BACH e BAUMANN (1928) e em BELLUZZI (1954).

das forças nodais, as demais hipóteses formuladas são até hoje aceitas e corroboradas por numerosos ensaios em diversos países.

Nos anos seguintes à publicação desse trabalho de Johansen, pouco desenvolvimento foi dado à teoria, salientando-se os trabalhos de GVOZDEV (1934, 1938, 1939, 1948, 1949a, 1949b e 1953) na União Soviética, os do próprio JOHANSEN (1943 e 1949) na Dinamarca e o de CHAMECKI (1948) no Brasil. Os trabalhos de Johansen foram condensados, no Brasil, num único volume (JOHANSEN, 1962), com tradução de Jayme Mason.

Somente depois de 1950 é que a teoria das charneiras plásticas tomou grande impulso no exterior, e depois de 1960 no Brasil. Foram relativamente abundantes os trabalhos a ela dedicados e, alguns, extremamente expressivos, entre os quais podem ser destacados o de JONES e WODD (1967) na Inglaterra e os de LANGENDONCK (1970 e 1975) no Brasil.

Com respeito às lajes com forma de T em planta uniformemente carregadas, que se encontram entre aquelas para as quais são geralmente adotadas soluções aproximadas ou, o que é pior, vigas intermediárias dividindo-as em elementos retangulares, existe estudo particularizado, pela teoria das charneiras plásticas, feito por LANGENDONCK (1972) na publicação da ABCP intitulada "Lajes com forma de T ou L".

Nesse estudo, foram deliberadamente desprezados alguns aspectos secundários, tais como o processo de fissuração anterior à ruína, os efeitos do impedimento dos deslocamentos horizontais e as consequências da redução da armadura negativa. O trabalho que ora se apresenta oferece resultados experimentais complementares, que já dão razoável confirmação de serem adequadas as simplificações de Langendonck. Para modelos com forma de T simétrico, engastados no contorno, foram observados especificamente o progresso da fissuração e das flechas, as cargas e as configurações

rações de ruína, os efeitos do impedimento dos deslocamentos horizontais e os efeitos da supressão parcial da armadura negativa.

Pretende-se oferecer, no que se segue, visão panorâmica deste trabalho. No próximo item deste capítulo introdutório, comenta-se o comportamento das lajes de concreto armado, apresentando-se, em seguida, um esboço da pesquisa executada.

No capítulo 2, seguindo-se fundamentalmente Langendonck, apresentam-se tópicos da teoria das charneiras plásticas indispensáveis à compreensão do trabalho sobre as lajes T, também de Langendonck, que se pretende complementar com resultados experimentais e que se apresenta resumidamente no capítulo 3, onde se encontram também os resultados teóricos.

No capítulo 4, trata-se da experimentação, apresentando-se as características dos modelos, dos equipamentos e dos ensaios, cujos resultados encontram-se no capítulo 5 e são comparados no capítulo 6.

As conclusões finais são apresentadas no capítulo 7, onde se comentam também alguns aspectos que poderiam melhorar esta pesquisa.

Finalmente, no capítulo 8, oferece-se bibliografia mais ampla do que a efetivamente empregada, embora ainda incompleta, tratando inclusive de aspectos aqui comentados apenas sucintamente, pretendendo-se com isto colaborar com possíveis trabalhos afins.

## 1.2 - COMPORTAMENTO DAS LAJES

As lajes, assim como outras peças de concreto armado submetidas à flexão, podem atingir a ruína por ruptura do concreto à compressão, caso no qual são ditas super-armadas, ou por escoamento da armadura de tração, sendo então denominadas sub-armadas. As peças super-armadas são

perigosas, porque há possibilidade da ruína ocorrer sem a apresentar sintomas visíveis da sua iminência, e anti-econômicas, pelo mau aproveitamento da armadura. Essas peças devem portanto ser evitadas, e as lajes empregadas são geralmente sub-armadas.

### 1.2.1 - Fases de comportamento

Em lajes sub-armadas, submetidas à ação de cargas proporcionais, observam-se diversas fases de comportamento que podem ser visualizadas no diagrama esquemático da figura 1.1.

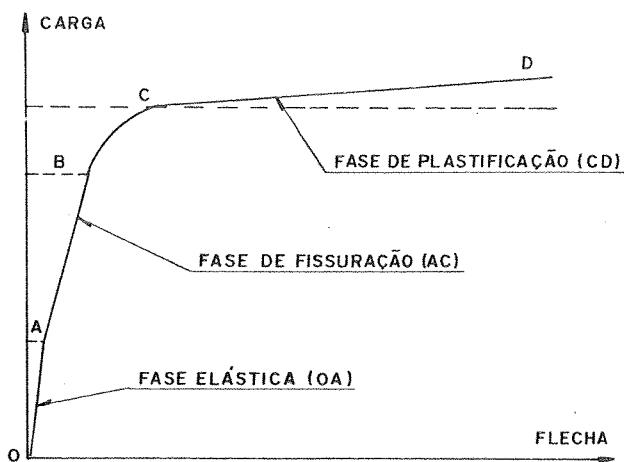


FIGURA 1.1 - Fases de comportamento das lajes sub-armadas

Inicialmente, para pequenas cargas, tem-se a fase elástica (trecho OA da figura 1.1), onde o concreto resiste à tração e a laje comporta-se de acordo com a teoria das placas em regime elástico.

Continuando o carregamento, a resistência do concreto à tração logo é ultrapassada nas seções mais solicitadas, iniciando-se a fase de fissuração. A formação das fissuras faz com que haja um crescimento mais rápido dos momentos fletores nas seções não fissuradas, originando

portanto novas fissuras. Enquanto as armaduras permanecem em regime elástico linear (trecho AB da figura 1.1), a laje ainda se comporta de acordo com a teoria das placas em regime elástico desde que se considere a redução de rigidez das seções fissuradas; o crescimento das deformações é mais acentuado que na fase anterior. Quando as armaduras ultrapassam o regime elástico linear (trecho BC da figura 1.1), o crescimento das deformações é mais acentuado ainda.

Com o crescimento dos momentos fletores nas seções mais solicitadas, as armaduras entram em escoamento dando início à fase de plastificação (trecho CD da figura 1.1). Nesta fase, caracterizada por grandes deformações, há uma redistribuição de esforços bem mais pronunciada que na fase anterior; nas seções plastificadas, os momentos fletores permanecem praticamente constantes, crescendo nas seções vizinhas até que estas se plastifiquem, e assim sucessivamente até o completo desenvolvimento das linhas de plastificação.

Após o completo desenvolvimento das linhas de plastificação, com a subida da linha neutra o concreto rompe por compressão nas seções mais solicitadas, impossibilitando a continuidade do carregamento sem ocorrer o colapso. Diz-se que a laje atingiu a ruína, sendo a carga máxima aplicada denominada carga de ruína.

Pelo fato das linhas de plastificação funcionarem como eixos de rotação para as regiões não plastificadas, elas são chamadas charneiras plásticas, sendo que a configuração por elas apresentada é denominada configuração de ruína.

### 1.2.2 - Efeitos de arqueamento e de membrana tracionada

Em lajes com deslocamentos horizontais impedidos, entretanto, mesmo quando completada a configuração de ruína, ou até depois, com as deformações plásticas já excessi

vas, o estado final de ruína pode ser atingido somente a p<sub>ós</sub> esgotada uma reserva de resist<sup>ê</sup>ncia da laje. Neste caso, a reserva de resist<sup>ê</sup>ncia da laje pode ser explicada pelo fato de n<sup>ã</sup>o se considerarem os efeitos das for<sup>ças</sup> longitudinais provenientes da mudan<sup>ça</sup> de forma do plano médio da laje, também denominados efeitos de membrana.

Seja, por exemplo, uma laje engastada no contorno e cuja se<sup>ç</sup>ão transversal é indicada na figura 1.2, submetida a carregamento crescente uniformemente distribuído. Durante a fase el<sup>á</sup>stica, a linha neutra permanece próxima da linha média da se<sup>ç</sup>ão. Iniciada a fase de fissura<sup>ç</sup>ão, o aparecimento das fissuras faz com que a linha neutra se desloque para as proximidades das faces comprimidas. Sendo ainda pequenos os deslocamentos transversais da laje, na região dos momentos negativos - tra<sup>ç</sup>ão na face da laje onde atuam as cargas - a linha neutra permanece abaixo da linha neutra correspondente aos momentos positivos - tra<sup>ç</sup>ão na face oposta àquela onde atuam as cargas - fazendo com que a laje tenha um comportamento de casca (ver figura 1.2), caracterizando o "efeito compressivo de membrana" ou efeito de arqueamento.

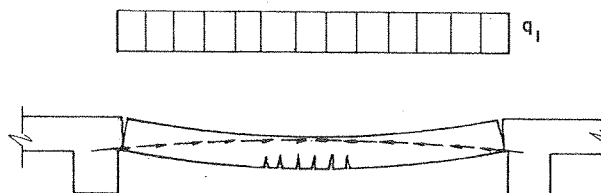


FIGURA 1.2 - Efeito de arqueamento

Na fase de plastificação, as grandes deformações transversais fazem com que o efeito de arqueamento diminua, até as forças longitudinais mudarem de compressão para tra<sup>ç</sup>ão. Nessa situação a laje encontra-se bastante plastificada e tem o comportamento de uma estrutura p<sup>ê</sup>nsil, caracterizando o efeito de membrana tracionada (ver figura 1.3); como somente a armadura é responsável, pela capacidade resistente, esse efeito fica bem caracterizado nas lajes com



elevada taxa de armadura, mesmo sendo simplesmente apoiadas.

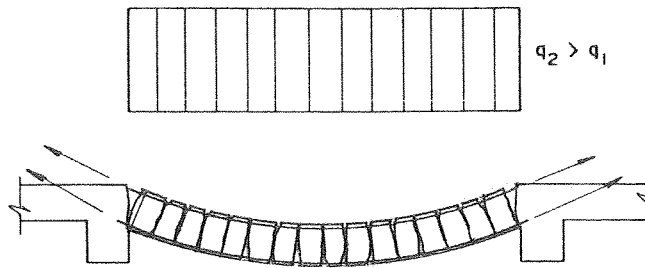


FIGURA 1.3- Efeito de membrana tracionada

Os aspectos qualitativos dos efeitos de arqueamento e de membrana tracionada podem também ser visualizados nos diagramas da figura 1.4, tanto para as lajes engastadas como para as simplesmente apoiadas.

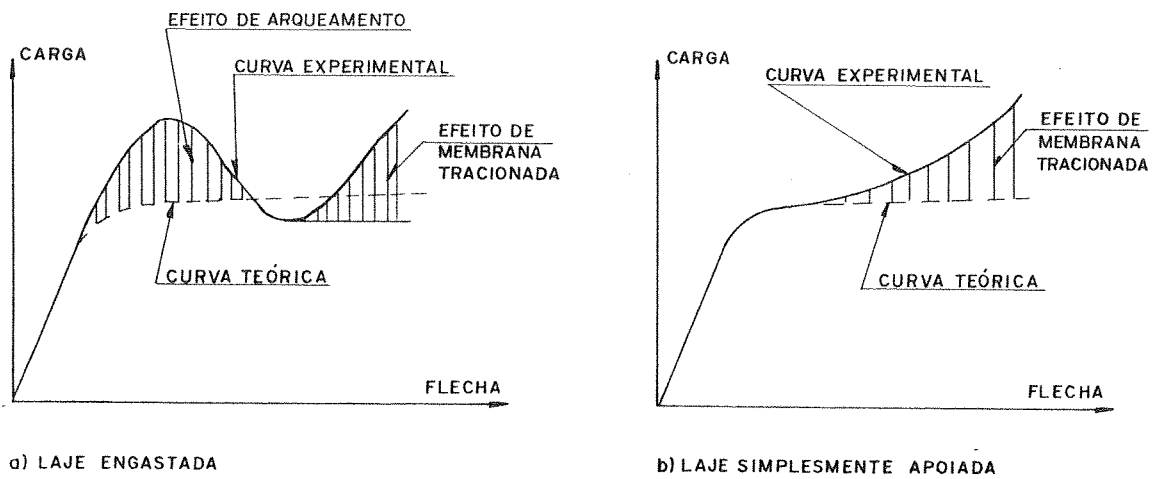


FIGURA 1.4- Efeitos de arqueamento e de membrana tracionada

Uma análise mais rigorosa desses efeitos de membrana não faz parte deste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de OCKLESTON (1955 e 1958), GUYON (1958), PARK (1964a, 1964b, 1964c, 1964d, 1965 e 1966), BASTOS (1977) e PADILHA (1979), entre diversos outros.

### 1.3 - PANORAMA DA PESQUISA EXECUTADA

A experimentação ora apresentada refere-se, como já se disse, às lajes com forma de T simétrico uniformemente carregadas e engastadas no contorno. Na escolha das proporções entre suas dimensões, foram considerados dois aspectos principais. No primeiro deles, evitaram-se proporções que resultassem em mesa ou perna do T muito estreitas, para as quais o comportamento seria evidentemente de laje retangular. Num segundo aspecto era considerada a simplicidade do sistema de distribuição de carga. Adotando-se modelos formados por quatro quadrados iguais, três formando a mesa e um formando a perna do T, foram satisfeitos os dois aspectos. A configuração de ruína esperada encontra-se indicada no item 3.3.3, e a carga foi aplicada por quatro macacos atuando em paralelo, cada um colocado no centro dos quadrados fundamentais, em cada um dos quais a carga foi distribuída em 16 pontos, como se indica no item 4.4.3.

A indisponibilidade de estrutura de reação que permitisse o ensaio desses modelos com forma de T resultou na construção de estrutura de reação específica, executada com perfis metálicos. Modelos muito grandes exigiriam estrutura de reação muito dispendiosa, além do custo dos próprios modelos. Adotaram-se então modelos com os quadrados fundamentais com 40cm de lado, resultando as dimensões indicadas na figura 1.5.

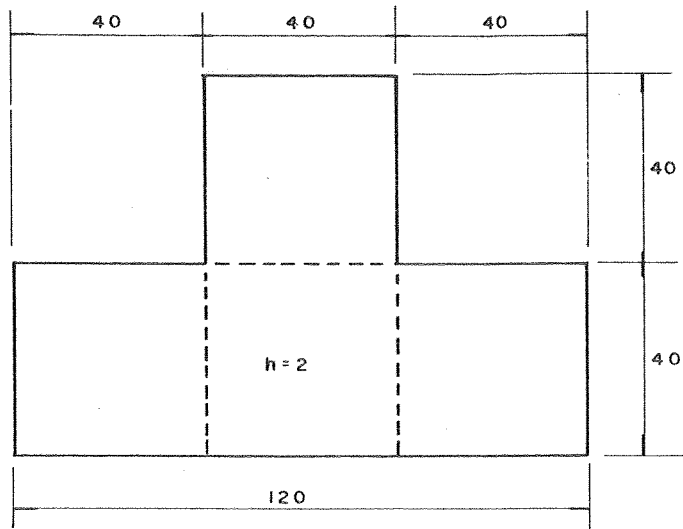


FIGURA 1.5 - Dimensões dos modelos em centímetros

Foi adotada a espessura  $h = 2$  cm. Sendo a menor dimensão da laje  $\ell = 40$  cm, tem-se  $h/\ell = 1/20$ , tratando-se então de uma placa delgada e servindo, portanto, para a determinação de resultados experimentais. Uma espessura menor, talvez mais realista em relação às demais dimensões, mas que exigiria maior cuidado durante a execução, não foi considerada vantajosa.

Para se fazer analogia com lajes de dimensões usuais, para uma escala  $\lambda = 7,5$ , por exemplo, corresponderiam lajes com a mesa do T medindo 3m de largura por 9m de comprimento, a perna medindo 3m por 3m, e com 15cm de espessura. Como se nota a espessura é de fato algo exagerada, mesmo para lajes bastante carregadas (saguão de biblioteca, local de depósito, de arquivo, de máquinas pesadas, etc), mas ainda compatível com a espessura máxima geralmente admitida para lajes maciças usuais.

Ensaaiaram-se 16 modelos divididos em quatro séries. Além do progresso da fissuração e das flechas e, além das cargas e das configurações de ruína, que se observaram em todos os ensaios, avaliaram-se, nas duas primeiras séries, os efeitos do impedimento dos deslocamentos horizontais e, nas duas últimas, os efeitos da supressão parcial das armaduras negativas.

O material empregado foi o micro-concreto, cuja resistência média à compressão resultou  $f_{c28} = 272 \text{ kgf/cm}^2$ .

As armaduras foram retiradas de dois lotes de a<sub>rame</sub> recozido número 18: um para as duas primeiras séries e outro para as duas séries restantes. As características geométricas aproximadas das armaduras nas duas direções, tanto as positivas quanto as negativas, são as seguintes: diâmetro 1,25 mm, espaçamento 2,5 cm, área da seção transversal  $0,50 \text{ cm}^2/\text{m}$  e taxa de armadura 0,25%.

Pensava-se inicialmente, baseando-se em características previamente avaliadas, que a taxa adotada fosse superior à taxa mínima, apesar de pequena em se tratando de lajes usuais suficientemente carregadas para justificar a espessura adotada. Os ensaios caracterizadores dos materiais mostraram, posteriormente, que a taxa era inferior à mínima, o que foi constatado nos ensaios das faixas. O fato de as lajes serem pouco armadas também pode ser notado nos ensaios dos modelos, o que, entretanto, não invalidou a experimentação, pois levado em conta na interpretação dos resultados possibilitou conclusões coerentes.

Maiores detalhes sobre a pesquisa executada encontram-se nos capítulos 4, 5, 6 e 7.

## 2 - A TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

### 2.1 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS

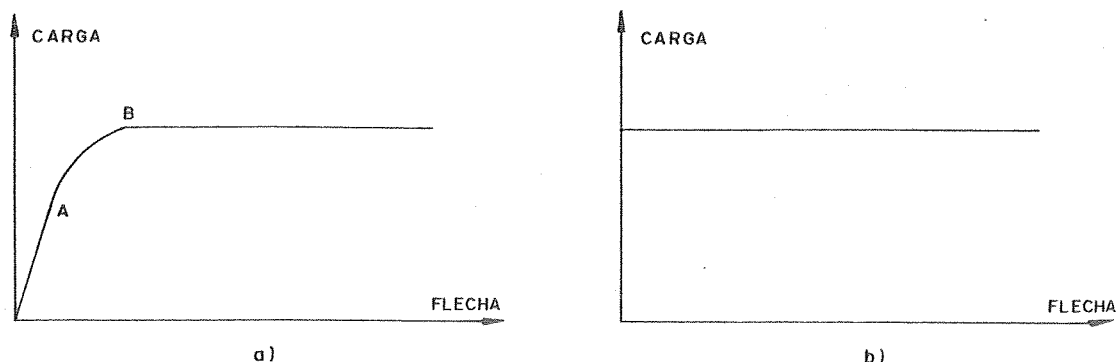
A teoria das charneiras plásticas, conforme já comentado no capítulo anterior, apresenta um método de cálculo, baseado no comportamento plástico do material, que permite avaliação da carga de ruína de lajes de concreto armado.

Existem dois processos de cálculo. O primeiro deles, empregado na teoria original de Johansen e em outros trabalhos que a sucederam, denominado processo do equilíbrio ou processo das forças nodais, tem suas particularidades apresentadas sucintamente no item 2.3, onde se comentam também suas limitações. Essas limitações não estão presentes num segundo processo, denominado processo do trabalho ou processo da energia. Este processo empregado, entre outros, no trabalho de Langendonck que está se seguindo, é apresentado no item 2.4 e utilizado nos itens que o sucedem.

#### 2.1.1 - Materiais elasto-plásticos e rígido-plásticos

Numa peça constituída de material elasto-plástico, submetida a cargas proporcionais, o deslocamento de um de seus pontos é, a princípio, proporcional à carga (fase

elástica), depois o acréscimo do deslocamento é mais acentuado que o da carga (fase elasto-plástica, trecho AB da figura 2.1a); finalmente, após a completa plastificação da peça, a deformação cresce sob carga constante (fase plástica).



**FIGURA 2.1 - Comportamento dos materiais elasto-plástico e rígido-plástico**

Numa peça constituída de material rígido-plástico, toda deformação é impedida até o início da plastificação, que aparece, então, bruscamente (figura 2.1b).

Entretanto, as cargas de ruína calculadas pelos teoremas fundamentais da teoria da plasticidade, na qual se baseou a teoria das charneiras plásticas, são válidas tanto para peças elasto-plásticas como para peças rígido-plásticas (ver, por exemplo, MASSONNET e SAVE, 1966).

Sendo iguais os resultados das cargas de ruína para os dois materiais, outras razões levam a concluir que a consideração elasto-plástica não é melhor que a rígido-plástica. A consideração elasto-plástica parte da hipótese de que as deformações até a fase elasto-plástica permaneçam muito pequenas, a fim de estudar a peça na sua forma inicial conhecida. Se isto ocorre, no momento que se inicia a fase plástica, a forma da peça resulta muito próxima da inicial, e portanto, comporta-se sensivelmente como se fosse rígida até este momento. Por outro lado, se as defor-

mações reais antes da fase plástica não são desprezíveis, as duas considerações são igualmente deficientes: a primeira porque a hipótese referente às deformações não se verifica, e a segunda porque representa de maneira muito grosseira a peça real.

### 2.1.2 - Hipóteses gerais

Sendo a teoria das charneiras plásticas um método de cálculo baseado no comportamento plástico do material, as lajes estudadas devem apresentar esse comportamento; como o objetivo é a avaliação das cargas de ruína conclui-se, pelas razões apresentadas no item anterior, que há vantagens em se admitir o material rígido-plástico; finalizando, para dar maior simplicidade à teoria, e pelo fato dos resultados demonstrarem que esta consideração é a favor da segurança, não são consideradas as influências dos esforços de membrana. Decorrentes destas considerações, as hipóteses gerais da teoria das charneiras plásticas podem ser assim enumeradas:

a) As armaduras devem ser suficientemente fracas para que as seções sejam sub-armadas, isto é, para que a ruptura ocorra por escoamento da armadura e não por esmagamento do concreto. Assim sendo, o material deve possuir, nas seções plastificadas, capacidade de rotação suficiente para permitir o desenvolvimento de todas as charneiras necessárias para tornar a laje hipostática, antes de ocorrer ruptura local por esmagamento do concreto nas seções mais solicitadas.

b) Na fase de plastificação, o aço entra em escoamento formando as charneiras, enquanto as regiões entre elas permanecem no regime elástico. Admitindo o material rígido-plástico, ou seja, desprezando-se as deformações elásticas dessas partes em presença das deformações plásticas

das charneiras, a forma da superfície média da laje torna-se poliédrica, isto é, as charneiras são consideradas retas delimitando portanto regiões planas. As charneiras curvas são supostas constituídas de infinitos segmentos de reta. As únicas deformações consideradas são, portanto, rotações relativas das regiões adjacentes a uma charneira em torno dela.

c) Ainda decorrente da consideração do material rígido-plástico, os momentos fletores positivo  $m$  e negativo  $m'$ , correspondentes à formação das charneiras e denominados momentos de plastificação, são admitidos constantes ao longo dessas charneiras.

d) Não se consideram os esforços de membrana provenientes do impedimento dos deslocamentos no plano da laje, ou sejam, os esforços de arqueamento e de membrana tracionada.

### 2.1.3 - Isotropia, anisotropia e ortotropia

Denominam-se isótropas as lajes que apresentam a mesma resistência à flexão, qualquer que seja a direção da seção transversal considerada.

As barras das armaduras que, em última instância, são responsáveis pela absorção do momento fletor, geralmente são colocadas de forma ortogonal. Quando isto ocorre, como se indica na figura 2.2, sendo  $m_1$  e  $m_2$  os momentos de plastificação, respectivamente, nas direções 1 e 2, admite-se que numa seção genérica, inclinada de  $\alpha$  em relação à direção 1, o momento de plastificação seja:

$$m = \frac{m_1 l \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \alpha + m_2 l \operatorname{cosec} \alpha}{l \operatorname{se} \alpha} = m_1 \operatorname{sen}^2 \alpha + m_2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (2.1)$$

Esta conclusão é válida se se desprezarem os efeitos dos momentos volventes e dos momentos fletores atuantes na seção normal à seção considerada, o que pode ser feito, segundo LANGENDONCK (1970), conforme ensaios de diversos pes



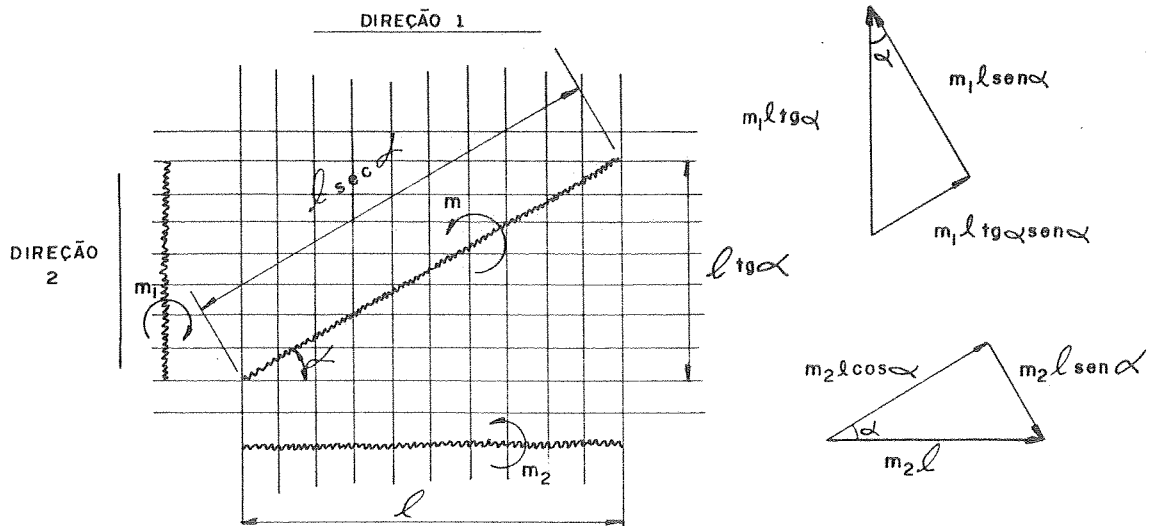


FIGURA 2.2- Charneira inclinada em relação às armaduras

quisadores por ele citados, que mostram que quando o resultado dela se afasta, o faz no sentido de maior segurança, ou seja, o momento de plastificação observado na charneira inclinada nunca é menor do que aquele dado pela fórmula 2.1.

Se a laje for isótropa,  $m_1$  é igual a  $m_2$ , verificando-se, portanto, que o momento na seção inclinada de  $\alpha$  terá idêntico valor, pois:

$$m = m_1 (\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha) = m_1 \quad (2.1')$$

Então, para que uma laje com armaduras dispostas ortogonalmente seja isótropa, basta que sejam iguais os momentos de plastificação nestas duas direções, conclusão esta que é válida tanto para os momentos positivos quanto para os negativos.

Como as armaduras comumente não se encontram no mesmo nível, elas não poderão ser iguais, devendo ser praticamente inversamente proporcionais às alturas úteis em que estão localizadas.

Caso as lajes não apresentem a mesma resistência à flexão em qualquer direção que seja considerada, elas são

denominadas anisótropas. Neste caso, geralmente se admite que, mesmo sendo variáveis os momentos de plastificação conforme a direção considerada, numa mesma direção eles sejam sempre os mesmos.

Se uma laje anisótropa possuir armaduras dispostas em direções ortogonais que ofereçam momentos de plastificação positivos e negativos, e se os momentos positivos guardarem entre si uma relação idêntica à relação entre os momentos de plastificação negativos correspondentes, a laje será considerada ortótropa. Em outras palavras, uma laje com armaduras ortogonais que ofereçam momentos de plastificação positivos  $m_1$  e  $m_2$ , e negativos  $m'_1$  e  $m'_2$ , será considerada ortótropa se:

$$m_2 = \lambda m_1 \quad \text{e} \quad m'_2 = \lambda m'_1$$

Uma laje anisótropa com armaduras ortogonais que ofereçam somente momentos de plastificação positivos, sempre poderá ser considerada ortótropa. A relação  $\lambda$  é denominada índice de ortotropia.

As lajes ortótropas podem ser calculadas como se fossem isótropas, bastando para isso fazer uma modificação de suas dimensões, como será apresentado no item 2.1.4. Doravante será admitida a isotropia das lajes.

#### 2.1.4 - Transformação de lajes ortótropas em isótropas

De acordo com JOHANSEN (1932), o cálculo de uma laje ortótropa pode ser feito como se ela fosse isótropa com momentos de plastificação  $m$  e  $m'$ , bastando para isso alterar todas as dimensões na direção normal às das seções que resistem a  $\lambda m$  e  $\lambda m'$ , dividindo-as por  $\sqrt{\lambda}$ , como se indica na figura 2.3.

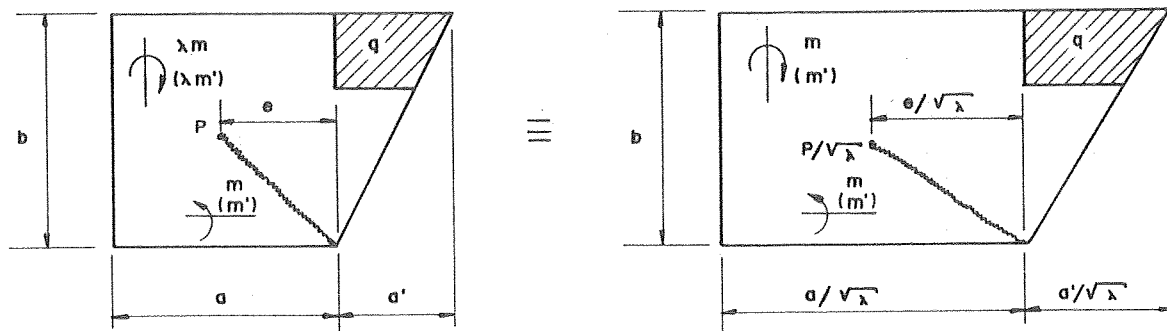


FIGURA 2.3—Transformação de laje ortótropa em isotrópa

Os valores das cargas distribuídas devem ser mantidos. Imaginando-se as cargas concentradas e as lineares como se fossem distribuídas, respectivamente, numa região muito pequena ou numa faixa muito estreita, elas devem ter, na laje transformada, os valores primitivos divididos por  $\sqrt{\lambda}$ .

## 2.2 - CONFIGURAÇÕES DAS CHARNEIRAS

As configurações das charneiras, que dependem da natureza e da distribuição das cargas, e da disposição das armaduras, devem também satisfazer às condições de apoio da laje, de maneira a ser geometricamente possível a formação da superfície poliédrica da laje deformada.

Todas as configurações geometricamente possíveis são denominadas configurações possíveis. A cada uma delas corresponde uma determinada intensidade de carga que proporciona a energia consumida no desenvolvimento das charneiras. Pelo teorema cinemático da teoria da plasticidade (ver, novamente, MASSONNET e SAVE, 1966), a carga efetiva de ruína é a menor entre todas aquelas correspondentes às configurações possíveis. Esta carga é denominada carga de ruína, e a correspondente configuração, configuração de ruína.

Reciprocamente, num problema de dimensionamento, conhecida a carga de ruína, a configuração correspondente é aquela responsável pelo maior valor do momento de plastificação. Para este valor é que deve ser dimensionada a laje.

Para se determinar, portanto, a configuração de ruína, há necessidade de se analisarem todas as configurações possíveis. Para as determinar, existem as seguintes regras básicas:

a) Cargas distribuídas geralmente dão origem a charneiras retilíneas, embora nem sempre a configuração de finida por elas seja a mais desfavorável.

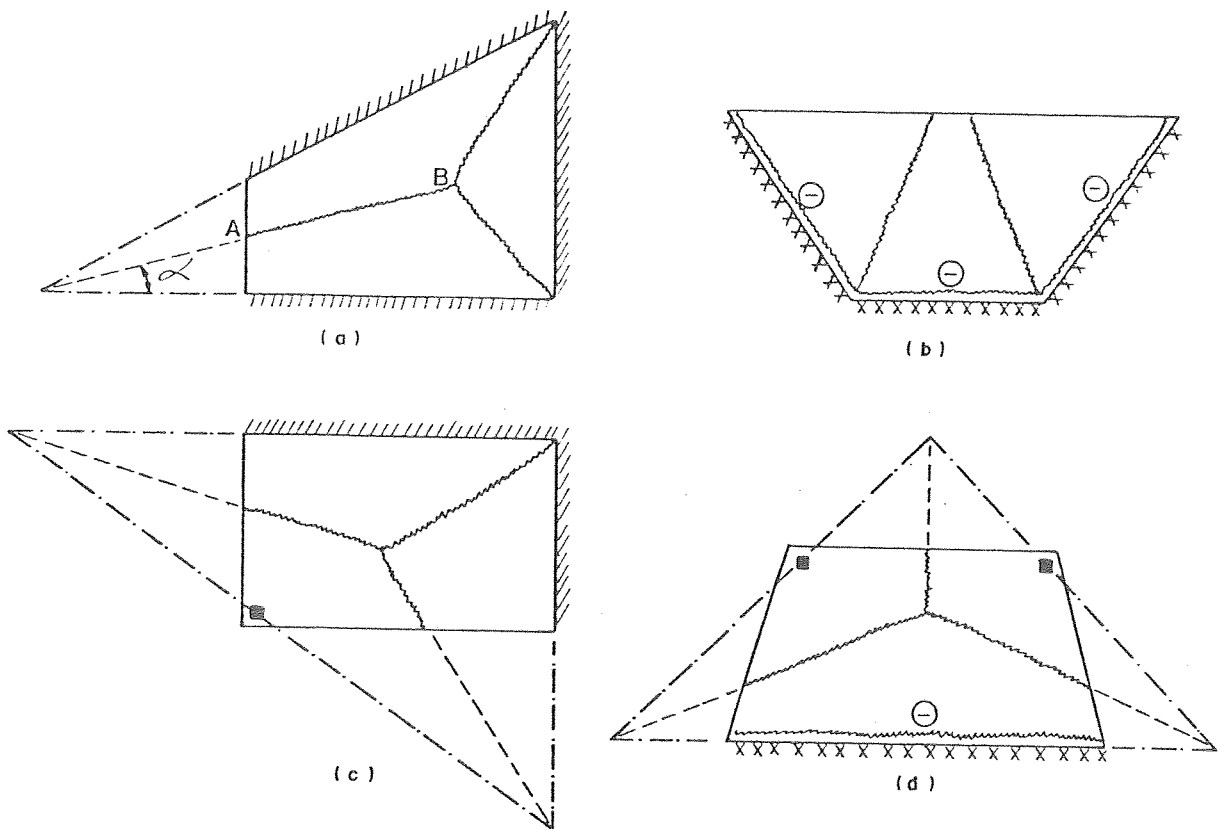
b) Ao longo dos contornos engastados, formam-se charneiras negativas (correspondentes a momentos negativos) - figuras 2.4b e 2.4d.

c) Cada charneira passa pelo ponto de interseção dos eixos de rotação das regiões delimitadas por essas charneiras negativas.

d) Os eixos de rotação das diversas regiões divi didas pelas charneiras coincidem com lados simplesmente apoiados - figuras 2.4a e 2.4c, ou com lados engastados - figuras 2.4b e 2.4d, ou passam pelos pontos de apoio isola dos - figuras 2.4c e 2.4d.

Pode-se notar, pela figura 2.4, para cada caso, que existe um conjunto de configurações possíveis caracterizadas por certas incógnitas. No caso da figura 2.4a, por exemplo, as configurações possíveis dependem do ângulo  $\alpha$ , que define a direção da charneira AB, e também do ponto B, onde ocorre a bifurcação da mesma.

Quando houver contorno curvilíneo, como na figura 2.5, o mesmo pode ser considerado como o limite para o qual tende um contorno poligonal, com lados cujos comprimentos tendem para zero. As charneiras que deveriam conver gir para os vértices do polígono, ficarão encostadas umas às outras, formando uma superfície regradada, mas não plana, que se admite ser possível.



