

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**INSTABILIDADE DE FOLHAS PLANAS
COM VINCULAÇÕES ELÁSTICAS**

Eng^o JOÃO BATISTA DE PAIVA

SÃO CARLOS, NOVEMBRO DE 1980

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

INSTABILIDADE DE FOLHAS PLANAS
COM VINCULAÇÕES ELÁSTICAS

ENG. JOÃO BATISTA DE PAIVA

Dissertação apresentada à Escola
de Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para a ob
tenção do título de "Mestre em
Engenharia de Estruturas".

Orientador:

PROF. DR. MUNIR RACHID

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Munir Rachid
Prof. Dr. Walter Savassi
Prof. Dr. Tioeturo Yagui

Suplentes:

Prof. Dr. Ilio Montanari
Prof. Dr. Paulo Seleguin

A meus pais,
cujo amor aos filhos
transcende a tudo que
possa ser dito com palavras.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Ao Prof. Dr. Munir Rachid, pela orientação dada no de
correr deste trabalho.

Ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenh
nharia de São Carlos, pela utilização de seus equipamentos.

À Sra. Wilma Provinciali Vall pela datilografia e ao
Sr. João Paulo Moretti pelos desenhos.

À FAPESP, pela bolsa de estudos concedida durante os
anos de 1977 e 1978.

RESUMO

O presente trabalho consiste no estudo do comportamento de folhas planas com vinculações elásticas, utilizando o método dos elementos finitos.

Foi estudada a determinação do estado crítico de tensões de uma chapa, como também foi feita a análise de problemas de flexão de folhas planas pela teoria de segunda ordem, e, como caso particular, a análise de flexão de placas pela teoria de primeira ordem.

Foi desenvolvido um programa para computador para o estudo dos 3 problemas acima mencionados.

O programa permite a análise de problemas bem gerais de folhas planas quanto a geometria, vinculação, espessura e carregamento, bem como folhas apoiadas total ou parcialmente em uma base elástica.

ABSTRACT

The present work intends to study plates with elastic restraints, by means of finite element method.

The determination of buckling stresses as well the analysis of bending of plates, by the second order theory, were studied. As a particular case was analysed the bending by the first order theory.

A program for computer was developed for these cases. This program allows the analysis of general problems with respect to geometry, restraints, thickness and load. The case of plates on elastic foundations also can be analysed.

Í N D I C E

1. INTRODUÇÃO	1
2. EQUAÇÕES GERAIS DA FLEXÃO DE FOLHAS PLANAS	5
2.1 - Hipóteses básicas	5
2.2 - Relações entre momentos e curvaturas	5
2.3 - Momento de torção	10
2.4 - Equação diferencial da elástica	13
2.5 - Energia de deformação	15
2.6 - Trabalho das cargas transversais ao plano médio da placa	17
2.7 - Energia de deformação de vínculos elásticos	18
2.8 - Energia de deformação de uma base elástica	20
2.9 - Energia potencial das cargas aplicadas no plano médio da folha	21
2.10 - Expressão da energia total	24
2.11 - Problemas de 1 ^a e 2 ^a espécie	27
3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AO ESTUDO DE FOLHAS PLANAS.....	28
3.1 - O método dos elementos finitos	28
3.2 - Elemento adotado	29
3.3 - Função aproximadora	31
3.4 - Matriz de rigidez do elemento	32
3.5 - Determinação do vetor de cargas nodais	38
3.5.1 - Cargas concentradas nos nós	38
3.5.2 - Carga distribuída no elemento	39
3.6 - Matriz de instabilidade decorrente dos esforços aplicados no plano médio da folha	40
3.7 - Matriz de rigidez dos vínculos elásticos	42

3.7.1 - Matriz de rigidez de uma base elástica ...	42
3.7.2 - Matriz de rigidez de vínculos elásticos concentrados	44
3.8 - Funcional de uma folha com cargas transversais e contidas no plano médio	45
3.9 - Integração das funções na superfície do elemento finito	46
3.10 - Determinação dos termos da matriz de rigidez	50
3.11 - Determinação dos termos da matriz de instabilidade...	57
3.12 - Determinação dos termos da matriz de rigidez de uma base elástica	64
3.13 - Termos do vetor de cargas nodais equivalente a um carregamento distribuído sobre o elemento	70
3.14 - Montagem da matriz $[C]$	71
3.15 - Redução do número de graus de liberdade do elemento finito	76
3.16 - Condições de contorno	84
3.17 - Determinação dos momentos	90
3.18 - Reações de apoio	91
4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	93
4.1 - Folha com carregamento no plano médio e sem carre- gamento transversal (flambagem de chapas)	93
Exemplo 1	94
Exemplo 2	99
Exemplo 3	100
Exemplo 4	101
Exemplo 5	102
Exemplo 6	103
Exemplo 7	104
Exemplo 8	107
4.2 - Folha com carregamento transversal e no plano mé- dio (teoria de 2ª ordem da flexão de placas)	108
Exemplo 1	109

Exemplo 2	110
Exemplo 3	111
4.3 - Folha com carregamento transversal e sem carregamento no plano médio (flexão de placas)	112
Exemplo 1	112
Exemplo 2	113
5. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA	114
5.1 - Descrição das subrotinas	114
5.2 - Programas principais	116
5.3 - Entrada de dados	117
5.3.1 - Entrada de dados do PROG1	117
5.3.2 - Explicação das matrizes ITIPO(I), ITC(I), NTP(J), NTC(J) e dos valores NTIPO e NETC ..	123
5.4 - Explicação da matriz LNOBO	126
5.5 - Explicação do fator BETA	127
6. CONCLUSÕES	129
APÊNDICE 1 - Matriz de instabilidade de um elemento <u>f</u> inito com estado de tensões linearmente <u>v</u> ariável	131
APÊNDICE 2 - Programa em linguagem FORTRAN para o Computador IBM-1130 do Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos	133
BIBLIOGRAFIA	174

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo o estudo geral da resolução dos problemas de flexão e instabilidade de folhas planas, no regime elástico, utilizando-se o método dos elementos finitos.

As equações das folhas planas são tratadas em TIMOSHENKO [1] e problemas de instabilidade se encontram resolvidos analiticamente em BULSON [9], que constitui praticamente um manual para o cálculo de instabilidade de folhas planas de contorno regular.

O método dos elementos finitos foi "inicialmente" apresentado em forma de textos por ZIENKIEVSKY [10], sendo que em HOLLAND-BELL [7] se encontra, de uma maneira mais prática, o desenvolvimento do método aplicado ao cálculo de folhas planas. Em DEGASPARE [6], encontra-se uma aplicação do método ao cálculo de flexão de placas em teoria de 1ª ordem.

Adotou-se neste trabalho uma nomenclatura baseada no "Vocabulário de Teoria das Estruturas" [14], a saber:

folha - corpo em que uma das dimensões é muito menor que as outras duas (a folha plana é caracterizada por ser plana a sua superfície média).

chapa - folha plana sujeita a esforços existentes apenas em seu plano médio.

placa - folha plana sujeita a esforços existentes fora de seu plano médio.

No que se refere à perda de estabilidade de folhas planas, dois tipos de problemas serão abordados.

a) Flambagem de chapas

Neste tipo de problema, a perda de estabilidade é caracterizada pela passagem de um estado de equilíbrio (a chapa plana) para um estado de equilíbrio qualitativamente diferente (a chapa fletida). O estudo tem por objetivo a determinação do carregamento crítico, ou seja, aquele carregamento que provoca a instabilidade.

Este problema é também chamado de problema de 1ª espécie e recai-se em um problema de auto-valor, ficando a elástica de flexão determinada apenas em sua forma.

b) Flexão de folhas planas (teoria de 2ª ordem)

Neste tipo de problema, a elástica é determinada e o sistema de equações que o resolve é um sistema linear não homogêneo, com uma única solução. A medida que o carregamento do plano médio se aproxima de seu valor crítico, a elástica tende para o infinito, não existindo proporcionalidade entre cargas e deslocamentos. É também chamado de problema de 2ª espécie.

Neste caso, o estudo tem por objetivo não somente a determinação do carregamento crítico como também a determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem.

Foi desenvolvido um programa para computador que permite tratar os problemas citados bem como o caso de flexão de placas: nestes problemas a elástica é determinada e a relação entre cargas e deslocamentos é linear. Permite ainda o tratamento de problemas com vinculações elásticas, concentradas ou distribuídas, bem como resolver problemas de folhas apoiadas sobre uma base elástica.

No capítulo seguinte é feito uma revisão das equações

básicas da teoria de flexão das folhas e são preparadas as várias parcelas do funcional, ou seja, a energia de deformação da folha na flexão, a energia de deformação dos vínculos elásticos e de uma base elástica e também o trabalho das cargas externas, concentradas ou distribuídas. Além disso é preparada a expressão da energia de deformação acumulada, na flexão, por um carregamento contido em seu plano médio pois é esse o carregamento responsável pela instabilidade das folhas planas. Finalmente é montado o funcional da folha em seu caso mais geral.

No terceiro capítulo, a expressão do funcional, obtida no capítulo anterior para um elemento de folha, é aplicada a um elemento finito triangular (T-21), elemento este que, por sua função aproximadora e por seus deslocamentos nodais, garante a continuidade da folha. A expressão do funcional se transforma, então, em uma função de variáveis nos deslocamentos nodais e a imposição de ser extrema a energia conduz a um sistema de equações lineares nos deslocamentos nodais.

A seguir, é realizada a integração das funções, obtidas no início do capítulo, na área do elemento finito usando a fórmula apresentada por BREBBIA [5] e são listadas as diversas matrizes que serão usadas no programa, para um elemento genérico: matriz de rigidez, matriz de instabilidade de um carregamento no plano médio, matriz de rigidez de uma base elástica, matriz de rigidez dos vínculos elásticos, vetor de cargas nodais equivalentes a um carregamento distribuído no elemento e o vetor de cargas nodais devido a esforços concentrados nos nós do elemento.

No quarto capítulo são apresentados vários exemplos de folhas planas e comparados os resultados com os obtidos analiticamente pela resolução da equação diferencial. Esse capítulo

está dividido em três partes, ou seja:

a) Folhas com carregamento no plano médio e sem carregamento transversal: flambagem de chapas.

b) Folhas com carregamento no plano médio e com carregamento transversal: flexão de folhas em teoria de 2^a ordem.

c) Folhas sem carregamento no plano médio e com carregamento transversal: flexão de placas em teoria de 1^a ordem.

No quinto capítulo é feita uma descrição das várias subrotinas usadas no programa. É feita também uma descrição da ordem de entrada dos dados e seus formatos e, finalmente, comentários para a melhor compreensão de algumas matrizes usadas no programa.

Após conclusões e sugestões para se obterem bons resultados com o programa desenvolvido é apresentada, em apêndice, a listagem do programa e finalmente, apresenta-se a bibliografia consultada.

2 - EQUAÇÕES GERAIS DA FLEXÃO DE FOLHAS PLANAS

2.1 - Hipóteses básicas

As hipóteses básicas [1] da teoria de flexão de placas são:

- a) os deslocamentos são pequenos;
- b) não há deformação no plano médio da placa, a posição deste plano após a deformação é chamada de superfície elástica;
- c) os pontos, situados inicialmente em uma normal ao plano médio da placa, permanecem, depois da flexão, em uma mesma normal à superfície elástica da placa;
- d) as tensões normais na direção transversal da placa são desprezadas.

2.2 - Relações entre momentos fletores e curvaturas

Estudando-se os pequenos deslocamentos de uma placa, toma-se o plano médio da placa antes da flexão como o plano xy. Durante a flexão, os pontos que se encontravam no plano xy sofrem pequenos deslocamentos w perpendiculares ao plano xy e formam a superfície elástica da placa.

Para um ponto genérico da placa define-se a declividade da superfície elástica na direção x como:

$$i_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Igualmente, a declividade na direção y é definida por:

$$i_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Para se determinarem as curvaturas da placa, deve-se ter em conta que os deslocamentos são muito pequenos.

A curvatura de um ponto genérico da placa na direção x é dada por:

$$\frac{1}{r_x} = \pm \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Como os deslocamentos são pequenos tem-se que o denominador da expressão é aproximadamente igual à unidade e assim pode-se escrever:

$$\frac{1}{r_x} \cong \pm \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

As curvaturas são consideradas positivas quando a concavidade é voltada para cima (ver figura 2.1.c). Então quando as curvaturas são positivas, as segundas derivadas são negativas, e na expressão anterior, vale o sinal negativo:

$$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \dots (2.1)$$

Igualmente, obtém-se para a curvatura na direção y :

$$\frac{1}{r_y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \dots (2.2)$$

Seja um elemento de placa submetido à flexão pura devido a momentos uniformemente distribuídos em seu contorno conforme indica a figura 2.1.a.

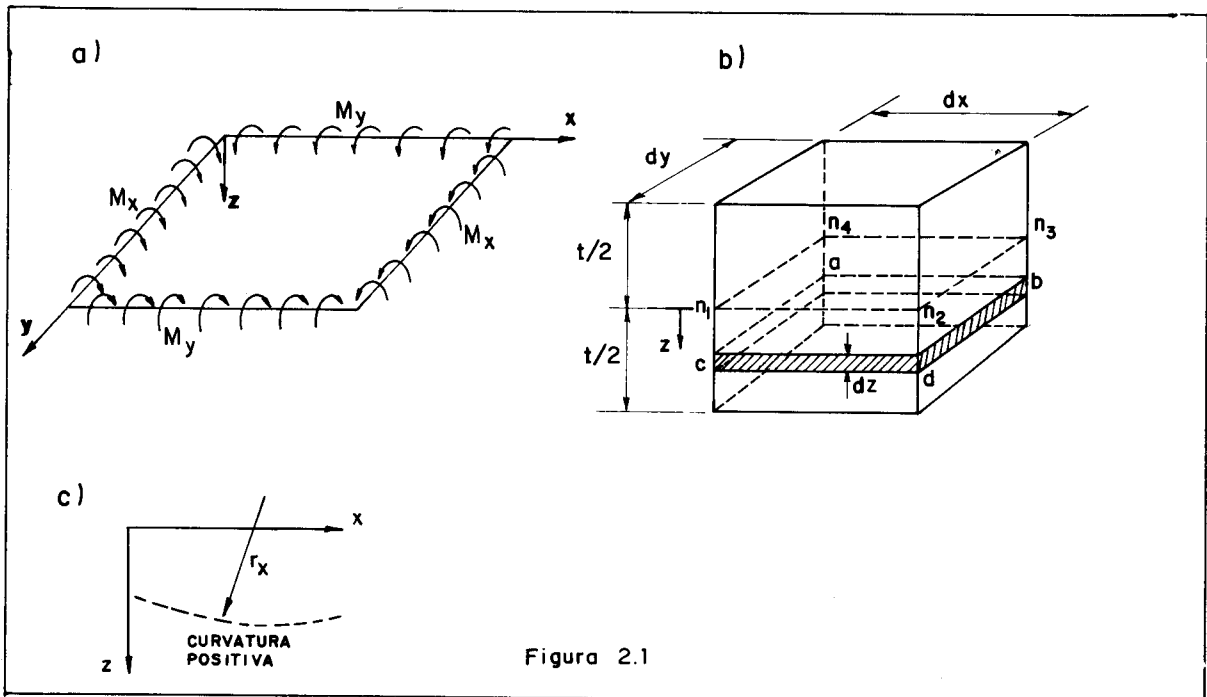


Figura 2.1

Seja M_x o momento fletor por unidade de comprimento que atua sobre os lados paralelos ao eixo y e M_y o momento fletor por unidade de comprimento que atua sobre os lados paralelos ao eixo x . Estes momentos são considerados positivos quando causam tração nas fibras inferiores da placa.

Considere-se agora o elemento de placa da figura 2.1.b com a hipótese que, durante a flexão, as faces laterais continuam planas e giram em torno dos eixos contidos na superfície média. As posições antes e depois das faces laterais estão indicadas na figura 2.2.

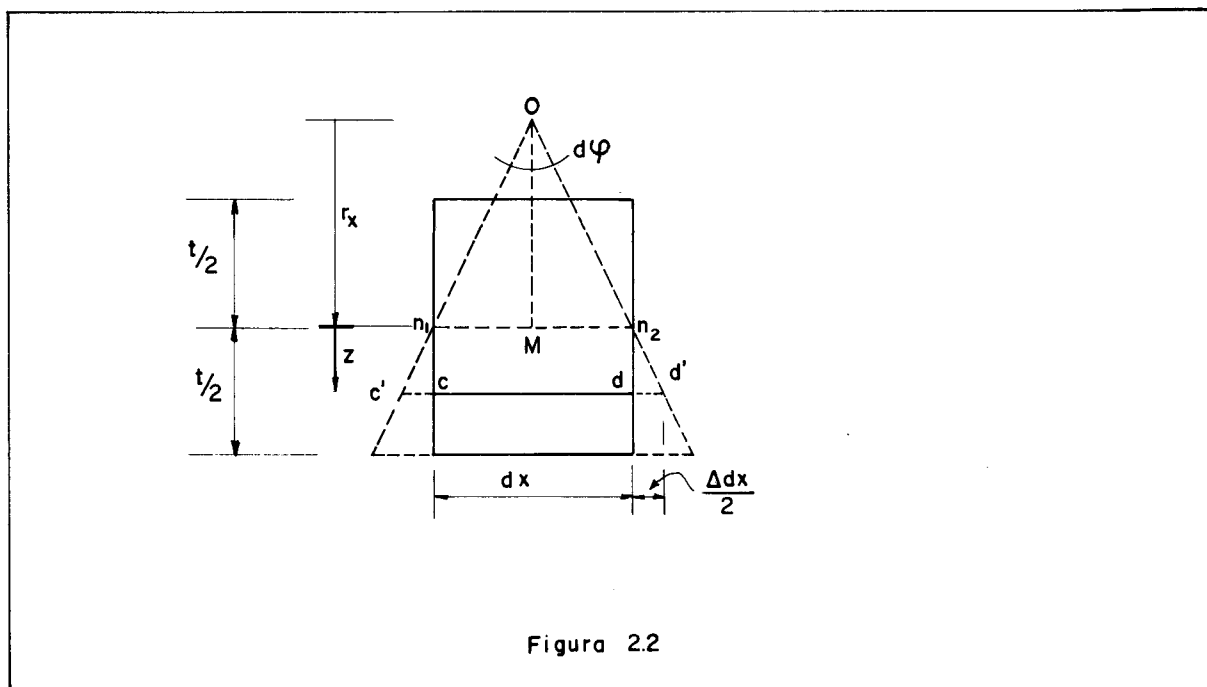


Figura 2.2

Da semelhança dos triângulos OMn_2 e n_2dd' tira-se:

$$\frac{r_x}{\frac{dx}{2}} = \frac{z}{\frac{\Delta dx}{2}}$$

de onde vem:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z}{r_x}$$

Lembrando que:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

chega-se a

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad \dots (2.3.a)$$

e analogamente:

$$\epsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad \dots (2.3.b)$$

Da lei de Hooke tem-se que:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) \end{aligned} \right\} \dots (2.4)$$

onde:

E: módulo de elasticidade

μ : coeficiente de Poisson

Substituindo ϵ_x e ϵ_y , dados por (2.3.a) e (2.3.b), em (2.4) obtêm-se:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right] \quad \dots (2.5)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right]$$

As tensões normais nas faces do elemento devem ser tais que as suas resultantes equilibrem os momentos aplicados. Portanto:

$$M_x dy = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dy dz \quad \dots (2.6)$$

$$M_y dx = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dx dz$$

Substituindo σ_x e σ_y , dadas por (2.5), em (2.6), obtêm-se:

$$M_x dy = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right] z^2 dy dz$$

$$M_y dx = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right] z^2 dx dz$$

e, portanto:

$$M_x = D \left[\frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right] = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \dots (2.7)$$

$$M_y = D \left[\frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right] = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad \dots (2.8)$$

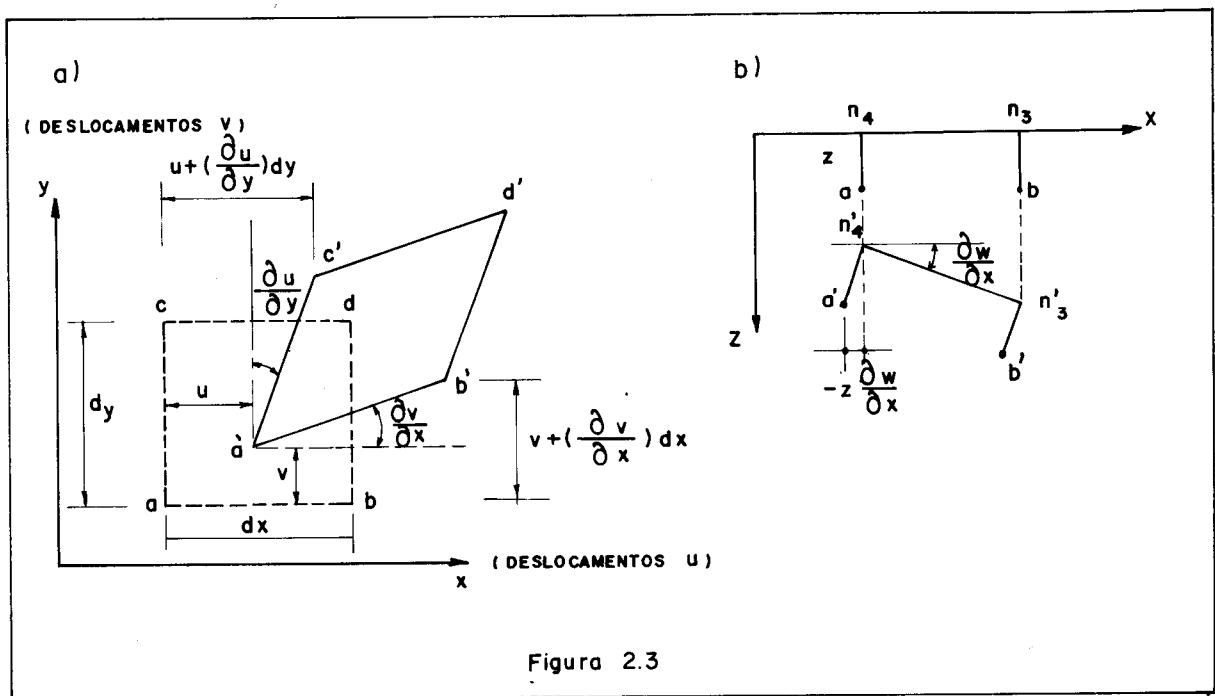
onde D é a rigidez à flexão da placa, sendo a sua expressão dada por:

$$D = \frac{E t^3(x,y)}{12(1-\mu^2)} \dots (2.9)$$

onde se está admitindo que a espessura pode ser variável.

2.3 - Momento de torção

Considere-se agora a distorção de uma lâmina de placa $abcd$ (ver figuras 2.1.b e 2.3.a), cujos lados ab e ac são, respectivamente, paralelos aos eixos x e y e estão situados a uma distância z do plano médio.



Durante a flexão da placa os pontos a, b, c e d sofrem pequenos deslocamentos e passam à posição a', b', c' e d' . As componentes de deslocamentos do ponto a nas direções x e y são u e v , respectivamente. Portanto o deslocamento do ponto b na direção y é:

$$v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$$

e o deslocamento do ponto c na direção x é:

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$$

Assim a distorção do elemento fica dada por:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2.10)$$

e a tensão de cisalhamento fica dada por:

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \dots (2.11)$$

Na figura 2.3.b está representada uma secção da superfície média da placa paralela ao plano xz e passando pelos pontos a, b, n₃ e n₄. Pode-se notar que o ângulo de rotação, neste plano, de um elemento an₄, que inicialmente era perpendicular ao plano xy, é igual a $\frac{\partial w}{\partial x}$. Assim, o deslocamento na direção x do ponto a situado a uma distância z da superfície média é:

$$u = - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots (2.12)$$

Analogamente, pode-se obter que, para o mesmo ponto, o seu deslocamento na direção y é:

$$v = - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots (2.13)$$

Substituindo u e v, dados por (2.12) e (2.13), em (2.10) obtêm-se para a distorção da lâmina abcd considerada:

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots (2.14)$$

e a tensão de cisalhamento correspondente fica dada por:

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots (2.15)$$

Sendo M_{xy} o momento torçor por unidade de comprimento, na direção y , tem-se:

$$M_{xy} dy = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dy \, dz = \frac{Gt^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy$$

como

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

a expressão anterior torna-se:

$$M_{xy} = D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots (2.16.a)$$

Lembrando-se que, pelo Teorema de CAUCHY

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

obtêm-se, analogamente:

$$M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots (2.16.b)$$

Os momentos M_{xy} e M_{yx} são considerados positivos quando seus vetores são emergentes da face considerada conforme in dica a figura 2.4.a.

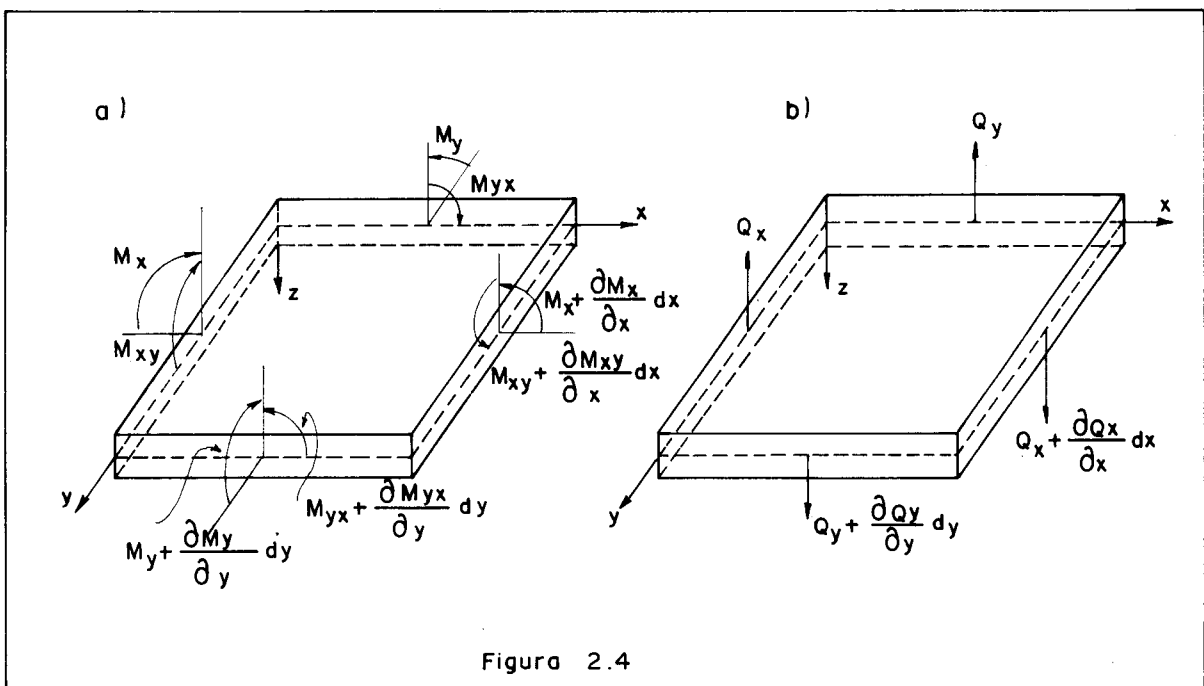
2.4 - Equação diferencial da elástica

Para a determinação da equação da elástica de uma placa submetida a carregamento perpendicular ao seu plano médio, considere-se o elemento de placa da figura 2.1.b, indicado novamente na figura 2.4, onde se indicam também os momentos M_x , M_y e M_{xy} e os esforços cortantes verticais, por unidade de comprimento, que atuam nas faces do elemento. Estes esforços, indicados por Q_x e Q_y , são dados por:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad \dots (2.17)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

e são considerados positivos como indicados na figura 2.4.



O elemento de placa está sujeito a um carregamento u uniformemente distribuído de valor q , na direção de z . Do equilí

Equilíbrio das forças segundo a direção z, tem-se que:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + q dx dy = 0$$

de onde se obtêm:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad \dots (2.18)$$

Impondo equilíbrio dos momentos em torno do eixo x e desprezando os diferenciais de ordem superior tem-se que:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + Q_y dx dy = 0$$

da qual se obtêm:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad \dots (2.19)$$

Do mesmo modo, impondo-se agora o equilíbrio em torno do eixo y, tem-se:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad \dots (2.20)$$

Tirando-se as expressões de Q_y e Q_x das equações (2.19) e (2.20) e aplicando-se-as em (2.18), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -q \quad \dots (2.21)$$

Como

$$M_{yx} = -M_{xy}$$

a expressão (2.21) fica:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad \dots (2.22)$$

Finalmente, pela substituição dos momentos pelas suas expressões, dadas por (2.7), (2.8) e (2.16.a), obtêm-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \dots (2.23)$$

que é a equação da placa quando existe somente carga transversal.

2.5 - Energia de deformação

Se um elemento de placa for submetido a momentos fletores M_x e M_y uniformemente distribuídos (ver figura 2.1.a), a energia de deformação armazenada neste elemento se determina calculando o trabalho produzido pelos momentos $M_x dy$ e $M_y dx$ sobre o elemento durante a flexão de placas.

Pela figura 2.2, tem-se que:

$$d\varphi = \frac{dx}{r_x}$$

Por (2.1), obtêm-se:

$$d\varphi = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

Então a parcela de energia correspondente ao momento M_x será dada por:

$$dU_1 = \frac{1}{2} M_x dy \cdot \left(- \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) = - \frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \quad \dots (2.24)$$

Analogamente, a parcela de energia correspondente ao momento M_y será dada por:

$$dU_2 = - \frac{1}{2} M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \quad \dots (2.25)$$

Se, além dos momentos M_x e M_y , atuarem sobre a placa momentos torçores M_{xy} e M_{yx} , a parcela correspondente de energia se determina tomando-se a metade do produto do momento torçor pelo correspondente ângulo de giro (ver figura 2.5).

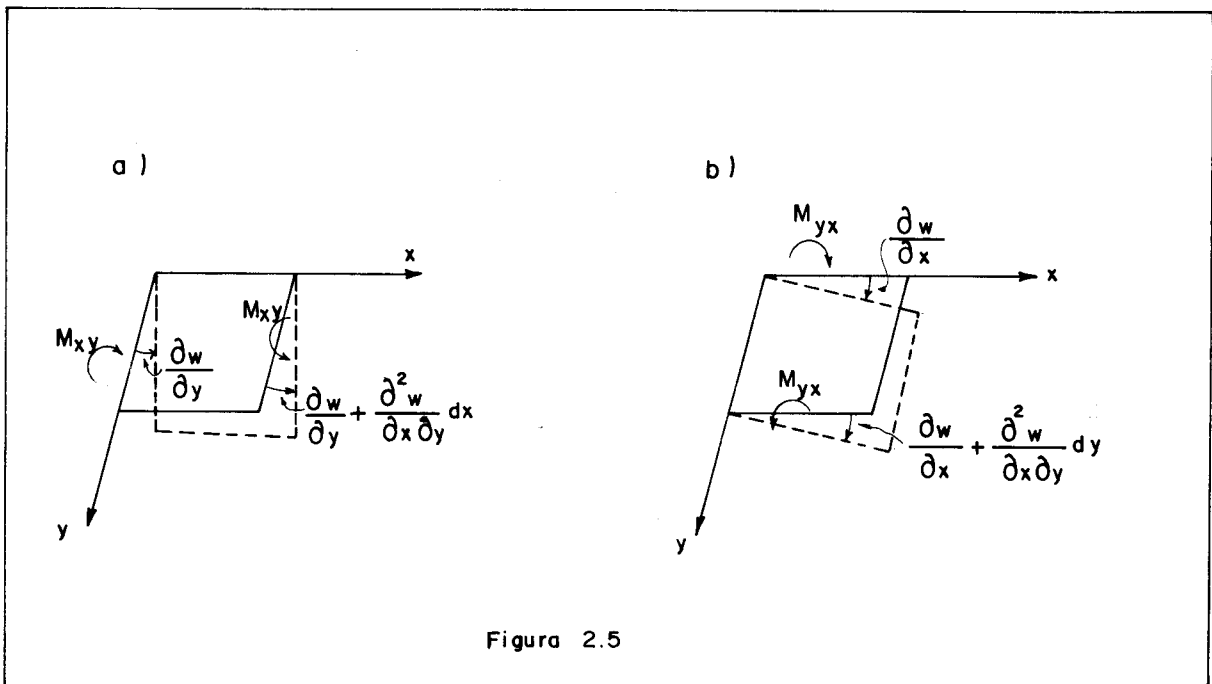


Figura 2.5

Assim a energia correspondente a M_{xy} é dada por:

$$dU_3 = - \frac{1}{2} M_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} M_{xy} dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx\right)$$

ou seja:

$$dU_3 = \frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy \quad \dots (2.26)$$

Analogamente obtêm-se para a energia de M_{yx} :

$$dU_4 = - \frac{1}{2} M_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy \quad \dots (2.27)$$

A energia total do elemento de placa considerado é obtida adicionando-se as expressões (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27).

Como

$$M_{xy} = -M_{yx}$$

a expressão da energia de deformação fica sendo:

$$dU = - \frac{1}{2} \left[M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad \dots (2.28)$$

2.6 - Trabalho das cargas transversais ao plano médio da placa

Seja uma placa submetida a cargas transversais ao seu plano médio. Essas cargas podem ser distribuídas sobre a placa ou concentradas em um ponto i conforme indica a figura 2.6. A figura indica também o sentido em que as cargas concentradas são consideradas positivas. Podem ser considerados também momentos aplicados, como indicado na figura com o seu sentido positivo.

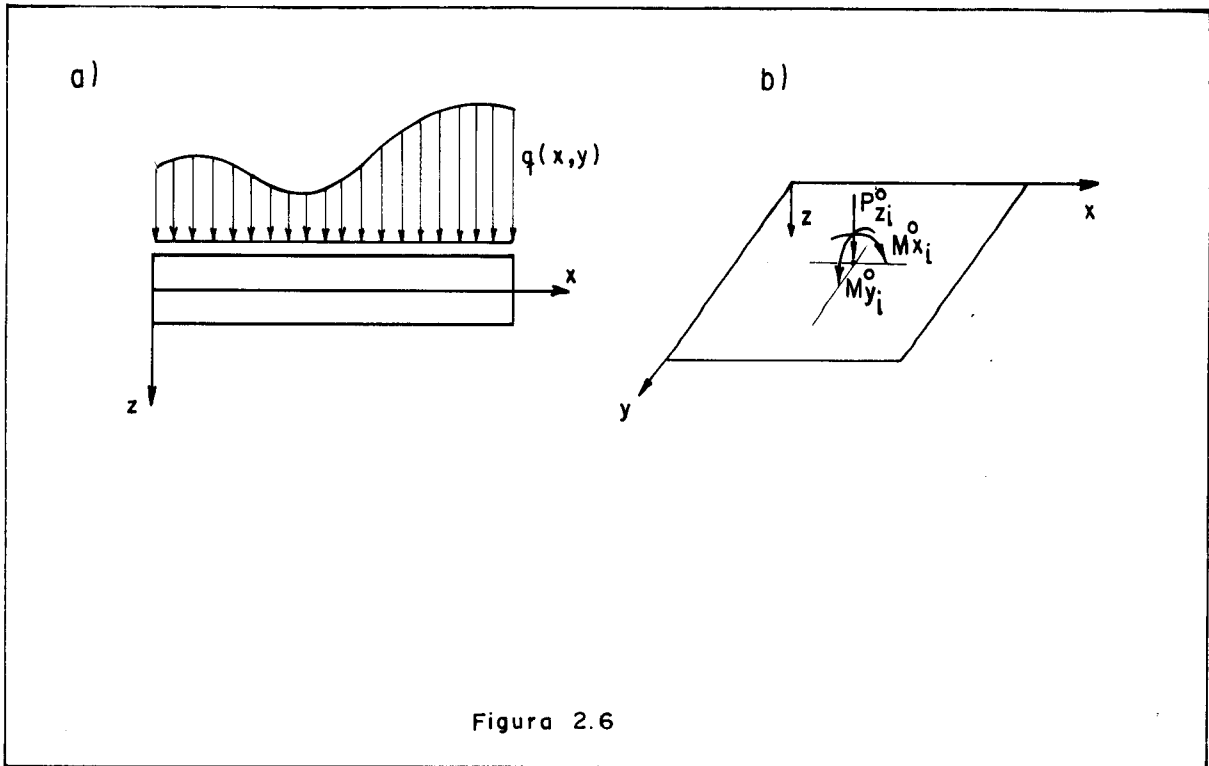


Figura 2.6

Para a carga distribuída sobre a placa o trabalho realizado é dado por:

$$T_q = \int_A q(x,y) w(x,y) dx dy \quad \dots (2.29)$$

onde A é a área da superfície média da placa.