Convenções:

~~~~~ Charneira

////// Borda simplesmente apoiada

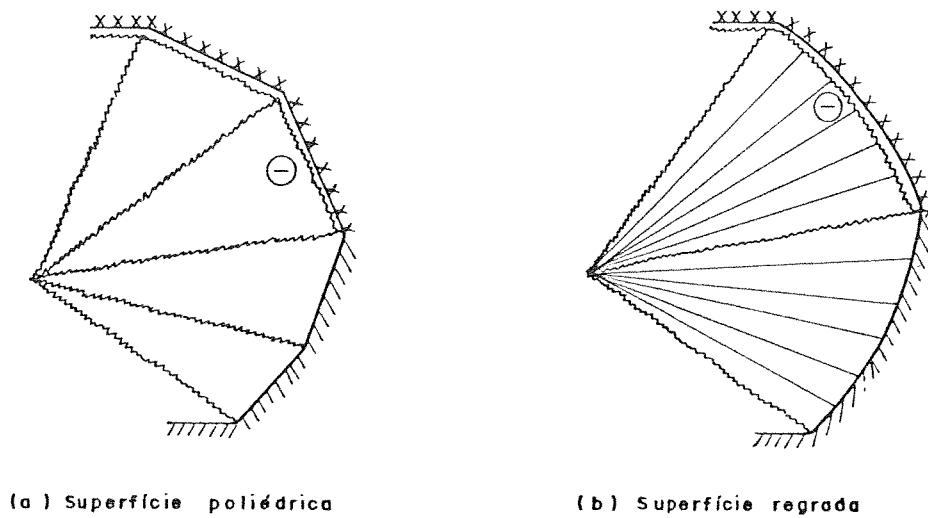
———— Borda livre

XXXXXXXXXX Borda engastada

----- Eixo de rotação

■ Apoio pontual

FIGURA 2.4-Exemplos de configurações possíveis



(a) Superfície poliédrica

(b) Superfície regrada

FIGURA 2.5—Configurações de ruína de lajes com contorno poligonal e curvilíneo

### 2.3 - PROCESSO DAS FORÇAS NODAIS

Existem, na teoria das charneiras plásticas, dois processos de cálculo. O primeiro deles, denominado processo do equilíbrio ou processo das forças nodais, será agora apresentado sucintamente. O outro processo, denominado processo do trabalho ou processo da energia, tem suas particularidades apresentadas no item 2.4 e é usado no transcórre deste trabalho.

O processo das forças nodais utiliza as condições de equilíbrio, aplicando-as a cada região da laje delimitada pelo seu contorno e pelas charneiras plásticas. Substituem-se nas charneiras os eventuais momentos de torção e esforços cortantes por forças concentradas equivalentes ( $F_1, F_2, \dots, F_6$  na figura 2.6), denominadas forças nodais por se localizarem nos nós das charneiras ou nos nós destas com o contorno.

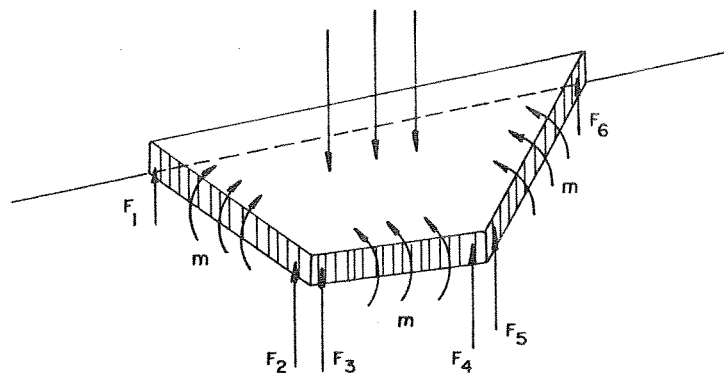


FIGURA 2.6 - Forças nodais numa região de laje

Cada região da laje encontra-se então em equilíbrio sob a ação dessas forças, dos momentos ao longo das charneiras e das cargas externas aplicadas. Desde que as forças nodais sejam conhecidas, as equações de equilíbrio são suficientes para determinar qualquer variável desconhecida que defina a configuração de ruína, ou para determinar a carga de ruína ou o momento de plastificação de uma dada configuração. Nenhum processo de diferenciação é usado e, na

maioria dos casos, este processo requer menos cálculos que o processo da energia.

São de particular interesse os casos dos nós em que se encontrem somente charneiras de mesmo sinal, pois nessa situação as forças nodais anulam-se. Pode-se expressar então, para uma região como a da figura 2.6, o equilíbrio de rotação em torno de seu eixo considerando que sobre as charneiras só atuam os momentos de plastificação  $m$ . Tal equação de equilíbrio dá um valor de  $m$  para cada região; para que a configuração estudada seja a de ruína, é necessário que todos esses valores sejam iguais.

Nos casos em que as forças nodais não se anulam, elas precisam ser determinadas. Johansen apresentou estudos para determinação dessas forças nodais, que podem, entretanto, em alguns casos, levar a soluções erradas. Para se aplicar o processo das forças nodais há necessidade, então, de se conhecerem os casos onde ocorrem essas limitações.

Maiores detalhes sobre este processo das forças nodais não faz parte deste trabalho, pois ele não será aqui empregado. Para tal pode ser consultado, por exemplo, o trabalho de JONES e WOOD (1967) já comentado, o qual cita trabalhos de KEMP (1965), MORLEY (1965a e 1965b) e WOOD (1965) a respeito das referidas limitações.

#### 2.4 - PROCESSO DA ENERGIA

As limitações do processo das forças nodais, aliadas ao fato de se estar seguindo fundamentalmente Langendonck, fazem com que se empregue, neste trabalho, o processo da energia ora apresentado.

Dada uma configuração possível das charneiras, há necessidade de se conhecer a intensidade da carga que corresponde a essa configuração. Como já se comentou, pelo teorema cinemático da teoria da plasticidade, a carga de ruína é a menor entre aquelas correspondentes às diversas configurações possíveis.

O processo da energia para determinação da carga que corresponde a dada configuração consiste em se igualar a energia desenvolvida pela carga durante a deformação da laje à energia consumida pelas charneiras para se deformarem, ou seja, igualar o trabalho das forças externas ( $\tau_e$ ) ao trabalho das forças internas ( $\tau_i$ ).

#### 2.4.1 - Energia absorvida pelas charneiras

Supondo o deslocamento unitário de um ponto da laje na direção perpendicular ao seu plano, determinam-se os ângulos  $\theta_i$  e  $\theta'_i$  de rotação de todas as charneiras positivas e negativas respectivamente. Sendo  $m$  e  $m'$  os momentos de plastificação por unidade de comprimento, e  $\ell$  e  $\ell'$  os comprimentos das charneiras positivas e negativas respectivamente, a energia absorvida pelas charneiras ao se deformarem será:

$$\tau_i = \sum m_i \ell_i \theta_i + \sum m'_i \ell'_i \theta'_i \quad (2.2)$$

Como é sempre possível substituir a laje em estudo por outra de mesma resistência à flexão que seja isotrópica (item 2.1.4),  $m_i$  é constante ( $m$ ) para as charneiras positivas, o mesmo acontecendo com  $m'_i$  ( $m'$ ), passando a se escrever:

$$\tau_i = m \sum \ell_i \theta_i + m' \sum \ell'_i \theta'_i \quad (2.3)$$

#### 2.4.2 - Energia desenvolvida pelas cargas

Deslocando-se as cargas concentradas de  $f_j$ , e as distribuídas de  $f$  (função da posição do elemento  $dA$  da área da laje), a energia desenvolvida será:



$$\tau_e = \sum P_j f_j + \int_A q f dA \quad (2.4)$$

#### 2.4.3 - Determinação do momento de plastificação

Se  $P_j$  e  $q$  forem as cargas dadas, já multiplicadas pelos seus coeficientes de segurança, os momentos de plastificação que devem ser atribuídos à laje no seu dimensionamento são determinados igualando-se 2.3 a 2.4, havendo porém possibilidade de se escolher  $m$  ou  $m'$ , ou ainda  $m'/m$ :

$$m' = (\tau_e - m \sum \ell_i \theta_i) / (\sum \ell_i' \theta_i') \quad (2.5a)$$

$$m = (\tau_e - m' \sum \ell_i' \theta_i') / (\sum \ell_i \theta_i) \quad (2.5b)$$

$$m' = (m'/m) \tau_e / [\sum \ell_i \theta_i + (m'/m) \sum \ell_i' \theta_i'] \quad (2.5c)$$

#### 2.4.4 - Determinação da carga

Se forem conhecidos os momentos de plastificação  $m$  e  $m'$ , determina-se o fator  $K$ , pelo qual se devem multiplicar as cargas  $P_j$  e  $q$  para que se tenha a carga causadora da configuração em estudo, igualando-se 2.3 a 2.4, substituindo-se nestas  $P_j$  e  $q$  por  $KP_j$  e  $Kq$ :

$$K = \tau_i / (\sum P_j f_j + \int_A q f dA) \quad (2.6)$$

### 2.5 - LAJES POLIGONAIS UNIFORMEMENTE CARREGADAS

Apresentam-se, a seguir, aplicações do processo da energia no cálculo de lajes poligonais uniformemente carregadas, as quais apresentam configurações de ruína em superfície poliédrica.

## 2.5.1 - Configurações com um único vértice interno

Nas lajes poligonais, a mais simples das configurações possíveis é a que se tem com charneiras retilíneas partindo de todos os vértices do polígono e concorrentes em um ponto interno da laje. Ao longo das bordas engastadas, formam-se simultaneamente charneiras negativas.

Considere-se a laje poligonal da figura 2.7, onde se tem uma configuração com vértice no ponto 0. Seja  $f$  o deslocamento deste ponto.

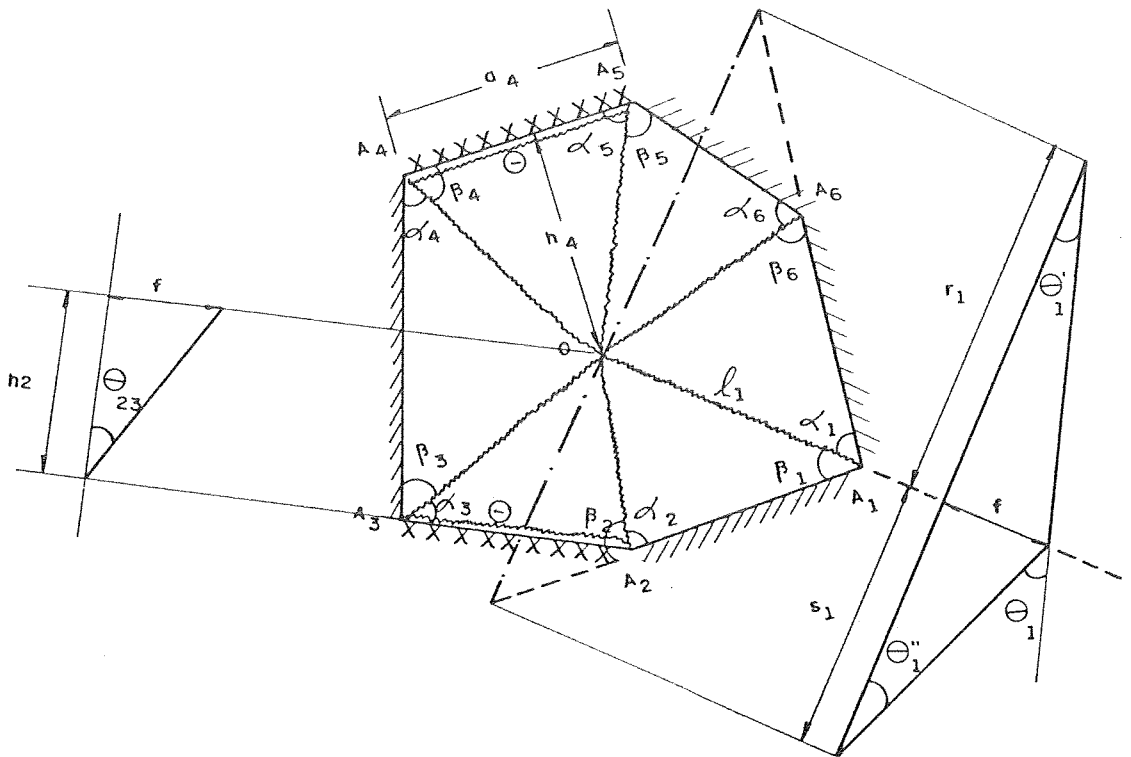


FIGURA 2.7—Laje poligonal convexa, com ruína em superfície poliédrica com um único vértice interno

Seja  $q$  a carga uniformemente distribuída associada a esta configuração. A aplicação do processo da energia consiste em se igualar o trabalho externo  $\tau_e$  desenvolvido pela carga  $q$  à energia interna  $\tau_i$  consumida pelas charneiras. A charneira positiva  $OA_1$  de comprimento  $\ell_1$ , por exemplo, ao se deformar de um ângulo  $\theta_1$ , consumirá a energia:

$$\begin{aligned} m \ell_1 \theta_1 &= m \ell_1 (\theta_1' + \theta_1'') = m \ell_1 (f/r_1 + f/s_1) = \\ &= mf(\ell_1/r_1 + \ell_1/s_1) = mf(\cotg \alpha_1 + \cotg \beta_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

O mesmo raciocínio, aplicado às demais charneiras positivas, permite concluir que a parte da energia associada a todas essas charneiras é dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 m \ell_i \theta_i &= mf \sum_{i=1}^6 (\cotg \alpha_i + \cotg \beta_i) = \\ &= mf \sum_{i=1}^6 a_i/h_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $a_i$  e  $h_i$  são os comprimentos dos lados do polígono e suas respectivas distâncias ao ponto de convergência das charneiras.

Fazendo um corte normal à charneira negativa  $A_2A_3$ , corte esse indicado na figura 2.7, pode-se concluir que a energia associada a essa charneira é:

$$\begin{aligned} m' a_2 \theta_{23} &= m' a_2 f/h_2 = m' f a_2/h_2 = \\ &= m' f (\cotg \beta_2 + \cotg \alpha_3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Analogamente, a energia correspondente à charneira  $A_4A_5$  é:

$$m' a_4 \theta_{45} = m' f (\cotg \beta_4 + \cotg \alpha_5) \quad (2.10)$$

A energia interna total consumida pelas charneiras é então:

$$\begin{aligned} \tau_i = m f \sum_{i=1}^6 (\cotg \alpha_i + \cotg \beta_i) + \\ + m' f (\cotg \beta_2 + \cotg \alpha_3 + \cotg \beta_4 + \cotg \alpha_5) \end{aligned} \quad (2.11)$$

O trabalho  $\tau_e$  desenvolvido pela carga  $q$  é:

$$\tau_e = \int_A q z \, dA = q \int_A z \, dA = q V \quad (2.12)$$

onde  $A$  indica a superfície média poligonal da placa,  $z$  o deslocamento de um ponto genérico e  $V$  o volume varrido pela placa ao se deformar, que pode ser escrito:

$$V = \frac{1}{3} A f \quad (2.13)$$

Igualando-se as expressões 2.11 e 2.12, obtêm-se:

$$\begin{aligned} q V = f \left[ m \sum_{i=1}^6 (\cotg \alpha_i + \cotg \beta_i) + \right. \\ \left. + m' (\cotg \beta_2 + \cotg \alpha_3 + \cotg \beta_4 + \cotg \alpha_5) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como  $V$  é função de  $f$ , conclui-se que o valor de  $f$  não influi no resultado final, sendo cômodo, então, dar ao deslocamento arbitrário que caracteriza o mecanismo o valor unitário.

Se a laje da figura 2.7 fosse engastada em todo o seu contorno, a expressão 2.11 poderia ser escrita:

$$\begin{aligned} \tau_i &= (m+m') f \sum_{i=1}^6 (\cotg \alpha_i + \cotg \beta_i) = \\ &= (m+m') f \sum_{i=1}^6 a_i / h_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se na laje poligonal houver um canto reentrante, aparecerá uma charneira negativa ligando o respectivo vértice ao ponto O, como se indica na figura 2.8. A energia associada a tal charneira é:

$$\begin{aligned} m' l_6 \theta_6 &= m' l_6 (\theta_6' + \theta_6'') = m' l_6 (f/r_6 + f/s_6) = \\ &= m' f (l_6/r_6 + l_6/s_6) = m' f (\cotg \alpha_6 + \cotg \beta_6) \end{aligned} \quad (2.16)$$

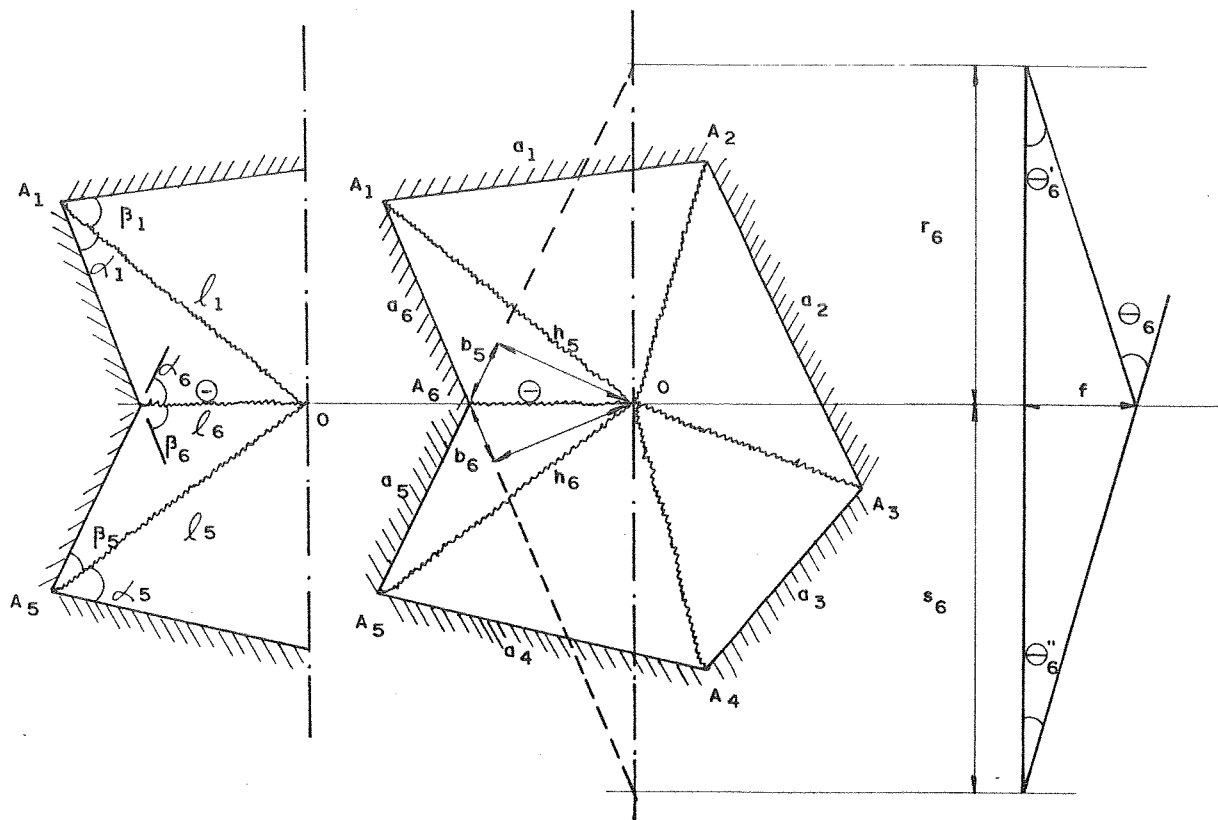


FIGURA 2.8 - Laje poligonal com canto reentrante, com ruína em superfície poliédrica com um único vértice interno

A energia correspondente às demais charneiras é obtida como numa laje poligonal convexa, sendo então a energia total dada por:

$$\tau_i = mf \sum_{i=1}^5 (\cotg \alpha_i + \cotg \beta_i) + m'f(\cotg \alpha_6 + \cotg \beta_6) \quad (2.17)$$

Pode ser verificado que:

$$\cotg \alpha_{i+1} + \cotg \beta_i = \sum_{i=1}^4 a_i/h_i \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \cotg \beta_5 &= a_5/h_5 + \cotg \alpha_6 \\ \cotg \alpha_1 &= a_6/h_6 + \cotg \beta_6 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Substituindo 2.18 e 2.19 em 2.17, obtêm-se:

$$\tau_i = m f \sum_{i=1}^6 a_i/h_i + (m+m')f(\cotg \alpha_6 + \cotg \beta_6) \quad (2.20)$$

Se a laje da figura 2.8 fosse engastada em todo o seu contorno, a energia associada às charneiras negativas do contorno seria, levando-se em conta ainda as expressões 2.18 e 2.19:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 m'f a_i/h_i &= m'f \sum_{i=1}^5 (\cotg \alpha_i + \cotg \beta_i) + \\ &- m'f(\cotg \alpha_6 + \cotg \beta_6) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Então, se a laje fosse engastada, as expressões 2.17 e 2.20 seriam substituídas, respectivamente, por:

$$\tau_i = (m+m')f \sum_{i=1}^5 (\cotg \alpha_i + \cotg \beta_i) \quad (2.22)$$

$$\tau_i = (m+m')f \sum_{i=1}^6 a_i/h_i + (m+m')f(\cotg \alpha_6 + \cotg \beta_6) \quad (2.23)$$

### 2.5.2 - Configurações com dois ou mais vértices internos

Outra configuração possível, nas lajes poligonais, é a que se obtém com charneiras retilíneas partindo dos vértices do polígono, mas convergindo para dois ou mais pontos, P e Q na figura 2.9 por exemplo.

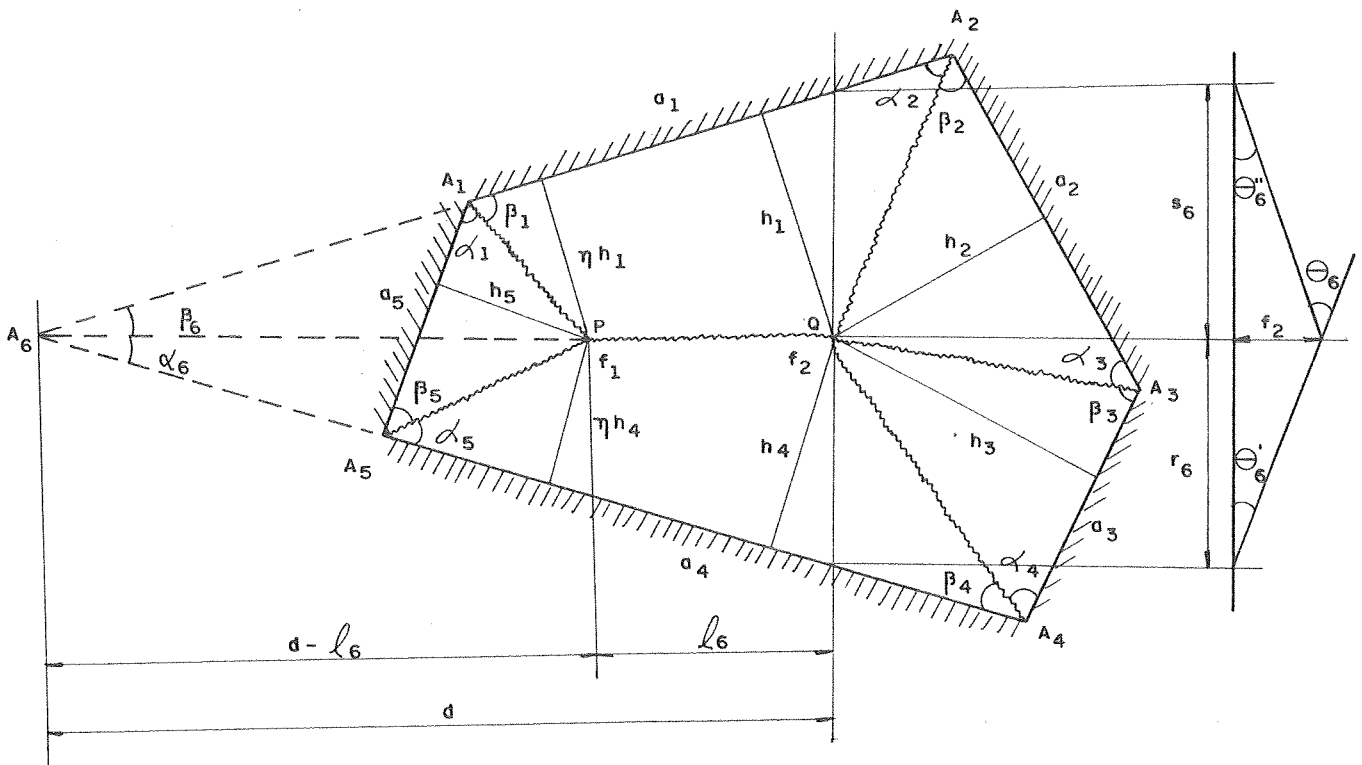


FIGURA 2.9 - Laje poligonal com ruína em superfície poliédrica com dois vértices internos

Os pontos P e Q são ligados por outra charneira positiva cuja reta suporte passa no ponto de encontro do prolongamento dos lados do polígono que limitam os mesmos elementos planos da laje que tocam a referida charneira. Assim, o ponto  $A_6$  pertence às retas  $A_1A_2$  e  $A_4A_5$ , condição necessária para que seja geometricamente possível o poliedro formado pela laje deformada, como já foi visto no item 2.2.

Os deslocamentos  $f_1$  e  $f_2$  dos pontos P e Q, respectivamente, são proporcionais às distâncias entre esses pontos e o ponto  $A_6$ . Assim, pode se escrever:

$$f_1/f_2 = (d-l_6)/d = \eta$$

donde:

$$f_1 = \eta f_2 \quad \text{e} \quad l_6/d = 1 - \eta \quad (2.24)$$

A charneira PQ, de comprimento  $l_6$ , ao se deformar de um ângulo  $\theta_6$ , consumirá a energia:

$$\begin{aligned} m(1-\eta)d\theta_6 &= m(1-\eta)d(\theta_6' + \theta_6'') = m(1-\eta)d(f_2/r_6 + f_2/s_6) = \\ &= m(1-\eta)f_2(d/r_6 + d/s_6) = m(1-\eta)f_2(\cotg \alpha_6 + \\ &+ \cotg \beta_6) \end{aligned} \quad (2.25)$$

A energia interna total consumida pelas charneiras será:

$$\begin{aligned} \tau_i &= m(f_1 \cotg \alpha_1 + \eta f_2 \cotg \beta_1) + m f_2 (\cotg \alpha_2 + \cotg \beta_2) + \\ &+ m f_2 (\cotg \alpha_3 + \cotg \beta_3) + m f_2 (\cotg \alpha_4 + \cotg \beta_4) + \\ &+ m \eta f_2 \cotg \alpha_5 + m f_1 \cotg \beta_5 + m(1-\eta) f_2 (\cotg \alpha_6 + \cotg \beta_6) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pode ser observado que:

$$(a_1/h_1) f_2 = [\eta \cotg \beta_1 + (1-\eta) \cotg \beta_6 + \cotg \alpha_2] f_2 \quad (2.27)$$

$$(a_2/h_2) f_2 = (\cotg \beta_2 + \cotg \alpha_3) f_2 \quad (2.28)$$

$$(a_3/h_3) f_2 = (\cotg \beta_3 + \cotg \alpha_4) f_2 \quad (2.29)$$



$$(a_4/h_4)f_2 = \left[ \cotg\beta_4 + (1-\eta)\cotg\alpha_6 + \eta\cotg\alpha_5 \right] f_2 \quad (2.30)$$

$$(a_5/h_5)f_1 = (\cotg\beta_5 + \cotg\alpha_1)f_1 \quad (2.31)$$

Com os valores das expressões 2.27 a 2.31, a 2.26 pode ser escrita:

$$\tau_i = m \sum_{i=1}^5 (a_i/h_i) \cdot f_i \quad (2.32)$$

pondo-se  $(m+m')$  no lugar de  $m$  se as bordas forem engastadas.

Para os lados correspondentes a elementos não triangulares, como  $A_1A_2$  na figura 2.9, usa-se qualquer um dos vértices no cálculo de  $f_i$  e de  $h_i$ , pois o resultado é o mesmo:

$$f_2/h_1 = f_1/(\eta h_1) \quad \text{pois} \quad f_1 = \eta f_2$$

### 2.5.3 - Expressões gerais

Uma laje poligonal uniformemente carregada pode, então, ser calculada pela teoria das charneiras plásticas igualando-se o trabalho desenvolvido pela carga  $\tau_e = q V$  à energia interna  $\tau_i$  absorvida pelas charneiras, dada, para polígonos convexos, com qualquer número de vértices internos, pela expressão:

$$\tau_i = m \sum (a_i/h_i) \cdot f_i \quad (2.33)$$

pondo-se  $(m+m')$  no lugar de  $m$  se o contorno for engastado. Para os lados dos elementos não triangulares, aos quais correspondam dois vértices internos, usa-se qualquer um de les para o cálculo de  $h_i$  e  $f_i$ , pois o resultado é o mesmo.

Não sendo o polígono convexo, deve se acrescentar, quer seja o contorno simplesmente apoiado, quer seja

engastado, a somatória seguinte, que se estende a todos os cantos reentrantes:

$$(m+m') \sum (\cotg \alpha_j + \cotg \beta_j) f_j \quad (2.34)$$

onde  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são os menores ângulos entre os lados dos cantos reentrantes e a direção das respectivas charneiras.

#### 2.5.4 - Aplicação no modelo com forma de T

No modelo apresentado no item 1.3, engastado no contorno, uma das configurações possíveis é a indicada na figura 2.10, onde se supõe deslocamento unitário das charneiras centrais.

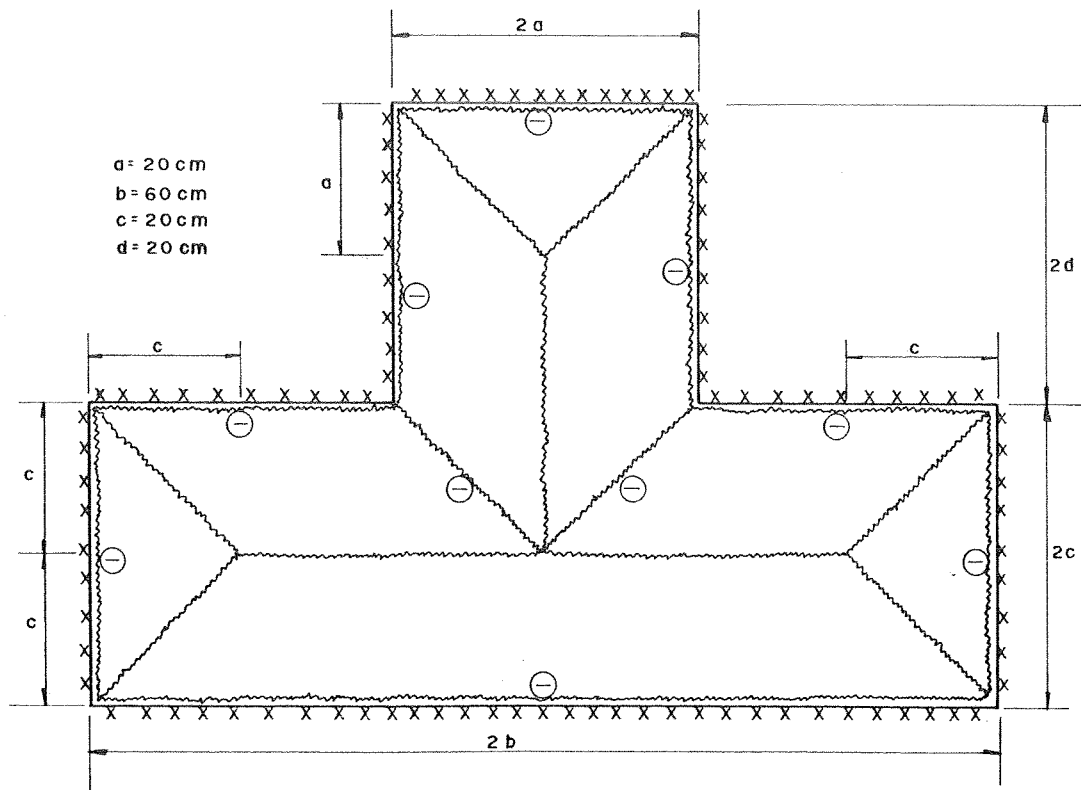


FIGURA 2.10 - Configuração possível do modelo com forma de T

Igualando-se o trabalho desenvolvido pela carga  $\tau_e = q V$  à energia consumida pelas charneiras, dada pelas expressões 2.33 e 2.34, tem-se:

$$q V = (m+m') \left[ \sum (a_i/h_i) \cdot f_i + \sum (\cotg \alpha_j + \cotg \beta_j) f_j \right] \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} V &= 2(b-c)c + (4c^2/3) + 2 ad = 1600 + 1600/3 + 800 = \\ &= 8800/3 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\sum (a_i/h_i) \cdot f_i = 2b/c + 4c/c + 2(b-a)/c + 2a/a + 4d/a = 20 \text{ cm}$$

$$\sum (\cotg \alpha_j + \cotg \beta_j) f_j = 2(\cotg 45^\circ + \cotg 45^\circ) = 4 \text{ cm}$$

obtendo-se, portanto

$$q/(m+m') = 9/1100 \text{ cm}^{-2} = 81,82 \text{ m}^{-2}$$

Conhecendo-se  $m+m'$  obtêm-se a carga causadora desta configuração. Porém, a bifurcação das charneiras nos cantos, estudada nos itens que se seguem, podem modificar esta configuração, tornando-a mais desfavorável. Este efeito será considerado, para o modelo, no item 2.6.3.

## 2.6 - BIFURCAÇÃO DAS CHARNEIRAS NOS CANTOS

As charneiras positivas que se dirigem para os vértices do contorno da laje podem bifurcar-se antes de atingi-lo, tomando a forma indicada na figura 2.11, formando-se duas ramificações positivas CD e CE e uma charneira negativa curvilínea DE. O trecho CDE da laje toma a forma de um cone de vértice C e diretriz DE.

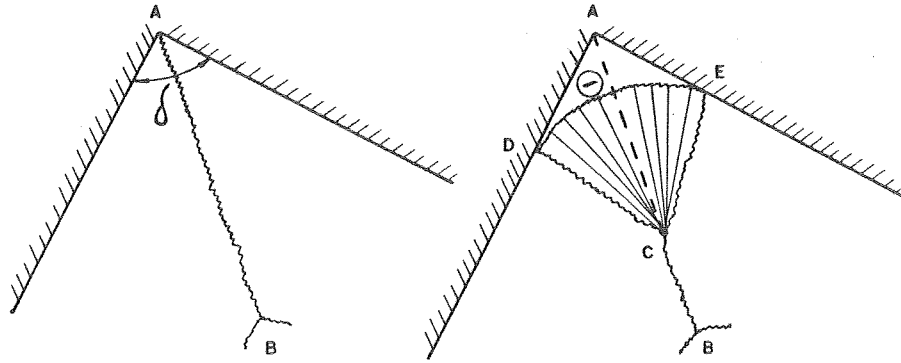


FIGURA 2.11- Bifurcação de charneira num canto

### 2.6.1 - Ocorrência das bifurcações

Haverá bifurcação da charneira positiva, e a conseqüente formação da charneira negativa curvilínea, se a carga necessária para provocá-las for menor do que a que origina a charneira positiva única; o cálculo é feito considerando o volume do cone CDE e a energia consumida na sua formação.

### 2.6.2 - Efeito das bifurcações

O efeito das bifurcações no valor da carga  $q$  pode ser considerado como independente para cada bifurcação. A consideração desse efeito, segundo LANGENDONCK (1966, e também 1968), pode ser feita como se apresenta a seguir.

Se a charneira básica AB da figura 2.11 se situa sobre a bissetriz do ângulo do vértice A, denomine-se  $\delta$  ao valor desse ângulo. Se a charneira AB não coincidir com a bissetriz, admite-se que o efeito estudado, para o lado que faz um ângulo  $\alpha$  com a charneira, seja o mesmo que se teria se esta fosse a bissetriz e o ângulo do vértice A fosse igual a  $\delta = 2\alpha$ . As fórmulas que se seguem sã se aplicam se  $\delta \geq \pi/6 = 30^\circ$ .

O efeito da bifurcação de uma charneira corresponde a reduzir a carga de ruína, multiplicando-a por

$$u = 1 - k \quad (2.36)$$

onde se adota para  $k$  o valor correspondente a uma charneira circular simétrica, que vale aproximadamente

$$k = 0,45 w^2 \quad (2.37)$$

onde a constante  $w$  depende do ângulo  $\delta$  e da relação entre  $m$  e  $m'$ :

$$w = 1 - (\delta/\pi) \cdot (m+m')/m \quad \text{se o contorno for simplesmente apoiado, com deslocamento vertical impedido.}$$

$$w = 1 - \delta/\pi \quad \text{se o contorno for engastado.}$$

Não haverá bifurcação se se obtiver  $w \leq 0$ , adotando-se portanto  $k = 0$ . A expressão 2.37 pode então ser substituída por:

$$k = \begin{cases} 0,45 w^2 & \text{se } w > 0 \\ 0 & \text{se } w \leq 0 \end{cases} \quad (2.37')$$

Seja  $T$  a energia de deformação das charneiras para  $(m+m')$  unitário. Quando a laje não tem a forma de um polígono regular, há necessidade de se separar os dois fatores  $t$  e  $v$  que levam ao coeficiente  $u$ , e que se referem respectivamente à energia  $\tau_i = (m+m')T$  consumida pelas charneiras e à energia  $qV$  desenvolvida pela carga. Designando-se por índices  $i$  as várias partes em que se decompõe a laje, separando-se as zonas com charneiras que não convergem para os cantos ( $i = 0$ ) e as correspondentes aos vários cantos ( $i \neq 0$ ), tem-se:

$$q/(m+m') = \frac{T_0 + \sum_{i \neq 0} (1-t_i) T_i}{V_0 + \sum_{i \neq 0} (1-v_i) V_i} = \frac{T - \sum_{i \neq 0} t_i T_i}{V - \sum_{i \neq 0} v_i V_i} \quad (2.38)$$

obtendo-se os  $T_i$  e os  $V_i$  como se não houvesse bifurcação, mas multiplicando-se os resultados assim obtidos pelos coeficientes  $1-t$  e  $1-v$ , funções do ângulo  $\delta$ . Os símbolos  $T$  e  $V$  referem-se a toda a laje, sem bifurcação de charneiras.

Quando a laje tem a forma de um polígono regular,  $T_0$  e  $V_0$  são nulos e os coeficientes  $t$  e  $v$  são todos iguais, chegando-se a:

$$q/(m+m') = \left[ (1-t)/(1-v) \right] \cdot T/V \quad (2.39)$$

com  $(1-t)/(1-v)$  igual ao  $u$  de 2.36. Para os demais casos é preciso conhecer  $t$  e  $v$  separadamente, tendo-se, com boa aproximação:

$$t = 0,65 w^2, \quad v = 0,25 w^2 \quad (2.40)$$

Para  $\delta = \pi/2 = 90^\circ$  e contorno engastado, por exemplo, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} w &= 1-\delta/\pi = 0,5 & ; & & u &= 1-0,45 w^2 = 0,8875 \\ t &= 0,65 w^2 = 0,1625 & ; & & v &= 0,25 w^2 = 0,0625 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

### 2.6.3 - Efeito das bifurcações no modelo

A configuração indicada na figura 2.10 pode ser modificada pela bifurcação das charneiras nos cantos salientes. A carga causadora desta nova configuração poderá ser calculada com a expressão 2.38, obtendo-se:

$$q/(m+m') = \frac{T-6t_1 T_1}{V-6v_1 V_1}$$

onde  $T$  e  $V$  são os valores calculados no item 2.5.4, respectivamente  $24\text{cm}$  e  $8800/3\text{cm}^3$ ,  $T_1$  e  $V_1$  referem-se a cada uma das regiões com charneiras que convergem para os seis cantos salientes (ver figura 2.12), calculados como se não houvesse bifurcação e, finalmente,  $t_1$  e  $v_1$  dados pelas expressões 2.41, respectivamente  $0,1625$  e  $0,0625$ .

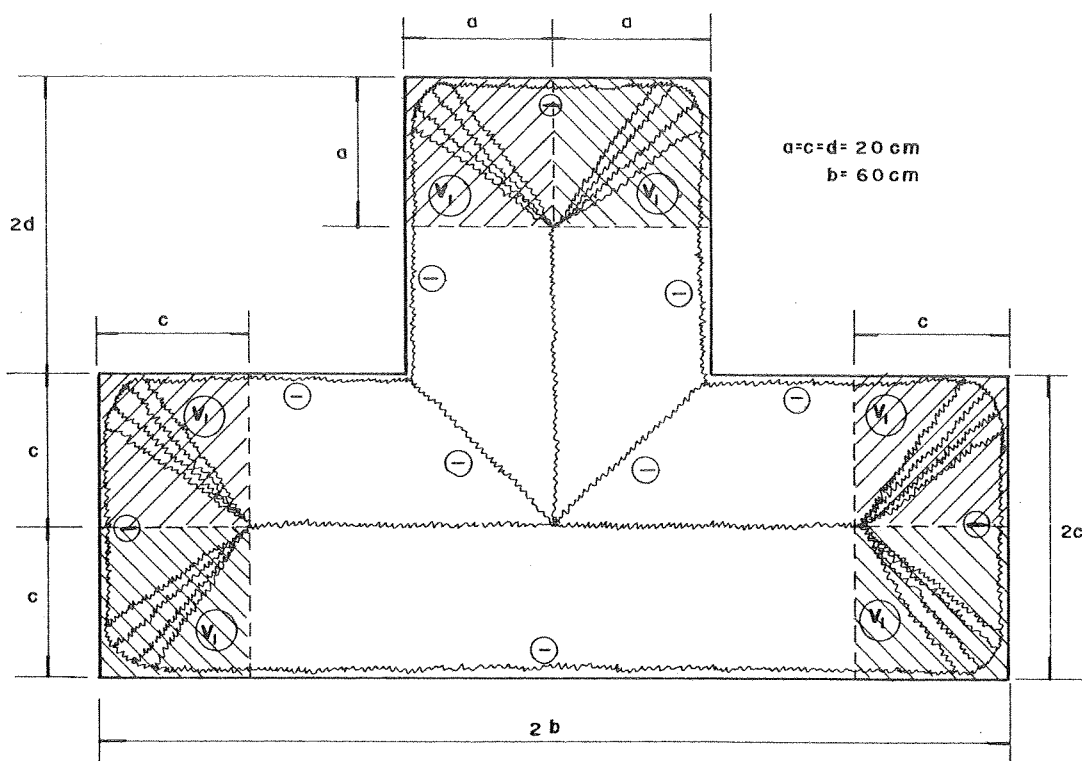


FIGURA 2.12 - Configuração com bifurcação das charneiras nos cantos

Calculando  $T_1$  e  $V_1$  obtêm-se respectivamente  $2\text{cm}$  e  $400/3\text{cm}^3$ , obtendo-se, finalmente:

$$\begin{aligned} q/(m+m') &= \frac{24-6.0,1625.2}{8800/3-6.0,0625.400/3} = \\ &= 0,007647 \text{ cm}^{-2} = 76,47 \text{ m}^{-2} \end{aligned}$$

Como se observa, a carga causadora desta configuração é, de fato, menor que aquela calculada no item 2.5.4, sendo portanto esta configuração mais desfavorável que aquela. Será visto, no capítulo 3, que além da ruína total com bifurcação das charneiras, outras configurações possíveis devem ser investigadas.

## 2.7 - SUPRESSÃO PARCIAL DA ARMADURA SUPERIOR

Se as condições de apoio o permitirem, diversas são as vantagens de se substituir uma laje simplesmente apoiada por outra engastada. Entre outras, diminuem-se as flechas, mesmo com espessuras inferiores, e evitam-se fissuras nos cantos, sobre as vigas de apoio, etc.

Entretanto, a aplicação da teoria das charneiras plásticas às lajes engastadas seria anti-econômica, e portanto prejudicada, se houvesse necessidade de as armaduras negativas serem estendidas a toda a laje. Portanto, é muito importante o fato de boa parte da armadura negativa poder ser suprimida, sem diminuir a resistência da laje à flexão.

Teoricamente, a armadura negativa pode ser suprimida em qualquer região da laje, desde que, considerando essa região isolada e simplesmente apoiada em seu contorno, seja ela capaz de resistir às cargas que nela atuam. Há necessidade, também, que essa região não invada zona em que, na laje primitiva, fossem previstas charneiras negativas.



### 3 - AS LAJES COM FORMA DE T

Foi elaborado por LANGENDONCK (1972) o primeiro trabalho específico sobre as lajes T em regime elasto-plástico; ele apresenta fórmulas e tabelas para o cálculo, pelo método das charneiras plásticas, das lajes com forma de T simétrico uniformemente carregadas. Esse trabalho encontra-se aqui resumido, aproveitando-se sua notação, coerente com aquela que vem se utilizando, sua marcha de cálculo e, também, suas tabelas. Os resultados teóricos obtidos foram comparados com os experimentais, como já se disse no capítulo 1 e se voltará a comentar nos capítulos 6 e 7.

#### 3.1 - NOTAÇÃO EMPREGADA

Se a laje for simplesmente apoiada, é necessário conhecer os momentos de plastificação positivos  $m$  e negativos  $m'$ , admitidos constantes em toda a laje, usando-se a notação:

$$\mu = m' / (m + m')$$

Se a laje for engastada, só interessa a soma  $m + m'$ , sendo arbitrária a distribuição desse momento total por  $m$  e  $m'$ , sendo aconselhável escolher-se valores de  $m'$  entre  $m$  e  $2m$ , isto é,

$$m \leq m' \leq 2m ,$$

para se diminuir a probabilidade do aparecimento de grandes fissuras. Não é necessário estudo especial das lajes engastadas, pois seu cálculo coincide com o das lajes simplesmente apoiadas com  $\mu = 0$ , substituindo-se o  $m$  achado por  $m + m'$ .

A grandeza  $q/(m+m')$  constitui-se, no que se segue, na incógnita do problema, que tanto pode ser de verificação (dados  $m$  e  $m'$ , achar  $q$ ), como de dimensionamento (dado  $q$ , achar  $m+m'$ ).

As outras notações de LANGENDONCK (1972) são as seguintes:

$a, b, c, d$  = semi-lados dos retângulos que constituem o T ( $2b$  é a largura da mesa e  $2c$  é sua altura,  $2a$  é a largura da perna e  $2d$  é a sua altura - ver figuras 3.1 a 3.5);

$b_0$  = máxima semi-largura do leque de charneiras (ver figura 3.4);

$f$  = a menor das duas medidas  $b$  e  $c$ ;

$k_i$  = razão de dois lados ( $k_a = a/c$ ,  $k_b = b/c$ ,  $k_d = d/c$ ,  $k_e = d/a$ ,  $k_f$  é o maior dos quocientes  $b/c$  e  $c/b$ );

$k = \sqrt{k'}$  = parâmetro da equação da curva que limita o leque de charneiras;

$r$  = raio da base do cone circular;

$t, v$  = coeficientes que caracterizam a redução de resistência causada pela formação do leque de charneiras; eles devem ser multiplicados pelas respectivas parcelas de T e V para serem subtraídos dos T e dos V totais e valem, para os cantos retos:

|             |       |       |       |       |            |
|-------------|-------|-------|-------|-------|------------|
| $\mu = 0$   | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | $\geq 0,5$ |
| $t = 0,164$ | 0,114 | 0,073 | 0,038 | 0,012 | 0          |
| $v = 0,064$ | 0,044 | 0,027 | 0,014 | 0,004 | 0          |

$x$  = distância;

$T$  = energia de deformação das charneiras para  $(m+m')$  unitário;  $T^*$  é o valor de  $T$  correspondente à configuração básica (definida no item 3.2);  $T_l$ ,  $T_e$ ,  $T'_e$ ,  $T_u$  e  $T_v$  são parcelas de  $T$  adiante definidas;

$V$  = volume deslocado pela laje deformada;  $V^*$  é o valor de  $V$  correspondente à configuração básica;  $V_r$ ,  $V_l$ ,  $V_u$  e  $V_v$  são parcelas de  $V$ ;  $v_e$ ,  $v'_e$ ,  $v_u$  e  $v_v$  são parcelas de  $V$  divididas por uma área;

$T$  e  $V$  são calculados para o deslocamento unitário de um mesmo ponto da laje, de modo que  $qV = T(m+m')$ , ou seja:

$$q/(m+m') = T/V \quad (3.1)$$

$\gamma_1$  = ângulo do raio vetor extremo do leque com a tangente à curva que o limita (ver figura 3.4);

$\theta_1$  = semi-ângulo central de um leque de charneiras (ver figuras 3.3 e 3.4);

$\rho, \theta$  = coordenadas polares;  $\rho_0$  e  $\rho_1$  são os valores de  $\rho$ , respectivamente para  $\theta = 0$  e  $\theta = \theta_1$  (ver figura 3.3).

### 3.2 - CONFIGURAÇÕES POSSÍVEIS DE RUÍNA DAS LAJES T

Chama-se configuração básica aquela constituída por arestas ao longo dos lados (se esses forem engastados, aparecem aí charneiras negativas) e por charneiras dispostas sobre a bissetriz dos ângulos formados pelos lados ou seus prolongamentos.

A ruína da laje em T pode ser total, isto é, pode envolver todos os seus seis cantos salientes. Nas lajes simplesmente apoiadas com  $\mu \geq 0,5$ , a configuração de ruína

total coincide com a configuração básica; quando  $\mu < 0,5$ , ou quando a laje for engastada, a configuração básica é modificada pela abertura em leque das charneiras que se dirigem aos cantos salientes.

Além de total, a configuração de ruína pode ser em forma de cone de base circular, inscrita no contorno da laje, ou ainda ser parcial da mesa do T, ou parcial da perna do T. As cargas correspondentes a essas quatro soluções são estudadas nos itens que se seguem, a fim de serem comparadas; a menor delas corresponde à solução do problema.

### 3.2.1 - Ruína total

Nas lajes simplesmente apoiadas com  $\mu \geq 0,5$ , como já foi citado, a configuração de ruína total coincide com a configuração básica. Esta pode tomar uma das quatro formas indicadas na figura 3.1 dependendo das relações entre os lados dos retângulos que constituem o T.

Usando as regras da teoria das charneiras plásticas, devem ser determinados, para cada uma das configurações básicas, os valores de  $T^*$  e  $V^*$  (tomando como unitário o deslocamento da charneira central da mesa do T).

Os volumes  $V^*$  são obtidos pela simples consideração da geometria da figura.

As energias  $T^*$  decorrem da regra geral que manda dividir o perímetro (no caso  $4b+4c+4d$ ) pela distância de base (distância da charneira que tem deslocamento unitário à borda do retângulo que lhe é paralela), multiplicar o quociente por  $(1-\mu)$ , e depois somar, para cada ângulo reentrante de  $135^\circ$ , o dobro do quociente, pela distância de base da projeção da charneira negativa sobre a direção do lado ( $a/b$  no caso I,  $a/c$  no caso II, etc).

A energia de deformação das charneiras, para cada caso da figura 3.1, resulta então:

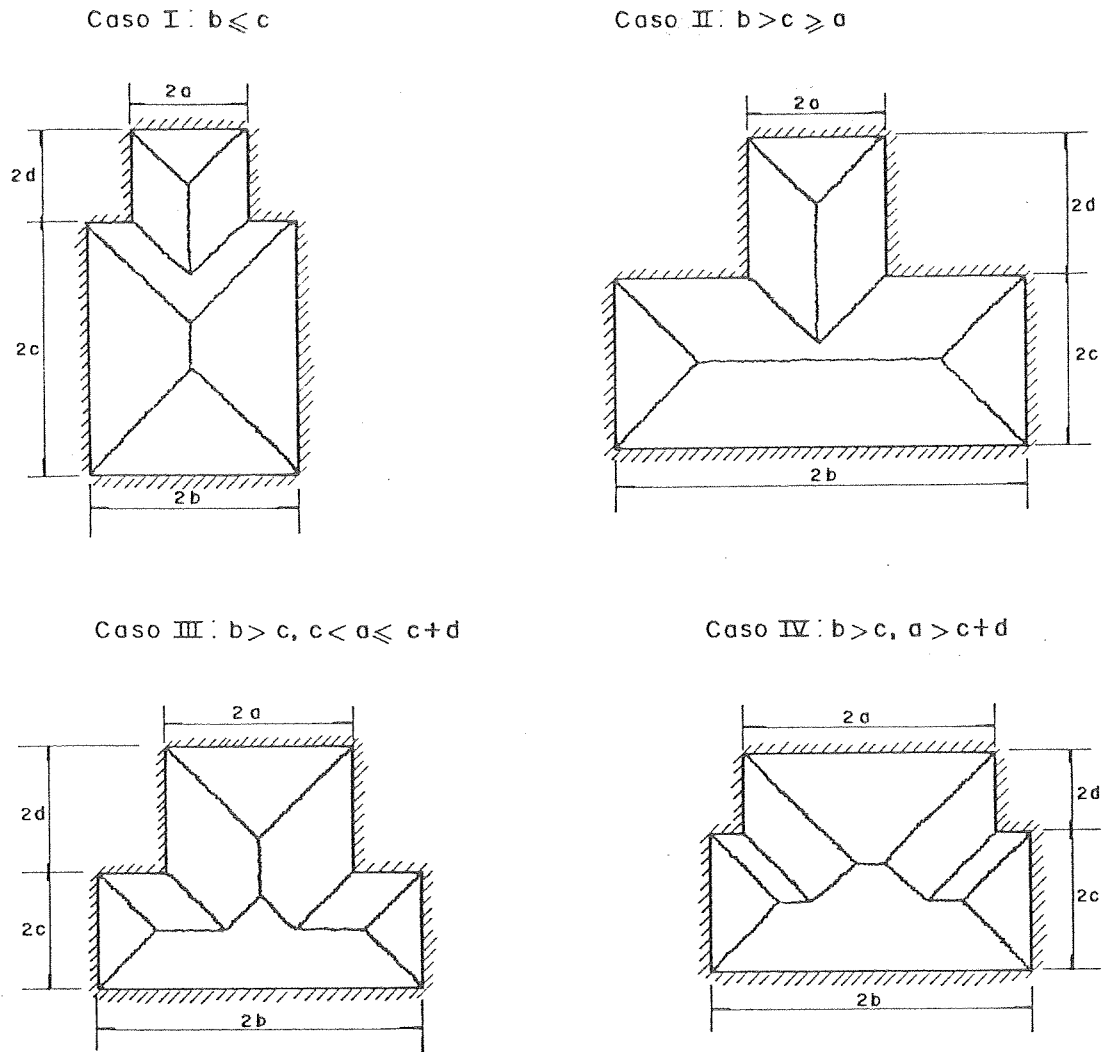


FIGURA 3.1 - As quatro formas de configuração básica.

Caso I:

$$\begin{aligned}
 T = T^* &= \left[ (1-\mu)(4b+4c+4d)/b \right] + 4a/b = \\
 &= 4/k_b \left[ (1-\mu)(1+k_d) + k_a \right] + 4(1-\mu) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Caso II:

$$\begin{aligned}
 T = T^* &= \left[ (1-\mu)(4b+4c+4d)/c \right] + 4a/c = \\
 &= 4 \left[ (1-\mu)(1+k_b+k_d) + k_a \right] \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Casos III e IV:

$$\begin{aligned}
 T = T^* &= \left[ 4(1-\mu)(b+c+d)/c \right] + 4 = \\
 &= 4(1-\mu)(k_b+k_d) + 8-4\mu \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

O volume deslocado pela laje deformada, que va  
ria para cada caso, vale:

Caso I:

$$V = V^* = 2(c-b)b + 4b^2/3 + 2a^2d/b \quad (3.5)$$

Caso II:

$$V = V^* = V_r + 2a^2d/c \quad (3.6)$$

Caso III:

$$V = V^* = V_r + 2a^2d/c - 2(a-c)^3/3c \quad (3.7)$$

Caso IV:

$$V = V^* = V_r + 2d/c \left[ ac + (a-c)(c+d) - d^2/3 \right] \quad (3.8)$$

com

$$V_r = 2(b-c)c + 4c^2/3 \quad (3.9)$$

Se  $\mu < 0,5$ , há necessidade de se considerar o e  
feito dos leques junto aos seis cantos salientes, aos  
quais correspondem os coeficientes  $t$  e  $v$  dados no item 3.1.  
Para lajes engastadas eles valem  $t = 0,164$  e  $v = 0,064$ .  
Desprezando-se a possibilidade do leque simétrico não ca  
ber no respectivo canto, o que acontece para valores peque  
nos de  $d$  ou de  $b-a$ , pode escrever-se, usando para  $T^*$  e  $V^*$   
as fórmulas anteriores 3.2 a 3.8.

Caso I:

$$T = T^* - (8+4a/b)(1-\mu)t = T^* - 4(2+k_a/k_b)(1-\mu)t \quad (3.10)$$

$$V = V^* - v(4b^2+2a^3/b)/3 \quad (3.11)$$

Casos II e III:

$$T = T^* - (8+4a/c)(1-\mu)t = T^* - 4(2+k_a)(1-\mu)t \quad (3.12)$$

$$V = V^* - v(4c^2 + 2a^3/c)/3 \quad (3.13)$$

Caso IV:

$$T = T^* - (12 + 4d/c)(1 - \mu)t = T^* - 4(3 + k_d)(1 - \mu)t \quad (3.14)$$

$$V = V^* - v [4c^2 + 2(c+d)^3/c] / 3 \quad (3.15)$$

### 3.2.2 - Ruína em cone circular

A carga que dá lugar à ruína em cone de base circular de raio  $r$  é dada por:

$$q/(m+m') = 6/r^2 \quad (3.16)$$

O raio  $r$  é o do maior círculo inscrito no contorno da laje, dependendo portanto das relações entre os lados:

$$1^\circ) \quad k_a < 2$$

$$\text{Se } k_a^2 < 4k_d \text{ com } k_a^2 < 4(k_b - 1) \text{ (fig. 3.2a)... } r = c + a^2/4c \quad (3.17)$$

Em caso contrário:

$$\text{se } k_b \leq 1 + k_d \text{ (fig. 3.2c)... } r = b \quad (3.18)$$

$$\text{se } k_b > 1 + k_d \text{ (fig. 3.2b)... } r = c + d \quad (3.19)$$

$$2^\circ) \quad k_a \geq 2$$

$$\text{Se } k_a > k_d + 1 \text{ (fig. 3.2b)... } r = c + d \quad (3.20)$$

$$\text{Se } k_a \leq k_d + 1 \text{ (fig. 3.2d)... } r = a \quad (3.21)$$

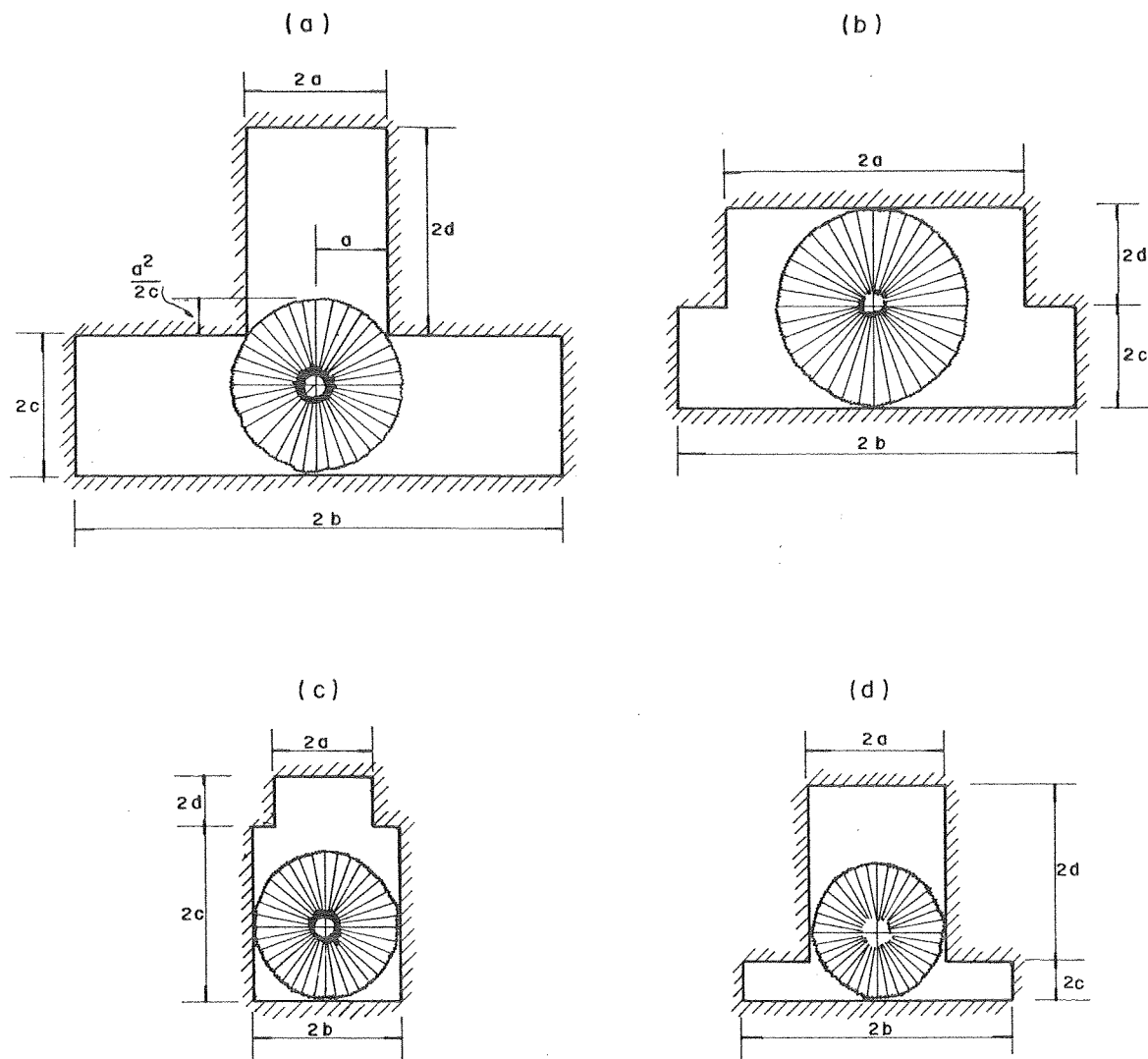


FIGURA 3.2- Configurações em cone de base circular.

### 3.2.3 - Ruína parcial da mesa

A configuração de ruína da mesa do T apresenta, dentro do retângulo correspondente, as mesmas características da configuração própria do retângulo isolado, mas a ela se acrescentam novas charneiras que formam um leque com centro no ponto C, localizado na charneira central (ver figura 3.3), e que passam nos cantos reentrantes, invadindo a perna do T.



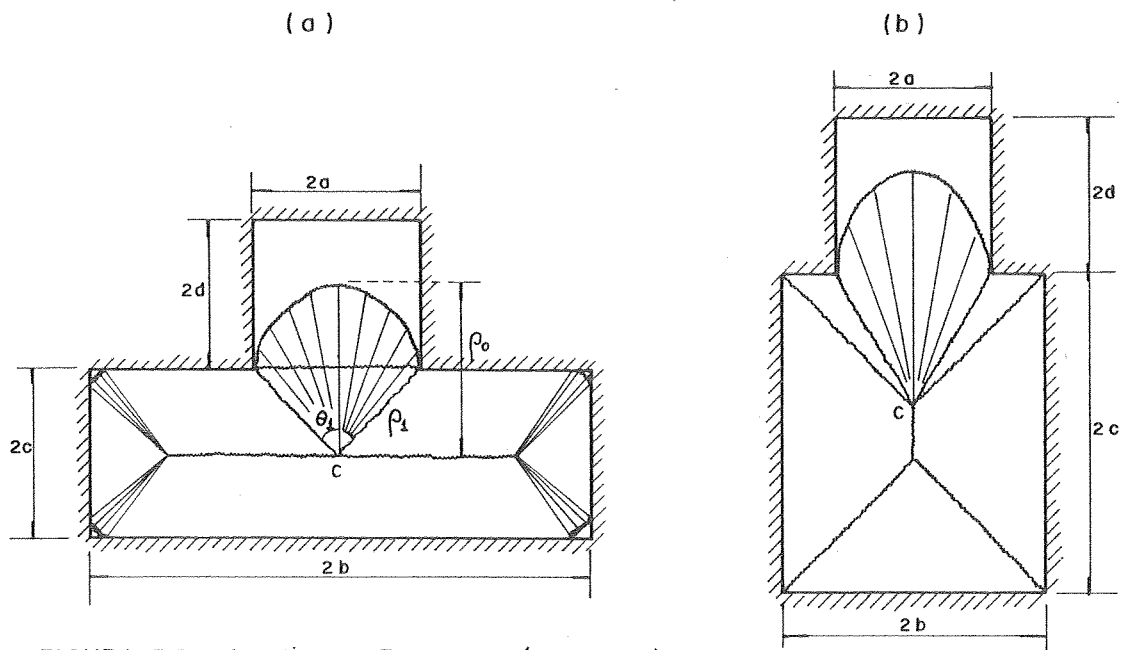


FIGURA 3.3— Configurações de ruína parcial da mesa.

A equação da charneira negativa que limita o  $le$  que  $\bar{e}$ , em coordenadas polares (com polo em C e medindo  $\theta$  a partir do eixo de simetria):

$$\rho = \rho_0 / \text{ch}(\sqrt{k'} \theta) \quad (3.22)$$

e os valores de T e V correspondentes ao semi-leque são:

$$T_1 = \int_0^{\theta_1} (1 + \rho'^2 / \rho^2) d\theta = (1 + k') \theta_1 + \text{cotg } \gamma_1 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= (1/6) \int_0^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \left[ \rho_0^2 / (6\sqrt{k'}) \right] \text{th}(\sqrt{k'} \theta_1) = \\ &= (\rho_0^2 / 6k') \text{cotg } \gamma_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

com

$$\text{cotg } \gamma_1 = -\sqrt{k'} \text{th}(\sqrt{k'} \theta_1) \quad (3.25)$$

devendo subtrair-se  $\text{cotg } \gamma_1$  de  $T_1$  quando a charneira externa do leque for negativa, obtendo-se:

$$T_e = (1+k')\theta_1 \quad (3.26)$$

O volume  $V_1$  dado na expressão 3.24, colocado em função de  $a$ , projeção do raio extremo do leque

$$\rho_1 = \rho_0 / \text{ch}(\sqrt{k'} \theta_1)$$

sobre a normal ao eixo de simetria ( $a = \rho_1 \text{ sen } \theta_1$ ), vale:

$$\begin{aligned} v_e = V_1 &= \frac{\rho_0^2}{6 \sqrt{k'}} \text{th}(\sqrt{k'} \theta_1) = \\ &= \frac{\rho_1^2 [\text{ch}(\sqrt{k'} \theta_1)]^2}{6 \sqrt{k'}} \frac{\text{sh}(\sqrt{k'} \theta_1)}{\text{ch}(\sqrt{k'} \theta_1)} = \\ &= \frac{a^2}{6} \frac{\text{sh}(2 \sqrt{k'} \theta_1)}{2 \sqrt{k'} \text{sen}^2 \theta_1} = a^2 v_e / 6 \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde

$$v_e = \text{sh}(2 \sqrt{k'} \theta_1) / (2 \sqrt{k'} \text{sen}^2 \theta_1) \quad (3.28)$$

Adota-se também a notação:

$$v'_e = v_e - \text{cotg } \theta_1 \quad (3.29)$$

O parâmetro  $k'$  que leva à solução mais desfavorável é o que apresenta um dos valores extremos compatíveis com as condições do problema.

O valor mínimo é  $k' = -1$  (pois valores menores levam a leques com a convexidade voltada para o polo C) e a ele corresponde a charneira que une os cantos reentrantes, desaparecendo realmente o leque. Quando  $\sqrt{k'}$  é imaginário, e o quociente  $[\text{sh}(2\sqrt{k'} \theta_1)] / \sqrt{k'}$  não o é, valendo e le  $[(\text{sh}(2 \sqrt{-k'} \theta_1)] / \sqrt{-k'}$ , ou seja, para  $k' = -1$ :

$$[\text{sh}(2 \sqrt{-1} \theta_1)] / \sqrt{-1} = \text{sen } 2\theta_1 = 2 \text{sen } \theta_1 \cos \theta_1 \quad (3.30)$$

e a equação 3.22 escreve-se:

$$\rho = \rho_0 / \text{ch}(\sqrt{-k'} \theta) = \rho_0 / \cos \theta \quad (3.31)$$

Para esse caso, da charneira reta que une os cantos reentrantes, tem-se:

$$T_e = 0, \quad v_e = \cotg \theta_1, \quad v_e' = 0 \quad (3.32)$$

O valor máximo de  $k'$ , quando a perna do T é suficientemente comprida, é o que leva a charneira negativa tangente aos lados do retângulo que a constitui, isto é, quando  $\gamma_1 = \pi - \theta_1$ . Pondo  $k = \sqrt{k'}$ , acham-se em função de  $f/a = \cotg \theta_1$  ( $f=c$  no caso da figura 3.3a e  $f=b$  no da figura 3.3b) os valores correspondentes de  $k$ ,  $T_e$ ,  $v_e$ ,  $v_e'$ ,  $\rho_0/a$  e  $T_e/v_e'$  dados na tabela 3.2.

A distância  $\rho_0$  dada por

$$\rho_0 = a \text{ ch}(k \theta_1) / \text{sen } \theta_1$$

com  $k$  da equação

$$k \text{ th}(k \theta_1) = \cotg \theta_1 = -\cotg \gamma_1$$

interessa para verificar se o leque não esbarra no pé do T (deve ter-se  $\rho_0 \leq 2d+f$ ); a grandeza  $v_e' = v_e - \cotg \theta_1$  permite cálculo mais rápido e a  $T_e/v_e'$  caracteriza, como se verá, qual das duas configurações mencionadas se verifica (charneira reta ou curva).

Designando por  $T_u$  e  $V_u$  os valores de T e V correspondentes ao retângulo isolado da mesa, tem-se

$$T_u = 4(1+k_f - 2t)(1-\mu) \quad (3.33)$$

$$v_u = 3V_u/c^2 = 2f^2/c^2 (3k_f - 1 - 2v) \quad (3.34)$$

tendo-se finalmente:

$$T = T_u + \frac{2a}{c} (T_e \frac{c}{a} + \mu) = T_u + 2k_a \mu + 2T_e \quad (3.35)$$

$$V = V_u + \frac{a^3}{3c} (v_e - c/a) c/a = V_u + \frac{a^2}{3} (v_e - \cotg \theta_1) \quad (3.36)$$

donde

$$\frac{qa^2}{6(m+m')} = \frac{a^2 T}{6V} = \frac{0,5 T_u + k_a \mu + T_e}{(v_u/k_a^2) + v_e'} \quad (3.37)$$

que é a solução procurada para a ruína parcial da mesa do T, achando-se  $T_u$  e  $v_u$  na tabela 3.1.

Para a charneira reta, usando-se as equações 3.32 em 3.37, acha-se, simplesmente:

$$\frac{qa^2}{6(m+m')} = \frac{0,5 T_u + k_a \mu}{v_u/k_a^2} = \alpha \quad (3.38)$$

que só será usada, pois então terá valor menor que 3.37, se o seu resultado for menor que o quociente  $T_e/v_e'$  que também é dado na tabela 3.2. Em caso contrário usa-se a 3.37, sempre com os dados das tabelas 3.1 e 3.2. Excetua-se o caso em que o  $\rho_0$  dado nesta última for maior que  $2d+f$ ; os valores de  $T_e$  e  $v_e'$  a serem usados são, então, os da tabela 3.3; os respectivos valores de  $k$ , para se desenhar a charneira, encontram-se na tabela 3.4, em função de  $d/a$  e de  $\cotg \theta_1 = c/a$ .

#### 3.2.4 - Ruína parcial da perna

A ruína parcial da perna do T acontece quando a charneira negativa do leque tangencia a borda da mesa do T (ver figura 3.4). O caso mais frequente é o da figura 3.4a, em que a tangência se dá na borda oposta à perna, achando-se

então o parâmetro  $k$  (da curva  $\rho = \rho_0 / \text{ch } k \theta$ ) dessa condição de tangência (notação da figura 3.4a):

$$\text{ch}(k \theta_1) = (2c+x)/a \text{ sen } \theta_1 \quad (3.39)$$

ou, como  $\text{cotg } \theta_1 = x/a$  e  $k_a = a/c$ :

$$\text{ch}(k \theta_1) = (2c/a) \text{ sen } \theta_1 + \text{cos } \theta_1 \quad (3.40)$$

ou seja:

$$k = (1/\theta_1) \text{ arch} \left[ (2/k_a) \text{ sen } \theta_1 + \text{cos } \theta_1 \right] \quad (3.41)$$

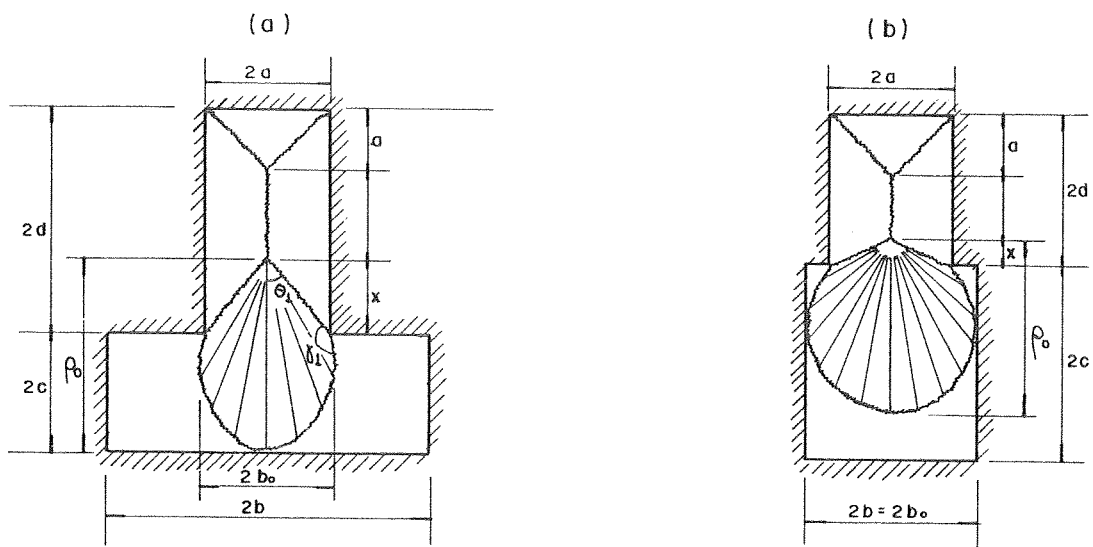


FIGURA 3.4- Configurações de ruína parcial da perna.

Deve procurar-se o valor de  $\theta_1$  que leva ao mínimo da correspondente carga de ruína  $q$ :

$$\frac{qa^2}{6(m+m')} = \frac{a^2 T}{6V} = \frac{0,5 T_v + T'_e}{v_v + v'_e - \text{cotg } \theta_1} \quad (3.42)$$

onde

$$v'_e = v_e - \text{cotg } \theta_1$$

$$T'_e = T_e + \cotg \gamma_1 \quad \text{se } \gamma_1 \leq \pi - \theta_1 \quad (3.43)$$

$$T'_e = T_e - \cotg \theta_1 \quad \text{se } \gamma_1 > \pi - \theta_1$$

sendo  $T_e$  e  $v_e$  dados por 3.26 e 3.28 com o  $k$  de 3.41;  $T_v$  e  $v_v$  são, com  $k_e = d/a$ :

$$T_v = 2(1+2k_e - 2t)(1-\mu) \quad (3.44)$$

$$v_v = 3 V_v / a^2 = 6 k_e - 1 - 2v \quad (3.45)$$

cujos valores se encontram na tabela 3.5.

Os valores de  $T'_e$  e  $v'_e$  acham-se na tabela 3.3, em função de  $c/a$  e de  $\cotg \theta_1 = x/a$ , encontrando-se o respectivo  $k$  na tabela 3.4, juntamente com o valor de  $b_o$ ; este deve ser conhecido porque não pode ultrapassar  $b$ , caso em que a tangência ocorre com a borda lateral da mesa (ver figura 3.4b). Se isto acontece, fixa-se  $b_o = b$  e busca-se, na tabela 3.4, o correspondente valor de  $c/a$ , que se adota para com ele se obterem, na tabela 3.3, os respectivos  $T'_e$  e  $v'_e$  a serem usados em 3.42. Não se toma, na pesquisa do  $x$  mais desfavorável, valor para essa variável maior que  $2d-a$ , a fim de que se mantenham sobre as bissetrizes as charneiras que passem pelos cantos salientes da perna do T. Na pesquisa do  $x$  mais desfavorável, basta considerar os valores extremos ( $x = 2d-a$ ,  $x = 2c-r$ ) e um valor intermediário, próximo da média desses limites.

### 3.3 - DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DE RUÍNA

A solução do problema da laje com forma de T simétrico é obtida comparando-se os valores de  $q/(m+m') = T/V$ , achados com a aplicação das fórmulas de  $T$  e  $V$  dadas nos itens 3.2.1 a 3.2.4, a fim de se tomar o menor deles.

## 3.3.1 - Marcha de cálculo

Ainda conforme LANGENDONCK (1972), é recomendada a seguinte marcha de cálculo:

a) Dados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , calcular as razões  $k_a = a/c$ ,  $k_b = b/c$ ,  $k_d = d/c$ ,  $k_e = d/a$ ,  $k_f$  (maior das razões  $b/c$  e  $c/d$ ) e a distância  $f$  (menor das medidas  $b$  e  $c$ ).

b) Calcular  $T^*$  e  $V^*$  com a fórmula correspondente ao caso dado: 3.2 a 3.9.

c) Calcular  $T$  e  $V$  com a fórmula correspondente ao caso dado: 3.10 a 3.15.

d) Achar o  $q/(m+m')$  =  $T/V$  de ruína total, usando os valores anteriores de  $T$  e  $V$ .

e) Calcular o  $r$  correspondente às dimensões da laje: 3.17 a 3.21.

f) Achar o  $q/(m+m')$  =  $T/V$  da ruína em cone, aplicando em 3.16 o  $r$  já calculado.

g) Obter da tabela 3.1 os valores de  $0,5T_u$  e  $v_u$  e calcular a expressão 3.38, a seguir designada por  $\alpha$ .

h) Verificar na tabela 3.2 se  $\rho_o \leq 2d+f$ ; em caso afirmativo usar os  $T_e$  e  $v_e'$  dessa tabela e, em caso contrário, usar os da tabela 3.3.

i) Verificar se  $T_e/v_e'$  é maior que o valor de  $\alpha$  atrás achado (g); em caso afirmativo, multiplicar este último valor por  $6/a^2$  e tem-se o  $q/(m+m')$  da ruína parcial da mesa.

j) Se  $T_e/v_e'$  for menor que  $\alpha$ , usa-se a fórmula 3.37 com os  $0,5T_u$  e  $v_u$  já achados (g), obtendo-se o  $q/(m+m')$  da ruína parcial da mesa.

k) Verificar se  $2d-a \geq r-2c$ , pois em caso contrário não há necessidade dos passos l) e m) seguintes.

l) Obter na tabela 3.5 os valores de  $0,5T_v$  e  $v_v$

e da tabela 3.3 os de  $T'_e$  e  $v'_e$  correspondentes ao valor escolhido de  $x/a = \cotg \theta_1$  (por exemplo, um que se situe perto da média dos limites  $2d-a$  e  $r-2c$ ); se a este corresponder, na tabela 3.4,  $b_o \leq b$ , levam-se todos aqueles valores a 3.42, obtendo-se o  $q/(m+m')$  correspondente. Se este valor for muito maior do que os achados anteriormente, passa-se à operação da alínea n); em caso contrário refaz-se a operação para outros valores de  $x/a$  (como por exemplo para seus dois limites) e adota-se o menor dos  $q$  achados, que corresponde à ruína parcial da perna do T.

m) Quando em qualquer das tentativas anteriores, se chegar a  $b_o > b$  na tabela 3.4, altera-se (mantendo-se o mesmo  $x$ ) o valor de  $c$  até que se tenha  $b_o = b$  (isto é, procura-se na tabela 3.4, na mesma coluna do  $x$  adotado, qual a coluna que contém  $b_o = b$  e usa-se o  $c$  que lhe corresponde na 1<sup>a</sup> ou na 2<sup>a</sup> coluna); volta-se à tabela 3.3 com esse valor de  $c$ , usando-se os respectivos  $T'_e$  e  $v'_e$  para aplicação na fórmula 3.42, juntamente com os  $0,5 T'_v$  e  $v'_v$  já achados na tabela 3.5.

n) Finalmente, comparar os três ou quatro valores achados de  $q/(m+m')$ , para adotar o menor deles.

Se se quiser desenhar as charneiras em leque, usa-se a equação 3.22 com o parâmetro  $k = \sqrt{k^T}$  dado nas tabelas 3.2 e 3.4.

### 3.3.2 - Tabelas auxiliares

As tabelas 3.1 a 3.5 que se seguem, também extraídas deste trabalho de LANGENDONCK (1972), auxiliam o cálculo das lajes T.



TABELA 3.1- Valores de  $\frac{0,5 T_u}{1-\mu}$  e  $v_u$ 

| $k_f$ | $\frac{0,5 T_u}{(1-\mu)}$ | $v_u$   |            | $\frac{0,5 T_u}{v_u(1-\mu)}$ |            |
|-------|---------------------------|---------|------------|------------------------------|------------|
|       |                           | $b < c$ | $b \geq c$ | $b < c$                      | $b \geq c$ |
| 1,0   | 3,35                      | 3,750   | 3,75       | 0,893                        | 0,893      |
| 1,1   | 3,55                      | 3,595   | 4,35       | 0,987                        | 0,816      |
| 1,2   | 3,75                      | 3,438   | 4,95       | 1,091                        | 0,758      |
| 1,3   | 3,95                      | 3,284   | 5,55       | 1,203                        | 0,712      |
| 1,4   | 4,15                      | 3,138   | 6,15       | 1,329                        | 0,675      |
| 1,5   | 4,35                      | 3,000   | 6,75       | 1,450                        | 0,644      |
| 1,6   | 4,55                      | 2,871   | 7,35       | 1,585                        | 0,619      |
| 1,7   | 4,75                      | 2,751   | 7,95       | 1,727                        | 0,597      |
| 1,8   | 4,95                      | 2,639   | 8,55       | 1,876                        | 0,579      |
| 1,9   | 5,15                      | 2,535   | 9,15       | 2,032                        | 0,563      |
| 2,0   | 5,35                      | 2,438   | 9,75       | 2,195                        | 0,549      |
| 2,2   | 5,75                      | 2,262   | 10,95      | 2,542                        | 0,525      |
| 2,4   | 6,15                      | 2,109   | 12,15      | 2,916                        | 0,506      |
| 2,6   | 6,55                      | 1,975   | 13,35      | 3,317                        | 0,491      |
| 2,8   | 6,95                      | 1,856   | 14,55      | 3,745                        | 0,478      |
| 3,0   | 7,35                      | 1,750   | 15,75      | 4,200                        | 0,467      |
| 3,2   | 7,75                      | 1,655   | 16,95      | 4,68                         | 0,457      |
| 3,4   | 8,15                      | 1,570   | 18,15      | 5,19                         | 0,449      |
| 3,6   | 8,55                      | 1,493   | 19,35      | 5,73                         | 0,442      |
| 3,8   | 8,95                      | 1,423   | 20,55      | 6,29                         | 0,436      |
| 4,0   | 9,35                      | 1,359   | 21,75      | 6,88                         | 0,430      |
| 4,2   | 9,75                      | 1,301   | 22,95      | 7,49                         | 0,425      |
| 4,4   | 10,15                     | 1,247   | 24,15      | 8,14                         | 0,420      |
| 4,6   | 10,55                     | 1,198   | 25,35      | 8,81                         | 0,416      |
| 4,8   | 10,95                     | 1,152   | 26,55      | 9,50                         | 0,412      |
| 5,0   | 11,35                     | 1,110   | 27,75      | 10,23                        | 0,409      |
| 6,0   | 13,35                     | 0,938   | 33,75      | 14,24                        | 0,396      |
| 7,0   | 15,35                     | 0,811   | 39,75      | 18,92                        | 0,386      |
| 8,0   | 17,35                     | 0,715   | 45,75      | 24,27                        | 0,379      |
| 9,0   | 19,35                     | 0,639   | 51,75      | 30,29                        | 0,374      |
| 10,0  | 21,35                     | 0,578   | 57,75      | 36,97                        | 0,370      |

Os valores de  $0,5 T_u / v_u$  multiplicados por  $6 k_f / bc$  correspondem aos valores de  $q / (m+m')$  da laje retangular de lados  $2b$  e  $2c$ . O fator  $6 k_f / bc$  equivale a  $24 / l_1^2$ , sendo  $l_1$  o menor dos lados do retângulo.

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1972)

TABELA 3.2 - Valores das grandezas usadas nas fórmulas dos itens 3.2.3 e 3.2.4.

| $\frac{1}{k_c} = \frac{c}{a}$ | $k_a = \frac{a}{c}$ | $T_c$ | $v'_c$ | $v_c$ | $k$   | $\frac{p_a}{a}$ | $\frac{T_c}{v'_c}$ |
|-------------------------------|---------------------|-------|--------|-------|-------|-----------------|--------------------|
| 0.1                           |                     | 1.58  | 1.54   | 1.64  | 0.267 | 1.08            | 1.03               |
| 0.2                           |                     | 1.59  | 1.54   | 1.74  | 0.400 | 1.18            | 1.03               |
| 0.3                           |                     | 1.62  | 1.54   | 1.84  | 0.517 | 1.26            | 1.05               |
| 0.4                           |                     | 1.66  | 1.56   | 1.96  | 0.630 | 1.39            | 1.06               |
| 0.5                           |                     | 1.71  | 1.59   | 2.09  | 0.741 | 1.52            | 1.08               |
| 0.6                           |                     | 1.78  | 1.64   | 2.24  | 0.851 | 1.64            | 1.09               |
| 0.7                           |                     | 1.85  | 1.69   | 2.39  | 0.962 | 1.78            | 1.09               |
| 0.8                           |                     | 1.93  | 1.76   | 2.56  | 1.074 | 1.92            | 1.10               |
| 0.9                           |                     | 2.02  | 1.83   | 2.73  | 1.186 | 2.07            | 1.10               |
| 1                             | 1                   | 2.11  | 1.91   | 2.91  | 1.299 | 2.22            | 1.10               |
|                               | 0.9                 | 2.22  | 2.01   | 3.12  | 1.43  | 2.39            | 1.10               |
|                               | 0.8                 | 2.37  | 2.13   | 3.38  | 1.58  | 2.61            | 1.11               |
|                               | 0.7                 | 2.57  | 2.30   | 3.73  | 1.79  | 2.89            | 1.12               |
|                               | 0.6                 | 2.85  | 2.55   | 4.23  | 2.07  | 3.29            | 1.12               |
|                               | 0.5                 | 3.26  | 2.91   | 4.91  | 2.46  | 3.85            | 1.12               |
|                               | 0.4                 | 3.91  | 3.48   | 5.98  | 3.05  | 4.71            | 1.12               |
|                               | 0.3                 | 5.04  | 4.48   | 7.81  | 4.03  | 6.18            | 1.12               |
|                               | 0.2                 | 7.36  | 6.53   | 11.53 | 6.02  | 9.15            | 1.13               |
|                               | 0.1                 | 14.47 | 12.84  | 22.84 | 12.01 | 18.15           | 1.13               |

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1972)

TABELA 3.3 (1ª Parte) - Valores de T<sub>0</sub>, T<sub>0'</sub> e v<sub>0'</sub> (nessa ordem)

| c<br>a | c<br>b | $\frac{a}{x} = \frac{1}{\text{cosec } \theta_1}$ |        |        |        |        |        |        |        |        | $\frac{x}{a} = \text{cosec } \theta_1$ |         |         |         |         |         |
|--------|--------|--------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|        |        | 0,1                                              | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1                                      | 0,9     | 0,8     | 0,7     | 0,6     | 0,5     |
| 0,1    |        | 0,399                                            | 0,397  | 0,396  | 0,395  | 0,394  | 0,394  | 0,392  | 0,391  | 0,390  | 0,390                                  | 0,389   | 0,388   | 0,387   | 0,386   | 0,385   |
|        |        | 0,103                                            | 0,200  | 0,293  | 0,381  | 0,464  | 0,545  | 0,621  | 0,694  | 0,765  | 0,832                                  | 0,904   | 0,990   | 1,095   | 1,225   | 1,391   |
|        |        | 0,269                                            | 0,268  | 0,268  | 0,269  | 0,269  | 0,272  | 0,268  | 0,267  | 0,266  | 0,265                                  | 0,264   | 0,262   | 0,261   | 0,258   | 0,255   |
| 0,2    |        | 0,795                                            | 0,790  | 0,785  | 0,780  | 0,776  | 0,773  | 0,769  | 0,765  | 0,762  | 0,760                                  | 0,757   | 0,754   | 0,751   | 0,747   | 0,743   |
|        |        | 0,115                                            | 0,219  | 0,314  | 0,400  | 0,478  | 0,551  | 0,616  | 0,677  | 0,733  | 0,786                                  | 0,840   | 0,902   | 0,975   | 1,062   | 1,166   |
|        |        | 0,538                                            | 0,542  | 0,545  | 0,547  | 0,549  | 0,554  | 0,551  | 0,551  | 0,550  | 0,550                                  | 0,549   | 0,548   | 0,546   | 0,544   | 0,541   |
| 0,3    |        | 1,188                                            | 1,176  | 1,166  | 1,157  | 1,148  | 1,139  | 1,132  | 1,125  | 1,118  | 1,113                                  | 1,107   | 1,101   | 1,094   | 1,086   | 1,078   |
|        |        | 0,137                                            | 0,256  | 0,359  | 0,449  | 0,528  | 0,598  | 0,660  | 0,715  | 0,765  | 0,811                                  | 0,857   | 0,908   | 0,966   | 1,031   | 1,107   |
|        |        | 0,810                                            | 0,822  | 0,828  | 0,834  | 0,840  | 0,849  | 0,848  | 0,851  | 0,853  | 0,854                                  | 0,855   | 0,856   | 0,856   | 0,856   | 0,854   |
| 0,4    |        | 1,579                                            | 1,562  | 1,541  | 1,524  | 1,509  | 1,494  | 1,482  | 1,470  | 1,460  | 1,451                                  | 1,441   | 1,431   | 1,420   | 1,407   | 1,394   |
|        |        | 0,168                                            | 0,309  | 0,424  | 0,522  | 0,605  | 0,677  | 0,738  | 0,792  | 0,839  | 0,881                                  | 0,923   | 0,968   | 1,018   | 1,073   | 1,134   |
|        |        | 1,086                                            | 1,097  | 1,118  | 1,131  | 1,143  | 1,157  | 1,161  | 1,168  | 1,173  | 1,178                                  | 1,182   | 1,187   | 1,190   | 1,193   | 1,195   |
| 0,5    |        | 1,968                                            | 1,937  | 1,909  | 1,883  | 1,860  | 1,838  | 1,820  | 1,803  | 1,788  | 1,775                                  | 1,761   | 1,746   | 1,730   | 1,712   | 1,692   |
|        |        | 0,208                                            | 0,372  | 0,506  | 0,614  | 0,703  | 0,778  | 0,841  | 0,895  | 0,941  | 0,981                                  | 1,019   | 1,062   | 1,106   | 1,155   | 1,207   |
|        |        | 1,363                                            | 1,391  | 1,415  | 1,438  | 1,457  | 1,479  | 1,488  | 1,501  | 1,511  | 1,520                                  | 1,529   | 1,538   | 1,547   | 1,556   | 1,564   |
| 0,6    |        | 2,354                                            | 2,311  | 2,271  | 2,235  | 2,203  | 2,172  | 2,148  | 2,125  | 2,107  | 2,086                                  | 2,067   | 2,047   | 2,026   | 2,001   | 1,976   |
|        |        | 0,255                                            | 0,449  | 0,601  | 0,721  | 0,817  | 0,896  | 0,961  | 1,015  | 1,063  | 1,100                                  | 1,167   | 1,227   | 1,286   | 1,341   | 1,406   |
|        |        | 1,643                                            | 1,683  | 1,720  | 1,753  | 1,782  | 1,813  | 1,830  | 1,850  | 1,864  | 1,881                                  | 1,896   | 1,911   | 1,926   | 1,942   | 1,958   |
| 0,7    |        | 2,737                                            | 2,680  | 2,627  | 2,580  | 2,538  | 2,497  | 2,466  | 2,436  | 2,409  | 2,386                                  | 2,362   | 2,337   | 2,309   | 2,279   | 2,246   |
|        |        | 0,309                                            | 0,537  | 0,708  | 0,841  | 0,944  | 1,027  | 1,094  | 1,186  | 1,258  | 1,388                                  | 1,462   | 1,537   | 1,609   | 1,679   | 1,746   |
|        |        | 1,926                                            | 1,980  | 2,031  | 2,077  | 2,117  | 2,160  | 2,186  | 2,214  | 2,239  | 2,260                                  | 2,281   | 2,304   | 2,328   | 2,352   | 2,378   |
| 0,8    |        | 3,118                                            | 3,044  | 2,978  | 2,917  | 2,864  | 2,814  | 2,774  | 2,737  | 2,704  | 2,675                                  | 2,647   | 2,615   | 2,581   | 2,544   | 2,504   |
|        |        | 0,370                                            | 0,633  | 0,826  | 0,970  | 1,081  | 1,167  | 1,248  | 1,487  | 1,593  | 1,675                                  | 1,747   | 1,815   | 1,881   | 1,944   | 2,004   |
|        |        | 2,211                                            | 2,283  | 2,349  | 2,410  | 2,464  | 2,519  | 2,556  | 2,594  | 2,627  | 2,657                                  | 2,686   | 2,717   | 2,751   | 2,786   | 2,823   |
| 0,9    |        | 3,497                                            | 3,404  | 3,322  | 3,248  | 3,183  | 3,121  | 3,074  | 3,030  | 2,990  | 2,955                                  | 2,920   | 2,883   | 2,842   | 2,799   | 2,752   |
|        |        | 0,457                                            | 0,738  | 0,951  | 1,107  | 1,225  | 1,455  | 1,646  | 1,780  | 1,879  | 1,955                                  | 2,020   | 2,083   | 2,142   | 2,199   | 2,252   |
|        |        | 2,498                                            | 2,590  | 2,674  | 2,752  | 2,821  | 2,891  | 2,939  | 2,989  | 3,032  | 3,071                                  | 3,110   | 3,151   | 3,195   | 3,243   | 3,293   |
| 1      |        | 3,874                                            | 3,761  | 3,661  | 3,572  | 3,494  | 3,422  | 3,366  | 3,313  | 3,266  | 3,225                                  | 3,185   | 3,142   | 3,094   | 3,044   | 2,990   |
|        |        | 0,511                                            | 0,850  | 1,084  | 1,252  | 1,494  | 1,756  | 1,937  | 2,063  | 2,155  | 2,225                                  | 2,285   | 2,342   | 2,394   | 2,444   | 2,490   |
|        |        | 2,788                                            | 2,901  | 3,006  | 3,102  | 3,189  | 3,275  | 3,336  | 3,399  | 3,454  | 3,503                                  | 3,552   | 3,604   | 3,661   | 3,722   | 3,787   |
| 0,9    |        | 4,289                                            | 4,152  | 4,032  | 3,926  | 3,833  | 3,748  | 3,681  | 3,619  | 3,564  | 3,517                                  | 3,470   | 3,419   | 3,364   | 3,306   | 3,243   |
|        |        | 0,600                                            | 0,982  | 1,239  | 1,426  | 1,633  | 2,081  | 2,253  | 2,369  | 2,453  | 2,517                                  | 2,570   | 2,619   | 2,664   | 2,706   | 2,743   |
|        |        | 3,113                                            | 3,253  | 3,382  | 3,502  | 3,609  | 3,715  | 3,794  | 3,872  | 3,941  | 4,003                                  | 4,064   | 4,131   | 4,203   | 4,281   | 4,364   |
| 0,8    |        | 4,805                                            | 4,635  | 4,486  | 4,357  | 4,245  | 4,143  | 4,063  | 3,989  | 3,924  | 3,867                                  | 3,812   | 3,751   | 3,688   | 3,620   | 3,547   |
|        |        | 0,719                                            | 1,158  | 1,442  | 1,657  | 2,245  | 2,476  | 2,634  | 2,739  | 2,813  | 2,867                                  | 2,912   | 2,951   | 2,988   | 3,020   | 3,047   |
|        |        | 3,523                                            | 3,700  | 3,865  | 4,016  | 4,153  | 4,287  | 4,388  | 4,488  | 4,577  | 4,657                                  | 4,736   | 4,823   | 4,915   | 5,017   | 5,126   |
| 0,7    |        | 5,462                                            | 5,244  | 5,058  | 4,897  | 4,758  | 4,633  | 4,535  | 4,445  | 4,367  | 4,299                                  | 4,232   | 4,161   | 4,084   | 4,003   | 3,917   |
|        |        | 0,887                                            | 1,397  | 1,725  | 2,307  | 2,758  | 2,966  | 3,106  | 3,195  | 3,256  | 3,299                                  | 3,332   | 3,361   | 3,384   | 3,403   | 3,417   |
|        |        | 4,057                                            | 4,289  | 4,503  | 4,702  | 4,881  | 5,055  | 5,190  | 5,322  | 5,439  | 5,544                                  | 5,649   | 5,764   | 5,888   | 6,024   | 6,171   |
| 0,6    |        | 6,328                                            | 6,041  | 5,806  | 5,591  | 5,415  | 5,258  | 5,136  | 5,024  | 4,927  | 4,843                                  | 4,761   | 4,674   | 4,581   | 4,483   | 4,379   |
|        |        | 1,133                                            | 1,737  | 2,473  | 3,091  | 3,415  | 3,592  | 3,707  | 3,774  | 3,816  | 3,843                                  | 3,861   | 3,874   | 3,881   | 3,883   | 3,879   |
|        |        | 4,779                                            | 5,095  | 5,381  | 5,657  | 5,902  | 6,136  | 6,323  | 6,503  | 6,664  | 6,809                                  | 6,953   | 7,110   | 7,283   | 7,471   | 7,676   |
| 0,5    |        | 7,519                                            | 7,123  | 6,795  | 6,513  | 6,289  | 6,086  | 5,927  | 5,784  | 5,661  | 5,555                                  | 5,452   | 5,343   | 5,227   | 5,105   | 4,977   |
|        |        | 1,512                                            | 2,242  | 3,482  | 4,013  | 4,289  | 4,419  | 4,499  | 4,534  | 4,550  | 4,555                                  | 4,552   | 4,543   | 4,527   | 4,505   | 4,477   |
|        |        | 5,816                                            | 6,269  | 6,687  | 7,079  | 7,424  | 7,758  | 8,030  | 8,289  | 8,522  | 8,731                                  | 8,939   | 9,168   | 9,419   | 9,693   | 9,992   |
| 0,4    |        | 9,264                                            | 8,683  | 8,214  | 7,831  | 7,512  | 7,236  | 7,023  | 6,833  | 6,670  | 6,530                                  | 6,396   | 6,254   | 6,105   | 5,949   | 5,785   |
|        |        | 2,145                                            | 3,683  | 4,881  | 5,331  | 5,512  | 5,570  | 5,594  | 5,583  | 5,559  | 5,530                                  | 5,496   | 5,454   | 5,405   | 5,349   | 5,285   |
|        |        | 7,420                                            | 8,121  | 8,769  | 9,365  | 9,909  | 10,422 | 10,847 | 11,249 | 11,611 | 11,936                                 | 12,260  | 12,617  | 13,009  | 13,439  | 13,909  |
| 0,3    |        | 12,051                                           | 11,133 | 10,405 | 9,827  | 9,359  | 8,962  | 8,656  | 8,387  | 8,160  | 7,966                                  | 7,782   | 7,588   | 7,386   | 7,175   | 6,957   |
|        |        | 3,315                                            | 6,133  | 7,072  | 7,327  | 7,359  | 7,227  | 7,137  | 7,049  | 6,966  | 6,882                                  | 6,788   | 6,686   | 6,575   | 6,457   | 6,333   |
|        |        | 10,237                                           | 11,448 | 12,581 | 13,620 | 14,568 | 15,455 | 16,203 | 16,905 | 17,536 | 18,105                                 | 18,673  | 19,298  | 19,986  | 20,743  | 21,570  |
| 0,2    |        | 17,349                                           | 15,570 | 14,276 | 13,292 | 12,522 | 11,888 | 11,403 | 10,988 | 10,640 | 10,346                                 | 10,070  | 9,782   | 9,484   | 9,177   | 8,862   |
|        |        | 7,349                                            | 10,570 | 10,943 | 10,792 | 10,522 | 10,221 | 9,974  | 9,738  | 9,529  | 9,346                                  | 9,170   | 8,982   | 8,784   | 8,577   | 8,362   |
|        |        | 16,288                                           | 18,978 | 21,442 | 23,694 | 25,742 | 27,647 | 29,278 | 30,794 | 32,160 | 33,392                                 | 34,621  | 35,977  | 37,473  | 39,118  | 40,922  |
| 0,1    |        | 31,090                                           | 26,352 | 23,314 | 21,171 | 19,577 | 18,318 | 17,378 | 16,600 | 15,956 | 15,418                                 | 14,919  | 14,411  | 13,888  | 13,358  | 12,819  |
|        |        | 21,090                                           | 27,352 | 29,881 | 28,671 | 27,577 | 26,651 | 25,949 | 25,350 | 24,845 | 24,418                                 | 24,019  | 23,611  | 23,188  | 22,758  | 22,319  |
|        |        | 38,090                                           | 48,155 | 57,239 | 65,496 | 72,992 | 79,922 | 85,917 | 91,435 | 96,428 | 100,939                                | 105,440 | 110,388 | 115,867 | 121,889 | 128,516 |

No caso de ruína de mesa, usa-se d em vez de c e f em vez de x.

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1972)

TABELA 3.3 (2ª Parte)- Valores de  $T_0$ ,  $T'_0$  e  $v'_0$  (nessa ordem)

| $\frac{c}{a}$ | $\frac{a}{c}$ | $\frac{x}{a} = \cotg \theta_1 =$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        | $\frac{a}{x} = \frac{1}{\cotg \theta_1} =$ |        |        |        |        |
|---------------|---------------|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
|               |               | 0,5                              | 0,4    | 0,3    | 0,2    | 0,1    | 0      | -0,2   | -0,4   | -0,6   | -0,8   | -1                                         | -0,8   | -0,6   | -0,4   | -0,2   |
| 0,1           |               | 0,385                            | 0,383  | 0,382  | 0,381  | 0,379  | 0,377  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,391                            | 1,010  | 1,917  | 2,375  | 3,134  | 4,648  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 0,255                            | 0,252  | 0,247  | 0,241  | 0,234  | 0,225  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,2           |               | 0,743                            | 0,738  | 0,733  | 0,728  | 0,722  | 0,715  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,166                            | 1,294  | 1,456  | 1,670  | 1,966  | 2,406  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 0,541                            | 0,536  | 0,530  | 0,522  | 0,511  | 0,497  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,3           |               | 1,078                            | 1,069  | 1,059  | 1,048  | 1,036  | 1,023  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,107                            | 1,197  | 1,303  | 1,433  | 1,596  | 1,810  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 0,854                            | 0,851  | 0,846  | 0,839  | 0,828  | 0,813  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,4           |               | 1,394                            | 1,379  | 1,362  | 1,345  | 1,327  | 1,307  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,134                            | 1,203  | 1,282  | 1,374  | 1,482  | 1,614  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,195                            | 1,197  | 1,195  | 1,191  | 1,184  | 1,172  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,5           |               | 1,692                            | 1,671  | 1,648  | 1,623  | 1,598  | 1,571  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,207                            | 1,271  | 1,348  | 1,423  | 1,498  | 1,571  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,564                            | 1,571  | 1,576  | 1,579  | 1,577  | 1,571  |        |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,6           |               | 1,976                            | 1,948  | 1,917  | 1,886  | 1,852  | 1,817  | 1,746  |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,476                            | 1,548  | 1,617  | 1,686  | 1,752  | 1,817  | 1,946  |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,958                            | 1,973  | 1,988  | 1,999  | 2,007  | 2,009  | 1,991  |        |        |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,7           |               | 2,246                            | 2,211  | 2,173  | 2,133  | 2,092  | 2,049  | 1,962  | 1,877  |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 1,746                            | 1,811  | 1,873  | 1,933  | 1,992  | 2,049  | 2,162  | 2,277  |        |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 2,378                            | 2,404  | 2,429  | 2,452  | 2,471  | 2,485  | 2,490  | 2,457  |        |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,8           |               | 2,504                            | 2,462  | 2,416  | 2,369  | 2,319  | 2,269  | 2,166  | 2,066  | 1,973  |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 2,004                            | 2,062  | 2,116  | 2,169  | 2,219  | 2,269  | 2,366  | 2,466  | 2,573  |        |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 2,823                            | 2,861  | 2,900  | 2,936  | 2,970  | 2,998  | 3,031  | 3,017  | 2,944  |        |                                            |        |        |        |        |
| 0,9           |               | 2,752                            | 2,702  | 2,649  | 2,593  | 2,536  | 2,477  | 2,359  | 2,244  | 2,139  | 2,043  |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 2,252                            | 2,302  | 2,349  | 2,393  | 2,436  | 2,477  | 2,559  | 2,644  | 2,739  | 2,843  |                                            |        |        |        |        |
|               |               | 3,293                            | 3,345  | 3,398  | 3,452  | 3,502  | 3,547  | 3,614  | 3,631  | 3,583  | 3,462  |                                            |        |        |        |        |
| 1             | 1             | 2,990                            | 2,931  | 2,871  | 2,807  | 2,742  | 2,675  | 2,541  | 2,413  | 2,295  | 2,189  | 2,094                                      | 1,991  |        |        |        |
|               |               | 2,490                            | 2,531  | 2,571  | 2,607  | 2,642  | 2,675  | 2,741  | 2,813  | 2,895  | 2,988  | 3,094                                      | 3,241  |        |        |        |
|               |               | 3,787                            | 3,856  | 3,926  | 3,997  | 4,067  | 4,132  | 4,238  | 4,291  | 4,274  | 4,178  | 4,000                                      | 3,666  |        |        |        |
| 0,9           |               | 3,243                            | 3,177  | 3,107  | 3,035  | 2,960  | 2,885  | 2,734  | 2,591  | 2,460  | 2,342  | 2,238                                      | 2,125  |        |        |        |
|               |               | 2,743                            | 2,777  | 2,807  | 2,835  | 2,860  | 2,885  | 2,934  | 2,991  | 3,060  | 3,142  | 3,238                                      | 3,375  |        |        |        |
|               |               | 4,364                            | 4,453  | 4,544  | 4,638  | 4,732  | 4,822  | 4,977  | 5,078  | 5,103  | 5,040  | 4,886                                      | 4,572  |        |        |        |
| 0,8           |               | 3,547                            | 3,470  | 3,389  | 3,306  | 3,220  | 3,134  | 2,963  | 2,801  | 2,654  | 2,523  | 2,407                                      | 2,282  | 2,111  |        |        |
|               |               | 3,047                            | 3,070  | 3,089  | 3,106  | 3,120  | 3,134  | 3,163  | 3,201  | 3,254  | 3,323  | 3,407                                      | 3,532  | 3,778  |        |        |
|               |               | 5,126                            | 5,243  | 5,364  | 5,491  | 5,618  | 5,743  | 5,969  | 6,138  | 6,223  | 6,211  | 6,098                                      | 5,821  | 5,040  |        |        |
| 0,7           |               | 3,917                            | 3,826  | 3,731  | 3,634  | 3,534  | 3,434  | 3,237  | 3,053  | 2,886  | 2,738  | 2,609                                      | 2,470  | 2,281  |        |        |
|               |               | 3,417                            | 3,428  | 3,431  | 3,434  | 3,434  | 3,434  | 3,437  | 3,453  | 3,486  | 3,538  | 3,609                                      | 3,720  | 3,947  |        |        |
|               |               | 6,171                            | 6,328  | 6,495  | 6,668  | 6,845  | 7,021  | 7,353  | 7,623  | 7,801  | 7,869  | 7,822                                      | 7,605  | 6,884  |        |        |
| 0,6           |               | 4,379                            | 4,270  | 4,158  | 4,042  | 3,924  | 3,806  | 3,574  | 3,363  | 3,171  | 3,003  | 2,857                                      | 2,700  | 2,488  | 2,190  |        |
|               |               | 3,870                            | 3,870  | 3,858  | 3,842  | 3,824  | 3,806  | 3,774  | 3,763  | 3,771  | 3,803  | 3,857                                      | 3,950  | 4,155  | 4,690  |        |
|               |               | 7,676                            | 7,897  | 8,130  | 8,376  | 8,629  | 8,885  | 9,385  | 9,811  | 10,136 | 10,333 | 10,396                                     | 10,288 | 9,686  | 7,190  |        |
| 0,5           |               | 4,977                            | 4,843  | 4,705  | 4,565  | 4,422  | 4,281  | 4,008  | 3,756  | 3,533  | 3,338  | 3,169                                      | 2,990  | 2,750  | 2,413  |        |
|               |               | 4,477                            | 4,443  | 4,405  | 4,365  | 4,322  | 4,281  | 4,208  | 4,156  | 4,133  | 4,138  | 4,169                                      | 4,240  | 4,416  | 4,913  |        |
|               |               | 9,992                            | 10,315 | 10,661 | 11,026 | 11,407 | 11,793 | 12,560 | 13,258 | 13,833 | 14,254 | 14,510                                     | 14,601 | 14,238 | 11,951 |        |
| 0,4           |               | 5,785                            | 5,616  | 5,443  | 5,267  | 5,090  | 4,916  | 4,582  | 4,279  | 4,012  | 3,781  | 3,583                                      | 3,373  | 3,095  | 2,709  | 2,106  |
|               |               | 5,285                            | 5,216  | 5,143  | 5,067  | 4,990  | 4,916  | 4,782  | 4,679  | 4,612  | 4,581  | 4,583                                      | 4,623  | 4,762  | 5,209  | 7,106  |
|               |               | 13,909                           | 14,419 | 14,966 | 15,548 | 16,157 | 16,784 | 18,047 | 19,237 | 20,276 | 21,117 | 21,744                                     | 22,228 | 22,363 | 20,641 | 5,000  |
| 0,3           |               | 6,957                            | 6,811  | 6,505  | 6,275  | 6,047  | 5,824  | 5,399  | 5,019  | 4,689  | 4,407  | 4,166                                      | 3,914  | 3,582  | 3,126  | 2,424  |
|               |               | 6,457                            | 6,411  | 6,205  | 6,075  | 5,947  | 5,824  | 5,509  | 5,419  | 5,289  | 5,207  | 5,166                                      | 5,164  | 5,249  | 5,626  | 7,424  |
|               |               | 21,570                           | 22,313 | 23,444 | 24,483 | 25,574 | 26,706 | 29,016 | 31,254 | 33,287 | 35,036 | 36,476                                     | 37,844 | 39,151 | 38,947 | 24,104 |
| 0,2           |               | 8,862                            | 8,541  | 8,219  | 7,905  | 7,582  | 7,275  | 6,701  | 6,195  | 5,762  | 5,396  | 5,089                                      | 4,769  | 4,353  | 3,788  | 2,931  |
|               |               | 8,362                            | 8,141  | 7,919  | 7,705  | 7,482  | 7,275  | 6,901  | 6,595  | 6,362  | 6,196  | 6,089                                      | 6,019  | 6,020  | 6,288  | 7,931  |
|               |               | 40,922                           | 42,888 | 45,017 | 47,267 | 49,705 | 52,215 | 57,391 | 62,501 | 67,275 | 71,556 | 75,278                                     | 79,162 | 83,913 | 88,594 | 79,538 |
| 0,1           |               | 12,819                           | 12,282 | 11,750 | 11,226 | 10,717 | 10,231 | 9,336  | 8,567  | 7,927  | 7,394  | 6,950                                      | 6,494  | 5,912  | 5,133  | 3,975  |
|               |               | 12,319                           | 11,882 | 11,450 | 11,026 | 10,617 | 10,231 | 9,538  | 8,967  | 8,527  | 8,194  | 7,950                                      | 7,744  | 7,579  | 7,633  | 8,975  |
|               |               | 128,52                           | 135,74 | 143,55 | 151,95 | 160,86 | 170,14 | 189,45 | 208,72 | 226,95 | 243,73 | 258,82                                     | 275,39 | 297,82 | 329,01 | 362,63 |

No caso de ruína de mesa, usa-se d em vez de c e f em vez de x.

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1972)

TABELA 3.4 (1ª Parte) - Valores de k e b<sub>0</sub>/a (nessa ordem)

| $\frac{c}{a}$ | $\frac{a}{c}$ | $\frac{a}{x} = \frac{1}{\cotg \theta_1}$ |                 |                |                |                |                |                |                |                | $\frac{x}{a} = \cotg \theta_1$ |                |                |                |                |                |
|---------------|---------------|------------------------------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|               |               | 0,1                                      | 0,2             | 0,3            | 0,4            | 0,5            | 0,6            | 0,7            | 0,8            | 0,9            | 1                              | 0,9            | 0,8            | 0,7            | 0,6            | 0,5            |
| 0,1           |               | 1,732<br>*                               | 1,007<br>*      | 0,599<br>*     | 0,195<br>*     | 0,388<br>*     | 0,522<br>*     | 0,598<br>*     | 0,648<br>*     | 0,684<br>*     | 0,710<br>*                     | 0,732<br>*     | 0,753<br>*     | 0,773<br>*     | 0,791<br>*     | 0,808<br>*     |
| 0,2           |               | 2,641<br>*                               | 1,732<br>*      | 1,301<br>*     | 1,025<br>*     | 0,821<br>*     | 0,654<br>*     | 0,508<br>*     | 0,367<br>*     | 0,201<br>*     | 0,101<br>*                     | 0,311<br>*     | 0,398<br>*     | 0,467<br>*     | 0,524<br>*     | 0,574<br>*     |
| 0,3           |               | 3,305<br>*                               | 2,227<br>*      | 1,733<br>*     | 1,428<br>*     | 1,214<br>*     | 1,051<br>*     | 0,923<br>*     | 0,817<br>*     | 0,725<br>*     | 0,646<br>*                     | 0,567<br>*     | 0,478<br>*     | 0,374<br>*     | 0,233<br>*     | 0,162<br>*     |
| 0,4           |               | 3,853<br>*                               | 2,629<br>*      | 2,071<br>*     | 1,734<br>*     | 1,501<br>*     | 1,327<br>*     | 1,194<br>*     | 1,086<br>*     | 0,996<br>*     | 0,920<br>*                     | 0,848<br>*     | 0,772<br>*     | 0,692<br>*     | 0,605<br>*     | 0,509<br>*     |
| 0,5           |               | 4,329<br>*                               | 2,969<br>*      | 2,356<br>*     | 1,987<br>*     | 1,736<br>*     | 1,548<br>*     | 1,407<br>*     | 1,293<br>*     | 1,200<br>*     | 1,122<br>*                     | 1,049<br>*     | 0,974<br>*     | 0,895<br>*     | 0,813<br>*     | 0,727<br>*     |
| 0,6           |               | 4,756<br>*                               | 3,272<br>*      | 2,606<br>*     | 2,208<br>*     | 1,937<br>*     | 1,746<br>*     | 1,587<br>*     | 1,466<br>*     | 1,369<br>*     | 1,287<br>*                     | 1,211<br>1,000 | 1,134<br>1,001 | 1,053<br>1,003 | 0,971<br>1,005 | 0,886<br>1,008 |
| 0,7           |               | 5,144<br>*                               | 3,546<br>*      | 2,831<br>*     | 2,404<br>*     | 2,115<br>*     | 1,901<br>*     | 1,743<br>*     | 1,616<br>1,000 | 1,513<br>1,002 | 1,427<br>1,004                 | 1,349<br>1,007 | 1,268<br>1,012 | 1,185<br>1,017 | 1,101<br>1,026 | 1,014<br>1,030 |
| 0,8           |               | 5,503<br>*                               | 3,797<br>*      | 3,036<br>*     | 2,582<br>*     | 2,275<br>*     | 2,049<br>*     | 1,882<br>1,002 | 1,748<br>1,006 | 1,640<br>1,010 | 1,551<br>1,016                 | 1,469<br>1,022 | 1,385<br>1,029 | 1,299<br>1,038 | 1,212<br>1,047 | 1,123<br>1,058 |
| 0,9           |               | 5,838<br>*                               | 4,031<br>*      | 3,224<br>*     | 2,745<br>*     | 2,422<br>*     | 2,183<br>1,004 | 2,008<br>1,008 | 1,868<br>1,016 | 1,755<br>1,023 | 1,662<br>1,032                 | 1,576<br>1,041 | 1,489<br>1,051 | 1,400<br>1,063 | 1,310<br>1,076 | 1,219<br>1,090 |
| 1             | 1             | 6,153<br>*                               | 4,249<br>*      | 3,400<br>*     | 2,896<br>*     | 2,557<br>1,001 | 2,307<br>1,009 | 2,124<br>1,018 | 1,977<br>1,029 | 1,859<br>1,040 | 1,763<br>1,051                 | 1,674<br>1,062 | 1,583<br>1,076 | 1,491<br>1,090 | 1,398<br>1,107 | 1,304<br>1,125 |
|               | 0,9           | 6,483<br>*                               | 4,476<br>*      | 3,582<br>*     | 3,052<br>1,000 | 2,696<br>1,006 | 2,434<br>1,019 | 2,242<br>1,032 | 2,089<br>1,046 | 1,966<br>1,061 | 1,865<br>1,074                 | 1,772<br>1,089 | 1,678<br>1,105 | 1,582<br>1,122 | 1,436<br>1,143 | 1,389<br>1,164 |
|               | 0,8           | 6,871<br>*                               | 4,741<br>*      | 3,794<br>*     | 3,233<br>1,003 | 2,856<br>1,015 | 2,579<br>1,034 | 2,277<br>1,052 | 2,216<br>1,071 | 2,087<br>1,089 | 1,981<br>1,106                 | 1,884<br>1,123 | 1,785<br>1,143 | 1,686<br>1,165 | 1,585<br>1,189 | 1,484<br>1,216 |
|               | 0,7           | 7,335<br>*                               | 5,056<br>*      | 4,044<br>1,001 | 3,445<br>1,011 | 3,043<br>1,032 | 2,749<br>1,058 | 2,535<br>1,081 | 2,364<br>1,106 | 2,227<br>1,128 | 2,115<br>1,149                 | 2,012<br>1,171 | 1,909<br>1,195 | 1,804<br>1,221 | 1,699<br>1,142 | 1,593<br>1,282 |
|               | 0,6           | 7,905<br>*                               | 5,441<br>*      | 4,350<br>1,004 | 3,701<br>1,027 | 3,268<br>1,059 | 2,952<br>1,093 | 2,722<br>1,124 | 2,539<br>1,155 | 2,392<br>1,183 | 2,273<br>1,209                 | 2,164<br>1,236 | 2,053<br>1,265 | 1,942<br>1,297 | 1,831<br>1,335 | 1,719<br>1,372 |
|               | 0,5           | 8,628<br>*                               | 5,923<br>*      | 4,724<br>1,018 | 4,015<br>1,058 | 3,545<br>1,102 | 3,200<br>1,147 | 2,950<br>1,188 | 2,752<br>1,226 | 2,593<br>1,262 | 2,464<br>1,295                 | 2,346<br>1,328 | 2,228<br>1,364 | 2,108<br>1,404 | 1,989<br>1,449 | 1,869<br>1,497 |
|               | 0,4           | 9,589<br>*                               | 6,556<br>1,009  | 5,214<br>1,051 | 4,425<br>1,108 | 3,899<br>1,172 | 3,517<br>1,233 | 3,240<br>1,286 | 3,021<br>1,337 | 2,846<br>1,383 | 2,704<br>1,425                 | 2,575<br>1,467 | 2,445<br>1,513 | 2,315<br>1,564 | 2,185<br>1,620 | 2,056<br>1,681 |
|               | 0,3           | 10,950<br>*                              | 7,443<br>1,036  | 5,891<br>1,121 | 4,983<br>1,209 | 4,380<br>1,293 | 3,944<br>1,380 | 3,629<br>1,455 | 3,381<br>1,521 | 3,184<br>1,583 | 3,024<br>1,639                 | 2,879<br>1,694 | 2,733<br>1,755 | 2,587<br>1,823 | 2,442<br>1,898 | 2,299<br>1,979 |
|               | 0,2           | 13,156<br>1,038                          | 8,825<br>1,124  | 6,927<br>1,271 | 5,825<br>1,414 | 5,100<br>1,551 | 4,578<br>1,672 | 4,204<br>1,780 | 3,910<br>1,878 | 3,677<br>1,969 | 3,489<br>2,050                 | 3,319<br>2,131 | 3,149<br>2,221 | 2,980<br>2,319 | 2,812<br>2,427 | 2,647<br>2,544 |
|               | 0,1           | 17,633<br>1,236                          | 26,352<br>1,487 | 8,868<br>1,738 | 7,392<br>2,015 | 6,421<br>2,263 | 5,731<br>2,491 | 5,240<br>2,690 | 4,858<br>2,872 | 4,558<br>3,037 | 4,316<br>3,189                 | 4,099<br>3,334 | 3,884<br>3,500 | 3,670<br>3,677 | 3,459<br>3,875 | 3,252<br>4,087 |

No caso de ruína da mesa, usa se d em vez de c e f em vez de x.

\* Aos asteriscos corresponde b<sub>0</sub> < a < b.

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1972)

TABELA 3.4 (2ª Parte) - Valores de k e b<sub>0</sub>/a (nessa ordem)

| c/a | a/c | $\frac{x}{a} = \cotg \theta_1 =$ |                |                |                |                |                |                |                |                |                | $\frac{a}{x} = \frac{1}{\cotg \theta_1} =$ |                |                |                 |                 |
|-----|-----|----------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
|     |     | 0,5                              | 0,4            | 0,3            | 0,2            | 0,1            | 0              | -0,2           | -0,4           | -0,6           | -0,8           | -1                                         | -0,8           | -0,6           | -0,4            | -0,2            |
| 0,1 |     | 0,808<br>*                       | 0,823<br>*     | 0,837<br>*     | 0,850<br>*     | 0,862<br>*     | 0,872<br>*     |                |                |                |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,2 |     | 0,574<br>*                       | 0,616<br>*     | 0,653<br>*     | 0,686<br>*     | 0,714<br>*     | 0,738<br>*     |                |                |                |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,3 |     | 0,162<br>*                       | 0,320<br>*     | 0,415<br>*     | 0,487<br>*     | 0,544<br>*     | 0,590<br>*     |                |                |                |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,4 |     | 0,509<br>*                       | 0,398<br>*     | 0,255<br>*     | 0,144<br>*     | 0,314<br>*     | 0,410<br>*     |                |                |                |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,5 |     | 0,727<br>*                       | 0,635<br>*     | 0,537<br>*     | 0,427<br>*     | 0,293<br>*     | 0,000<br>1,000 |                |                |                |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,6 |     | 0,886<br>1,008                   | 0,798<br>1,012 | 0,706<br>1,016 | 0,611<br>1,019 | 0,509<br>1,021 | 0,396<br>1,022 | 0,112<br>*     |                |                |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,7 |     | 1,014<br>1,030                   | 0,926<br>1,038 | 0,836<br>1,046 | 0,744<br>1,053 | 0,650<br>1,060 | 0,552<br>1,065 | 0,331<br>1,066 | 0,194<br>*     |                |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,8 |     | 1,123<br>1,058                   | 1,034<br>1,070 | 0,943<br>1,082 | 0,851<br>1,095 | 0,759<br>1,106 | 0,667<br>1,116 | 0,474<br>1,128 | 0,243<br>1,122 | 0,256<br>*     |                |                                            |                |                |                 |                 |
| 0,9 |     | 1,219<br>1,090                   | 1,127<br>1,106 | 1,035<br>1,123 | 0,942<br>1,140 | 0,851<br>1,156 | 0,759<br>1,171 | 0,578<br>1,194 | 0,388<br>1,199 | 0,114<br>1,181 | 0,300<br>*     |                                            |                |                |                 |                 |
| 1   | 1   | 1,304<br>1,125                   | 1,209<br>1,144 | 1,115<br>1,165 | 1,022<br>1,186 | 0,929<br>1,208 | 0,838<br>1,228 | 0,661<br>1,261 | 0,487<br>1,277 | 0,295<br>1,271 | 0,159<br>*     | 0,333<br>*                                 | 0,439<br>*     |                |                 |                 |
|     | 0,9 | 1,389<br>1,164                   | 1,292<br>1,188 | 1,195<br>1,213 | 1,100<br>1,240 | 1,006<br>1,266 | 0,915<br>1,291 | 0,739<br>1,336 | 0,573<br>1,365 | 0,406<br>1,371 | 0,208<br>1,352 | 0,224<br>*                                 | 0,372<br>*     |                |                 |                 |
|     | 0,8 | 1,484<br>1,216                   | 1,384<br>1,244 | 1,284<br>1,275 | 1,186<br>1,307 | 1,090<br>1,339 | 0,997<br>1,371 | 0,822<br>1,429 | 0,660<br>1,472 | 0,507<br>1,494 | 0,351<br>1,491 | 0,147<br>1,461                             | 0,273<br>*     | 0,434<br>*     |                 |                 |
|     | 0,7 | 1,593<br>1,282                   | 1,488<br>1,317 | 1,384<br>1,354 | 1,283<br>1,393 | 1,184<br>1,433 | 1,089<br>1,473 | 0,911<br>1,548 | 0,751<br>1,609 | 0,606<br>1,649 | 0,468<br>1,664 | 0,328<br>1,653                             | 0,036<br>1,607 | 0,351<br>*     |                 |                 |
|     | 0,6 | 1,719<br>1,372                   | 1,609<br>1,414 | 1,500<br>1,460 | 1,394<br>1,507 | 1,291<br>1,556 | 1,193<br>1,606 | 1,011<br>1,703 | 0,850<br>1,785 | 0,709<br>1,847 | 0,581<br>1,885 | 0,461<br>1,898                             | 0,307<br>1,878 | 0,208<br>*     | 0,455<br>*      |                 |
|     | 0,5 | 1,869<br>1,497                   | 1,752<br>1,549 | 1,636<br>1,606 | 1,524<br>1,665 | 1,416<br>1,727 | 1,314<br>1,789 | 1,125<br>1,912 | 0,962<br>2,024 | 0,821<br>2,114 | 0,698<br>2,181 | 0,588<br>2,222                             | 0,461<br>2,237 | 0,240<br>2,184 | 0,355<br>*      |                 |
|     | 0,4 | 2,056<br>1,681                   | 1,928<br>1,748 | 1,804<br>1,819 | 1,684<br>1,895 | 1,569<br>1,974 | 1,459<br>2,055 | 1,262<br>2,216 | 1,092<br>2,366 | 0,949<br>2,496 | 0,827<br>2,600 | 0,722<br>2,678                             | 0,606<br>2,738 | 0,436<br>2,759 | 0,138<br>*      | 0,534<br>*      |
|     | 0,3 | 2,299<br>1,979                   | 2,173<br>2,054 | 2,021<br>2,163 | 1,889<br>2,264 | 1,764<br>2,369 | 1,645<br>2,478 | 1,433<br>2,698 | 1,254<br>2,907 | 1,105<br>3,094 | 0,981<br>3,254 | 0,876<br>3,384                             | 0,766<br>3,507 | 0,614<br>3,628 | 0,364<br>3,626  | 0,420<br>*      |
|     | 0,2 | 2,647<br>2,544                   | 2,485<br>2,873 | 2,329<br>2,811 | 2,181<br>2,955 | 2,038<br>3,112 | 1,906<br>3,273 | 1,670<br>3,596 | 1,475<br>3,911 | 1,315<br>4,201 | 1,185<br>4,457 | 1,077<br>4,676                             | 0,966<br>4,904 | 0,821<br>5,181 | 0,610<br>5,461  | 0,067<br>*      |
|     | 0,1 | 3,252<br>4,087                   | 3,053<br>4,322 | 2,861<br>4,573 | 2,678<br>4,842 | 2,507<br>5,125 | 2,348<br>5,417 | 2,069<br>6,020 | 1,841<br>6,609 | 1,660<br>7,158 | 1,514<br>7,654 | 1,396<br>8,095                             | 1,278<br>8,571 | 1,129<br>9,208 | 0,927<br>10,083 | 0,592<br>11,074 |

No caso de ruína de mesa, usa-se d em vez de c e f em vez de x.

\* Aos asteriscos corresponde b<sub>0</sub> < a < b.

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1972)

TABELA 3.5 - Valores de  $\frac{0,5 T_v}{1-\mu}$  e  $v_v$ 

$$k_e = d/a \quad 1/k_e = a/d$$

| $k_e$ | $\frac{0,5 T_c}{1-\mu}$ | $v_r$  |
|-------|-------------------------|--------|
| 0,10  | 0,872                   | -0,528 |
| 0,15  | 0,972                   | -0,228 |
| 0,20  | 1,072                   | 0,072  |
| 0,25  | 1,172                   | 0,372  |
| 0,30  | 1,272                   | 0,672  |
| 1/3   | 1,339                   | 0,872  |
| 0,35  | 1,372                   | 0,972  |
| 0,40  | 1,472                   | 1,272  |
| 0,45  | 1,572                   | 1,572  |
| 0,50  | 1,672                   | 1,872  |
| 0,55  | 1,772                   | 2,172  |
| 0,60  | 1,872                   | 2,472  |
| 0,65  | 1,972                   | 2,772  |
| 2/3   | 2,006                   | 2,872  |
| 0,70  | 2,072                   | 3,072  |
| 0,75  | 2,172                   | 3,372  |
| 0,80  | 2,272                   | 3,672  |
| 0,85  | 2,372                   | 3,972  |
| 0,90  | 2,472                   | 4,272  |
| 0,95  | 2,572                   | 4,572  |
| 1,00  | 2,672                   | 4,872  |

| $1/k_e$ | $\frac{0,5 T_r}{1-\mu}$ | $v_r$  |
|---------|-------------------------|--------|
| 1,00    | 2,672                   | 4,872  |
| 0,95    | 2,777                   | 5,188  |
| 0,90    | 2,894                   | 5,539  |
| 0,85    | 3,025                   | 5,931  |
| 0,80    | 3,172                   | 6,372  |
| 0,75    | 3,339                   | 6,872  |
| 0,70    | 3,529                   | 7,443  |
| 2/3     | 3,672                   | 7,872  |
| 0,65    | 3,749                   | 8,103  |
| 0,60    | 4,005                   | 8,872  |
| 0,55    | 4,308                   | 9,781  |
| 0,50    | 4,672                   | 10,872 |
| 0,45    | 5,116                   | 12,205 |
| 0,40    | 5,672                   | 13,872 |
| 0,35    | 6,386                   | 16,015 |
| 1/3     | 6,672                   | 16,872 |
| 0,30    | 7,339                   | 18,872 |
| 0,25    | 8,672                   | 22,872 |
| 0,20    | 10,672                  | 28,872 |
| 0,15    | 14,005                  | 38,872 |
| 0,10    | 20,672                  | 58,872 |

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1972)

## 3.3.3 - Cálculo dos modelos

No exemplo de aplicação do item 2.4.4, foi feito um cálculo dos modelos admitindo-se a configuração básica, que nem sempre corresponde à configuração efetiva de ruína. Será agora executado o cálculo da laje, com a marcha de cálculo de Langendonck, determinando-se, entre todas as configurações possíveis, aquela que corresponde à carga de ruína. Considera-se  $\mu = 0$  por ser a laje engastada no contorno.

a) Cálculo de  $k_a$ ,  $k_b$ ,  $k_d$ ,  $k_e$ ,  $k_f$  e  $f$

$$\begin{array}{lll} k_a = 1 & k_b = 3 & k_d = 1 \\ k_e = 1 & k_f = b/c = 3 & f = 20\text{cm} \end{array}$$

b) Cálculo de  $T^*$  e  $V^*$  - Caso II:  $b > c \geq a$

$$T^* = 4 \left[ (1-\mu)(1+k_b+k_d) + k_a \right] = 24$$

$$V_r = 2(b-c)c + 4c^2/3 = 6400/3$$

$$V^* = V_r + 2a^2d/c = 8800/3$$

c) Cálculo de  $T$  e  $V$  - Cantos retos e  $\mu = 0$ :  $t = 0,164$ ;

$$v = 0,064$$

$$T = T^* - 4(2+k_a)(1-\mu)t = 22,032$$

$$V = V^* - \frac{v}{3} (4c^2 + 2a^2/c) = 2882,13$$

d) Cálculo de  $q/(m+m')$  para ruína total

$$q/(m+m') = T/V = 0,007644 \text{ cm}^{-2}$$



e) Cálculo de  $r - k_a < 2$ ,  $k_a^2 < 4k_d$  e  $k_a^2 < 4(k_b - 1)$

$$r = c + a^2 / 4c = 25 \text{ cm}$$

f) Cálculo de  $q / (m + m')$  para ruína em cone

$$q / (m + m') = 6 / r^2 = 0,009600 \text{ cm}^{-2}$$

g) Cálculo de  $\alpha$  - Tabela 3.1:  $0,5 T_u = 7,35$  e  $v_u = 15,75$

$$\alpha = \frac{q a^2}{6(m + m')} = \frac{0,5 T_u + k_a \mu}{v_u / k_a^2} = 0,4667$$

h) Cálculo de  $T_e$  e  $v_e'$  - Tabela 3.2:  $\rho_o = 2,22a < 2d + f$

$$T_e = 2,11 \qquad v_e' = 1,91$$

i) Cálculo de  $q / (m + m')$  para ruína parcial da mesa

$T_e / v_e' = 1,1 > \alpha$  - charneira negativa reta unindo os cantos reentrantes, sem leque.

$$q / (m + m') = 6\alpha / a^2 = 0,007000 \text{ cm}^{-2}$$

j) Como  $T_e / v_e' > \alpha$ , passa-se para o item k

k) Verificação se há possibilidade de ruína parcial da perna do T

Como  $2d - a > r - 2c$ , há possibilidade

l) Estimativa de  $q / (m + m')$  para ruína parcial da perna

$$\text{Tabela 3.5: } 0,5 T_v = 2,672 \text{ e } v_v = 4,872$$

$$\text{Tabela 3.3, com } x = 10 \text{ cm: } T_e' = 2,490 \text{ e } v_e' = 3,787$$

$$\text{Tabela 3.4: } b_o = 1,125a = 22,50 < b$$

$$q/(m+m') = \frac{6}{a^2} \frac{0,5 T_v + T'_e}{v_v + v'_e - \cotg \theta_1} = 0,009490 \text{cm}^{-2}$$

Como este valor é bem maior que alguns dos achados anteriormente, passa-se à alínea n.

n) Valor de  $q/(m+m')$  correspondente à configuração efetiva de ruína

É o menor dos valores encontrados, que corresponde à ruína parcial da mesa com charneira negativa reta unindo os cantos reentrantes, sem leque.

$$q/(m+m') = 70 \text{ m}^{-2}$$

Na tabela 3.6 estão indicados esses valores de  $q/(m+m')$ , obtidos para as diversas configurações possíveis. As dimensões da laje e a configuração de ruína parcial da mesa estão indicadas na figura 3.5.

TABELA 3.6- Valores de  $q/(m+m')$

| TIPO DE CONFIGURAÇÃO | $q/(m+m')$              |
|----------------------|-------------------------|
|                      | UNIDADE $\text{m}^{-2}$ |
| TOTAL                | 76,44                   |
| EM CONE CIRCULAR     | 96,00                   |
| PARCIAL DA MESA      | 70,00                   |
| PARCIAL DA PERNA     | 94,90 (*)               |

(\*) Valor estimado

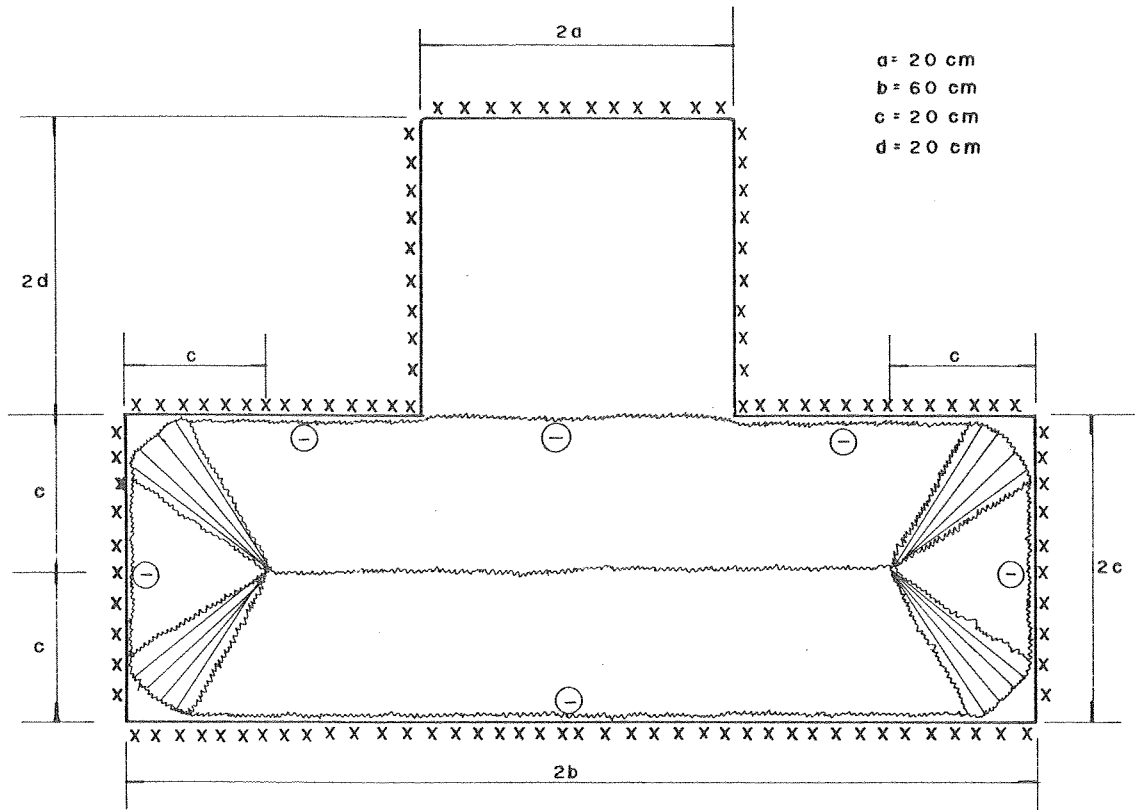


FIGURA 3.5 - Dimensões da laje e configuração de ruína

#### 4 - A EXPERIMENTAÇÃO

##### 4.1 - CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS E DOS ENSAIOS

Num plano mais geral, pensou-se em colher resultados experimentais em lajes com contorno não convexo, isto é, que apresentassem cantos reentrantes. A escolha específica das lajes com forma de T foi devida ao trabalho de LANGENDONCK (1972), reproduzido resumidamente no capítulo 3, que oferece resultados da teoria das charneiras plásticas a serem verificados.

A teoria das charneiras plásticas, apoiada naturalmente em evidências experimentais, admite, entretanto, hipóteses simplificadoras (ver item 2.1.2). Este trabalho oferece resultados experimentais complementares, sendo observados especificamente o progresso da fissuração e das flechas, as cargas e as configurações de ruína, e também os efeitos do impedimento dos deslocamentos horizontais e da supressão parcial da armadura negativa, deliberadamente desprezados.

Na escolha das dimensões dos modelos foram considerados diversos aspectos. A forma de T escolhida exigiu a construção de uma estrutura de reação específica, construída com perfis metálicos. Quanto maiores fossem os modelos, maiores seriam também as cargas resultantes, exigindo estrutura de reação mais dispendiosa. Outro aspecto que orientou a escolha das dimensões dos modelos foi a compati

bilidade com o processo adotado para a aplicação da carga, feita por quatro macacos, atuando em paralelo, três na mesa e um na perna do T; para se distribuir uniformemente a carga, a cada macaco deveriam corresponder regiões de mesma área. Foi ainda considerada, na escolha das dimensões, uma proporção entre os lados que não resultasse em mesa ou perna muito estreita, para a qual seria evidente o comportamento de laje retangular.

Adotaram-se, então, lajes com a mesa do T medindo 40cm por 120cm, a perna 40cm por 40cm, com 2cm de espessura. Para a fixação dessas lajes no sistema de apoio, foram previstos, no contorno delas, quadros com 6,5cm de largura e 3,2cm de espessura. As dimensões das lajes e dos respectivos quadros de contorno estão indicadas na fig. 4.1.

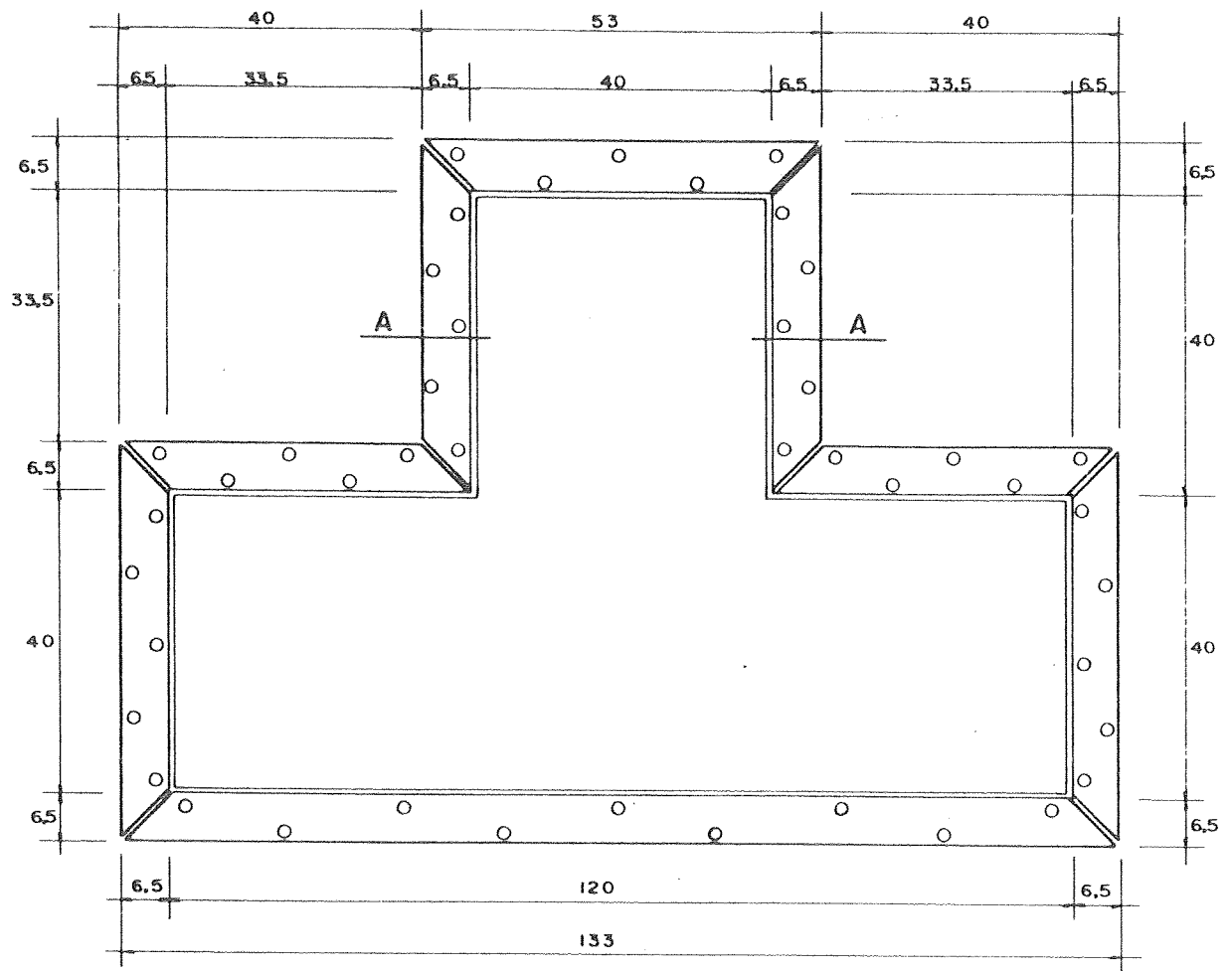
Ensaíram-se ao todo 16 modelos divididos em 4 séries, doravante denominadas S1, S2, S3 e S4, respectivamente. O número de 4 modelos em cada série, embora insuficiente para considerações estatísticas, foi considerado o mínimo necessário para se determinarem os resultados experimentais. Esses 4 modelos por série foram denominados SiL1, SiL2, SiL3 e SiL4, sendo i o número caracterizador da série. Seguem-se as particularidades de cada série:

Série S1 - armadura negativa total (lote 1) e engaste "deslizante", sistema de apoio esse planejado para permitir deslocamentos horizontais, e que se apresenta detalhadamente no item 4.4.1;

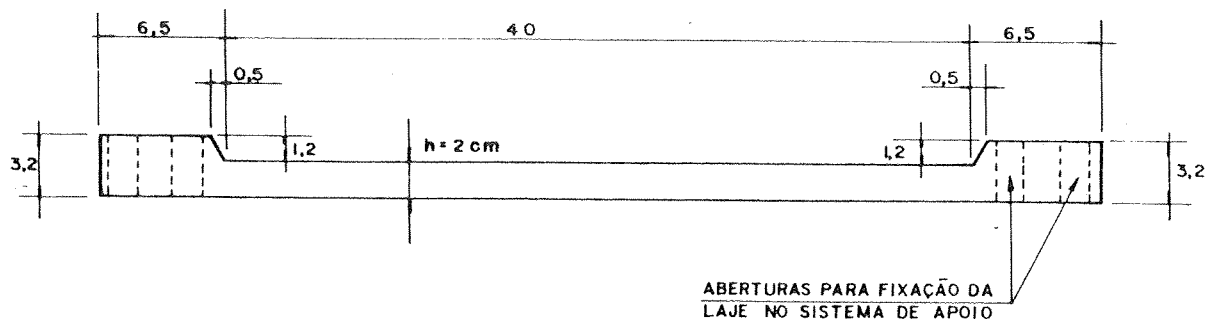
Série S2 - armadura negativa total (lote 1) e engaste perfeito, com impedimento de deslocamentos horizontais;

Série S3 - armadura negativa (lote 2) suprimida na região central da mesa do T e engaste perfeito (com impedimento);

Série S4 - armadura negativa total (lote 2) e engaste perfeito (com impedimento).



VISTA SUPERIOR - ESCALA 1:10



CORTE A - ESCALA 1:4

FIGURA 4.1 - Dimensões das lajes e dos quadros de contorno.

Além dos objetivos gerais, válidos para todas to das as séries, foram analisadas, nas séries S1 e S2, as influências do impedimento dos deslocamentos horizontais, e nas séries S3 e S4, as influências da supressão parcial das armaduras negativas.

O lote de armaduras das séries S1 e S2 foi distinto daquele das séries S3 e S4, apresentando portanto características diferentes.

A armadura negativa foi suprimida, na série S3, numa região central da mesa do T medindo 16cm por 90cm. Os ensaios foram realizados aos 28 dias.

#### 4.2 - ENSAIOS ACESSÓRIOS

Foram realizados ensaios acessórios para determinação das características mecânicas do micro-concreto e das armaduras e, também, para determinação experimental dos momentos de plastificação.

##### 4.2.1 - Ensaio do micro-concreto

As características mecânicas do micro-concreto foram determinadas em corpos de prova cilíndricos com 5cm de diâmetro e 10cm de altura, moldados e curados de acordo com o Método Brasileiro MB-2 da ABNT, com condições de cura análogas às dos modelos, e ensaiados aos 28 dias.

A resistência do concreto à compressão foi determinada em ensaios de compressão simples, de acordo com o Método Brasileiro MB-3. Para se obter o diagrama tensão-deformação do micro-concreto, alguns corpos de prova tiveram suas deformações medidas com extensômetros elétricos de resistência.

A resistência do concreto à tração foi determina da em ensaios de compressão diametral.

#### 4.2.2 - Ensaio das armaduras

As características mecânicas das armaduras foram obtidas em ensaios de tração simples de acordo com o Método Brasileiro MB-4.

#### 4.2.3 - Ensaio de faixas

Os momentos de plastificação positivos e negativos  $m_x$  e  $m_x'$  da direção do vão menor da mesa do T, assim como  $m_y$  e  $m_y'$  da direção perpendicular à anterior, foram determinados experimentalmente, para cada lote de armaduras, em ensaios de flexão de faixas simplesmente apoiadas nas duas extremidades, medindo 10cm de largura, 2cm de espessura e 40cm de vão. Essas faixas, moldadas e curadas nas mesmas condições dos modelos, tiveram suas armaduras retiradas das mesmas telas usadas nos ensaios principais.

A carga foi aplicada, por um único macaco acionado manualmente, no centro de uma pequena viga metálica que a transmitia para a faixa em duas linhas distantes 15cm entre si e equidistantes dos extremos, conforme se indica na figura 4.2.

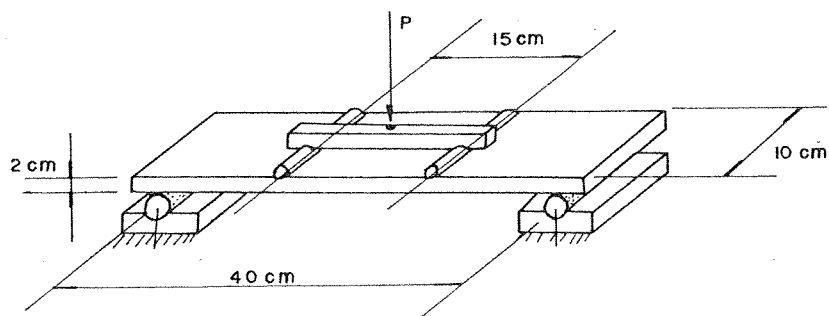


FIGURA 4.2 - Esquema de ensaio das faixas.



A carga foi transferida, do macaco para a peça metálica, através de uma esfera alojada num sulco dessa peça, e daí para a faixa, através de cilindros com 2 cm de diâmetro aproximado.

As faixas apoiavam-se sobre outros cilindros, de diâmetro aproximado 4cm, alojados sobre bases que, por sua vez, apoiavam na estrutura de reação.

As medidas das flechas foram feitas por três de fletômetros mecânicos, com precisão de centésimo de milímetro, instalados sob o eixo longitudinal da faixa: dois sob as linhas de aplicação de carga e o terceiro sob o centro da faixa. Ilustrações dos ensaios de faixas podem ser vistos nas fotografias das figuras 4.25 e 4.26.

#### 4.3 - CONFECÇÃO DOS MODELOS

Neste item serão apresentados os materiais e os métodos utilizados na confecção dos modelos.

##### 4.3.1 - Composição do micro-concreto

Apesar de os modelos estudados apresentarem dimensões reduzidas, este trabalho pretende apresentar resultados experimentais válidos para lajes de dimensões usuais. Assim, procurou-se um material que melhor reproduzisse as características do concreto armado.

Entretanto, a reprodução ideal das características do concreto armado só seria possível se existissem miniaturas perfeitas de todos os materiais constituintes do concreto, o que não ocorre na realidade.

Entre o micro-concreto e a argamassa para reproduzir as características do concreto, optou-se pelo primeiro que, apesar de ser constituído de cimento, água e areia, difere da argamassa; no micro-concreto o elemento inerte não é constituído de areia comum, mas por mistura de

diferentes faixas granulares, de maneira que os maiores grãos participam em maior proporção, como no concreto comum.

Para fornecer ao material as características de micro-concreto, a areia utilizada, pertencente a um único lote, foi pré-composta.

A granulometria máxima do agregado deve ser compatível com as menores dimensões da peça a concretar, e também com a distribuição e o espaçamento das barras das armaduras. A NB-1 por exemplo, válida para peças usuais, determina no item 8.1.2.3 que a dimensão máxima característica do agregado deverá ser menor que um terço da espessura das lajes. Seguindo essa orientação, também para as micro-lajes, sendo 20mm a espessura delas, não foram utilizados os grãos retidos na peneira de 4,8mm da série normal de peneiras, isto é, com dimensões características superiores a aproximadamente um quarto da espessura dos modelos.

A areia, procedente do Rio Mogi Guaçu nas proximidades de São Carlos-SP, foi peneirada numa série normal de peneiras, e os grãos retidos nas peneiras com aberturas em milímetros 2,4 - 1,2 - 0,6 - 0,3 e 0,15 foram juntados na proporção 15 - 25 - 25 - 30 e 5 respectivamente. A tabela e o gráfico da figura 4.3 ilustram o procedimento ora apresentado.

Nota-se, nessa figura, que a granulometria adotada excede os limites da zona ótima. Para que eles fossem respeitados, haveria necessidade de se juntar os grãos numa proporção muito diferente daquela que ocorria na areia disponível, acarretando um trabalho que se julgou desnecessário. Nota-se também que não foram utilizadas as partículas que passaram na peneira de 0,15mm, deixando para as partículas do cimento o desempenho das funções desses finos.

Para se compararem os agregados do micro-concreto com os dos concretos usuais, pode-se usar a escala  $\lambda = 7,5$  já mencionada. Sendo definido agregado graúdo, para

| PENEIRAS   |                               | COMPOSIÇÃO GRANULOMÉTRICA         |               |                                          |                |             |
|------------|-------------------------------|-----------------------------------|---------------|------------------------------------------|----------------|-------------|
| ABNT<br>Nº | ABERTURAS<br>NOMINAIS<br>(mm) | SEGUNDO A EB - 4<br>(% ACUMULADA) |               | AGREGADO<br>DISPONÍVEL<br>%<br>ACUMULADA | ADOTADA        |             |
|            |                               | ZONA<br>UTILIZÁVEL                | ZONA<br>ÓTIMA |                                          | %<br>ACUMULADA | %<br>RETIDA |
|            | 9,5                           | 0                                 | 0             | 0                                        | 0              | 0           |
| 4          | 4,8                           | 0-3                               | 3-5           | 0                                        | 0              | 0           |
| 8          | 2,4                           | 13-29                             | 29-43         | 11,4                                     | 15             | 15          |
| 16         | 1,2                           | 23-49                             | 49-64         | 34,4                                     | 40             | 25          |
| 30         | 0,6                           | 42-68                             | 68-83         | 60,4                                     | 65             | 25          |
| 50         | 0,3                           | 73-83                             | 83-94         | 82,5                                     | 95             | 30          |
| 100        | 0,15                          | 88-93                             | 93-98         | 86,2                                     | 100            | 5           |

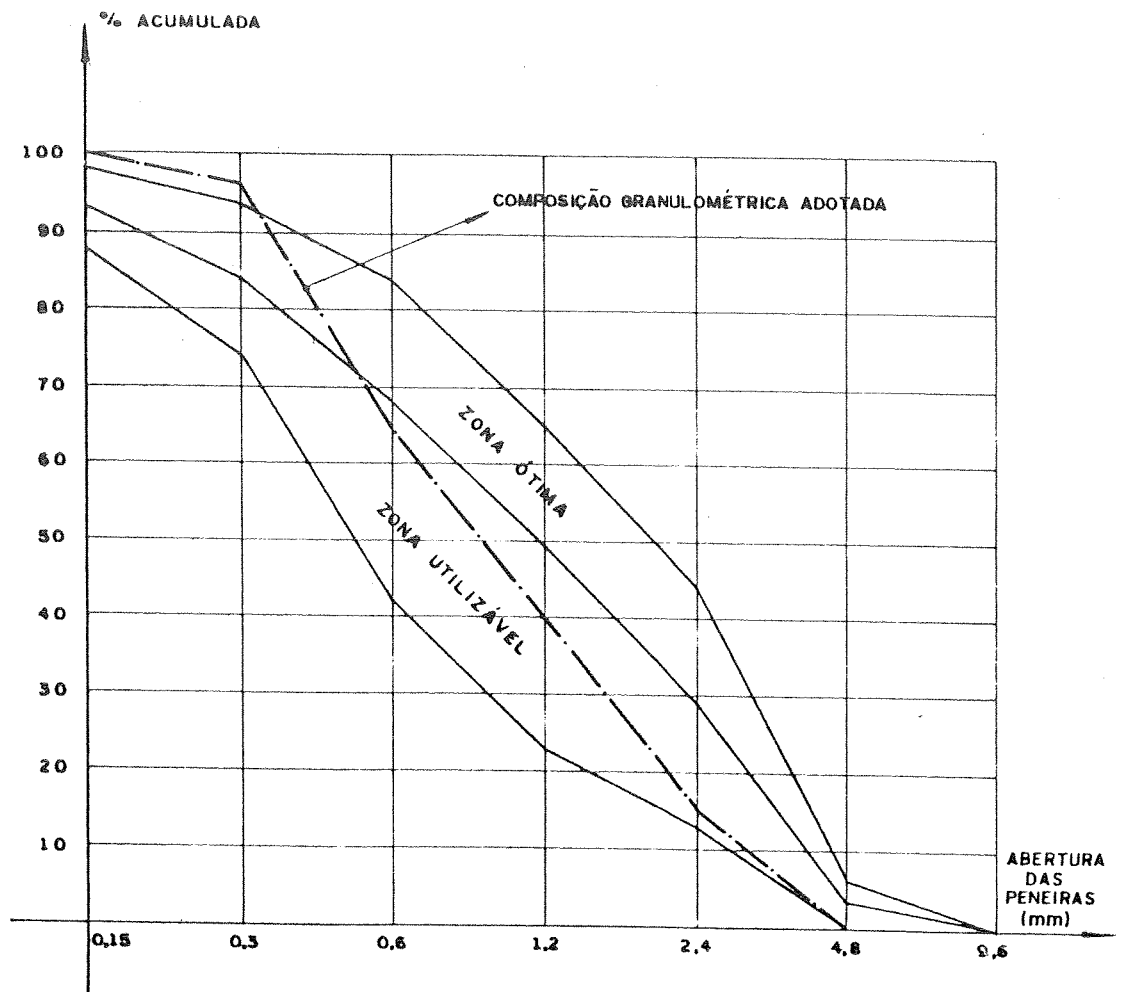


FIGURA 4.3- Composição granulométrica do agregado.

concretos usuais, como sendo aquele retido na peneira de 4,8mm, com no máximo 15% das partículas passando por esta peneira, as partículas retidas na peneira 4,8/7,5  $\approx$  0,6 mm devem fazer, no micro-concreto, o papel do agregado graúdo. Obtem-se assim a relação

$$\frac{\text{Agregado graúdo}}{\text{Agregado miúdo}} = \frac{65}{35} \approx 1,86$$

notando-se que os maiores grãos participam em maior proporção, como ocorre nos concretos comuns.

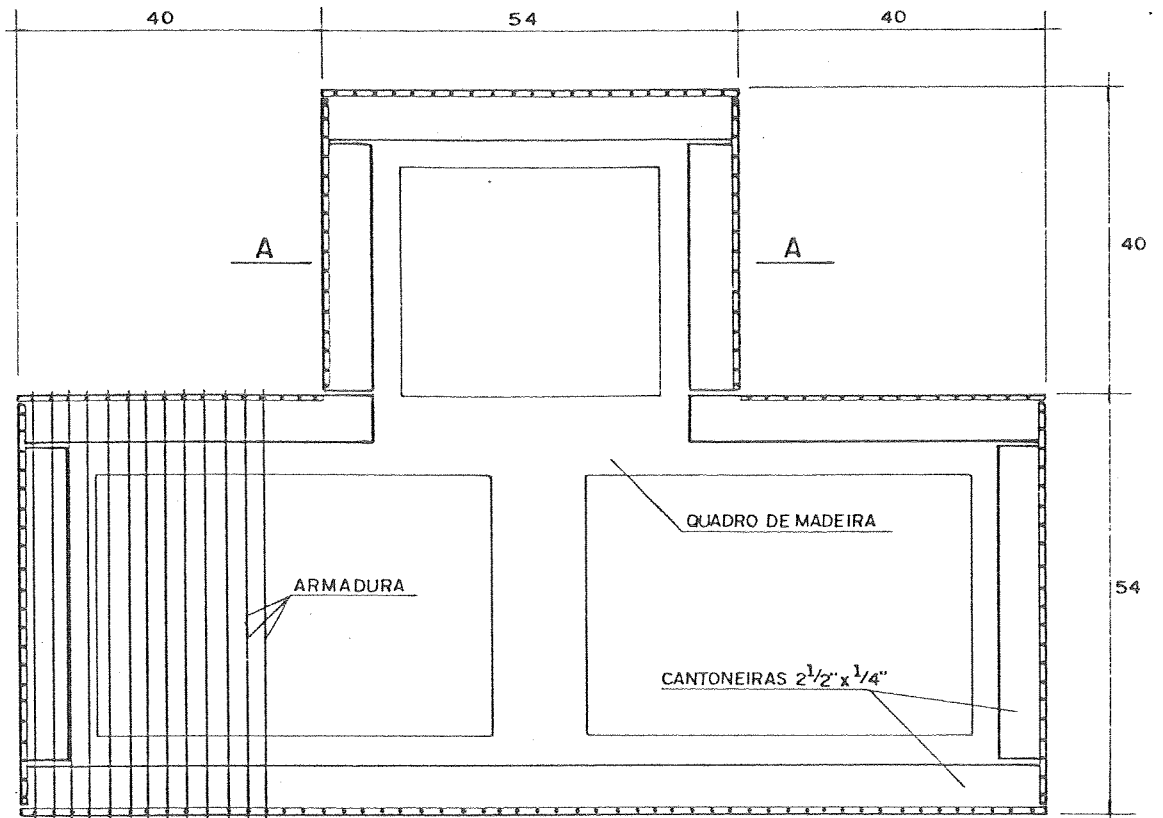
O cimento empregado foi o Itaú CP-250 e, em função de experiências anteriores no Laboratório de Estruturas da EESC-USP, com algumas tentativas para verificação da trabalhabilidade, o traço escolhido foi 1:3 em peso, com A/C = 0,45, secando-se previamente os agregados.

Para confecção das armaduras foram empregados dois lotes de arame recozido: o primeiro deles, com diâmetro 1,26mm, nas séries S1 e S2, e o segundo, com diâmetro 1,23mm, nas séries S3 e S4.

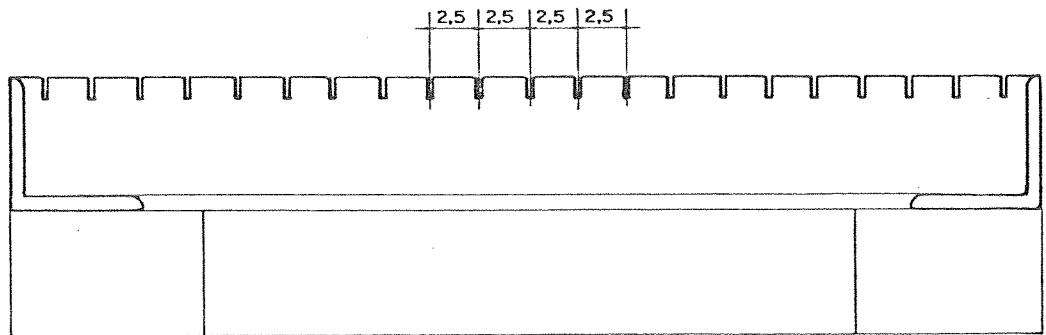
#### 4.3.2 - Confecção das armaduras

Adotaram-se armaduras, tanto as positivas quanto as negativas, constituídas de um arame recozido número 18 (diâmetro aproximado 1,25mm) cada 2,5cm, nas duas direções, formando portanto telas de malha quadrada.

Para a confecção destas telas, foi construído um quadro-gabarito com base de madeira com a mesma forma de T dos modelos, à qual foram fixadas, contornando o T, cantoneiras de abas de 2 1/2 polegadas e com 1/4 de polegada de espessura. Na extremidade das abas voltadas para cima, com uma serra manual, foram feitas aberturas a cada 2,5 cm, em todo o contorno, para servirem de gabarito na confecção das telas (ver figura 4.4, e também a fotografia apresentada na figura 4.19).



VISTA SUPERIOR - ESCALA 1:10



CORTE A - ESCALA 1:4

FIGURA 4.4 - Quadro para confecção das telas.

Os arames foram cortados com comprimentos adequados. Cada fio teve uma de suas extremidades amarrada na base de madeira, a seguir foi colocado na guia correspondente e finalmente, depois de esticado, foi amarrado na outra extremidade. Esta seqüência foi executada para todos os fios, nas duas direções.

Terminada a colocação dos fios no quadro-gabarito, todos os cruzamentos no contorno das telas foram amarrados e, internamente, amarraram-se cruzamentos alternados. Nas telas com supressão de armadura, todos os cruzamentos do contorno da região suprimida também foram amarrados. Feito isso, as telas estavam prontas para serem retiradas do quadro-gabarito, o que foi feito cortando-se os fios nas proximidades das cantoneiras.

As telas de armaduras positivas e de armaduras negativas, antes de serem colocadas nas formas de concretagem, foram fixadas umas às outras. Para que fosse mantido o afastamento entre elas, foram fabricadas peças com forma de S, sendo fixadas as telas como se indica na figura 4.5. As peças S eram do mesmo arame das armaduras, e foram colocadas, aproximadamente, a cada 10cm. As armaduras da direção da menor dimensão da mesa do T, tanto a positiva quanto a negativa, foram colocadas externamente em relação às demais perpendiculares a elas. As telas foram fixadas nas formas através de grampos.

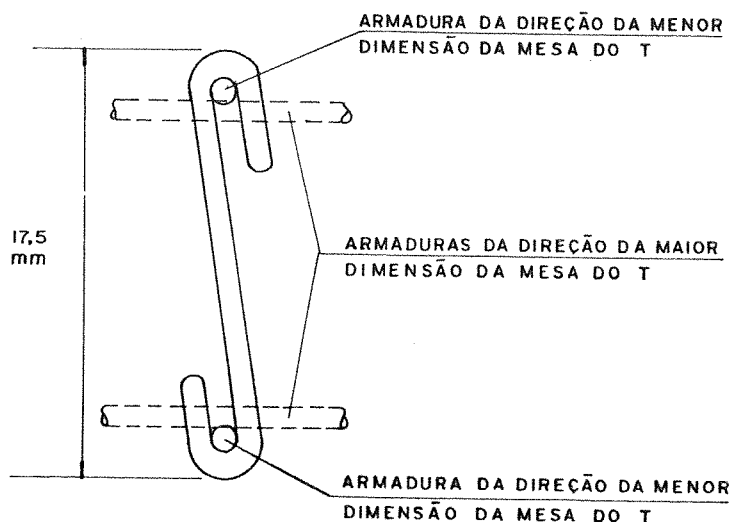


FIGURA 4.5- Fixação das telas positivas nas negativas.

Na preparação das armaduras, até a fixação das mesmas nas formas de concretagem, foi respeitada a seguinte sequência:

a) Retificação e corte dos fios, com comprimentos suficientes para vencerem os vãos das lajes e serem fixados no quadro-gabarito.

b) Limpeza com ácido muriático para eliminação das impurezas e da oxidação.

c) Confecção das telas no quadro-gabarito, ocasião em que foram retiradas, ao acaso, amostras para determinação das características mecânicas das armaduras.

d) Amarração de cruzamentos dos fios com arame fino e retirada das telas.

e) Fixação das telas positivas nas negativas com auxílio das peças S.

Ao fim deste procedimento, as armaduras estavam prontas para serem levadas às formas de concretagem.

#### 4.3.3 - Formas para concretagem

As formas para concretagem, empregadas em trabalhos de experimentação estrutural, devem satisfazer requisitos um tanto diferentes daqueles exigidos nas peças usuais de concreto armado.

Na execução das formas, é de grande importância a precisão das medidas, pois a inexatidão delas pode causar alterações sensíveis, no comportamento das peças e no resultado dos ensaios, deturpando as conclusões do trabalho. O material empregado deve ser de boa qualidade e deve ser disposto convenientemente, de maneira a evitar alteração do formato inicial. As formas de madeira, que são as usualmente empregadas, devem oferecer resistência quanto à possibilidade de empenamento. As formas devem possibilitar,

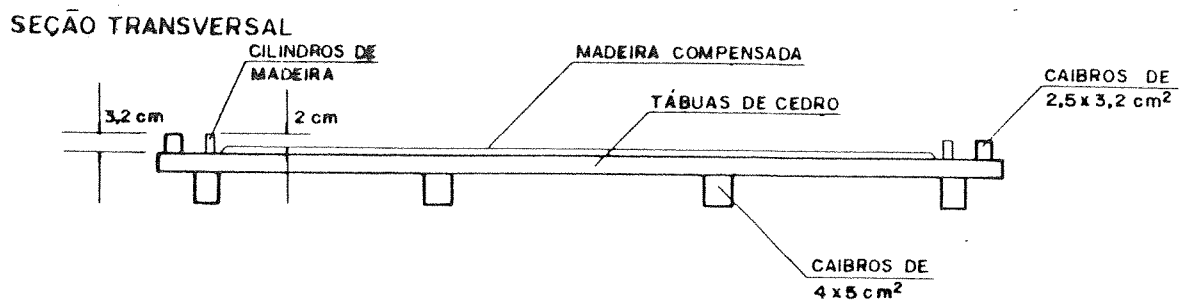
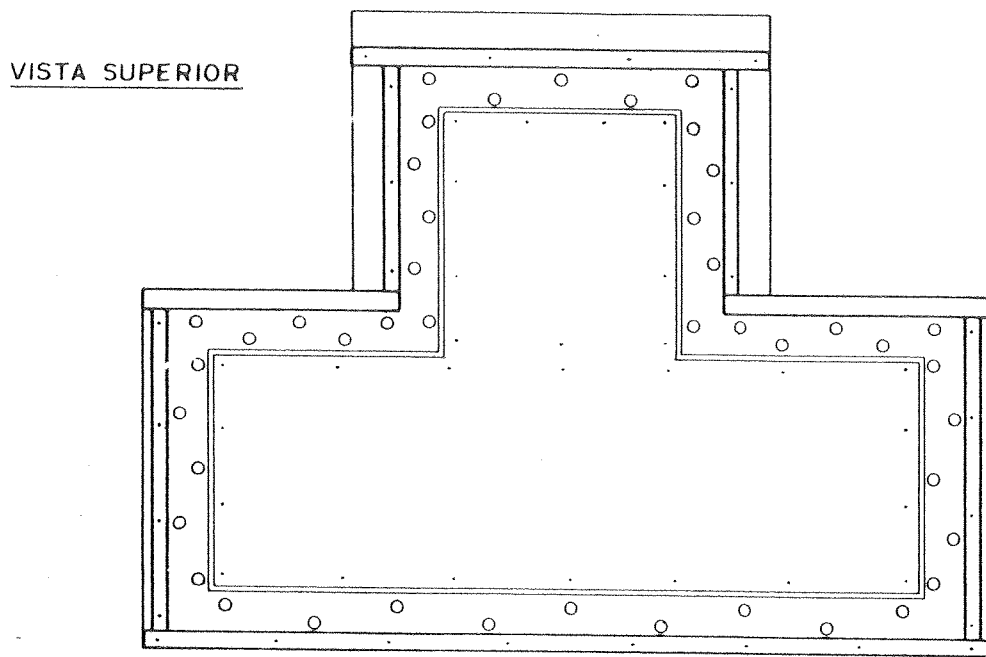
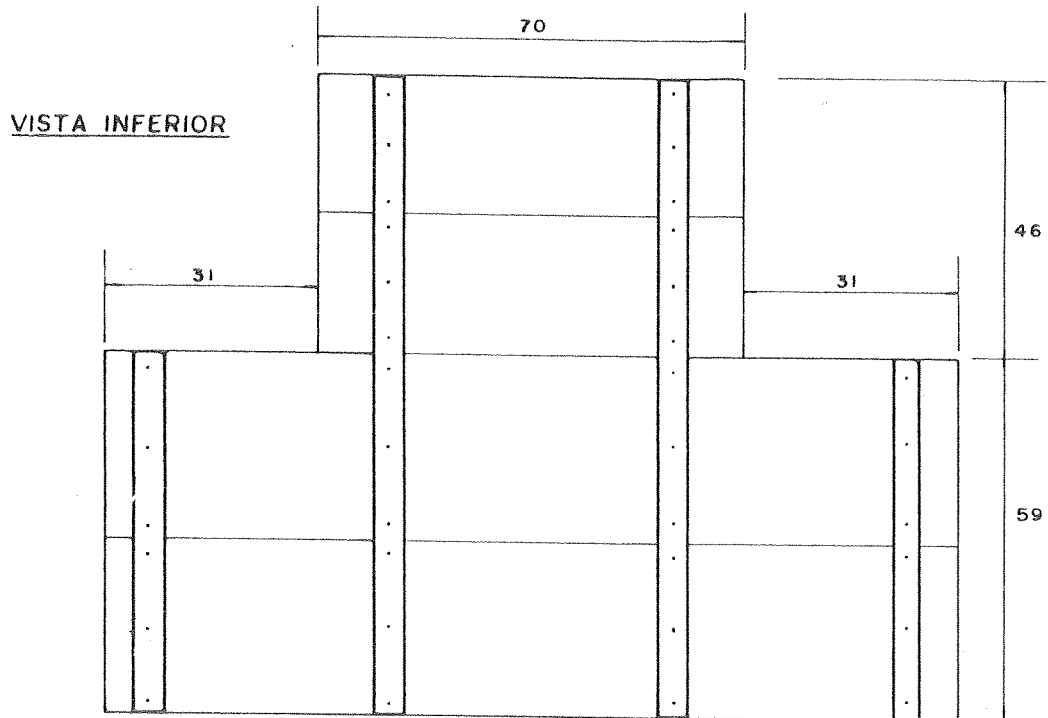


FIGURA 4.6 - Formas para concretagem.



ainda, facilidades de enchimento e de desforma, de maneira a se evitarem danos que desaconselhem utilizações posteriores.

Foram executadas duas formas, empregando-se tábua de cedro de boa qualidade, com aproximadamente 3cm de espessura, enrijecidas transversalmente por quatro caibros de  $4 \times 5\text{cm}^2$  aproximadamente, como se indica na figura 4.6. Para se obter a espessura de 3,2cm do quadro do contorno, foram fixados, no contorno das formas, caibros de  $2,5 \times 3,2\text{cm}^2$  e, para se obter a espessura de 2cm da laje em estudo, foram fixadas placas de madeira compensada de 1,2cm de espessura, também indicadas na figura 4.6.

Os orifícios do quadro do contorno, para permitir a fixação dos modelos no sistema de apoio, foram feitos parafusando-se cilindros de madeira, como se indica, ainda, na figura 4.6.

As formas podem também ser vistas nas fotografias mostradas nas figuras 4.17, 4.18 e 4.20.

#### 4.3.4 - Moldagem e cura

Foram moldados oito modelos em cada uma das duas formas executadas. Na confecção dos modelos, foram respeitadas as seguintes etapas:

a) Fixação dos cilindros de madeira ao longo do quadro de contorno. Posteriormente, esses cilindros foram revestidos com tubo plástico PVC para que o micro-concreto não aderisse ao cilindro de madeira.

b) Revestimento da forma com Sicatope, com a finalidade de proteger a madeira, dificultando a aderência entre ela e o micro-concreto, e facilitar portanto a desforma.

c) Fixação das armaduras negativas, no fundo das formas, com o uso de grampos.

d) Colocação de placas de borracha bissectando todos os cantos, interrompendo a continuidade do quadro

do contorno, para que cada lado da laje fosse independente do lado adjacente (ver figura 4.1). Essas placas foram retiradas após a concretagem, assim que o micro-concreto possuía rigidez para tal.

e) Preparo do micro-concreto numa bandeja metálica, onde a mistura foi feita manualmente, até se conseguir suficiente homogeneidade.

f) Concretagem. O adensamento foi feito sobre mesa vibratória com motor excêntrico, durante 5 minutos. Simultaneamente, foram moldados os corpos de prova.

g) Cada corpo de prova foi preenchido em quatro camadas de mesma altura, sendo que cada camada recebia 30 golpes com o soquete normal. Duas horas após, as faces superiores eram rematadas com pasta de cimento.

h) Após a concretagem, iniciou-se a cura, em ambiente úmido, tanto dos modelos quanto dos corpos de prova, que permaneceram sob folhas de papel periodicamente molhadas até a ocasião da desforma.

i) As desformas dos modelos e dos corpos de prova aconteceram 3 dias após a concretagem, sendo, em seguida, imersos em água. Foram retirados do tanque de cura dois dias antes dos ensaios.

#### 4.4 - EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

Serão agora apresentados os equipamentos que se usaram na experimentação, entre eles os sistemas de apoio, a estrutura de reação, o sistema de distribuição de carga e, finalizando, os aparelhos de medidas.

## 4.4.1 - Sistemas de apoio

Como a teoria das charneiras plásticas não considera efeitos de membrana, criou-se um sistema de apoio para se tentar avaliar a influência dessa simplificação.

Primeiramente, foram feitos ensaios com um tipo de apoio que dificultou a rotação do contorno do modelo, mas permitiu deslocamentos horizontais. Este dispositivo, aqui denominado engaste deslizante, dificultou o aparecimento dos esforços de membrana.

Posteriormente, foram feitos ensaios com modelos perfeitamente engastados, portanto com rotação e deslocamentos horizontais impedidos, permitindo então o aparecimento de esforços de membrana. Nos capítulos seguintes serão apresentados os resultados obtidos, bem como a comparação entre eles.

O sistema de apoio, ora denominado engaste deslizante, foi construído como se descreve a seguir (ver figura 4.7).

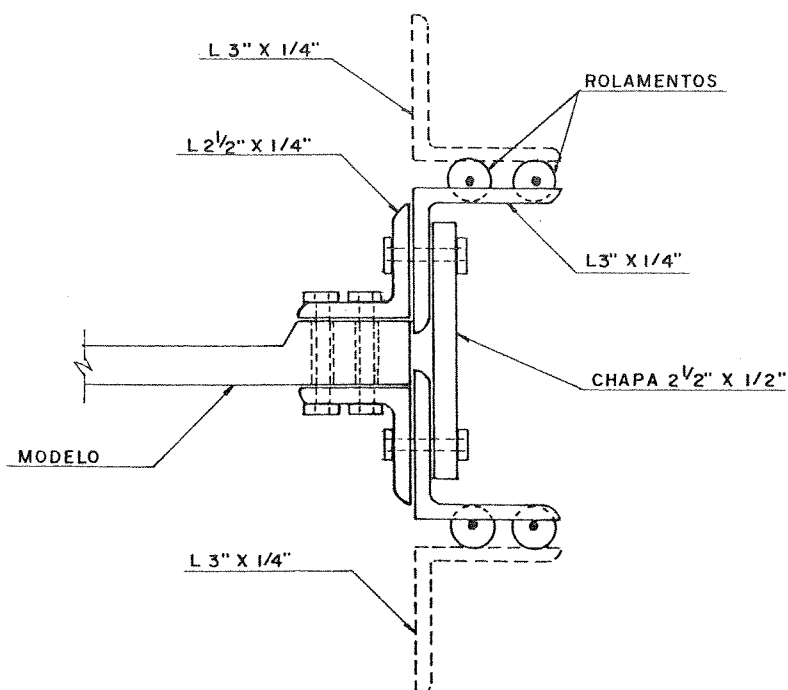


FIGURA 4.7 - Detalhe do engaste deslizante

Antes de serem levados à estrutura de reação, fixaram-se nos modelos, superior e inferiormente, em todo o quadro do contorno, cantoneiras de abas iguais de 2 1/2" x 1/4" que, por sua vez, fixaram-se em perfis compostos com forma de U, constituídos de cantoneiras de 3" x 1/4" ligadas por chapas de 2 1/2" x 1/2". Executaram-se estas peças independentes para cada lado da laje, para que os deslocamentos de um lado da laje não influíssem nos deslocamentos dos lados adjacentes.

As mesas do U foram recortadas, tanto a superior como a inferior, para que se fixassem rolamentos, distribuídos ao longo do contorno como se indicam nas figuras 4.7 e 4.8.

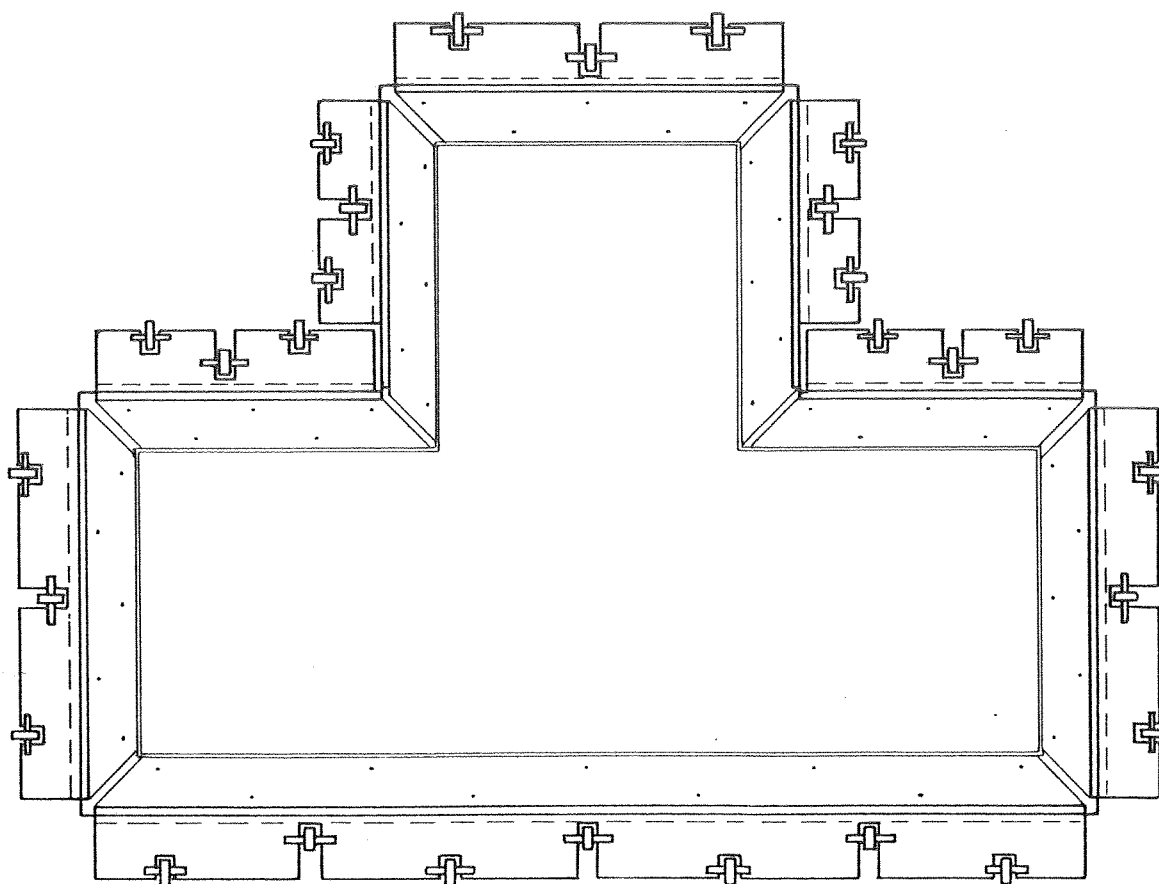


FIGURA 4.8- Distribuição dos rolamentos - VISTA SUPERIOR

Pronta essa montagem, colocaram-se os modelos na estrutura de reação, com os rolamentos inferiores apoiando-se sobre um quadro fixo, e os superiores sob um quadro análogo, deslocável para permitir a colocação dos modelos como uma gaveta e, posteriormente, ajustado sobre os rolamentos (ver figura 4.23).

Realizados os ensaios com o engaste deslizante, correspondentes à série S1, esse dispositivo foi facilmente transformado em engaste perfeito, e empregado nas séries restantes S2, S3 e S4. Bastou retirarem-se os rolamentos, e fixarem-se as mesas das peças em U aos quadros superior e inferior da estrutura de reação (ver fig.4.24).

#### 4.4.2 - Estrutura de reação

Os quadros da estrutura de reação, entre os quais se ajustaram os dispositivos do contorno dos modelos, constituíam-se de cantoneiras de abas iguais de 3" x 1/4", que se fixaram nas colunas da estrutura. Na figura 4.9 tem-se uma planta do quadro inferior, sendo o superior simétrico a ele, em relação ao plano horizontal intermediário.

Ainda na figura 4.9, encontram-se as oito colunas da estrutura de reação, de cantoneiras de 2 1/2" x 1/4". As colunas adjacentes ao lado maior do T tinham as abas voltadas para fora, para permitir a colocação dos modelos entre os quadros de apoio.

Os quatro macacos, responsáveis pelo carregamento da laje, fixaram-se na parte superior da estrutura de reação, numa plataforma mostrada na figura 4.10. As bases dos macacos, constituídas de chapas quadradas de 14cm de lado e 1,6cm de espessura, fixaram-se nos perfis compostos de duas cantoneiras de 3" x 1/4", da plataforma da estrutura de reação, com auxílio das peças indicadas na figura 4.11.

Os pés das colunas da estrutura apoiaram-se em blo

cos de concreto de 30cm de altura. Na extremidade inferior das colunas foram soldadas, horizontalmente, chapas de 1cm de espessura, no centro das quais havia parafusos e através deles a estrutura se apoiava nos blocos de concreto. Esses parafusos tinham a finalidade de possibilitar o nivelamento da estrutura de reação. Nas figuras 4.12 e 4.13 tem-se, respectivamente, vistas anterior e posterior da estrutura de reação. Uma vista geral pode ser observada na figura 4.21.

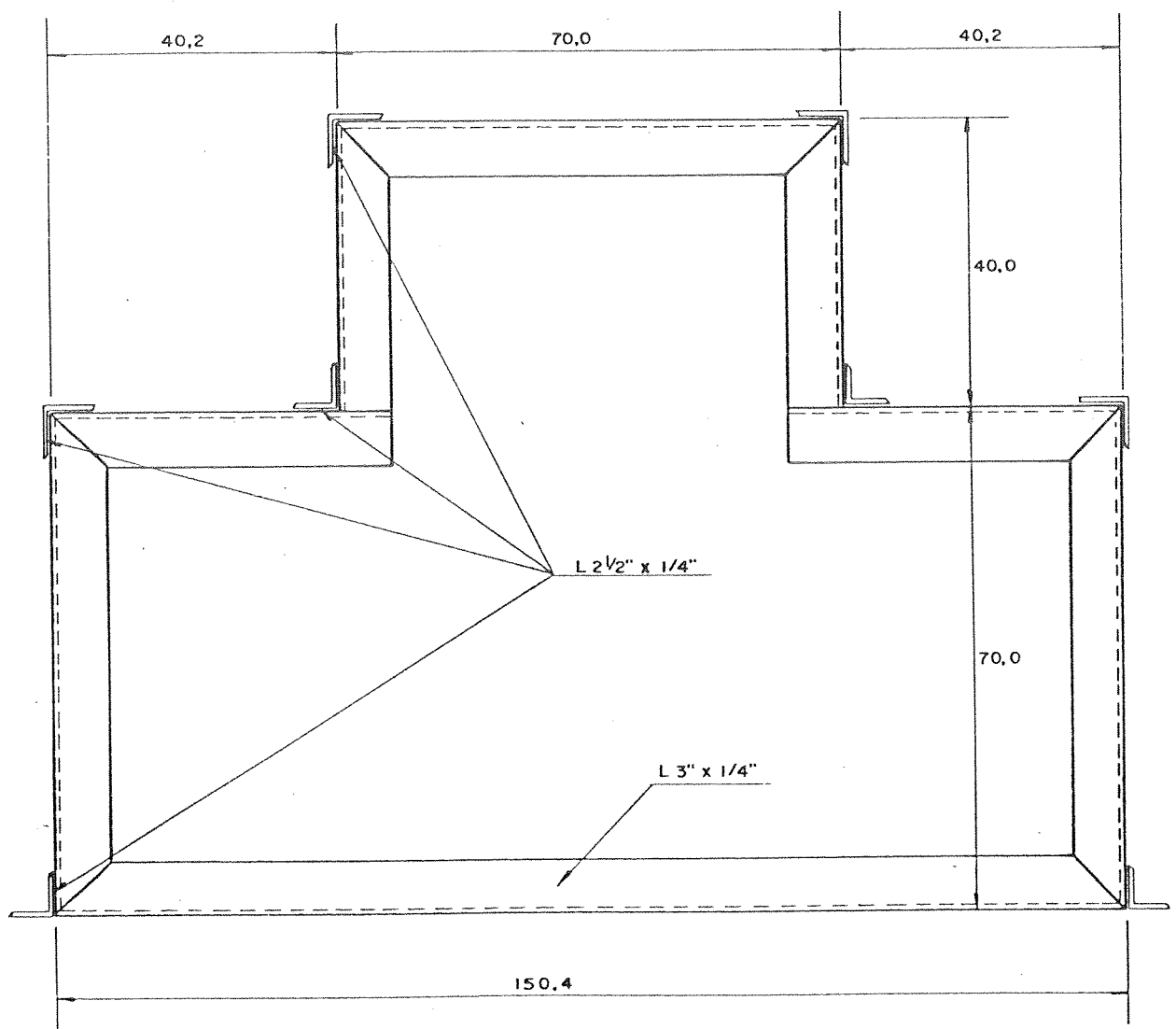


FIGURA 4.9 - Planta do quadro inferior da estrutura de reação, sobre o qual se apoiavam os contornos dos modelos

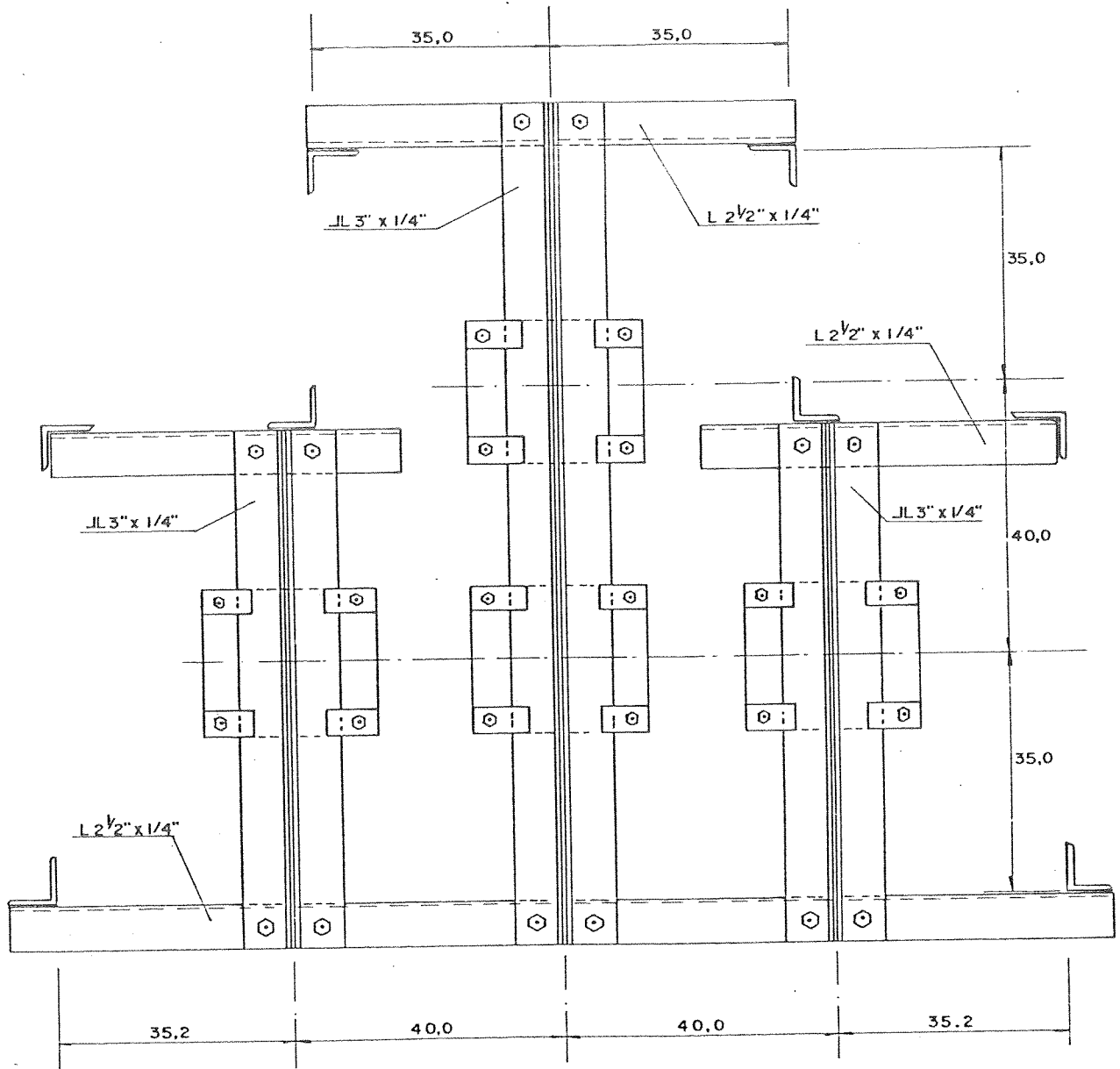
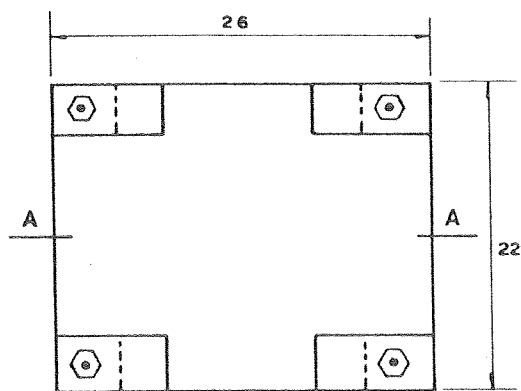
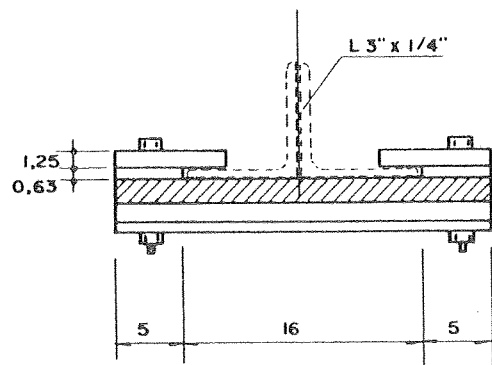


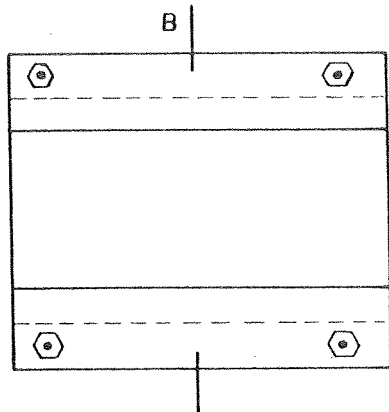
FIGURA 4.10- Planta da plataforma superior da estrutura de reação, onde se fixavam as bases dos quatro macacos



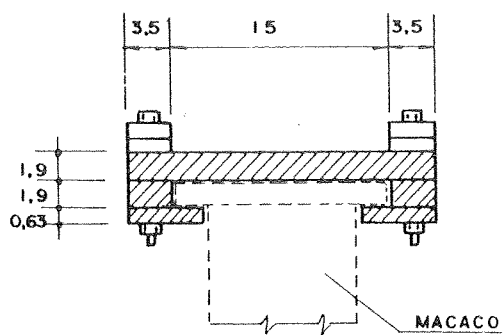
VISTA SUPERIOR



CORTE A



VISTA INFERIOR



CORTE B

FIGURA 4.11 - Peças para fixação dos macacos na plataforma superior da estrutura de reação



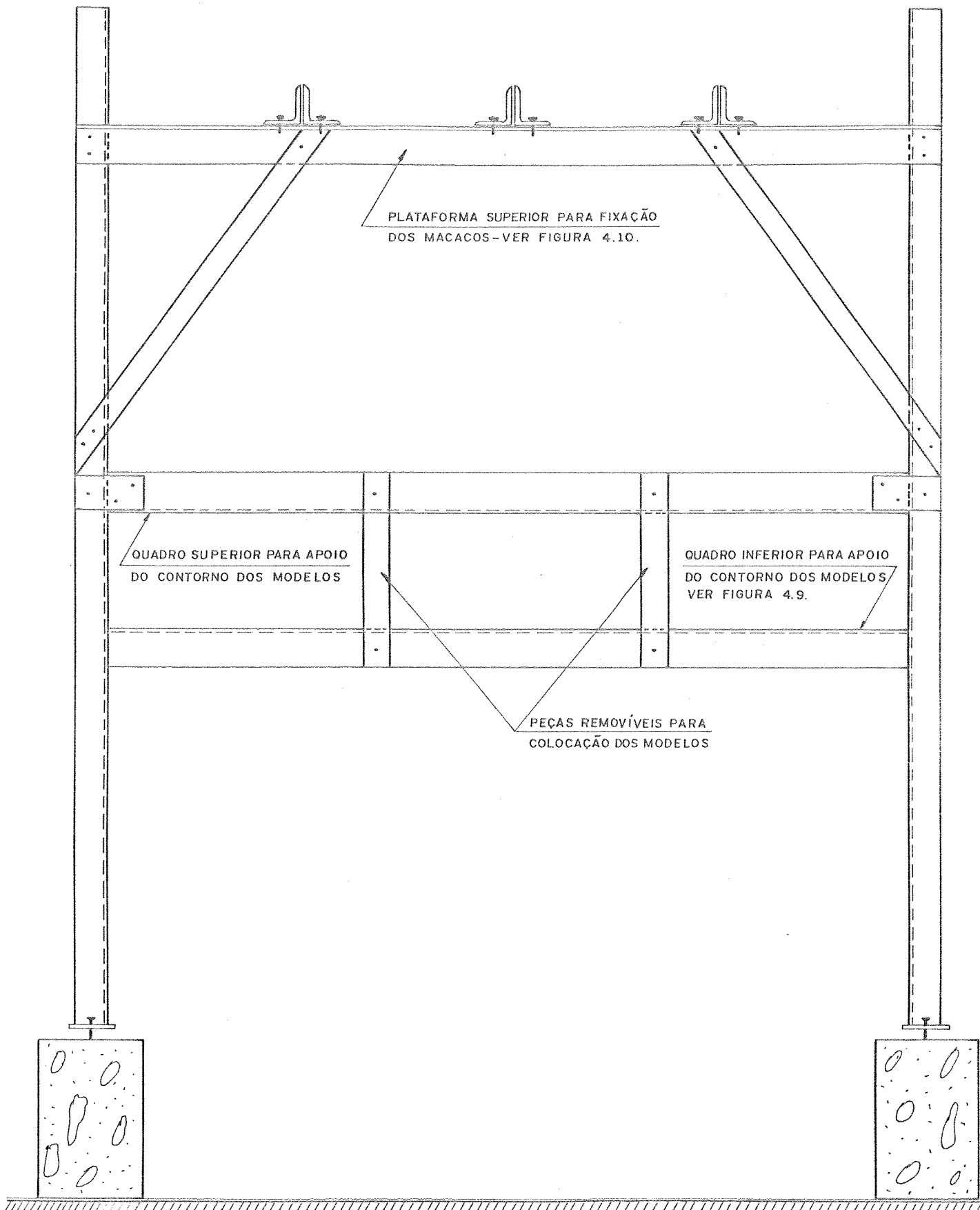


FIGURA 4.12 - Vista anterior da estrutura de reação

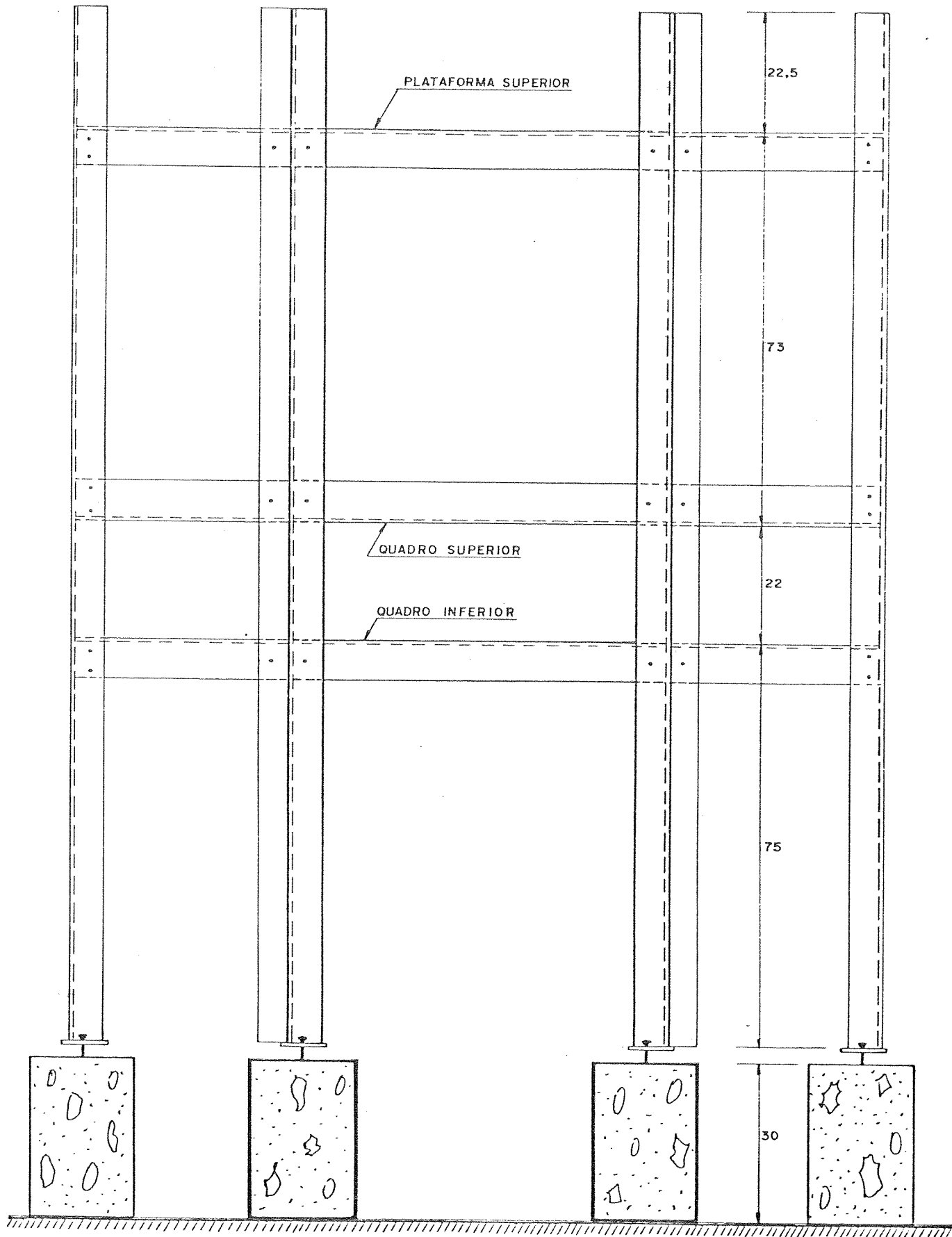


FIGURA 4.13- Vista posterior da estrutura de reação

#### 4.4.3 - Distribuição da carga

Aplicando-se a carga em quatro pontos da laje T, localizados no centro de cada um dos quatro quadrados fundamentais, ter-se-ia uma carga muito diferente da uniformemente distribuída.

Para distribuir a carga, foram construídas peças metálicas com forma de H, para serem colocadas sob os macacos. A carga do macaco, aplicada no centro da alma do H, foi conduzida para quatro pontos, localizados nas extremidades das mesas do H - ver figura 4.14.

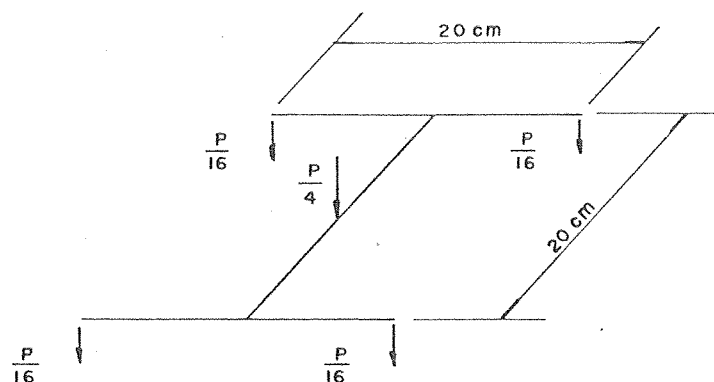


FIGURA 4.14 - Esquema das peças H para distribuição da carga de cada macaco em quatro pontos

Com este procedimento, a carga dos quatro macacos foi distribuída em dezesseis pontos da laje, número este que se verificou não ser suficiente para simular distribuição uniforme, pois, em ensaios preliminares, na ruína das peças, apareceram quatro charneiras negativas, dividindo a laje nos quatro quadrados fundamentais, configuração muito diferente daquelas previstas para carga uniforme.

Houve então necessidade de um refinamento do sistema de distribuição de carga. Sob cada um dos dezesseis pontos foram colocadas peças H menores, semelhantes às anteriores, que distribuíam a carga em sessenta e quatro pon

tos. Este número de pontos de carga foi suficiente para representar carga uniformemente distribuída.

A carga foi transmitida, do sistema de distribuição de carga para os modelos, através de pequenos blocos de madeira com base quadrada com 4cm de lado, sob os quais havia placas de borracha dura de mesmas dimensões.

Na construção desse sistema de distribuição de carga, procurou-se dar mobilidade para a sua adaptação às deformações da laje. As peças H maiores foram executadas com uma das mesas rigidamente ligada à alma, enquanto a outra podia girar em torno do eixo da alma do H. As peças H menores, já existentes no Laboratório de Estruturas, possuiam as duas mesas móveis. A mobilidade dessas peças, e o fato das transmissões de carga, dos macacos para os H maiores, destes para os menores e, finalmente, dos menores para as bases de madeira, serem feitas através de esferas alojadas em pequenos sulcos, garantiram o bom funcionamento do sistema até a ruína. Somente após atingida a carga de ruína, caracterizada pelo aumento de deformações mesmo com diminuição da carga, o aumento exagerado das deformações e a excessiva mobilidade dos H menores fizeram com que as almas desses H menores girassem em torno de seus eixos, possibilitando a fuga das esferas nelas alojadas e impedindo, portanto, a continuação da aplicação da carga.

A figura 4.15 mostra uma vista superior do sistema de distribuição de carga ora descrito, que também pode ser visualizado na figura 4.22.

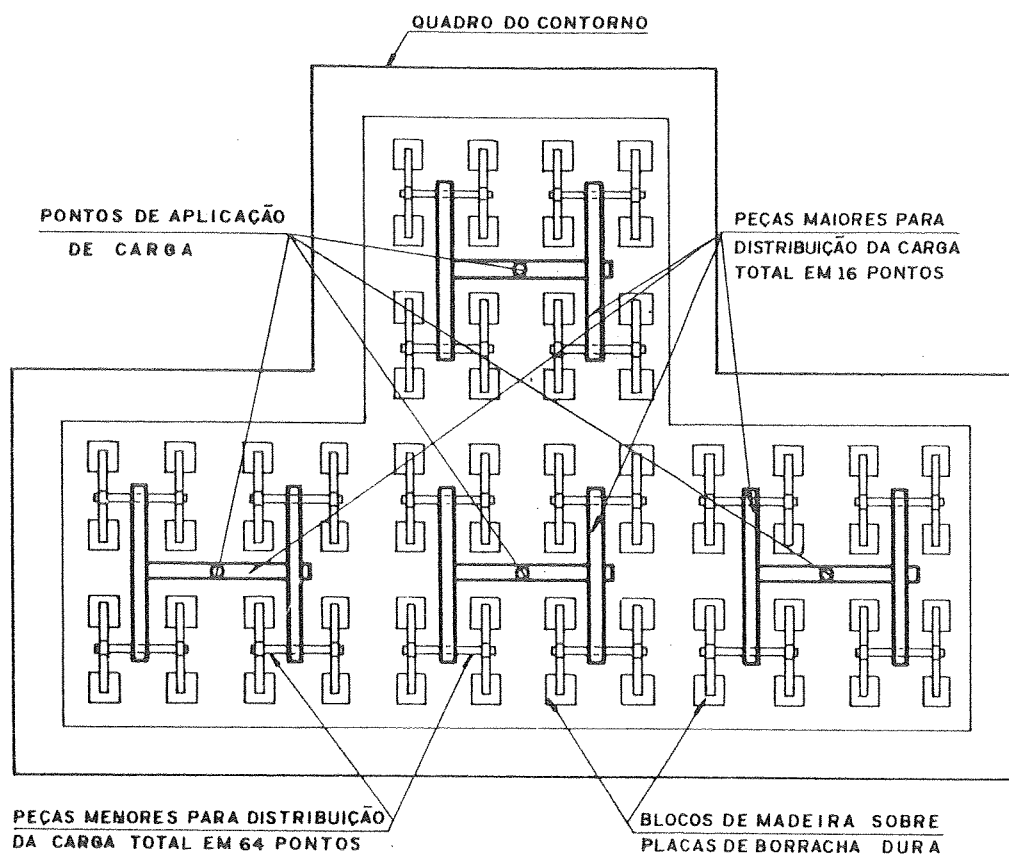


FIGURA 4.15- Sistema de distribuição de carga

## 4.4.4 - Aparelhos de medida

Os quatro macacos em paralelo, encarregados da aplicação da carga, foram ligados a uma bomba hidráulica acionada por energia elétrica.

Para a medida das cargas foram construídos dinamômetros elétricos, cujo uso é frequente no Laboratório de Estruturas. O esquema desses dinamômetros encontra-se na figura 4.16, onde se nota um cilindro de aço com quatro extensômetros elétricos de resistência formando uma ponte de Wheatstone. Essa ponte, ligada a um aparelho medidor Tepec IC-53, forneceu as deformações do cilindro com precisão de  $5 \times 10^{-6}$ . Com as curvas de calibração dos dinamômetros, determinadas previamente, que para cada deformação indicava a carga transmitida através do cilindro, determinou-se a carga aplicada ao modelo.

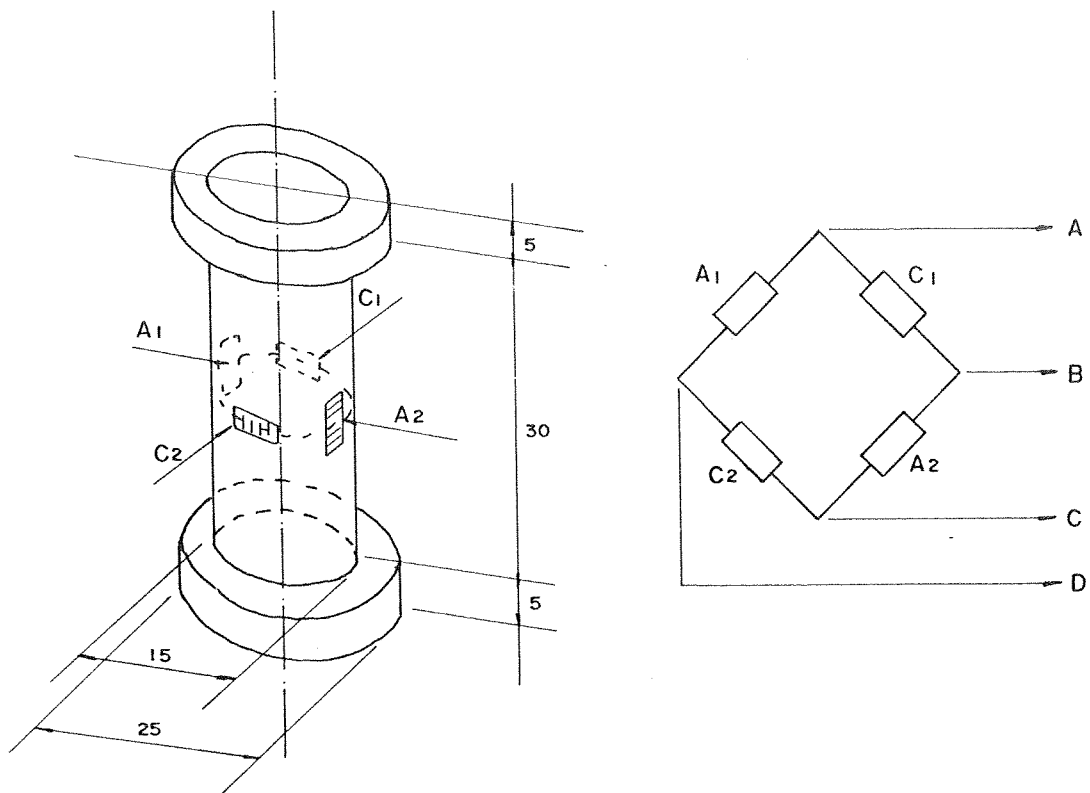


FIGURA 4.16- Esquema dos dinamômetros elétricos

As flechas foram medidas com defletômetros mecânicos com precisão de centésimo de milímetro, exceto nos ensaios da série S1, quando a não disponibilidade desses defletômetros fez com que as flechas fossem medidas grosseiramente com escalas, cuja precisão era de milímetro.

#### 4.5 - PREPARAÇÃO DOS MODELOS E EXECUÇÃO DOS ENSAIOS

Dois dias antes dos ensaios, os modelos foram retirados do tanque de cura. Daí em diante, respeitou-se a seguinte sequência:

a) Aplicação de uma demão de cal em ambas as faces, para facilitar a visualização da primeira fissura e, em seguida, do progresso da fissuração.

b) Fixação das cantoneiras de 2 1/2 polegadas ao longo do quadro do contorno, superior e inferiormente - ver figura 4.7. Para uniformização das superfícies de contato entre as cantoneiras e o quadro do contorno, utilizou-se massa plástica Iberê.

c) Fixação das cantoneiras de 3 polegadas unidas em U - ver ainda figura 4.7. Nos modelos da série S1 fixaram-se, nessas cantoneiras, os rolamentos.

d) Colocação do modelo na estrutura de reação como uma gaveta, deslocando-se o quadro superior dessa estrutura. Fixação desse quadro superior nas colunas da estrutura e no quadro inferior, através das duas chapas verticais, vistas na figura 4.12.

e) Montagem do sistema de distribuição de carga, colocando-se as sessenta e quatro placas de borracha e os respectivos blocos de madeira; num sulco cônico, no centro de cada bloco, foi colocada uma esfera de aço e, sobre elas, as peças menores com forma de H; colocação das esferas nos centros das almas dos H menores, e, sobre elas, os

quatro H maiores; finalmente, no centro dos H maiores, sob cada um dos macacos, foram colocadas as quatro esferas in termediárias entre os dinamômetros e os H maiores.

f) Fixação dos quatro macacos na parte superior da estrutura de reação e ligação dos mesmos à bomba hidráulica.

g) Colocação dos defletômetros, que foram fixados em cantoneiras de alumínio ligadas às colunas.

h) Ligação dos dinamômetros elétricos ao medidor Tepic.

i) Colocação da bomba hidráulica em funcionamento, com a válvula de controle fechada. Quando a bomba possuía pressão suficiente, o ensaio estava pronto para ser iniciado.

j) A válvula de controle dos macacos não tinha sensibilidade para acrêscimos constantes de carga. Procurou-se, entretanto, aplicar cerca de  $250 \text{ kgf/m}^2$  em intervalos de aproximadamente 5 minutos.

k) Ao ser atingido cada estágio do carregamento, a válvula de controle era fechada. Ao se estabilizarem as deformações da laje, foram feitas as leituras dos defletômetros. Iniciado o fissuramento, salientaram-se as fissuras com grafite, marcando-se, também, os estágios que lhes correspondiam.

l) O final do ensaio foi caracterizado pela incapacidade da laje de suportar acrêscimos de carga. As deformações da laje foram tais que o sistema de distribuição de carga não tinha mais possibilidade de se adaptar a essas deformações, começando a se desmontar.

#### 4.6 - DOCUMENTAÇÃO FOTOGRÁFICA

As fotografias mostradas nas figuras 4.17 a 4.26 ilustram alguns itens desta experimentação.



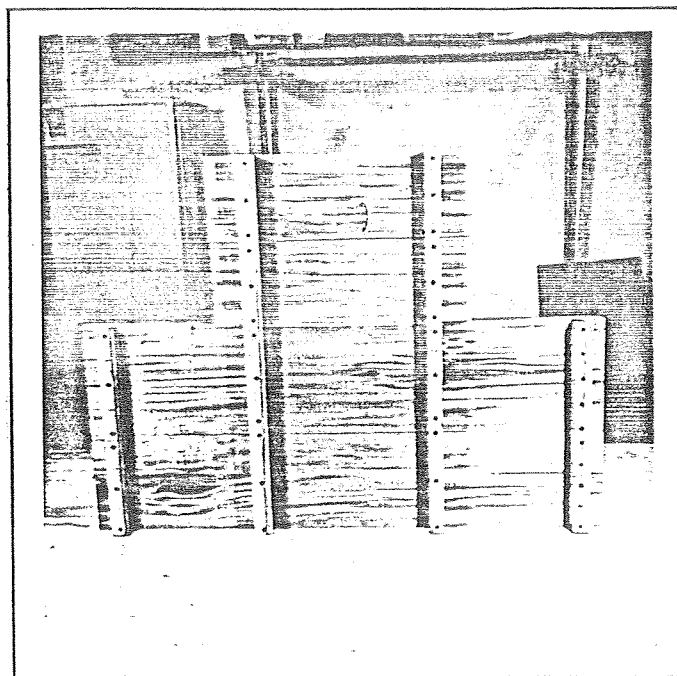


FIGURA 4.17-Formas para concretagem - vista inferior

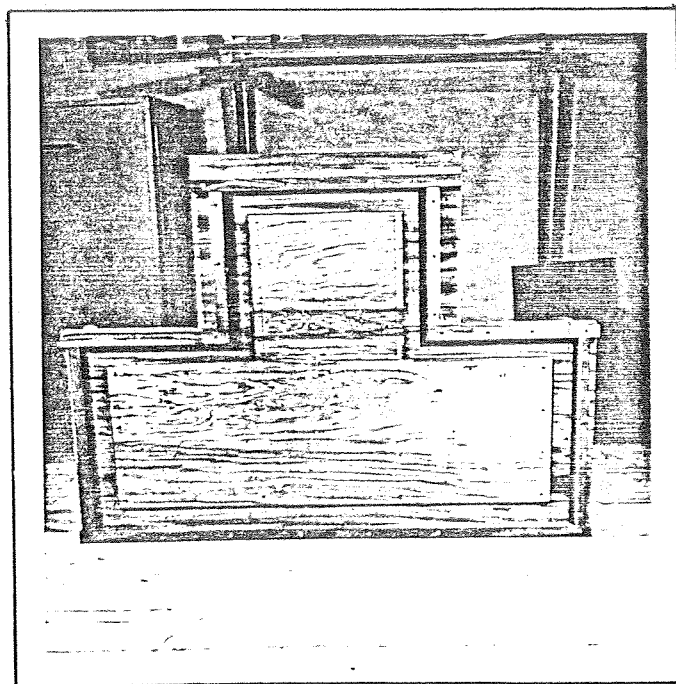


FIGURA 4.18-Formas para concretagem - vista superior

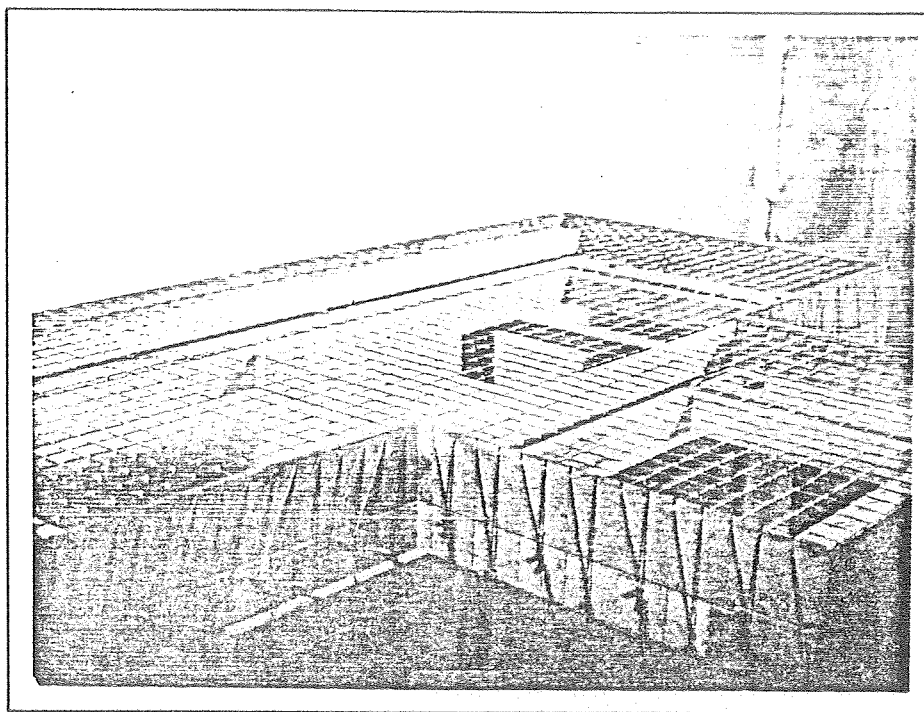


FIGURA 4.19 - Confeção das telas

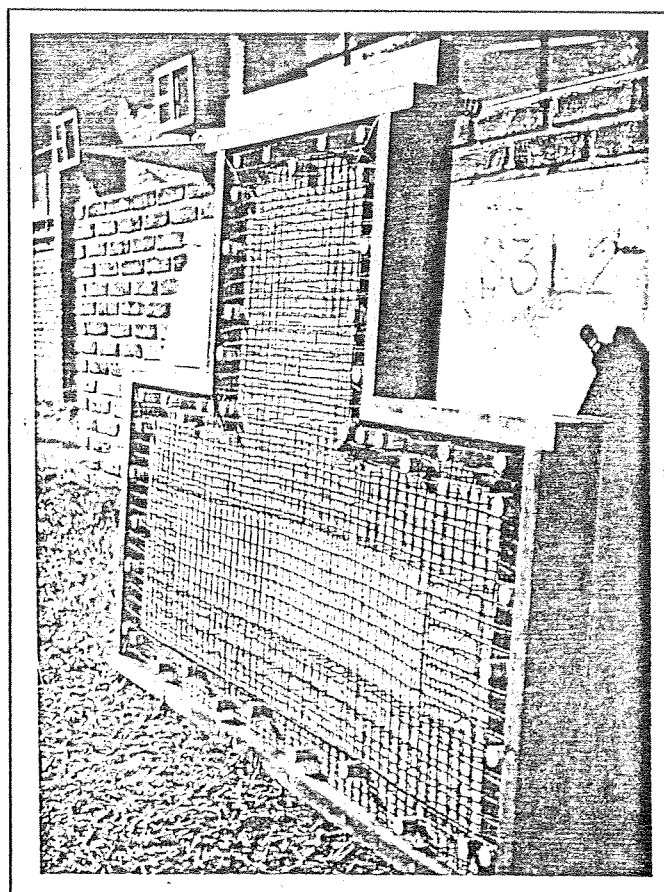


FIGURA 4.20 - Modelo pronto para concretagem

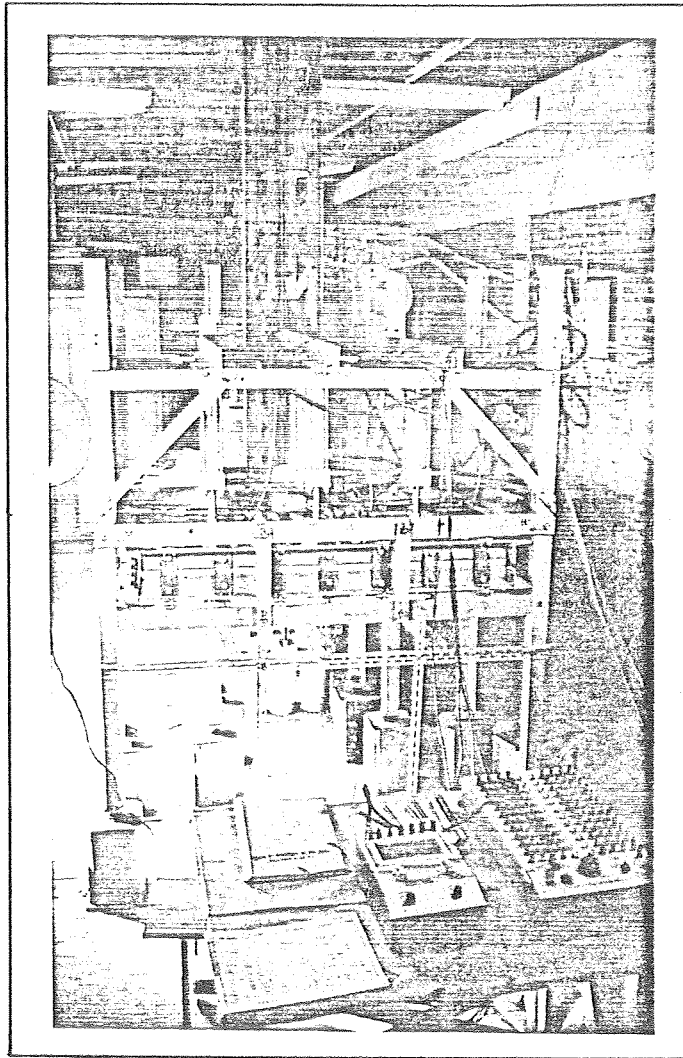


FIGURA 4.21- Aspecto geral de um ensaio

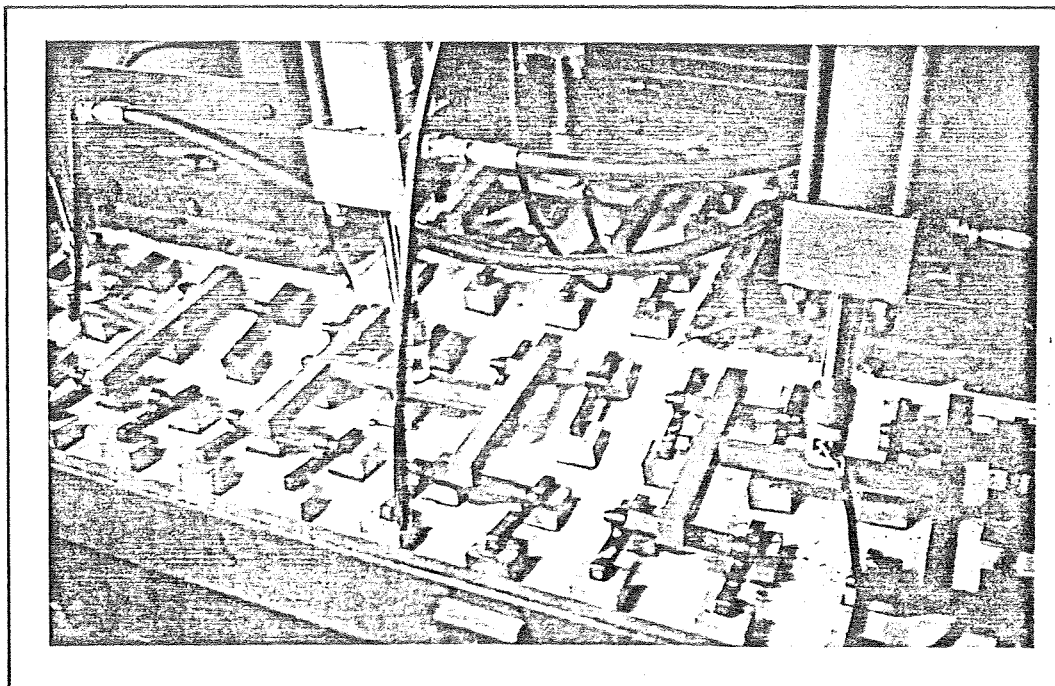


FIGURA 4.22- Sistema de distribuição de carga no final de um ensaio

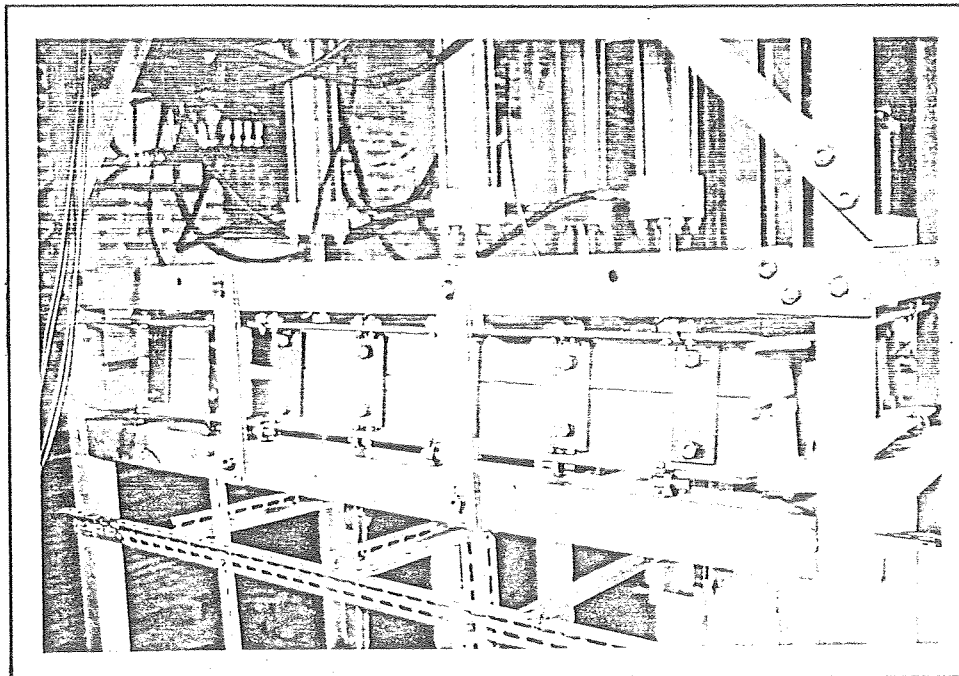


FIGURA 4.23- Ilustração do engaste deslizante

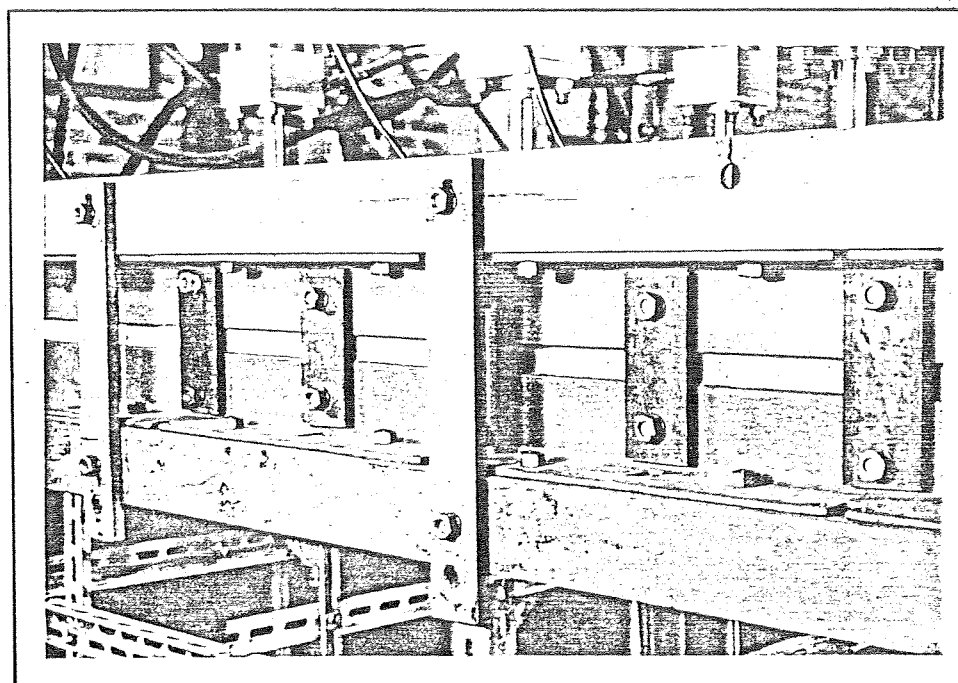


FIGURA 4.24- Ilustração do engaste perfeito

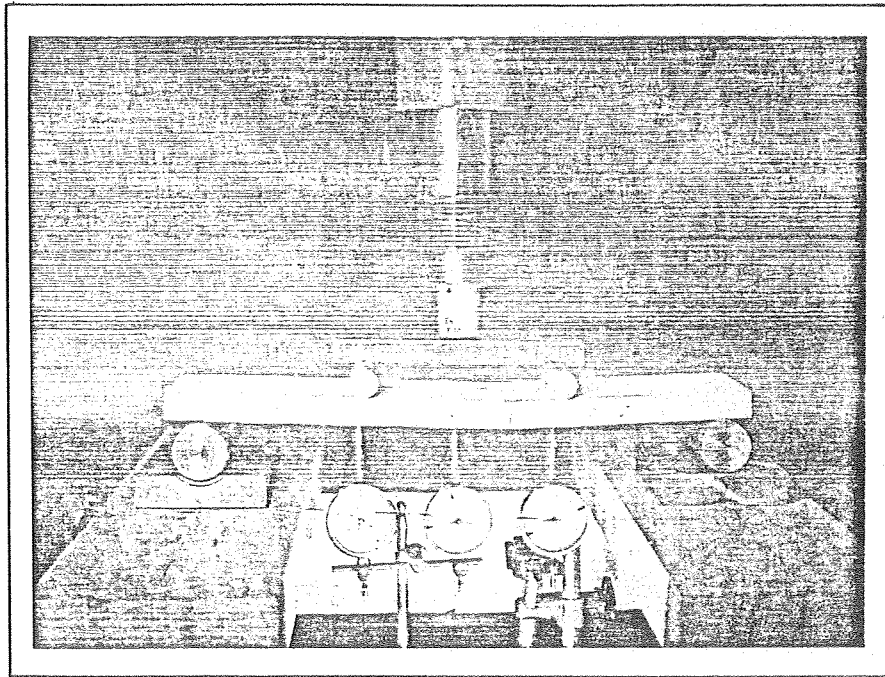


FIGURA 4.25- Ensaio de faixa

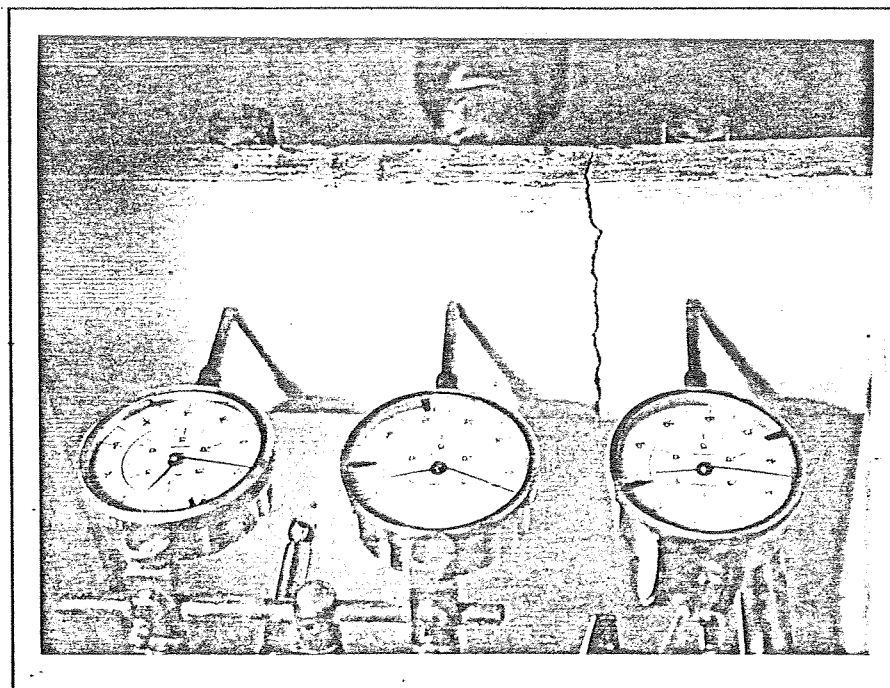


FIGURA 4.26- Aspecto de uma faixa após a ruína

## 5 - OS RESULTADOS

### 5.1 - RESULTADOS DOS ENSAIOS DOS MODELOS

Nos ensaios das lajes T, a carga uniformemente distribuída foi aplicada em estágios. Em cada estágio foram anotadas as flechas, as fissuras e, nas etapas finais, as linhas de esmagamento do micro-concreto. Seguem-se os resultados desses ensaios, ou mais explicitamente: os principais valores das cargas e das correspondentes flechas no centro da mesa do T, os gráficos cargas-flechas, as configurações de ruína e, finalizando, o progresso da fissuração.

Para facilitar a compreensão, apresenta-se, na tabela 5.1, o resumo das características gerais dos modelos.

#### 5.1.1 - Principais valores das cargas e das correspondentes flechas

Consideram-se principais os valores das cargas demarcatórias das diversas fases de comportamento das lajes, ou sejam:

a) Carga de início de fissuração, correspondente ao aparecimento da primeira fissura, indicando o fim da fase elástica e o início da fase de fissuração. Estão indicadas as cargas correspondentes à primeira fissura inferior e à primeira fissura superior.

b) Carga de início de plastificação, correspondente ao limite entre a fase de fissuração e a fase de plastificação. Esse limite, definido pelo início de escoamento da armadura, não ficou claramente configurado nos ensaios, sendo portanto as cargas indicadas com valores aproximados.

c) Carga de ruína, correspondente à máxima carga suportada pela laje.

Esses valores das cargas (q) e das correspondentes flechas (a) estão indicados na tabela 5.2. As flechas referem-se, como já foi visto, ao centro da mesa do T.

#### 5.1.2 - Gráficos cargas-flechas

Os gráficos cargas-flechas de cada série, com as respectivas curvas médias, são apresentados nas figuras 5.1 a 5.4, respectivamente para as séries S1 a S4. São também apresentados os valores limites entre as fases de comportamento.

Na figura 5.5 são indicadas as curvas médias de cada uma das quatro séries.

#### 5.1.3 - Configurações de ruína

As configurações de ruína são apresentadas, nas figuras 5.6 a 5.26, por uma vista da face superior (fissuras correspondentes a momentos negativos) e por uma projeção da face inferior (fissuras correspondentes a momentos positivos). As linhas com traços cruzados representam as linhas onde ocorreu esmagamento do micro-concreto.

#### 5.1.4 - Progresso da fissuração

Os números anotados nas fissuras, representadas nas figuras 5.6 a 5.22, indicam o progresso da fissuração. As cargas correspondentes ao aparecimento dessas fissuras, e as correspondentes flechas, estão indicadas nas tabelas 5.3 a 5.6, respectivamente para as séries S1 a S4.

TABELA 5.1 - Resumo das características gerais dos modelos

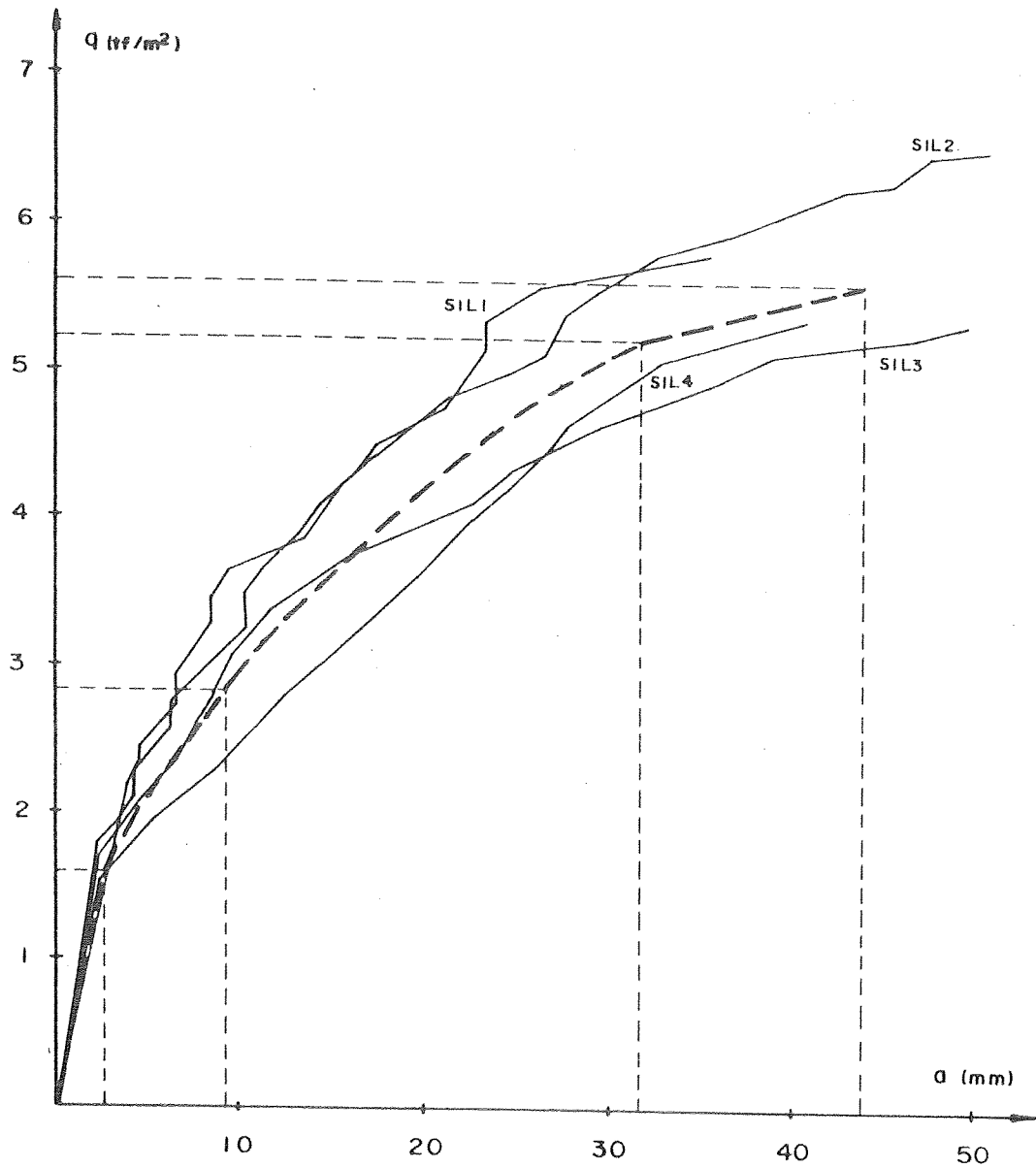
| SÉRIE | MODELOS | TIPO DE ENGASTAMENTO                                                                          | EXTENSÃO DA ARMADURA NEGATIVA                  | PROCÊDÊNCIA DAS ARMADURAS         |
|-------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|
| S1    | S1L1    | DESLIZANTE<br>DESLOCAMENTOS<br>HORIZONTAIS<br>PERMITIDOS E<br>ROTAÇÃO PAR-<br>CIAL DOS APOIOS | TOTAL                                          | LOTE 1<br>( $\varnothing$ 1,26mm) |
|       | S1L2    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S1L3    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S1L4    |                                                                                               |                                                |                                   |
| S2    | S2L1    | PERFEITO                                                                                      |                                                |                                   |
|       | S2L2    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S2L3    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S2L4    |                                                                                               |                                                |                                   |