Para as cargas aplicadas no ponto i, o trabalho é dado por:

$$T_P = P_{zi}^o w_i + M_{xi}^o w_{,xi} + M_{yi}^o w_{,yi} \quad \dots (2.30)$$

onde w_i , $w_{,xi}$ e $w_{,yi}$ são, respectivamente, o deslocamento na direção z, a rotação em torno do eixo y e a rotação em torno do eixo x no ponto i da superfície elástica.

2.7 - Energia de deformação de vínculos elásticos

Seja a placa submetida à flexão e com vínculos elásticos concentrados em um ponto i conforme indica a figura 2.7, onde:

K_{zi} : constante de mola do vínculo elástico ao deslocamento do ponto i na direção z .

K_{xi} : constante de mola do vínculo elástico à rotação no ponto i em torno do eixo y .

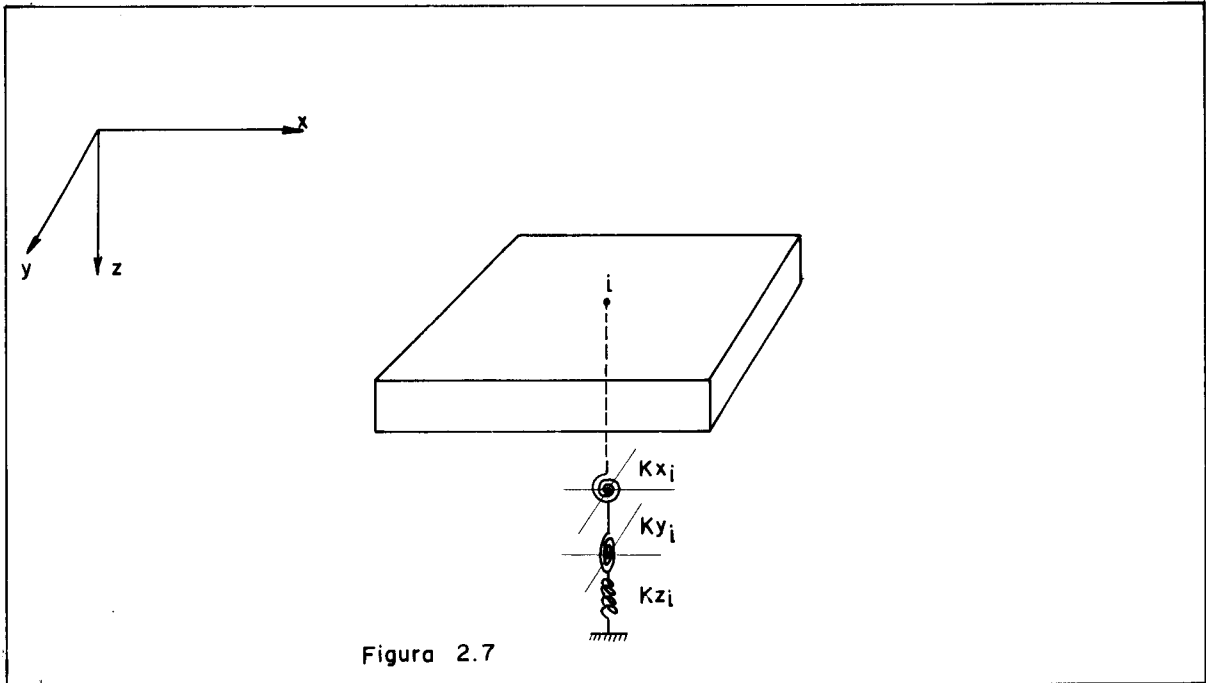
K_{yi} : constante de mola do vínculo elástico à rotação no ponto i em torno do eixo x .

Essas constantes de mola relacionam diretamente os esforços que transmitem com os respectivos deslocamentos, ou seja:

$$P_{zi} = K_{zi} w_i$$

$$M_{xi} = K_{xi} w_{,xi}$$

$$M_{yi} = K_{yi} w_{,yi}$$



A energia de deformação dos vínculos elásticos é obtida tomando-se a metade do produto do esforço transmitido pelo respectivo deslocamento. Seja, por exemplo, a energia de deformação acumulada no vínculo K_{zi} :

$$U_{K_{zi}} = \frac{1}{2} P_{zi} \cdot w_i$$

porém:

$$P_{zi} = K_{zi} \cdot w_i$$

Substituindo P_{zi} na expressão anterior, obtêm-se:

$$U_{K_{zi}} = \frac{1}{2} K_{zi} w_i^2 \quad \dots (2.31)$$

Analogamente obtêm-se:

$$U_{K_{xi}} = \frac{1}{2} K_{xi} w_{,xi}^2 \quad \dots (2.32)$$

$$U_{K_{yi}} = \frac{1}{2} K_{yi} w_{,yi}^2 \quad \dots (2.33)$$

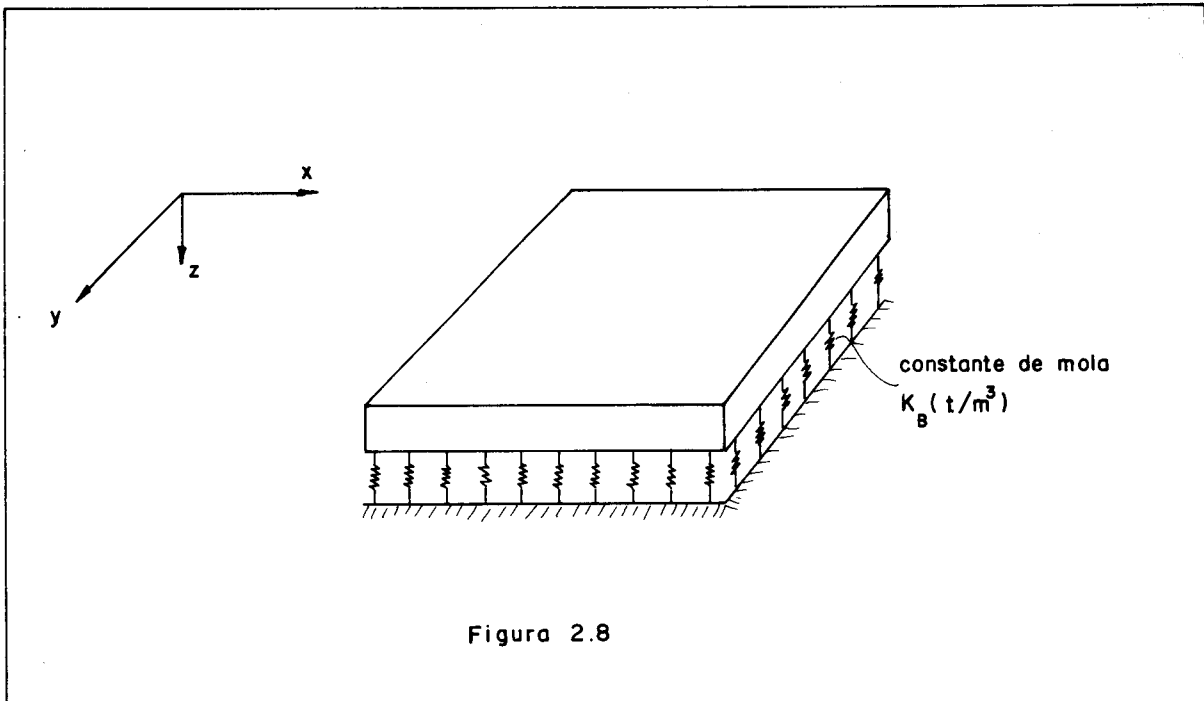
A energia total armazenada nos vínculos elásticos do ponto i é obtida pela soma das energias acumuladas em cada tipo de vínculo. Estendendo-se esta soma a todos os pontos da placa com vinculações elásticas obtêm-se a expressão da energia acumulada em todos vínculos elásticos da placa e que fica dada por:

$$U_K = \frac{1}{2} \sum_i (K_{zi} w_i^2 + K_{xi} w_{,xi}^2 + K_{yi} w_{,yi}^2) \quad \dots (2.34)$$

2.8 - Energia de deformação de uma base elástica

Seja uma placa apoiada sobre uma base elástica conforme indica a figura 2.8. Admite-se que a reação por unidade de área da base elástica seja proporcional ao deslocamento vertical da placa ou seja:

$$R = K_B w$$



A constante K_B , que é expressa em unidades de força por unidade de comprimento ao cubo, é denominada de constante da base elástica.

A energia de deformação da base elástica é dada por:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_A (R \, dx dy) w$$

ou:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_A K_B w^2(x,y) \, dx dy \quad \dots (2.35)$$

2.9 - Energia potencial das cargas aplicadas no plano médio da folha

Como foi mencionado na Introdução, para o estudo de instabilidade de chapas há necessidade de se calcular a energia de deformação correspondente aos esforços aplicados no seu plano médio.

Seja um elemento (figura 2.9.a), de espessura t , submetido a um carregamento em seu plano médio e a um carregamento distribuído transversal ao plano médio. As tensões σ_x^o , σ_y^o e τ_{xy}^o são provenientes do carregamento no plano médio e são obtidas pelas equações da teoria da elasticidade.

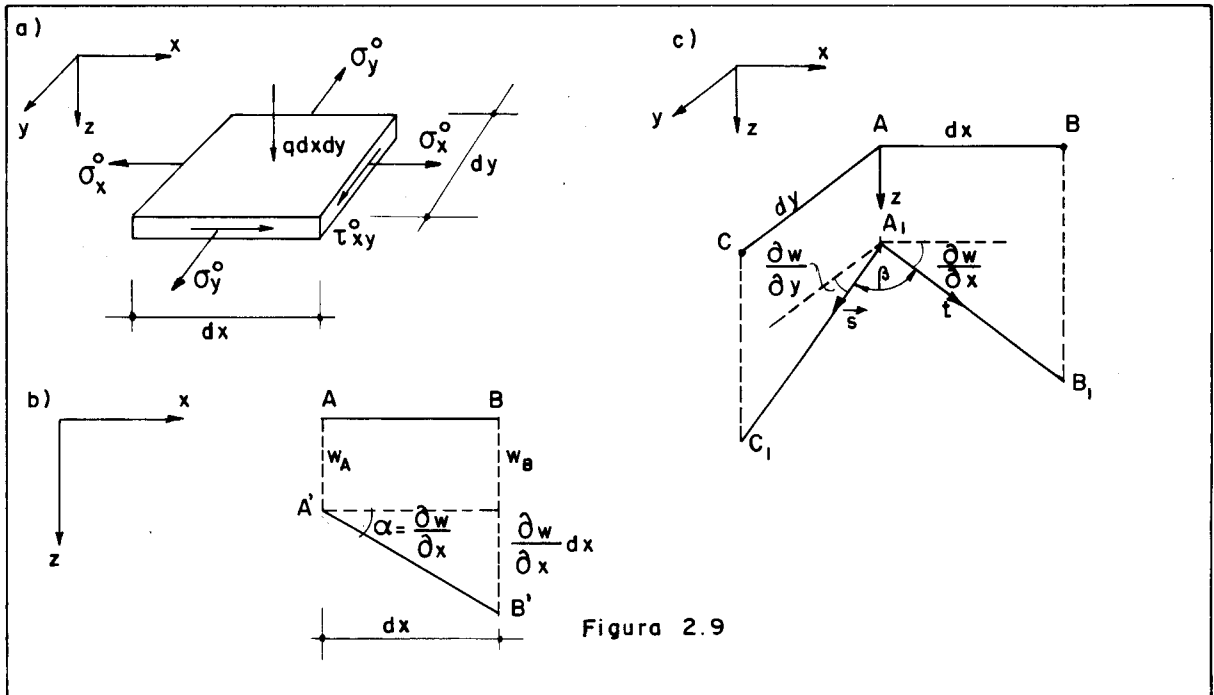


Figura 2.9

A carga transversal produzirá uma flexão na placa e consequentemente uma deformação no plano médio, deformação esta que, associada com tensões σ_x^o , σ_y^o e τ_{xy}^o , fornece uma contribuição à energia de deformação.

A deformação do plano médio na direção x é dada por (ver figura 2.9.b):

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \approx \frac{\alpha^2}{2}$$

Portanto a deformação pode ser escrita aproximadamente como:

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \dots (2.36)$$

Analogamente, na direção y:

$$\bar{\epsilon}_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad \dots (2.37)$$

Para se achar a distorção do plano médio na flexão, sejam os segmentos AB e AC respectivamente nas direções x e y antes e depois da flexão conforme indica a figura 2.9.c. Sejam ainda dois vetores unitários \vec{s} e \vec{t} nas direções dos segmentos A_1C_1 e A_1B_1 que são as direções ocupadas pelos segmentos AC e AB após a deformação. Chamando de β o ângulo entre os dois vetores \vec{s} e \vec{t} , tem-se o seguinte produto escalar:

$$\begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{t} &= |\vec{s}| \cdot |\vec{t}| \cdot \cos\beta = \cos\beta = \cos(90 - \bar{\gamma}_{xy}) = \text{sen}\bar{\gamma}_{xy} \\ &\approx \bar{\gamma}_{xy} \end{aligned} \quad \dots (2.38)$$

As componentes dos vetores \vec{s} e \vec{t} no sistema de eixos xyz são:

$$\vec{s} = \left(0, 1, \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\vec{t} = \left(1, 0, \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

e o produto escalar fica dado por:

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots (2.39)$$

de (2.38) e (2.39), obtêm-se a distorção como:

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots (2.40)$$

Estas deformações $\bar{\epsilon}_x$, $\bar{\epsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$ são deformações de 2ª ordem que aparecem na flexão da folha e não devem ser confundidas com as deformações ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} que são nulas na superfície média.

Estas deformações de 2ª ordem podem ser obtidas das componentes lagrangianas de deformações finitas [2] fazendo nulos os deslocamentos nas direções x e y.

Então a energia de deformação correspondente será dada por:

$$U^0 = \int_A (\sigma_x^0 \bar{\epsilon}_x + \sigma_y^0 \bar{\epsilon}_y + \tau_{xy}^0 \bar{\gamma}_{xy}) t \, dx dy$$

ou:

$$U^0 = \frac{1}{2} \int_A \left[\sigma_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \tau_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] t \, dx dy \quad \dots (2.41)$$

2.10 - Expressão da energia total

A energia total da placa pode ser escrita na seguinte forma:

$$E = U + U_K + U_B + U^0 - T_q - T_p \quad \dots (2.42)$$

Com U, U_K , U_B , U^0 , T_q e T_p dados, respectivamente por (2.28), (2.34), (2.35), (2.41), (2.29) e (2.30), a expressão da energia pode ser reescrita como:

$$E = - \frac{1}{2} \int_A \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_A \left[\sigma_x^o \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^o \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^o \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] t \, dx dy + \frac{1}{2} \sum_i (K_{zi} w_i^2 + \\
 & + K_{yi} w_{,yi}^2 + K_{xi} w_{,xi}^2) + \frac{1}{2} \int_A K_B w^2 dx dy - \int_A q w dx dy - \sum_j (P_{zj}^o w_j + \\
 & + M_{xj}^o w_{,xj} + M_{yj}^o w_{,yj}) \quad \dots (2.43)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se M_x , M_y e M_{xy} por suas expressões dadas, respectivamente, por (2.7), (2.8) e (2.16.a), a expressão da energia fica:

$$\begin{aligned}
 E = \frac{1}{2} \int_A \{ & D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 & + 2 D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + t \left[\sigma_x^o \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^o \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \tau_{xy}^o \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
 & + K_B w^2 - 2qw \} dx dy + \frac{1}{2} \sum_i (K_{zi} w_i^2 + K_{yi} w_{,yi}^2 + K_{xi} w_{,xi}^2) - \sum_j (P_{zj}^o w_j + \\
 & + M_{xj}^o w_{,xj} + M_{yj}^o w_{,yj})
 \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
 E = \frac{1}{2} \int_A \{ & D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
 & + t \left[\sigma_x^o \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^o \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^o \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + K_B w^2 - 2qw \} dx dy \\
 & + \frac{1}{2} \sum_i (K_{zi} w_i^2 + K_{yi} w_{,yi}^2 + K_{xi} w_{,xi}^2) - \sum_j (P_{zj}^o w_j + M_{xj}^o w_{,xj} + M_{yj}^o w_{,yj}) \\
 & \dots (2.44)
 \end{aligned}$$

A energia será extrema na posição de equilíbrio [3]. No caso específico de equilíbrio estável será mínima e no caso

de equilíbrio indiferente será estacionária. Para achar o extremo do funcional E, recorre-se [4] à equação de EULER.

O funcional é do tipo:

$$E(w) = \int_A F(w, x, y, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) dx dy$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i (K_{zi} w_i^2 + K_{yi} w_{,yi}^2 + K_{xi} w_{,xi}^2) - \sum_j (P_{zj}^0 w_j + M_{xj}^0 w_{,xj} + M_{yj}^0 w_{,yj})$$

A equação de EULER para este tipo de funcional é:

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,x^2}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,y^2}} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{,xy}} \right) = 0$$

a qual fornece, para o caso em estudo, a seguinte equação em $w(x, y)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = q - K_B w + \frac{\partial}{\partial x} \left[t(\sigma_x^0 \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial y}) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[t(\sigma_y^0 \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x}) \right] \quad \dots (2.45)$$

No caso particular de material homogêneo, tendo a folha espessura constante e sendo constantes as tensões σ_x^0 , σ_y^0 e τ_{xy}^0 , a equação anterior toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{D} \{ q - K_B w + t \left[\sigma_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right.$$

$$+ 2 \tau_{xy}^0 \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \} \dots (2.46)$$

Esta equação, deduzida pelo método da energia coincide com aquela deduzida pelo método do equilíbrio.

A solução analítica desta equação é muito trabalhosa, mesmo para casos particulares de vinculação e carregamento. Para resolver esse problema pelo método dos elementos finitos, adota-se uma função aproximadora dos deslocamentos, sendo esta função dependente de alguns parâmetros. A energia passará, então, a ser uma função destes parâmetros e, com isso, o problema se reduz a achar o extremo de uma função de um número finito de variáveis.

2.11 - Problemas de 1ª e 2ª espécie

A existência do carregamento no plano da folha, quando atinge o valor crítico, é o responsável pela sua instabilidade. Sendo nulo o carregamento transversal, tem-se um problema de flambagem de chapas ou instabilidade de 1ª espécie em que a elástica de flambagem é indeterminada.

A existência concomitante do carregamento transversal com o carregamento no plano da folha conduz a um problema de instabilidade de 2ª espécie onde a elástica de flambagem é determinada, não existindo, entretanto, proporcionalidade entre cargas e deslocamentos.

Quando só existir o carregamento transversal, tem-se um problema de flexão de placas (teoria de 1ª ordem).

3 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AO ESTUDO DA FLEXÃO E INSTABILIDADE DE FOLHAS PLANAS

3.1 - O método dos elementos finitos

Para se analisar uma estrutura qualquer pela teoria da elasticidade, estuda-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal da estrutura. Neste caso, a solução do problema recai na resolução de equações diferenciais de derivadas parciais. Entretanto a imposição das condições de contorno e a resolução final destas equações é muito trabalhosa, mesmo para uma pequena estrutura.

Para eliminar estes problemas, analisa-se [10] não mais um elemento infinitesimal e sim um elemento finito da estrutura e assim a solução recai na resolução de um sistema de equações lineares.

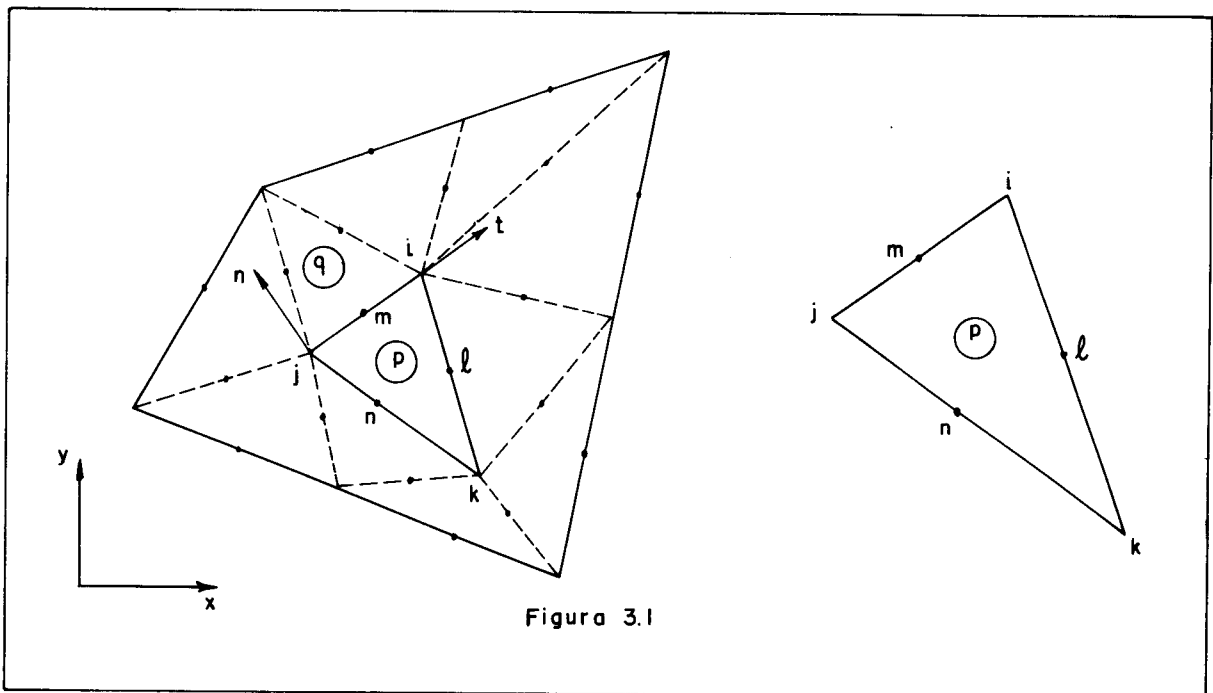
A estrutura, chamada de domínio, é dividida em subdomínios, chamados elementos finitos. No caso particular de folhas planas, os elementos mais comumente usados são os retangulares ou triangulares, sendo que o elemento triangular é mais adaptável ao contorno das placas não retangulares. São chamados de nós do elemento os pontos de conexão entre os elementos finitos. Estes nós podem ser apenas os vértices do elemento ou também pontos em seus lados.

A estes elementos finitos se faz associar uma função aproximadora dos deslocamentos procurados. Os deslocamentos internos ao elemento ficam determinados exclusivamente em função dos deslocamentos nodais. Em quanto mais elementos se dividir a estrutura, resultados mais próximos dos reais são obtidos. Entretanto, para que os resultados sejam convergentes em relação à

solução exata do problema, exige-se, no caso de placas, que haja compatibilidade de deslocamentos e inclinações (derivadas primeiras da função deslocamento) nos nós do elemento e em suas interfaces.

3.2 - Elemento adotado

Seja uma folha de contorno qualquer dividida em um certo número de elementos finitos, como indicado na figura 3.1.

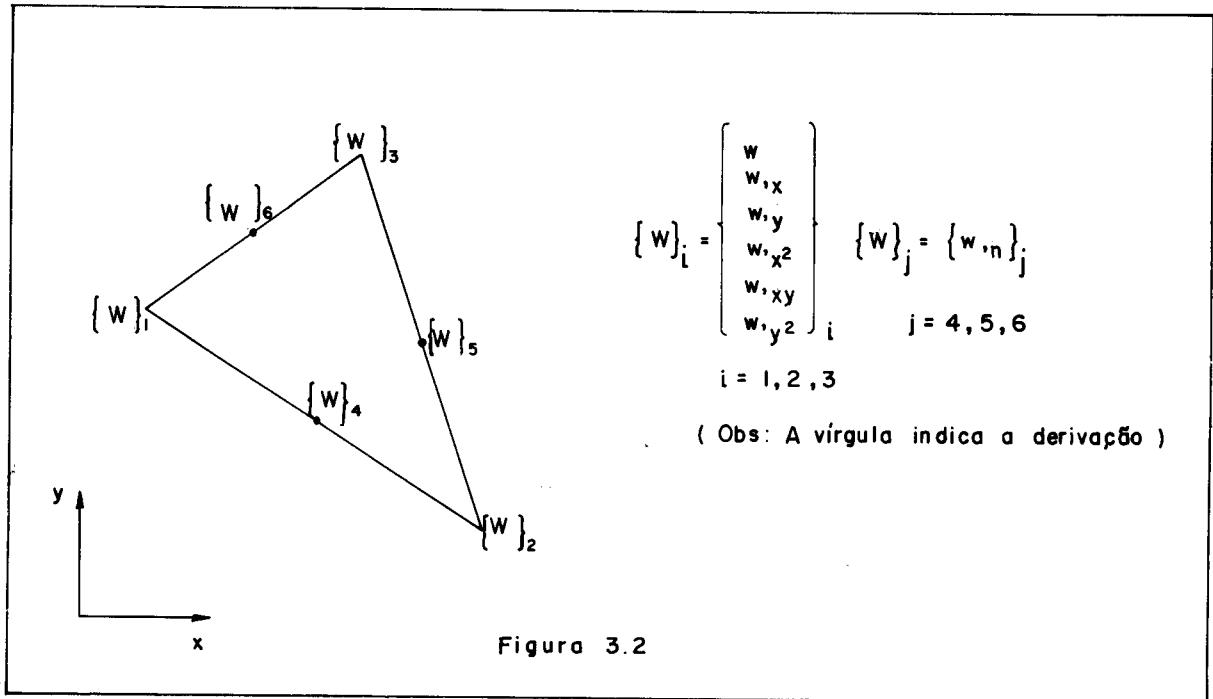


Cada elemento finito tem seis nós, sendo que 3 são seus vértices e 3 os pontos médios dos lados.

Para haver continuidade da elástica, ao longo de um lado, os elementos finitos adjacentes devem ter, em todos os pontos ao longo do lado comum, o mesmo deslocamento (w) e a mesma derivada normal a esse lado ($w_{,n}$). Sejam, por exemplo, os elementos p e q da figura 3.1. Para haver continuidade da elástica, o deslocamento dos pontos situados no lado comum aos dois elementos (lado ij) deve ser o mesmo para os dois elementos. Além disso, a tangente à elástica ao longo desse lado, na direção

do eixo n deve ser a mesma para os dois elementos.

Seja um elemento finito e seus respectivos deslocamentos nodais conforme indica a figura 3.2, onde w , $w_{,x}$, $w_{,y}$,



$w_{,x^2}$, $w_{,xy}$ e $w_{,y^2}$ são, respectivamente, o deslocamento na direção z, as declividades da elástica nas direções x e y e as curvaturas da elástica e $w_{,n}$ é a declividade da elástica numa direção normal ao lado do elemento.

Indicando-se por $\{\delta\}_e$ a matriz dos deslocamentos nodais de um elemento genérico, tem-se:

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \{W\}_1 \\ \{W\}_2 \\ \{W\}_3 \\ \{W\}_4 \\ \{W\}_5 \\ \{W\}_6 \end{Bmatrix} \dots (3.1)$$

$\{\delta\}_e$ é uma matriz coluna de 21 elementos.

3.3 - Função aproximadora

Adotou-se [7] para a aproximação da elástica no elemento finito o seguinte polinômio:

$$w(x,y) = [\phi(x,y)] \{\alpha\} \dots (3.2)$$

onde:

$$[\phi(x,y)] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^4 \ x^3y \ x^2y^2 \ xy^3 \ y^4 \ x^5 \ x^4y \ x^3y^2 \ x^2y^3 \ xy^4 \ y^5] \dots (3.3)$$

e

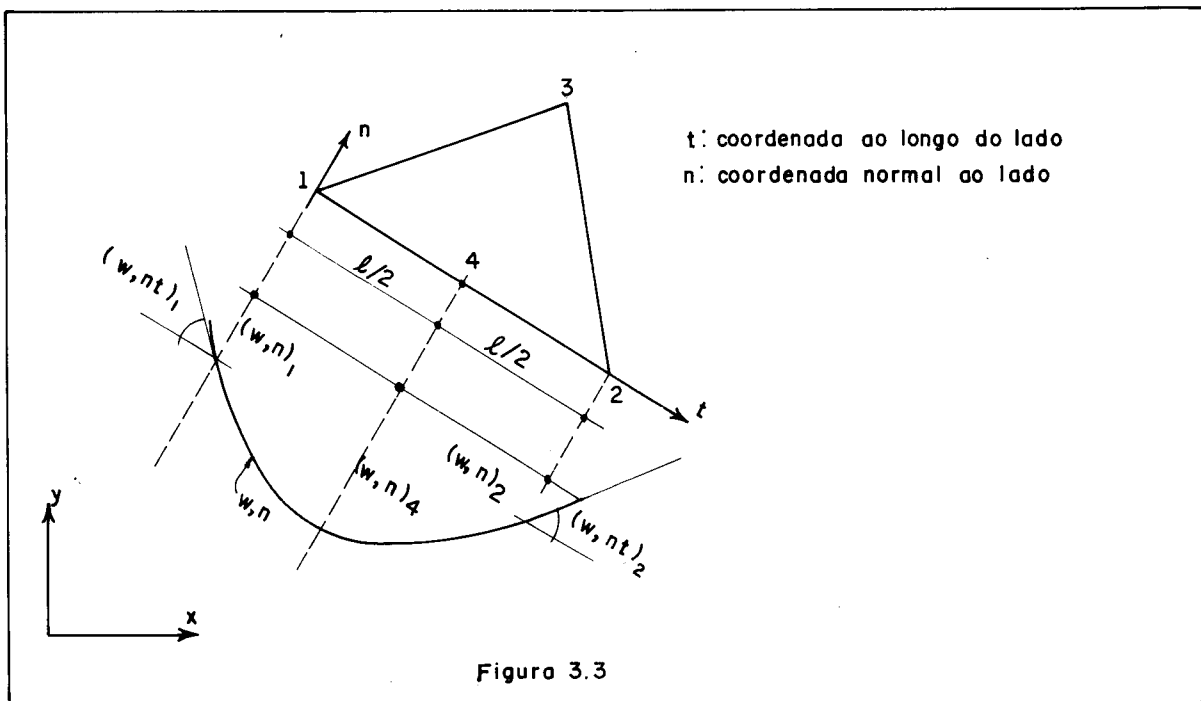
$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{21} \end{Bmatrix} \dots (3.4)$$

onde os $\alpha_i (i=1,2,\dots,21)$ são parâmetros generalizados.

Esta função polinomial garante a continuidade do deslocamento e da declividade normal aos lados, ao longo do contorno do elemento. De fato, um polinômio do 5º grau, em uma variável, precisa de seis parâmetros para ser definido. Para um lado do elemento (ver figura 3.3), por exemplo o lado 1-2, tem-se:

no n^o 1: $w_1; (w,x)_1$ e $(w,y)_1; (w,x^2)_1, (w,xy)_1$ e $(w,y^2)_1$

no n^o 2: $w_2; (w,x)_2$ e $(w,y)_2; (w,x^2)_2, (w,xy)_2$ e $(w,y^2)_2$



Com os valores $w_{,x}$ e $w_{,y}$ obtêm-se $w_{,t}$ e com os valores $w_{,x2}$, $w_{,xy}$ e $w_{,y2}$ obtêm-se $w_{,t2}$ (ver item 3.14). Assim, para cada nã, tem-se 3 parâmetros ou seja w , $w_{,t}$ e $w_{,t2}$. Portanto ao longo do lado 1-2 tem-se 6 parâmetros, os quais garantem a continuidade do deslocamento ao longo do lado.

A derivada primeira normal ao lado varia segundo uma curva do 4º grau ao longo do lado e, portanto, precisa de 5 parâmetros para ser definida. Em cada extremidade tem-se $w_{,n}$ e $w_{,nt}$ e para o nã do meio tem-se $w_{,n}$ que completa as cinco condições necessárias e portanto a continuidade está assegurada.

3.4 - Matriz de rigidez do elemento

Da expressão da elástica (3.2), obtêm-se para um nã $i(x_i, y_i)$ do elemento:

$$w(x_i, y_i) = w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^3 + \alpha_8 x_i^2 y_i + \alpha_9 x_i y_i^2 + \alpha_{10} y_i^3 + \alpha_{11} x_i^4 + \alpha_{12} x_i^3 y_i + \alpha_{13} x_i^2 y_i^2 + \alpha_{14} x_i y_i^3 + \alpha_{15} y_i^4 + \alpha_{16} x_i^5 +$$

$$+\alpha_{17}x_i^4y_i+\alpha_{18}x_i^3y_i^2+\alpha_{19}x_i^2y_i^3+\alpha_{20}x_iy_i^4+\alpha_{21}y_i^5 \quad \dots (3.5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(x_i, y_i) = w, x_i = & \alpha_2 + 2\alpha_4x_i + \alpha_5y_i + 3\alpha_7x_i^2 + 2\alpha_8x_iy_i + \\ & + \alpha_9y_i^2 + 4\alpha_{11}x_i^3 + 3\alpha_{12}x_i^2y_i + 2\alpha_{13}x_iy_i^2 + \alpha_{14}y_i^3 + 5\alpha_{16}x_i^4 + 4\alpha_{17}x_i^3y_i + 3\alpha_{18}x_i^2y_i^2 + \\ & + 2\alpha_{19}x_iy_i^3 + \alpha_{20}y_i^4 \quad \dots (3.6.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(x_i, y_i) = w, y_i = & \alpha_3 + \alpha_5x_i + 2\alpha_6y_i + \alpha_8x_i^2 + 2\alpha_9x_iy_i + \\ & + 3\alpha_{10}y_i^2 + \alpha_{12}x_i^3 + 2\alpha_{13}x_i^2y_i + 3\alpha_{14}x_iy_i^2 + 4\alpha_{15}y_i^3 + \alpha_{17}x_i^4 + 2\alpha_{18}x_i^3y_i + 3\alpha_{19}x_i^2y_i^2 + \\ & + 4\alpha_{20}x_iy_i^3 + 5\alpha_{21}y_i^4 \quad \dots (3.6.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(x_i, y_i) = w, x_i^2 = & 2\alpha_4 + 6\alpha_7x_i + 2\alpha_8y_i + 12\alpha_{11}x_i^2 + \\ & + 6\alpha_{12}x_iy_i + 2\alpha_{13}y_i^2 + 20\alpha_{16}x_i^3 + 12\alpha_{17}x_i^2y_i + 6\alpha_{18}x_iy_i^2 + 2\alpha_{19}y_i^3 \quad \dots (3.7.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)(x_i, y_i) = w, y_i^2 = & 2\alpha_6 + 2\alpha_9x_i + 6\alpha_{10}y_i + 2\alpha_{13}x_i^2 + \\ & + 6\alpha_{14}x_iy_i + 12\alpha_{15}y_i^2 + 2\alpha_{18}x_i^3 + 6\alpha_{19}x_i^2y_i + 12\alpha_{20}x_iy_i^2 + 20\alpha_{21}y_i^3 \quad \dots (3.7.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)(x_i, y_i) = w, xy_i = & \alpha_5 + 2\alpha_8x_i + 2\alpha_9y_i + 3\alpha_{12}x_i^2 + \\ & + 4\alpha_{13}x_iy_i + 3\alpha_{14}y_i^2 + 4\alpha_{17}x_i^3 + 6\alpha_{18}x_i^2y_i + 6\alpha_{19}x_iy_i^2 + 4\alpha_{20}y_i^3 \quad \dots (3.8) \end{aligned}$$

Seja ainda, para um n \bar{o} $j(x_j, y_j)$ do elemento:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)(x_j, y_j) = w, n_j \quad \dots (3.9)$$

expressão que será preparada mais à frente.

As expressões (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9), fazendo i variar de 1 a 3 e j variar de 4 a 6, constituem um sistema de 21 equações que pode ser colocado na forma:

$$[C] \cdot \{\alpha\} = \{\delta\}_e \quad \dots (3.10)$$

onde $[C]$ é uma matriz 21×21 cujos elementos são funções das coordenadas dos nós e será construída mais à frente.