| S3    | S3L1    | PERFEITO                                                                                      | SUPRIMIDA NA<br>REGIÃO CENTRAL<br>DA MESA DO T | LOTE 2<br>( $\varnothing$ 1,23mm) |
|       | S3L2    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S3L3    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S3L4    |                                                                                               |                                                |                                   |
| S4    | S4L1    |                                                                                               | TOTAL                                          |                                   |
|       | S4L2    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S4L3    |                                                                                               |                                                |                                   |
|       | S4L4    |                                                                                               |                                                |                                   |



TABELA 5.2 - Principais valores das cargas e das correspondentes flechas

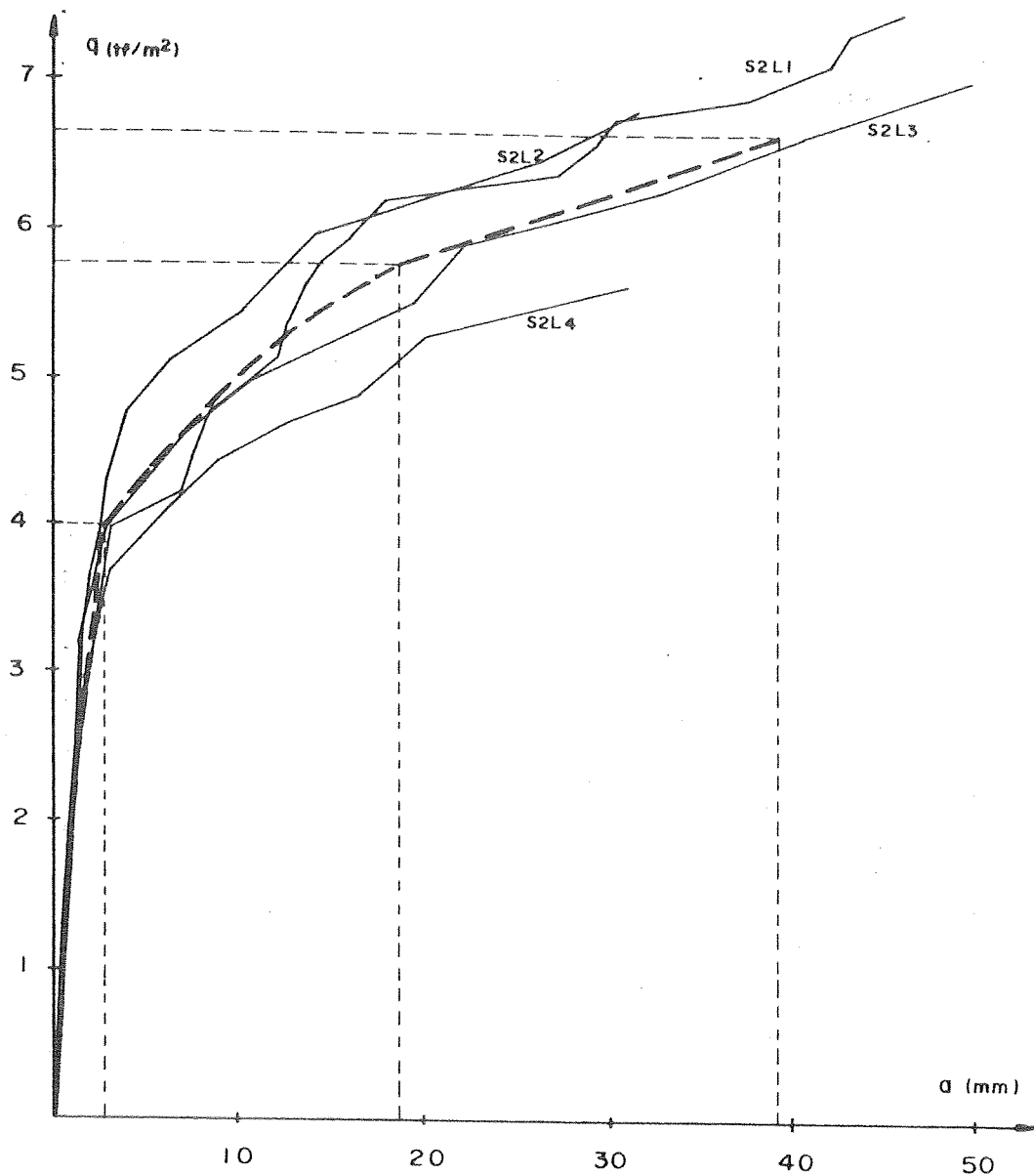
| MODELOS | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | INÍCIO DA FISSURAÇÃO INFERIOR |         |                 | INÍCIO DE FISSURAÇÃO SUPERIOR |         |                 | INÍCIO DA FASE DE PLASTIFICAÇÃO |         |                 | RUÍNA                               |                                   |       |
|---------|----------------------------------|-------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------|---------|-----------------|---------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-------|
|         |                                  | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>          | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q <sub>r</sub><br>tf/m <sup>2</sup> | a <sub>r</sub> <sup>*</sup><br>mm |       |
| S1L1    | 295                              | 1,78                          | 3       | 0,32            | 3,08                          | 10      | 0,55            | 5,30                            | 24      | 0,94            | 5,65                                | 35                                |       |
| S1L2    | 281                              | 1,57                          | 3       | 0,24            | 3,09                          | 8       | 0,48            | 5,73                            | 33      | 0,89            | 6,43                                | 50                                |       |
| S1L3    | 273                              | 1,65                          | 3       | 0,31            | 2,59                          | 8       | 0,49            | 5,07                            | 39      | 0,96            | 5,29                                | 49                                |       |
| S1L4    | 278                              | 1,49                          | 3       | 0,28            | 2,78                          | 13      | 0,52            | 5,06                            | 33      | 0,95            | 5,34                                | 40                                |       |
| S2L1    | 240                              | 3,96                          | 3,08    | 0,53            | 3,96                          | 3,08    | 0,53            | 6,15                            | 17,58   | 0,83            | 7,44                                | 45,88                             |       |
| S2L2    | 223                              | 4,30                          | 2,62    | 0,64            | 4,30                          | 2,62    | 0,64            | 5,94                            | 14,44   | 0,88            | 6,76                                | 31,25                             |       |
| S2L3    | 276                              | 3,95                          | 2,76    | 0,56            | 3,95                          | 2,76    | 0,56            | 5,88                            | 22,20   | 0,84            | 7,00                                | 49,40                             |       |
| S2L4    | 268                              | 3,69                          | 2,99    | 0,66            | 3,69                          | 2,99    | 0,66            | 5,25                            | 20,19   | 0,94            | 5,59                                | 31,00                             |       |
| S3L1    | 248                              | 2,92                          | 1,50    | 0,57            | 3,18                          | 1,97    | 0,62            | 4,91                            | 12,54   | 0,96            | 5,14                                | 19,58                             |       |
| S3L2    | 251                              | 3,05                          | 1,46    | 0,61            | 3,31                          | 1,94    | 0,66            | 4,71                            | 14,12   | 0,94            | 4,99                                | 23,66                             |       |
| S3L3    | 239                              | 2,87                          | 1,54    | 0,58            | 3,02                          | 1,86    | 0,61            | 4,26                            | 9,60    | 0,86            | 4,96                                | 30,00                             |       |
| S3L4    | 238                              | 3,05                          | 1,51    | 0,59            | 3,33                          | 2,58    | 0,64            | 4,49                            | 11,79   | 0,87            | 5,16                                | 25,90                             |       |
| S4L1    | 363                              | 2,61                          | 1,21    | 0,50            | 3,29                          | 2,08    | 0,63            | 4,69                            | 10,45   | 0,90            | 5,20                                | 17,02                             |       |
| S4L2    | 346                              | 2,95                          | 1,33    | 0,53            | 3,47                          | 2,18    | 0,63            | 4,60                            | 12,33   | 0,83            | 5,53                                | 36,03                             |       |
| S4L3    | 347                              | 3,22                          | 1,70    | 0,62            | 3,38                          | 2,08    | 0,65            | 4,40                            | 14,21   | 0,84            | 5,21                                | 30,93                             |       |
| S4L4    | 342                              | 2,53                          | 0,99    | 0,48            | 3,31                          | 2,08    | 0,63            | 4,36                            | 9,89    | 0,84            | 5,22                                | 34,75                             |       |
| MÉDIAS  | S1                               | 282                           | 1,63    | 3               | 0,29                          | 2,89    | 10              | 0,51                            | 5,29    | 32              | 0,93                                | 5,68                              | 44    |
|         | S2                               | 252                           | 3,98    | 2,86            | 0,59                          | 3,98    | 2,86            | 0,59                            | 5,81    | 18,63           | 0,87                                | 6,70                              | 39,38 |
|         | S3                               | 244                           | 2,97    | 1,50            | 0,59                          | 3,21    | 2,09            | 0,63                            | 4,59    | 12,01           | 0,91                                | 5,06                              | 24,79 |
|         | S4                               | 350                           | 2,83    | 1,31            | 0,53                          | 3,36    | 2,11            | 0,64                            | 4,51    | 11,72           | 0,85                                | 5,29                              | 29,68 |

\* Os valores de  $a_r$  são aproximados, por causa da dificuldade de leitura dos defletômetros no instante da ruína.



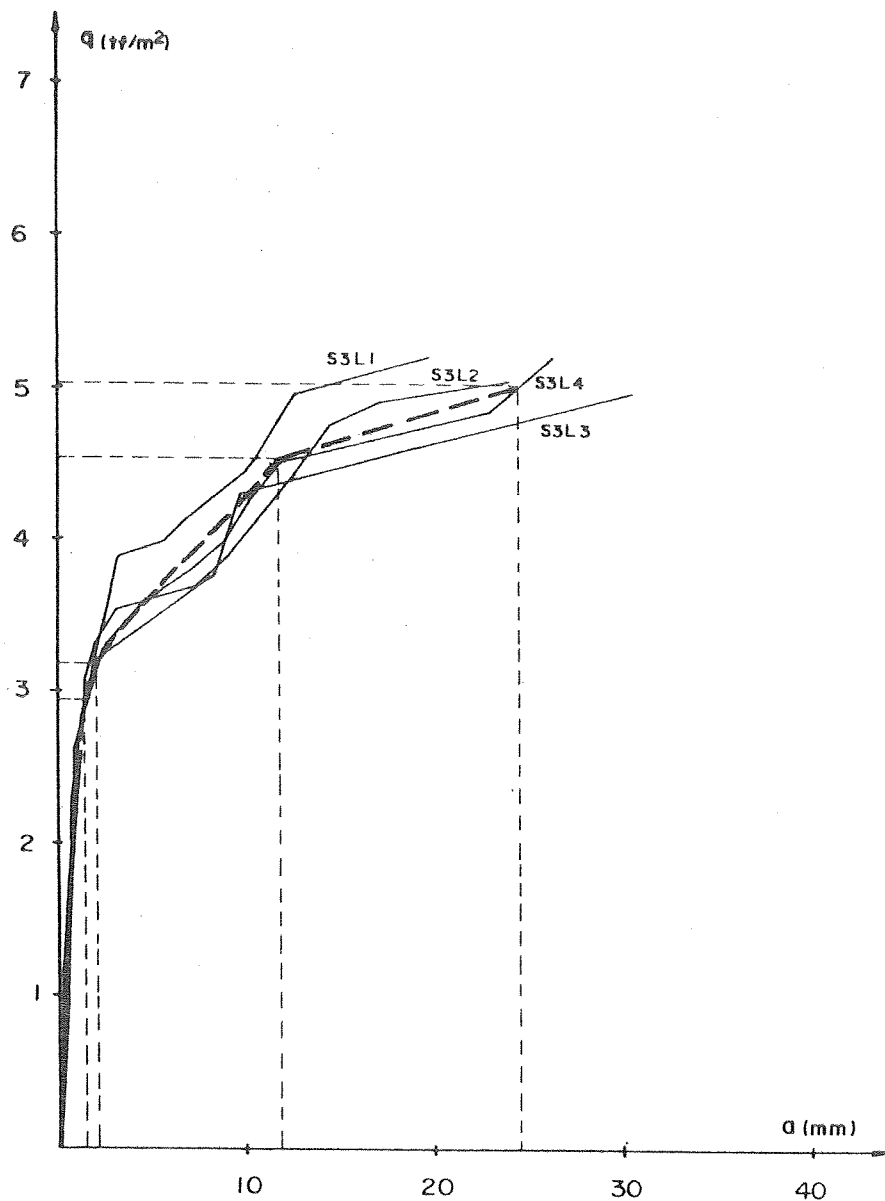
| LAJE  | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | INÍCIO DE FISSURAÇÃO INFERIOR |         |                 | INÍCIO DE FISSURAÇÃO SUPERIOR |         |                 | INÍCIO DA FASE DE PLASTIFICAÇÃO |         |                 | RUÍNA                               |                      |
|-------|----------------------------------|-------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------|---------|-----------------|---------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------------|----------------------|
|       |                                  | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>          | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q <sub>r</sub><br>tf/m <sup>2</sup> | a <sub>r</sub><br>mm |
| SIL1  | 295                              | 1,78                          | 3       | 0,32            | 3,08                          | 10      | 0,55            | 5,30                            | 24      | 0,94            | 5,65                                | 35                   |
| SIL2  | 281                              | 1,57                          | 3       | 0,24            | 3,09                          | 8       | 0,48            | 5,73                            | 33      | 0,89            | 6,43                                | 50                   |
| SIL3  | 273                              | 1,65                          | 3       | 0,31            | 2,59                          | 8       | 0,49            | 5,07                            | 39      | 0,96            | 5,29                                | 49                   |
| SIL4  | 278                              | 1,49                          | 3       | 0,28            | 2,78                          | 13      | 0,52            | 5,06                            | 33      | 0,95            | 5,34                                | 40                   |
| MÉDIA | 282                              | 1,63                          | 3       | 0,29            | 2,89                          | 10      | 0,51            | 5,29                            | 32      | 0,93            | 5,68                                | 44                   |

FIGURA 5.1- Gráficos cargas-flechas da série S1



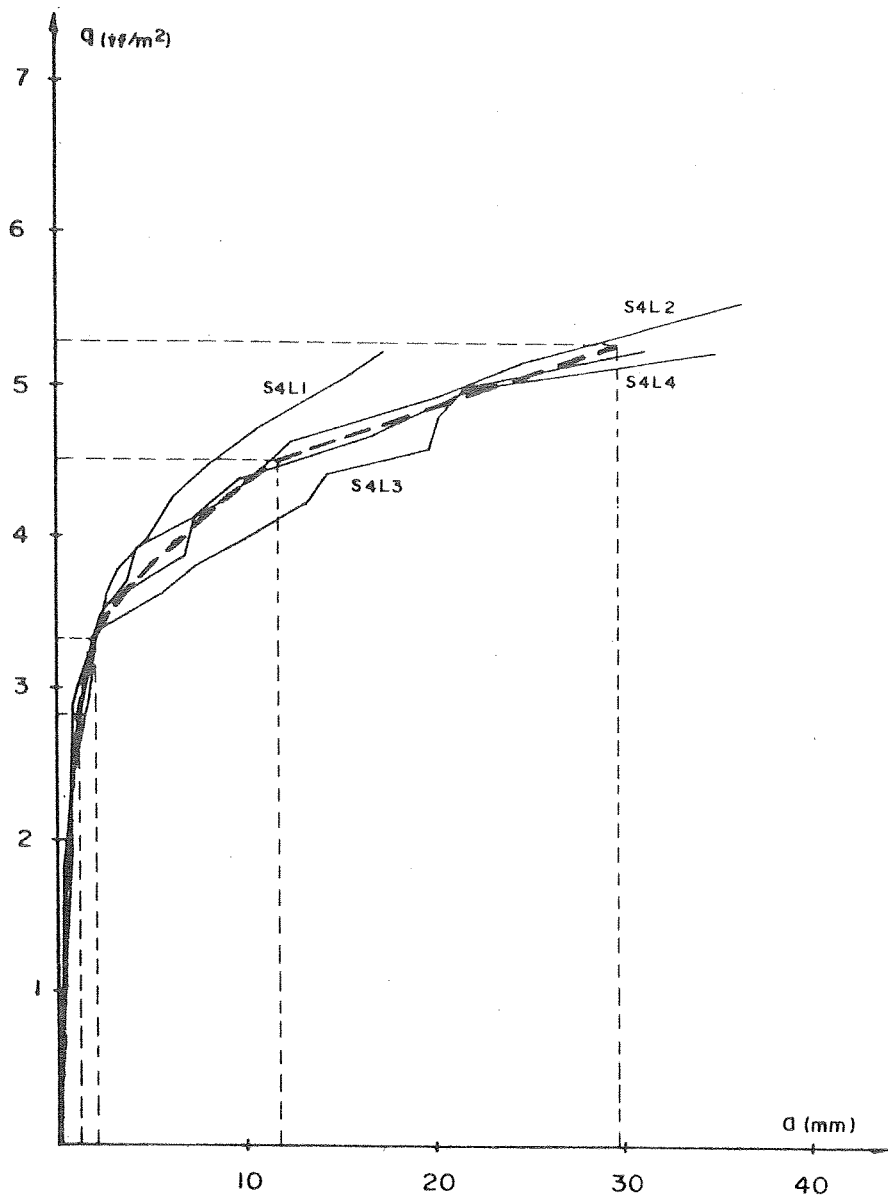
| LAJE  | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | INÍCIO DE FISSURAÇÃO INFERIOR |         |                 | INÍCIO DE FISSURAÇÃO SUPERIOR |         |                 | INÍCIO DA FASE DE PLASTIFICAÇÃO |         |                 | RUÍNA                      |             |
|-------|----------------------------------|-------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------|---------|-----------------|---------------------------------|---------|-----------------|----------------------------|-------------|
|       |                                  | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>          | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | $q_r$<br>tf/m <sup>2</sup> | $a_r$<br>mm |
| S2L1  | 240                              | 3,96                          | 3,08    | 0,53            | 3,96                          | 3,08    | 0,53            | 6,15                            | 17,68   | 0,83            | 7,44                       | 45,88       |
| S2L2  | 223                              | 4,30                          | 2,62    | 0,64            | 4,30                          | 2,62    | 0,64            | 5,94                            | 14,44   | 0,88            | 6,76                       | 31,25       |
| S2L3  | 276                              | 3,95                          | 2,76    | 0,56            | 3,95                          | 2,76    | 0,56            | 5,88                            | 22,20   | 0,84            | 7,00                       | 49,40       |
| S2L4  | 268                              | 3,69                          | 2,99    | 0,66            | 3,69                          | 2,99    | 0,66            | 5,25                            | 20,19   | 0,94            | 5,59                       | 31,00       |
| MÉDIA | 252                              | 3,98                          | 2,86    | 0,59            | 3,98                          | 2,86    | 0,59            | 5,81                            | 18,63   | 0,87            | 6,70                       | 39,38       |

FIGURA 5.2- Gráficos cargas-flechas da série S2



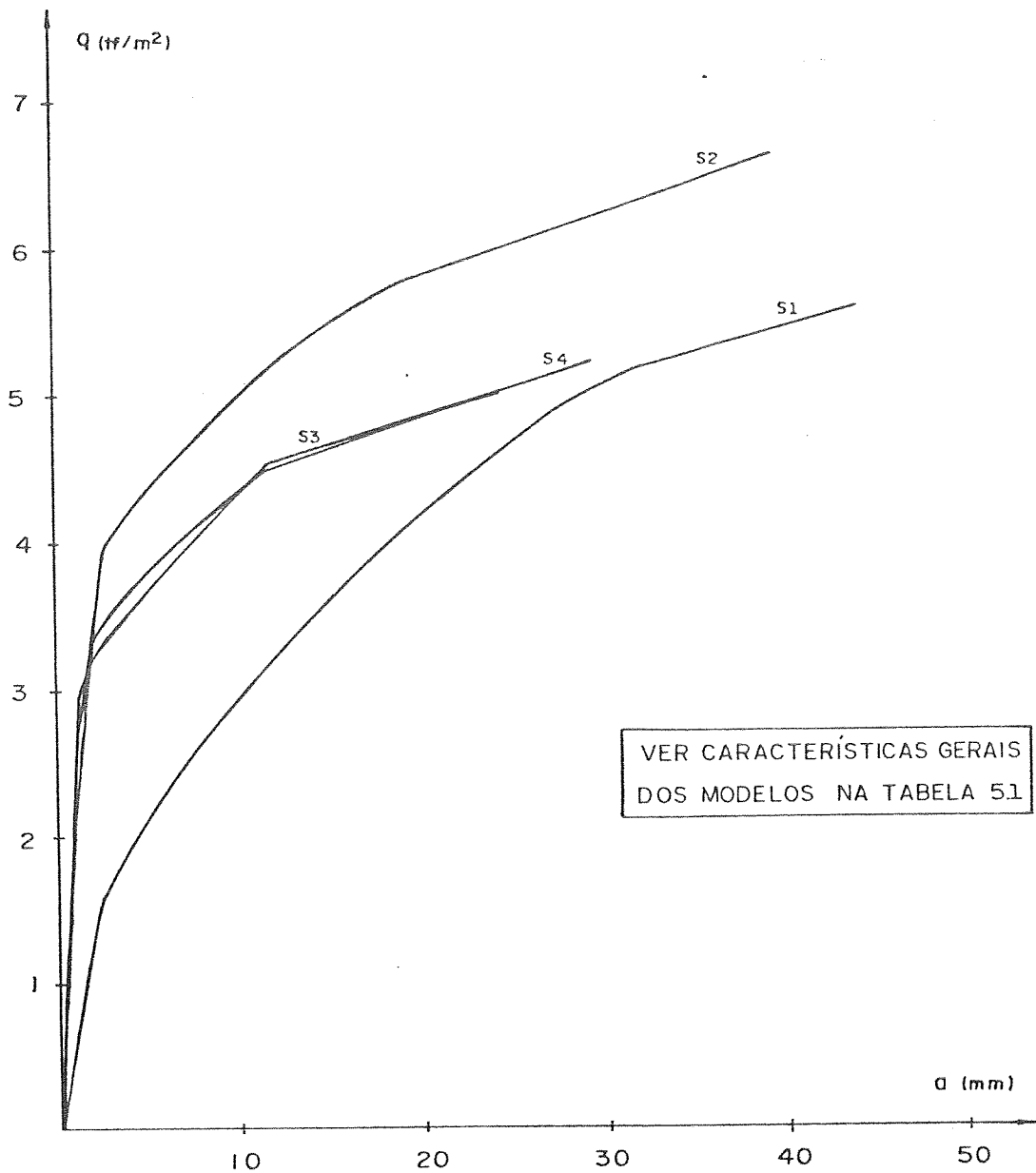
| LAJE  | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | INÍCIO DE FISSURAÇÃO INFERIOR |         |                 | INÍCIO DE FISSURAÇÃO SUPERIOR |         |                 | INÍCIO DA FASE DE PLASTIFICAÇÃO |         |                 | RUÍNA                               |                      |
|-------|----------------------------------|-------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------|---------|-----------------|---------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------------|----------------------|
|       |                                  | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{Q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{Q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>          | a<br>mm | $\frac{q}{Q_r}$ | q <sub>r</sub><br>tf/m <sup>2</sup> | a <sub>r</sub><br>mm |
| S3L1  | 248                              | 2,92                          | 1,50    | 0,57            | 3,18                          | 1,97    | 0,62            | 4,91                            | 12,54   | 0,96            | 5,14                                | 19,58                |
| S3L2  | 251                              | 3,05                          | 1,46    | 0,61            | 3,31                          | 1,94    | 0,66            | 4,71                            | 14,12   | 0,94            | 4,99                                | 23,66                |
| S3L3  | 239                              | 2,87                          | 1,54    | 0,58            | 3,02                          | 1,86    | 0,61            | 4,26                            | 9,60    | 0,86            | 4,96                                | 30,00                |
| S3L4  | 238                              | 3,05                          | 1,51    | 0,59            | 3,33                          | 2,58    | 0,64            | 4,49                            | 11,79   | 0,87            | 5,16                                | 25,90                |
| MÉDIA | 244                              | 2,97                          | 1,50    | 0,59            | 3,21                          | 2,09    | 0,63            | 4,59                            | 12,01   | 0,91            | 5,06                                | 24,79                |

FIGURA 5.3- Gráficos cargas-flechas da série S3



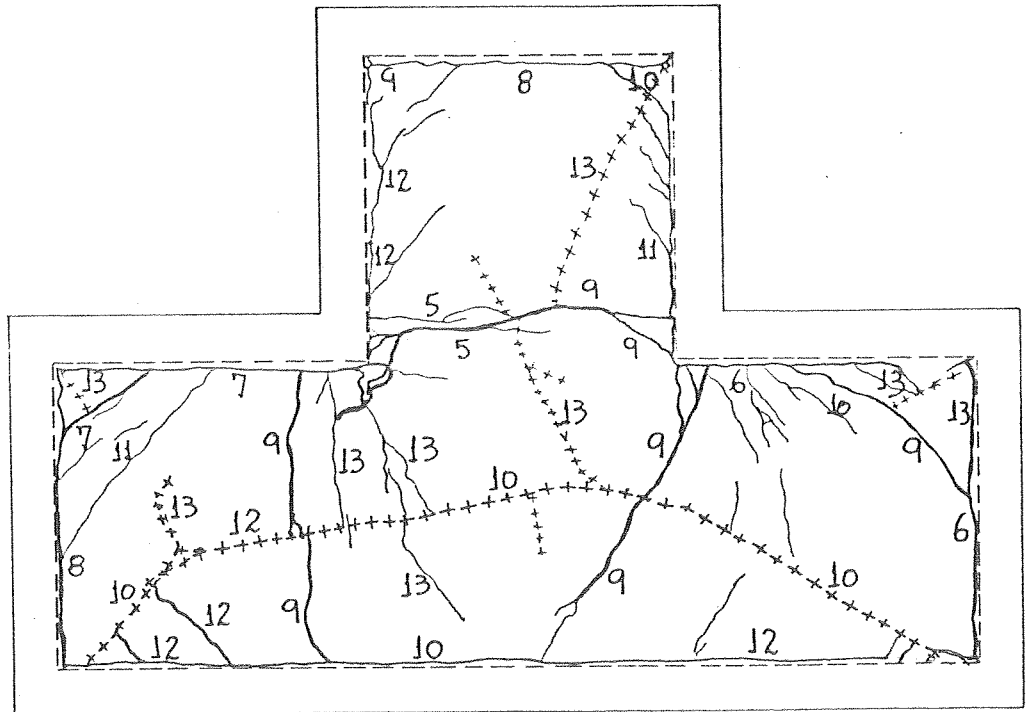
| LAJE  | $f_{c28}$<br>kg/cm <sup>2</sup> | INÍCIO DE FISSURAÇÃO INFERIOR |         |                 | INÍCIO DE FISSURAÇÃO SUPERIOR |         |                 | INÍCIO DA FASE DE PLASTIFICAÇÃO |         |                 | RUÍNA                               |                      |
|-------|---------------------------------|-------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------|---------|-----------------|---------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------------|----------------------|
|       |                                 | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>          | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q <sub>r</sub><br>tf/m <sup>2</sup> | a <sub>r</sub><br>mm |
| S4L1  | 363                             | 2,61                          | 1,21    | 0,50            | 3,29                          | 2,08    | 0,63            | 4,69                            | 10,45   | 0,90            | 5,20                                | 17,02                |
| S4L2  | 346                             | 2,95                          | 1,33    | 0,53            | 3,47                          | 2,18    | 0,63            | 4,60                            | 12,33   | 0,83            | 5,53                                | 36,03                |
| S4L3  | 347                             | 3,22                          | 1,70    | 0,62            | 3,38                          | 2,08    | 0,65            | 4,40                            | 14,21   | 0,84            | 5,21                                | 30,93                |
| S4L4  | 342                             | 2,53                          | 0,99    | 0,48            | 3,31                          | 2,08    | 0,63            | 4,36                            | 9,89    | 0,84            | 5,22                                | 34,75                |
| MÉDIA | 350                             | 2,83                          | 1,31    | 0,53            | 3,36                          | 2,11    | 0,64            | 4,51                            | 11,72   | 0,85            | 5,29                                | 29,68                |

FIGURA 5.4- Gráficos cargas-flechas da série S4



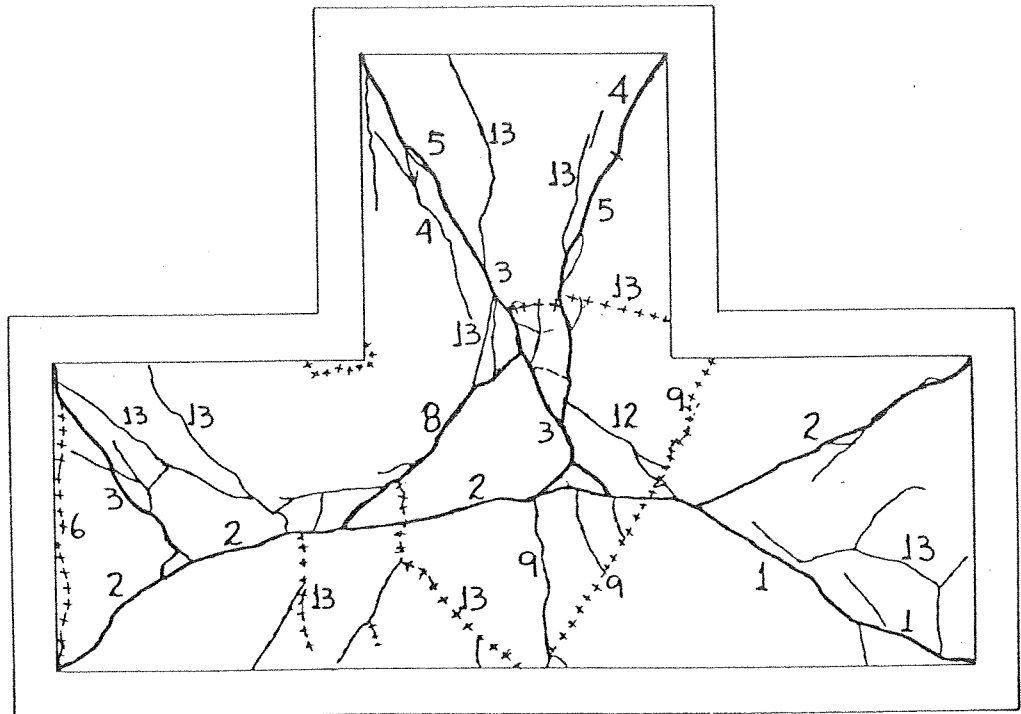
| SÉRIE | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | INÍCIO DE FISSURAÇÃO INFERIOR |         |                 | INÍCIO DE FISSURAÇÃO SUPERIOR |         |                 | INÍCIO DA FASE DE PLASTIFICAÇÃO |         |                 | RUÍNA                               |                      |
|-------|----------------------------------|-------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------|---------|-----------------|---------------------------------|---------|-----------------|-------------------------------------|----------------------|
|       |                                  | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>        | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q<br>tf/m <sup>2</sup>          | a<br>mm | $\frac{q}{q_r}$ | q <sub>r</sub><br>tf/m <sup>2</sup> | a <sub>r</sub><br>mm |
| S1    | 282                              | 1,63                          | 3       | 0,29            | 2,89                          | 10      | 0,51            | 5,29                            | 32      | 0,93            | 5,68                                | 44                   |
| S2    | 252                              | 3,98                          | 2,86    | 0,59            | 3,98                          | 2,86    | 0,59            | 5,81                            | 18,63   | 0,87            | 6,70                                | 39,38                |
| S3    | 244                              | 2,97                          | 1,50    | 0,59            | 3,21                          | 2,09    | 0,63            | 4,59                            | 12,01   | 0,91            | 5,06                                | 24,79                |
| S4    | 350                              | 2,83                          | 1,31    | 0,53            | 3,36                          | 2,11    | 0,64            | 4,51                            | 11,72   | 0,85            | 5,29                                | 29,68                |

FIGURA 5.5- Gráficos cargas-flechas médias das quatro séries



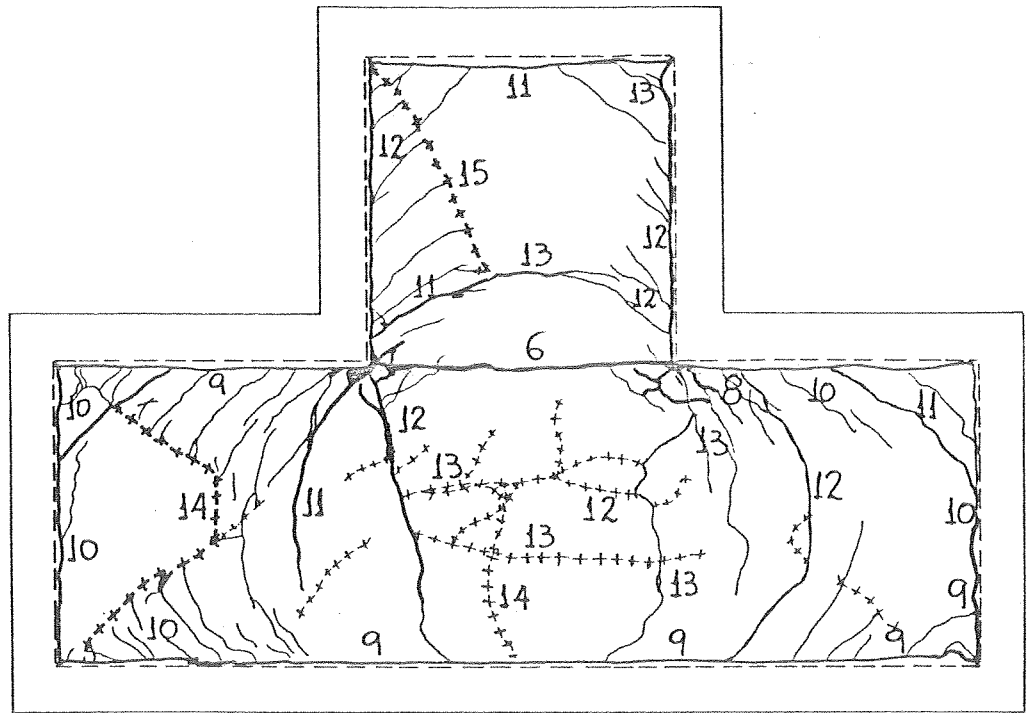
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



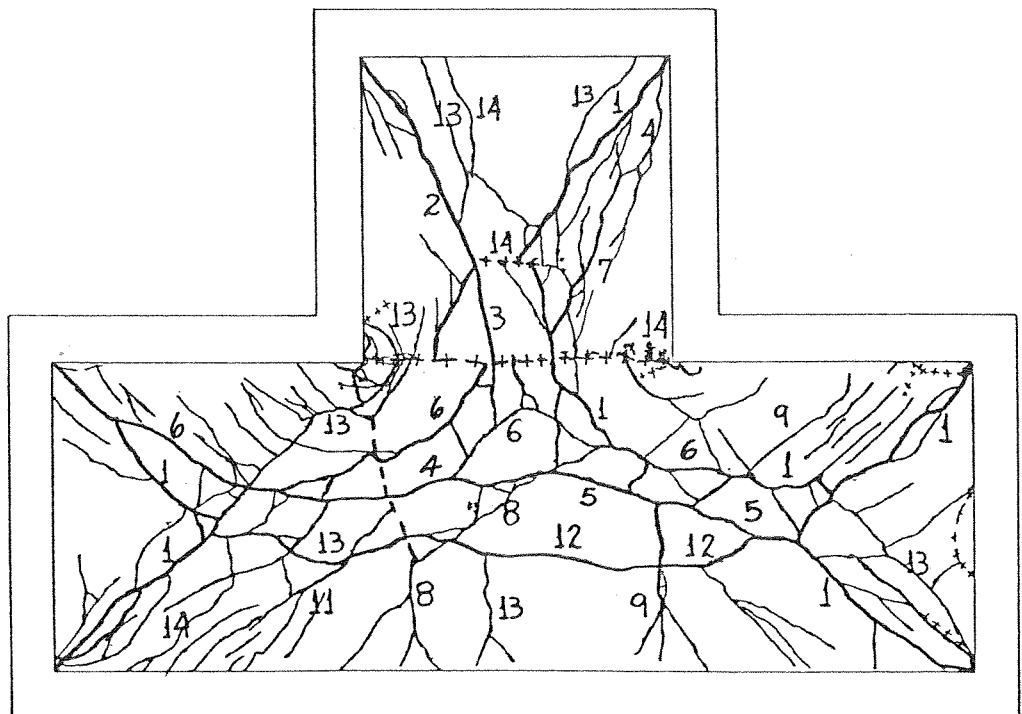
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.6- Configuração de ruína da laje SILI



VISTA DA FACE SUPERIOR

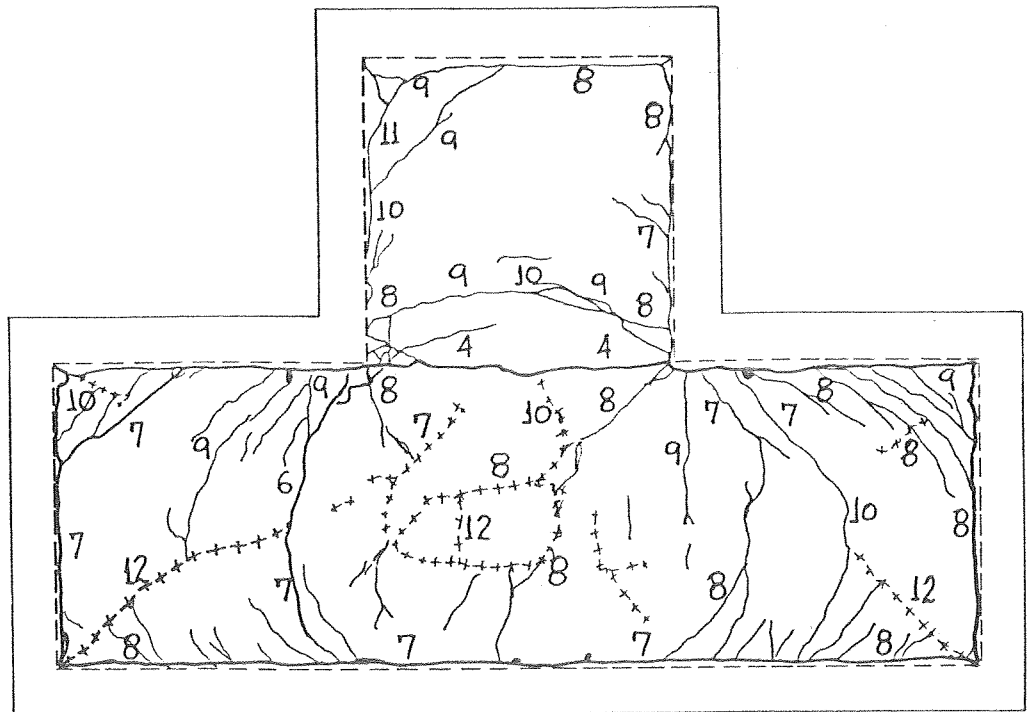
———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

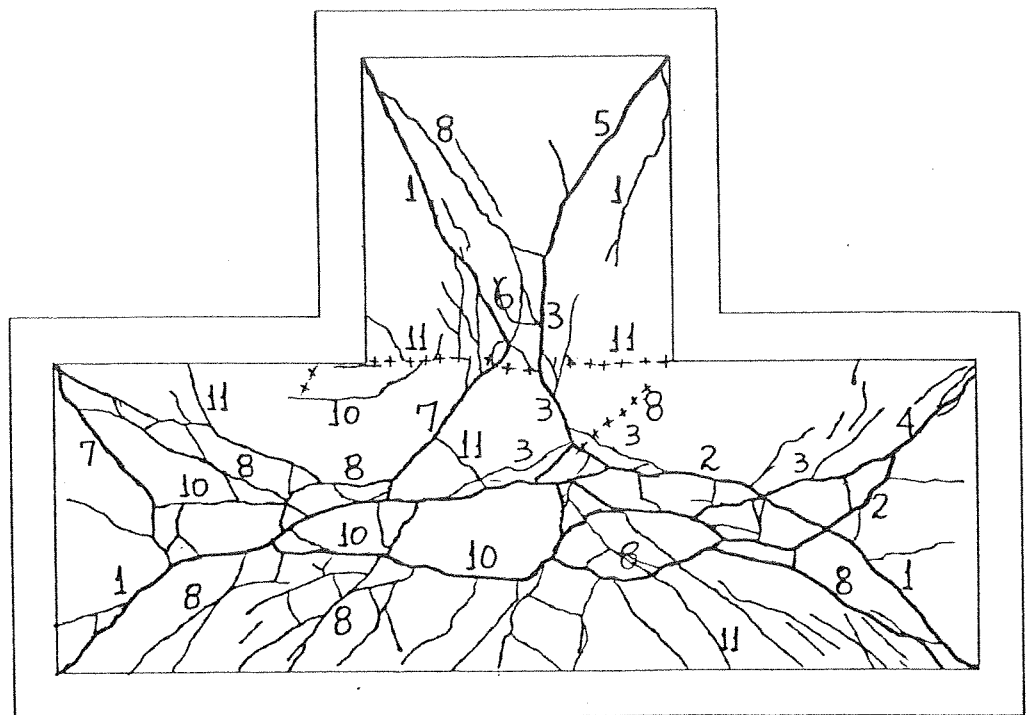
FIGURA 5.7- Configuração de ruína da laje SIL2





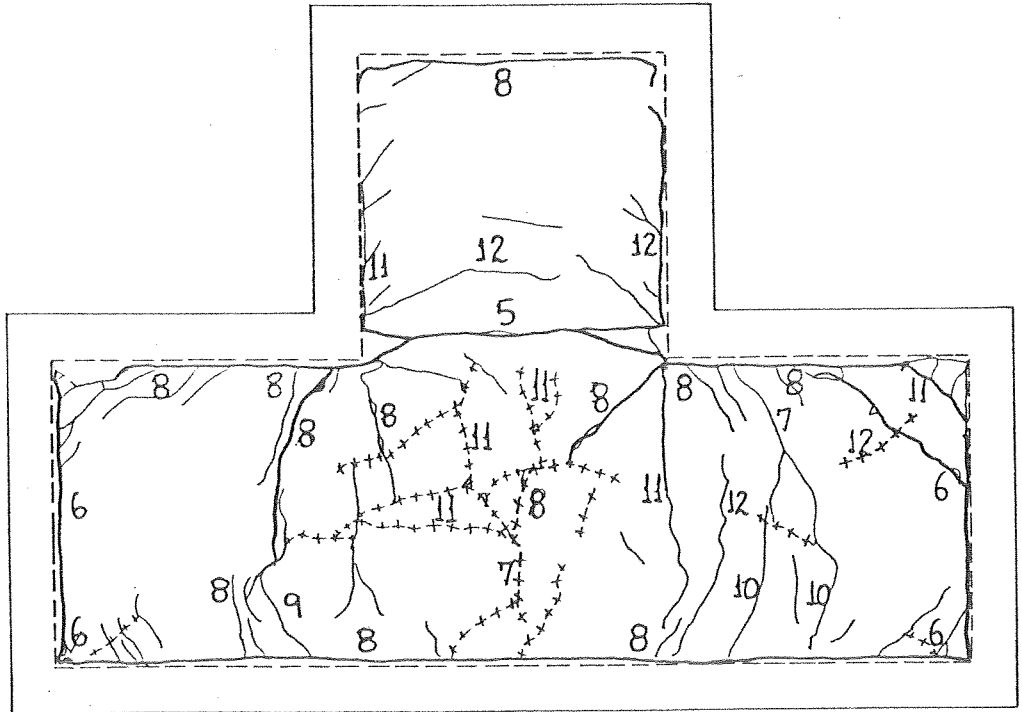
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



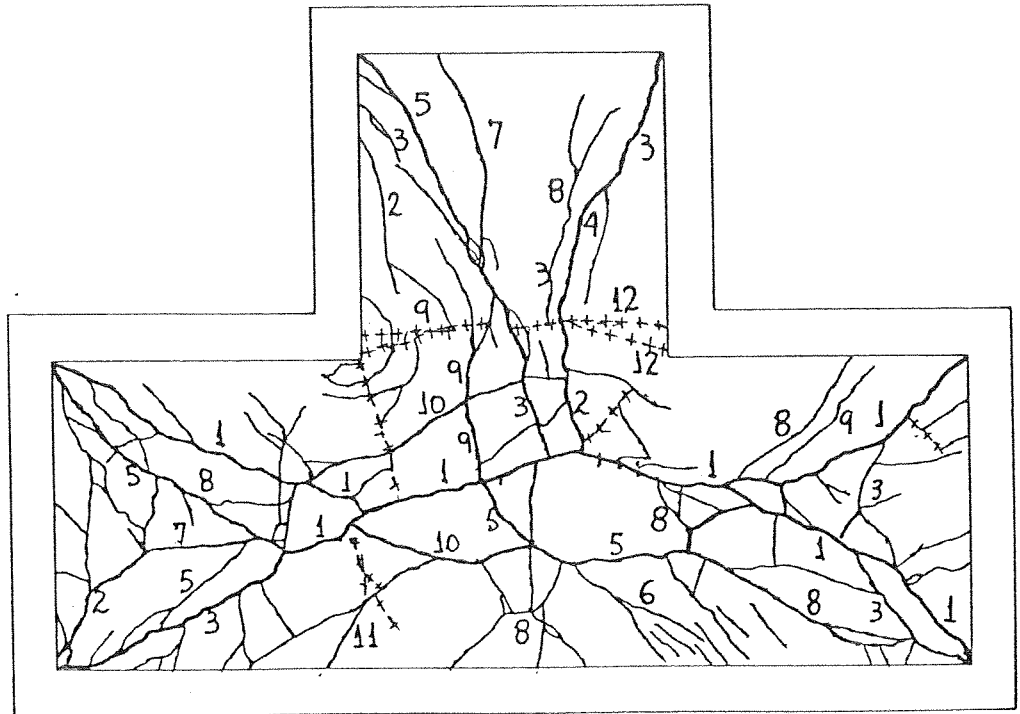
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.8- Configuração de ruína da laje SIL3



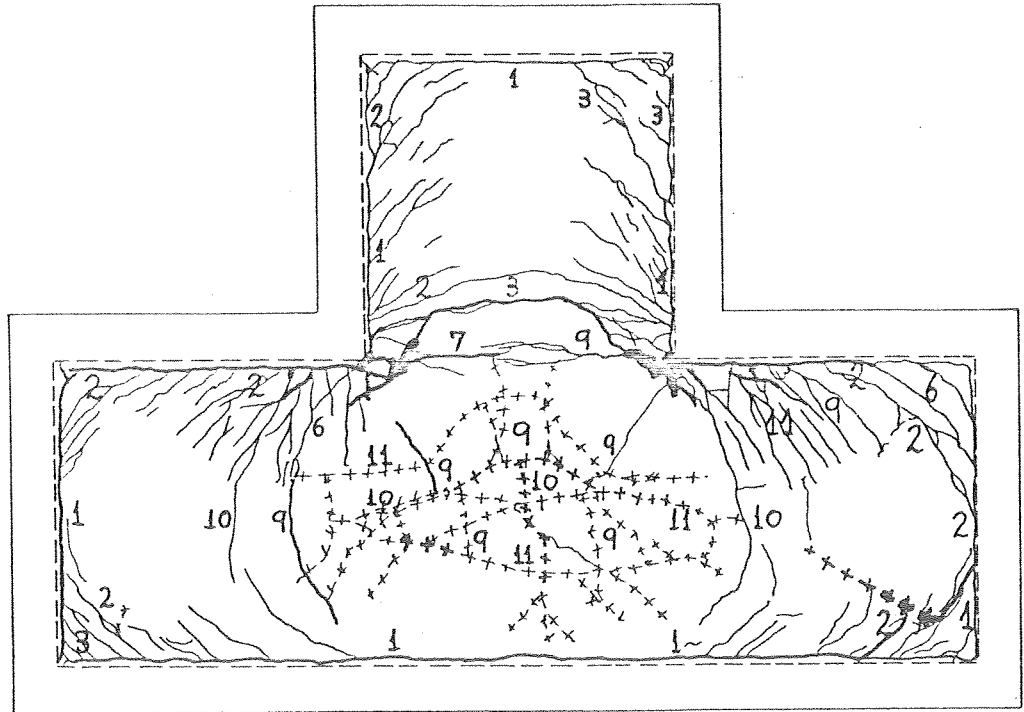
VISTA DA FACE SUPERIOR

—— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



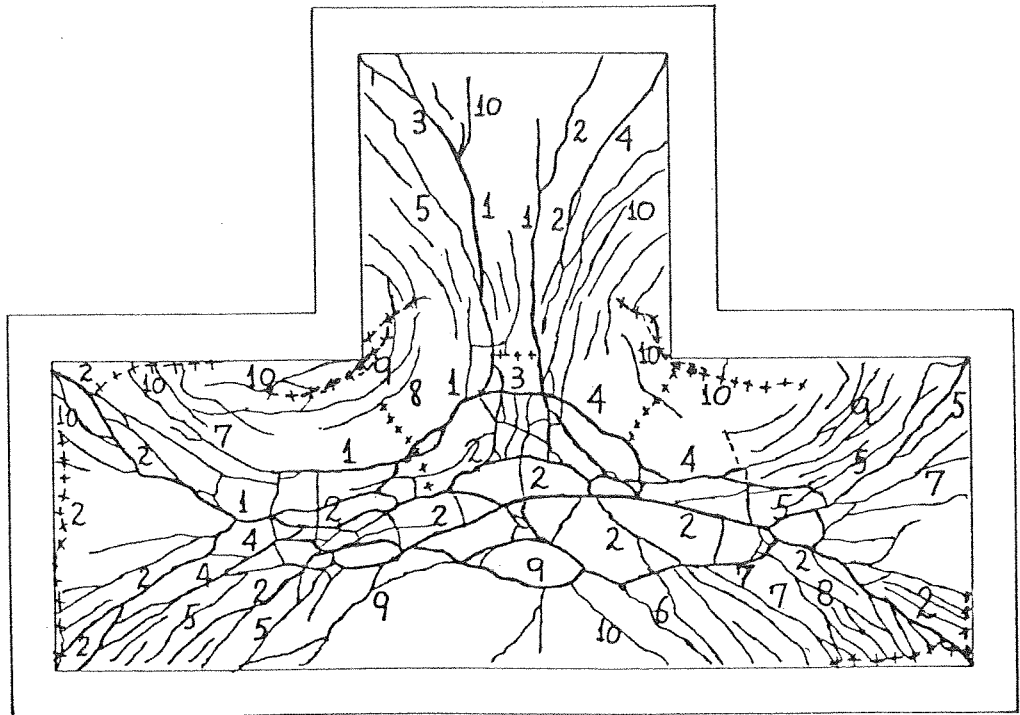
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.9 - Configuração de ruína da laje SIL4



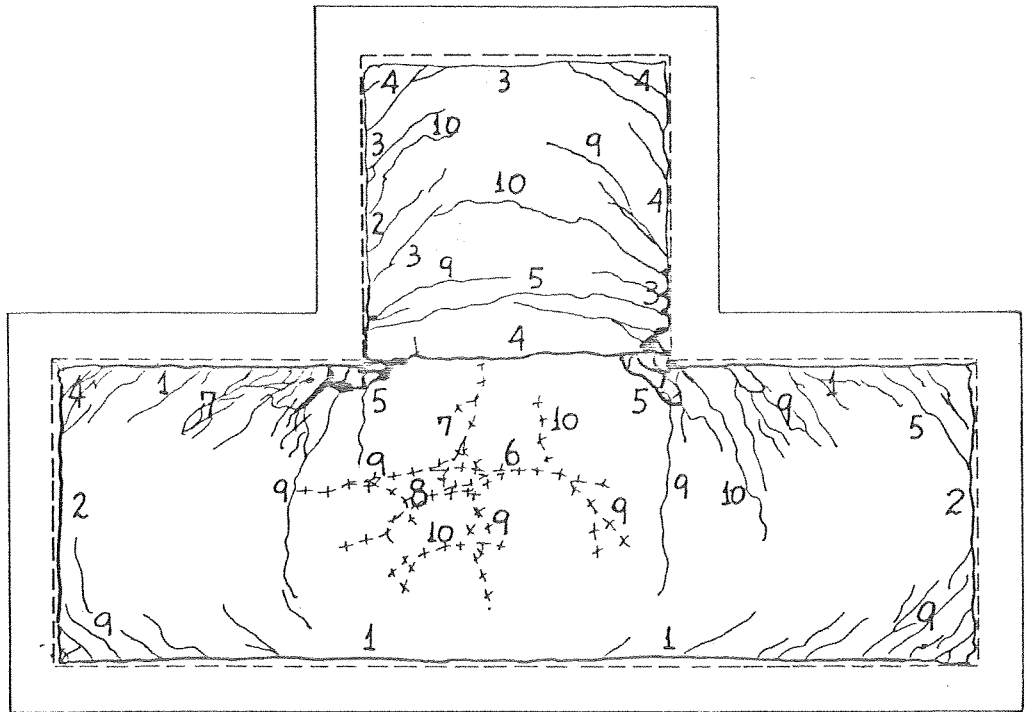
VISTA DA FACE SUPERIOR

—— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



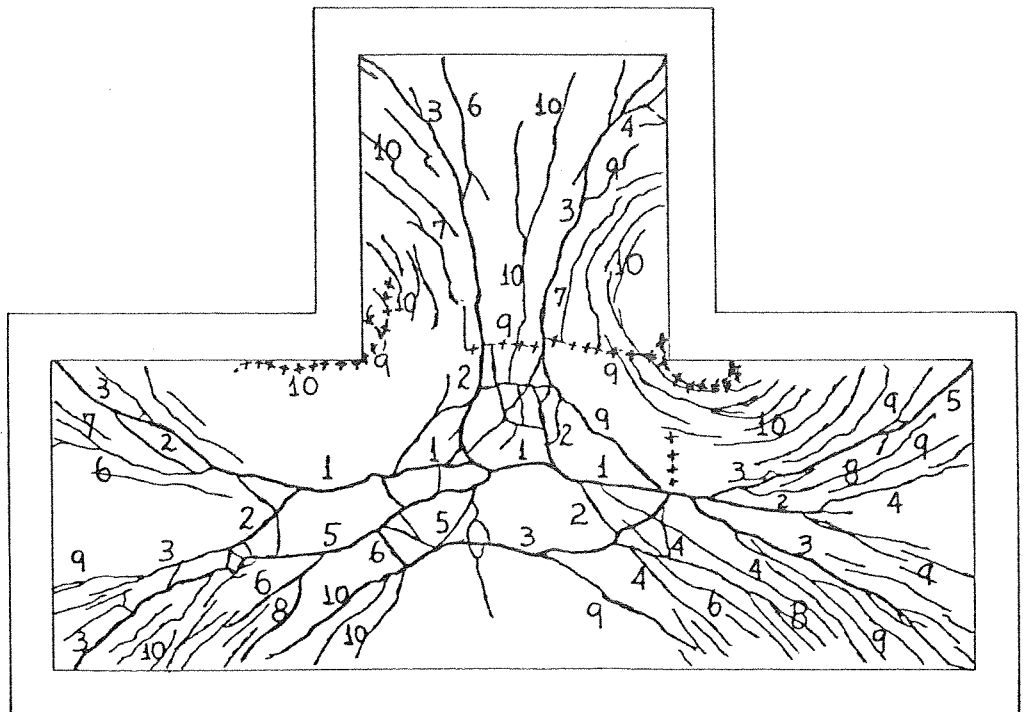
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.10- Configuração de ruína da laje S2L1



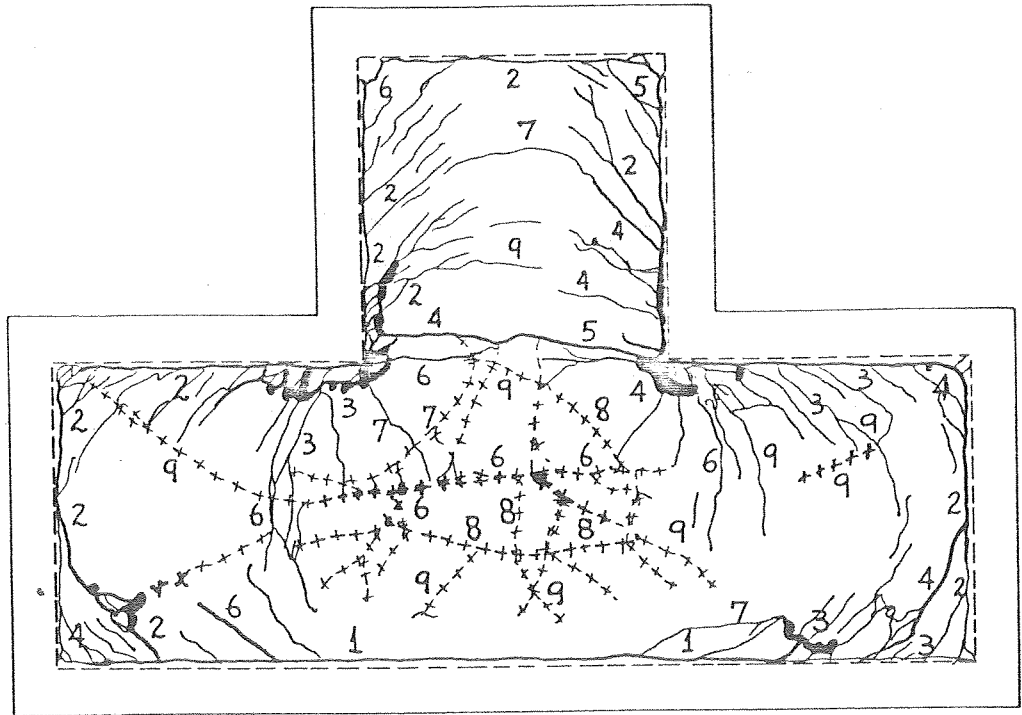
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



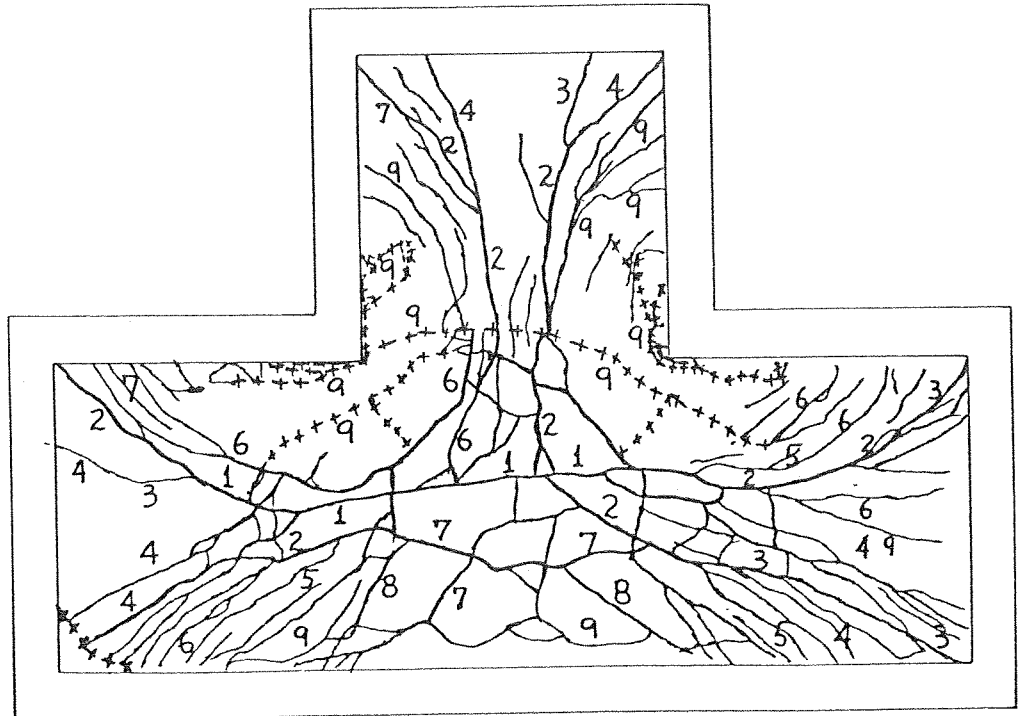
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.11- Configuração de ruína da laje S2L2



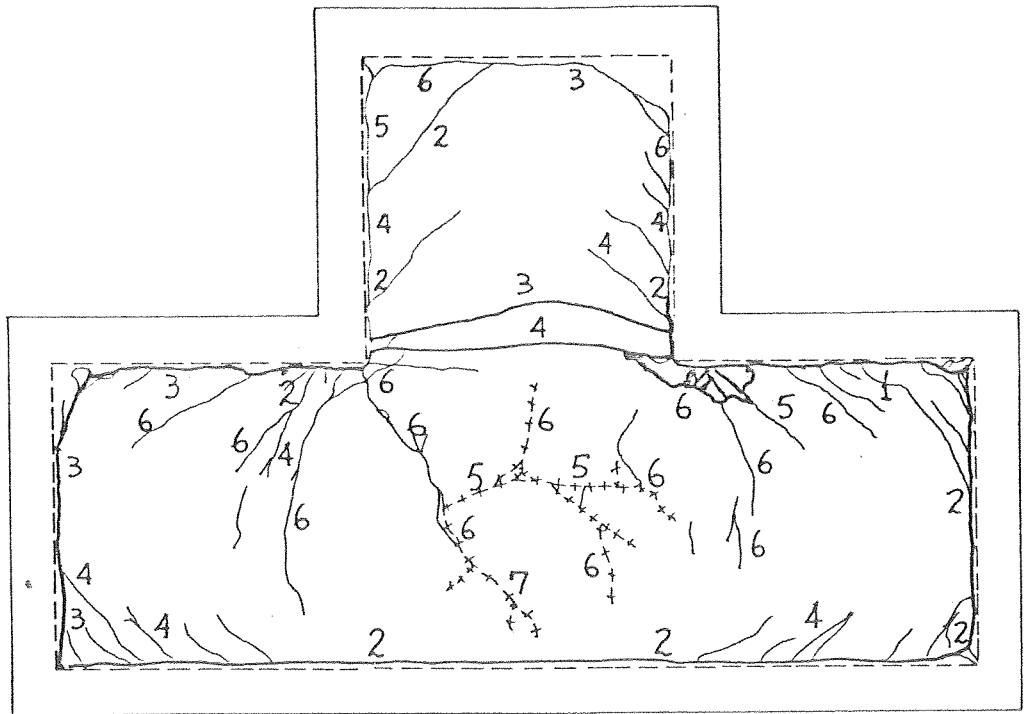
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



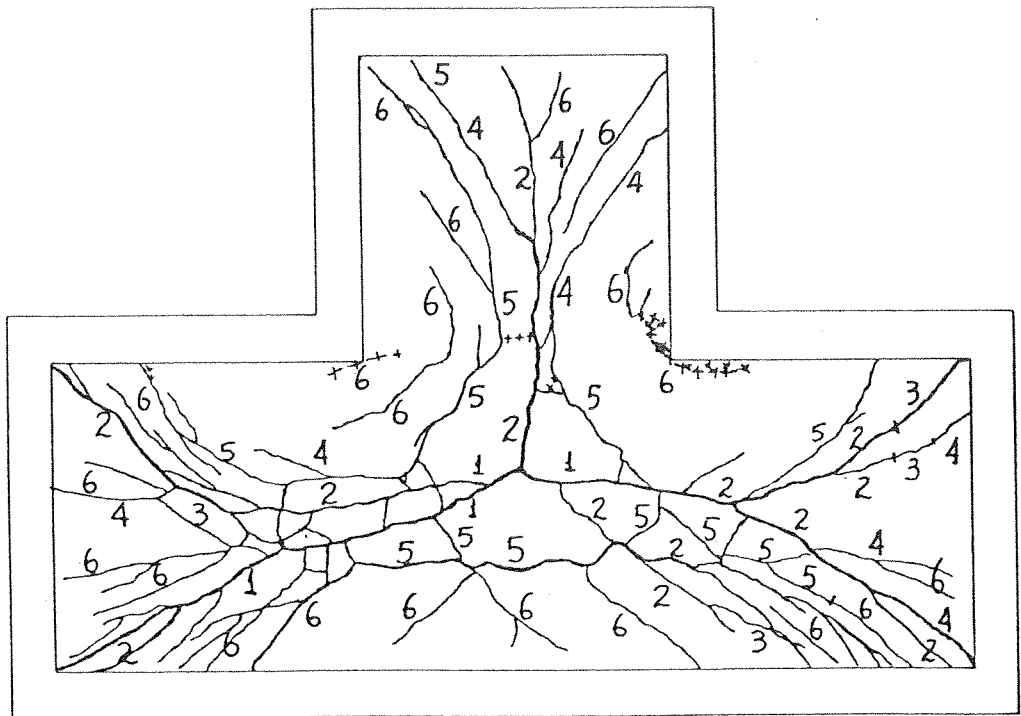
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.12- Configuração de ruína da laje S2L3



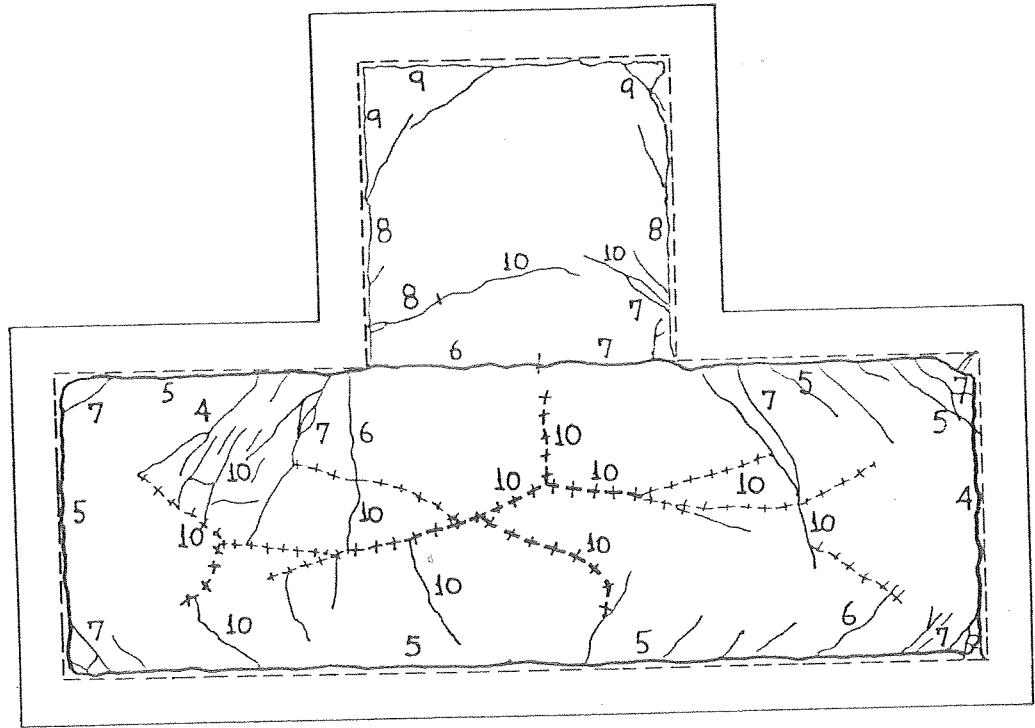
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



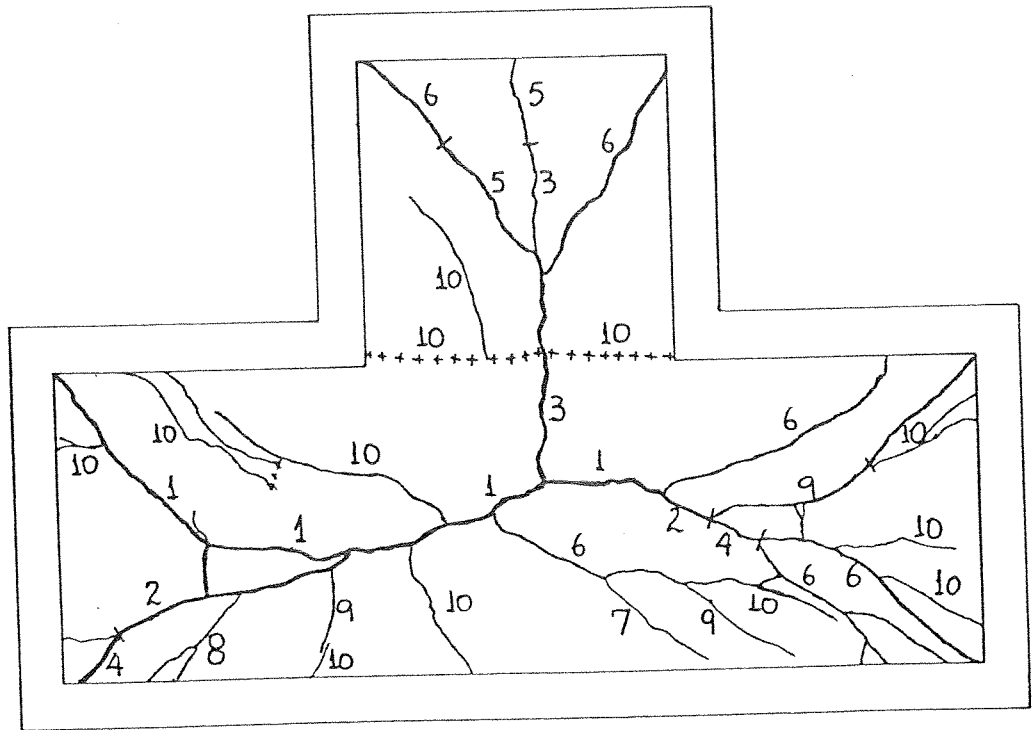
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.13- Configuração de ruína da laje S2L4



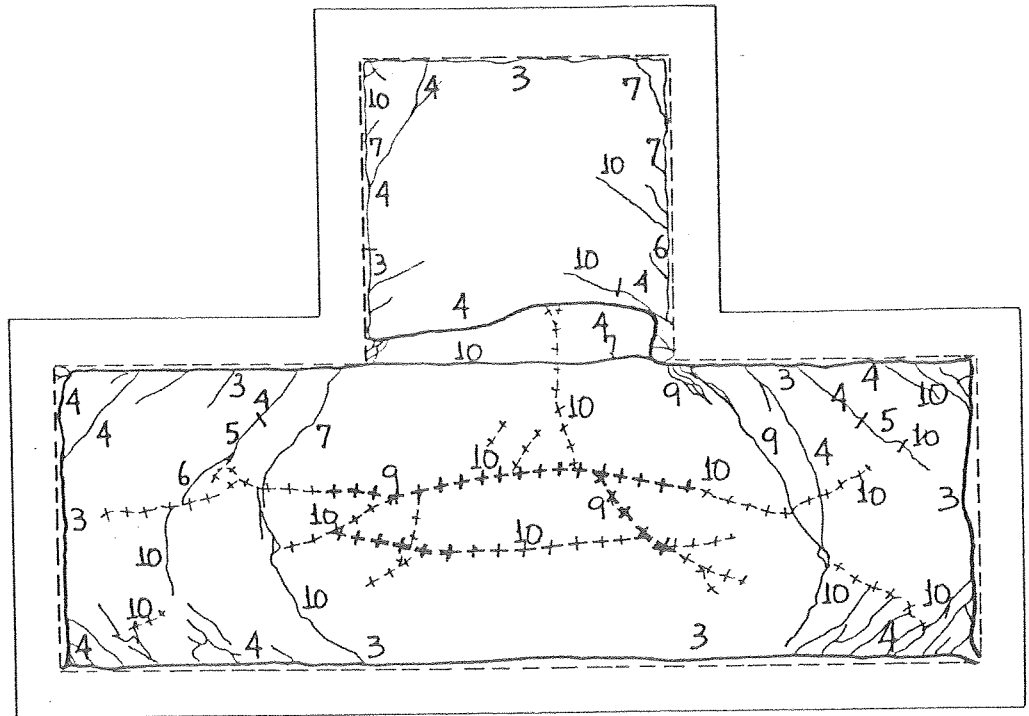
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



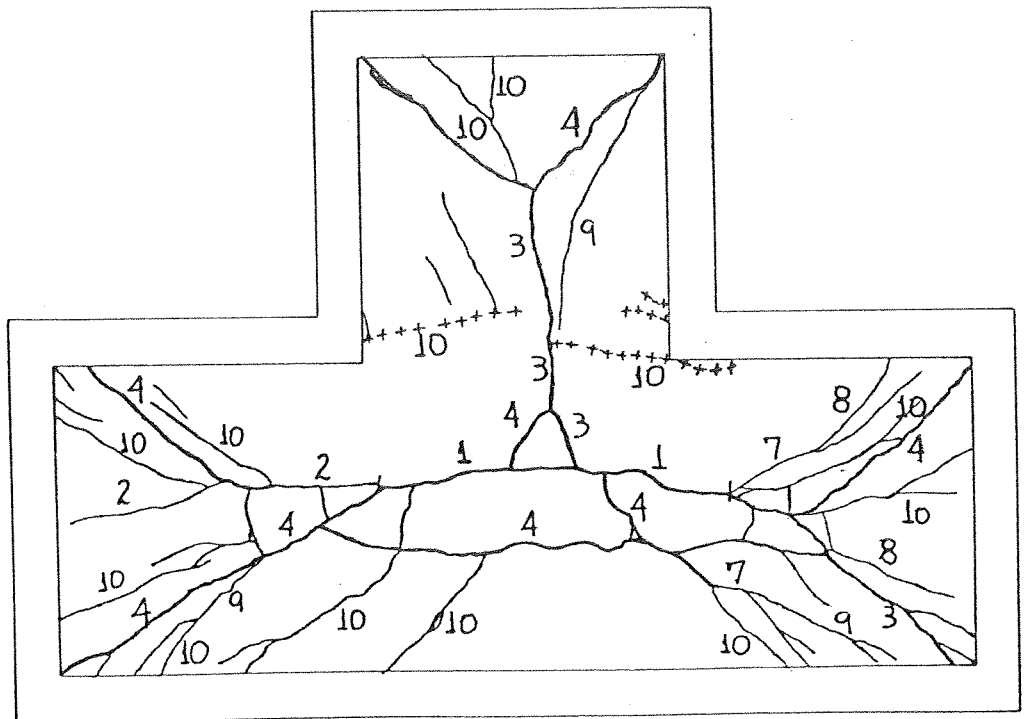
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.14 - Configuração de ruína da laje S3L1



VISTA DA FACE SUPERIOR

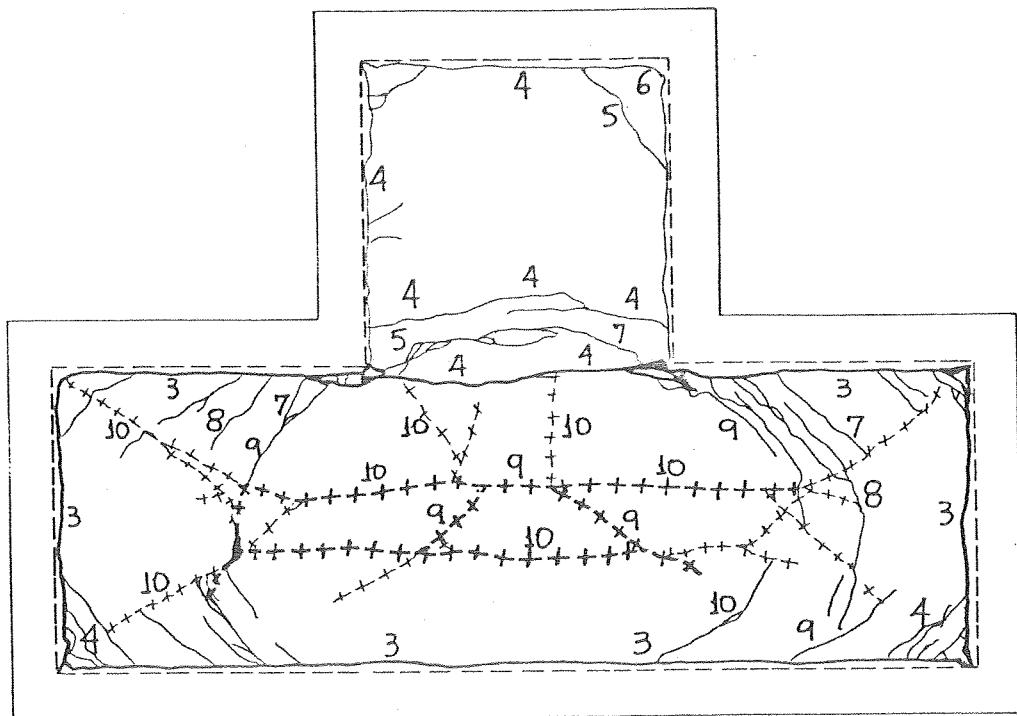
———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

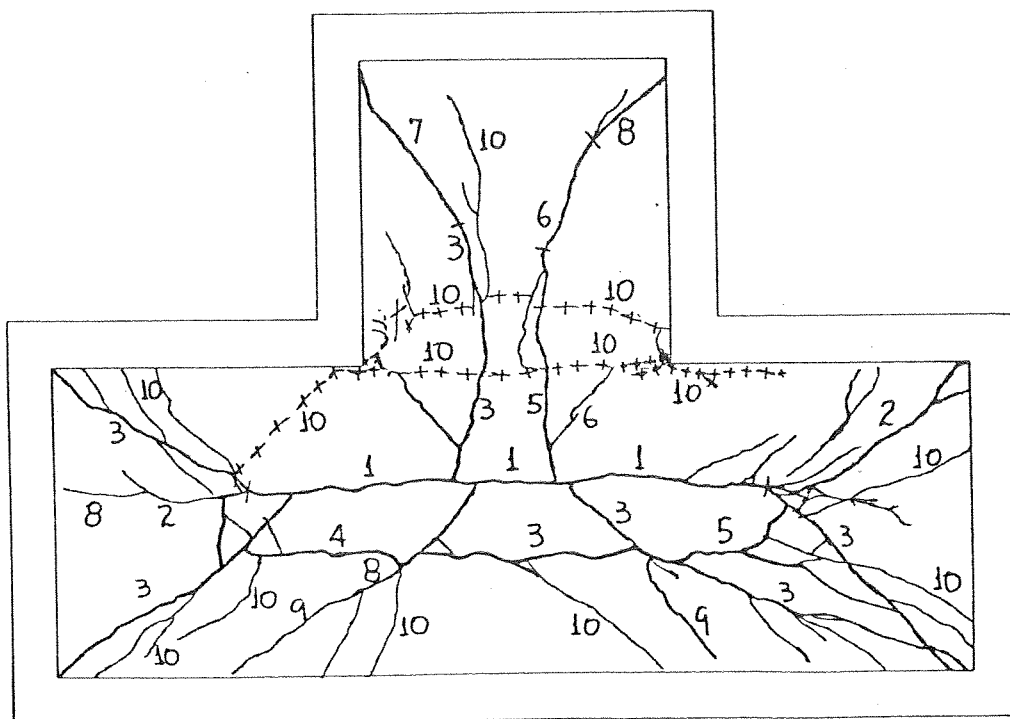
FIGURA 5.15- Configuração de ruína da laje S3L2





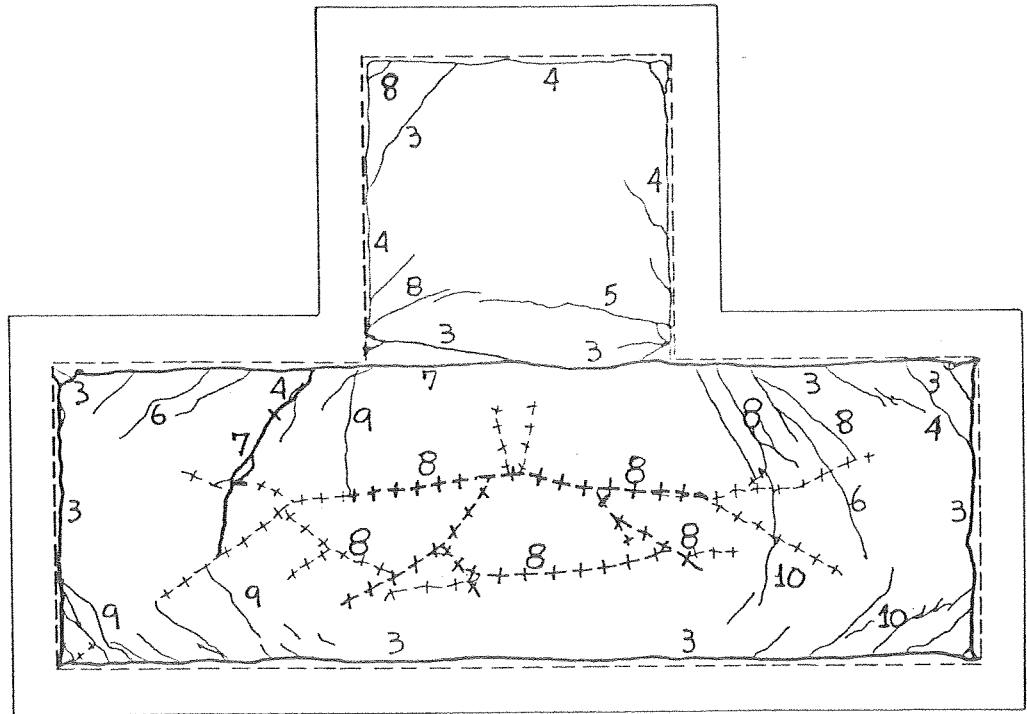
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



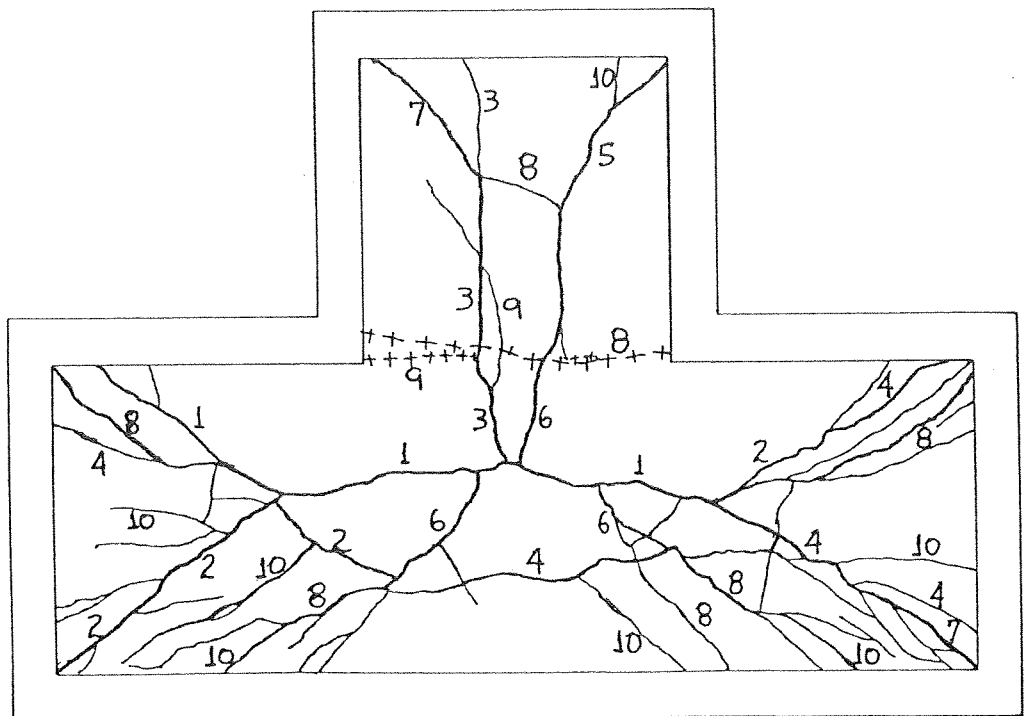
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.16- Configuração de ruína da laje S3L3



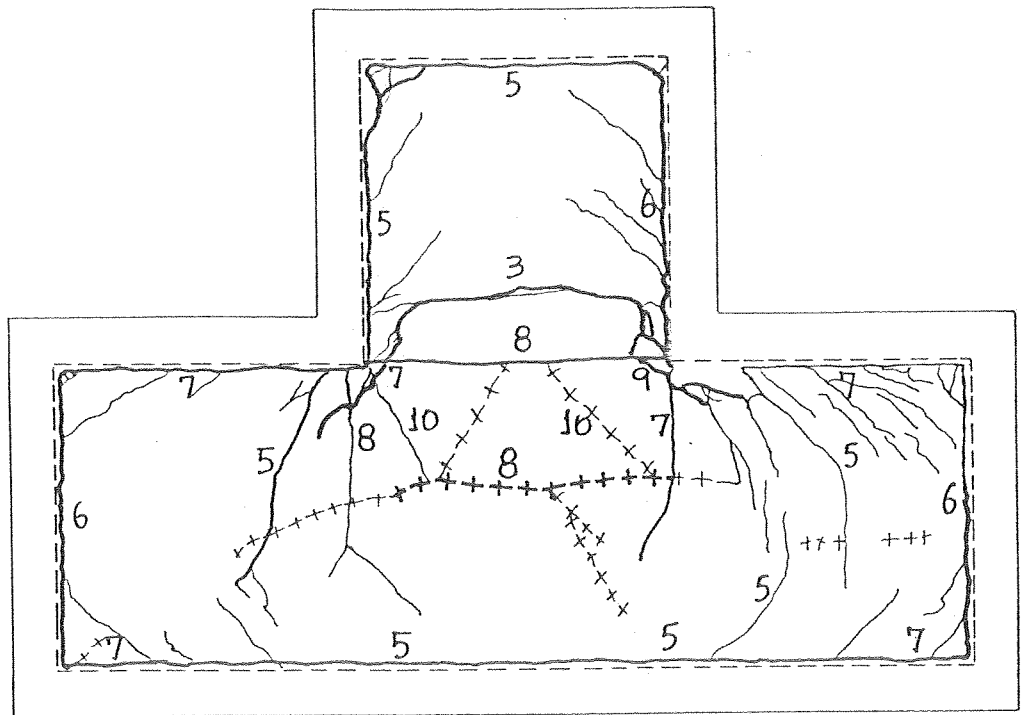
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



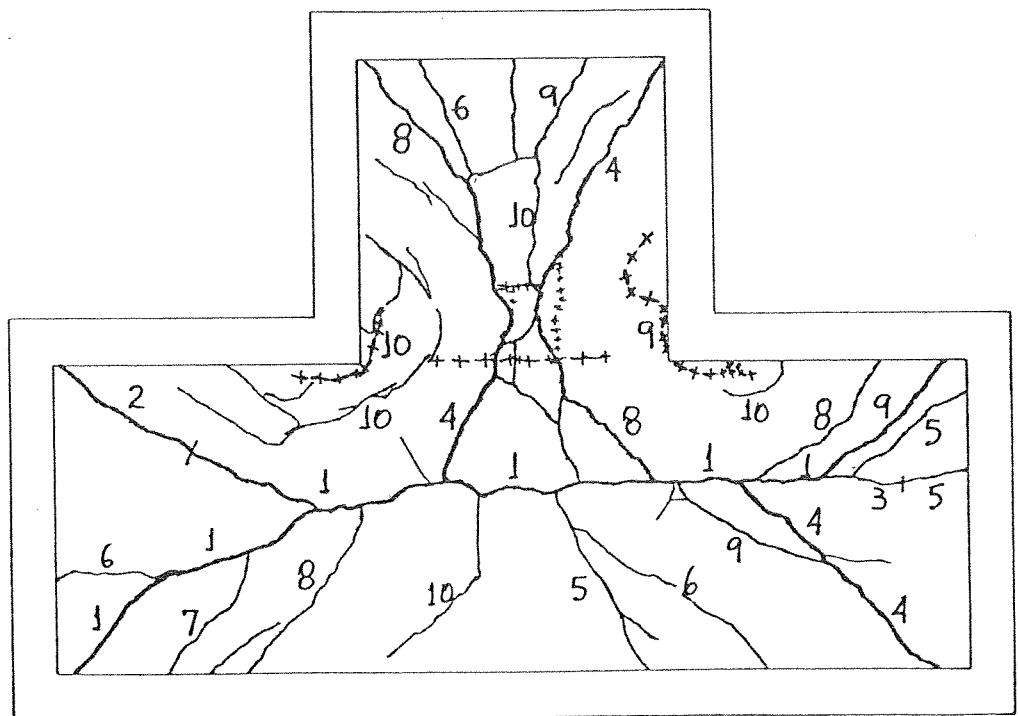
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.17- Configuração de ruína da laje S3L4



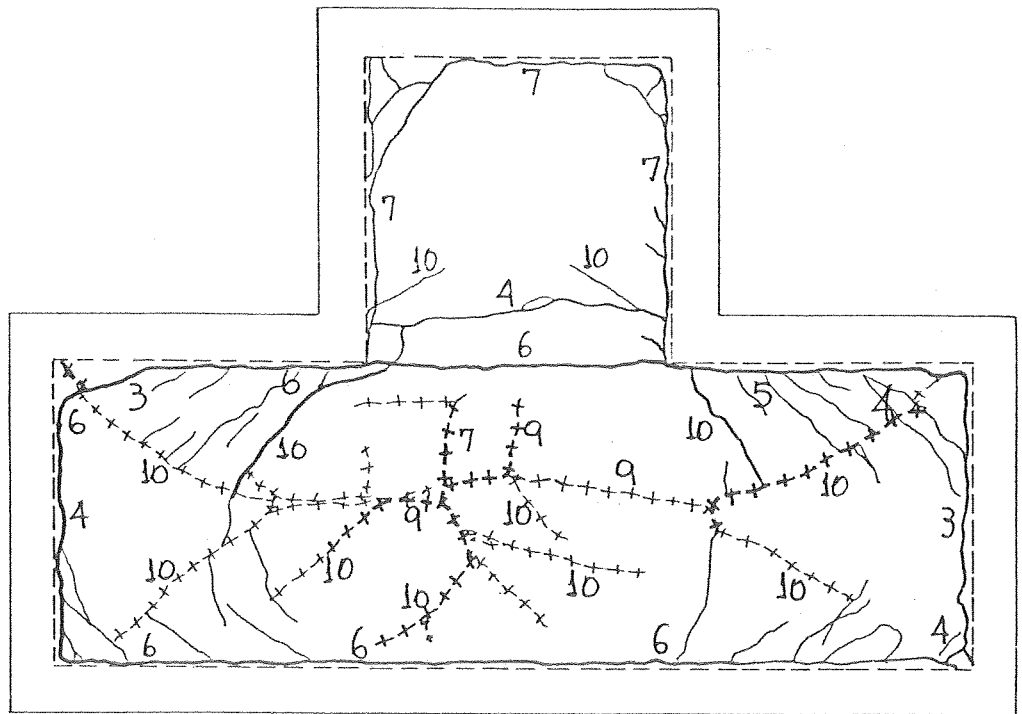
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



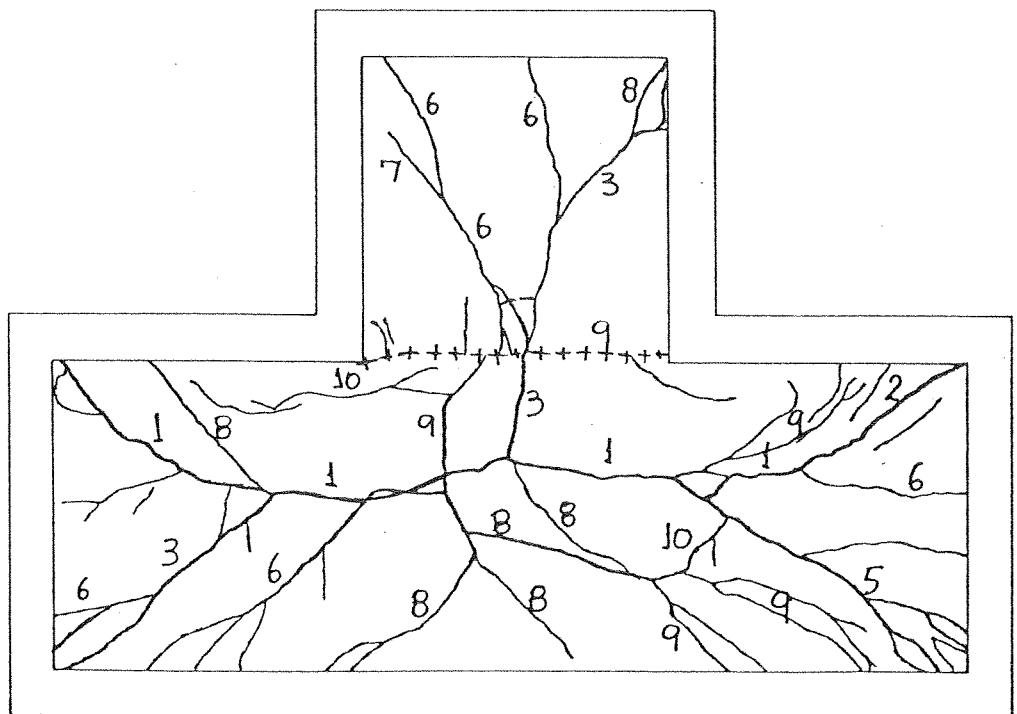
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.18- Configuração de ruína da laje S4L1



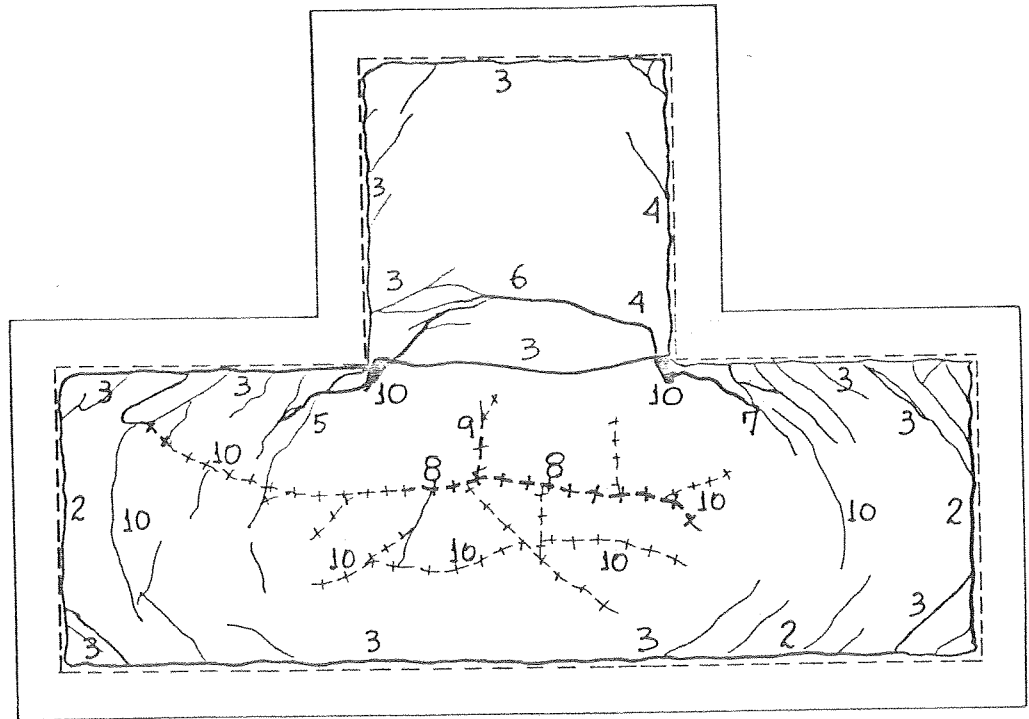
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



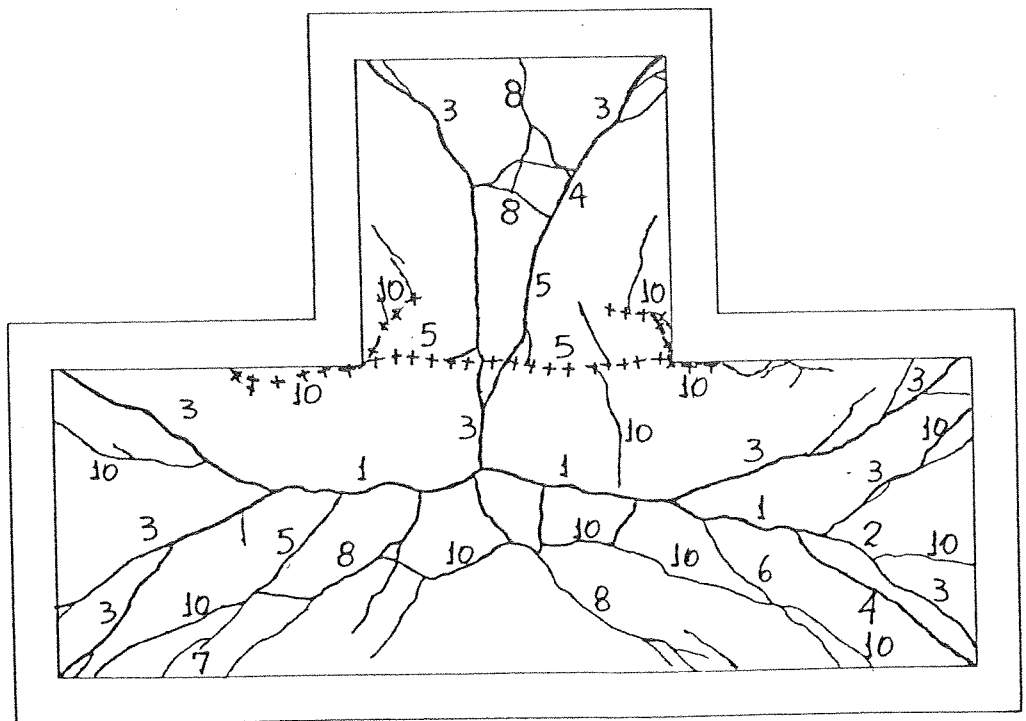
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.19- Configuração de ruína da laje S4L2



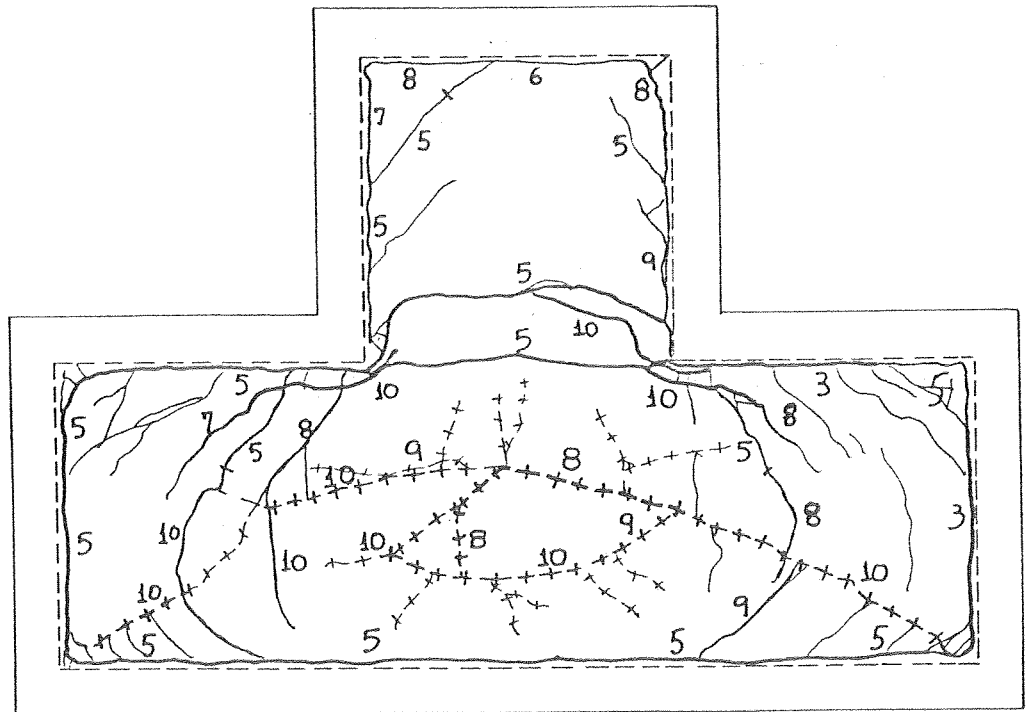
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



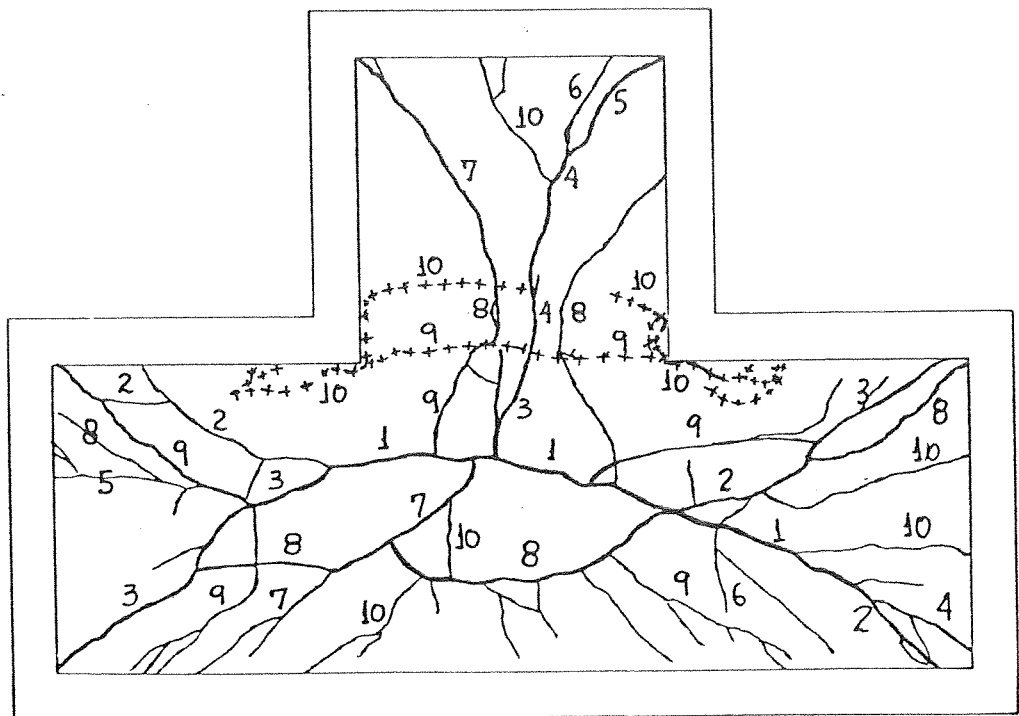
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.20- Configuração de ruína da laje S4L3



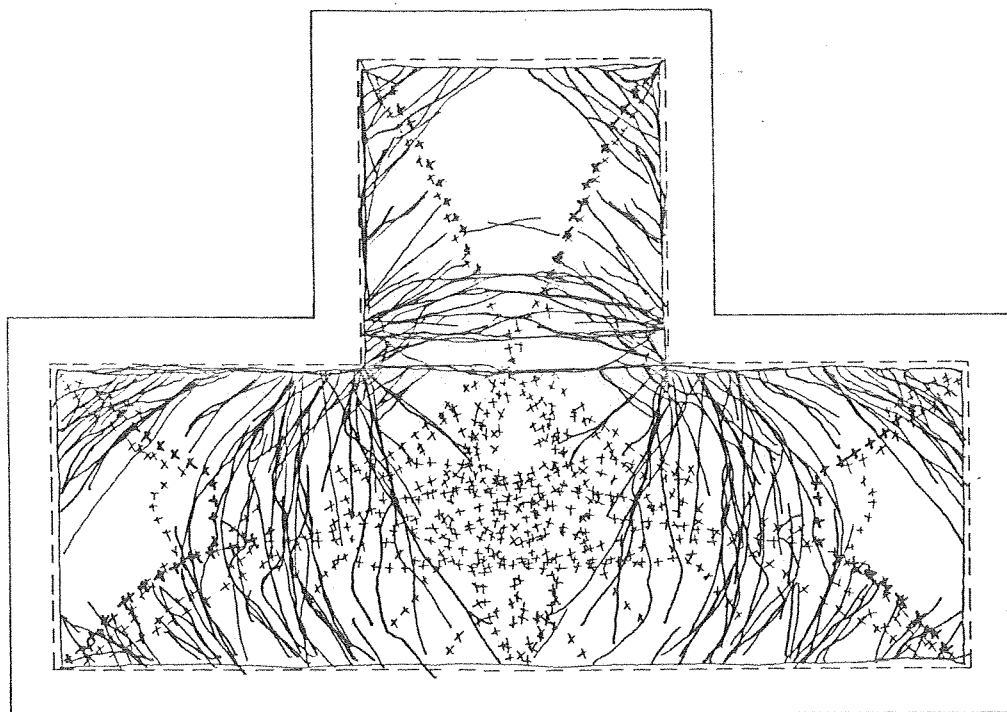
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



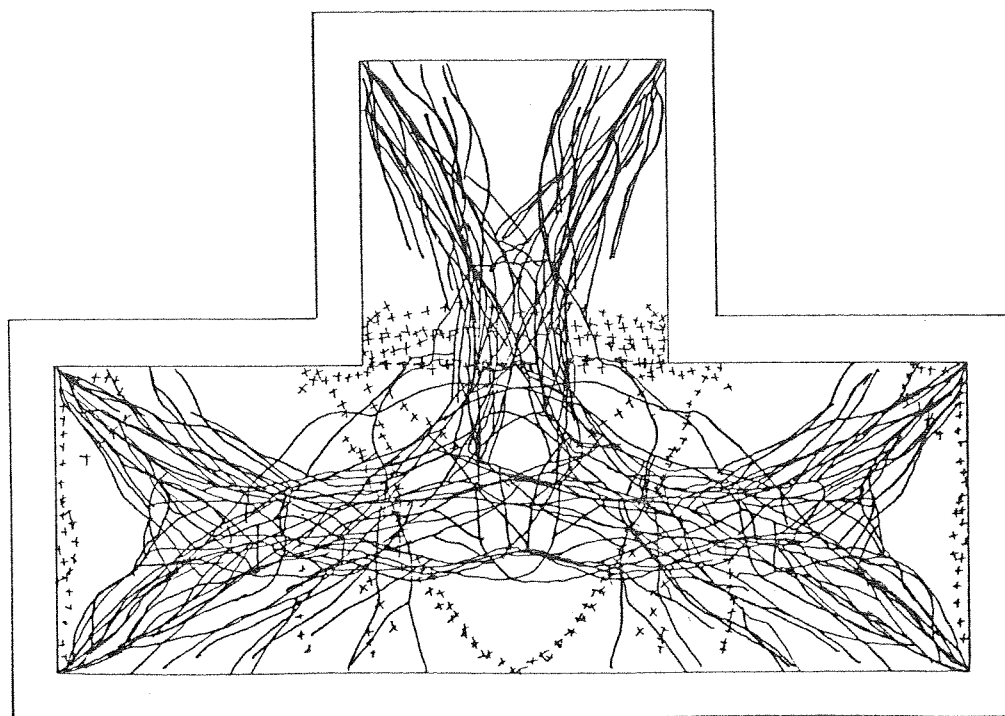
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.21 - Configuração de ruína da laje S4L4



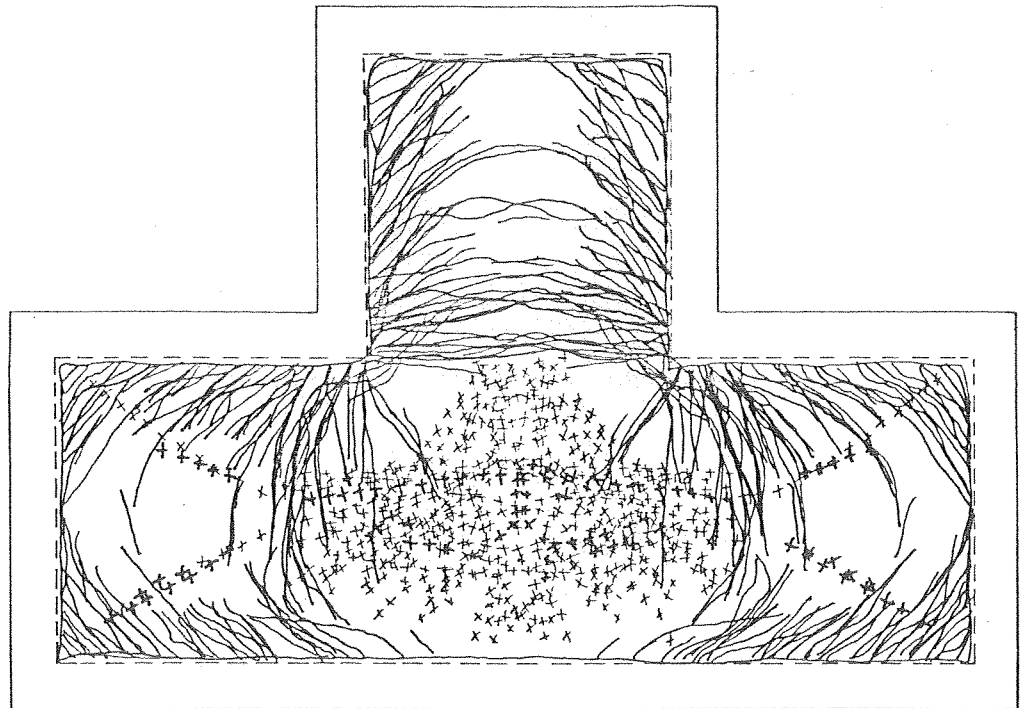
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



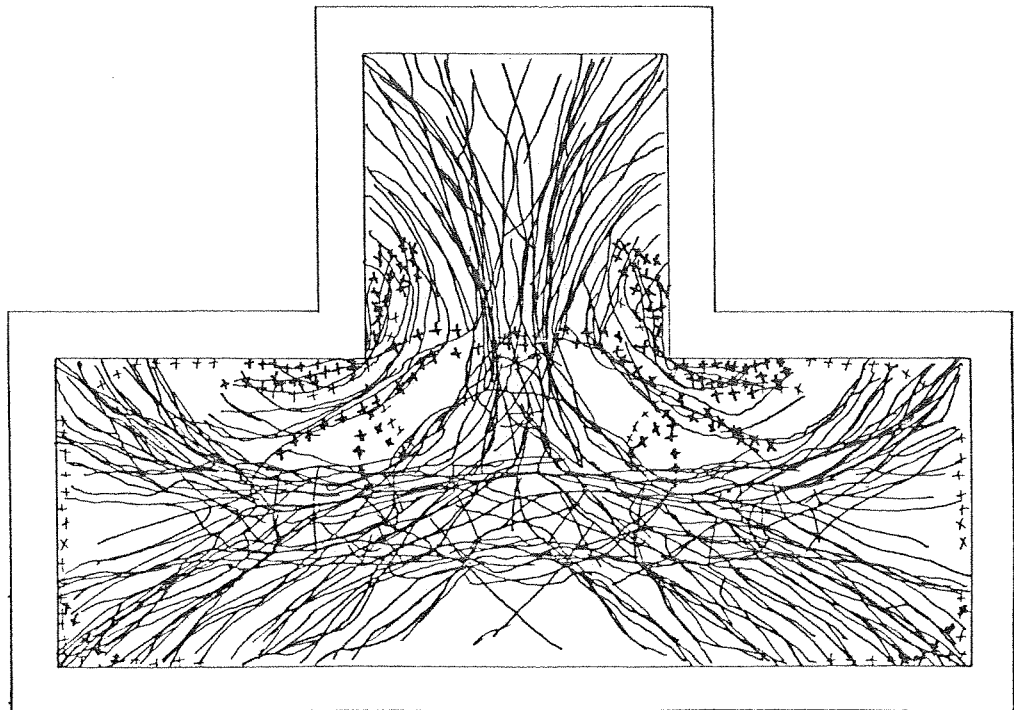
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.22 - Superposição das configurações da série S1



VISTA DA FACE SUPERIOR

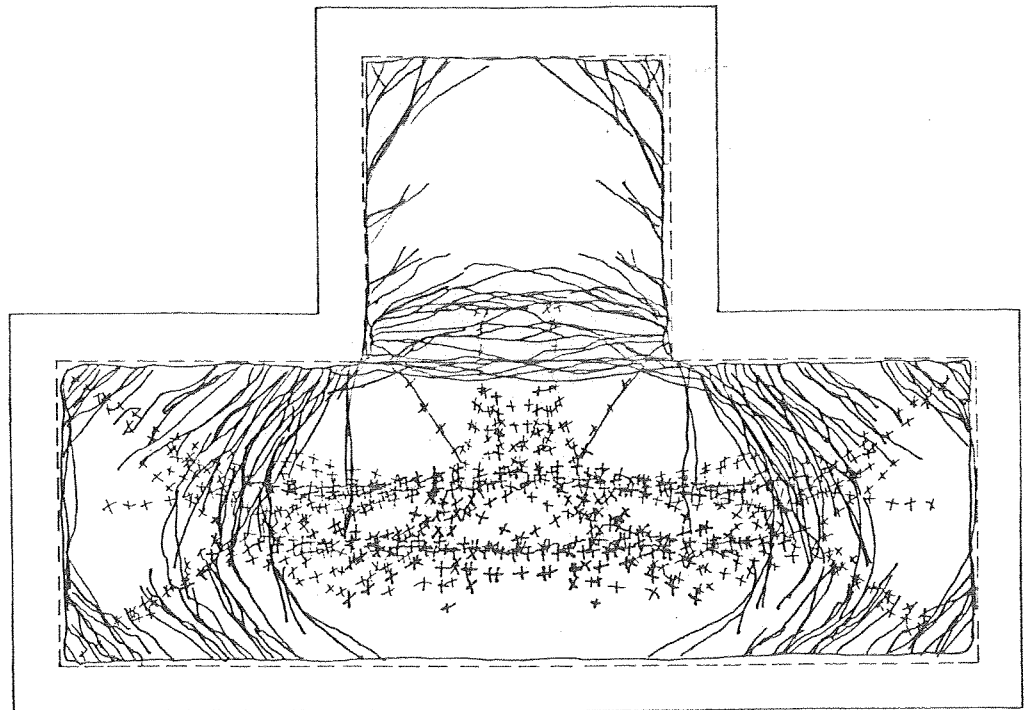
———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE  
 ESMAGAMENTO



PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

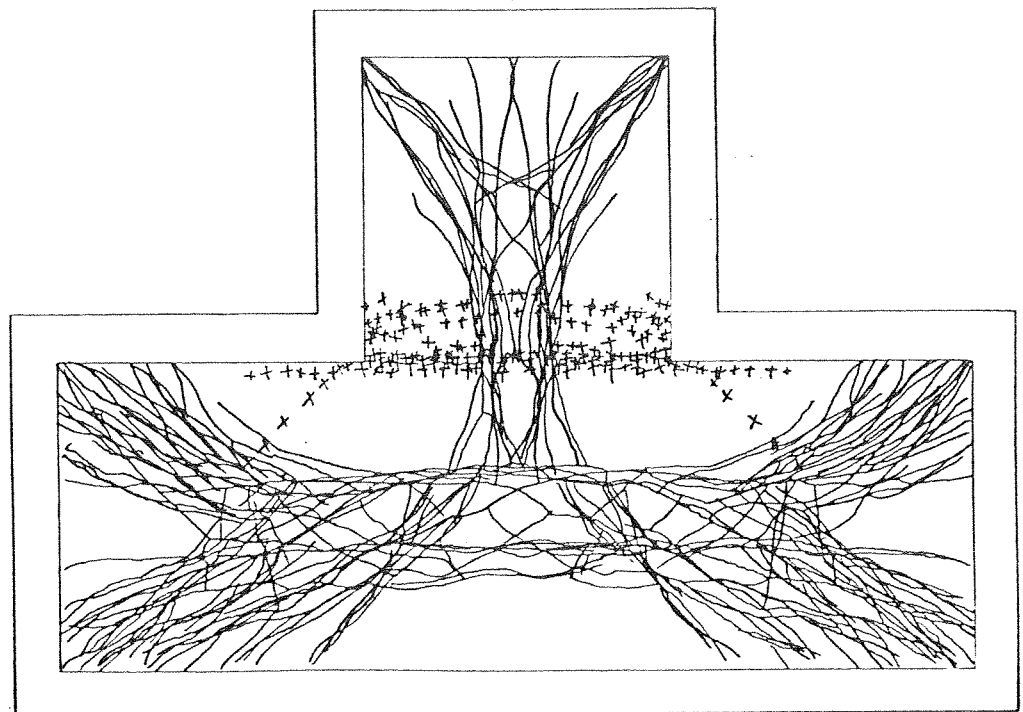
FIGURA 5.23 - Superposição das configurações da série S2





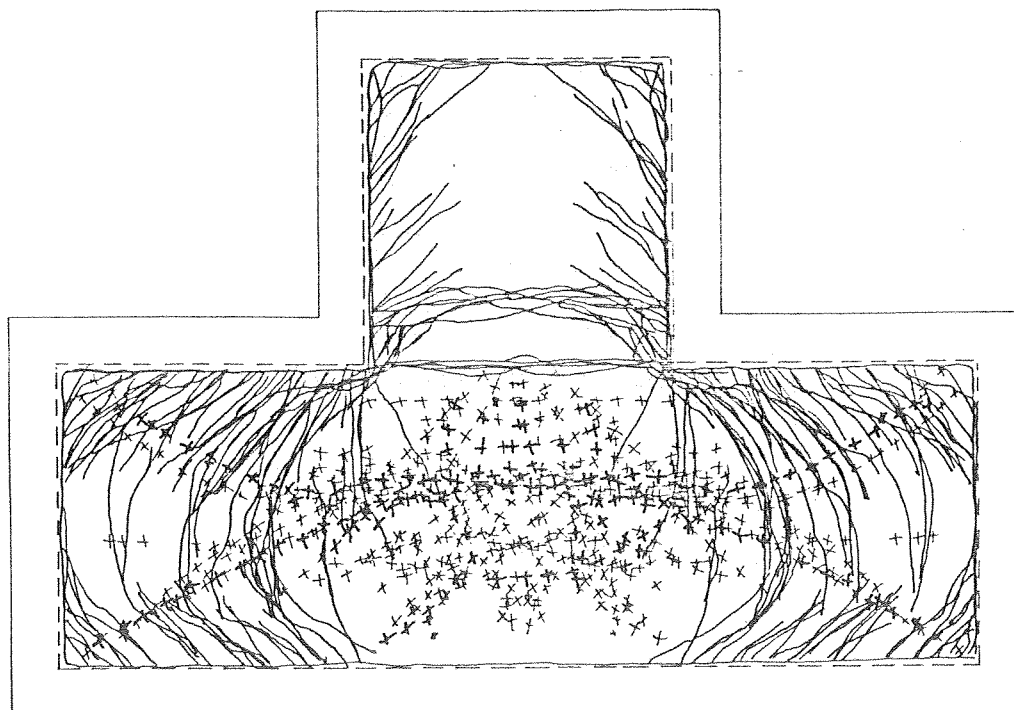
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE  
 ESMAGAMENTO



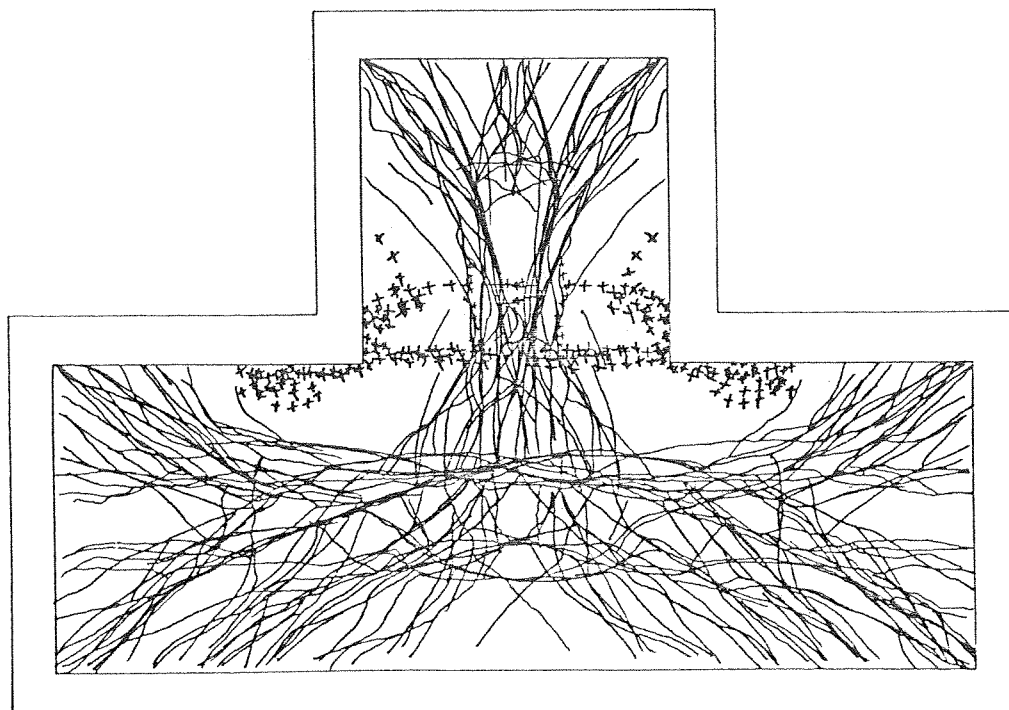
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.24 - Superposição das configurações da série S3



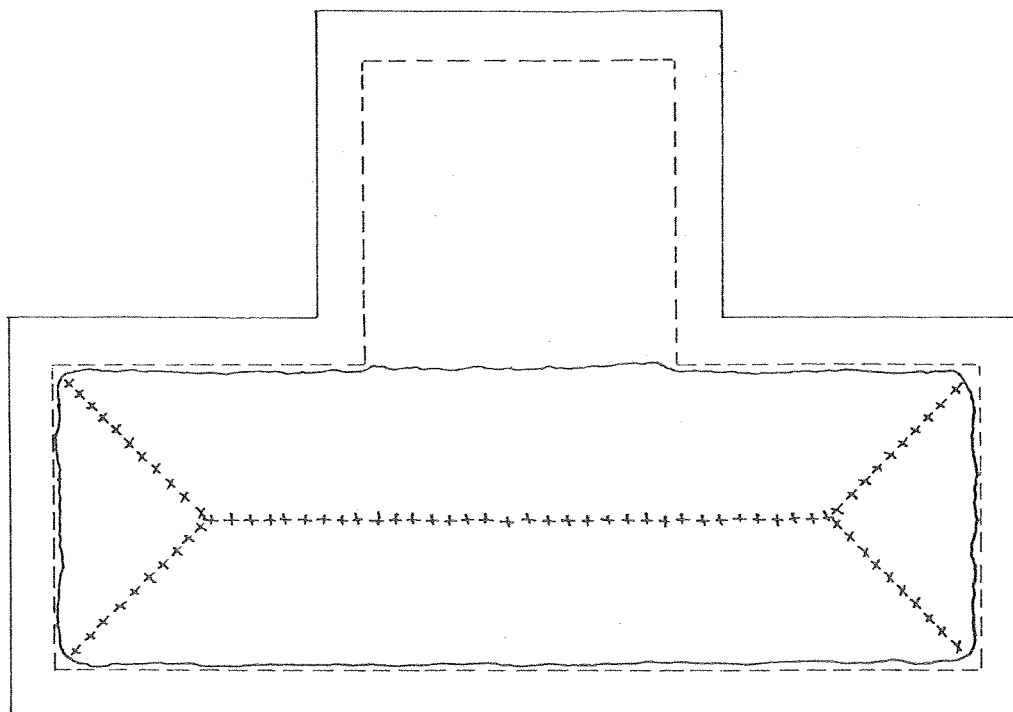
VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
 ++++++ LINHAS DE  
 ESMAGAMENTO



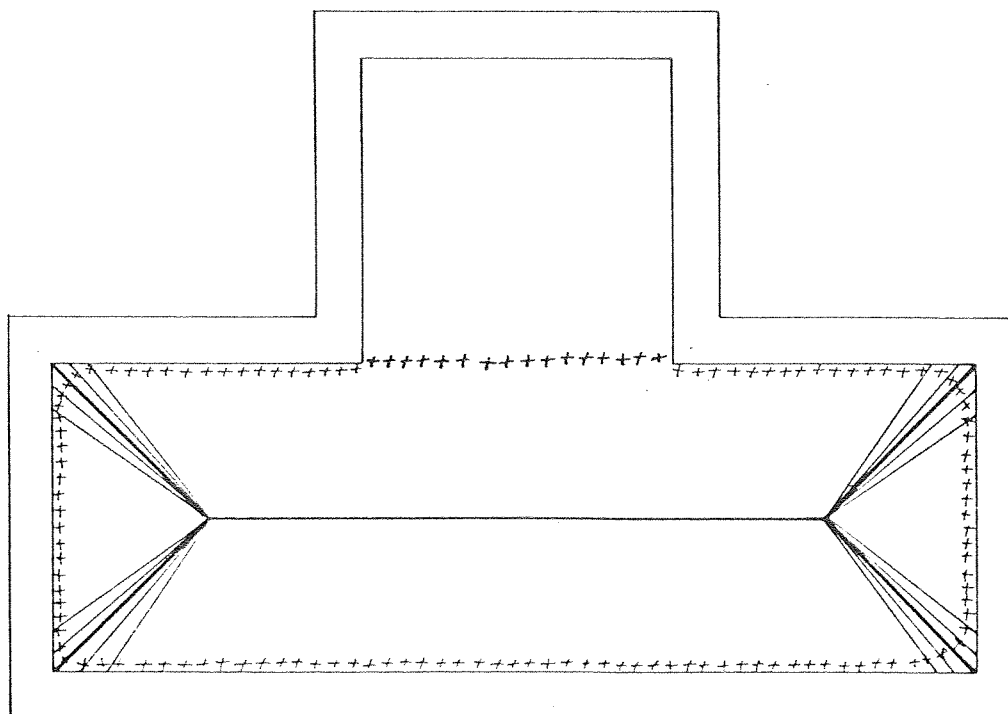
PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.25- Superposição das configurações da série S4



VISTA DA FACE SUPERIOR

———— FISSURAS  
+++++ LINHAS DE ESMAGAMENTO



PROJEÇÃO DA FACE INFERIOR

FIGURA 5.26- Configuração simplificada de ruína

TABELA 5.3 - Progresso da fissuração na série S1

| NÚMERO<br>DA<br>FISSURA | LAJE S1L1               |         | LAJE S1L2               |         | LAJE S1L3               |         | LAJE S1L4               |         |
|-------------------------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|
|                         | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm |
| 1                       | 1.78                    | 3       | 1.57                    | 3       | 1.65                    | 3       | 1.49                    | 3       |
| 2                       | 2.08                    | 5       | 1.88                    | 4       | 2.07                    | 5       | 1.95                    | 6       |
| 3                       | 2.41                    | 6       | 2.19                    | 4       | 2.36                    | 7       | 2.28                    | 9       |
| 4                       | 2.73                    | 7       | 2.58                    | 6       | 2.59                    | 8       | 2.51                    | 11      |
| 5                       | 3.07                    | 10      | 2.91                    | 7       | 3.06                    | 10      | 2.78                    | 13      |
| 6                       | 3.41                    | 11      | 3.09                    | 8       | 3.35                    | 12      | 3.25                    | 17      |
| 7                       | 3.86                    | 14      | 3.44                    | 9       | 3.69                    | 16      | 3.58                    | 20      |
| 8                       | 4.08                    | 15      | 3.82                    | 14      | 4.09                    | 23      | 3.97                    | 23      |
| 9                       | 4.47                    | 18      | 4.19                    | 16      | 4.27                    | 25      | 4.44                    | 27      |
| 10                      | 4.72                    | 22      | 4.39                    | 18      | 4.61                    | 30      | 4.62                    | 28      |
| 11                      | 5.09                    | 24      | 4.95                    | 25      | 5.07                    | 39      | 5.06                    | 33      |
| 12                      | 5.30                    | 24      | 5.31                    | 28      | 5.29                    | 50      | 5.34                    | 41      |
| 13                      | 5.65                    | 36      | 5.73                    | 33      | -                       | -       | -                       | -       |
| 14                      | -                       | -       | 6.20                    | 43      | -                       | -       | -                       | -       |
| 15                      | -                       | -       | 6.43                    | 51      | -                       | -       | -                       | -       |

TABELA 5.4 - Progresso da fissuração na série S2

| NÚMERO<br>DA<br>FISSURA | LAJE S2L1               |         | LAJE S2L2               |         | LAJE S2L3               |         | LAJE S2L4               |         |
|-------------------------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|
|                         | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm |
| 1                       | 3.96                    | 3.08    | 4.30                    | 2.62    | 3.95                    | 2.76    | 3.69                    | 2.99    |
| 2                       | 4.21                    | 6.75    | 4.51                    | 3.45    | 4.32                    | 5.05    | 4.10                    | 6.41    |
| 3                       | 4.43                    | 7.28    | 4.72                    | 3.76    | 4.59                    | 7.02    | 4.42                    | 9.00    |
| 4                       | 4.90                    | 10.02   | 5.06                    | 5.97    | 4.91                    | 10.59   | 4.67                    | 12.65   |
| 5                       | 5.10                    | 12.13   | 5.40                    | 10.02   | 5.17                    | 14.10   | 4.85                    | 16.54   |
| 6                       | 5.53                    | 13.53   | 5.77                    | 13.04   | 5.49                    | 19.50   | 5.25                    | 20.19   |
| 7                       | 5.71                    | 14.37   | 5.94                    | 14.44   | 5.88                    | 22.20   | 5.59                    | 31.00   |
| 8                       | 6.15                    | 17.68   | 6.17                    | 20.10   | 6.08                    | 28.50   | -                       | -       |
| 9                       | 6.31                    | 27.05   | 6.42                    | 26.03   | 6.23                    | 32.72   | -                       | -       |
| 10                      | 6.70                    | 30.90   | 6.76                    | 31.25   | 6.59                    | 40.40   | -                       | -       |
| 11                      | 7.06                    | 41.62   | -                       | -       | 7.00                    | 49.40   | -                       | -       |
| 12                      | 7.44                    | 45.88   | -                       | -       | -                       | -       | -                       | -       |

TABELA 5.5 - Progresso da fissuração na série S3

| NÚMERO<br>DA<br>FISSURA | LAJE S3L1               |         | LAJE S3L2               |         | LAJE S3L3               |         | LAJE S3L4               |         |
|-------------------------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|
|                         | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm |
| 1                       | 2.92                    | 1.50    | 3.05                    | 1.46    | 2.87                    | 1.54    | 3.05                    | 1.51    |
| 2                       | 3.18                    | 1.97    | 3.31                    | 1.94    | 3.02                    | 1.86    | 3.33                    | 2.58    |
| 3                       | 3.42                    | 2.26    | 3.54                    | 2.97    | 3.22                    | 2.46    | 3.56                    | 4.30    |
| 4                       | 3.61                    | 2.70    | 3.69                    | 7.17    | 3.73                    | 8.07    | 3.79                    | 7.07    |
| 5                       | 3.87                    | 3.02    | 3.88                    | 8.75    | 3.99                    | 8.85    | 4.00                    | 8.71    |
| 6                       | 4.07                    | 6.47    | 4.11                    | 10.23   | 4.26                    | 9.60    | 4.25                    | 10.14   |
| 7                       | 4.43                    | 9.78    | 4.42                    | 12.26   | 4.41                    | 13.53   | 4.49                    | 11.79   |
| 8                       | 4.49                    | 10.29   | 4.71                    | 14.12   | 4.57                    | 19.20   | 4.82                    | 22.70   |
| 9                       | 4.91                    | 12.54   | 4.88                    | 17.04   | 4.76                    | 24.85   | 5.06                    | 24.72   |
| 10                      | 5.14                    | 19.58   | 4.99                    | 23.66   | 4.96                    | 30.00   | 5.16                    | 25.90   |

TABELA 5.6 - Progresso da fissuração na série S4

| NÚMERO<br>DA<br>FISSURA | LAJE S4L1               |         | LAJE S4L2               |         | LAJE S4L3               |         | LAJE S4L4               |         |
|-------------------------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|-------------------------|---------|
|                         | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm | q<br>tf/cm <sup>2</sup> | a<br>mm |
| 1                       | 2.61                    | 1.21    | 2.95                    | 1.33    | 3.22                    | 1.70    | 2.53                    | 0.99    |
| 2                       | 3.05                    | 1.72    | 3.22                    | 1.69    | 3.38                    | 2.08    | 3.04                    | 1.60    |
| 3                       | 3.29                    | 2.08    | 3.47                    | 2.18    | 3.62                    | 5.70    | 3.31                    | 2.08    |
| 4                       | 3.58                    | 2.61    | 3.70                    | 3.52    | 3.78                    | 7.10    | 3.54                    | 2.58    |
| 5                       | 4.00                    | 4.87    | 3.92                    | 4.20    | 4.01                    | 10.30   | 3.85                    | 6.84    |
| 6                       | 4.23                    | 6.09    | 4.24                    | 9.01    | 4.23                    | 13.13   | 4.10                    | 7.27    |
| 7                       | 4.46                    | 8.02    | 4.42                    | 10.53   | 4.40                    | 14.21   | 4.36                    | 9.89    |
| 8                       | 4.69                    | 10.45   | 4.60                    | 12.33   | 4.78                    | 20.14   | 4.66                    | 16.69   |
| 9                       | 5.04                    | 15.21   | 5.10                    | 24.33   | 4.98                    | 21.57   | 4.95                    | 21.89   |
| 10                      | 5.20                    | 17.02   | 5.53                    | 36.03   | 5.21                    | 30.93   | 5.22                    | 34.75   |

## 5.2 - RESULTADOS DOS ENSAIOS ACESSÓRIOS

Seguem-se os resultados dos ensaios acessórios, ou seja, as características mecânicas do micro-concreto e das armaduras, e também os valores experimentais dos momentos de plastificação.

Esses valores experimentais dos momentos de plastificação foram obtidos nos ensaios de faixas bi-apoiadas, as quais foram divididas em cinco grupos, cada um deles moldado e ensaiado na mesma ocasião. O resumo das características de cada grupo de faixas é apresentado na tabela 5.7, onde  $m_x$  refere-se ao momento de plastificação positivo na direção do vão menor da mesa do T,  $m'_x$  ao correspondente momento negativo, e assim sucessivamente, conforme já foi apresentado.

TABELA 5.7 - Resumo das características de cada grupo de faixas

| FAIXA   | SÉRIE   | ESPÉCIE | EXTENSÃO DA ARMADURA NEGATIVA | PROCEDÊNCIA DAS ARMADURAS   |
|---------|---------|---------|-------------------------------|-----------------------------|
| GRUPO 1 | S1 e S2 | $m_x$   | TOTAL                         | LOTE 1<br>( $\phi$ 1,26 mm) |
|         |         | $m'_x$  |                               |                             |
| GRUPO 2 |         | $m_y$   |                               |                             |
|         |         | $m'_y$  |                               |                             |
| GRUPO 3 | S3 e S4 | $m_x$   | TOTAL                         | LOTE 2<br>( $\phi$ 1,23 mm) |
|         |         | $m'_x$  |                               |                             |
| GRUPO 4 |         | $m_y$   |                               |                             |
|         |         | $m'_y$  |                               |                             |
| GRUPO 5 |         | $m_x$   | SUPRIMIDA                     |                             |
|         |         | $m_y$   |                               |                             |

### 5.2.1 - Características mecânicas do micro-concreto

As resistências à compressão dos corpos de prova cilíndricos com 5cm de diâmetro e 10cm de altura, para todos os modelos e para todos os grupos de faixas, são apresentadas na tabela 5.8. Como pode ser notado, a cada ensaio de modelos ou de grupo de faixas correspondem de 5 a 12 corpos de prova, apresentando-se também a resistência média correspondente a cada ensaio. Os resultados dos 200 corpos de prova, apresentados na tabela 5.8, apontaram uma resistência média à compressão, aos 28 dias,

$$f_{c28} = 272\text{kgf/cm}^2$$

Para se avaliar a resistência do micro-concreto à tração, foram realizados ensaios de compressão diametral. Em cada grupo de faixas, foram ensaiados de 8 a 12 corpos de prova, cujos resultados encontram-se na tabela 5.9, onde se apresentam também os valores médios de cada grupo. Os resultados dos 48 corpos de prova apontaram uma resistência média à tração, aos 28 dias,

$$f_{ct28} = 26\text{kgf/cm}^2$$

O diagrama tensão-deformação indicado na figura 5.27 foi obtido medindo-se deformações nos ensaios de compressão de 18 corpos de prova, correspondentes, em conjuntos de 3, a cada um dos modelos S3L1, S3L2, S3L3, S3L4 e S2L4, sendo os 3 restantes correspondentes ao grupo 5 de faixas. Esse diagrama apresenta, na origem, um módulo de deformação

$$E_o = 265\text{tf/cm}^2$$

TABELA 5.8 - Resistência do micro-concreto à compressão (kgf/cm<sup>2</sup>)

| ENSAIO                          |         | RESISTÊNCIAS DOS CORPOS DE PROVA $f_{c,j,i}$ |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | $f_{c,j}$ |
|---------------------------------|---------|----------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| M<br>O<br>D<br>E<br>L<br>O<br>S | S1L1    | 253                                          | 273 | 293 | 313 | 313 | 323 |     |     |     |     |     |     | 295       |
|                                 | S1L2    | 258                                          | 273 | 283 | 288 | 303 |     |     |     |     |     |     |     | 281       |
|                                 | S1L3    | 237                                          | 243 | 248 | 265 | 270 | 275 | 278 | 284 | 286 | 292 | 300 | 303 | 273       |
|                                 | S1L4    | 240                                          | 251 | 263 | 265 | 272 | 274 | 290 | 295 | 302 | 304 | 304 |     | 278       |
|                                 | S2L1    | 187                                          | 188 | 218 | 221 | 223 | 235 | 243 | 262 | 262 | 263 | 284 | 294 | 240       |
|                                 | S2L2    | 189                                          | 194 | 211 | 217 | 220 | 220 | 225 | 226 | 233 | 234 | 253 | 257 | 223       |
|                                 | S2L3    | 190                                          | 203 | 251 | 253 | 265 | 284 | 294 | 298 | 309 | 312 | 324 | 331 | 276       |
|                                 | S2L4    | 234                                          | 241 | 247 | 257 | 260 | 266 | 266 | 274 | 275 | 286 | 301 | 308 | 268       |
|                                 | S3L1    | 191                                          | 232 | 232 | 242 | 251 | 255 | 255 | 257 | 283 | 285 |     |     | 248       |
|                                 | S3L2    | 236                                          | 236 | 242 | 242 | 255 | 255 | 261 | 262 | 274 |     |     |     | 251       |
|                                 | S3L3    | 216                                          | 223 | 224 | 236 | 236 | 242 | 254 | 255 | 267 |     |     |     | 239       |
|                                 | S3L4    | 222                                          | 228 | 229 | 229 | 235 | 236 | 236 | 237 | 241 | 246 | 279 |     | 238       |
|                                 | S4L1    | 350                                          | 351 | 351 | 365 | 370 | 370 | 372 | 373 |     |     |     |     | 363       |
|                                 | S4L2    | 312                                          | 334 | 339 | 344 | 350 | 363 | 382 |     |     |     |     |     | 346       |
|                                 | S4L3    | 313                                          | 314 | 346 | 351 | 377 | 382 |     |     |     |     |     |     | 347       |
|                                 | S4L4    | 315                                          | 334 | 344 | 346 | 346 | 348 | 360 |     |     |     |     |     | 342       |
| F<br>A<br>I<br>X<br>A<br>S      | GRUPO 1 | 210                                          | 218 | 227 | 234 | 237 | 249 | 250 | 263 | 269 | 274 | 278 | 311 | 252       |
|                                 | GRUPO 2 | 278                                          | 286 | 290 | 295 | 296 | 297 | 299 | 300 | 307 | 309 | 310 | 319 | 299       |
|                                 | GRUPO 3 | 217                                          | 261 | 285 | 287 | 293 | 333 | 341 | 351 |     |     |     |     | 296       |
|                                 | GRUPO 4 | 186                                          | 199 | 199 | 208 | 245 | 267 | 293 |     |     |     |     |     | 228       |
|                                 | GRUPO 5 | 216                                          | 219 | 229 | 237 | 241 | 241 | 244 | 245 | 250 | 251 | 258 | 267 | 242       |



TABELA 5.9 - Resistência do micro-concreto à tração (kgf/cm<sup>2</sup>)

| FAIXAS  | RESISTÊNCIAS DOS CORPOS DE PROVA $f_{ctj,i}$ |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | $f_{ctj}$ |
|---------|----------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------|
|         |                                              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |           |
| GRUPO 1 | 25                                           | 28 | 22 | 22 | 23 | 22 | 22 | 21 | 19 | 23 | 18 |    | 22        |
| GRUPO 2 | 30                                           | 27 | 28 | 25 | 25 | 25 | 25 | 27 | 26 | 27 | 23 | 22 | 26        |
| GRUPO 3 | 24                                           | 21 | 24 | 31 | 33 | 30 | 30 | 28 |    |    |    |    | 28        |
| GRUPO 4 | 28                                           | 29 | 30 | 27 | 26 | 32 | 28 | 29 |    |    |    |    | 29        |
| GRUPO 5 | 34                                           | 23 | 25 | 25 | 22 | 26 | 20 | 24 | 26 |    |    |    | 25        |

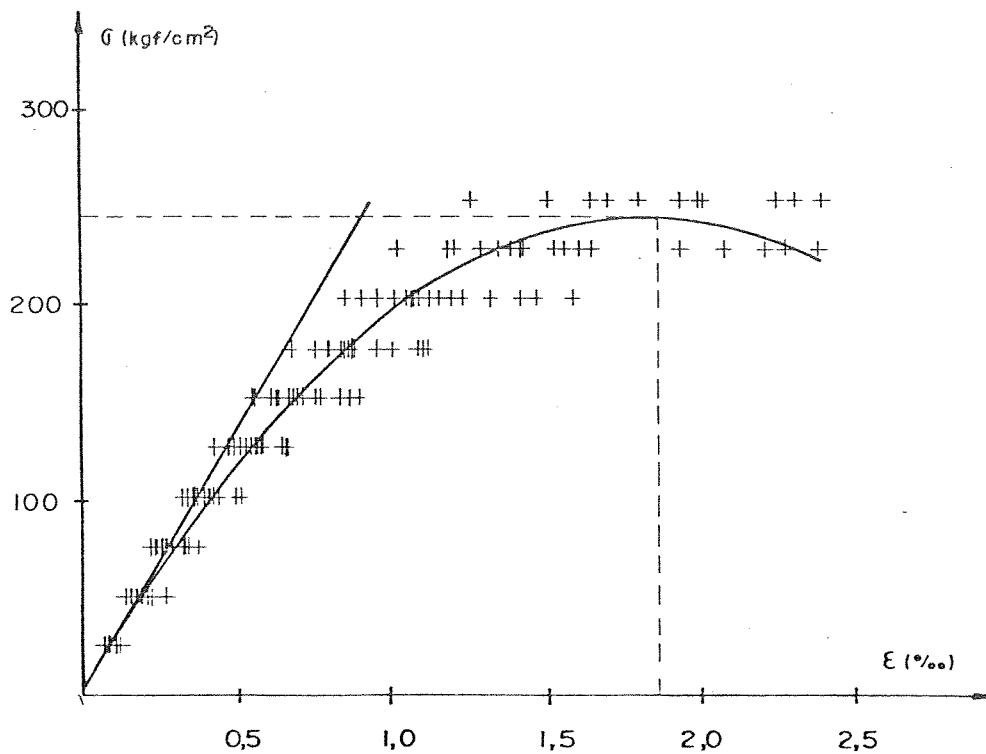


FIGURA 5.27 - Diagrama tensão-deformação do micro-concreto

## 5.2.2 - Características mecânicas das armaduras

As armaduras, constituídas de arame recozido número 18, foram retiradas de dois lotes: lote 1, com diâmetro médio 1,26mm, empregado nas séries S1 e S2, e lote 2, com diâmetro médio 1,23mm, empregado nas séries S3 e S4.

As características mecânicas dessas armaduras, indicadas na tabela 5.10, foram obtidas em ensaios de tração de acordo com o Método Brasileiro MB-4. A resistência de escoamento  $f_y$  indicada é a convencional, correspondente à deformação específica permanente de 0,2%;  $\epsilon_y$  é a deformação no início de escoamento, e  $E_s$  é o módulo de deformação longitudinal na origem.

TABELA 5.10- Características mecânicas das armaduras.

| LOTE   | SÉRIE  | $f_y$<br>tf/cm <sup>2</sup> | $\epsilon_y$<br>mm/m | $E_s$<br>tf/cm <sup>2</sup> |      |
|--------|--------|-----------------------------|----------------------|-----------------------------|------|
| LOTE 1 | S1     | 3,00                        | 4,6                  | 1133                        |      |
|        |        | 2,90                        | 4,3                  | 1233                        |      |
|        |        | 2,84                        | 5,0                  | 950                         |      |
|        | S2     | 2,86                        | 4,8                  | 1029                        |      |
|        |        | 2,94                        | 5,1                  | 971                         |      |
|        |        | 2,86                        | 4,1                  | 1400                        |      |
| LOTE 2 | S3     | 1,73                        | 4,0                  | 857                         |      |
|        |        | 1,68                        | 4,1                  | 800                         |      |
|        |        | 2,28                        | 4,1                  | 1067                        |      |
|        | S4     | 2,29                        | 4,2                  | 1033                        |      |
|        |        | 1,88                        | 5,4                  | 560                         |      |
|        |        | 2,27                        | 4,6                  | 857                         |      |
| MÉDIAS | LOTE 1 | S1 e S2                     | 2,90                 | 4,7                         | 1119 |
|        | LOTE 2 | S3 e S4                     | 2,02                 | 4,4                         | 862  |

Observação - Estas peças resultaram muito pouco resistentes.  
Deveriam ter sido adotadas peças mais armadas.

### 5.2.3 - Resultados dos ensaios das faixas

Nos ensaios das faixas, como nos ensaios dos modelos, as cargas também foram aplicadas em estágios, nos quais foram anotadas as correspondentes cargas e deformações. Na medida das cargas foi usado um dos dinamômetros elétricos empregado nos ensaios dos modelos.

As faixas dos grupos 1 e 2 foram ensaiadas após os modelos das séries S1 e S2, sendo usado portanto um dos dinamômetros empregados até então. Durante as experiências, alguns dinamômetros apresentaram defeitos e outros foram colocados em seus lugares. Por ocasião dos ensaios dos grupos 3, 4 e 5, aquele dinamômetro empregado nos grupos 1 e 2 já havia sido abandonado; usou-se, portanto, um novo dinamômetro.

Tanto o dinamômetro usado nos grupos 1 e 2, como aquele usado nos grupos restantes, foram calibrados com intervalos de carga não inferiores a 250 kgf. Apesar da carga de ruína das faixas não ultrapassar um terço do primeiro intervalo, os resultados foram razoáveis para os grupos 1 e 2, o que, infelizmente, não aconteceu para os grupos 3, 4 e 5; a não linearidade no início da curva tensão-deformação do material desse último dinamômetro fez com que os resultados fugissem completamente do esperado. Esta falha só foi observada tardiamente, impedindo o aproveitamento desses resultados.

Aproveitaram-se, portanto, somente os resultados dos grupos 1 e 2, correspondentes, como já se viu, às séries S1 e S2. Observou-se, nesses ensaios, que ao aparecer a primeira fissura se esgotava a capacidade resistente da faixa; a carga de início de fissuração mantinha-se, por alguns instantes, enquanto se aumentavam as deformações, até que, com o esmagamento da face comprimida, ocorria a ruína da faixa. Esta carga de início de fissuração, que se constituiu também em carga de ruína, foi a que se considerou no cálculo do momento de plastificação da faixa.

A tabela 5.11 apresenta os resultados dos grupos 1 e 2, onde se indicam as resistências médias do concreto à compressão e os resultados correspondentes a cada faixa, a saber: carga de ruína, flecha máxima por ocasião da ruína e momento de plastificação. No final da tabela estão indicados os valores médios relativos aos momentos de plastificação positivos e negativos em cada direção.

Os momentos de plastificação das faixas foram calculados pela expressão

$$m = \frac{P_r}{4b_w} (\ell - e)$$

onde

$P_r$  = carga de ruína

$\ell$  = distância entre as linhas de apoio das faixas (40cm)

$e$  = distância entre as linhas de carga (15cm)

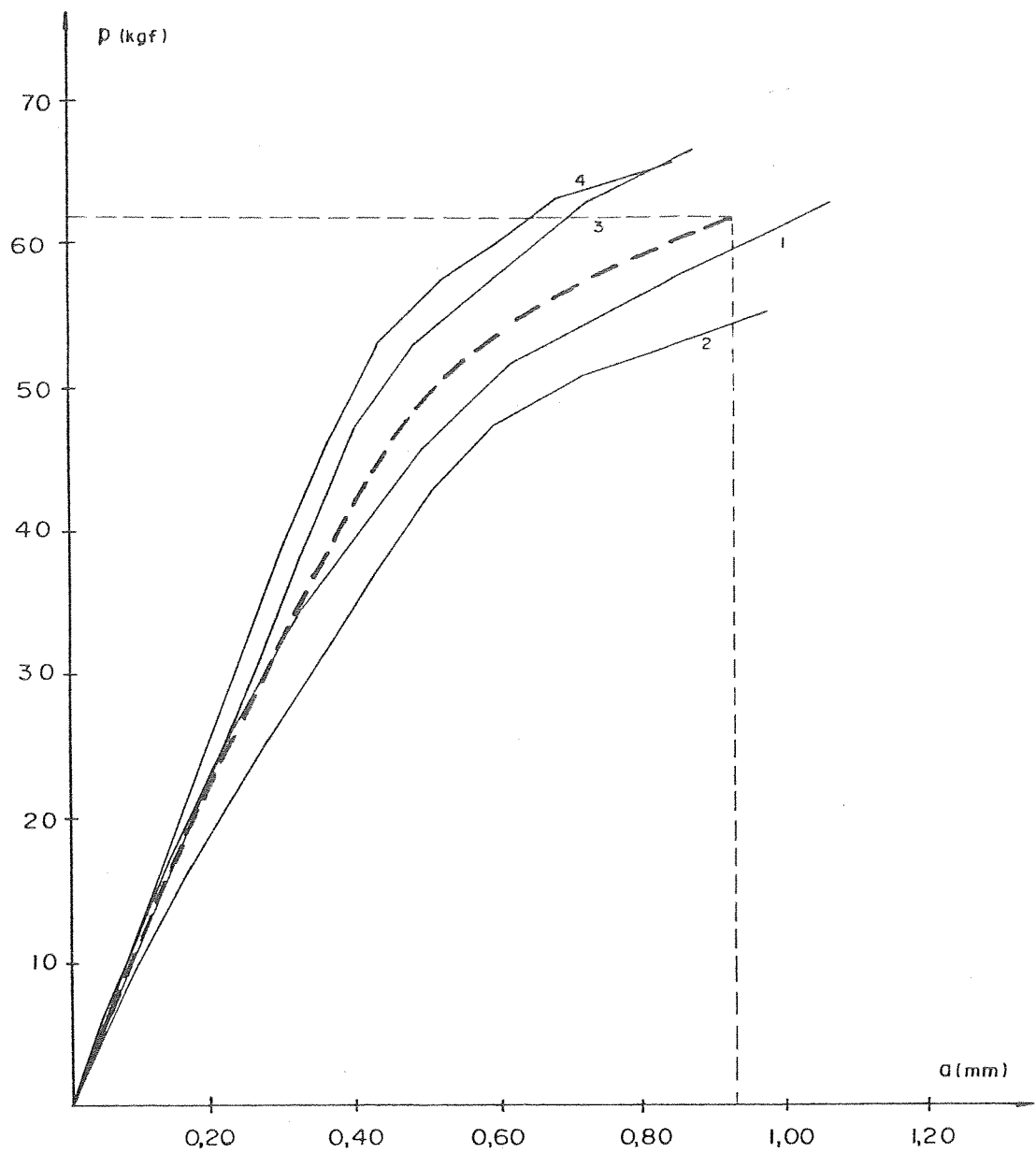
$b_w$  = largura da faixa (10cm)

As figuras 5.28 a 5.31 apresentam os diagramas cargas-flechas das faixas para obtenção de  $m_x$ ,  $m'_x$ ,  $m_y$  e  $m'_y$  respectivamente, e a figura 5.32 as respectivas curvas médias. Ao pé de cada figura, observam-se, também, os respectivos resultados, já apresentados globalmente na tabela 5.11.

Apesar de não se conhecerem os resultados numéricos dos ensaios dos grupos 3, 4 e 5, foi observado que a primeira fissura era seguida, imediatamente, pela ruptura da face comprimida e por rápido crescimento das deformações, mesmo com diminuição da carga aplicada. Nesses ensaios, ficou mais evidente que nos dos grupos 1 e 2 a deficiência das quantidades de armaduras.

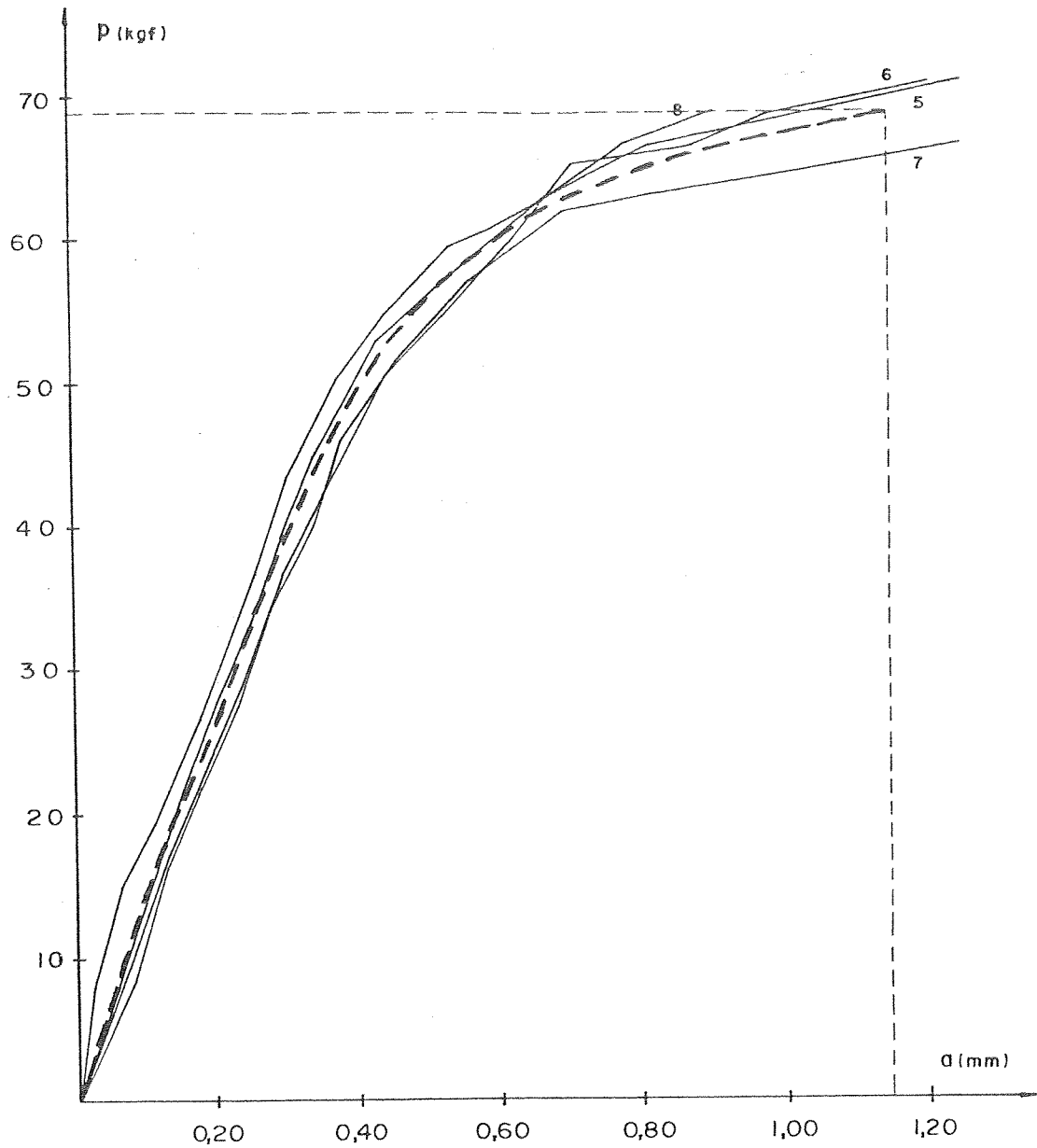
TABELA 5.11 - Resultados das faixas correspondentes as séries S1 e S2

| GRUPO   | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | ESPÉCIE | FAIXA  | $P_r$<br>kgf | $d_r$<br>mm | $m$<br>#cm/m |
|---------|----------------------------------|---------|--------|--------------|-------------|--------------|
| GRUPO 1 | 252                              | $m_x$   | 1      | 62,9         | 1,06        | 3,93         |
|         |                                  |         | 2      | 54,9         | 0,97        | 3,43         |
|         |                                  |         | 3      | 66,4         | 0,87        | 4,15         |
|         |                                  |         | 4      | 65,2         | 0,84        | 4,08         |
|         |                                  | $m'_x$  | 5      | 70,9         | 1,25        | 4,43         |
|         |                                  |         | 6      | 70,9         | 1,20        | 4,43         |
|         |                                  |         | 7      | 66,4         | 1,25        | 4,15         |
|         |                                  |         | 8      | 68,6         | 0,90        | 4,29         |
| GRUPO 2 | 299                              | $m_y$   | 9      | 60,6         | 0,65        | 3,79         |
|         |                                  |         | 10     | 68,6         | 0,68        | 4,29         |
|         |                                  |         | 11     | 67,5         | 0,50        | 4,22         |
|         |                                  |         | 12     | 65,2         | 0,64        | 4,08         |
|         |                                  | $m'_y$  | 13     | 68,6         | 0,92        | 4,29         |
|         |                                  |         | 14     | 62,9         | 0,64        | 3,93         |
|         |                                  |         | 15     | 66,4         | 0,88        | 4,15         |
|         |                                  |         | 16     | 67,5         | 0,78        | 4,22         |
| GRUPO 1 | 252                              | $m_x$   | MÉDIAS | 62,4         | 0,93        | 3,90         |
|         |                                  | $m'_x$  |        | 69,2         | 1,15        | 4,33         |
| GRUPO 2 | 299                              | $m_y$   |        | 65,5         | 0,62        | 4,09         |
|         |                                  | $m'_y$  |        | 66,4         | 0,80        | 4,15         |



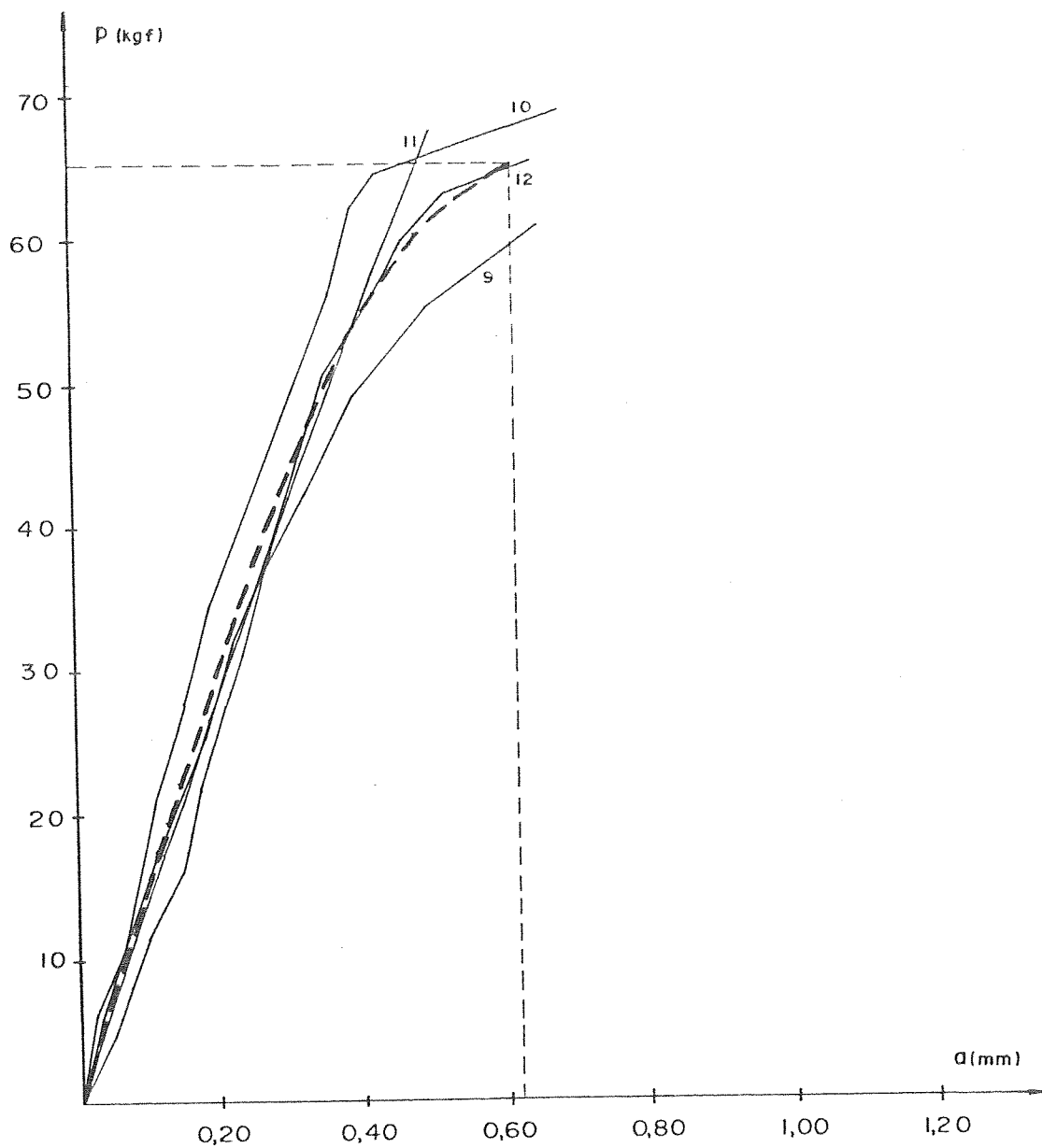
| ESPÉCIE | FAIXA | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | p<br>kgf | a<br>mm | m<br>tfcm/m |
|---------|-------|----------------------------------|----------|---------|-------------|
| $m_x$   | 1     | 252                              | 62,9     | 1,06    | 3,93        |
|         | 2     |                                  | 54,9     | 0,97    | 3,43        |
|         | 3     |                                  | 66,4     | 0,87    | 4,15        |
|         | 4     |                                  | 65,2     | 0,84    | 4,08        |
|         | MÉDIA |                                  | 62,4     | 0,93    | 3,90        |

FIGURA 5.28-Gráficos cargas-flechas na obtenção de  $m_x$  - séries S1 e S2



| ESPÉCIE | FAIXA | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | p<br>kgf | a<br>mm | m<br>tfcm/m |
|---------|-------|----------------------------------|----------|---------|-------------|
| $m'_x$  | 5     | 252                              | 70,9     | 1,25    | 4,43        |
|         | 6     |                                  | 70,9     | 1,20    | 4,43        |
|         | 7     |                                  | 66,4     | 1,25    | 4,15        |
|         | 8     |                                  | 68,6     | 0,90    | 4,29        |
|         | MÉDIA |                                  | 69,2     | 1,15    | 4,33        |

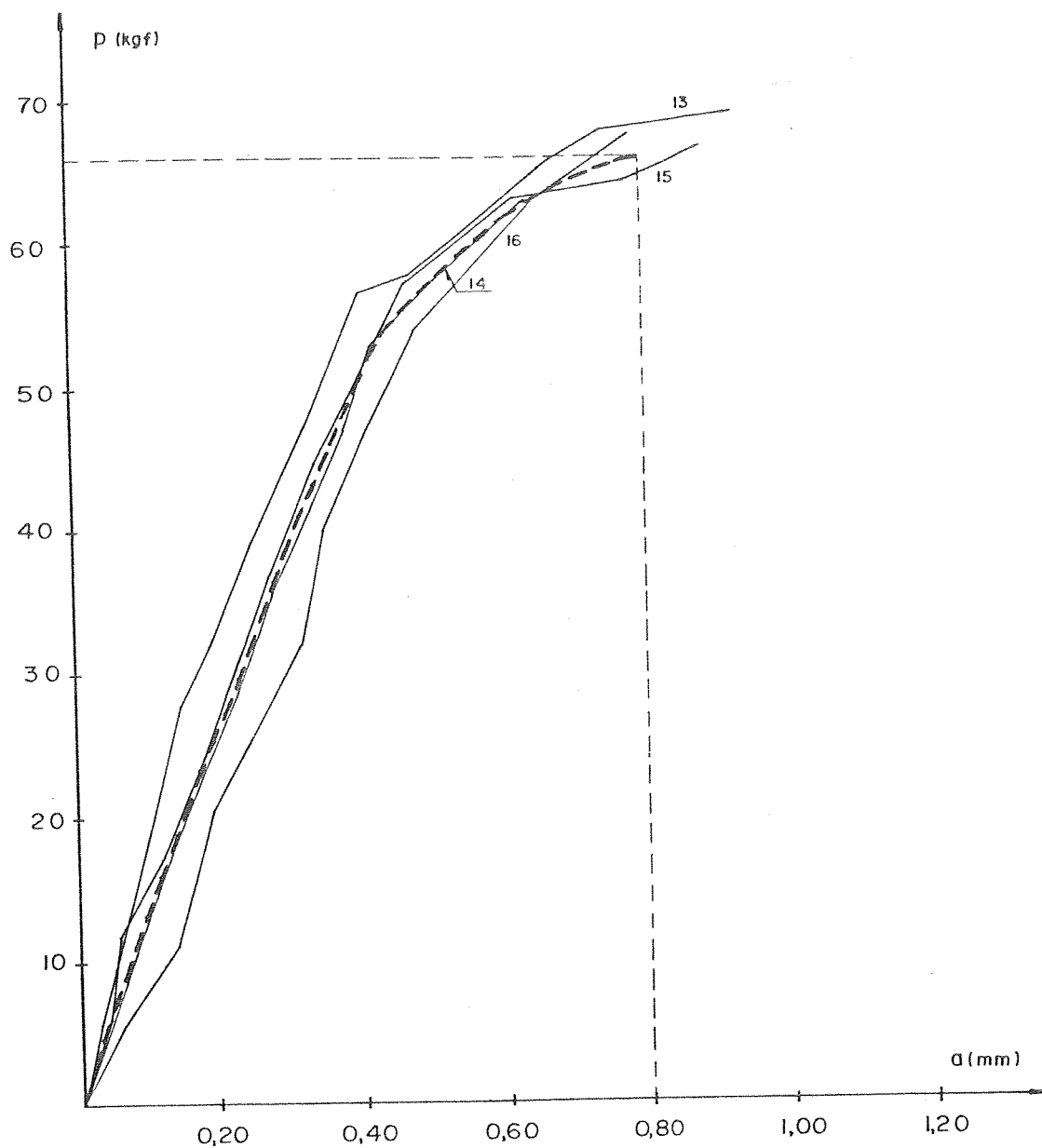
FIGURA 5 29-Gráficos cargas-flechas na obtenção de  $m'_x$  - séries S1 e S2



| ESPÉCIE | FAIXA | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | P<br>kgf | a<br>mm | m<br>tfcm/m |
|---------|-------|----------------------------------|----------|---------|-------------|
| $m_y$   | 9     | 299                              | 60,6     | 0,65    | 3,79        |
|         | 10    |                                  | 68,6     | 0,68    | 4,29        |
|         | 11    |                                  | 67,5     | 0,50    | 4,22        |
|         | 12    |                                  | 65,2     | 0,64    | 4,08        |
|         | MÉDIA |                                  | 65,5     | 0,62    | 4,09        |

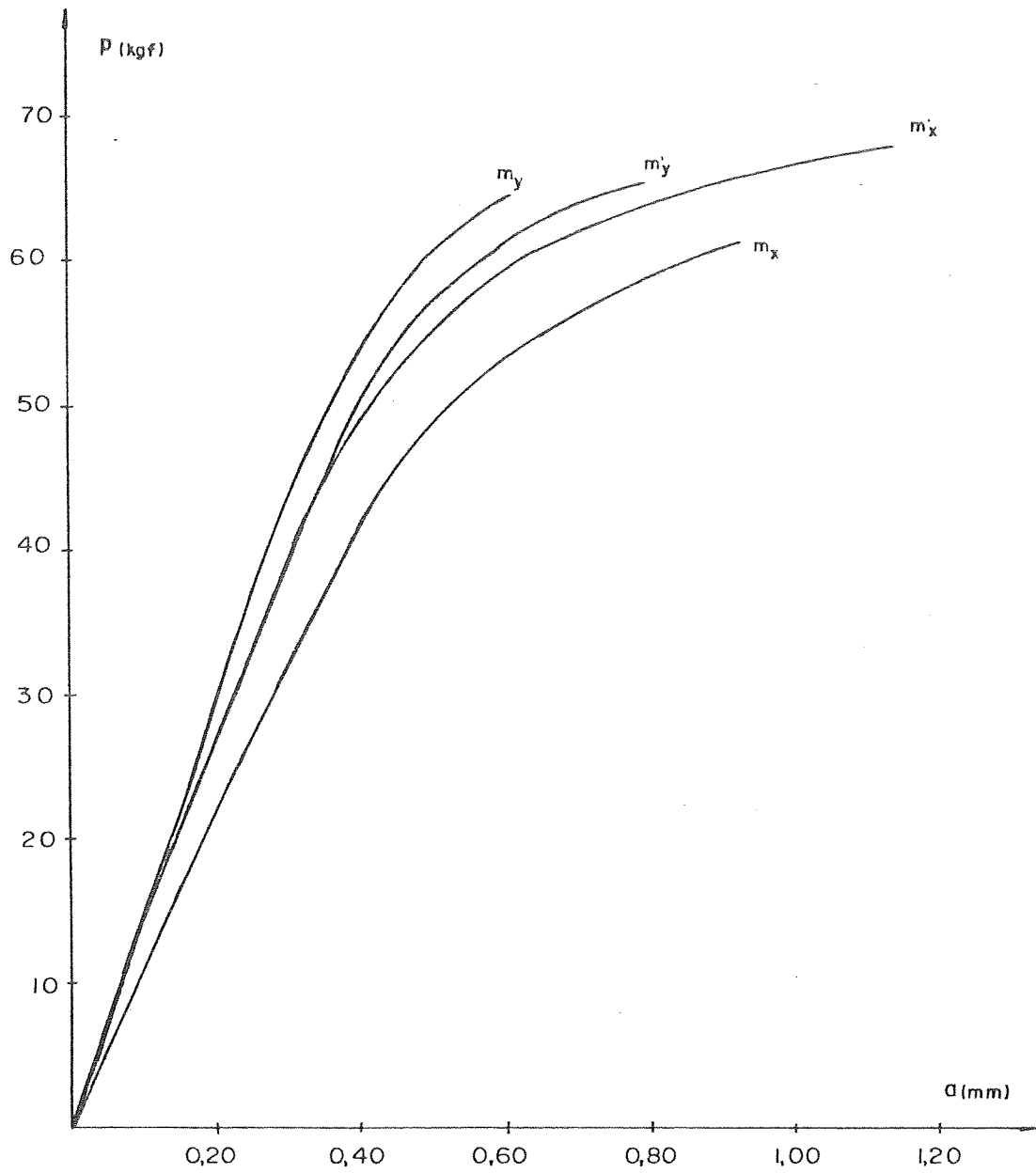
FIGURA 5.30- Gráficos cargas - flechas na obtenção de  $m_y$  - séries S1 e S2





| ESPÉCIE | FAIXA | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | $p$<br>kgf | $a$<br>mm | $m$<br>tfcm/m |
|---------|-------|----------------------------------|------------|-----------|---------------|
| $m'_y$  | 13    | 299                              | 68,6       | 0,92      | 4,29          |
|         | 14    |                                  | 62,9       | 0,64      | 3,93          |
|         | 15    |                                  | 66,4       | 0,88      | 4,15          |
|         | 16    |                                  | 67,5       | 0,78      | 4,22          |
|         | MÉDIA |                                  | 66,4       | 0,80      | 4,15          |

FIGURA 5.31- Gráficos cargas-flechas na obtenção de  $m'_y$  - séries S1 e S2



| ESPÉCIE | FAIXA  | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | p<br>kgf | a<br>mm | m<br>tfc/m |
|---------|--------|----------------------------------|----------|---------|------------|
| MÉDIAS  | $m_x$  | 252                              | 62,4     | 0,93    | 3,90       |
|         | $m'_x$ | 252                              | 69,2     | 1,15    | 4,33       |
|         | $m_y$  | 299                              | 65,5     | 0,62    | 4,09       |
|         | $m'_y$ | 299                              | 66,4     | 0,80    | 4,15       |

FIGURA 5.32-Gráficos cargas-flechas médios das faixas - séries S1 e S2

## 6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 6.1 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS SEÇÕES

De posse dos resultados sobre as características mecânicas dos materiais, pode ser feita uma previsão de comportamento para as seções de micro-concreto.

#### 6.1.1 - Pré-dimensionamento

As seções foram previamente dimensionadas para funcionarem como seções sub-armadas, isto é, para que o escoamento da armadura iniciasse antes de se esgotar a capacidade resistente do micro-concreto à compressão.

Para seções sub-armadas solicitadas por flexão simples, o estado limite último pode ser atingido de duas maneiras: por excesso de deformação na armadura, em peças pouco armadas, ou pela ruptura do concreto à compressão, enquanto a armadura se encontra em escoamento. Essas duas situações correspondem aos domínios de solicitação 2 e 3 da NB-1/1978, cujas deformações limites, admitidas neste cálculo preliminar, são mostradas na figura 6.1, onde se encontram também os diagramas adotados para as deformações específicas e para as tensões.

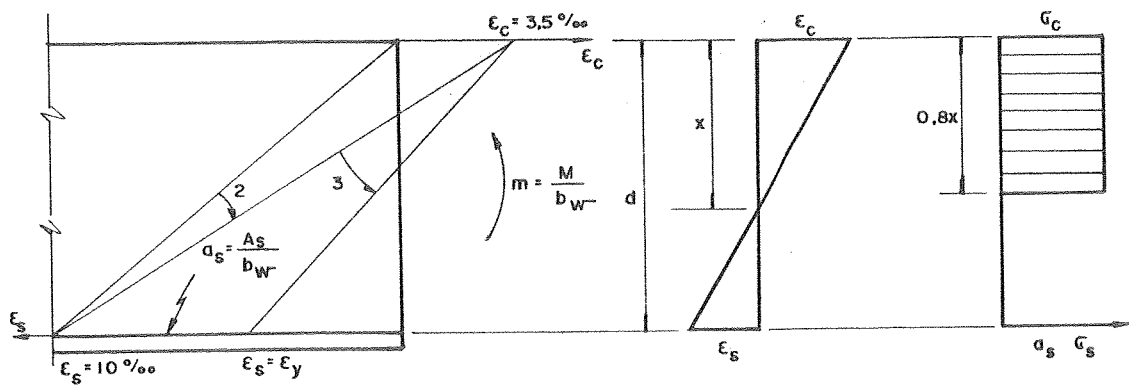


FIGURA 6.1- Seção sub-armada solicitada por flexão simples

Não se considerando, neste cálculo preliminar, a presença favorável da armadura na região comprimida, as equações de equilíbrio e de compatibilidade são:

$$0,8x\sigma_c - a_s\sigma_s = 0 \quad (6.1)$$

$$m = 0,8x\sigma_c (d - 0,4x) \quad (6.2)$$

$$m = a_s\sigma_s (d - 0,4x) \quad (6.2')$$

$$\epsilon_c/x = \epsilon_s/(d-x) \quad (6.3)$$

Têm-se, então, três equações independentes. Conhecendo-se a altura útil  $d$ , e admitindo-se  $\sigma_c = 0,85 f_{c28}$ ,  $\sigma_s = f_y$ ,  $\epsilon_c = 3,5 \text{ mm/m}$  e  $\epsilon_s = \epsilon_y$ , obtêm-se  $x$ ,  $a_s$  e  $m$ , respectivamente, nas equações 6.3, 6.1 e 6.2':

$$x = d \epsilon_c / (\epsilon_c + \epsilon_y) \quad (6.4)$$

$$a_s = 0,68x f_{c28} / f_y \quad (6.5)$$

$$m = a_s f_y (d - 0,4x) \quad (6.6)$$

Para  $f_{c28} = 272 \text{kgf/cm}^2$ ,  $d = 1,52 \text{cm}$  (menor valor entre os correspondentes às armaduras positivas e negativas, nas duas direções - ver tabela 6.1), e para  $f_y = 2,90 \text{tf/cm}^2$  e  $\epsilon_y = 4,7 \text{mm/m}$  (maiores valores entre os correspondentes aos lotes 1 e 2 - ver tabela 5.10), resulta  $a_s = 4,14 \text{cm}^2/\text{m}$ , correspondente ao limite de seção sub-armada. Para valores de  $a_s$  menores que  $4,14 \text{cm}^2/\text{m}$ , tem-se, certamente, uma seção sub-armada.

#### 6.1.2 - Momento resistente da seção suposta sem armadura

Uma seção de concreto deve ter uma quantidade de armadura que resista, pelo menos, ao momento que provoca a ruptura do concreto à tração. A NB-1/1978, por exemplo, mantém o conceito de armadura mínima como sendo aquela cujo momento de ruptura, calculado sem se considerar a resistência à tração do concreto, é igual ao momento de ruptura de seção sem armadura.

O momento de ruptura da seção sem armadura pode ser calculado no estágio antigamente chamado  $I_b$ , cujas hipóteses se apresentam a seguir.

Para seções sem armadura solicitadas por flexão simples, quando a tensão de tração se aproxima da de ruptura, pode-se admitir que a distribuição de tensões seja triangular na zona de compressão e uniforme na de tração, como se indica na figura 6.2. Admite-se, também, que as seções permaneçam planas, supostos corrigidos os erros desta hipótese e da referente à distribuição de tensões com a adoção de módulo de elasticidade secante por ocasião da ruptura  $E_t$  igual a  $0,25 E_c$ , resultando:

$$\epsilon_t = \sigma_t / E_t = 4 \sigma_t / E_c$$

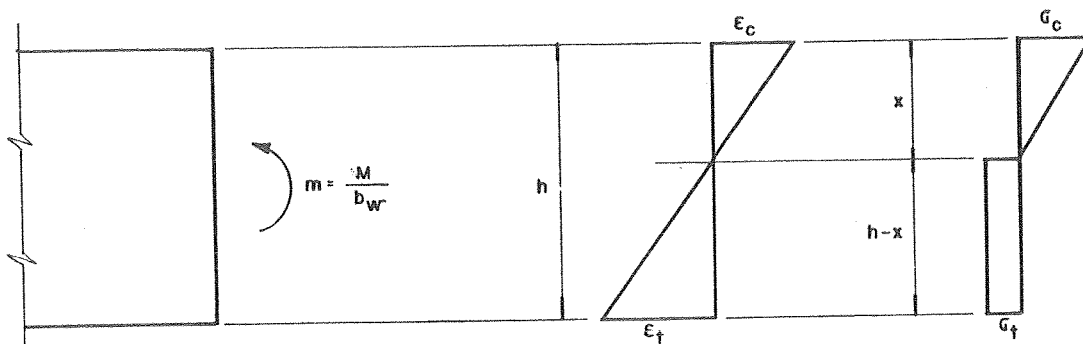


FIGURA 6.2 - Seção sem armadura solicitada por flexão simples

As equações de equilíbrio e de compatibilidade são, então:

$$0,5 x \sigma_c - (h-x) \sigma_t = 0 \quad (6.7)$$

$$m = 0,5(h-x)(h+x/3) \sigma_t \quad (6.8)$$

$$m = 0,25 x(h+x/3) \sigma_c \quad (6.8')$$

$$\varepsilon_t / \varepsilon_c = (h-x) / x = 4 \sigma_t / \sigma_c \quad (6.9)$$

Substituindo-se, na equação 6.9, o valor de  $\sigma_t / \sigma_c$  obtido na equação 6.7, resulta a posição da linha neutra:

$$x = h(\sqrt{2} - 1) \quad (6.10)$$

O momento resistente, pela equação 6.8, resulta:

$$m = h^2 \sigma_t / 3 \quad (6.11)$$

Considerando-se  $\sigma_t = f_{ct28}$ , a equação 6.11 pode ser escrita:

$$m = h^2 f_{ct28} / 3 \quad (6.12)$$

Para  $h = 2\text{cm}$  e  $f_{ct28} = 26\text{kgf/cm}^2$ , obtido nos ensaios de compressão diametral (não se considerou a pequena diferença entre os resultados desses ensaios e os de tração direta), resulta:

$$m = 3,47\text{tfcm/m}$$

A armadura mínima, calculada conforme a orientação da NB-1/1978, pode ser determinada igualando-se as equações 6.6 e 6.12, com o valor de  $x$  dado pela equação 6.10, obtendo-se:

$$a_{smin} = \frac{h^2 f_{ct28}}{3f_y [d - 0,4h(\sqrt{2} - 1)]} \quad (6.13)$$

Conhecendo-se  $h$  e  $f_{ct28}$ ,  $a_{smin}$  varia com  $d$  e com  $f_y$ . Para  $h = 2\text{cm}$ ,  $f_{ct28} = 26\text{kgf/cm}^2$ ,  $d = 1,84\text{cm}$  (maior valor dado na tabela 6.1),  $f_y = 2,90\text{tf/cm}^2$  (maior valor dado na tabela 5.10), resulta o menor valor de  $a_{smin}$ , correspondente à armadura negativa na direção do vão menor da mesa do T - séries S1 e S2:

$$a_{smin} = 0,79\text{cm}^2/\text{m}$$

Os demais valores de  $a_{smin}$  são, certamente, maiores que este valor.

### 6.1.3 - Momentos resistentes das seções fissuradas

Adotaram-se armaduras correspondentes, como já foi visto, a um fio de arame recozido número 18 cada 2,5cm, resultando  $a_s = 0,50\text{cm}^2/\text{m}$  para as séries S1 e S2 (lote 1,  $\phi = 1,26\text{mm}$ ) e  $a_s = 0,48\text{cm}^2/\text{m}$  para as séries S3 e S4 (lote 2,  $\phi = 1,23\text{mm}$ ).

Como estes valores de  $a_s$  são inferiores àquele correspondente ao limite de peça sub-armada (ver item 6.1.1),

têm-se certamente seções sub-armadas. Porém, os valores a dotados são inferiores àqueles correspondentes às armadu ras mínimas (ver item 6.1.2), resultando então seções ex cessivamente pouco armadas.

Pode ser previsto, então, que quando ocorrer a fissuração das seções, serão diminuídas suas capacidades resistentes aos esforços de flexão. Sendo as seções pouco armadas, pode-se admitir que a ruptura final ocorre por ex cesso de deformação da armadura. Os máximos momentos resist entes das seções fissuradas, podem então ser calculados com a expressão 6.2' com  $\sigma_s = f_y$  e  $x$  obtido na expressão 6.3, supondo  $\epsilon_c = 3,5$  mm/m e  $\epsilon_s = 10$  mm/m, resultando as equações:

$$x = d \ 3,5/13,5 \quad (6.15)$$

$$m = a_s \ f_y \ d \ 12,1/13,5 \quad (6.16)$$

Os momentos resistentes das seções fissuradas, calculados com esta expressão, encontram-se indicados na tabela 6.1, para as séries S1 e S2 e para as séries S3 e S4, onde se observa que, de fato, são inferiores ao momento resistente determinado para a seção suposta sem armadura com o concreto resistindo à tração.

#### 6.1.4 - Momentos resistentes teóricos e experimentais

Na tabela 6.1 indicam-se os momentos resistentes teóricos e os momentos resistentes experimentais. Os momentos resistentes teóricos correspondem ao momento resistente da seção sem armadura, calculado no item 6.1.2, e aos momentos resistentes das seções fissuradas, calculados com a equação 6.16. Os momentos resistentes experimentais foram obtidos nos ensaios das faixas. A direção  $x$  refere-se à dimensão menor da mesa do T, e os valores da altura útil, também indicados, correspondem a valores médios medidos nos modelos.



TABELA 6.1 - Momentos resistentes teóricos e experimentais

| ESPÉCIE | d<br>cm | MOMENTOS RESISTENTES $t_f$ cm/m |                            |                            |                                      |
|---------|---------|---------------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------------------|
|         |         | SEÇÃO SEM<br>ARMADURA           | SEÇÃO FISSURADA            |                            | *<br>EXPERIMENTAIS<br>SÉRIES S1 e S2 |
|         |         |                                 | SÉRIES S1 e S2<br>(LOTE 1) | SÉRIES S3 e S4<br>(LOTE 2) |                                      |
| $m_x$   | 1,64    | 3,47                            | 2,13                       | 1,43                       | 3,90                                 |
| $m'_x$  | 1,84    |                                 | 2,39                       | 1,60                       | 4,33                                 |
| $m_y$   | 1,52    |                                 | 1,98                       | 1,32                       | 4,09                                 |
| $m'_y$  | 1,71    |                                 | 2,22                       | 1,49                       | 4,15                                 |

\* NÃO FORAM DETERMINADOS PARA AS SÉRIES S3 e S4

Para se escolherem as armaduras adotadas, foram tomados por base ensaios preliminares que indicaram uma tensão média de escoamento próxima da correspondente ao CA-40, podendo então a armadura mínima ser avaliada pela taxa de 0,15%, resultando

$$a_{s_{\min}} = 0,15\% b_w h = 0,30 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como às armaduras adotadas correspondiam áreas superiores à mínima assim calculada, elas foram adotadas.

Porém, os ensaios posteriores, para a caracterização das armaduras, mostraram que os ensaios preliminares não eram corretos, e mesmo que o fossem, ainda assim as áreas adotadas resultariam inferiores às mínimas calculadas pela equação 6.13.

O fato de as armaduras serem inferiores às mínimas foi comprovado no ensaio das faixas, pois, quando aparecia a primeira fissura, não era possível qualquer acréscimo de carga. Verificaram-se, também, que os momentos resistentes, obtidos nos ensaios das faixas, superaram em aproximadamente 20% o momento previsto para a seção sem armadura, o que

é bastante razoável em presença das influências das armaduras na resistência da seção.

## 6.2 - ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DAS LAJES

De posse dos resultados teóricos e dos experimentais, pode-se fazer uma análise do comportamento das lajes, a qual é apresentada a seguir.

### 6.2.1 - Cargas e configurações de ruína previstas

No cálculo da laje realizado no item 3.3.3, foi admitida a isotropia da laje, desprezando-se o fato de as armaduras nas direções perpendiculares não serem encontrarem no mesmo plano.