Considerem-se agora as curvaturas em qualquer ponto do elemento, dadas por:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} -w_{,x^2} \\ -w_{,y^2} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad \dots (3.11)$$

Os momentos internos M_x , M_y e M_{xy} estão relacionados com as curvaturas pelas expressões (2.7), (2.8) e (2.16.a) ou, em forma matricial, por:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,x^2} \\ -w_{,y^2} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad \dots (3.12)$$

que será escrita como:

$$\{M\} = [D] \cdot \{\epsilon\} \quad \dots (3.13)$$

A matriz $[D]$ pode ser escrita na seguinte forma:

$$[D] = D(x,y) [D_0]$$

onde:

$$D(x,y) = \frac{Et^3(x,y)}{12(1-\mu^2)} \quad \dots (3.13.a)$$

e:

$$[D_0] = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots (3.13.b)$$

A matriz $\{\epsilon\}$ é obtida a partir da expressão (3.2) como:

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} -2\alpha_4 - 6\alpha_7 x - 2\alpha_8 y - 12\alpha_{11} x^2 - 6\alpha_{12} xy - 2\alpha_{13} y^2 - 20\alpha_{16} x^3 - 12\alpha_{17} x^2 y - 6\alpha_{18} xy^2 - 2\alpha_{19} y^3 \\ -2\alpha_6 - 2\alpha_9 x - 6\alpha_{10} y - 2\alpha_{13} x^2 - 6\alpha_{14} xy - 12\alpha_{15} y^2 - 2\alpha_{18} x^3 - 6\alpha_{19} x^2 y - 12\alpha_{20} xy^2 - 2\alpha_{21} y^3 \\ 2\alpha_5 + 4\alpha_8 x + 4\alpha_9 y + 6\alpha_{12} x^2 + 8\alpha_{13} xy + 6\alpha_{14} y^2 + 8\alpha_{17} x^3 + 12\alpha_{18} x^2 y + 12\alpha_{19} xy^2 + 8\alpha_{20} y^3 \end{array} \right\} \quad \dots (3.14)$$

e colocada na forma matricial como:

$$\{\epsilon\} = [Q] \{\alpha\} \quad \dots (3.15)$$

onde:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -12x^2 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 0 & 6x^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 -2y^2 & 0 & 0 & -20x^3 & -12x^2y & -6xy^2 & -2y^3 & 0 & 0 \\
 -2x^2 & -6xy & -12y^2 & 0 & 0 & -2x^3 & -6x^2y & -12xy^2 & -20y^3 \\
 8xy & 6y^2 & 0 & 0 & 8x^3 & 12x^2y & 12xy^2 & 8y^3 & 0
 \end{bmatrix}$$

.... (3.16)

Substituindo, em (3.13), $\{\epsilon\}$ por sua expressão dada por (3.15), obtêm-se

$$\{M\} = [D] [Q] \{\alpha\} \quad \text{.... (3.17)}$$

A energia de deformação do elemento finito é dada por (ver (2.28)):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S \left(-M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad \text{.. (3.18)}$$

onde S é a área do elemento.

A expressão da energia pode ser escrita como:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S [M] \{\epsilon\} dx dy \quad \text{.... (3.19)}$$

onde:

$$[M] = \{M\}^T = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}] \quad \text{.... (3.20)}$$

Substituindo, em (3.19), $\{\epsilon\}$ por sua expressão dada por (3.15), obtêm-se:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [Q] \{\alpha\} dx dy \quad \text{.... (3.21)}$$

Da equação (3.10), obtêm-se:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\delta\}_e \quad \dots (3.22)$$

Com essa expressão, (3.21) fornece:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [Q] [C]^{-1} \{\delta\}_e \, dx dy \quad \dots (3.23)$$

De (3.17), obtêm-se:

$$\{M\}^T = \{[D] [Q] \{\alpha\}\}^T$$

ou, usando (3.22):

$$\{M\}^T = \{ [D] [Q] [C]^{-1} \{\delta\}_e \}^T$$

logo:

$$\{M\}^T = \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} [Q]^T [D]^T \quad \dots (3.24)$$

Substituindo, em (3.23), $\{M\}^T$ por sua expressão, dada por (3.24), obtêm-se para a energia:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} [Q]^T [D]^T [Q] [C]^{-1} \{\delta\}_e \, dx dy \quad \dots (3.25)$$

Essa expressão pode ser escrita como :

$$U_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [KR]_e \{\delta\}_e \quad \dots (3.26)$$

onde $[KR]_e$ é denominada matriz de rigidez do elemento e é dada por:

$$[KR]_e = \int_S [C]^{-1T} [Q]^T [D]^T [Q] [C]^{-1} dx dy \dots (3.27)$$

Como a matriz $[D]$ é simétrica, tem-se:

$$[D]^T = [D]$$

Além disso, para um dado elemento, $[c]^{-1T}$ e $[C]^{-1}$ são independentes das variáveis x e y e, assim, a expressão (3.27) pode ser escrita como:

$$[KR]_e = [C]^{-1T} \left(\int_S [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1} \dots (3.28)$$

3.5 - Determinação do vetor de cargas nodais

3.5.1 - Cargas concentradas nos nós

Como já foi visto em (2.6), o trabalho realizado por cargas concentradas em um nó i genérico é dado pela expressão (2.30) que é repetida aqui:

$$T_P = P_{zi}^0 w_i + M_{xi}^0 w_{,xi} + M_{yi}^0 w_{,yi}$$

A expressão do trabalho total pode ser escrita na forma matricial como:

$$T_P = \{\delta\}_p^T \{CN\}_p \dots (3.29)$$

onde $\{\delta\}_p$ é o vetor formado pelos deslocamentos de todos os nós e $\{CN\}_p$ é um vetor coluna de ordem N , onde N é o número total de deslocamentos da folha. Após a redução do elemento finito com

21 graus de liberdade em outro com 18 graus de liberdade, com seis variáveis por nó, conforme será visto no item (3.15), os elementos não nulos de $\{CN\}_p$ serão, para cada nó i carregado:

$$\begin{aligned} CN(6i-5,1) &= P_{z_i}^0 \\ CN(6i-4,1) &= M_{x_i}^0 \quad \dots (3.30) \\ CN(6i-3,1) &= M_{y_i}^0 \end{aligned}$$

onde o nó i é um dos vértices do elemento finito.

3.5.2 - Carga distribuída no elemento

Para um elemento finito com carregamento distribuído $q(x,y)$, o trabalho realizado é dado por (2.29):

$$T_q = \int_S q(x,y) w(x,y) dx dy \quad (\text{a integral é realizada a } \underline{\text{gora}} \text{ na área do elemento)}$$

Substituindo-se $w(x,y)$ pela função aproximadora, dada por (3.2), a expressão do trabalho fica sendo:

$$T_q = \int_S q(x,y) [\phi(x,y)] \{\alpha\} dx dy \quad \dots (3.31)$$

Substituindo $\{\alpha\}$ por sua expressão, dada por (3.22), esta expressão se transforma:

$$T_q = \int_S q(x,y) [\phi(x,y)] [C]^{-1} \{\delta\}_e dx dy \quad \dots (3.32)$$

Como T_q é uma matriz 1×1 , pode-se transpor o segundo

membro da expressão (3.34), sem se alterar o primeiro membro.

Portanto:

$$T_q = \int_S \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} [\phi(x,y)]^T q(x,y) dx dy \dots (3.33)$$

Como $\{\delta\}_e^T$ e $[C]^{-1T}$ são independentes das variáveis x e y , podem ser retiradas da integral.

Portanto:

$$T_q = \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} \int_S q(x,y) [\phi(x,y)]^T dx dy \dots (3.34)$$

Fazendo:

$$[CE]_e = [C]^{-1T} \int_S q(x,y) [\phi(x,y)]^T dx dy \dots (3.35)$$

a expressão do trabalho pode ser escrita como:

$$T_q = \{\delta\}_e^T [CE]_e \dots (3.36)$$

onde $[CE]_e$ é o vetor de cargas nodais do elemento finito equivalente à carga distribuída.

3.6 - Matriz de instabilidade decorrente dos esforços aplicados no plano médio da folha

A energia correspondente às tensões σ_x^o , σ_y^o e τ_{xy}^o no contorno do elemento finito, e aplicadas em seu plano médio, é dada por (2.41):

$$U^o = \frac{1}{2} \int_S t \left[\sigma_x^o \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^o \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^o \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy$$

O integrando, com excessão da espessura t , pode ser escrito na forma matricial, como se segue:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o \\ \tau_{xy}^o & \sigma_y^o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \dots (3.37)$$

A expressão (3.2) permite escrever:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [R] \{\alpha\} \quad \dots (3.38)$$

onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 4x^3 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 0 & 5x^4 & 4x^3y & 3x^2y^2 & 2xy^3 & y^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & 0 & x^3 & 2x^2y & 3xy^2 & 4y^3 & 0 & x^4 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 4xy^3 & 5y^4 \end{bmatrix} \quad \dots (3.39)$$

Substituindo-se $\{\alpha\}$ por sua expressão, dada por (3.22), na expressão (3.38), resulta:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [R] [C]^{-1} \{\delta\}_e \quad \dots (3.40)$$

e, portanto:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T = \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} [R]^T \quad \dots (3.41)$$

Colocando (3.40) e (3.41) em (3.37), e esta na expressão da energia U^o , obtêm-se, para a energia das tensões aplicadas no plano médio:

$$U^o = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T \left\{ \int_S t [C]^{-1T} [R]^T \begin{bmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o \\ \tau_{xy}^o & \sigma_y^o \end{bmatrix} [R] [C]^{-1} dx dy \right\} \{\delta\}_e \dots (3.42)$$

Chamando de $[KI]_e$ a expressão:

$$[KI]_e = [C]^{-1T} \left\{ \int_S (t [R]^T \begin{bmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o \\ \tau_{xy}^o & \sigma_y^o \end{bmatrix} [R]) dx dy \right\} [C]^{-1} \dots (3.43)$$

a expressão (3.42) fica:

$$U^o = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [KI]_e \{\delta\}_e \dots (3.44)$$

$[KI]_e$ é denominada matriz de instabilidade do elemento finito.

3.7 - Matriz de rigidez dos vínculos elásticos

3.7.1 - Matriz de rigidez de uma base elástica

A energia de deformação de uma base elástica sob um elemento finito é dada por (2.35), ou seja:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_S K_B w^2(x,y) dx dy$$

Com a aproximação adotada para os deslocamentos do elemento dada por (3.2), a expressão desta energia fica sendo:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_S K_B \{ [\phi(x,y)] \{\alpha\} \}^2 dx dy \quad \dots (3.45)$$

Utilizando-se a expressão (3.22), a expressão anterior pode ser escrita como:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_S K_B \{ [\phi(x,y)] [C]^{-1} \{\delta\}_e \}^2 dx dy \quad \dots (3.46)$$

A expressão que se encontra entre chaves é uma matriz de ordem 1×1 e portanto (3.46) pode ser escrita da seguinte forma:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_S K_B \{ [\phi(x,y)] [C]^{-1} \{\delta\}_e \}^T \{ [\phi(x,y)] [C]^{-1} \{\delta\}_e \} dx dy \quad \dots (3.47)$$

Ou seja:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_S K_B \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} [\phi(x,y)]^T [\phi(x,y)] [C]^{-1} \{\delta\}_e dx dy \quad \dots (3.48)$$

Portanto:

$$U_B = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [C]^{-1T} \left\{ \int_S K_B [\phi(x,y)]^T [\phi(x,y)] dx dy \right\} [C]^{-1} \{\delta\}_e \quad \dots (3.49)$$

Fazendo:

$$[KFE]_e = [C]^{-1T} \left\{ \int_S K_B [\phi(x,y)]^T [\phi(x,y)] dx dy \right\} [C]^{-1} \dots (3.50)$$

a expressão da energia fica:

$$U_B = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [KFE]_e \{\delta\}_e \quad \dots (3.51)$$

A matriz $[KFE]_e$ é denominada matriz de rigidez da base elástica do elemento finito.

3.7.2 - Matriz de rigidez de vínculos elásticos concentrados

A energia de deformação dos vínculos elásticos concentrados no nó i é dada por (2.34), ou seja:

$$U_K = \frac{1}{2} (K_{zi} w_i^2 + K_{xi} w_{,xi}^2 + K_{yi} w_{,yi}^2)$$

Esta expressão pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$U_K = \frac{1}{2} \{\delta\}_p^T [KVE]_p \{\delta\}_p \quad \dots (3.52)$$

Convém lembrar que $\{\delta\}_p$ é o vetor formado pelos deslocamentos de todos os nós da folha.

$[KVE]_p$ é uma matriz de ordem $N \times N$ onde N é o número total de deslocamentos. Após a redução dos graus de liberdade do elemento finito, que será vista em (3.15), os elementos não nulos de $[KVE]_p$ serão, para cada nó i com vinculações elásticas:

$$KVE(6i-5, 6i-5) = K_{zi}$$

$$KVE(6i-4, 6i-4) = K_{xi} \quad \dots (3.53)$$

$$KVE(6i-3, 6i-3) = K_{yi}$$

onde o nó i é um dos vértices do elemento finito.

3.8 - Funcional de uma folha com cargas transversais e contidas no plano médio

Utilizando-se as expressões já deduzidas, (3.26), (3.29), (3.36), (3.44), (3.51) e (3.52), o funcional dado por (2.44) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$E = \frac{1}{2} \{\delta\}_p^T [KR]_p \{\delta\}_p + \frac{1}{2} \{\delta\}_p^T [KI]_p \{\delta\}_p + \frac{1}{2} \{\delta\}_p^T [KFE]_p \{\delta\}_p + \frac{1}{2} \{\delta\}_p^T [KVE]_p \{\delta\}_p - \{\delta\}_p^T [CE]_p - \{\delta\}_p^T [CN]_p \dots (3.54)$$

O índice p indica que aquelas expressões, anteriormente deduzidas para um elemento finito apenas, foram estendidas a toda folha pela somatória das contribuições de todos elementos.

Como já foi visto, no equilíbrio a variação da energia potencial total deve ser igual a zero.

Portanto:

$$dE = d \{\delta\}_p^T \{ [KR]_p + [KI]_p + [KFE]_p + [KVE]_p \} \{\delta\}_p - d \{\delta\}_p^T \{ [CE]_p + [CN]_p \} = 0$$

Ou seja:

$$d \{\delta\}_p^T \{ [KR]_p + [KI]_p + [KFE]_p + [KVE]_p \} \{\delta\}_p - [CE]_p - [CN]_p = 0 \dots (3.55)$$

A expressão acima é verdadeira para qualquer $d \{\delta\}_p^T$, quando:

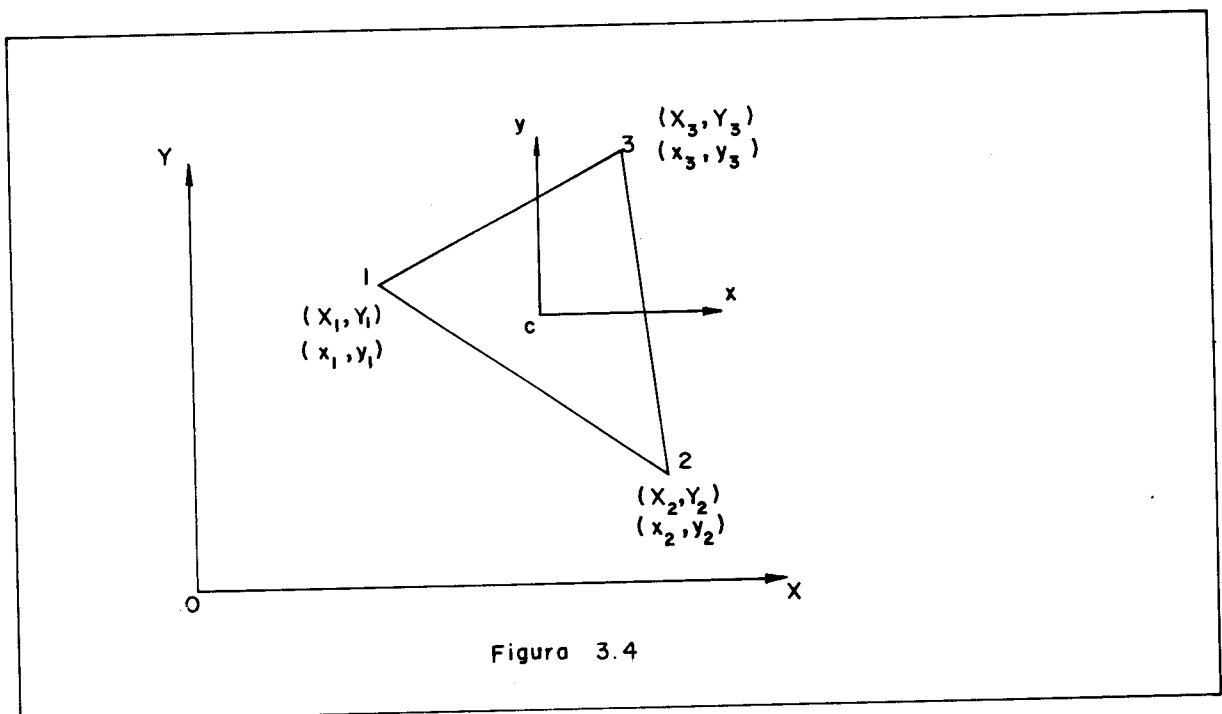
$$\{ [KR]_p + [KI]_p + [KFE]_p + [KVE]_p \} \{\delta\}_p - [CE]_p - [CN]_p = 0 \dots (3.56)$$

que é um sistema de equações lineares nas incógnitas nodais.

3.9 - Integração das funções na superfície do elemento finito

A integração, sobre a superfície de um elemento finito, das matrizes obtidas anteriormente pode ser feita mais facilmente através da utilização de coordenadas homogêneas conforme explicado a seguir.

A posição de um elemento finito genérico da estrutura é definida por um sistema de coordenadas cartesianas global (OXY). Define-se ainda um outro sistema de coordenadas, paralelo ao primeiro e com origem no centróide c do elemento triangular, conforme indica a figura 3.4.



Uma vez definida a posição do elemento finito (1,2,3) pelas coordenadas de seus vértices, a origem do sistema cartesiano local fica determinada. As coordenadas do centróide c são dadas por:

$$X_c = \frac{1}{3} (X_1 + X_2 + X_3) \quad \dots (3.57)$$
$$Y_c = \frac{1}{3} (Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

As coordenadas locais dos v̄rtices do elemento ficam, portanto, determinadas e s̄o dadas por:

$$x_i = X_i - X_c \quad \dots (3.58)$$

$$y_i = Y_i - Y_c \quad (i=1,2,3)$$

Estas coordenadas obedecem à relaçāo:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 0 \quad \dots (3.59)$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i = 0$$

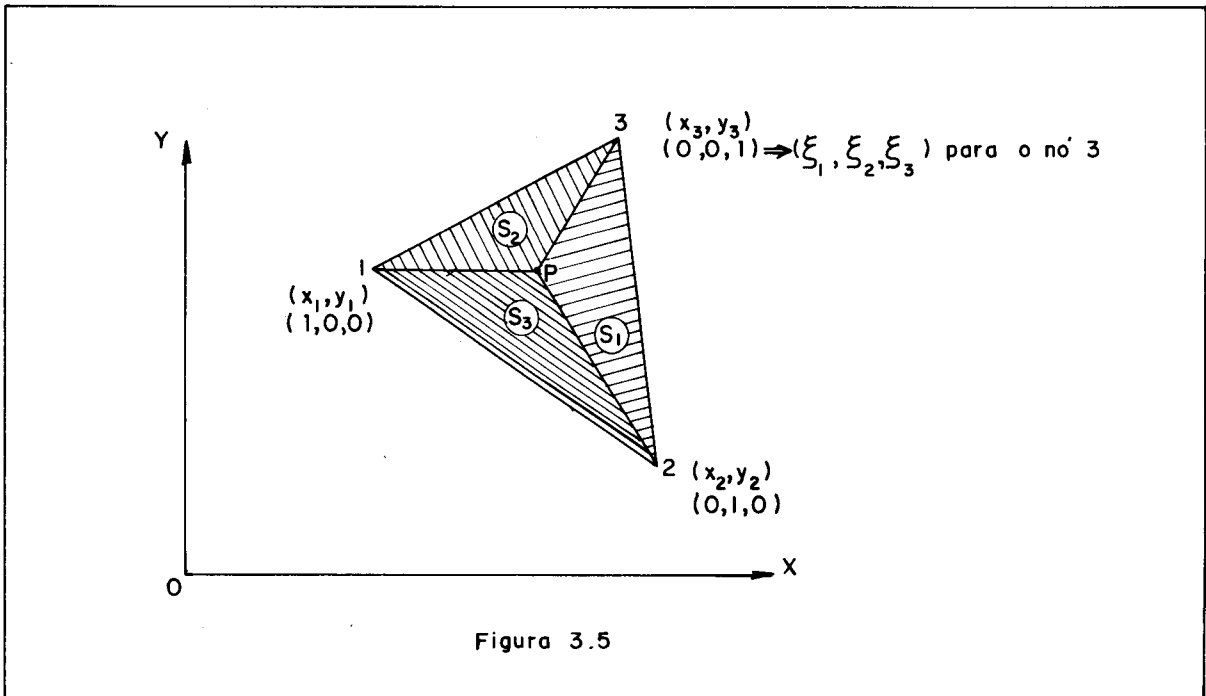
Para se determinarem as coordenadas de pontos internos do elemento triangular, utiliza-se um sistema de coordenadas homogêneas (ξ_1, ξ_2, ξ_3), onde os ξ_i s̄o definidos pela seguinte relaçāo:

$$\xi_i = \frac{S_i}{S} \quad (i=1,2,3) \quad \dots (3.60)$$

onde S é a área do elemento e S_1, S_2 e S_3 s̄o, respectivamente, as áreas (ver figura 3.5) dos triângulos 3-P-2, 1-3-P e 2-P-1, sendo P(x,y) um ponto genérico do elemento finito, podendo pertencer às bordas.

A área do triângulo 1-2-3 é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \dots (3.61)$$



e as áreas genéricas dos triângulos 3-P-2, 1-3-P e 2-P-1 são dadas por:

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

..... (3.62)

Como

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

dividindo-se os dois membros da igualdade por S e tendo-se em vista a definição de ξ_i , dada por (3.60), tem-se

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad \dots (3.63)$$

Demonstra-se que a relação entre os ξ_i e as coordenadas do ponto P é dada por:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} S_1^0 & b_1 & a_1 \\ S_2^0 & b_2 & a_2 \\ S_3^0 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots (3.64)$$

onde:

$$a_i = x_k - x_j$$

$$b_i = y_k - y_j$$

$$2S_i^0 = x_j y_k - x_k y_j \quad \dots (3.65)$$

$$S = \widehat{\text{área do triângulo}} = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1)$$

i, j e k são permutações ordenadas de 1, 2 e 3.

Essa relação pode ser escrita na ordem inversa, como segue:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad \dots (3.66)$$

Uma vez substituídos x e y , nas matrizes obtidas anteriormente, pelas expressões correspondentes em função de ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , aparecerão integrais do seguinte tipo:

$$\int_S f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dS \quad \dots (3.67)$$

que podem ser obtidas [5] utilizando-se da seguinte expressão:

$$\int_S \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dS = \frac{n_1! n_2! n_3!}{(n_1 + n_2 + n_3 + 2)!} \cdot 2S \quad \dots (3.68)$$

3.10 - Determinação dos termos da matriz de rigidez

A matriz de rigidez de um elemento finito da folha é dada por:

$$[KR]_e = [C]^{-1T} \left(\int_S [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C]^{-1}$$

Os termos do integrando, uma vez efetuada a operação $[Q]^T [D] [Q]$ e levando em conta que a espessura pode ser variável, serão constituídos por constantes multiplicadas por integrais do tipo:

$$P_{\alpha\beta} = \int_S D(x, y) x^\alpha y^\beta dx dy \quad \dots (3.69)$$

onde os índices α e β da letra P indicam, respectivamente, as potências de x e y do integrando.

A rigidez do elemento finito pode variar segundo uma lei qualquer. Adotando-se uma variação linear para a rigidez, folhas com rigidez variável poderão ser analisadas desde que divididas em um número maior de elementos finitos, onde a variação linear para $D(x,y)$ represente bem a variação real.

A rigidez $D(x,y)$ pode ser colocada em função das coordenadas homogêneas [6] da seguinte forma:

$$D(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = D_1 \xi_1 + D_2 \xi_2 + D_3 \xi_3 \quad \dots (3.70)$$

onde

$$D_i = \frac{Et^3(x,y)i}{12(1-\mu^2)} \quad (i=1,2,3) \quad \dots (3.71)$$

representa a rigidez no nó i do elemento finito.

Colocam-se também em coordenadas homogêneas os valores de x e y dados por (3.66). Com isso a expressão (3.69) toma a seguinte forma:

$$P_{\alpha\beta} = \int_S (D_1 \xi_1 + D_2 \xi_2 + D_3 \xi_3) (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3)^\alpha (y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3)^\beta dx dy \quad \dots (3.72)$$

Seja, por exemplo, o elemento P_{12} :

$$P_{12} = \int_S (D_1 \xi_1 + D_2 \xi_2 + D_3 \xi_3) (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3) (y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3)^2 dx dy$$

Desenvolvendo a expressão, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 P_{12} = \int_S & \{ D_1 x_1 y_1^2 \xi_1^4 + D_2 x_2 y_2^2 \xi_2^4 + D_3 x_3 y_3^3 \xi_3^4 + (2D_1 x_1 y_1 y_2 + \\
 & + 2D_1 x_2 y_1^2 + D_2 x_1 y_1^2) \xi_1^3 \xi_2 + (2D_1 x_1 y_1 y_3 + D_1 x_3 y_1^2 + D_3 x_1 y_1^2) \xi_1^3 \xi_3 + \\
 & + (D_1 x_1 y_2^2 + 2D_1 x_2 y_1 y_2 + 2D_2 x_1 y_1 y_2 + D_2 x_2 y_1^2) \xi_1^2 \xi_2^2 + (2D_1 x_3 y_1 y_2 y_3 + \\
 & + 2D_3 x_1 y_1 y_2 y_3 + D_3 x_3 y_1^2) \xi_1^2 \xi_3 + (D_1 x_2 y_2^2 + D_2 x_1 y_2^2 + 2x_2 y_1 y_2) \xi_1 \xi_2^3 + \\
 & + (D_1 x_3 y_3^2 + 2D_3 x_3 y_1 y_3) \xi_1 \xi_3^3 + (D_2 x_3 y_3^2 + D_3 x_2^2 y_3 + D_3 x_3 y_2 y_3) \xi_2 \xi_3^3 + \\
 & + (2D_1 x_1 y_2 y_3 + 2D_1 x_2 y_1 y_3 + 2D_1 x_3 y_1 y_2 y_3 + 2D_2 x_1 y_1 y_3 + D_2 x_3 y_1^2 + \\
 & + 2D_3 x_1 y_1 y_2 + D_3 x_2 y_1^2) \xi_1^2 \xi_2 \xi_3 + (2D_1 x_2 y_2 y_3 + 2D_2 x_1 y_2 y_3 + \\
 & + 2D_2 x_2 y_1 y_2 + 2D_2 x_3 y_1 y_2 + D_3 x_1 y_2^2 + 2D_3 x_2 y_1 y_2) \xi_1 \xi_2^2 \xi_3 + (D_1 x_2 y_3^2 + \\
 & + 2D_1 x_3 y_2 y_3 + 2D_2 x_3 y_1 y_3 + 2D_3 x_1 y_2 y_3 + 2D_3 x_2 y_1 y_2 + \\
 & + 2D_3 x_3 y_1 y_2) \xi_1 \xi_2 \xi_3^2 + (D_2 x_2 y_3^3 + D_2 x_3 y_2 y_3 + 2D_3 x_2 y_2 y_3) \xi_2^2 \xi_3^2 + \\
 & + (2D_2 x_2 y_2 y_3 + D_3 x_2 y_2^2) \xi_2^3 \xi_3 \} dS
 \end{aligned}$$

O valor de P_{12} é obtido pela aplicação de (3.68) a to das parcelas.

Em SAVASSI [15] encontram-se subrotinas que automaizam o cálculo de um $P_{\alpha\beta}$ genérico nas coordenadas homogêneas.

A matriz:

$$\int_S [Q]^T \cdot [D] \cdot [Q] \, dS$$

é uma matriz simétrica de ordem 21x21, cujos termos não nulos de sua parte triangular superior são apresentados a seguir [7].

Nas expressões dos coeficientes, tem-se:

$$\lambda = \frac{1-\mu}{2} \quad \dots (3.73)$$

(4,4) = 4 P ₀₀	(4,6) = 4 μ P ₀₀
(4,7) = 12 P ₁₀	(4,8) = 4 P ₀₁
(4,9) = 4 μ P ₁₀	(4,10) = 12 μ P ₀₁
(4,11) = 24 P ₂₀	(4,12) = 12 P ₁₁
(4,13) = 4 P ₀₂ + 4μP ₂₀	(4,14) = 12 μ P ₁₁
(4,15) = 24 μ P ₀₂	(4,16) = 40 P ₃₀
(4,17) = 24 P ₂₁	(4,18) = 12 P ₁₂ + 4 μ P ₃₀
(4,19) = 4 P ₀₃ + 12 μ P ₂₁	(4,20) = 24 μ P ₁₂
(4,21) = 40 μ P ₀₃	
(5,5) = 4 λ P ₀₀	(5,8) = 8 λ P ₁₀
(5,9) = 8 λ P ₀₁	(5,11) = 12 λ P ₂₀
(5,13) = 16 λ P ₁₁	(5,14) = 12 λ P ₀₂
(5,17) = 16 λ P ₃₀	(5,18) = 24 λ P ₂₁
(5,19) = 24 λ P ₁₂	(5,20) = 16 λ P ₀₃
(6,6) = 4 P ₀₀	(6,7) = 12 μ P ₁₀
(6,8) = 4 μ P ₀₁	(6,9) = 4 P ₁₀

$$(6,10) = 12 P_{01}$$

$$(6,12) = 12 \mu P_{11}$$

$$(6,14) = 12 P_{11}$$

$$(6,16) = 40 \mu P_{30}$$

$$(6,18) = 4P_{30} + 12 \mu P_{12}$$

$$(6,20) = 24 P_{12}$$

$$(7,7) = 30 P_{20}$$

$$(7,9) = 12 \mu P_{20}$$

$$(7,11) = 72 P_{30}$$

$$(7,13) = 12 P_{12} + 12 \mu P_{30}$$

$$(7,15) = 72 \mu P_{12}$$

$$(7,17) = 72 P_{31}$$

$$(7,19) = 12 P_{13} + 36 \mu P_{31}$$

$$(7,21) = 120 \mu P_{13}$$

$$(8,8) = 4 P_{02} + 16 \lambda P_{20}$$

$$(8,10) = 12 \mu P_{02}$$

$$(8,12) = 12 P_{12} + 24 \lambda P_{30}$$

$$(8,14) = 12 P_{12}$$

$$(8,16) = 40 P_{31}$$

$$(8,18) = 12 P_{13} + (24 - 20\mu)P_{31}$$

$$(8,20) = (16 + 8\mu)P_{13}$$

$$(9,9) = 4 P_{20} + 16 \lambda P_{02}$$

$$(9,11) = 24 \mu P_{30}$$

$$(6,11) = 24 \mu P_{20}$$

$$(6,13) = 4P_{20} + 4\mu P_{02}$$

$$(6,15) = 24 P_{02}$$

$$(6,17) = 24 \mu P_{21}$$

$$(6,19) = 12 P_{21} + 4 \mu P_{03}$$

$$(6,21) = 40 P_{03}$$

$$(7,8) = 12 P_{11}$$

$$(7,10) = 36 \mu P_{11}$$

$$(7,12) = 36 P_{21}$$

$$(7,14) = 36 \mu P_{21}$$

$$(7,16) = 120 P_{40}$$

$$(7,18) = 36 P_{22} + 12 \mu P_{40}$$

$$(7,20) = 72 \mu P_{22}$$

$$(8,9) = (8 - 4\mu)P_{11}$$

$$(8,11) = 24 P_{21}$$

$$(8,13) = 4P_{03} + (16 - 12\mu)P_{21}$$

$$(8,15) = 24 \mu P_{03}$$

$$(8,17) = 24 P_{22} + 32 \lambda P_{40}$$

$$(8,19) = 4P_{04} + (24 - 12\mu)P_{22}$$

$$(8,21) = 40 \mu P_{04}$$

$$(9,10) = 12 P_{11}$$

$$(9,12) = 12 P_{21}$$

$$\begin{aligned} (9,13) &= 4 P_{30} + (16-12\mu)P_{12} & (9,14) &= 12P_{21} + 24 \mu P_{03} \\ (9,15) &= 24 P_{12} & (9,16) &= 40 \mu P_{40} \\ (9,17) &= (16+8\mu) P_{31} & (9,18) &= 4P_{40} + (24-12\mu)P_{22} \\ (9,19) &= 12 P_{31} + (24-20\mu)P_{13} & (9,20) &= 24 P_{22} + 32\lambda P_{04} \\ (9,21) &= 40 P_{13} & & \\ \\ (10,10) &= 36 P_{02} & (10,11) &= 72 \mu P_{21} \\ (10,12) &= 36 \mu P_{12} & (10,13) &= 12 P_{21} + 12 \mu P_{03} \\ (10,14) &= 36 P_{12} & (10,15) &= 72 P_{03} \\ (10,16) &= 120 \mu P_{31} & (10,17) &= 72 \mu P_{22} \\ (10,18) &= 12 P_{31} + 36 \mu P_{13} & (10,19) &= 36 P_{22} + 12 \mu P_{04} \\ (10,20) &= 72 P_{13} & (10,21) &= 120 P_{04} \\ \\ (11,11) &= 144 P_{40} & (11,12) &= 72 P_{31} \\ (11,13) &= 24 P_{22} + 24 \mu P_{40} & (11,14) &= 72 \mu P_{31} \\ (11,15) &= 144 \mu P_{22} & (11,16) &= 240 P_{50} \\ (11,17) &= 144 P_{41} & (11,18) &= 72 P_{32} + 24 \mu P_{50} \\ (11,19) &= 24 P_{23} + 72 \mu P_{41} & (11,20) &= 144 \mu P_{32} \\ (11,21) &= 240 \mu P_{23} & & \\ \\ (12,12) &= 36 P_{22} + 36 \lambda P_{40} & (12,13) &= 12 P_{13} + (24-12\mu)P_{31} \\ (12,14) &= (18+18\mu)P_{22} & (12,15) &= 72 \mu P_{13} \\ (12,16) &= 120 P_{41} & (12,17) &= 72 P_{32} + 48 \lambda P_{50} \\ (12,18) &= 36 P_{23} + (36-24\mu)P_{41} & (12,19) &= 12 P_{14} + 36 P_{32} \\ (12,20) &= (24+48\mu)P_{23} & (12,21) &= 120 \mu P_{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(13,13) &= 4 P_{40} + 4 P_{04} + (32-24\mu)P_{22} \\(13,14) &= 12 P_{31} + (24-12\mu)P_{13} \\(13,15) &= 24 P_{22} + 24 \mu P_{04} \\(13,16) &= 40 P_{32} + 40 \mu P_{50} \\(13,17) &= 24 P_{23} + (32-8\mu)P_{41} \\(13,18) &= 4 P_{50} + 12 P_{14} + (48-32\mu)P_{32} \\(13,19) &= 4 P_{05} + 12 P_{41} + (48-32\mu)P_{23} \\(13,20) &= 24 P_{32} + (32-8\mu)P_{14} \\(13,21) &= 40 P_{23} + 40 \mu P_{05} \\(14,14) &= 36 P_{22} + 36 \lambda P_{04} & (14,15) &= 72 P_{13} \\(14,16) &= 120 \mu P_{41} & (14,17) &= (24+48\mu)P_{32} \\(14,18) &= 12 P_{41} + 36 P_{23} & (14,19) &= 36 P_{32} + (36-24\mu)P_{14} \\(14,20) &= 72 P_{23} + 48 \lambda P_{05} & (14,21) &= 120 P_{14} \\(15,15) &= 144 P_{04} & (15,16) &= 240 \mu P_{32} \\(15,17) &= 144 \mu P_{23} & (15,18) &= 24 P_{32} + 72 \mu P_{14} \\(15,19) &= 72 P_{23} + 24 \mu P_{05} & (15,20) &= 144 P_{14} \\(15,21) &= 240 P_{05} \\(16,16) &= 400 P_{60} & (16,17) &= 240 P_{51} \\(16,18) &= 120 P_{42} + 40 \mu P_{60} & (16,19) &= 40 P_{33} + 120 \mu P_{51} \\(16,20) &= 240 \mu P_{42} & (16,21) &= 400 \mu P_{33} \\(17,17) &= 144 P_{42} + 64 \lambda P_{60} & (17,18) &= 72 P_{33} + (48-24\mu)P_{51} \\(17,19) &= 24 P_{24} + (48+24\mu)P_{42} & (17,20) &= (32+112\mu)P_{33}\end{aligned}$$

$$(17,21) = 240 \mu P_{24}$$

$$(18,18) = 4 P_{60} + 36 P_{24} + (72 - 48\mu) P_{42}$$

$$(18,19) = 12 P_{51} + 12 P_{15} + (72 - 32\mu) P_{33}$$

$$(18,20) = 24 P_{42} + (48 + 24\mu) P_{24}$$

$$(18,21) = 40 P_{33} + 120 \mu P_{15}$$

$$(19,19) = 4 P_{06} + 36 P_{42} + (72 - 48\mu) P_{24}$$

$$(19,20) = 72 P_{33} + (48 - 24\mu) P_{15}$$

$$(19,21) = 120 P_{24} + 40 \mu P_{06}$$

$$(20,20) = 144 P_{24} + 64 \lambda P_{06}$$

$$(20,21) = 240 P_{15}$$

$$(21,21) = 400 P_{06}$$

3.11 - Determinação dos termos da matriz de instabilidade

A matriz de instabilidade de um elemento finito \bar{e} é obtida através da integral (3.43):

$$[KI]_e = [C]^{-1T} \left\{ \int_S t(x,y) [R]^T \begin{bmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o \\ \tau_{xy}^o & \sigma_y^o \end{bmatrix} [R] dx dy \right\} [C]^{-1}$$

Nos termos do integrando aparecerão fatores do tipo:

$$\bar{P}_{\alpha\beta} = \int_S t(x,y) x^\alpha y^\beta dx dy \quad \dots (3.74)$$

A espessura $t(x,y)$ pode ser variável. Adotando uma variação linear, no elemento finito, para a espessura, esta pode

ser colocada em função das coordenadas homogêneas como se segue:

$$t(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3 \quad \dots (3.75)$$

onde $t_i (i=1,2,3)$ são as espessuras da folha nos nós do elemento finito.

Substituindo, em (3.74), x e y pelas suas expressões em coordenadas homogêneas, a expressão fica:

$$\bar{P}_{\alpha\beta} = \int_S (t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3) (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3)^\alpha (y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3)^\beta \cdot dS \quad \dots (3.76)$$

Efetuada-se as operações do integrando, obtêm-se várias expressões do tipo:

$$C \int_S \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \xi_3^{n_3} dS$$

que podem ser calculadas através de (3.68).

A matriz:

$$\int_S t(x,y) [R]^T \begin{bmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o \\ \tau_{xy}^o & \sigma_y^o \end{bmatrix} [R] dS$$

é uma matriz simétrica de ordem 21×21 cujos elementos não nulos de sua parte triangular superior são apresentados a seguir.

$$(2,2) = \sigma_x^o \bar{P}_{00}$$

$$(2,3) = \tau_{xy}^o \bar{P}_{00}$$

$$(2,4) = 2 \bar{P}_{10} \sigma_x^o$$

$$(2,5) = \bar{P}_{01} \sigma_x^o + \bar{P}_{10} \tau_{xy}^o$$

$$(2,6) = 2 \bar{P}_{01} \tau_{xy}^o$$

$$(2,7) = 3 \bar{P}_{20} \sigma_x^o$$

$$(2,8) = 2\bar{P}_{11}\sigma_x^o + \bar{P}_{20}\tau_{xy}^o$$

$$(2,10) = 3\bar{P}_{02}\tau_{xy}^o$$

$$(2,12) = 3\bar{P}_{21}\sigma_x^o + \bar{P}_{30}\tau_{xy}^o$$

$$(2,14) = \bar{P}_{03}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{12}\tau_{xy}^o$$

$$(2,16) = 5\bar{P}_{40}\sigma_x^o$$

$$(2,18) = 3\bar{P}_{22}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{31}\tau_{xy}^o$$

$$(2,20) = \bar{P}_{04}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{13}\tau_{xy}^o$$

$$(3,3) = \bar{P}_{00}\sigma_y^o$$

$$(3,5) = \bar{P}_{10}\sigma_y^o + \bar{P}_{01}\tau_{xy}^o$$

$$(3,7) = 3\bar{P}_{20}\tau_{xy}^o$$

$$(3,9) = 2\bar{P}_{11}\sigma_y^o + \bar{P}_{02}\tau_{xy}^o$$

$$(3,11) = 4\bar{P}_{30}\tau_{xy}^o$$

$$(3,13) = 2\bar{P}_{21}\sigma_y^o + 2\bar{P}_{12}\tau_{xy}^o$$

$$(3,15) = 4\bar{P}_{30}\sigma_y^o$$

$$(3,17) = \bar{P}_{40}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{31}\tau_{xy}^o$$

$$(3,19) = 3\bar{P}_{22}\sigma_y^o + 2\bar{P}_{13}\tau_{xy}^o$$

$$(3,21) = 5\bar{P}_{04}\sigma_y^o$$

$$(4,4) = 3\bar{P}_{20}\sigma_x^o$$

$$(4,6) = 4\bar{P}_{11}\tau_{xy}^o$$

$$(4,8) = 4\bar{P}_{21}\sigma_y^o + 2\bar{P}_{30}\tau_{xy}^o$$

$$(2,9) = \bar{P}_{02}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{11}\tau_{xy}^o$$

$$(2,11) = 4\bar{P}_{30}\sigma_x^o$$

$$(2,13) = 2\bar{P}_{12}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{21}\tau_{xy}^o$$

$$(2,15) = 4\bar{P}_{03}\tau_{xy}^o$$

$$(2,17) = 4\bar{P}_{31}\sigma_x^o + \bar{P}_{40}\tau_{xy}^o$$

$$(2,19) = 2\bar{P}_{13}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{22}\tau_{xy}^o$$

$$(2,21) = 5\bar{P}_{04}\tau_{xy}^o$$

$$(3,4) = 2\bar{P}_{10}\tau_{xy}^o$$

$$(3,6) = 2\bar{P}_{01}\sigma_y^o$$

$$(3,8) = \bar{P}_{20}\sigma_y^o + 2\bar{P}_{11}\tau_{xy}^o$$

$$(3,10) = 3\bar{P}_{02}\sigma_y^o$$

$$(3,12) = \bar{P}_{30}\sigma_y^o + 3\bar{P}_{21}\tau_{xy}^o$$

$$(3,14) = 3\bar{P}_{12}\sigma_y^o + \bar{P}_{03}\tau_{xy}^o$$

$$(3,16) = 5\bar{P}_{40}\tau_{xy}^o$$

$$(3,18) = 2\bar{P}_{31}\sigma_y^o + 3\bar{P}_{22}\tau_{xy}^o$$

$$(3,20) = 4\bar{P}_{13}\sigma_y^o + \bar{P}_{04}\tau_{xy}^o$$

$$(4,5) = 2\bar{P}_{11}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{20}\tau_{xy}^o$$

$$(4,7) = 6\bar{P}_{30}\sigma_x^o$$

$$(4,9) = 2\bar{P}_{12}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{21}\tau_{xy}^o$$

$$(4,10) = 6\bar{P}_{12}\tau_{xy}^o$$

$$(4,11) = 8\bar{P}_{40}\sigma_x^o$$

$$(4,12) = 6\bar{P}_{31}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{40}\tau_x^o$$

$$(4,13) = 4\bar{P}_{22}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{31}\tau_{xy}^o$$

$$(4,14) = 2\bar{P}_{13}\sigma_x^o + 6\bar{P}_{22}\tau_{xy}^o$$

$$(4,15) = 8\bar{P}_{13}\tau_{xy}^o$$

$$(4,16) = 10\bar{P}_{50}\sigma_x^o$$

$$(4,17) = 8\bar{P}_{41}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{50}\tau_{xy}^o$$

$$(4,18) = 6\bar{P}_{32}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{41}\tau_{xy}^o$$

$$(4,19) = 4\bar{P}_{23}\sigma_x^o + 6\bar{P}_{32}\tau_{xy}^o$$

$$(4,20) = 2\bar{P}_{14}\sigma_x^o + 8\bar{P}_{23}\tau_{xy}^o$$

$$(4,21) = 10\bar{P}_{14}\tau_{xy}^o$$

$$(5,5) = \bar{P}_{02}\sigma_x^o + \bar{P}_{20}\sigma_y^o + 2\bar{P}_{11}\tau_{xy}^o$$

$$(5,6) = 2\bar{P}_{11}\sigma_y^o + 2\bar{P}_{02}\tau_{xy}^o$$

$$(5,7) = 3\bar{P}_{21}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{30}\tau_{xy}^o$$

$$(5,8) = 2\bar{P}_{12}\sigma_x^o + \bar{P}_{30}\sigma_y^o + 3\bar{P}_{21}\tau_y^o$$

$$(5,9) = \bar{P}_{03}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{21}\sigma_y^o + 3\bar{P}_{12}\tau_{xy}^o$$

$$(5,10) = 3\bar{P}_{12}\sigma_y^o + 3\bar{P}_{03}\tau_{xy}^o$$

$$(5,11) = 4\bar{P}_{31}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{40}\tau_{xy}^o$$

$$(5,12) = 3\bar{P}_{22}\sigma_x^o + \bar{P}_{40}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{31}\tau_{xy}^o$$

$$(5,13) = 2\bar{P}_{13}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{31}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{22}\tau_{xy}^o$$

$$(5,14) = \bar{P}_{04}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{22}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{13}\tau_{xy}^o$$

$$(5,15) = 4\bar{P}_{13}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{04}\tau_{xy}^o$$

$$(5,16) = 5\bar{P}_{41}\sigma_x^o + 5\bar{P}_{50}\tau_{xy}^o$$

$$(5,17) = 4\bar{P}_{32}\sigma_x^o + \bar{P}_{50}\sigma_y^o + 5\bar{P}_{41}\tau_{xy}^o$$

$$(5,18) = 3\bar{P}_{23}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{41}\sigma_y^o + 5\bar{P}_{32}\tau_{xy}^o$$

$$(5,19) = 2\bar{P}_{14}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{32}\sigma_y^o + 5\bar{P}_{23}\tau_{xy}^o$$

$$(5,20) = \bar{P}_{05}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{23}\sigma_y^o + 5\bar{P}_{14}\tau_{xy}^o$$

$$(5,21) = 5\bar{P}_{14}\sigma_y^o + 5\bar{P}_{05}\tau_{xy}^o$$

$$(6,6) = 4\bar{P}_{02}\sigma_y^o$$

$$(6,7) = 6\bar{P}_{21}\tau_{xy}^o$$

$$(6,8) = 2\bar{P}_{21}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{12}\tau_{xy}^o$$

$$(6,9) = 4\bar{P}_{12}\sigma_y^o + 2\bar{P}_{03}\tau_{xy}^o$$

$$(6,10) = 6\bar{P}_{03}\sigma_y^o$$

$$(6,11) = 8\bar{P}_{31}\tau_{xy}^o$$

$$(6,12) = 2\bar{P}_{31}\sigma_y^o + 6\bar{P}_{22}\tau_{xy}^o$$

$$(6,13) = 4\bar{P}_{22}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{13}\tau_{xy}^o$$

$$(6,14) = 6\bar{P}_{13}\sigma_y^0 + 2\bar{P}_{04}\tau_{xy}^0$$

$$(6,16) = 10\bar{P}_{41}\tau_{xy}^0$$

$$(6,18) = 4\bar{P}_{32}\sigma_y^0 + 6\bar{P}_{23}\tau_{xy}^0$$

$$(6,20) = 8\bar{P}_{14}\sigma_y^0 + 2\bar{P}_{05}\tau_{xy}^0$$

$$(7,7) = 9\bar{P}_{40}\sigma_x^0$$

$$(7,9) = 3\bar{P}_{22}\sigma_x^0 + 6\bar{P}_{31}\tau_{xy}^0$$

$$(7,11) = 12\bar{P}_{50}\sigma_x^0$$

$$(7,13) = 6\bar{P}_{32}\sigma_x^0 + 6\bar{P}_{41}\tau_{xy}^0$$

$$(7,15) = 12\bar{P}_{23}\tau_{xy}^0$$

$$(7,17) = 12\bar{P}_{51}\sigma_x^0 + 3\bar{P}_{60}\tau_{xy}^0$$

$$(7,19) = 6\bar{P}_{33}\sigma_x^0 + 9\bar{P}_{42}\tau_{xy}^0$$

$$(7,21) = 15\bar{P}_{24}\tau_{xy}^0$$

$$(6,15) = 8\bar{P}_{04}\sigma_y^0$$

$$(6,17) = 2\bar{P}_{41}\sigma_y^0 + 8\bar{P}_{32}\tau_{xy}^0$$

$$(6,19) = 6\bar{P}_{23}\sigma_y^0 + 4\bar{P}_{14}\tau_{xy}^0$$

$$(6,21) = 10\bar{P}_{05}\sigma_y^0$$

$$(7,8) = 6\bar{P}_{31}\sigma_x^0 + 3\bar{P}_{40}\tau_{xy}^0$$

$$(7,10) = 9\bar{P}_{22}\tau_{xy}^0$$

$$(7,12) = 9\bar{P}_{41}\sigma_x^0 + 3\bar{P}_{50}\tau_{xy}^0$$

$$(7,14) = 3\bar{P}_{23}\sigma_x^0 + 9\bar{P}_{32}\tau_{xy}^0$$

$$(7,16) = 16\bar{P}_{60}\sigma_x^0$$

$$(7,18) = 9\bar{P}_{42}\sigma_x^0 + 6\bar{P}_{51}\tau_{xy}^0$$

$$(7,20) = 3\bar{P}_{24}\sigma_x^0 + 12\bar{P}_{33}\tau_{xy}^0$$

$$(8,8) = 4\bar{P}_{22}\sigma_x^0 + \bar{P}_{40}\sigma_y^0 + 4\bar{P}_{31}\tau_{xy}^0$$

$$(8,10) = 3\bar{P}_{22}\sigma_y^0 + 6\bar{P}_{13}\tau_{xy}^0$$

$$(8,12) = 6\bar{P}_{32}\sigma_x^0 + \bar{P}_{50}\sigma_y^0 + 5\bar{P}_{51}\tau_{xy}^0$$

$$(8,14) = 2\bar{P}_{14}\sigma_x^0 + 3\bar{P}_{32}\sigma_y^0 + 7\bar{P}_{23}\tau_{xy}^0$$

$$(8,16) = 10\bar{P}_{51}\sigma_x^0 + 5\bar{P}_{60}\tau_{xy}^0$$

$$(8,18) = 6\bar{P}_{33}\sigma_x^0 + 2\bar{P}_{51}\sigma_y^0 + 7\bar{P}_{42}\tau_{xy}^0$$

$$(8,20) = 2\bar{P}_{15}\sigma_x^0 + 4\bar{P}_{33}\sigma_y^0 + 9\bar{P}_{24}\tau_{xy}^0$$

$$(8,9) = 2\bar{P}_{13}\sigma_x^0 + 2\bar{P}_{31}\sigma_y^0 + 5\bar{P}_{22}\tau_{xy}^0$$

$$(8,11) = 8\bar{P}_{41}\sigma_x^0 + 4\bar{P}_{50}\tau_{xy}^0$$

$$(8,13) = 4\bar{P}_{23}\sigma_x^0 + 2\bar{P}_{41}\sigma_y^0 + 6\bar{P}_{32}\tau_{xy}^0$$

$$(8,15) = 4\bar{P}_{23}\sigma_y^0 + 8\bar{P}_{14}\tau_{xy}^0$$

$$(8,17) = 8\bar{P}_{42}\sigma_x^0 + \bar{P}_{60}\sigma_y^0 + 6\bar{P}_{51}\tau_{xy}^0$$

$$(8,19) = 4\bar{P}_{24}\sigma_x^0 + 3\bar{P}_{42}\sigma_y^0 + 8\bar{P}_{33}\tau_{xy}^0$$

$$(8,21) = 5\bar{P}_{24}\sigma_y^0 + 10\bar{P}_{15}\tau_{xy}^0$$

$$(9,9) = \bar{P}_{04} \sigma_x^o + 4\bar{P}_{22} \sigma_y^o + 4\bar{P}_{13} \tau_{xy}^o$$

$$(9,10) = 6\bar{P}_{13} \sigma_y^o + 3\bar{P}_{04} \tau_{xy}^o$$

$$(9,11) = 4\bar{P}_{32} \sigma_x^o + 8\bar{P}_{41} \tau_{xy}^o$$

$$(9,12) = 3\bar{P}_{23} \sigma_x^o + 2\bar{P}_{41} \sigma_y^o + 7\bar{P}_{32} \tau_{xy}^o$$

$$(9,13) = 2\bar{P}_{14} \sigma_x^o + 4\bar{P}_{32} \sigma_y^o + 6\bar{P}_{23} \tau_{xy}^o$$

$$(9,14) = \bar{P}_{05} \sigma_x^o + 6\bar{P}_{23} \sigma_y^o + 5\bar{P}_{14} \tau_{xy}^o$$

$$(9,15) = 8\bar{P}_{14} \sigma_y^o + 4\bar{P}_{05} \tau_{xy}^o$$

$$(9,16) = 5\bar{P}_{42} \sigma_x^o + 10\bar{P}_{51} \tau_{xy}^o$$

$$(9,17) = 4\bar{P}_{33} \sigma_x^o + 2\bar{P}_{51} \sigma_y^o + 9\bar{P}_{42} \tau_{xy}^o$$

$$(9,18) = 3\bar{P}_{24} \sigma_x^o + 4\bar{P}_{42} \sigma_y^o + 8\bar{P}_{33} \tau_{xy}^o$$

$$(9,19) = 2\bar{P}_{15} \sigma_x^o + 6\bar{P}_{33} \sigma_y^o + 7\bar{P}_{24} \tau_{xy}^o$$

$$(9,20) = \bar{P}_{06} \sigma_x^o + 8\bar{P}_{24} \sigma_y^o + 6\bar{P}_{15} \tau_{xy}^o$$

$$(9,21) = 10\bar{P}_{15} \sigma_y^o + 5\bar{P}_{06} \tau_{xy}^o$$

$$(10,10) = 9\bar{P}_{04} \sigma_y^o$$

$$(10,11) = 12\bar{P}_{32} \tau_{xy}^o$$

$$(10,12) = 3\bar{P}_{32} \sigma_y^o + 9\bar{P}_{23} \tau_{xy}^o$$

$$(10,13) = 6\bar{P}_{23} \sigma_y^o + 6\bar{P}_{14} \tau_{xy}^o$$

$$(10,14) = 9\bar{P}_{14} \sigma_y^o + 3\bar{P}_{05} \tau_{xy}^o$$

$$(10,15) = 12\bar{P}_{05} \sigma_y^o$$

$$(10,16) = 15\bar{P}_{42} \tau_{xy}^o$$

$$(10,17) = 3\bar{P}_{42} \sigma_y^o + 12\bar{P}_{33} \tau_{xy}^o$$

$$(10,18) = 6\bar{P}_{33} \sigma_y^o + 9\bar{P}_{24} \tau_{xy}^o$$

$$(10,19) = 9\bar{P}_{24} \sigma_y^o + 6\bar{P}_{15} \tau_{xy}^o$$

$$(10,20) = 12\bar{P}_{15} \sigma_y^o + 3\bar{P}_{06} \tau_{xy}^o$$

$$(10,21) = 15\bar{P}_{06} \sigma_y^o$$

$$(11,11) = 16\bar{P}_{60} \sigma_x^o$$

$$(11,12) = 12\bar{P}_{51} \sigma_x^o + 4\bar{P}_{60} \tau_{xy}^o$$

$$(11,13) = 8\bar{P}_{42} \sigma_x^o + 8\bar{P}_{51} \tau_{xy}^o$$

$$(11,14) = 4\bar{P}_{33} \sigma_x^o + 12\bar{P}_{42} \tau_{xy}^o$$

$$(11,15) = 16\bar{P}_{33} \tau_{xy}^o$$

$$(11,16) = 20\bar{P}_{70} \sigma_x^o$$

$$(11,17) = 16\bar{P}_{61} \sigma_x^o + 4\bar{P}_{70} \tau_{xy}^o$$

$$(11,18) = 12\bar{P}_{52} \sigma_x^o + 8\bar{P}_{61} \tau_{xy}^o$$

$$(11,19) = 8\bar{P}_{43} \sigma_y^o + 12\bar{P}_{52} \tau_{xy}^o$$

$$(11,20) = 4\bar{P}_{34} \sigma_x^o + 16\bar{P}_{43} \tau_{xy}^o$$

$$(11,21) = 20\bar{P}_{34} \tau_{xy}^o$$

$$\begin{aligned}
 (12,12) &= 9\bar{P}_{42}\sigma_x^o + \bar{P}_{60}\sigma_y^o + 6\bar{P}_{51}\tau_{xy}^o & (12,13) &= 6\bar{P}_{33}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{51}\sigma_y^o + 8\bar{P}_{42}\tau_{xy}^o \\
 (12,14) &= 3\bar{P}_{24}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{42}\sigma_y^o + 10\bar{P}_{33}\tau_{xy}^o & (12,15) &= 4\bar{P}_{33}\sigma_y^o + 12\bar{P}_{24}\tau_{xy}^o \\
 (12,16) &= 15\bar{P}_{61}\sigma_x^o + 5\bar{P}_{70}\tau_{xy}^o & (12,17) &= 12\bar{P}_{52}\sigma_x^o + \bar{P}_{70}\sigma_y^o + 7\bar{P}_{61}\tau_{xy}^o \\
 (12,18) &= 9\bar{P}_{43}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{61}\sigma_y^o + 9\bar{P}_{52}\tau_{xy}^o & (12,19) &= 6\bar{P}_{34}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{52}\sigma_y^o + 11\bar{P}_{43}\tau_{xy}^o \\
 (12,20) &= 3\bar{P}_{25}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{43}\sigma_y^o + 13\bar{P}_{34}\tau_{xy}^o & (12,21) &= 5\bar{P}_{34}\sigma_y^o + 15\bar{P}_{25}\tau_{xy}^o \\
 \\
 (13,13) &= 4\bar{P}_{24}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{42}\sigma_y^o + 8\bar{P}_{33}\tau_{xy}^o & (13,14) &= 2\bar{P}_{15}\sigma_x^o + 6\bar{P}_{33}\sigma_y^o + 8\bar{P}_{24}\tau_{xy}^o \\
 (13,15) &= 8\bar{P}_{24}\sigma_y^o + 8\bar{P}_{15}\tau_{xy}^o & (13,16) &= 16\bar{P}_{52}\sigma_x^o + 10\bar{P}_{61}\tau_{xy}^o \\
 (13,17) &= 8\bar{P}_{43}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{61}\sigma_y^o + 10\bar{P}_{52}\tau_{xy}^o & (13,18) &= 6\bar{P}_{34}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{52}\sigma_y^o + 10\bar{P}_{43}\tau_{xy}^o \\
 (13,19) &= 4\bar{P}_{25}\sigma_x^o + 6\bar{P}_{43}\sigma_y^o + 10\bar{P}_{34}\tau_{xy}^o & (13,20) &= 2\bar{P}_{16}\sigma_x^o + 8\bar{P}_{34}\sigma_y^o + 10\bar{P}_{25}\tau_{xy}^o \\
 (13,21) &= 10\bar{P}_{25}\sigma_y^o + 10\bar{P}_{16}\tau_{xy}^o \\
 \\
 (14,14) &= \bar{P}_{06}\sigma_x^o + 9\bar{P}_{24}\sigma_y^o + 6\bar{P}_{15}\tau_{xy}^o & (14,15) &= 12\bar{P}_{15}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{06}\tau_{xy}^o \\
 (14,16) &= 5\bar{P}_{43}\sigma_x^o + 15\bar{P}_{52}\tau_{xy}^o & (14,17) &= 4\bar{P}_{34}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{52}\sigma_y^o + 13\bar{P}_{43}\tau_{xy}^o \\
 (14,18) &= 3\bar{P}_{25}\sigma_x^o + 6\bar{P}_{43}\sigma_y^o + 11\bar{P}_{34}\tau_{xy}^o & (14,19) &= 2\bar{P}_{16}\sigma_x^o + 9\bar{P}_{34}\sigma_y^o + 9\bar{P}_{25}\tau_{xy}^o \\
 (14,20) &= \bar{P}_{07}\sigma_x^o + 12\bar{P}_{25}\sigma_y^o + 7\bar{P}_{16}\tau_{xy}^o & (14,21) &= 15\bar{P}_{16}\sigma_y^o + 5\bar{P}_{07}\tau_{xy}^o \\
 \\
 (15,15) &= 16\bar{P}_{06}\sigma_y^o & (15,16) &= 20\bar{P}_{43}\tau_{xy}^o \\
 (15,17) &= 4\bar{P}_{43}\sigma_y^o + 16\bar{P}_{34}\tau_{xy}^o & (15,18) &= 8\bar{P}_{34}\sigma_y^o + 12\bar{P}_{25}\tau_{xy}^o \\
 (15,19) &= 12\bar{P}_{25}\sigma_y^o + 8\bar{P}_{16}\tau_{xy}^o & (15,20) &= 16\bar{P}_{16}\sigma_y^o + 4\bar{P}_{07}\tau_{xy}^o \\
 (15,21) &= 20\bar{P}_{07}\sigma_y^o
 \end{aligned}$$

$$(16,16) = 25\bar{P}_{80}\sigma_x^o$$

$$(16,17) = 20\bar{P}_{71}\sigma_x^o + 5\bar{P}_{80}\tau_{xy}^o$$

$$(16,18) = 15\bar{P}_{62}\sigma_x^o + 10\bar{P}_{71}\tau_{xy}^o$$

$$(16,19) = 10\bar{P}_{53}\sigma_x^o + 15\bar{P}_{62}\tau_{xy}^o$$

$$(16,20) = 5\bar{P}_{44}\sigma_x^o + 20\bar{P}_{53}\tau_{xy}^o$$

$$(16,21) = 25\bar{P}_{44}\tau_{xy}^o$$

$$(17,17) = 16\bar{P}_{62}\sigma_x^o + \bar{P}_{80}\sigma_y^o + 8\bar{P}_{71}\tau_{xy}^o$$

$$(17,18) = 12\bar{P}_{53}\sigma_x^o + 2\bar{P}_{71}\sigma_y^o + 11\bar{P}_{62}\tau_{xy}^o$$

$$(17,19) = 8\bar{P}_{44}\sigma_x^o + 3\bar{P}_{62}\sigma_y^o + 14\bar{P}_{53}\tau_{xy}^o$$

$$(17,20) = 4\bar{P}_{35}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{53}\sigma_y^o + 17\bar{P}_{44}\tau_{xy}^o$$

$$(17,21) = 5\bar{P}_{44}\sigma_y^o + 20\bar{P}_{35}\tau_{xy}^o$$

$$(18,18) = 9\bar{P}_{44}\sigma_x^o + 4\bar{P}_{62}\sigma_y^o + 12\bar{P}_{53}\tau_{xy}^o$$

$$(18,19) = 6\bar{P}_{35}\sigma_x^o + 6\bar{P}_{53}\sigma_y^o + 13\bar{P}_{44}\tau_{xy}^o$$

$$(18,20) = 3\bar{P}_{26}\sigma_x^o + 8\bar{P}_{44}\sigma_y^o + 14\bar{P}_{35}\tau_{xy}^o$$

$$(18,21) = 10\bar{P}_{35}\sigma_y^o + 15\bar{P}_{26}\tau_{xy}^o$$

$$(19,19) = 4\bar{P}_{26}\sigma_x^o + 9\bar{P}_{44}\sigma_y^o + 12\bar{P}_{35}\tau_{xy}^o$$

$$(19,20) = 2\bar{P}_{17}\sigma_x^o + 12\bar{P}_{35}\sigma_y^o + 11\bar{P}_{26}\tau_{xy}^o$$

$$(19,21) = 15\bar{P}_{26}\sigma_y^o + 10\bar{P}_{17}\tau_{xy}^o$$

$$(20,20) = \bar{P}_{08}\sigma_x^o + 16\bar{P}_{26}\sigma_y^o + 8\bar{P}_{17}\tau_{xy}^o$$

$$(20,21) = 20\bar{P}_{17}\sigma_y^o + 5\bar{P}_{08}\tau_{xy}^o$$

$$(21,21) = 25\bar{P}_{08}\sigma_y^o$$

Para o caso de elemento com variação linear de tensões, ver Apêndice 1.

3.12 - Determinação dos termos da matriz de rigidez de uma base elástica

A matriz de rigidez de uma base elástica sob um elemento finito triangular é dada pela integral (3.50):

$$[KFE]_e = [C]^{-1T} \left\{ \int_S K_B [\phi(x,y)]^T [\phi(x,y)] dx dy \right\} [C]^{-1}$$

Os termos do integrando serão constituídos de expres
sões do tipo:

$$P_{\alpha\beta}^* = \int_S K_B x^\alpha y^\beta dx dy$$

onde está se admitindo K_B constante no elemento.

A matriz:

$$\int_S K_B [\phi(x,y)]^T [\phi(x,y)] dx dy$$

é uma matriz simétrica de ordem 21x21 cujos elementos de sua parte triangular superior são apresentados a seguir.

(1,1) = P_{00}^*	(1,2) = P_{10}^*	(1,3) = P_{01}^*
(1,4) = P_{20}^*	(1,5) = P_{11}^*	(1,6) = P_{20}^*
(1,7) = P_{30}^*	(1,8) = P_{21}^*	(1,9) = P_{12}^*
(1,10) = P_{03}^*	(1,11) = P_{40}^*	(1,12) = P_{31}^*
(1,13) = P_{22}^*	(1,14) = P_{13}^*	(1,15) = P_{04}^*
(1,16) = P_{50}^*	(1,17) = P_{41}^*	(1,18) = P_{32}^*
(1,19) = P_{23}^*	(1,20) = P_{14}^*	(1,21) = P_{05}^*
(2,2) = P_{20}^*	(2,3) = P_{11}^*	(2,4) = P_{30}^*
(2,5) = P_{21}^*	(2,6) = P_{12}^*	(2,7) = P_{40}^*
(2,8) = P_{31}^*	(2,9) = P_{22}^*	(2,10) = P_{13}^*
(2,11) = P_{50}^*	(2,12) = P_{41}^*	(2,13) = P_{32}^*

$(2,14) = P_{23}^*$	$(2,15) = P_{14}^*$	$(2,16) = P_{60}^*$
$(2,17) = P_{51}^*$	$(2,18) = P_{42}^*$	$(2,19) = P_{33}^*$
$(2,20) = P_{24}^*$	$(2,21) = P_{15}^*$	
$(3,3) = P_{02}^*$	$(3,4) = P_{21}^*$	$(3,5) = P_{12}^*$
$(3,6) = P_{03}^*$	$(3,7) = P_{31}^*$	$(3,8) = P_{22}^*$
$(3,9) = P_{13}^*$	$(3,10) = P_{04}^*$	$(3,11) = P_{41}^*$
$(3,12) = P_{32}^*$	$(3,13) = P_{23}^*$	$(3,14) = P_{14}^*$
$(3,15) = P_{05}^*$	$(3,16) = P_{51}^*$	$(3,17) = P_{42}^*$
$(3,18) = P_{33}^*$	$(3,19) = P_{24}^*$	$(3,20) = P_{15}^*$
$(3,21) = P_{06}^*$		
$(4,4) = P_{40}^*$	$(4,5) = P_{31}^*$	$(4,6) = P_{22}^*$
$(4,7) = P_{50}^*$	$(4,8) = P_{41}^*$	$(4,9) = P_{32}^*$
$(4,10) = P_{23}^*$	$(4,11) = P_{60}^*$	$(4,12) = P_{51}^*$
$(4,13) = P_{42}^*$	$(4,14) = P_{33}^*$	$(4,15) = P_{24}^*$
$(4,16) = P_{70}^*$	$(4,17) = P_{61}^*$	$(4,18) = P_{52}^*$
$(4,19) = P_{43}^*$	$(4,20) = P_{34}^*$	$(4,21) = P_{25}^*$
$(5,5) = P_{22}^*$	$(5,6) = P_{13}^*$	$(5,7) = P_{41}^*$
$(5,8) = P_{32}^*$	$(5,9) = P_{23}^*$	$(5,10) = P_{14}^*$
$(5,11) = P_{51}^*$	$(5,12) = P_{42}^*$	$(5,13) = P_{33}^*$

$(5,14) = P_{24}^*$	$(5,15) = P_{15}^*$	$(5,16) = P_{61}^*$
$(5,17) = P_{52}^*$	$(5,18) = P_{43}^*$	$(5,19) = P_{34}^*$
$(5,20) = P_{25}^*$	$(5,21) = P_{16}^*$	
$(6,6) = P_{04}^*$	$(6,7) = P_{32}^*$	$(6,8) = P_{23}^*$
$(6,9) = P_{14}^*$	$(6,10) = P_{05}^*$	$(6,11) = P_{42}^*$
$(6,12) = P_{33}^*$	$(6,13) = P_{24}^*$	$(6,14) = P_{15}^*$
$(6,15) = P_{06}^*$	$(6,16) = P_{52}^*$	$(6,17) = P_{43}^*$
$(6,18) = P_{34}^*$	$(6,19) = P_{25}^*$	$(6,20) = P_{16}^*$
$(6,21) = P_{07}^*$		
$(7,7) = P_{60}^*$	$(7,8) = P_{51}^*$	$(7,9) = P_{42}^*$
$(7,10) = P_{33}^*$	$(7,11) = P_{70}^*$	$(7,12) = P_{61}^*$
$(7,13) = P_{52}^*$	$(7,14) = P_{43}^*$	$(7,15) = P_{34}^*$
$(7,16) = P_{80}^*$	$(7,17) = P_{71}^*$	$(7,18) = P_{62}^*$
$(7,19) = P_{53}^*$	$(7,20) = P_{44}^*$	$(7,21) = P_{35}^*$
$(8,8) = P_{42}^*$	$(8,9) = P_{33}^*$	$(8,10) = P_{24}^*$
$(8,11) = P_{61}^*$	$(8,12) = P_{52}^*$	$(8,13) = P_{43}^*$
$(8,14) = P_{34}^*$	$(8,15) = P_{25}^*$	$(8,16) = P_{71}^*$
$(8,17) = P_{62}^*$	$(8,18) = P_{53}^*$	$(8,19) = P_{44}^*$
$(8,20) = P_{35}^*$	$(8,21) = P_{26}^*$	

$(9,9) = P_{24}^*$	$(9,10) = P_{15}^*$	$(9,11) = P_{52}^*$
$(9,12) = P_{43}^*$	$(9,13) = P_{34}^*$	$(9,14) = P_{25}^*$
$(9,15) = P_{16}^*$	$(9,16) = P_{62}^*$	$(9,17) = P_{53}^*$
$(9,18) = P_{44}^*$	$(9,19) = P_{35}^*$	$(9,20) = P_{26}^*$
$(9,21) = P_{17}^*$		
$(10,10) = P_{06}^*$	$(10,11) = P_{43}^*$	$(10,12) = P_{34}^*$
$(10,13) = P_{25}^*$	$(10,14) = P_{16}^*$	$(10,15) = P_{07}^*$
$(10,16) = P_{53}^*$	$(10,17) = P_{44}^*$	$(10,18) = P_{35}^*$
$(10,19) = P_{26}^*$	$(10,20) = P_{17}^*$	$(10,21) = P_{08}^*$
$(11,11) = P_{80}^*$	$(11,12) = P_{71}^*$	$(11,13) = P_{62}^*$
$(11,14) = P_{53}^*$	$(11,15) = P_{44}^*$	$(11,16) = P_{90}^*$
$(11,17) = P_{81}^*$	$(11,18) = P_{72}^*$	$(11,19) = P_{63}^*$
$(11,20) = P_{54}^*$	$(11,21) = P_{45}^*$	
$(12,12) = P_{62}^*$	$(12,13) = P_{53}^*$	$(12,14) = P_{44}^*$
$(12,15) = P_{35}^*$	$(12,16) = P_{81}^*$	$(12,17) = P_{72}^*$
$(12,18) = P_{63}^*$	$(12,19) = P_{54}^*$	$(12,20) = P_{45}^*$
$(12,21) = P_{36}^*$		
$(13,13) = P_{44}^*$	$(13,14) = P_{35}^*$	$(13,15) = P_{26}^*$
$(13,16) = P_{72}^*$	$(13,17) = P_{63}^*$	$(13,18) = P_{54}^*$

$(13,19) = P_{45}^*$	$(13,20) = P_{36}^*$	$(13,21) = P_{27}^*$
$(14,14) = P_{26}^*$	$(14,15) = P_{17}^*$	$(14,16) = P_{63}^*$
$(14,17) = P_{54}^*$	$(14,18) = P_{45}^*$	$(14,19) = P_{36}^*$
$(14,20) = P_{27}^*$	$(14,21) = P_{18}^*$	
$(15,15) = P_{08}^*$	$(15,16) = P_{54}^*$	$(15,17) = P_{45}^*$
$(15,18) = P_{36}^*$	$(15,19) = P_{27}^*$	$(15,20) = P_{18}^*$
$(15,21) = P_{09}^*$		
$(16,16) = P_{100}^*$	$(16,17) = P_{91}^*$	$(16,18) = P_{82}^*$
$(16,19) = P_{73}^*$	$(16,20) = P_{64}^*$	$(16,21) = P_{55}^*$
$(17,17) = P_{82}^*$	$(17,18) = P_{73}^*$	$(17,19) = P_{64}^*$
$(17,20) = P_{55}^*$	$(17,21) = P_{46}^*$	
$(18,18) = P_{64}^*$	$(18,19) = P_{55}^*$	$(18,20) = P_{46}^*$
$(18,21) = P_{37}^*$		
$(19,19) = P_{46}^*$	$(19,20) = P_{37}^*$	$(19,21) = P_{28}^*$
$(20,20) = P_{28}^*$	$(20,21) = P_{19}^*$	
$(21,21) = P_{010}^*$		

3.13 - Termos do vetor de cargas nodais equivalente a um carregamento distribuído sobre o elemento

O vetor de cargas nodais do elemento finito equivalente a um carregamento distribuído é dado por (3.35), ou seja:

$$[CE]_e = [C]^{-1T} \int_S q(x,y) [\phi(x,y)]^T dx dy$$

O carregamento pode ser variável. Adotando-se uma variação linear para o carregamento no elemento finito, $q(x,y)$ pode ser escrito em coordenadas homogêneas, como segue:

$$q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = q_1 \xi_1 + q_2 \xi_2 + q_3 \xi_3 \quad \dots (3.77)$$

onde $q_i (i=1,2,3)$ são, respectivamente, os valores do carregamento nos nós 1, 2 e 3 do elemento.