Nos ensaios das faixas correspondentes às séries S1 e S2 (ver tabela 6.1), obteve-se:

$$m'_y = 0,96 m'_x \quad e \quad m_y = 1,05 m_x$$

Este primeiro resultado era esperado, o que não aconteceu com o segundo, no qual o momento de plastificação na direção secundária, com menor braço de alavanca, resultou maior que na direção principal. Isto pode ser devido a diversas razões: armaduras exageradamente pequenas, influência das armaduras das zonas comprimidas, pequeno número de ensaios, diferença da qualidade do concreto, entre outras.

Com estes resultados disponíveis e, como no cálculo das lajes engastadas somente interessa a soma  $m+m'$ , sendo

$$m_y + m'_y = 1,01 (m_x + m'_x),$$

verifica-se que a diferença de alturas podia realmente ser desprezada.

Assim sendo, para  $m+m' = 8,23 \text{ tfm/m}$ , com o resultado obtido no item 3.3.3, obtém-se a carga de ruína calculada pela teoria das charneiras plásticas:

$$q = 5,76 \text{ tf/m}^2$$

A configuração de ruína prevista é aquela indicada na figura 3.5.

#### 6.2.2 - Cargas e configurações de ruína experimentais

As configurações de ruína experimentais, conforme as superposições mostradas nas figuras 5.22 a 5.25, apresentam traços de algumas das configurações possíveis mostradas no capítulo 3. Entretanto, a que primeiro se desenhou, e que mais se pronunciou, foi aquela prevista da ruína parcial da mesa do T. As fissuras que invadiram a perna do T, ou esboçaram a ruína em cone, não progrediram. A configuração experimental simplificada encontra-se indicada na figura 5.26.

As cargas de ruína experimentais são aquelas já apresentadas na tabela 5.2, e também indicadas na tabela 6.2.

#### 6.2.3 - Comparação entre as cargas de ruína previstas e as experimentais

A isotropia admitida, como foi visto no item 6.2.1, e a semelhança entre as configurações previstas e as observadas, permitem que se calculem as cargas de ruína pela expressão obtida no item 3.3.3:

$$q/(m+m') = 70m^{-2}$$

São indicadas, na tabela 6.2, as cargas de ruína previstas e as experimentais, a saber:

$q_1$  = carga prevista com  $m+m'$  obtido no cálculo de ruína da seção sem armadura ( $m+m'=6,94$ ).

$q_2$  = carga prevista com  $m+m'$  obtido nos cálculos das seções fissuradas, adotando-se os valores médios das duas direções ( $m+m'=4,36$  para as séries S1 e S2 e  $m+m'=2,92$  para as séries S3 e S4)

$q_3$  = carga prevista com ( $m+m'$ ) obtido nos ensaios das faixas, adotando-se os valores médios das duas direções ( $m+m' = 8,235$ ).

$q_r$  = carga de ruína obtida nos ensaios dos modelos.

São indicadas, também na tabela 6.2, as relações entre as cargas de ruína obtidas nos ensaios dos modelos e as demais previstas.

TABELA 6.2-Cargas de ruína previstas e experimentais

| SÉRIE | $f_{c28}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | CARGAS DE RUÍNA<br>tf/m <sup>2</sup> |       |       |       | $\frac{q_r}{q_1}$ | $\frac{q_r}{q_2}$ | $\frac{q_r}{q_3}$ |
|-------|----------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|
|       |                                  | $q_1$                                | $q_2$ | $q_3$ | $q_r$ |                   |                   |                   |
| S1    | 282                              | 4,86                                 | 3,05  | 5,76  | 5,68  | 1,17              | 1,86              | 0,99              |
| S2    | 252                              |                                      |       |       | 6,70  | 1,38              | 2,20              | 1,16              |
| S3    | 244                              |                                      | 2,04  | *     | 5,06  | 1,04              | 2,48              | *                 |
| S4    | 350                              |                                      |       |       | 5,29  | 1,09              | 2,59              |                   |

\*  $q_3$  NÃO FOI DETERMINADA PARA AS SÉRIES S3 e S4

## 7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 7.1 - SOBRE OS RESULTADOS DA EXPERIMENTAÇÃO

Inicialmente, serão comentadas as diversas fases de comportamento observadas. Para se compararem as deformações transversais nessas fases com valores usuais, será adotado o valor  $a/\ell = 1/300$ , limite da NB-1/1978 para flechas devidas à carga total aplicada. O valor de  $\ell$  adotado será a menor dimensão da mesa do T, igual a 400 mm.

Nos gráficos médios indicados nas figuras 5.1 a 5.4, e também na figura 5.5, nota-se que, de fato, para pequenas cargas, as lajes se comportam elasticamente com pequenas deformações.

Os resultados correspondentes ao início de fissuração também podem ser encontrados nessas figuras; as primeiras fissuras apareceram com 29% da carga de ruína ( $a/\ell = 1/133$ ) na série S1, na qual houve rotação dos apoios, e com carga em torno de 57% da carga de ruína ( $a/\ell$  em torno de  $1/212$ ) nas demais séries, nas quais a rotação dos apoios foi impedida. Verifica-se, portanto, que a fissuração se inicia com cargas bem menores quando há rotação dos apoios, o que está de acordo com o esperado. Nota-se, também, que quando aparece a primeira fissura, as flechas máximas já são superiores ao valor limite da NB-1.

Os gráficos médios das figuras 5.1 a 5.5 também

permitem constatar que, iniciada a fase de fissuração, as deformações crescem mais rapidamente que na fase anterior. Pode ser observado, também, que o trecho de comportamento linear, devido às armaduras, não se configurou, o que é coerente com suas pequenas quantidades.

Verifica-se, ainda nessas figuras, que o início da fase de plastificação não ficou perfeitamente definido. Os valores correspondentes nelas indicados são, portanto, aproximados.

Com relação à ruína, também houve coerência com o comportamento previsto para lajes sub-armadas. Ela ocorreu com o esmagamento do concreto nas regiões comprimidas, após o que as deformações aumentavam mesmo com diminuição da carga aplicada. Por ocasião da ruína, a configuração das charneiras já estava perfeitamente definida.

As máximas cargas observadas também se encontram nas figuras 5.1 a 5.5, às quais correspondem  $a/l = 1/9$  na série S1 e  $a/l$  em torno de  $1/13$  nas demais séries, valores muito superiores aos máximos permitidos para as lajes durante sua utilização.

As configurações de ruína mostradas nas figuras 5.6 a 5.21, que foram superpostas nas figuras 5.22 a 5.25, respectivamente, para as séries S1 a S4, apresentam traços de algumas das configurações possíveis. Entretanto, a que primeiro se desenhou e que mais se pronunciou foi aquela prevista da ruína parcial da mesa, indicada na figura 5.26.

A ruína total, cujos indícios se notam principalmente na série S1, e a ruína parcial da mesa com leque invadindo a perna do T, esboçada em todas as séries, não causam surpresa, pois suas respectivas cargas são pouco maiores que a carga de ruína.

As cargas de ruína previstas, e também aquelas experimentais já mencionadas, são indicadas na tabela 6.2. Com os resultados correspondentes às séries S1 e S2 nela mostrados, podem ser comentados os efeitos do impedimento dos deslocamentos horizontais. Na série S1, na qual esses

deslocamentos eram permitidos, a carga de ruína observada foi 99% daquela prevista pela teoria das charneiras plásticas, resultado praticamente coincidente com o esperado. Na série S2, na qual os deslocamentos horizontais eram impedidos, a carga de ruína observada foi 16% maior que a prevista, mostrando que o impedimento dos deslocamentos horizontais dá segurança suplementar aos resultados da teoria das charneiras plásticas, mas sem exageros.

Nas séries S3 e S4, com os resultados também indicados na tabela 6.2, puderam ser avaliados os efeitos da supressão parcial da armadura negativa. Nota-se que a carga de ruína de S3, com armadura negativa suprimida na região central da mesa do T, é aproximadamente 96% da carga de ruína de S4, sem supressão de armadura. Como esses resultados foram colhidos num pequeno número de ensaios, pode-se concluir que essa diminuição de resistência não é significativa, o que pode inclusive ter acontecido em função da maior resistência do concreto na série S4, ajudado pelo efeito de armadura dupla na região central da mesa do T, já que a ruína é atingida com o esmagamento do concreto nas regiões comprimidas.

Finalizando os comentários sobre os resultados desta pesquisa, pode afirmar-se que ela enriquece o acervo de corroborações experimentais da teoria das charneiras plásticas, e que se deve recomendar a utilização dos resultados de Langendonck para o cálculo das lajes T. De fato, ao se desprezar o impedimento dos deslocamentos horizontais obtém-se carga de ruína inferior à real, mas pouco, o que é adequado quer quanto à segurança quer quanto à economia. Por outro lado, a supressão parcial da armadura negativa parece não acarretar diminuição significativa na resistência da laje. Quanto a este aspecto, se houver alguma redução, ela será compensada, com pequena folga, pelo acréscimo de resistência dado pelo impedimento dos deslocamentos horizontais; mas, seria necessário maior número de experiências para se confirmar essa eventual redução.

Conclue-se portanto, como era de se esperar, que, apesar das simplificações deliberadamente admitidas, os resultados de Langendonck são muito bons para utilização prática.

## 7.2 - SOBRE SIMPLIFICAÇÕES NO CÁLCULO

Não se poderia encerrar este trabalho sem chamar a atenção dos calculistas para as conclusões apresentadas por LANGENDONCK (1975), no capítulo referente às lajes T, baseado em LANGENDONCK (1972), ora verificado experimentalmente com bons resultados.

Para  $\mu = 0$ , e portanto para as lajes engastadas com qualquer  $\mu$ , Langendonck conclui que a situação mais desfavorável é, em geral, a que leva à ruína da mesa ou da perna com charneiras negativas retas e que, nos poucos casos em que isso não se dá, o erro que se comete adotando uma dessas duas situações é desprezível. Assim sendo, o cálculo da laje T recai no das lajes retangulares, devendo tomar-se o menor dos valores de  $q$  correspondentes às lajes livremente apoiadas de lados  $2b \times 2c$  ou  $2a \times 2(c+d)$ , indicadas na figura 7.1. Exceção que se deve ter em conta é a da laje quase quadrada, como a da figura 7.2, em que predomina a configuração com charneira negativa circular.

Para  $\mu \neq 0$ , também segundo LANGENDONCK (1975), parece que se pode usar o mesmo processo, acrescentando-se entretanto o estudo da laje retangular de lados  $2a \times 2d$  (perna limitada pela charneira negativa reta unindo os cantos reentrantes). Todas as lajes mencionadas terão então parte de seu apoio engastado (onde se forma a charneira negativa), como se indica na figura 7.3, passando o seu cálculo a ser feito como se indica ainda em LANGENDONCK (1975).



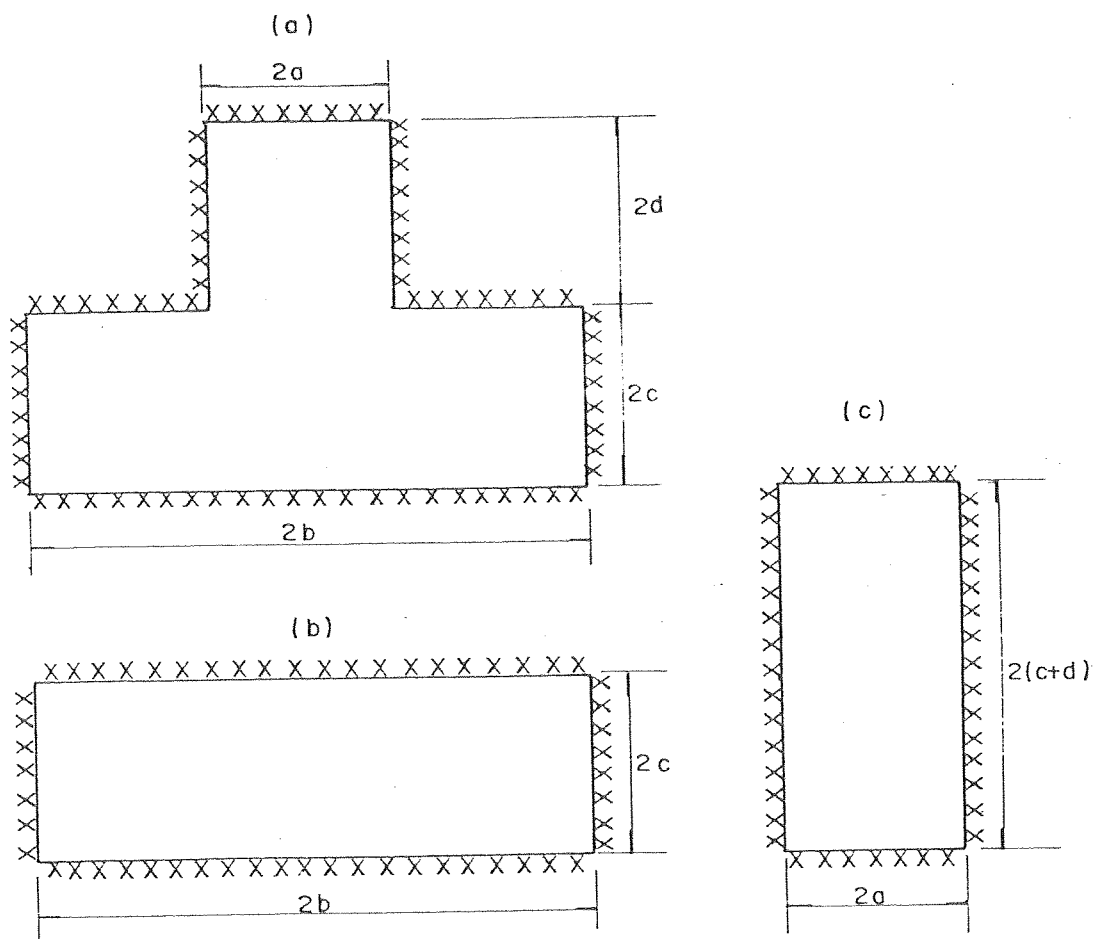


FIGURA 7.1 - Divisão para cálculo simplificado quando  $\mu=0$

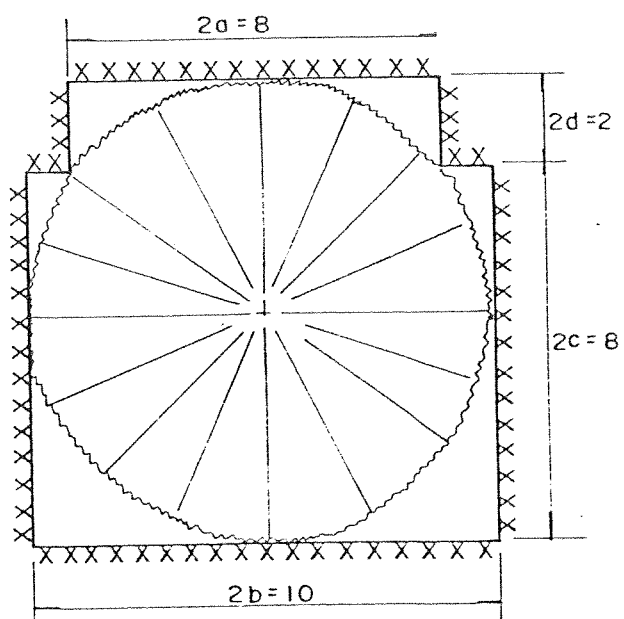


FIGURA 7.2 - Configuração de ruína em lajes quase quadradas

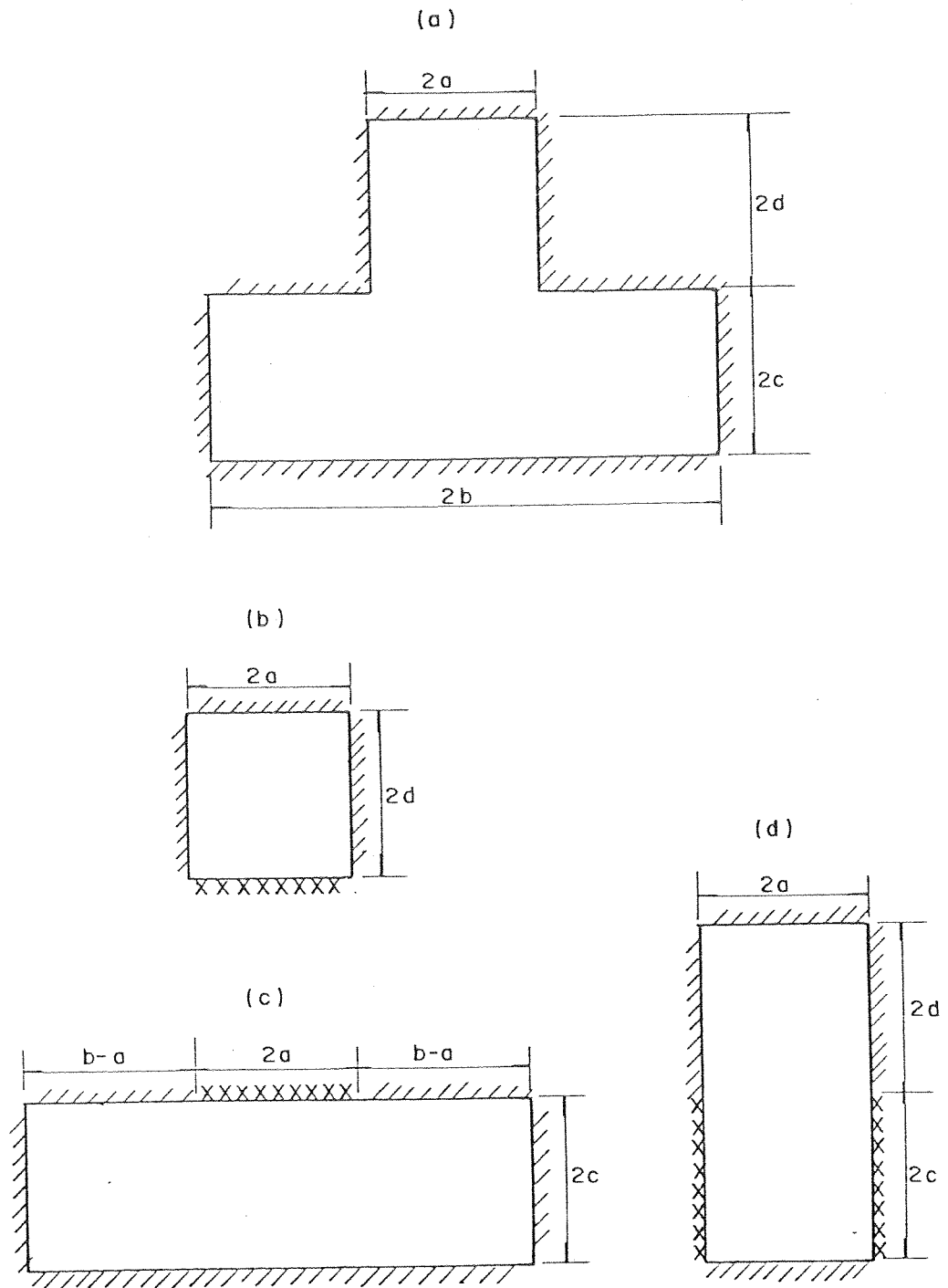


FIGURA 7.3 - Divisão para cálculo simplificado quando  $\mu \neq 0$

### 7.3 - SOBRE NOVAS PESQUISAS

Apesar dos resultados favoráveis alcançados nesta experimentação, alguns itens poderiam ser melhorados. As quantidades de armaduras resultaram muito pequenas; taxas maiores representariam lajes mais usuais. Suas quantidades deveriam ser, pelo menos, superiores às mínimas recomendadas pela NB-1 e, se possível, verificadas nos ensaios das faixas antes de serem empregadas nas experiências principais. O sistema de apoio aqui denominado "engaste deslizante" não funcionou como se pretendia, pois não deveria permitir rotações que no entanto estavam presentes no trabalho realizado (série S1).

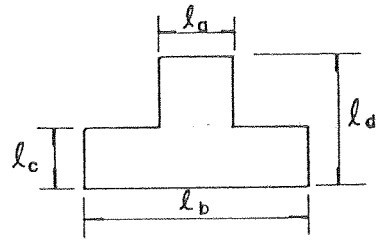
Antes do encerramento destas considerações finais, pretende-se externar algumas idéias sobre aspectos que poderiam ser mais especificamente investigados. As diversas fases de comportamento, previstas para as lajes, não ficaram aqui bem configuradas; elas poderiam ser investigadas em lajes com formas mais simples, como por exemplo faixas bi-engastadas, com diferentes taxas de armaduras, com e sem impedimento de deslocamentos horizontais. Outra proposta refere-se à investigação de armaduras mínimas para as lajes armadas em cruz, já que as taxas mínimas referentes a uma só direção se constituem, para elas, um tanto exageradas; poderiam ser empregadas, por exemplo, lajes quadradas ou retangulares, para as quais seria verificado o comportamento com diferentes taxas de armaduras.

Com relação às lajes T, poderiam ser investigadas outras proporções para os comprimentos de seus lados. No modelo pesquisado, outras configurações se esboçaram, por serem suas cargas pouco superiores à carga de ruína.

Empregando-se a tabela 7.1 (elaborada por LANGEN DONCK, 1975), fica fácil adotar novas proporções, de maneira que não sejam muito próximas as cargas correspondentes às várias configurações. São convenientes, por exemplo, as dimensões indicadas na figura 7.4, caso se pretenda verificar ruína parcial da mesa, e na figura 7.5, caso seja desejada a ruína parcial da perna.

TABELA 7.1 - Valores de  $\frac{q l_b l_d}{m + m'}$ 

$$\mu = 0 \quad (m' = 0)$$



| $\frac{l_a}{l_b}$ | $\frac{l_c}{l_d}$ | $\frac{l_a}{l_b}$ |     |     |     |     |     |     | $\frac{l_a}{l_b}$ | $\frac{l_c}{l_d}$ | $\frac{l_a}{l_b}$ |     |     |     |     |     |     |
|-------------------|-------------------|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                   |                   | 0,3               | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 |                   |                   | 0,3               | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 |
| 0,2               | 0,2               | 116               | 149 | 187 | 226 | 227 | 200 | 180 | 0,6               | 0,2               | 44                | 36  | 36  | 38  | 42  | 46  | 50  |
|                   | 0,3               | 116               | 149 | 157 | 130 | 113 | 101 | 93  |                   | 0,3               | 44                | 36  | 36  | 38  | 42  | 46  | 50  |
|                   | 0,4               | 116               | 122 | 95  | 80  | 70  | 64  | 60  |                   | 0,4               | 44                | 36  | 36  | 38  | 42  | 46  | 50  |
|                   | 0,5               | 116               | 82  | 65  | 56  | 50  | 47  | 44  |                   | 0,5               | 44                | 36  | 36  | 38  | 42  | 46  | 44  |
|                   | 0,6               | 89                | 60  | 48  | 42  | 39  | 37  | 36  |                   | 0,6               | 44                | 36  | 36  | 38  | 39  | 37  | 36  |
|                   | 0,7               | 67                | 46  | 38  | 34  | 31  | 31  | 30  |                   | 0,7               | 44                | 36  | 36  | 34  | 31  | 31  | 30  |
|                   | 0,8               | 53                | 37  | 31  | 28  | 27  | 27  | 27  |                   | 0,8               | 44                | 36  | 31  | 28  | 27  | 27  | 27  |
|                   | 0,9               | 43                | 31  | 26  | 24  | 24  | 24  | 25  |                   | 0,9               | 43                | 31  | 26  | 24  | 24  | 24  | 25  |
|                   | 0,3               | 0,2               | 71  | 80  | 95  | 112 | 129 | 146 |                   | 163               | 0,7               | 0,2 | 41  | 32  | 30  | 31  | 33  |
| 0,3               |                   | 71                | 80  | 95  | 112 | 113 | 101 | 93  | 0,3               | 41                |                   | 32  | 30  | 31  | 33  | 36  | 39  |
| 0,4               |                   | 71                | 80  | 95  | 80  | 70  | 64  | 60  | 0,4               | 41                |                   | 32  | 30  | 31  | 33  | 36  | 39  |
| 0,5               |                   | 71                | 80  | 65  | 56  | 50  | 47  | 44  | 0,5               | 41                |                   | 32  | 20  | 31  | 33  | 36  | 39  |
| 0,6               |                   | 71                | 60  | 48  | 42  | 39  | 37  | 36  | 0,6               | 41                |                   | 32  | 30  | 31  | 33  | 35  | 36  |
| 0,7               |                   | 67                | 46  | 38  | 34  | 31  | 31  | 30  | 0,7               | 41                |                   | 32  | 30  | 31  | 30  | 31  | 30  |
| 0,8               |                   | 53                | 37  | 31  | 28  | 27  | 27  | 27  | 0,8               | 41                |                   | 32  | 30  | 27  | 27  | 27  | 27  |
| 0,9               |                   | 43                | 31  | 26  | 24  | 24  | 24  | 25  | 0,9               | 41                |                   | 31  | 26  | 24  | 24  | 24  | 25  |
| 0,4               |                   | 0,2               | 56  | 55  | 61  | 70  | 79  | 88  | 98                | 0,8               |                   | 0,2 | 39  | 29  | 27  | 27  | 28  |
|                   | 0,3               | 56                | 55  | 61  | 70  | 79  | 88  | 93  | 0,3               |                   | 39                | 29  | 27  | 27  | 28  | 30  | 32  |
|                   | 0,4               | 56                | 55  | 61  | 70  | 70  | 64  | 60  | 0,4               |                   | 39                | 29  | 27  | 27  | 28  | 30  | 32  |
|                   | 0,5               | 56                | 55  | 61  | 56  | 50  | 47  | 44  | 0,5               |                   | 39                | 29  | 27  | 27  | 28  | 30  | 32  |
|                   | 0,6               | 56                | 55  | 48  | 42  | 39  | 37  | 36  | 0,6               |                   | 39                | 29  | 27  | 27  | 28  | 30  | 32  |
|                   | 0,7               | 56                | 46  | 38  | 34  | 31  | 31  | 30  | 0,7               |                   | 39                | 29  | 27  | 27  | 27  | 30  | 30  |
|                   | 0,8               | 53                | 37  | 31  | 28  | 27  | 27  | 27  | 0,8               |                   | 39                | 29  | 27  | 27  | 27  | 27  | 27  |
|                   | 0,9               | 43                | 31  | 26  | 24  | 24  | 24  | 25  | 0,9               |                   | 39                | 29  | 26  | 24  | 24  | 24  | 25  |
|                   | 0,5               | 0,2               | 48  | 43  | 45  | 50  | 55  | 61  | 67                |                   | 0,9               | 0,2 | 37  | 28  | 24  | 24  | 24  |
| 0,3               |                   | 48                | 43  | 45  | 50  | 55  | 61  | 67  | 0,3               | 37                |                   | 28  | 24  | 24  | 24  | 25  | 27  |
| 0,4               |                   | 48                | 43  | 45  | 50  | 55  | 61  | 60  | 0,4               | 37                |                   | 28  | 24  | 24  | 24  | 25  | 27  |
| 0,5               |                   | 48                | 43  | 45  | 50  | 50  | 47  | 44  | 0,5               | 37                |                   | 28  | 24  | 24  | 24  | 25  | 27  |
| 0,6               |                   | 48                | 43  | 45  | 42  | 39  | 37  | 36  | 0,6               | 37                |                   | 28  | 24  | 24  | 24  | 25  | 27  |
| 0,7               |                   | 48                | 43  | 38  | 34  | 31  | 31  | 30  | 0,7               | 37                |                   | 28  | 24  | 24  | 24  | 25  | 27  |
| 0,8               |                   | 48                | 37  | 31  | 28  | 27  | 27  | 27  | 0,8               | 37                |                   | 28  | 24  | 24  | 24  | 25  | 27  |
| 0,9               |                   | 43                | 31  | 26  | 24  | 24  | 24  | 25  | 0,9               | 37                |                   | 28  | 24  | 24  | 24  | 24  | 25  |

Os números em negrito (contornados por retângulo) correspondem à configuração com forma de cone, os em itálico (acima da linha escalonada) à ruína parcial da perna e os outros à ruína parcial da mesa.

Para  $l_a/l_b = 0,8$  e  $l_c/l_d = 0,7$ , a interpolação entre os dois números 27 em negrito não é linear, pois para  $l_a/l_b = 1,0$  o resultado é 24.

Os dados desta Tabela são válidos para lajes engastadas com qualquer  $\mu$ .

Esta tabela foi elaborada por LANGENDONCK (1975)

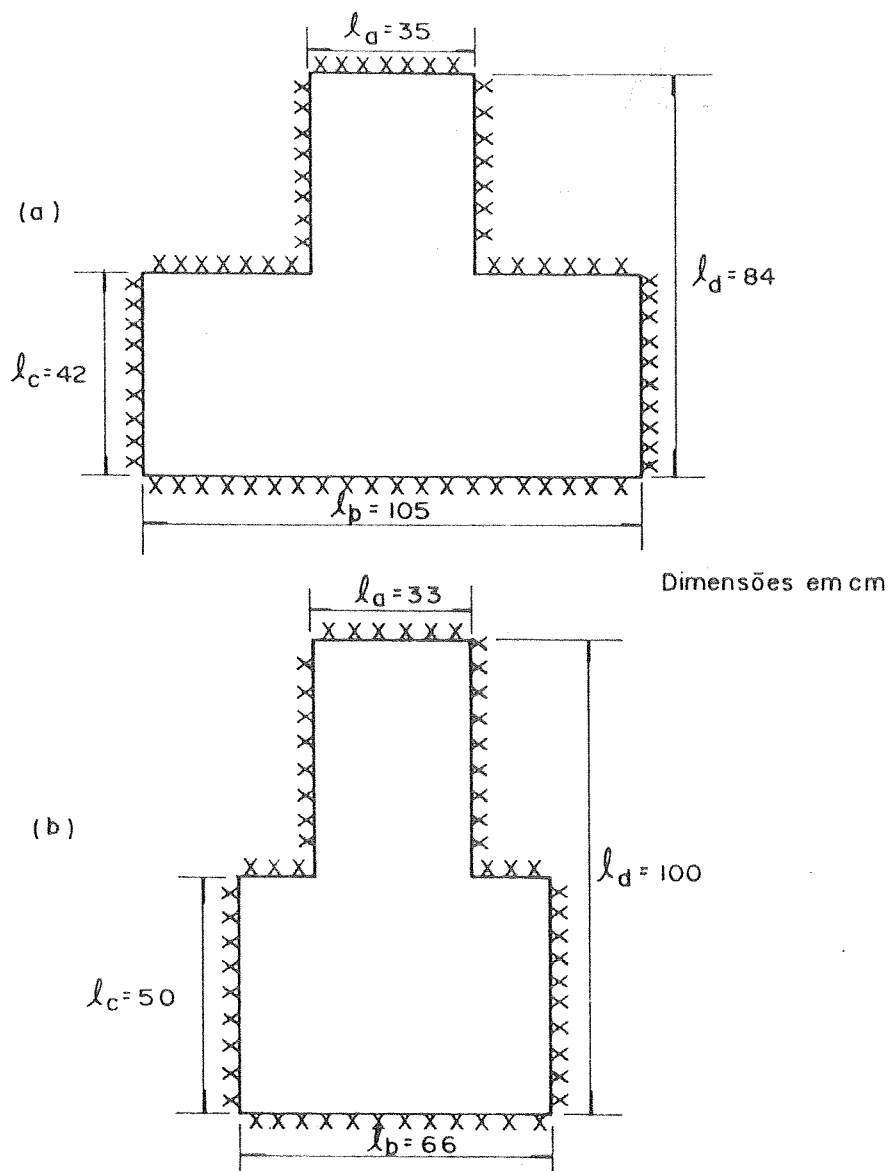


FIGURA 7.4 - Sugestão para modelos com ruína parcial da mesa

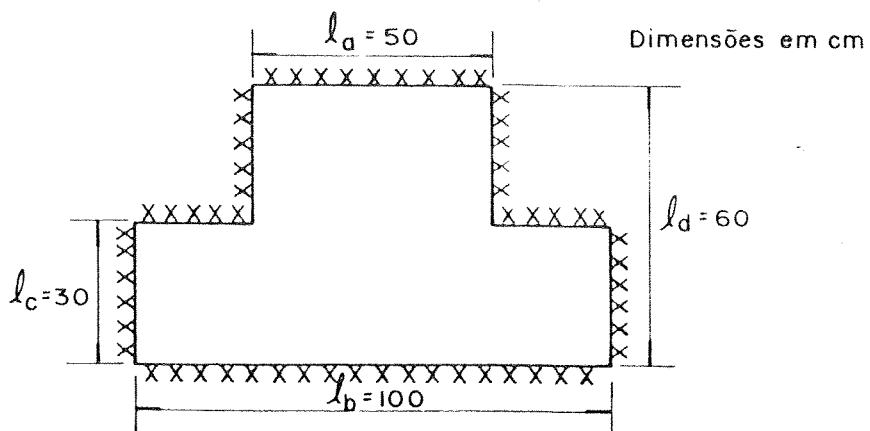


FIGURA 7.5 - Sugestão para modelo com ruína parcial da perna

Poderiam ser adotadas, nesses modelos, espessuras pouco menores e, portanto, mais próximas das proporções usuais, para as quais seria atenuado o efeito de arqueamento, podendo ser encontrados resultados ainda mais próximos daqueles dados pela teoria das charneiras plásticas.

Como se pode notar, a investigação dos itens propostos promoveriam maior esmiuçamento do assunto ora tratado, completando os resultados aqui apresentados e enriquecendo, portanto, os conhecimentos relativos às lajes de concreto armado.

8 - BIBLIOGRAFIA

- AGNESINE, M.V.C. - "Materiais de Construção Civil", 2<sup>a</sup> parte. Departamento de Publicações da EESC-USP, São Carlos, 1974. 44 p.
- AMARAL, N.A. - "Construções de Concreto", Volumes I e II. Departamento de Livros e Publicações do Grêmio Politécnico da EPUSP, São Paulo, 1969. 444 p.
- BACH, C. - "Versuche über die Widerstand fähigkeit ebener Platten". Zs. V.D.I., 1980.
- BACH, C. e R. BAUMANN - "Elasticità e Resistenza dei Materiali", Tradução do alemão. Milão, Itália, 1928.
- BASTOS, R.G. - "Ruína de Lajes de Concreto Armado com Efeito de Membrana e Redução Gradativa da Armadura", Dissertação de Mestrado. EESC-USP, São Carlos, 1977. 207 p.
- BELLUZZI, O. - "Scienza delle Costruzioni". Zanichelli, Bolonha, 1954. Ver também edição espanhola, 1977.
- BORGES, J.F., ARGÁ e LIMA, J. - "Crack and Deformation Similitude in Reinforced Concrete". Mem. Nº 162 do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1961.

- CALLARI, C.E. - "Méthode Générale de Calcul des Dalles en Flexion dans le Domaine Anélasthique". Annales de l'Institut du Bâtiment et des Travaux Publics n° 201, IX/1964. p. 959/972.
- CARDOSO, E.M. - "Cálculo Experimental de Estruturas". Revista Estrutura n° 69, 1974. p. 31/49.
- CHAMECKI, S. - "Cálculo, no Regime de Ruptura, das Lajes de Concreto Armadas em Cruz". Editora Guaíra Ltda, Curitiba, 1948. 106 p.
- COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON - "Bulletin d'Information n° 56". VIII/1966.
- COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON - "Bulletin d'Information n° 57". IX/1966. p. 62/140.
- COMITÉ EUROPÉEN DU BÉTON - "Bulletin d'Information n° 58". X/1966.
- DUBINSKI, A.M. - "Cálculo de Losas por el Metodo de las Lineas de Rotura". Editora Tecni-Ciência, Montevideo, 1964.
- FUSCO, P.B. - "Conceitos Estatísticos Associados à Segurança das Estruturas". Grêmio Politécnico, São Paulo, 1975. 238 p.
- GUYON, Y. - "Béton Précontraint", Tome II. Editions Eyrolles, Paris, 1958.
- GVOZDEV, A.A. - "Determinación del Valor de la Carga de Rotura para los Sistemas Estáticamente Indeterminados". Proyecto y Norma N° 8, 1934.
- GVOZDEV, A.A. - "Determinación del Valor de la Carga de Rotura para los Sistemas Estáticamente Indeterminados que Sufren Deformaciones Plásticas". Trabajos



de las Conferencias sobre Deformaciones Plásticas, Academia de Ciencias de la URSS, Departamento de Ciencias Técnicas, Moscú, 1938.

GVOZDEV, A.A. - "Fundamentación del § 33 de las Normas para el Proyecto de las Estructuras de Hormigón Armado". Industria de la Construcción N° 3, 1939.

GVOZDEV, A.A. - "Acerca del Equilibrio Límite". Manual del Ingeniero, T. V, 1ª edición, 1948.

GVOZDEV, A.A. - "Cálculo de la Capacidad Portante de las Estructuras por el Método del Equilibrio Límite". Strizdat, Moscú, 1949a.

GVOZDEV, A.A. - "Metodo del Equilibrio Límite y su Aplicación al Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado". Manual del Ingeniero, T. V, 2ª edición, 1949b.

GVOZDEV, A.A. - "Redistribución de Esfuerzos en Estructuras Comunes y Pretensados, Estáticamente Indeterminadas, de Hormigón Armado". Informe del Ts NIPS 1955, 1953.

GVOZDEV, A.A. - "Sur le Calcul des Dalles en Béton Armé par la Méthode de l'Equilibre Limite". CEB, Bulletin d'Information n° 64, XII/1967.

HAYES, B. - "Allowing for Membrane Action in the Plastic Analysis of Rectangular Reinforced Concrete Slabs". Magazine of Concrete Research, Volume 20, n° 65, XII/1968. p. 205/212.

HOGNESTAD, E. - "Yield Line Theory for the Ultimate Flexural Strength of Reinforced Concrete Slabs". Journal of the ACI, Vol. 24, N° 7, March 1953.

HOGNESTAD, E., N.W. HANSON e D. McHENRY - "Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design".

Journal of the American Concrete Institute, Volume  
27, nº 4, XII/1955, p. 455/479

- INGERSLÉV, A. - "The Strength of Rectangular Slabs". The  
Institution of Structural Engineer's Journal, Jan.  
1923.
- JOHANSEN, K.W. - "Bruchmomente der Kreuzweise Bewehrten  
Platten". Association Internationale des Ponts et  
Charpents, Mémoires, 1932. p. 277/296.
- JOHANSEN, K.W. - "Brudlinieteorier". Polyteknisk Fore  
ning, Genoptrykt, 1943. 189 p.
- JOHANSEN, K.W. - "Pladeformler", 2 Udgave. Polyteknisk  
Forening, Copenhagen, 1949. 172 p.
- JOHANSEN, K.W. - "Linhas de Ruptura". Ao Livro Técnico  
S.A., Rio de Janeiro, 1962. 380 p.
- JONES, L.L. e R.H. WOOD - "Yield-line Analysis of  
Slabs". Thames and Hudson, London, 1967.
- JORGE, A. e R.G. FIGUEIREDO - "Estudo Experimental de  
Lajes em Regime de Ruptura", Trabalho de Formatura.  
Laboratório de Estruturas, EESC-USP, São Carlos, 1963.
- KEMP, K.O. - "The Evaluation of Nodal and Edges Forces  
in the Yield Line Theory", in Recent Developments  
in Yield Line Theory. London, Cement and Concrete  
Association, 1965. M.C.R. Special Publication.
- KEMP, K.O. - Yield of a Square Reinforced Concrete  
Slabs on Simple Supports, Allowing for Membrane For  
ces". The Structural Engineer, Vol. 45, Nº 7, VII/  
1967. p. 235/240.
- LANGENDONCK, T. - "Charneiras Plásticas em Lajes de E  
difícios". Associação Brasileira de Cimento Port  
land, São Paulo, 1966. 81 p.

- LANGENDONCK, T. - "Lajes Poligonais Uniformemente Carregadas". ABCP, São Paulo, 1968. 24 p.
- LANGENDONCK, T. - "Teoria Elementar das Charneiras Plásticas", Volume I. ABCP, São Paulo, 1970. 414 p.
- LANGENDONCK, T. - "Charneiras Plásticas em Lajes Retangulares de Pontes". ABCP, São Paulo, 1971. 76 p.
- LANGENDONCK, T. - "Lajes com Forma de T ou L". ABCP, São Paulo, 1972. 89 p.
- LANGENDONCK, T. - "Teoria Elementar das Charneiras Plásticas", Volume II. ABCP, São Paulo, 1975. 556 p.
- LEME, R.A.S. - "Curso de Estatística". Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1969. 292 p.
- LEVI, F. - "Controle des Conditions de Fissuration et de Deformation des Dalles Dimensionnées à l'État Limite Ultime". CEB, Bulletin d'Information n° 50, VII/1965. p. 201/226.
- LIMA, R.L.R. - "Contribuição ao Estudo Experimental da Ruína de Estruturas Laminares", Tese de Doutorado. EESC-USP, São Carlos, 1974. 254 p.
- MARTINELLI, D.A.O. - "Contribuição ao Emprego de Extensômetros Elétricos de Resistência no Estudo de Estruturas", Tese de Doutorado. EESC-USP, São Carlos, 1961.
- MARTINELLI, D.A.O. - "Sobre a Ruína das Ligações Laje-Pilar nos Cantos de Lajes-Cogumelo", Tese de Livre-Docência. EESC-USP, São Carlos, 1974. 142 p.
- MASSONNET, C. y M. SAVE - "Calculo Plastico de las Construcciones". Montaner y Simon, S.A., Barcelona, 1966.

- MONTANARI, I. - "Carga de Ruptura em Tabuleiro de Pontes", Tese de Doutorado. EESC-USP, São Carlos, 1969.
- MORETO, O. - "Curso de Hormigon Armado", 2<sup>a</sup> Edición. Librería El Ateneo Editorial, Buenos Aires, 1970. 1074 p.
- MORLEY, C.T. - "Equilibrium Methods for Exact Upper Bounds of Rigid Plastic Plates". in Recent Developments in Yield Line Theory. London, Cement and Concrete Association, 1965a. M.C.R. Special Publication.
- MORLEY, C.T. - "The Ultimate Bending Strength of Reinforced Concrete Slabs", Ph. D. Thesis, Cambridge Univ., 1965b.
- MORLEY, C.T. - "Yield-line Theory for Reinforced Concrete Slabs at Moderately Large Deflections". Magazine of Concrete Research, Volume 19, nº 61, XII/1967. p. 211/221.
- MÖRSCH, E. - "Ensayos con Losas de Hormigón Armado de Forma Cuadrada Apoyadas em Todos los Lados". Deutsche Bauzeitung, Mitteilungen über Zement, Beton und Eisenbetonbau, 1916. H3.
- MÖRSCH, E. - "Teoría y Práctica del Hormigón Armado", Tomo II. Ediciones G. Gili, S.A., Buenos Aires, 1952.
- OCKLESTON, A.J. - "Load Tests on a Three Storey Reinforced Concrete Building in Johannesburg". The Structural Engineer, X/1955. p. 304.
- OCKLESTON, A.J. - "Arching Action in Reinforced Concrete Slabs". The Structural Engineer, XXVI, Nº 6, 1958. p. 197.

- PADILHA, S.F. - "Contribuição ao Estudo Experimental do Efeito de Arqueamento em Lajes de Concreto Armado", Dissertação de Mestrado. EESC-USP, São Carlos, 1979.
- PARK, R. - "Tensile Membrane Behaviour of Uniformly Loaded Rectangular Reinforced Concrete Slabs with Fully Restrained Edges". Magazine of Concrete Research, Volume 16, nº 46, III/1964a. p. 39/44.
- PARK, R. - "The Ultimate Strength of Uniformly Loaded, Laterally Restrained, Rectangular Two-way Concrete Slabs". Universidade de Bristol, Tese, 1964b.
- PARK, R. - "Ultimate Strength of Rectangular Concrete Slabs Under Short - Term Uniform Loading with Edges Restrained Against Lateral Movement". Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Volume 28, VI/1964c. p. 125/150.
- PARK, R. - "The Ultimate Strength and Load - Term Behaviour of Uniformly Loaded Two-Way Concrete Slabs with Partial Lateral Restraint at All Edges". Magazine of Concrete Research, Volume 16, nº 48, IX/1964d. p. 139/152.
- PARK, R. - "The Lateral Stiffness and Strength Required to Ensure Membrane Action at the Ultimate Load of Reinforced Concrete Slab and Beam Floor". Magazine of Concrete Research, Volume 17, nº 50, III/1965. p. 29.
- PARK, R. - "Membrane Action at the Ultimate Load of Laterally Restrained Concrete Slabs". CEB, Bulletin d'Information nº 58, X/1966. p. 135.
- POLILO, A. - "Sugestão para o Cálculo, pelo Método de Ruptura, das Lajes Retangulares de Pontes, Apoiadas nos Quatro Lados". Escola Nacional de Engenharia, Rio de Janeiro, 1964.

- POWELL, D.S. - "The Ultimate Strength of Concrete Panels Subjected to Uniformly Distributed Loads", These. Universidade de Cambridge, 1956.
- RAMAKRISHNAN, V. and P.D. ARTHUR - "Ultimate Strength Design for Structural Concrete". Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1969.
- ROCHA, M. - "Dimensionamento Experimental das Construções". Mem. nº 21 do LNEC, Lisboa, 1952.
- SAVE, M.A. e C.E. MASSONNET - "Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks". North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1972.
- SAWCZUK, A. e L. WINNICKI - "Plastic Behaviour of Simply Supported Concrete Plates at Moderately Large Deflections". Structural Research Series, nº 265, University of Illinois, 1963. p. 97/111.
- SCHIEL, F. e D.A.O. MARTINELLI - "Argamassas Armadas em Elementos Estruturais". Forum de Engenharia, Técnica e Equipamentos nº 4, Ano 1, Julho de 1964. Edição Mensal de Habitat Editora Ltda, São Paulo.
- SHEWMAKER, R.E., M. XANTHAKIS e M.A. SOZEN - "Very Small Scale Reinforced Concrete Multi-Panel Flat Slabs". Structural Research Series nº 265, University of Illinois, 1963.
- STEINMAN, G. - "Calculo de Placas por la Teoria de las Lineas de Rotura". Instituto Tecnico de la Construction y del Cemento, Madrid, 1951.
- SUENSON, E. - "Krydsarmerede Saernbetonpladers Styrke". Ingeniören, Copenhagen, V. 25, Nº 76, 78, 95, 1916.

- SZILARD, R. - "Theory and Analysis of Plates". Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974. p. 571/612.
- TAYLOR, R. - "A Note on a Possible Basis for a New Method of Ultimate Load Design of Reinforced Concrete Slabs". Magazine of Concrete Research, Volume 17, n<sup>o</sup> 53, XII/1965. p. 183/186.
- WOOD, R.H. - "Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates". Thames and Hudson, London, 1961.
- WOOD, R.H. - "New Techniques in Nodal Force Theory for Slabs", in Recent Developments in Yield Line Theory. London, Cement and Concrete Association, 1965. M.C.R. Special Publication.
- ZAGOTTIS, D.L. - "Charneiras Plásticas - Configurações de Ruptura com Superfícies Cônicas". EPUSP - São Paulo, 1967.
- ZAGOTTIS, D.L. - "Charneiras Plásticas - Configurações de Ruína com Superfícies Regradas de Característica Retilínea". EPUSP - São Paulo, 1968.