Os termos do integrando serão constituídos de integrais do tipo:

$$P'_{\alpha\beta} = \int_S q(x,y) x^\alpha y^\beta dx dy$$

A matriz:

$$\int_S q(x,y) [\phi(x,y)]^T dx dy$$

é uma matriz de ordem 21×1 cujos elementos são apresentados a seguir:

(1,1) = P'_{00}	(2,1) = P'_{10}	(3,1) = P'_{01}
(4,1) = P'_{20}	(5,1) = P'_{11}	(6,1) = P'_{02}

$$\begin{array}{lll}
 (7,1) = P'_{30} & (8,1) = P'_{21} & (9,1) = P'_{12} \\
 (10,1) = P'_{03} & (11,1) = P'_{40} & (12,1) = P'_{31} \\
 (13,1) = P'_{22} & (14,1) = P'_{13} & (15,1) = P'_{04} \\
 (16,1) = P'_{50} & (17,1) = P'_{41} & (18,1) = P'_{32} \\
 (19,1) = P'_{23} & (20,1) = P'_{14} & (21,1) = P'_{05}
 \end{array}$$

3.14 - Montagem da matriz [C]

Os parâmetros nodais, como já foi visto, são listados na forma de submatrizes, ou seja:

$$\{\delta\}_e = \left\{ \begin{array}{l} \{W\}_1 \\ \{W\}_2 \\ \{W\}_3 \\ \{W\}_4 \\ \{W\}_5 \\ \{W\}_6 \end{array} \right\} \dots (3.78)$$

onde

$$\{W\}_i = \left\{ \begin{array}{l} w \\ w,x \\ w,y \\ w,x^2 \\ w,xy \\ w,y^2 \end{array} \right\}_i \quad \text{para } i = 1,2,3 \quad \dots (3.79)$$

e

$$\{W\}_j = \{w_n\}_j \quad \text{para } j = 4,5,6 \quad \dots (3.80)$$

onde os índices i e j indicam pontos nodais do elemento (ver figura 3.2).

A equação (3.10) pode ser escrita na forma:

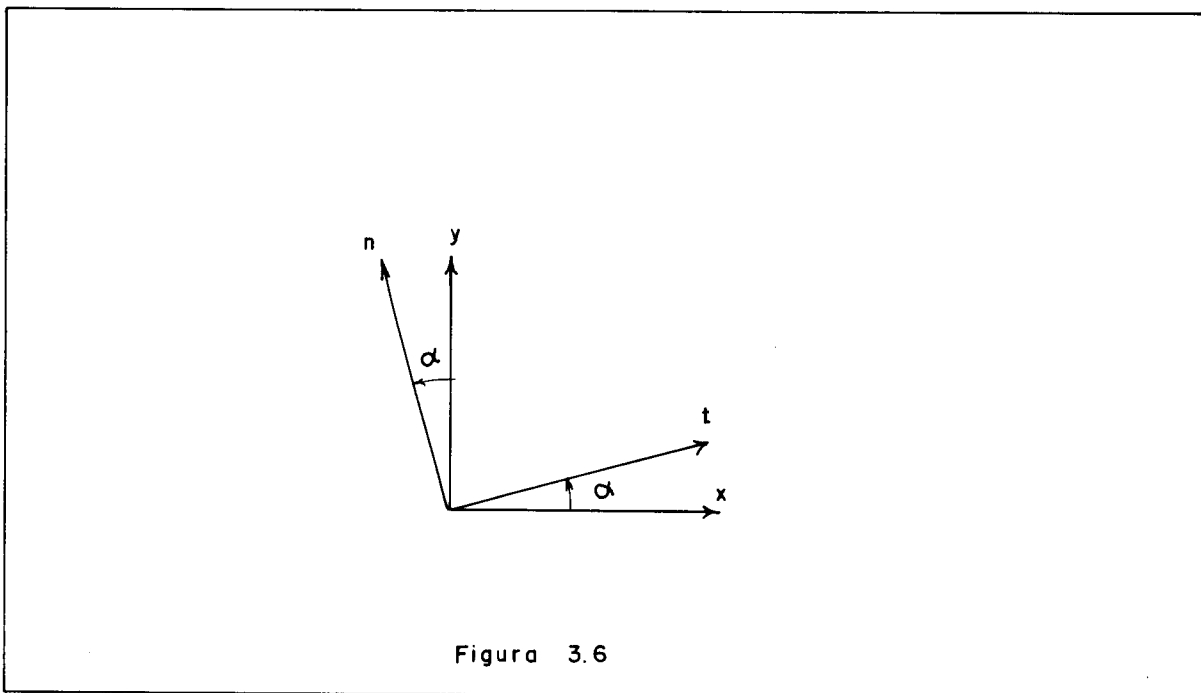
$$\begin{Bmatrix} \{W\}_1 \\ \{W\}_2 \\ \{W\}_3 \\ \{W\}_4 \\ \{W\}_5 \\ \{W\}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [C]_1 \\ [C]_2 \\ [C]_3 \\ [C]_4 \\ [C]_5 \\ [C]_6 \end{Bmatrix} \{\alpha\} \quad \dots (3.81)$$

As submatrizes $[C]_1$, $[C]_2$ e $[C]_3$ são obtidas pela substituição das coordenadas locais dos nós 1, 2 e 3 na expressão da elástica e de suas derivadas, ou seja, de (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8):

$$[c]_i = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & \dots & x_i^2 y_i^3 & x_i y_i^4 & y_i^5 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_i & \dots & 2x_i y_i^3 & y_i^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 3x_i^2 y_i^2 & 4x_i y_i^3 & 5y_i^4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2y_i^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6x_i y_i^2 & 4y_i^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6x_i^2 y_i & 12x_i y_i^2 & 20y_i^3 \end{bmatrix} \quad \dots (3.82)$$

Para se determinar as submatrizes $[c]_4$, $[c]_5$ e $[c]_6$ é necessário obter uma expressão para as derivadas $w_{,n}$, normais ao lado do elemento.

Considere-se uma rotação α do sistema de eixos coordenados x e y que após a rotação denominam-se eixos t e n , conforme indica a figura 3.6.



A relação entre os dois sistemas de coordenadas pode ser colocada na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} t \\ n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \dots (3.83)$$

ou, na forma inversa

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ n \end{Bmatrix} \quad \dots (3.84)$$

onde é introduzida a notação:

$$s = \operatorname{sen}\alpha \quad \dots (3.85)$$

$$c = \operatorname{cos}\alpha$$

Diferenciando x e y em relação a t e n tem-se:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = s$$

..... (3.86)

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -s$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = c$$

de onde vem:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \dots (3.87)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial n} \\ \frac{\partial^2}{\partial n^2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & 2sc & s^2 \\ -sc & c^2 - s^2 & sc \\ s^2 & -2sc & c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \quad \dots (3.88)$$

Considere-se agora qualquer lado do elemento finito

da figura 3.7.a. A direção positiva do eixo n_j ($j=4,5,6$) é definida por:

$$0 \leq \beta_j < \pi \quad \dots (3.89.a)$$

onde β_j é o ângulo que o eixo n_j forma com o eixo x .

Como consequência, tem-se:

$$0 \leq \alpha_j < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2} \leq \alpha_j < 2\pi \quad \dots (3.89.b)$$

onde α_j é o ângulo que o eixo t_j forma com o eixo x .

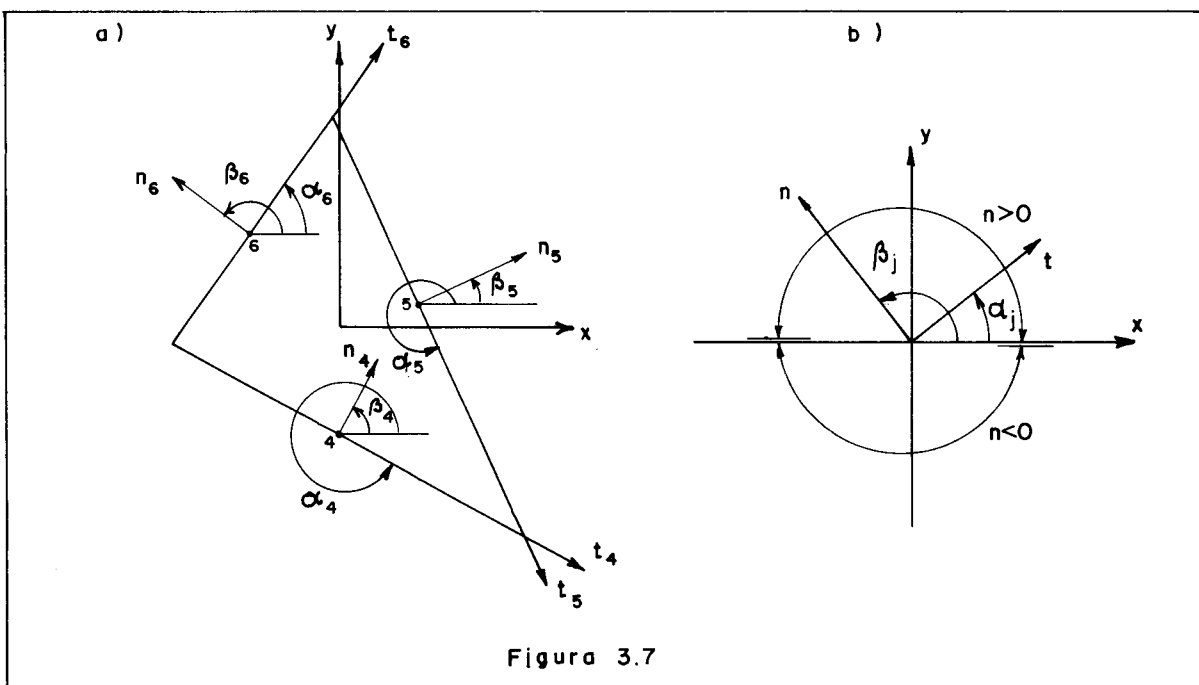


Figura 3.7

A figura 3.7.b indica a convenção de sinais adotada para o eixo n .

Com essa convenção de sinais, e usando em todos os lados dos elementos o eixo n definido positivo, os lados comuns a dois elementos apresentarão a mesma orientação dos eixos t e n .

Os deslocamentos na direção n podem ser obtidos a partir da equação (3.87), ou seja:

$$w_{,n} = -s w_{,x} + c w_{,y} \quad \dots (3.90)$$

As três últimas submatrizes podem agora ser obtidas, utilizando-se as expressões (3.90) e (3.6):

$$[c]_j^T = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -s_j \\ c_j \\ -2s_j x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 3c_j x_j^2 y_j^2 - 2s_j x_j y_j^3 \\ 4c_j x_j y_j^3 - s_j y_j^4 \\ 5c_j y_j^4 \end{array} \right\} \quad \dots (3.91)$$

$j = 4, 5, 6$

onde

$$\begin{aligned} s_j &= \text{sen} \alpha_j \\ c_j &= \text{cos} \alpha_j \end{aligned} \quad \dots (3.92)$$

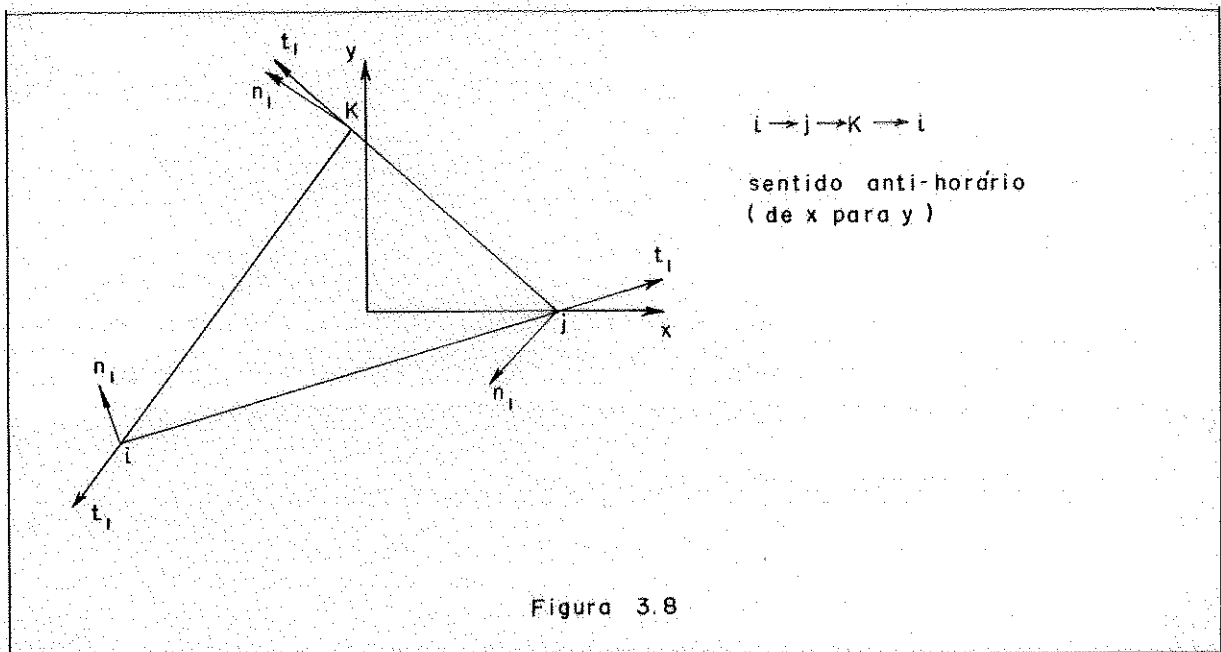
e (x_j, y_j) são as coordenadas dos pontos médios dos lados.

3.15 - Redução do número de graus de liberdade do elemento finito

As incógnitas nodais situadas nos pontos médios dos lados provocam um aumento na largura de banda do sistema de equações, o que acarreta problemas de precisão dos resultados e aumenta consideravelmente o tempo de resolução do sistema de

equações pelo computador. Essas incógnitas w_n podem ser eliminadas sem que deixe de existir compatibilidade de deslocamentos e derivadas primeiras ao longo dos lados comuns dos elementos [7], como será visto a seguir.

Seja um sistema de eixos $n_1 t_1$ com t_1 orientado sempre segundo o sentido de i para j , j para k e k para i , onde i , j e k são os nós do elemento finito, sendo que, nesta sequência, os nós estão no sentido anti-horário, conforme indica a figura 3.8.



A variação de w_n ao longo de um lado \bar{e} , como já foi visto, um polinômio do quarto grau. Impondo-se que a variação de w_n seja um polinômio do terceiro grau, pode-se colocar w_n em função das incógnitas nodais das extremidades desse lado (ver figura 3.9). Com essa transformação o elemento finito apresentará 18 graus de liberdade, sendo 6 graus de liberdade para cada vértice do triângulo.

A função cúbica com a qual se pretende aproximar a variação de $w_{n_1}(t_1)$ ao longo de um lado $i-j$, como indicado na figura 3.9, pode ser escrita como:

$$w_{n_1}(t_1) = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 \quad \dots (3.93)$$

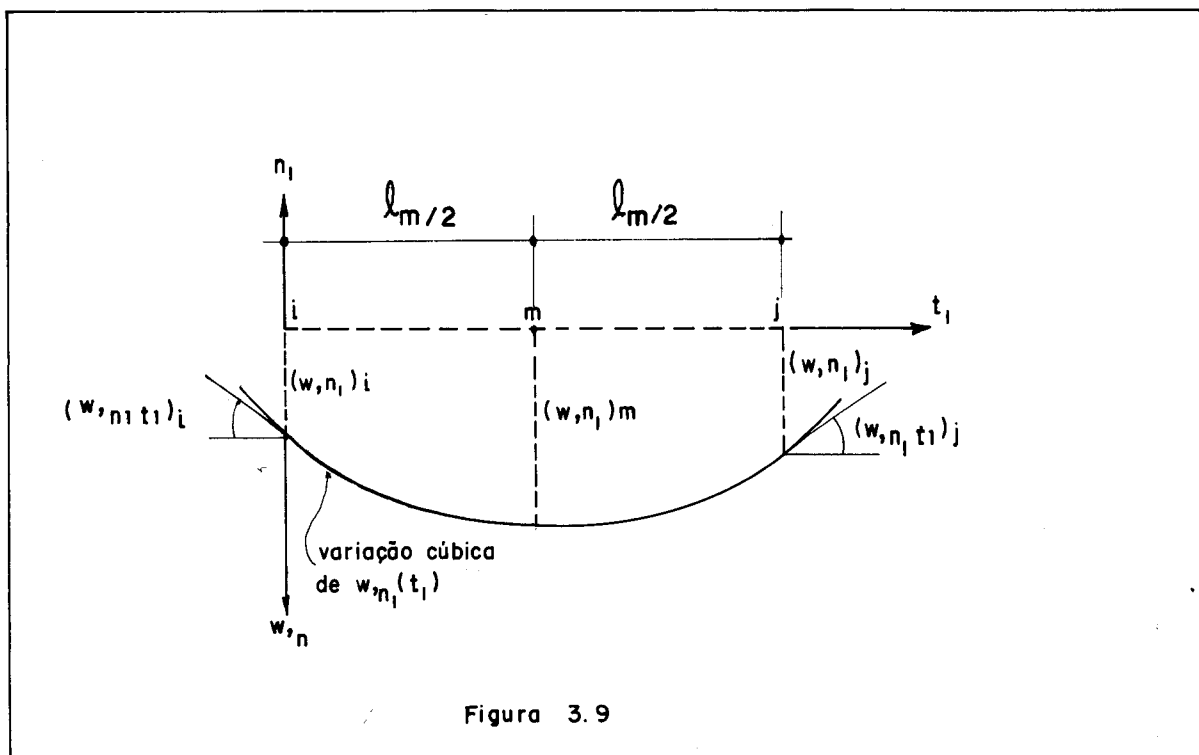


Figura 3.9

Substituindo-se as condições de contorno, tem-se:

para $t_1 = 0 \rightarrow w_{,n_1} = (w_{,n_1})_i$ e $w_{,n_1 t_1} = (w_{,n_1 t_1})_i$

para $t = \ell_m \rightarrow w_{,n_1} = (w_{,n_1})_j$ e $w_{,n_1 t_1} = (w_{,n_1 t_1})_j$

Da equação (3.93), resulta então:

$$a_0 = (w_{,n_1})_i$$

$$a_1 = (w_{,n_1 t_1})_i$$

$$a_2 = \frac{3}{\ell_m^2} \left[-(w_{,n_1})_i + (w_{,n_1})_j \right] + \frac{1}{\ell_m} \left[2(w_{,n_1 t_1})_i + (w_{,n_1 t_1})_j \right]$$

$$a_3 = \frac{2}{\ell_m^3} \left[(w_{,n_1})_i - (w_{,n_1})_j \right] + \frac{1}{\ell_m^2} \left[(w_{,n_1 t_1})_i + (w_{,n_1 t_1})_j \right]$$

Substituindo-se as constantes por essas expressões, em (3.93), e efetuando-se a derivada primeira normal ao lado, no ponto médio, obtêm-se:

$$(w_{,n_1})_m = \frac{1}{2} \left[(w_{,n_1})_i + (w_{,n_1})_j \right] + \frac{\ell_m}{8} \left[(w_{,n_1 t_1})_i - (w_{,n_1 t_1})_j \right] \dots (3.94)$$

Essa expressão representa o valor da primeira derivada w, n_1 em relação aos eixos t_1 e n_1 . Esta expressão pode ser colocada em função das coordenadas dos vértices em relação ao sistema de eixos x e y . Para isso, substitue-se, em (3.94), w, n_1 e $w, n_1 t_1$ por suas expressões obtidas por meio de (3.87) e (3.88).

Seja:

$$K_1^{(m)} = \frac{1}{2} s_m$$

$$K_2^{(m)} = \frac{1}{2} c_m$$

$$K_3^{(m)} = \frac{1}{8} l_m s_m c_m$$

$$K_4^{(m)} = \frac{1}{8} l_m (c_m^2 - s_m^2)$$

.... (3.95)

onde:

$$s_m = \text{sen} \alpha_m$$

$$c_m = \text{sen} \alpha_m$$

l_m = comprimento do lado ao qual o nó m ($m=4,5,6$) pertence.

A expressão da derivada no ponto médio do lado $i-j$ pode ser expressa em termos dos parâmetros nodais dos vértices i e j , como segue:

$$\begin{aligned} (w, n_1)_m &= -K_1^{(m)} (w, x)_i + K_2^{(m)} (w, y)_i - K_1^{(m)} (w, x)_j + \\ &+ K_2^{(m)} (w, y)_j - K_3^{(m)} (w, x^2)_i + K_4^{(m)} (w, xy)_i + K_3^{(m)} (w, y^2)_i + \end{aligned}$$

$$+ K_3^{(m)} (w, x_2)_j - K_4^{(m)} (w, xy)_j - K_3^{(m)} (w, y_2)_j \dots (3.96)$$

O sentido positivo do eixo n está definido na figura 3.7. Se $x_j > x_i$, os eixos n e t, em sua convenção positiva, coincidem com os eixos n_1 e t_1 , o que não ocorre se $x_j < x_i$ (ver figura 3.10).

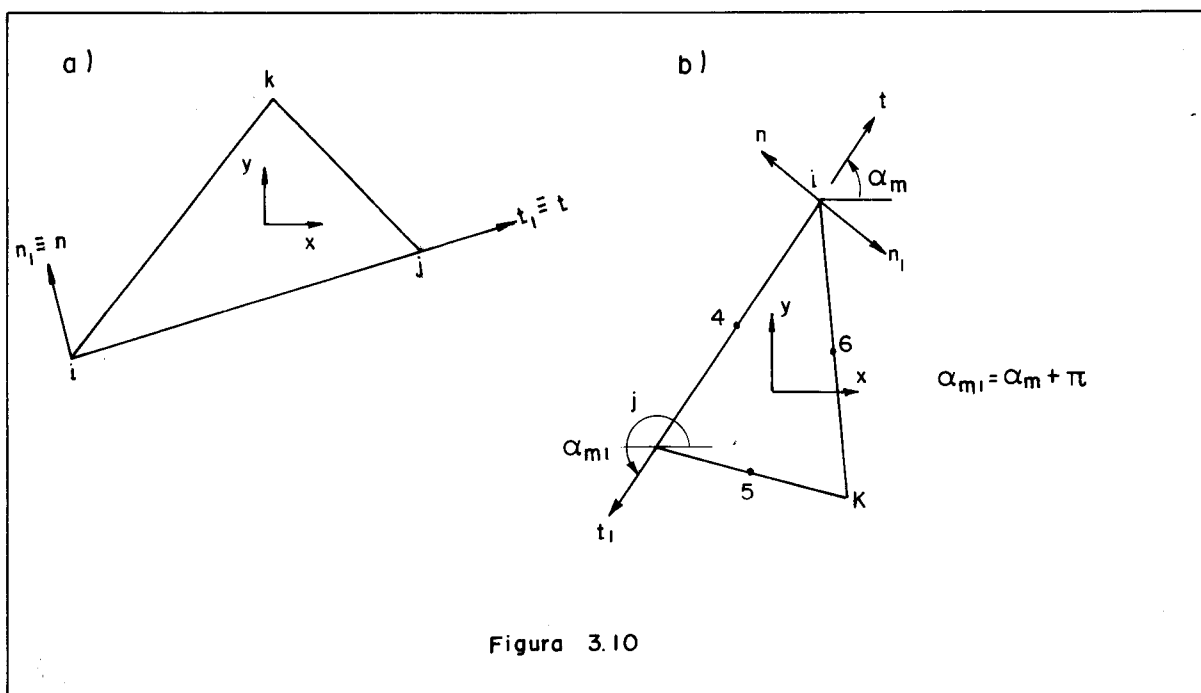


Figura 3.10

Na figura 3.10.a pode-se notar que, para $x_j > x_i$, as duas convenções concordam e as expressões de $(w, n)_m$ e $(w, n_1)_m$ são iguais. Para $x_j < x_i$, as convenções são diferentes, e então é preciso transformar a expressão de $(w, n_1)_m$ em uma expressão de $(w, n)_m$ o que é conseguido mudando-se os sinais de alguns dos coeficientes da expressão (3.96).

A relação entre os parâmetros do meio do lado $\{\delta\}_s$ e os parâmetros do vértice $\{\delta\}_c$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{\delta\}_s = [H] \{\delta\}_c \dots (3.97)$$

na qual:

$$\{\delta\}_s = \begin{Bmatrix} \{W,n\}_4 \\ \{W,n\}_5 \\ \{W,n\}_6 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\delta\}_c = \begin{Bmatrix} \{W\}_1 \\ \{W\}_2 \\ \{W\}_3 \end{Bmatrix} \quad \dots (3.98)$$

onde $\{W\}_i$ ($i=1,2,3$) está definido por (3.79).

A matriz de transformação $[H]$ pode ser dividida em submatrizes como se segue:

$$[H] = \begin{bmatrix} [H]_1 & [H]_2 & [H]_3 \end{bmatrix} \quad \dots (3.99)$$

Os lados terão orientação para os eixos t_1 e n_1 coincidente com os eixos t e n (ver figura 3.10) se:

$$\begin{aligned} x_j &> x_i \\ x_k &> x_j \\ x_i &> x_k \end{aligned} \quad \dots (3.100)$$

As submatrizes $[H]_i$ podem, neste caso, ser escritas da seguinte forma:

$$[H]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -K_1^{(4)} & K_2^{(4)} & -K_3^{(4)} & K_4^{(4)} & K_3^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1^{(6)} & K_2^{(6)} & -K_3^{(6)} & K_4^{(6)} & K_3^{(6)} \end{bmatrix} \quad \dots (3.101.a)$$

$$[H]_2 = \begin{bmatrix} 0 & -K_1^{(4)} & K_2^{(4)} & K_3^{(4)} & -K_4^{(4)} & -K_3^{(4)} \\ 0 & -K_1^{(5)} & K_2^{(5)} & K_3^{(5)} & -K_4^{(5)} & -K_3^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (3.101.b)$$

$$[H]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1^{(5)} & K_2^{(5)} & -K_3^{(5)} & K_4^{(5)} & K_3^{(5)} \\ 0 & -K_1^{(6)} & K_2^{(6)} & K_3^{(6)} & -K_4^{(6)} & -K_3^{(6)} \end{bmatrix} \dots (3.101.c)$$

Se uma das desigualdades dadas por (3.100) inverter de sentido, a expressão para a derivada primeira normal ao lado, no ponto médio deste, a menos de $K_3^{(m)}$ e $K_4^{(m)}$, que mudam de sinal, é a mesma dada por (3.96). Assim, sempre que o sentido de uma das desigualdades, dadas por (3.100), inverter, os sinais de $K_3^{(m)}$ e $K_4^{(m)}$ devem ser mudados nas matrizes $[H]_i$.

Para um elemento finito de 21 graus de liberdade pode-se escrever:

$$\{S\}_{21} = [K]_{21} \{\delta\}_{21} \dots (3.102)$$

onde $\{S\}_{21}$ é o vetor de cargas nodais, $[K]_{21}$ é a matriz de rigidez do elemento e $\{\delta\}_{21}$ é o vetor formado por todos os deslocamentos do elemento, sendo que o índice se refere aos 21 graus de liberdade do elemento finito.

A equação correspondente para o elemento finito com 18 graus de liberdade é:

$$\{S\}_{18} = [K]_{18} \{\delta\}_{18} \dots (3.103)$$

na qual:

$$\{\delta\}_{18} = \{\delta\}_c \quad \dots (3.104)$$

Impondo-se que o trabalho do vetor de cargas seja o mesmo para os dois elementos, tem-se:

$$\{S\}_{18}^T \{\delta\}_{18} = \{S\}_{21}^T \{\delta\}_{21} \quad \dots (3.105)$$

Das equações (3.97) e (3.104) segue que:

$$\{\delta\}_{21} = \begin{Bmatrix} \{\delta\}_c \\ \{\delta\}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]_{18} \\ [H] \end{bmatrix} \{\delta\}_{18} \quad \dots (3.106)$$

onde $[I]_{18}$ é a matriz identidade de ordem 18.

Levando-se esta expressão em (3.105), tem-se:

$$\{S\}_{18}^T \{\delta\}_{18} = \{S\}_{21}^T \begin{bmatrix} [I]_{18} \\ [H] \end{bmatrix} \{\delta\}_{18}$$

de onde vem:

$$\{S\}_{18} = \begin{bmatrix} [I]_{18} & [H]^T \end{bmatrix} \{S\}_{21} \quad \dots (3.107)$$

Substituindo-se, em (3.107), $\{S\}_{21}$ e $\{S\}_{18}$ por suas expressões, dadas por (3.102) e (3.103), tem-se:

$$[K]_{18} \{\delta\}_{18} = \begin{bmatrix} [I]_{18} & [H]^T \end{bmatrix} [K_{21}] \begin{bmatrix} I_{18} \\ H \end{bmatrix} \{\delta\}_{18}$$

de onde se obtém:

$$[K]_{18} = \begin{bmatrix} [I]_{18} & [H]^T \end{bmatrix} [K]_{21} \begin{bmatrix} [I]_{18} \\ [H] \end{bmatrix} \quad \dots (3.108)$$

Da expressão (3.28), tem-se:

$$[K]_{21} = [C]^{-1T} \left(\int_S [Q]^T [D] [Q] \, dx dy \right) [C]^{-1} \quad \dots (3.109)$$

Então:

$$[K]_{18} = \begin{bmatrix} [I]_{18} & [H]^T \end{bmatrix} [C]^{-1T} \left(\int_S [Q]^T [D] [Q] \, dx dy \right) [C]^{-1} \begin{bmatrix} [I]_{18} \\ [H] \end{bmatrix}$$

que pode ser escrito como:

$$[K]_{18} = [A]^T \left(\int_S [Q]^T [D] [Q] \, dx dy \right) [A] \quad \dots (3.110)$$

onde:

$$[A] = [C]^{-1} \begin{bmatrix} [I]_{18} \\ [H] \end{bmatrix} \quad \dots (3.111)$$

Transformações análogas podem ser feitas para as demais matrizes envolvidas.

3.16 - Condições de contorno

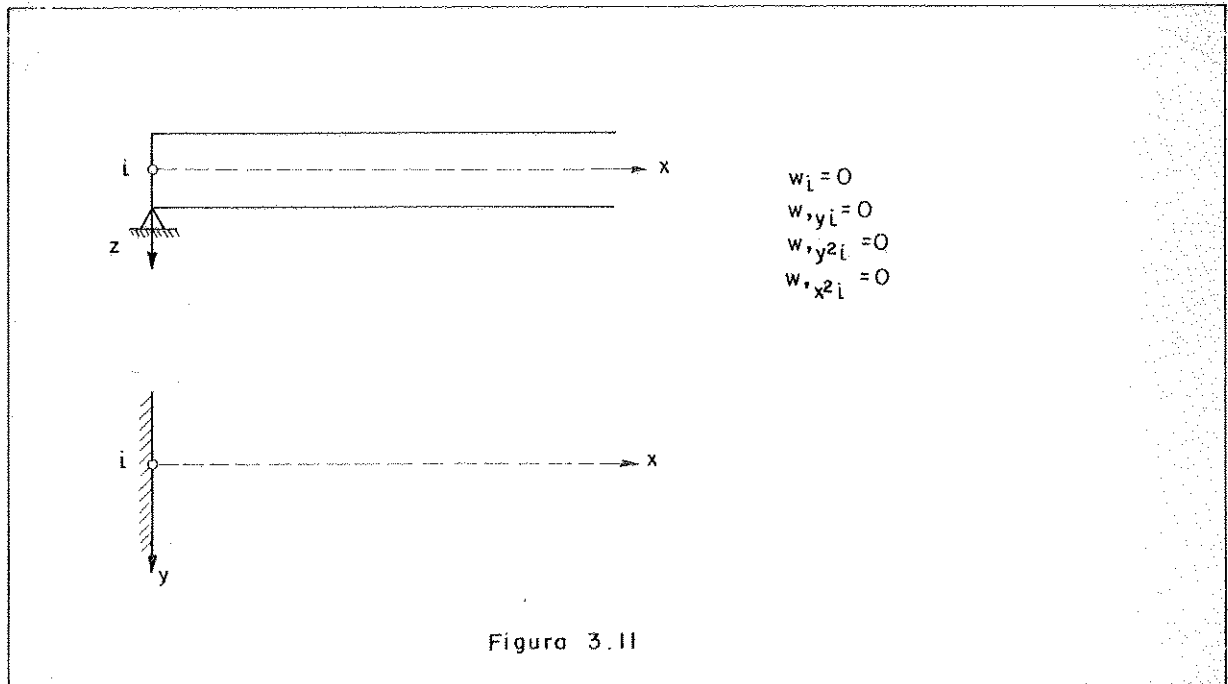
As condições de contorno comumente assumidas para uma folha plana são explicitadas a seguir. Está se admitindo que a borda em estudo seja aquela dada por:

$$x = 0$$

y qualquer

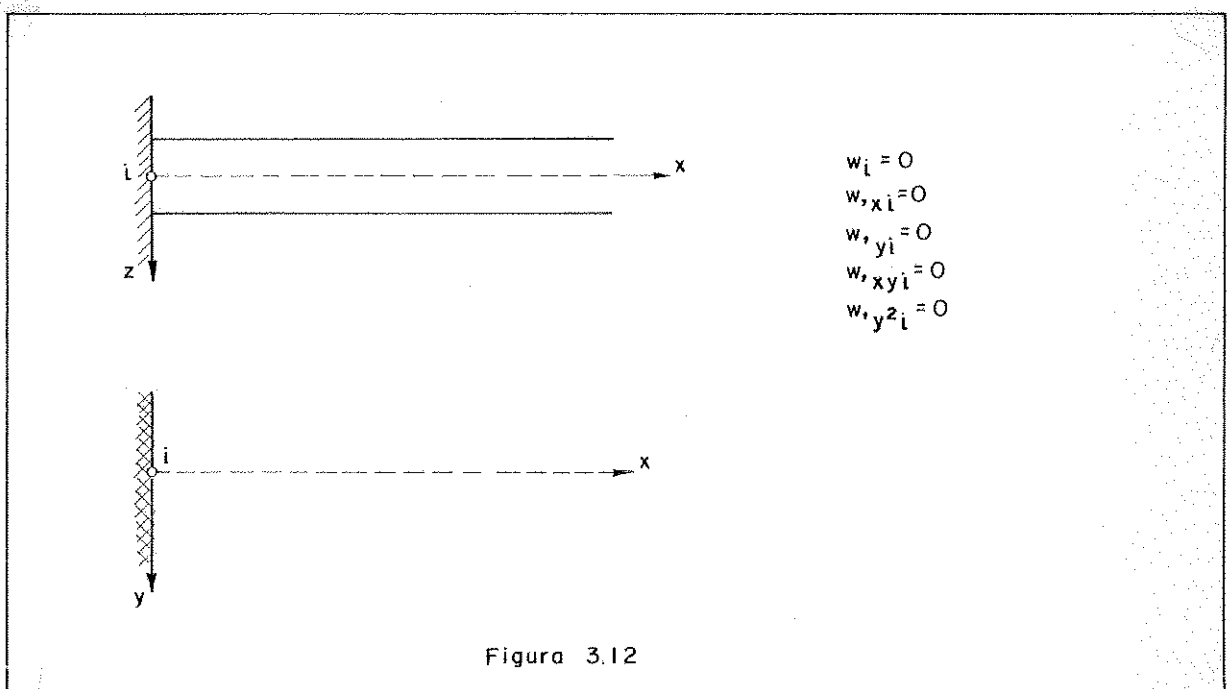
Na borda simplesmente apoiada o deslocamento vertical

e o momento fletor M_x são nulos, o que leva às condições indicadas nas figuras 3.11.

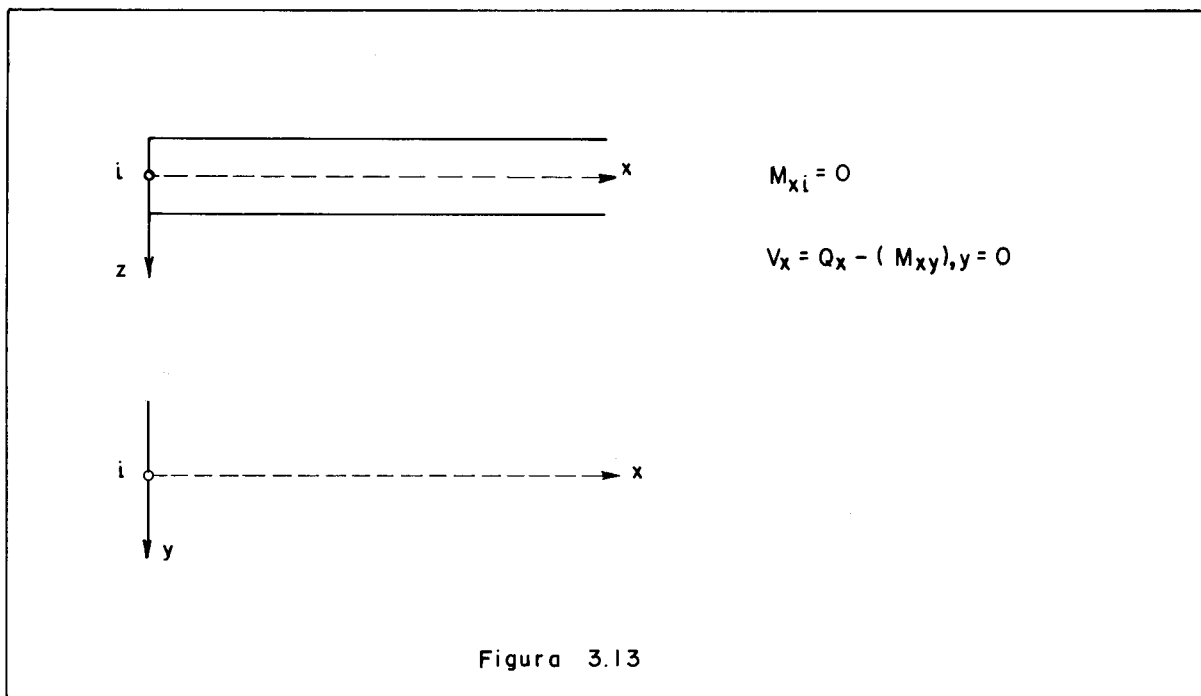


Observar que, nestas condições, é nulo também o momento fletor M_y .

Na borda engastada o deslocamento e o giro da secção normal à borda são nulos. O conjunto de condições está indicado na figura 3.12.



Na borda livre o momento fletor e a reação devem ser nulos (ver figura 3.13).



Para uma placa com bordas engastadas ou simplesmente apoiadas não se encontra dificuldade em introduzir as condições de contorno, pois essas são estabelecidas diretamente nos parâmetros nodais.

Para uma placa com borda livre, a imposição das condições de contorno causa dificuldades pois a condição de reação vertical nula na borda não pode ser satisfeita, não sendo possível expressar V_x em termos dos parâmetros nodais. A condição de momento fletor nulo só pode ser expressa por uma combinação de parâmetros nodais ($w_{,x2}$ e $w_{,y2}$). Essas condições são:

$$M_x = 0 \text{ implica em } w_{,x2} + \mu w_{,y2} = 0$$

$$M_y = 0 \text{ implica em } w_{,y2} + \mu w_{,x2} = 0$$

Com a finalidade de tratar essas condições é conveniente

niente transformar o conjunto de parâmetros nodais em outro mais adequado. A relação entre o conjunto original de parâmetros e o modificado é a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} w \\ w',x \\ w',y \\ w',x^2 \\ w',xy \\ w',y^2 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} & 0 & \frac{-\mu}{1-\mu^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu}{1-\mu^2} & 0 & \frac{1}{1-\mu^2} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} w \\ w',x \\ w',y \\ w',x^2 + \mu w',y^2 \\ w',xy \\ w',y^2 + \mu w',x^2 \end{Bmatrix}_i \dots (3.112)$$

ou

$$\{W\}_i = [T]_i \{W'\}_i$$

Para um elemento p conectado ao nó i tem-se a seguinte relação de equilíbrio:

$$\{S\}_p = [K]_p \{\delta\}_p \dots (3.113)$$

A relação de equilíbrio modificada pode ser escrita como:

$$\{S'\}_p = [K']_p \{\delta'\}_p \dots (3.114)$$

Pela igualdade de trabalho, obtém-se:

$$\{S'\}_p = [T]_p^T \{S\}_p \dots (3.115)$$

e:

$$[K']_p = [T]_p^T [K]_p [T]_p \quad \dots (3.116)$$

A matriz de transformação $[T]_p$ é uma matriz diagonal com submatrizes na diagonal principal. Assim, tem-se:

$$[T]_p = \begin{bmatrix} [T]_i & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \quad \dots (3.117.a)$$

se o nó 1 estiver situado na borda;

$$[T]_p = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [T]_i & [0] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \quad \dots (3.117.b)$$

se o nó 2 estiver situado na borda;

e

$$[T]_p = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [T]_i \end{bmatrix} \quad \dots (3.117.c)$$

se o nó 3 estiver situado na borda.

$[I]$ é a matriz identidade e $[0]$ é a matriz nula, ambas de ordem 6.

As transformações (3.115) e (3.116) são aplicadas a

todos elementos conectados aos pontos nodais das bordas livres, antes da adição das equações de equilíbrio do elemento nas equações de equilíbrio da estrutura completa. Assim um sistema de equações modificado é obtido, sendo que, neste sistema, as condições de contorno podem ser aplicadas diretamente.

Quando o contorno da folha apresentar algum lado esconso, será necessário proceder a uma transformação de coordenadas para que se possa impor as condições de contorno dos nós pertencentes a este lado. Considere-se, por exemplo, uma placa em que um dos lados coincida com o eixo t da figura 3.6. As condições de contorno nesse lado esconso não podem ser diretamente formuladas em termos de coordenadas (x,y) e, portanto, é conveniente transformá-las em coordenadas oblíquas (t,n). A relação entre os parâmetros nodais nos dois sistemas de coordenadas pode ser expressa como:

$$\begin{Bmatrix} w \\ w',x \\ w',y \\ w',x^2 \\ w',xy \\ w',y^2 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & -2sc & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & sc & c^2-s^2 & -sc \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & 2sc & c^2 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} w \\ w',t \\ w',n \\ w',t^2 \\ w',nt \\ w',n^2 \end{Bmatrix}_i \dots (3.118)$$

As coordenadas oblíquas seguem a convenção de sinais mostrada na figura 3.7.

A equação (3.118) pode ser escrita como:

$$\{W\}_i = [T^*]_i \{W''\}_i \dots (3.119)$$

e a transformação é realizada exatamente como descrita pelas equações (3.115) e (3.116).

Uma borda livre e esconsa pode ser tratada aplicando-se as transformações (3.115) e (3.116) duas vezes: primeiro com $[T]_i$ dada pela equação (3.112) e, em seguida, com $[T^*]_i$ dada pela equação (3.118).

3.17 - Determinação dos momentos

Como as curvaturas $w_{,x2}$, $w_{,xy}$ e $w_{,y2}$ estão incluídas nos parâmetros nodais $\{\delta\}_i$, os momentos fletores M_x e M_y e o momento volvente M_{xy} podem ser diretamente obtidos. A relação entre momentos e curvaturas já foi vista e é dada por (3.12) que pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\mu & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,x^2} \\ w_{,xy} \\ w_{,y^2} \end{Bmatrix} \dots (3.120)$$

ou

$$\{M\}_i = [N]_i \{W\}_i \dots (3.121)$$

onde i é o número atribuído ao nó da estrutura.

Para cada nó da estrutura pode-se calcular também os momentos principais (M_1, M_2) e as respectivas direções principais, utilizando para isso as seguintes expressões:

$$\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad \dots (3.122)$$

e

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \quad \dots (3.123)$$

Os momentos principais são os momentos fletores que ocorrem em direções nas quais o momento torçor é nulo.

3.18 - Reações de apoio

As reações de apoio podem ser obtidas em termos de forças nodais concentradas. Para cada elemento p a correspondente equação de equilíbrio é dada por:

$$\{S\}_p = [K]_p \{\delta\}_p$$

Uma vez obtida a solução para os parâmetros nodais, a força nodal do elemento correspondente ao deslocamento w_i do nó de borda i é determinada.

A reação vertical do nó i é obtida somando-se todas as contribuições S_{wi} dos elementos conectados ao nó i e mais as forças resultantes do carregamento distribuído externo, obtidas pela expressão (3.35), para os elementos conectados ao nó i e pela expressão (3.30) para o carregamento aplicado diretamente ao nó i .

Essas reações de apoio satisfazem completamente as condições de equilíbrio vertical. Entretanto, a distribuição das forças reativas ao longo da borda somente poderá ser determinada aproximadamente.

Uma vez obtida a solução para os parâmetros nodais, a força nodal do elemento correspondente ao deslocamento w_i do nó de borda i é determinada.

A reação vertical do nó i é obtida somando-se todas as contribuições S_{wi} dos elementos conectados ao nó i e mais as forças resultantes do carregamento distribuído externo, obtidos pela expressão (3.35), para os elementos conectados ao nó i e pela expressão (3.30) para o carregamento aplicado diretamente ao nó i .

Essas reações de apoio satisfazem completamente as condições de equilíbrio vertical. Entretanto, a distribuição das forças reativas ao longo da borda somente poderá ser determinada aproximadamente.

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Foi desenvolvido um programa, em linguagem FORTRAN, para o computador IBM-1130 para a resolução dos 3 tipos de problemas. Uma descrição pormenorizada do programa, de suas subrotinas e da entrada e saída de dados será apresentada no capítulo 5.

A seguir são apresentados alguns exemplos de aplicação do programa. Os resultados são comparados com os resultados exatos para se saber da precisão. No primeiro exemplo, é desenvolvida a solução exata ao passo que, nos demais, a solução exata é simplesmente mencionada.

4.1 - Folha com carregamento no plano médio e sem carregamento transversal (flambagem de chapas)

Nesse caso a equação de equilíbrio dada por (3.56) torna-se:

$$\{ [KR]_p + [KI]_p + [KFE]_p + [KVE]_p \} \{ \delta \}_p = 0 \quad \dots (4.1)$$

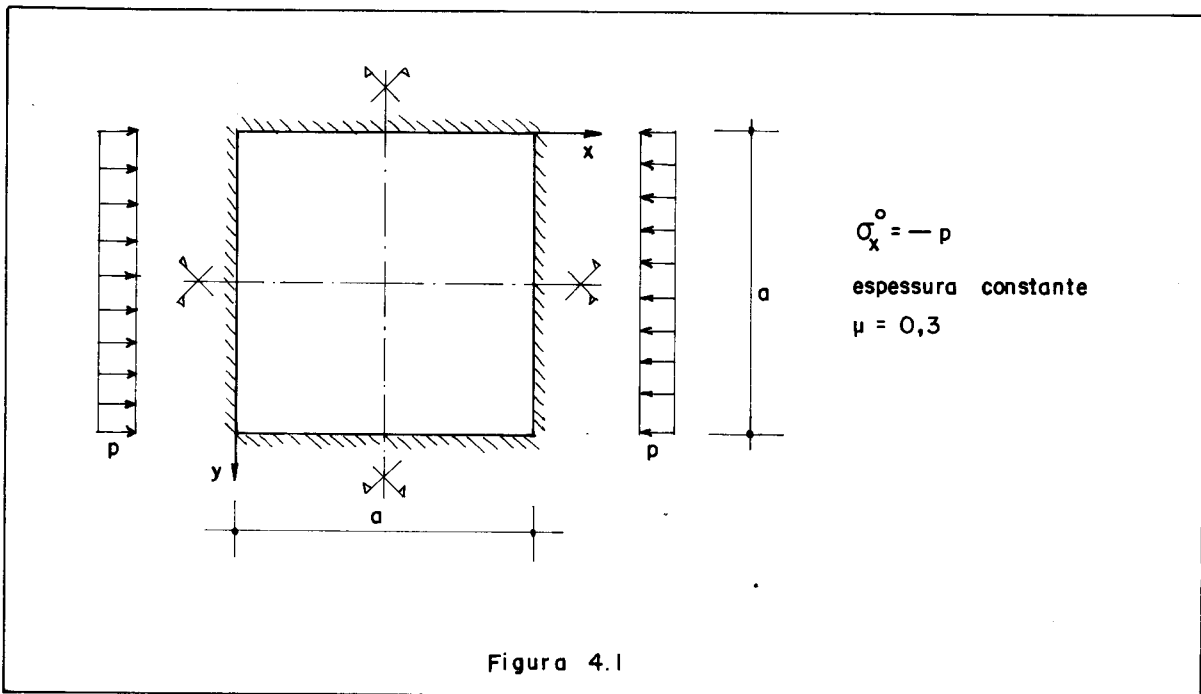
que é um sistema linear homogêneo. Para que este sistema tenha soluções diferentes da trivial, deve-se ter:

$$\det \{ [KR]_p + [KI]_p + [KFE]_p + [KVE]_p \} = 0 \quad \dots (4.2)$$

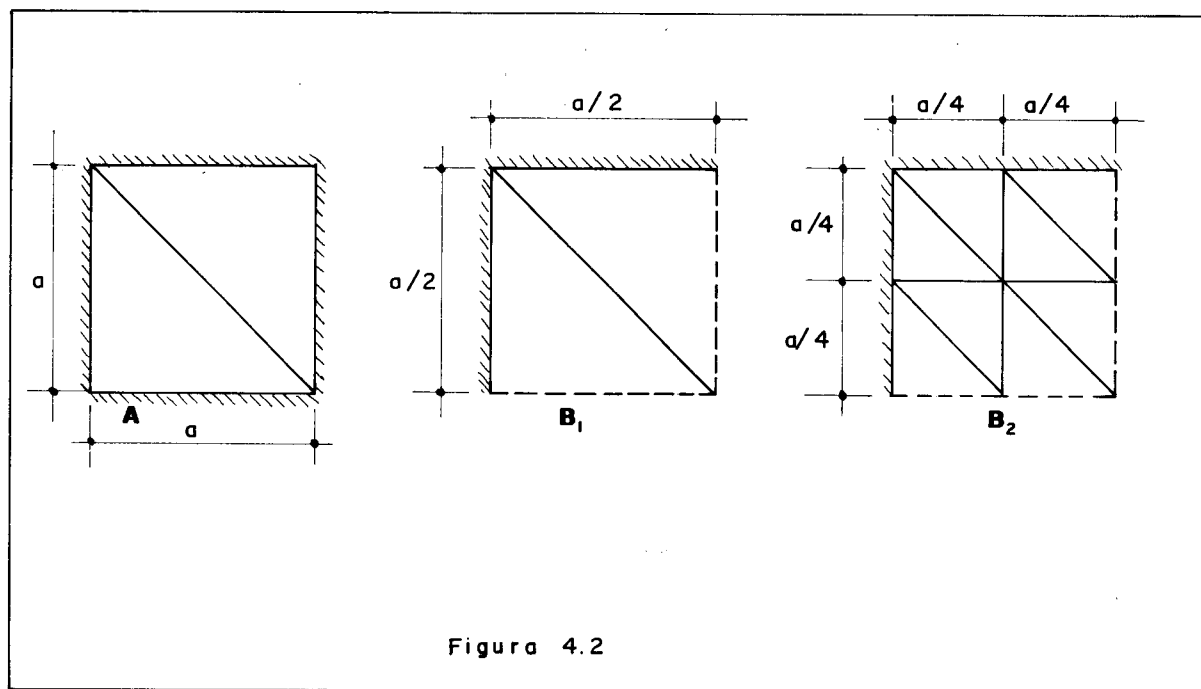
Neste tipo de problema, a chapa é submetida a um estado de tensões com σ_x^0 , σ_y^0 e τ_{xy}^0 . Existe um determinado estado de tensões que anula o determinante dado por (4.2). Este estado de tensões é o estado crítico que provoca a flambagem da chapa.

Exemplo 1

Seja determinar o estado crítico de tensões da chapa indicada na figura 4.1.



A chapa foi dividida em elementos finitos conforme indica a figura 4.2. A partição A se refere a toda chapa, ao passo que as partições B se referem à quarta parte da chapa, isso devido ao fato de esta apresentar dupla simetria.



A tensão crítica de flambagem é dada por:

$$P_{cr} = \frac{K_f \pi^2 D}{t a^2} \dots (4.3)$$

com

$$K_f = 4 \dots (4.4)$$

para a solução exata [12].

A tabela 4.1 indica os valores de K_f obtidos para as partições da figura 4.2, onde K_{fap} indica os valores aproximados, obtidos pelo programa.

TABELA 4.1

Partições	K_{fap}	Erro (%)
A	4,18205	4,551
B ₁	4,00109	0,027
B ₂	4,00000	0,000

A solução exata pode ser obtida a partir da equação diferencial dada por (2.46):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{pt}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots (4.5)$$

Admitindo-se que a chapa flambe em uma meia-onda senoidal na direção da compressão, a solução da equação pode ser escrita na forma:

$$w = f(y) \text{ sen } \frac{\pi x}{a} \dots (4.6)$$

Substituindo w , em (4.5), por sua expressão, dada por (4.6), obtêm-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - \frac{2\pi^2}{a^2} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{\pi^4}{a^4} - \frac{pt}{D} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \right) f = 0 \quad \dots (4.7)$$

cuja solução é:

$$f(y) = A_1 \cosh \alpha y + A_2 \sinh \alpha y + A_3 \cos \beta y + A_4 \sin \beta y \quad \dots (4.8)$$

onde:

$$\alpha = \left[+ \frac{\pi^2}{a^2} + \left(\frac{pt}{D} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \\ \beta = \left[- \frac{\pi^2}{a^2} + \left(\frac{pt}{D} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad \dots (4.9)$$

As constantes de integração A_1 , A_2 , A_3 e A_4 são obtidas por 4 condições de contorno, ou seja, deslocamentos e momentos nulos nas bordas.

$$\left[w = 0 \right]_{y=0}^{y=a} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \right]_{y=0}^{y=a} \quad \dots (4.10)$$

Impondo essas condições em (4.6), obtêm-se o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_1 + A_4) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} = 0 \\ (A_1 \cosh \alpha a + A_2 \sinh \alpha a + A_3 \cos \beta a + A_4 \sin \beta a) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} = 0 \\ (A_1 \gamma^2 - A_3 \delta^2) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} = 0 \\ (A_1 \gamma^2 \cosh \alpha a + A_2 \gamma^2 \sinh \alpha a - A_3 \delta^2 \cos \beta a - A_4 \delta^2 \sin \beta a) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} = 0 \end{array} \right. \quad \dots (4.11)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &= \alpha^2 - \mu \frac{\pi^2}{a^2} \\ \delta^2 &= \beta^2 + \mu \frac{\pi^2}{a^2} \end{aligned} \right\} \dots (4.12)$$

O sistema de equações obtido é um sistema linear homogêneo. Para que tenha soluções diferentes da trivial o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo, ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\alpha a & \sinh\alpha a & \cos\beta a & \sin\beta a \\ \gamma^2 & 0 & -\delta^2 & 0 \\ \gamma^2 \cosh\alpha a & \gamma^2 \sinh\alpha a & -\delta^2 \cos\alpha a & -\delta^2 \sin\beta a \end{vmatrix} = 0$$

que desenvolvido resulta em:

$$-(\gamma^2 + \delta^2) \sinh\alpha a \sin\beta a = 0 \dots (4.13)$$

Fazendo-se:

$$K = \frac{pta^2}{\pi^2 D} \dots (4.14)$$

e levando-se esta expressão em (4.9), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \alpha a &= [\pi^2 (\sqrt{K} + 1)]^{1/2} \\ \beta a &= [\pi^2 (\sqrt{K} - 1)]^{1/2} \end{aligned} \dots (4.15)$$

Elevando-se as expressões (4.15) ao quadrado e adicionando-se-as membro a membro, obtêm-se:

$$\alpha^2 a^2 + \beta^2 a^2 = 2\pi^2 \sqrt{K} \dots (4.16)$$

Somando-se membro a membro as equações (4.12), ob
têm-se:

$$\gamma^2 + \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \dots (4.17)$$

De (4.16) e (4.17), resulta:

$$\gamma^2 + \delta^2 = \frac{2\pi^2}{a} \sqrt{K} \quad \dots (4.18)$$

Assim, a equação (4.13) pode ser colocada em função de
K, ou seja:

$$\frac{2\pi^2}{a} \sqrt{K} \cdot \sinh[\pi^2(\sqrt{K}+1)]^{1/2} \text{sen}[\pi^2(\sqrt{K}-1)]^{1/2} = 0 \quad (4.19)$$

Essa equação se anula, para $p \neq 0$, quando

$$\text{sen}[\pi^2(\sqrt{K}-1)]^{1/2} = 0 \quad \dots (4.20.a)$$

ou seja

$$[\pi^2(\sqrt{K}-1)]^{1/2} = \pi \quad \dots (4.20.b)$$

de onde vem:

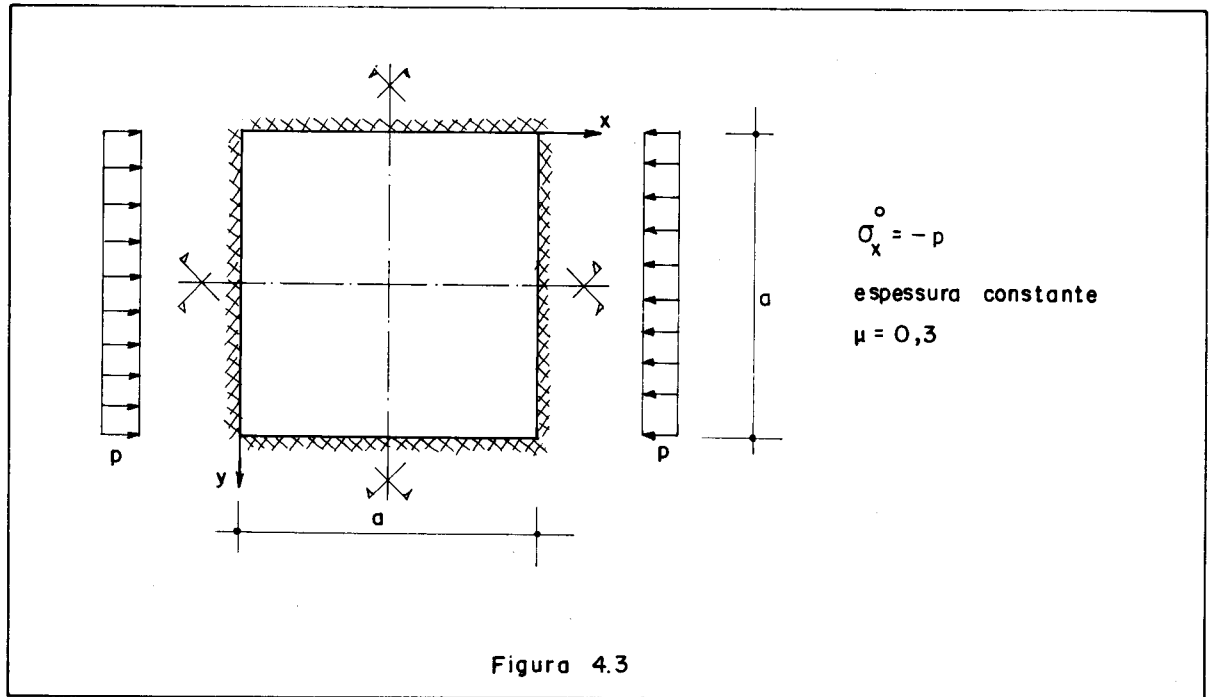
$$K = 4 \quad \dots (4.21)$$

e, de (4.14), tira-se o valor crítico de p, ou seja:

$$p_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{ta^2} \quad \dots (4.22)$$

Exemplo 2

Seja calcular o estado crítico de tensões da chapa da figura 4.3.



A tensão crítica de flambagem é dada por:

$$p = K_f \frac{\pi^2 D}{ta^2}$$

com

$$K_f = 10,07$$

para a solução exata [12].

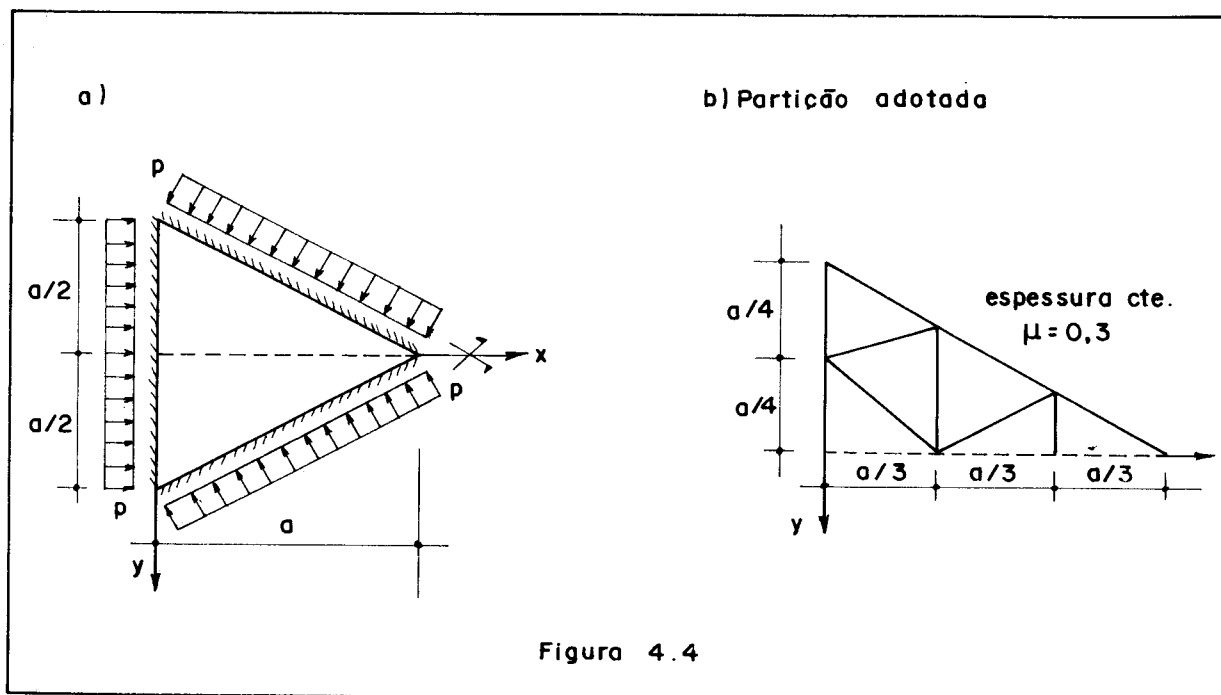
A tabela 4.2 indica os valores obtidos para K_{fap} adotando-se as partições indicadas na figura 4.2.

TABELA 4.2

Partição	K_{fap}	Erro (%)
B_1	10,57	4,965
B_2	10,09	0,199

Exemplo 3

Seja calcular o estado crítico de tensões da chapa triangular, simplesmente apoiada no contorno, indicada na figura 4.4.



O estado inicial de tensões para qualquer ponto da chapa é:

$$\sigma_x^o = -p$$

$$\sigma_y^o = -p$$

$$\tau_{xy}^o = 0$$

O estado crítico de tensões, obtido pela resolução da equação diferencial, é [7] dado por:

$$p = 4,5 \frac{\pi^2 D}{ta^2}$$

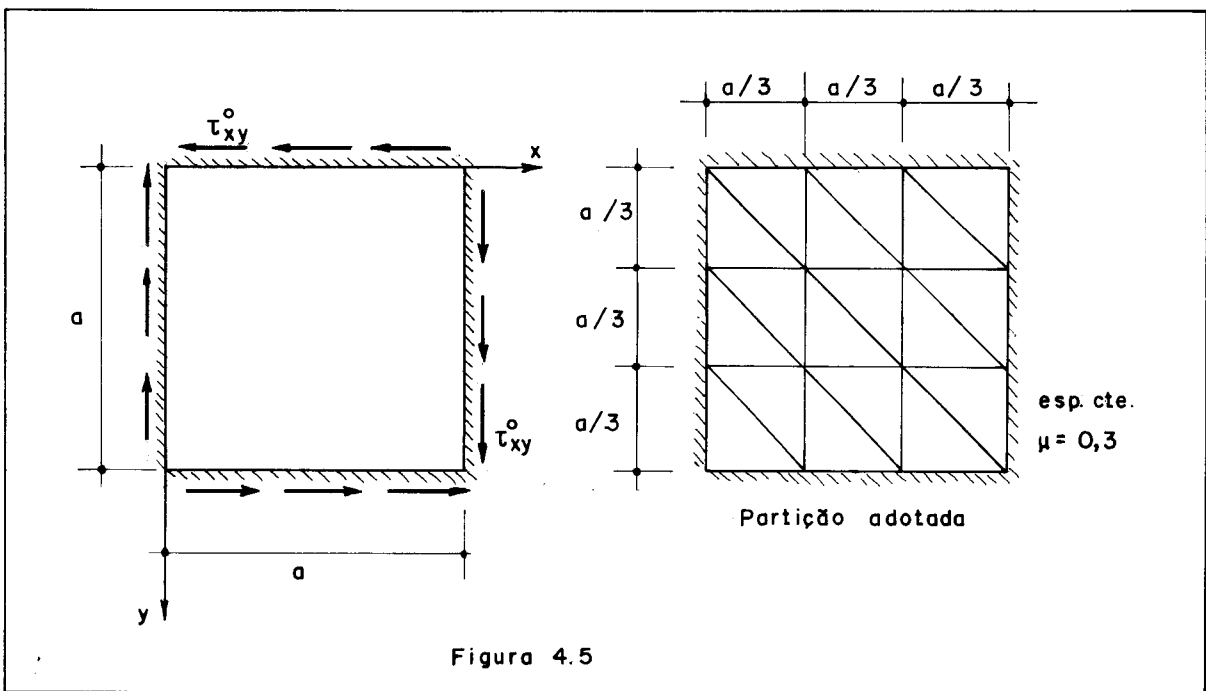
O valor aproximado obtido através do computador foi:

$$p_{ap} = 4,59 \frac{\pi^2 D}{ta^2}$$

sendo o erro de 2%.

Exemplo 4

Seja calcular o estado crítico de tensões da chapa, simplesmente apoiada, da figura 4.5.



O estado crítico de tensões, obtido pela resolução da equação diferencial, é [12] dado por:

$$\tau_{xy}^o = 9,34 \frac{\pi^2 D}{ta^2}$$

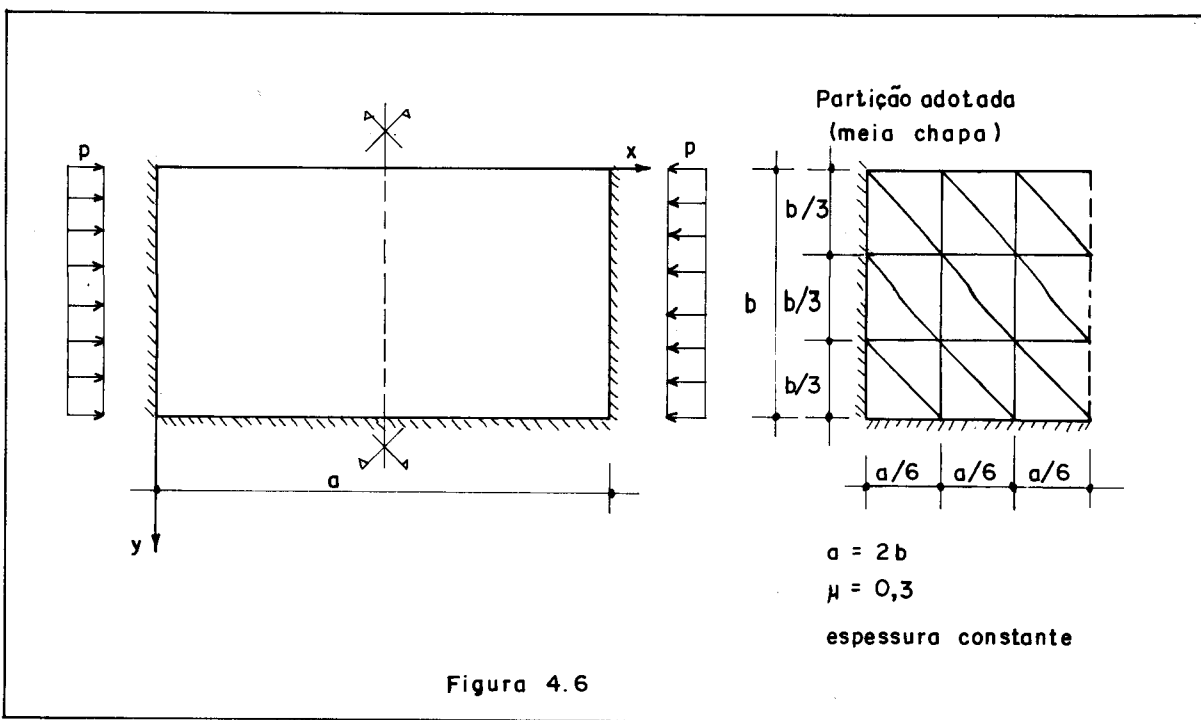
O valor obtido através do computador foi:

$$\tau_{xy}^o_{ap} = 9,433 \frac{\pi^2 D}{ta^2}$$

sendo o erro de 1%.

Exemplo 5

Seja calcular o estado crítico de tensões da chapa simplesmente apoiada em 3 lados e livre no outro, conforme indica a figura 4.6.



O valor crítico de p é [9] dado por:

$$p = \pi^2 D \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{6(1-\mu)}{\pi^2} \right] \left(\frac{1}{tb^2} \right)$$

que, para os dados do problema, fornece:

$$p = 6,667 \frac{D}{tb^2}$$

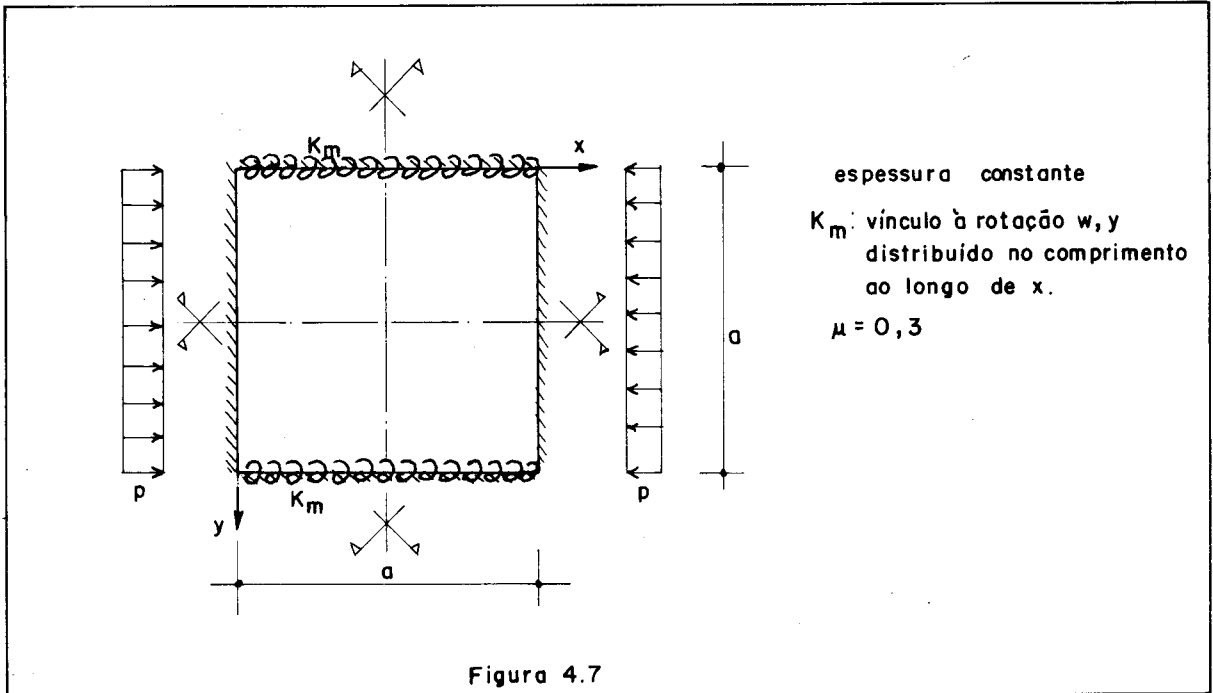
O valor obtido pelo computador foi:

$$p_{ap} = 6,598 \frac{D}{tb^2}$$

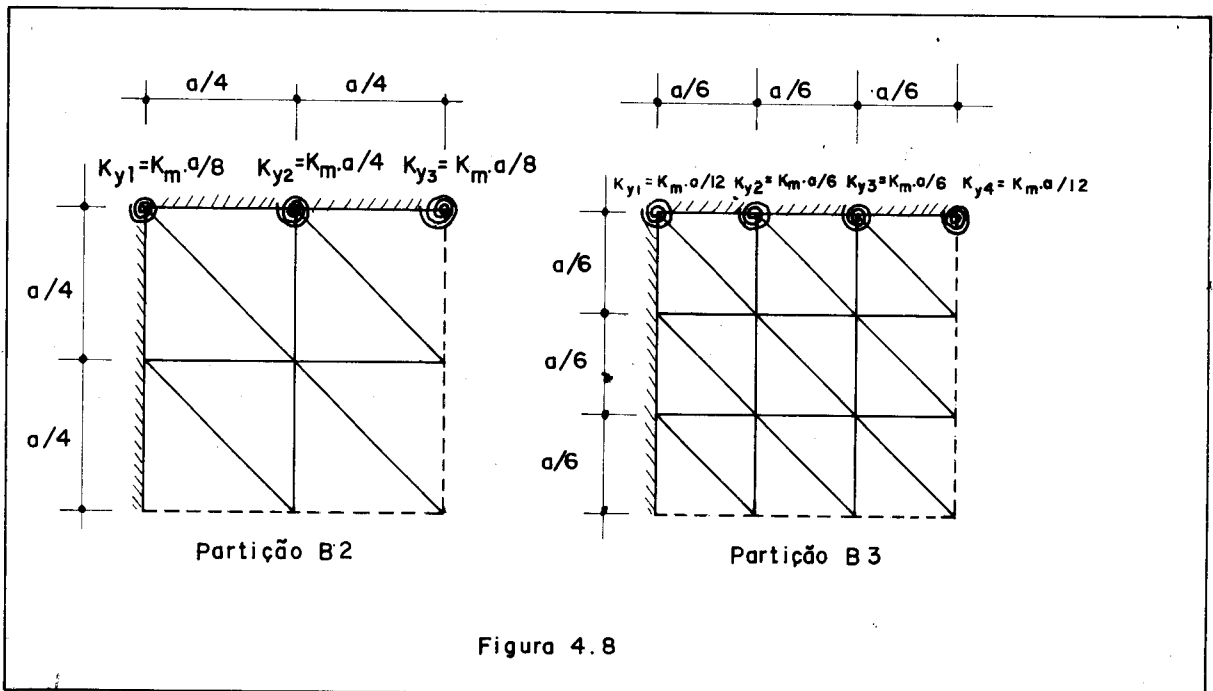
sendo o erro de 1,03%.

Exemplo 6

Seja calcular o estado crítico de tensões para a cha pa simplesmente apoiada em 4 lados e com v \hat{u} nculos el \hat{a} sticos \hat{a} rota \hat{c} o \hat{a} o em torno do eixo x em 2 lados, conforme indica a figu ra 4.7.



Os v \hat{u} nculos el \hat{a} sticos distribuidos foram concentrados nos n \hat{o} s dos elementos finitos conforme indica a figura 4.8, pa ra as duas parti \hat{c} o \hat{e} es adotadas.



Os resultados obtidos pelo computador e os obtidos pela solução da equação diferencial estão na Tabela 4.3. A carga crítica é calculada [9] pela fórmula:

$$p = K \frac{\pi^2 D}{t a^2}$$

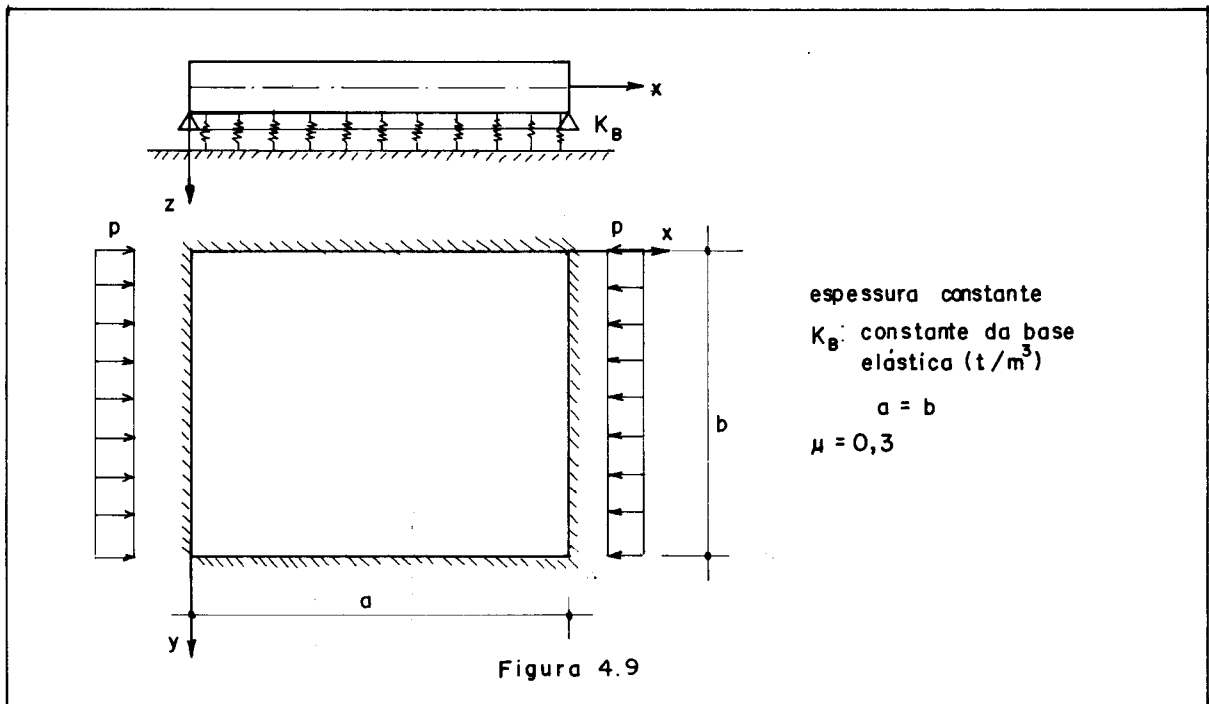
TABELA 4.3

$K_m \left(\frac{tm}{rd}\right) / m$	K_{exato}	K_{ap}	Erro (%)	Partição
$5 \frac{D}{a}$	5,430	5,511	1,49	B_2
$5 \frac{D}{a}$	5,430	5,483	0,98	B_3
$10 \frac{D}{a}$	6,200	6,402	3,26	B_2
$10 \frac{D}{a}$	6,200	6,324	2,00	B_3
$16 \frac{D}{a}$	6,700	7,080	5,67	B_2
$16 \frac{D}{a}$	6,700	6,950	3,73	B_3

Os erros cometidos aumentam com K_m devido ao fato de se ter concentrado o vínculo elástico nos nós.

Exemplo 7

Seja calcular o estado crítico de tensões da chapa a apoiada sobre uma base elástica, além de simplesmente apoiada nas bordas, conforme indica a figura 4.9.



O valor crítico de p pode ser obtido pela resolução da equação diferencial (2.45), supondo-se, para efeito de resolução, que a chapa esteja submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído q .

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} - K_B \frac{w}{D} - p t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \dots (4.23)$$

Adotando-se para a elástica:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad \dots (4.24)$$

O carregamento distribuído pode ser colocado na forma:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad \dots (4.25)$$

Substituindo-se, em (4.23), w e q por suas expressões dadas por (4.24) e (4.25), obtêm-se:

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2 p t}{\pi^2 a^2 D} + \frac{K_B}{\pi^4 D} \right]} \quad \dots (4.26)$$

À medida que o carregamento p se aproxima de seu valor crítico, a elástica tende para infinito. Isso ocorre quando o denominador de A_{mn} , dado por (4.26), se anular, ou seja:

$$\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2 p t}{\pi^2 a^2 D} + \frac{K_B}{\pi^4 D} = 0$$

de onde vem:

$$p = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \left[\frac{m^2}{\phi^2} + 2n^2 + \frac{n^4}{m^2} \phi^2 + \frac{K_B b^4 \phi^2}{\pi^4 D m^2} \right] \quad \dots (4.27)$$

Com:

$$\phi = \frac{a}{b}$$

Esta expressão fornece o valor da tensão que anula o denominador do termo de ordem mn da série que representa a elástica. O menor desses valores, para um determinado valor de k , é a tensão crítica de flambagem da chapa.

Assim, para:

$$\frac{K_B b^4}{\pi^4 D} = 26,281 \quad e \quad \phi = 1$$

O menor valor de p se dá para $m = 3$ e $n = 1$ e a tensão de flambagem é dada por:

$$p = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \left[\frac{\phi^2}{9} + \frac{9}{\phi^2} + 2 + \frac{K_B b^4}{9\pi^4 D} \phi^2 \right] \quad \dots (4.28)$$

Para:

$$\frac{K_B b^4}{\pi^4 D} = 2,6281 \quad \text{e} \quad \phi = 1$$

o menor valor de p se dá para $m = 1$ e $n = 1$ e a tensão de flambagem é dada por:

$$p = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \left[\phi^2 + \frac{1}{\phi^2} + 2 + \frac{K_B b^4}{\pi^4 D} \phi^2 \right] \quad \dots (4.29)$$

Na tabela 4.4 estão indicados os valores de p para os valores da constante elástica adotados (para $\phi = 1$).

TABELA 4.4

$K_B b^4 / \pi^4 D$	$p / \left(\frac{\pi^2 D}{b^2 t} \right)$	$p_{ap} / \left(\frac{\pi^2 D}{b^2 t} \right)$	Erro (%)
2,6281	6,6281	6,6285	0,006
26,281	14,0312	14,0771	0,327

Os valores aproximados foram obtidos, adotando-se a partição B_2 .

Exemplo 8

Seja calcular o estado crítico de tensões da chapa da figura 4.10, submetida a um estado variável de tensões.

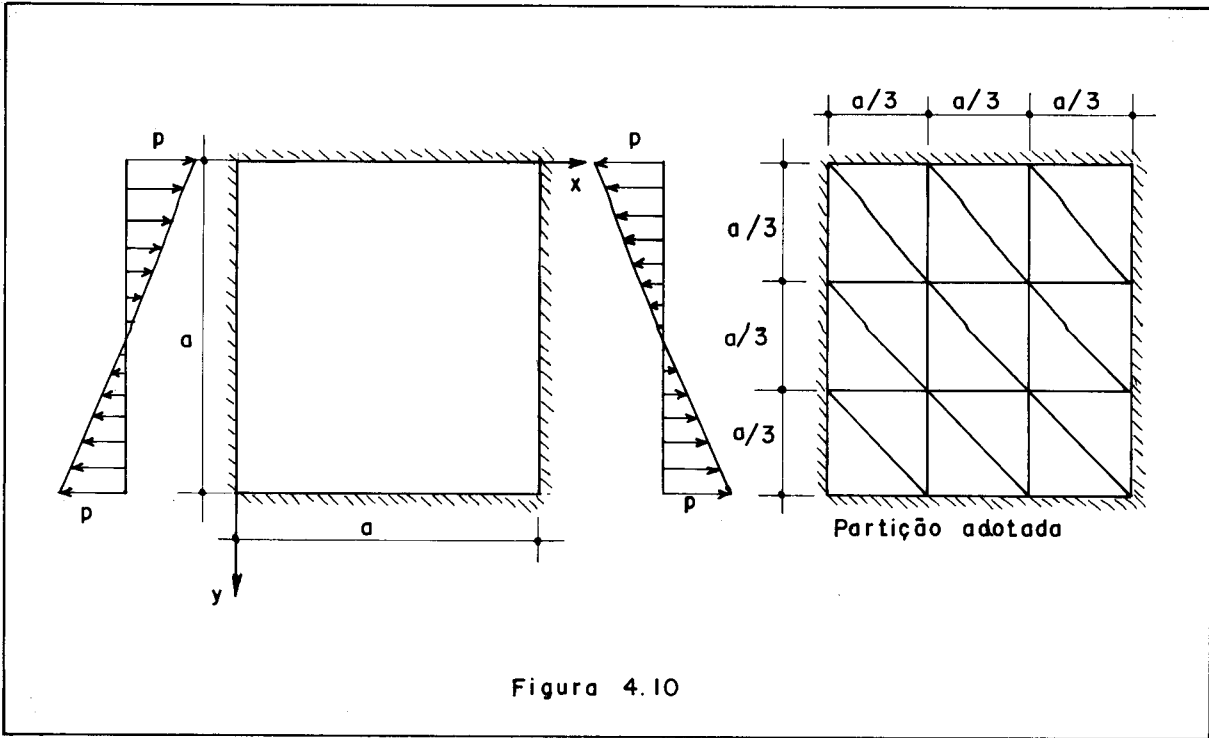


Figura 4.10

O valor crítico de p obtido pela resolução da equação diferencial \tilde{e} [12] dado por:

$$p = 25,60 \frac{\pi^2 D}{a^2 t}$$

O valor obtido pelo computador foi:

$$p_{ap} = 25,70 \frac{\pi^2 D}{a^2 t}$$

sendo, portanto, o erro de 0,39%.

4.2 - Folha com carregamento transversal e no plano médio

(Teoria de 2ª ordem da flexão de placas)

Neste caso, a equação de equilíbrio fica dada por (3.56)

ou seja:

$$\left\{ [KR]_p + [KI]_p + [KFE]_p + [KVE]_p \right\} \{ \delta \}_p - [CE]_p - [CN]_p = 0$$

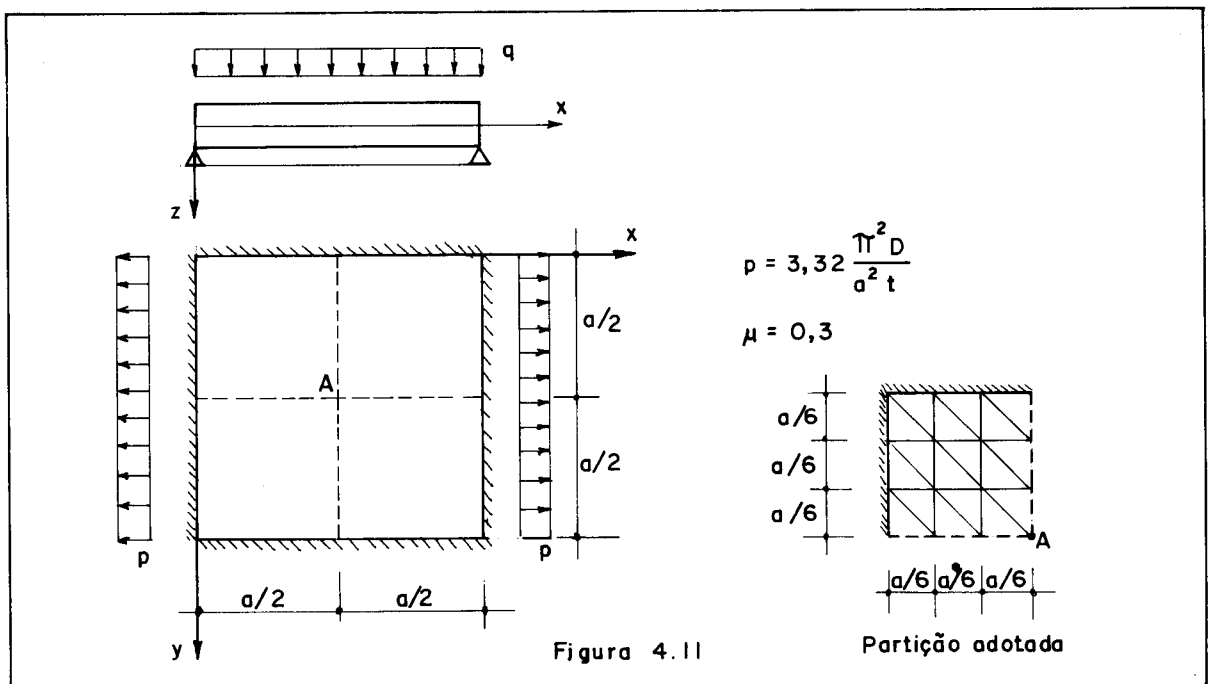
que é um sistema linear não homogêneo.

A solução deste sistema fornece o vetor $\{\delta\}_p$ dos deslocamentos. A partir destes deslocamentos, os momentos M_x , M_y e M_{xy} podem ser calculados, conforme indicado no item 3.17.

Na teoria de 1ª ordem da flexão de placas, os deslocamentos variam, para uma determinada placa, linearmente em função do carregamento transversal. Já na teoria de 2ª ordem, os deslocamentos variam também com o carregamento do plano médio. Para uma determinada placa, com um determinado carregamento transversal, os deslocamentos tendem para o infinito à medida que o carregamento no plano médio tende para seu valor crítico.

Exemplo 1

Seja uma placa retangular, simplesmente apoiada no contorno, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído q e a um carregamento no seu plano médio conforme indicado na figura 4.11.



Os resultados obtidos estão indicados na tabela 4.5.

TABELA 4.5

	Valor obtido	Valor exato	Fator	Erro (%)
Deslocamento w_A	2189	2189	$10^{-6} q a^4/D$	0,000
Momento M_x em A	2477	2475	$10^{-5} q a^2$	0,081
Momento M_y em A	2421	2419	$10^{-5} q a^2$	0,083

Exemplo 2

O mesmo exemplo anterior com uma tensão de compressão p .

Os resultados estão indicados na Tabela 4.6.

TABELA 4.6

	Valor obtido	Valor exato	Fator	Erro (%)
Deslocamento w_A	24325	24325	$10^{-6} q a^4/D$	0,000
Momento M_x em A	30597	30613	$10^{-5} q a^2$	0,052
Momento M_y em A	30711	30725	$10^{-5} q a^2$	0,046

Exemplo 3

Seja uma placa submetida a um carregamento transversal e um carregamento no seu plano médio e apoiada em uma base elástica conforme indica a figura 4.12.

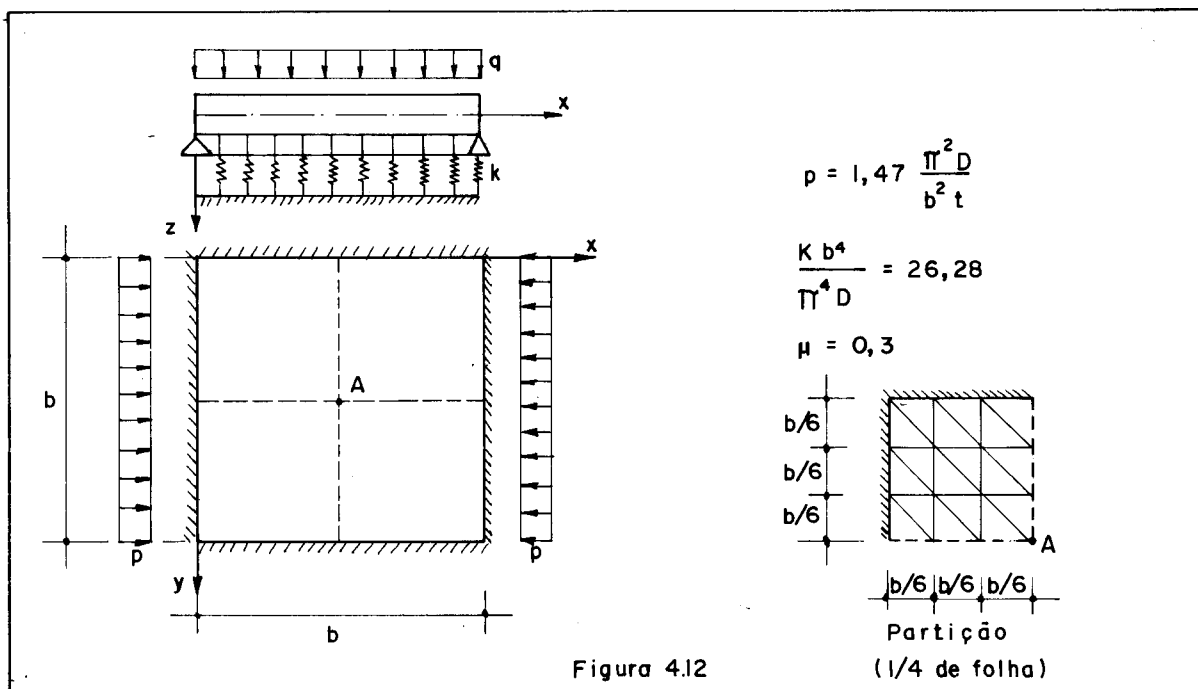


Figura 4.12

Os resultados obtidos estão indicados na Tabela 4.7.

TABELA 4.7

	Valor obtido	Valor exato	Fator	Erro (%)
w_A	498	498	$10^{-6} q b^4 / D$	0,00
$(M_x)_A$	220,7	221	$10^{-5} q b^2$	0,14
$(M_y)_A$	246,4	248	$10^{-5} q b^2$	0,65

4.3 - Folha com carregamento transversal e sem carregamento no plano médio (Flexão de placas)

Nesse caso a equação de equilíbrio, dada por (3.56) fica:

$$\{[KR]_p + [KFE]_p + [KVE]_p\} \{\delta\}_p - [CE]_p - [CN]_p = 0$$

que é um sistema linear não homogêneo cuja solução fornece o vetor $\{\delta\}_p$ com todos os deslocamentos nodais.

Exemplo 1

Seja a placa triangular simplesmente apoiada no contorno e submetida a um carregamento transversal uniforme conforme indica a figura 4.13.

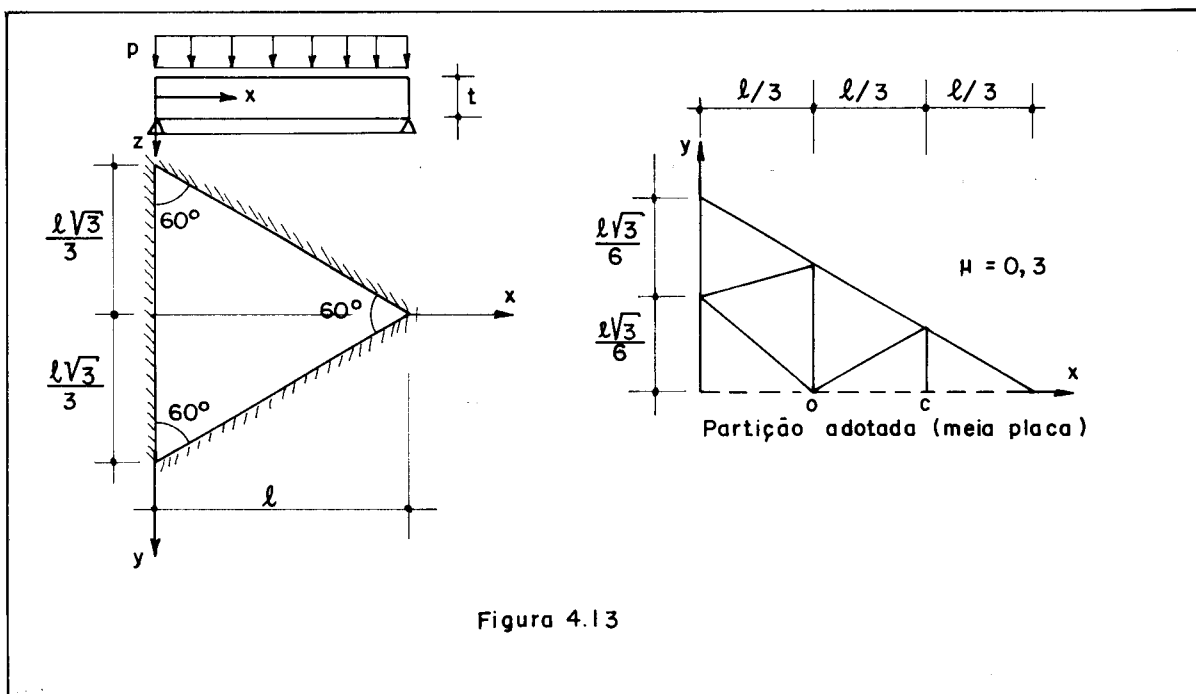


Figura 4.13

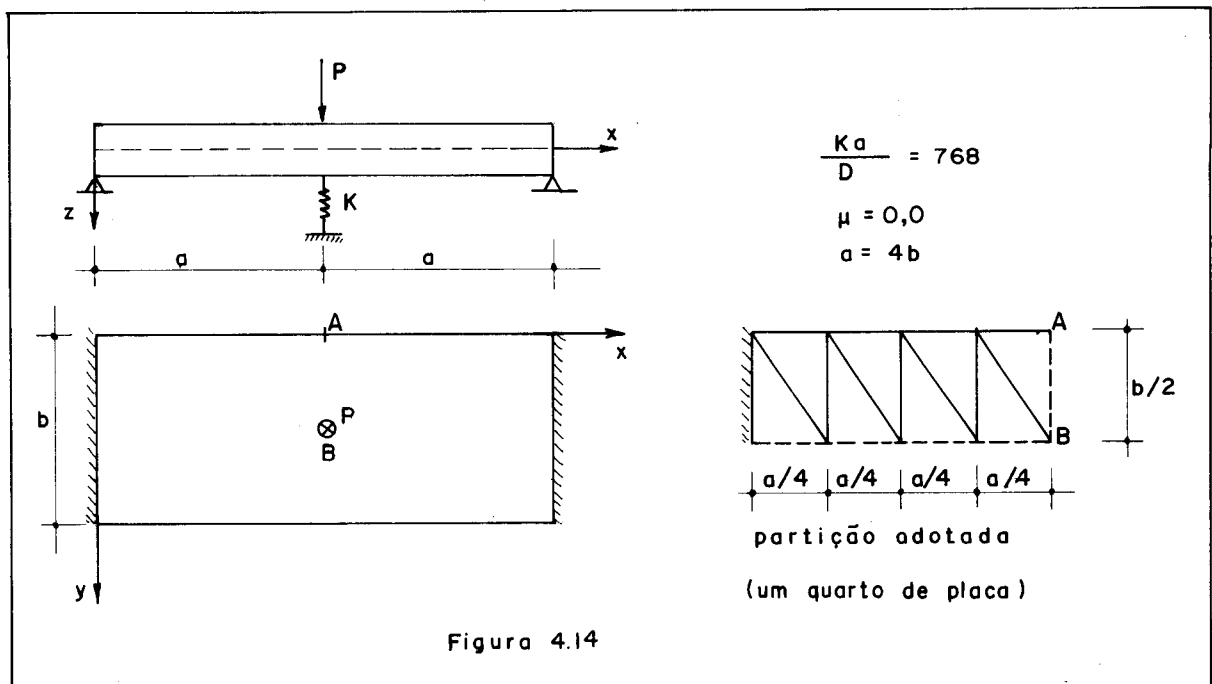
Os resultados obtidos estão indicados na Tabela 4.8.

TABELA 4.8

	Valor Aproximado	Valor exato	Fator Multiplicativo	Erro (%)
w_o	10274	10288	$10^{-7} p \ell^4/D$	0,14
w_c	3850,7	3858,0	$10^{-7} p \ell^4/D$	0,19
$(M_x)_o$	24060	24074	$10^{-6} p \ell^2$	0,06
$(M_x)_c$	2276,7	2314,8	$10^{-6} p \ell^2$	1,6

Exemplo 2

Seja a placa da figura 4.14 com vínculo elástico centrado e submetido a uma carga P.



Os resultados obtidos estão indicados na Tabela 4.9.

TABELA 4.9

	Valor Aproximado	Valor exato	Fator Multiplicativo	Erro (%)
w_B	1292	1312	$10^{-6} P a^3/EJ$	1,52
Média M_A e M_B	3897,5	3873	$10^{-6} P a$	0,63

5. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

5.1 - Descrição das subrotinas

O programa foi desenvolvido tendo por base o programa para o cálculo de placas elásticas desenvolvido por DEGASPARE [6] do qual grande parte das subrotinas foram aproveitadas sendo que outras foram desenvolvidas especialmente para tratar os problemas de instabilidade.

A seguir é apresentada uma descrição das subrotinas u tilizadas durante o processamento do programa.

COEF: Calcula os coeficientes dos monômios que aparecem quando a operação $x^\alpha y^\beta$ é realizado, após a substituição de x e y por suas expressões em coordenadas homogêneas.

EXPS: Calcula os expoentes dos monômios que aparecem quando a operação $x^\alpha y^\beta$ é realizada, após a substituição de x e y por suas expressões em coordenadas homogêneas.

COLOC: Calcula as coordenadas locais dos vértices e dos pontos médios dos lados do triângulo.

MATC: Forma a matriz [C] (3.10).

INVP: Inverte a matriz [C].

MATRH: Forma a matriz [H] (3.99), admitindo, a princípio, a validade de (3.100), caso não haja observância daquelas desigualdades, os sinais de alguns coeficientes de [H] serão alterados convenientemente no final da rotina.

POLIN: Calcula a integral do tipo

$$P_{\alpha\beta} = \int_S f(x,y) x^\alpha y^\beta dS$$

VINTA: (FUNCTION) função que calcula as integrais do tipo

$$\int_S \xi_1^{n1} \xi_2^{n2} \xi_3^{n3} dS$$

- TSKE1: Transformação que atua nos pontos nodais situados nas bordas inclinadas. Objetiva transformar os parâmetros nodais, relacionados aos eixos x e y, em parâmetros nodais relacionados aos eixos t e n. Esta transformação permite impor as condições de contorno em bordas esconsas:
- TFRE1: Transformação que atua nos pontos nodais situados em bordas livres alterando os parâmetros nodais, para a imposição das condições de contorno.
- PREP1: Executa as transformações contidas nas rotinas TSKEW e TFREE, conforme equação (3.116).
- THMED: Calcula os valores médios nodais da espessura e rigidez à flexão da placa.
- TRISK: Rotina transformação que atua no tratamento de bordas inclinadas. O vetor solução é obtido (quando a borda for inclinada) em relação aos eixos t e n. A rotina transforma o vetor solução, de modo que a saída dos resultados passa a ser referenciada aos eixos x e y.
- TRFRE: Rotina de transformação que atua nos pontos nodais situados em bordas livres onde houve necessidade de modificar os parâmetros nodais (ver rotina TFREE). O vetor solução é referenciado aos parâmetros modificados. A rotina transforma-os de modo que o vetor solução passa a ser referenciado aos parâmetros originais.
- FLEVO: Imprime os valores das incógnitas nodais, calcula e imprime, para cada nó, os valores dos momentos fletores e torçores e calcula os momentos nodais principais.
- REACA: Calcula, para cada ponto situado na borda, a respectiva reação vertical (desde que exista).

- RIGP: Calcula a matriz de rigidez de um elemento finito.
- MINST: Calcula a matriz de instabilidade de um elemento finito sob a ação de σ_x^0 , σ_y^0 e τ_{xy}^0
- FUNEL: Calcula a matriz de rigidez de uma base elástica sob o elemento finito.
- VETI: Monta o vetor de cargas nodais do elemento com carregamento distribuído.
- DET1: Calcula o determinante de uma matriz simétrica.
- DECON: Decompõe uma matriz simétrica em um produto de uma matriz triangular superior pela sua transposta.
- SOLVE: Resolve um sistema de equações lineares pelo processo de CHOLESKY.
- REST1: Impõe as restrições de apoio bem como as contribuições dos vínculos elásticos concentrados.
- MONG1: Monta as matrizes de rigidez e de instabilidade de toda estrutura.

5.2 - Programas principais

- a) PROG1 - Lê e imprime todos os dados do problema, faz testes sobre os elementos, dando informações no caso de dados incoerentes e armazena os dados em disco.
- b) PROG2 - Monta as matrizes de rigidez da folha e da fundação e lástica, a matriz de instabilidade e o vetor de cargas nodais e as armazena em disco.
- c) PROG3 - Com as matrizes calculadas no PROG2, efetua as transformações dos parâmetros nodais nos casos de bordas livres ou esconsas e monta as matrizes de rigidez e instabilidade de toda folha e as armazena em disco.
- d) PROG4 - (atua no caso de instabilidade) - Com as matrizes montadas no PROG3, impõe as condições de contorno e as

vinculações elásticas concentradas e determina o estado crítico de tensões por tentativas.

- e) PROG5 - (atua no caso de elástica determinada) - Com as matrizes calculadas pelo PROG2, impõe as condições de contorno e vínculos elásticos concentrados e resolve o sistema de equações obtendo os deslocamentos nodais. Calcula, também os momentos fletores e torção e suas direções principais.

5.3 - Entrada de dados

5.3.1 - Entrada de dados do programa PROG1

1º Conjunto - Título do Problema

Quantidade de Cartões - 1

Formato - 40A1

2º Conjunto - Dados do Problema

Quantidade de Cartões - 1

Formato - 13I2, 2X, F5.2, F10.1

Conteúdo do Cartão:

M - Número de elementos finitos

NREST - Número de nós com condições de contorno

NELAS - Número de nós com vinculações elásticas

NPN - Número de pontos nodais

NTIPO - Número de elementos-tipo geométrico (ver item 5.3.2.)

NELBO - Número de elementos na borda

NANG - Número de ângulos que definem as esconsidades da folha

NNC - Número de nós com carregamento

- NEC - Número de elementos com carregamento distribuído
- NETC - Número de elementos-tipo de carregamento (ver item 5.3.2)
- NEFE - Número de elementos com fundação alástica
- ISKEW - Se ISKEW = 0 a folha possui lados paralelos a \underline{x} e \underline{y} e se ISKEW = 1 a folha possui lados esconsos
- ISVAR - Se ISVAR = 0, o estado de tensões no plano médio é o mesmo para todos os nós e, se ISVAR = 1, o estado de tensões é variável no plano médio
- POI - Coeficiente de POISSON
- E - Módulo de elasticidade

3º Conjunto:

Número de Cartões - 1

Formato - I1, F8.3, 4F10.3

Conteúdo de cada cartão:

IPRES - Indica a precisão dos resultados no caso de instabilidade de chapas. A precisão pode ser calculada como

$$\text{FAT} * 10^{-\text{IPRES}}$$

FAT - Valor inicial do passo usado nas tentativas para a determinação do estado crítico de tensões

BETA - Valor que será inicialmente multiplicado pela matriz de instabilidade dando o valor inicial do estado de tensões

$\left. \begin{array}{l} \text{SX} \\ \text{SY} \\ \text{TU} \end{array} \right\} \sigma_x^0, \sigma_y^0 \text{ e } \tau_{xy}^0 \text{ respectivamente. É o valor do estado inicial de tensões, caso ISVAR} = 0$

4º Conjunto - Elementos-tipo geométrico (ver item 5.2.2)

Número de Cartões - 1

Formato - 6I2

Conteúdo de cada cartão:

Elemento-tipo 1

Elemento-tipo 2

Elemento-tipo 3

Elemento-tipo 4

Elemento-tipo 5

Elemento-tipo 6

5º Conjunto - Elementos-tipo carregamento (ver item 5.2.2)

(somente se NETC \neq 0)

Número de Cartões - 1

Formato - 6I2

Conteúdo de cada cartão:

Elemento-tipo carregamento 1

Elemento-tipo carregamento 2

Elemento-tipo carregamento 3

Elemento-tipo carregamento 4

Elemento-tipo carregamento 5

Elemento-tipo carregamento 6

6º Conjunto - Dados dos Elementos

Número de Cartões - M (1 para cada elemento)

Formato - 6I2, F8.2, 6F10.5

Conteúdo de cada cartão:

N - Número de cada elemento

ITIPO(N) - Tipo geométrico do elemento n
NP(N,1) - Número do nó 1
NP(N,2) - Número do nó 2
NP(N,3) - Número do nó 3
ITC(N) - Tipo-carregamento do elemento n
CFE(N) - Constante de fundação elástica do elemento n
EP(N,1) - Espessura da folha no nó 1
EP(N,2) - Espessura da folha no nó 2
EP(N,3) - Espessura da folha no nó 3
CD(N,1) - Valor do carregamento distribuído no nó 1
CD(N,2) - Valor do carregamento distribuído no nó 2
CD(N,3) - Valor do carregamento distribuído no nó 3

7º Conjunto - Tensão variável nos elementos

(Somente se ISVAR = 1)

Número de Cartões - M (um para cada elemento)

Formato - 9F8.4

Conteúdo de cada cartão:

SVAR(N,1) - σ_x^o no nó 1
SVAR(N,2) - σ_y^o no nó 1
SVAR(N,3) - τ_{xy}^o no nó 1
SVAR(N,4) - σ_x^o no nó 2
SVAR(N,5) - σ_y^o no nó 2
SVAR(N,6) - τ_{xy}^o no nó 2
SVAR(N,7) - σ_x^o no nó 3
SVAR(N,8) - σ_y^o no nó 3
SVAR(N,9) - τ_{xy}^o no nó 3

8º Conjunto - Informações sobre cada elemento de borda

Quantidade de Cartões - NELBO (1 para cada elemento de borda)

Formato - 10I2

Conteúdo de cada cartão:

LNOBO(N,1) - Número de elementos

LNOBO(N,2) - Número do nó 1

LNOBO(N,3) - Número do nó 2

LNOBO(N,4) - Número do nó 3

LNOBO(N,5) }
LNOBO(N,6) } Indícam os endereços necessá
LNOBO(N,7) } rios para as transformações
de coordenadas

LNOBO(N,8) }
LNOBO(N,9) } Indícam o tipo de parâmetros
LNOBO(N,10) } nodais que convêm aos nós
(ver item 5.4)

9º Conjunto - Ângulos que definem a esconsidade

(Somente se ISKEW = 1)

Quantidade de cartões - NANG

Formato - F10.7

Conteúdo de cada cartão NA:

ANGLE(NA) - Ângulo para transformação de
coordenadas (radianos)

10º Conjunto - Carregamento nos nós

Número de Cartões - NNC (um para cada nó carregado)

Formato - I2.8x, 3F10.4

Conteúdo de cada cartão:

I - Número do nó com carregamento

PCAR(I,1) - Força vertical no nó I

PCAR(I,2) - Momento M_x no nó I

PCAR(I,3) - Momento M_y no nó I

11º Conjunto - Coordenadas dos nós

Quantidade de Cartões - NNOS (1 para cada nó)

Formato - I2, 8X, 2F10.3

Conteúdo de cada cartão:

J - Número do nó

XORD(J) - Coordenada x

YORD(J) - Coordenada y

12º Conjunto - Condições de contorno

Quantidade de Cartões - NREST

Formato - I2, 6I1

Conteúdo de cada cartão I:

I - Número do nó com condição de contorno

IRES(I,1)	}	Se IRES(I,J) = 1 significa que o deslocamento de índice J do nó I está impedido e, se IRES(I,J) = 0, o deslocamento está livre
IRES(I,2)		
IRES(I,3)		
IRES(I,4)		
IRES(I,5)		
IRES(I,6)		

13º Conjunto - Vínculos elásticos

Número de Cartões - NELAS

Formato - I2, 8X, 3F10.3

Conteúdo de cada cartão K

K - Número do nó com vinculação elástica

KML(K,1) - Constante da vinculação elástica ao deslocamento w

- KML(K,2) - Constante da vinculação elástica ao deslocamento w_x 21-30
- KML(K,3) - Constante da vinculação elástica ao deslocamento w_y

5.3.2 - Explicação das matrizes ITIPO(I), ITC(I), NTP(J), NTC(J) dos valores NTIPO e NETC

Montar as matrizes de rigidez, de instabilidade e o vetor de cargas nodais para todos os elementos consumiria muito tempo do computador. Para reduzir o tempo, a folha é dividida em uma malha o mais uniforme possível. Assim aparecerão elementos iguais entre si, tanto em dimensões quanto em orientação, carregamentos, parâmetros nodais e base elástica na qual o elemento está apoiado. Desse modo as coordenadas dos nós desses elementos, em relação ao referencial cartesiano de origem no centro de gravidade do elemento, serão as mesmas e, portanto, os elementos terão as mesmas matrizes de rigidez, instabilidade e o mesmo vetor de cargas nodais.

Dois elementos com as mesmas dimensões, orientação, parâmetros nodais e base elástica são ditos elementos do mesmo tipo geométrico.

Para se analisar placas com carregamento parcialmente distribuído, define-se ainda o elemento-tipo carregamento. Dois elementos do mesmo tipo geométrico e com o mesmo carregamento são elementos do mesmo tipo carregamento. Para os elementos carregados, os valores de ITIPO e ITC são iguais.

O valor NTIPO indica quantos elementos-tipo geométrico a folha possui. O valor NETC indica quantos elementos-tipo carregamento a folha possui. O vetor ITIPO(N) indica qual é o tipo

geométrico do elemento N e o vetor $ITC(J)$ indica qual o tipo carregamento do elemento J . Assim, se $ITIPO(10) = 3$, então o elemento 10 é do mesmo tipo geométrico que o elemento adotado como tipo geométrico 3. Se, além disso, $ITC(10) = 3$ então o elemento 10 tem o mesmo carregamento que o elemento-tipo carregamento 3, porém, se $ITC(10) = 0$, o elemento 10 não está carregado. Precisa-se então definir quais elementos são considerados elementos-tipo. Esses elementos são fornecidos através dos vetores $NTP(J)$, que fornece os elementos-tipo geométrico e $NTC(J)$ que fornece os elementos-tipo carregamento.

No caso de folha com carregamento transversal parcial os elementos-tipo geométrico devem ser escolhidos, sempre que possível, entre os elementos com carregamento.

Seja, por exemplo, a folha da figura 5.1, já dividida em elementos finitos.

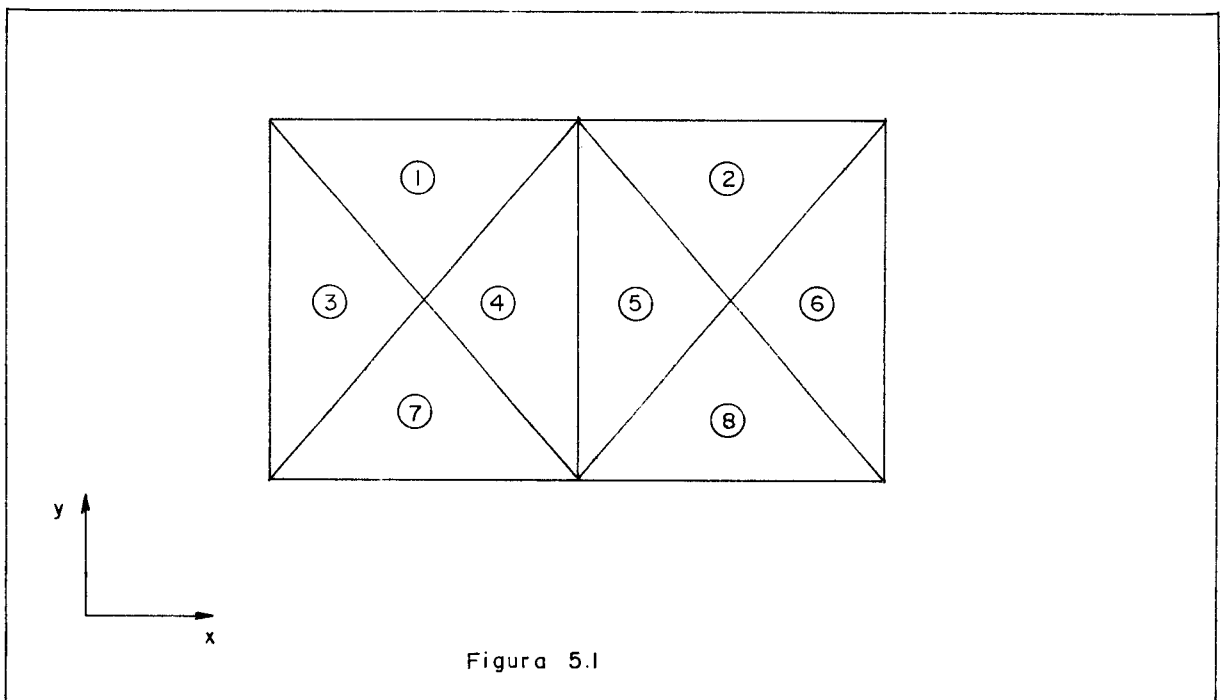


Figura 5.1

Supondo todos elementos de espessura constante pode-se definir como elemento-tipo os elementos 1, 3, 4, 7.

Portanto:

$$[NTP] = [1 \ 3 \ 4 \ 7]$$

onde:

o elemento 1 é tipo geométrico 1

o elemento 3 é tipo geométrico 2

o elemento 4 é tipo geométrico 3

o elemento 7 é tipo geométrico 4

e o vetor ITIPO fica:

$$[ITIPO] = [1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$$

Supondo que os elementos, com exceção do elemento 7, estão carregados com uma carga uniformemente distribuída, os elementos tipo carregamento podem ser definidos como:

$$[NTC] = [1 \ 3 \ 4 \ 8]$$

e agora

$$[NTP] = [1 \ 3 \ 4 \ 8]$$

onde:

o elemento 1 é tipo carregamento 1

o elemento 3 é tipo carregamento 2

o elemento 4 é tipo carregamento 3

o elemento 8 é tipo carregamento 4

e o vetor ITC fica:

$$[ITC] = [1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 0 \ 4]$$

e o vetor ITIPO fica:

$$[ITIPO] = [1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$$

Para o caso do elemento 7, o valor $ITC(7) = 0$ indica que o elemento não está carregado.

5.4 - Explicação da matriz LNOBO

A matriz LNOBO contém as informações necessárias para o estudo do contorno da folha. O primeiro valor $LNOBO(N,1)$ é o número do elemento situado na borda; os três valores seguintes, $LNOBO(N,2)$, $LNOBO(N,3)$ e $LNOBO(N,4)$ são os pontos nodais do elemento. Os três valores seguintes $LNOBO(N,5)$, $LNOBO(N,6)$ e $LNOBO(N,7)$ indicam os endereços dos ângulos necessários para as transformações de coordenadas. Se $LNOBO(N,5) = 0$ significa que ou o nó correspondente dado por $LNOBO(N,2)$ não está na borda ou, se está, a borda não é esconsa.

Se $LNOBO(N,6) = 4$ significa que o nó correspondente, dado por $LNOBO(N,3)$ está na borda e o ângulo necessário para a transformação de coordenadas está em $ANGLE(LNOBO(N,6))$. Os três valores finais indicam o tipo de parâmetros nodais que convêm aos nós. Se $LNOBO(N,8) = 0$ significa que para esse nó, dado por $LNOBO(N,2)$, os parâmetros nodais são dados por:

$$\{W\} = \left\{ \begin{array}{l} w \\ w, x \\ w, y \\ w, x^2 \\ w, xy \\ w, y^2 \end{array} \right\}$$

ou seja, o nó não está em uma borda livre.

LNOBO(N,9) = 1 significa que os parâmetros nodais de se nô, que é dado por LNOBO(N,3), são dados por:

$$\{W\} = \left\{ \begin{array}{l} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,x}^2 + \mu w_{,y}^2 \\ w_{,xy} \\ w_{,y}^2 + \mu w_{,x}^2 \end{array} \right\}$$

ou seja, o nô está em uma borda livre.

5.5 - Explicação do fator BETA

O estado crítico de tensões é obtido por iterações a partir de um determinado valor inferior ao valor crítico. O fa tor BETA é usado inicialmente para fornecer esse valor inferior e durante o processamento ele é alterado de forma tal que forne ça, no final, o valor do estado crítico de tensões. Seja, por e xemplo, a chapa da figura 4.1 e, admita-se que para certos dados sua carga crítica seja tal que

$$\sigma_{x_{cr}} > 80 \text{ tf/m}^2$$

e as iterações começarão a partir desse valor.

Deve-se então atribuir valores iniciais a σ_x^0 e a BETA tais que as iterações comecem a partir do valor mencionado. Eles devem ser tais que seu produto seja o valor inicial. Assim, po de-se atribuir, por exemplo, os seguintes valores:

$$\sigma_x^o = 1 \text{ tf/m}^2 \quad \text{BETA} = 80$$

$$\sigma_x^o = 2 \text{ tf/m}^2 \quad \text{BETA} = 40$$

$$\sigma_x^o = 4 \text{ tf/m}^2 \quad \text{BETA} = 20 \quad \text{etc.}$$

e, para cada caso, deve ser estudado um valor do passo usado nas iterações. Deve-se lembrar que o passo é somado ao valor de BETA e não às tensões.

O programa fornece, como saída, os valores de BETA e os valores do estado de tensões referentes a esses valores de BETA, interrompendo a execução quando o estado de tensões atinge seu valor crítico.

6. CONCLUSÕES

O programa desenvolvido para o estudo de folhas planas se mostrou muito eficaz nos diversos exemplos analisados obtendo, mesmo com divisões em número pequeno de elementos, resultados com erros aceitáveis do ponto de vista do cálculo estrutural.

O programa permite a análise de problemas bem gerais de folhas planas quanto à geometria, vinculação e carregamento. O programa permite, também, analisar problemas com vinculações elásticas e problemas de folhas apoiadas, total ou parcialmente, em uma base elástica.

Nos exemplos analisados, um número pequeno de elementos foi o suficiente, porém, para folhas de contorno irregular a divisão da folha em elementos finitos deve ser mais acurada.

A seguir são apresentadas sugestões para melhor desempenho do programa.

- a) A folha deve ser dividida em elementos de forma o mais regular possível, evitando triângulos alongados. Essa divisão deve ser tal que apareça o maior número possível de elementos iguais quanto à geometria, carregamento e tipo de parâmetros nodais, o que reduzirá em muito o tempo de execução.
- b) Em cada nó da folha, sempre que possível, devem concorrer um mesmo número de elementos finitos.
- c) A numeração dos nós deve ser feita de modo a minimizar a largura da faixa de banda do sistema de equações finais.
- d) Nas regiões da folha onde haja concentração de tensões ou mudanças bruscas de direção, deve-se usar mais nós, assim como em qualquer parte da folha em que se queira obter maiores informações.

- e) Nas folhas com um ou mais planos de simetria, estudar apenas uma parte da folha, o que permitirá uma divisão em um número maior de elementos e, portanto, melhores resultados.
- f) Nos problemas de determinação de carga crítica de chapas, estimar um valor mínimo para o valor da carga e começar, a partir dele, a fazer as iterações que conduzirão à carga crítica.
- g) Para problemas com esforços no plano médio variáveis, estes devem ser calculados, inicialmente, pelas equações da teoria da elasticidade bidimensional e, então, os valores das tensões nos pontos nodais das folhas entrarão como dados do problema.

APÊNDICE 1

MATRIZ DE INSTABILIDADE DE UM ELEMENTO FINITO COM
ESTADO DE TENSÕES LINEARMENTE VARIÁVEL

A matriz de instabilidade de um elemento finito é obtida através da integral (3.43):

$$[KI]_e = [C]^{-1T} \left\{ \int_s t(x,y) [R]^T \begin{bmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o \\ \tau_{xy}^o & \sigma_y^o \end{bmatrix} [R] dx dy \right\} [C]^{-1}$$

Admitindo-se que as tensões variem linearmente no elemento pode-se escrever, em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^o & \tau_{xy}^o \\ \tau_{xy}^o & \sigma_y^o \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^o & \tau_{xy1}^o \\ \tau_{xy1}^o & \sigma_{y1}^o \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} \sigma_{x2}^o & \tau_{xy2}^o \\ \tau_{xy2}^o & \sigma_{y2}^o \end{bmatrix} + \\ + \xi_3 \begin{bmatrix} \sigma_{x3}^o & \tau_{xy3}^o \\ \tau_{xy3}^o & \sigma_{y3}^o \end{bmatrix} \quad \dots A-1$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xi}^o & \tau_{xyi}^o \\ \tau_{xyi}^o & \sigma_{yi}^o \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

é o estado de tensões no nó i do elemento.

De A-1 e (3.43) obtem-se:

$$\begin{aligned}
 [KI] = [C]^{-1T} \left\{ \int_s t(x,y) [R]^T \left\{ \xi_1 \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^o & \tau_{xy1}^o \\ \tau_{xy1}^o & \sigma_{y1}^o \end{bmatrix} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \xi_2 \begin{bmatrix} \sigma_{x2}^o & \tau_{xy2}^o \\ \tau_{xy2}^o & \sigma_{y2}^o \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} \sigma_{x3}^o & \tau_{xy3}^o \\ \tau_{xy3}^o & \sigma_{y3}^o \end{bmatrix} \right\} [R] dx dy \right\} [C]^{-1}
 \end{aligned}$$

que desenvolvida recai em:

$$\begin{aligned}
 [KI] = [C]^{-1T} \left\{ \int_s t(x,y) [R]^T \xi_1 \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^o & \tau_{xy1}^o \\ \tau_{xy1}^o & \sigma_{y1}^o \end{bmatrix} [R] dx dy + \right. \\
 \left. + \int_s t(x,y) [R]^T \xi_2 \begin{bmatrix} \sigma_{x2}^o & \tau_{xy2}^o \\ \tau_{xy2}^o & \sigma_{y2}^o \end{bmatrix} [R] dx dy + \right. \\
 \left. + \int_s t(x,y) [R]^T \xi_3 \begin{bmatrix} \sigma_{x3}^o & \tau_{xy3}^o \\ \tau_{xy3}^o & \sigma_{y3}^o \end{bmatrix} [R] dx dy \right\} [C]^{-1} \quad \dots A-2
 \end{aligned}$$

que é a matriz de instabilidade para estado linearmente variável de tensões.

APÊNDICE 2

Programa em linguagem FORTRAN para o
Computador IBM-1130 do Centro de Pro-
cessamento de Dados da Escola de En-
genharia de São Carlos.

PAGE 1 PAIVA

// JCB T 0016 0047

PAIVA

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0016	0016	0000
0001	0047	0047	0002
		0061	0001

V2 M10 ACTUAL 32K (CNFIG 32K

// DLP

```

*STCREDATA WS UA TEGR1 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4000 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR2 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4040 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR3 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4080 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR4 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 40C0 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR5 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4000 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR6 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4040 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR7 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4080 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR8 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 40C0 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEGR9 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4E00 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA TEG10 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4E40 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA CCZE1 60047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4E80 DB CNT 0060

*STCREDATA WS UA TREZE 40047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4EE0 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA QTRZE 100047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4F20 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA QUIZE 60047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 4FC0 DB CNT 0060

*STCREDATA WS UA VINTE 360047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5020 DB CNT 0240

*STCREDATA WS UA VINT5 360047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5260 DB CNT 0240

*STCREDATA WS UA TRITA 400047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 54A0 DB CNT 0280

*STCREDATA WS UA TRIT5 400047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5720 DB CNT 0280

*STCREDATA WS UA GRNTA 100047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 59A0 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA CRTA5 300047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5A40 DB CNT 0030

*STCREDATA WS UA CGTA1 100047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5A70 DB CNT 0040

*STCREDATA WS UA SSNTA 400047 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5B10 DB CNT 0280

```

// FCR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE CCEF(1CCEF, KK, L)
DIMENSION ICCEF(45)

```

PAGE 2 PAIVA

```

DC 109 I=1,L
109 ICCEF(L)=0
   K=1
   M=KK+1
   MN=M
   II=KK
   ICCEF(1)=1
   IF(KK-1)107,108,108
108 ICCEF(L)=1
   IF(KK-1)105,105,106
106 ICCEF(KK+1)=1
   DC 120 I=2,KK
   ICCEF(I)=II*ICCEF(I-1)/(I-1)
120 II=II-1
   DC 100 IJ=1,KK
   K=K+MN
   ICCEF(K)=ICCEF(IJ+1)
100 MN=MN-1
   K=1
   MN=M
   KC=KK
   KT=KC-1
   DC 200 J=1,KT
   IT=1
   KK=KK-1
   II=KK
   K=K+MN
   MN=MN-1
   DC 200 I=1,KK
   JT=IT+1
   KI=K+I
   ICCEF(KI)=II*ICCEF(KI-1)/(IT-1)
200 II=II-1
   IF(KI)105,105,107
105 ICCEF(2)=1
107 RETURN
   END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR CCEF
COMMON 0 VARIABLES 16 PROGRAM 332

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0012 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA CCEF 0016 0047
CART ID 0047 CB ADDR 5090 CB CNT 0015

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE EXFS(IE, IGR)
DIMENSION IE(3,45)
II=IGR+2
IK=0
N3=-1
IGR1=IGR+1
DC 75 J=1, IGR1
N1=IGR+1
II=II-1
N1=N1-J
N2=0
N3=N3+1
DC 75 I=1, II
IK=IK+1
IE(1, IK)=N1
N1=N1-1
IE(2, IK)=N2
N2=N2+1
75 IE(3, IK)=N3
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

PAGE 3 FAIVA

CCRE REQUIREMENTS FOR EXPS
COMMON 0 VARIABLES 12 PROGRAM 136

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00CF (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS UA EXPS 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 50A5 DB CNT 0009

// FOR

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE COLCC(X,Y,IPERM,XLC,YLC)
DIMENSION IPERM(3),X(3),Y(3),XLC(6),YLC(6)
DC 99 I=1,3
L=3
XLC(I)=X(I)
YLC(I)=Y(I)
J=IPERM(I)
LI=L+I
XLC(LI)=0.5*(X(J)+X(I))
99 YLC(LI)=0.5*(Y(J)+Y(I))
X0=0.
Y0=0.
DC 15 I=1,3
XC=X0+X(I)/3.
15 Y0=Y0+Y(I)/3.
DC 919 I=1,6
XLC(I)=XLC(I)-XC
919 YLC(I)=YLC(I)-Y0
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR COLCC
COMMON 0 VARIABLES 14 PROGRAM 158

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 001A (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS UA COLCC 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 50A6 DB CNT 000F

// FOR

```
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE MATC(EF,X,Y,XLC,YLC,S,C,IPERM)
DIMENSION VNUM(3),VCEN(3),F(2),TANG(3),GAMA(3),BETA(3)
DIMENSION EF(21,21),X(3),Y(3),XLC(6),YLC(6),S(3),C(3),IPERM(3),
*CF(18,21),IEX(18,21),IEY(18,21)
READ(15,1)CF,IEX,IEY
DC 100 I=1,21
DC 100 J=1,21
100 EF(I,J)=0.
II=-5
JJ=0
DC 110 K=1,3
II=II+6
JJ=JJ+6
DC 110 I=II,JJ
DC 110 J=1,21
IF(CF(I,J))1000,110,1000
1000 IF(XLC(K))1030,1010,1030
1010 IF(IEX(I,J))1030,1020,1030
1020 XL=1.
GC TC 1040
1030 XL=XLC(K)
1040 IF(YLC(K))1070,1050,1070
1050 IF(IEY(I,J))1070,1060,1070
1060 YL=1.
GC TC 1080
```

PAGE 4 FAIVA

1070 YL=YLC(K)
1080 EF(I,J)=CF(I,J)*XL**IEX(I,J)*YL**IEY(I,J)
110 CONTINUE

C-----CALCULO DOS ANGULOS ENTRE EIXO X E EIXO T
C

```
      DC 750 I=1,3
      J=I+ERM(I)
      VNUM(I)=Y(J)-Y(I)
      VDEN(I)=X(J)-X(I)
      IF(VDEN(I))500,600,500
500  TANG(I)=VNUM(I)/VDEN(I)
      IF(ABS(TANG(I))-100.)700,959,959
600  IF(VNUM(I))530,1111,520
520  S(I)=1.
      C(I)=0.
      GC TC 750
530  S(I)=-1.
      C(I)=0.
      GC TC 750
700  IF(VDEN(I))800,800,900
800  IF(VNUM(I))801,802,801
801  S(I)=-SIN(ATAN(TANG(I)))
      C(I)=-COS(ATAN(TANG(I)))
      GC TC 750
802  S(I)=0.
      C(I)=-1.
      GC TC 750
900  S(I)=SIN(ATAN(TANG(I)))
      C(I)=COS(ATAN(TANG(I)))
      GC TC 750
959  A=TANG(I)-1.
      B=TANG(I)+1.
      ANG45=3.1415926/4.
      IF(VDEN(I))960,600,970
960  IF(VNUM(I))965,1111,966
965  GAMA(I)=ATAN(A/B)
      BETA(I)=ANG45+GAMA(I)
      S(I)=-SIN(BETA(I))
      C(I)=-COS(BETA(I))
      GC TC 750
966  GAMA(I)=ATAN((1.+TANG(I))/(1.-TANG(I)))
      BETA(I)=- (3.1415926/4.)+GAMA(I)
      S(I)=-SIN(BETA(I))
      C(I)=-COS(BETA(I))
      GC TC 750
970  IF(VNUM(I))975,1111,976
975  GAMA(I)=ATAN((1.+TANG(I))/(1.-TANG(I)))
      BETA(I)=- (3.1415926/4.)+GAMA(I)
      S(I)=SIN(BETA(I))
      C(I)=COS(BETA(I))
      GC TC 750
976  GAMA(I)=ATAN(A/B)
      BETA(I)=ANG45+GAMA(I)
      S(I)=SIN(BETA(I))
      C(I)=COS(BETA(I))
      GC TC 750
1111 WRITE(5,1119)
1119 FORMAT(10X,'ERRO NAS COORDENADAS'//)
750  CONTINUE
      DC 299 I=1,3
      IF(VDEN(I))300,303,299
303  IF(VNUM(I))299,300,300
300  S(I)=-S(I)
      C(I)=-C(I)
299  CONTINUE
      II=18
      DC 120 K=4,6
      II=II+1
      IK=K-3
      DC 120 J=1,21
      F(1)=0.
      F(2)=0.
      IF(S(IK)*CF(2,J))2000,115,2000
2000 IF(XLC(K))2030,2010,2030
2010 IF(IEX(2,J))2030,2020,2030
2020 XL=1.
      GC TC 2040
2030 XL=XLC(K)
2040 IF(YLC(K))2070,2050,2070
2050 IF(IEY(2,J))2070,2060,2070
2060 YL=1.
      GC TC 2000
```

PAGE 5 FAIVA

```

2070 YL=YLC(K)
2080 F(1)=-S(IK)*CF(2,J)*XL**IEX(2,J)*YL**IEY(2,J)
115 IF(C(IK)*CF(3,J))3000,3090,3000
3000 IF(XLC(K))3030,3010,3030
3010 IF(IEX(3,J))3030,3020,3030
3020 XL=1.
GC TC 3040
3030 XL=XLC(K)
3040 IF(YLC(K))3070,3050,3070
3050 IF(IEY(3,J))3070,3060,3070
3060 YL=1.
GC TC 3080
3070 YL=YLC(K)
3080 F(2)=C(IK)*CF(3,J)*XL**IEX(3,J)*YL**IEY(3,J)
3090 EF(II,J)=F(1)+F(2)
120 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR MATC
CCMCA C VARIABLES 1974 PROGRAM 1356

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0700 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLF

*STCKE WS UA MATC 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5000 DB CNT 0050

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE INVP(N1,N2)
DIMENSION ST(21,21),INC1(21),INC2(21)
DC 10 I=1,N2
10 INC1(I)=0
I2=0
1 PIVCT=-1.0
DC 30 I=1,N2
IF(INC1(I))30,2,30
2 DC 20 J=1,N2
IF(INC1(J))20,3,20
3 AUX=ABS(ST(I,J))
IF(AUX-PIVCT)20,20,4
4 IPV=I
JFV=J
PIVCT=AUX
20 CONTINUE
30 CONTINUE
IF(PIVCT)11,12,5
5 INC1(JFV)=IPV
IF(IPV-JFV)6,7,6
6 DC 40 K=1,N2
AUX=ST(IPV,K)
ST(IPV,K)=ST(JFV,K)
40 ST(JFV,K)=AUX
I2=I2+1
INC2(I2)=JFV
7 AUX=ST(JFV,JFV)
ST(JFV,JFV)=1.
AUX=1./AUX
DC 50 J=1,N2
50 ST(JFV,J)=ST(JFV,J)*AUX
DC 70 K=1,N2
IF(K-JFV)8,70,8
8 AUX=ST(K,JFV)
ST(K,JFV)=0.
DC 60 IJ=1,N2
60 ST(K,IJ)=ST(K,IJ)-ST(JFV,IJ)*AUX
70 CONTINUE
GC TC 1
9 JFV=INC2(I2)
IPV=INC1(JFV)
DC 80 K=1,N2
AUX=ST(K,IPV)
ST(K,IPV)=ST(K,JFV)

```

PAGE 6 PAIVA

```

80 ST(K, JPV)=AUX
   I2=I2-1
11 IF(I2)9,14,9
12 WRITE(5,13)
13 FORMAT(1X,'*****MATRIZ NAO INVERSIVEL*****')
   GC TC 5
14 RETURN
   END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR INVP
COMMON C VARIABLES 58 PROGRAM 464

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 005D (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

```

*STORE WS UA INVP 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5E1A DB CNT 001F

```

// FOR

```

*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE MATRIZ(X,Y,S,C,H,Iperm)
DIMENSION Iperm(3),AK(4,3),F(3,18),COMPR(3),X(3),Y(3),S(3),C(3)
DIMENSION DIFX(3),DIFY(3)
DC 2010 I=1,3
J=Iperm(I)
DIFX(I)=X(J)-X(I)
DIFY(I)=Y(J)-Y(I)
2010 COMPR(I)=SQRT((X(J)-X(I))**2+(Y(J)-Y(I))**2)
DC 2020 I=1,3
AK(1,I)=0.5*S(I)
AK(2,I)=0.5*C(I)
2020 AK(4,I)=0.125*COMPR(I)*S(I)*C(I)
DC 300 I=1,3
DC 300 J=1,18
300 H(1,J)=C.
H(1,2)=-AK(1,1)
H(1,3)=AK(2,1)
H(1,4)=-AK(3,1)
H(1,5)=AK(4,1)
H(1,6)=AK(3,1)
H(1,8)=-AK(1,1)
H(1,9)=AK(2,1)
H(1,10)=AK(3,1)
H(1,11)=-AK(4,1)
H(1,12)=-AK(3,1)
H(2,8)=-AK(1,2)
H(2,9)=AK(2,2)
H(2,10)=-AK(3,2)
H(2,11)=AK(4,2)
H(2,12)=AK(3,2)
H(2,14)=-AK(1,2)
H(2,15)=AK(2,2)
H(2,16)=AK(3,2)
H(2,17)=-AK(4,2)
H(2,18)=-AK(3,2)
H(3,2)=-AK(1,3)
H(3,3)=AK(2,3)
H(3,4)=AK(3,3)
H(3,5)=-AK(4,3)
H(3,6)=-AK(3,3)
H(3,14)=-AK(1,3)
H(3,15)=AK(2,3)
H(3,16)=-AK(3,3)
H(3,17)=AK(4,3)
H(3,18)=AK(3,3)
103 IF(DIFX(1))100,103,110
100 DC 105 I=4,6
105 H(1,I)=-F(1,I)
DC 106 I=10,12
106 H(1,I)=-F(1,I)
110 IF(DIFX(2))130,133,120
133 IF(DIFY(2))120,130,130

```

PAGE 7 PAIVA

```

130 DC 135 I=10,12
135 H(2,I)=-F(2,I)
      DC 136 I=16,18
136 H(2,I)=-F(2,I)
120 IF(ICFX(3))150,153,140
153 IF(ICFY(3))140,150,150
150 DC 155 I=4,6
155 H(3,I)=-F(3,I)
      DC 156 I=16,18
156 H(3,I)=-F(3,I)
140 CONTINUE
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR MATRF
COMMON 3 VARIABLES 86 PROGRAM 764

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0068 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS LA MATRF 0016 CC47
CARD ID 0047 DB ADDR 5E39 DB CNT CC36

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBCLTINE PCLIN(KP,KR,KS,XL,YL,AREA,PRS,PRS1,PCAR,EP2,PRS3,P4,P5,
      *P6,ISVAR,PCAR1,PRS2)
      DIMENSION P4(66),P5(66),P6(66)
      DIMENSION IEX(3,66),IEY(3,66),ICSI(4),KR(66),KS(66)
      DIMENSION PRS(66),XL(6),YL(6),ICFX(66),ICFY(66),PRS1(66),PCAR(3)
      DIMENSION EP2(3)
      DIMENSION PRS3(66)
      DIMENSION PCAR1(3),PRS2(66)
      DC 50 II=1,KP
      NX=(KR(II)+1)*(KR(II)+2)/2
      NY=(KS(II)+1)*(KS(II)+2)/2
      IGRX=KR(II)
      ICRY=KS(II)
      CAR=0.
      VINIT=0.0
      VINT4=0.0
      VINTF=0.
      A4=0.
      A5=0.
      A6=0.
      IF(IGRX)444,444,555
444 ICFX(1)=1
      GC TC 445
555 IGRAU=IGRX
      N=NX
      READ(IGRAU'1)(ICFX(I),I=1,N)
445 IF(IGRY)666,666,777
666 ICFY(1)=1
      GC TC 665
777 IGRAU=IGRY
      N=NY
      READ(IGRAU'1)(ICFY(I),I=1,N)
665 IF(NX-3)98,200,200
200 IGRAU=IGRX
      N=NX
      READ(IGRAU'2)((IEX(K,I),I=1,N),K=1,3)
      GC TC 300
98 DC 222 I=1,3
222 IEX(I,1)=0
300 IF(NY-3)308,303,303
303 IGRAU=IGRY
      N=NY
      READ(IGRAU'2)((IEY(K,I),I=1,N),K=1,3)
      GC TC 304
308 DC 333 I=1,3
333 IEY(I,1)=0
304 CONTINUE
      DC 999 I=1,NY
      LC 999 J=1,NX

```

PAGE 8 FAIVA

```

CF=FLCAT(ICFY(I)*ICFX(J))
ICSI(1)=IEX(1,J)+IEY(1,I)
ICSI(2)=IEX(2,J)+IEY(2,I)
ICSI(3)=IEX(3,J)+IEY(3,I)
IMM=ICSI(1)
INN=ICSI(2)
IFP=ICSI(3)
IM1=IMM+1
IN1=INN+1
IF1=IFP+1
VINT1=VINTA(IM1,INN,IFP,AREA)
VINT2=VINTA(IMM,IN1,IFP,AREA)
VINT3=VINTA(IMM,INN,IF1,AREA)
IF(ISVAR) 5,6,5
5 IM2=IMM+2
V1=VINTA(IM2,INN,IFP,AREA)
V2=VINTA(IM1,IN1,IFP,AREA)
V3=VINTA(IM1,INN,IF1,AREA)
IN2=INN+2
V4=VINTA(IM1,IN1,IFP,AREA)
V5=VINTA(IMM,IN2,IFP,AREA)
V6=VINTA(IMM,IN1,IF1,AREA)
IF2=IFP+2
V7=VINTA(IM1,INN,IF1,AREA)
V8=VINTA(IMM,IN1,IF1,AREA)
V9=VINTA(IMM,INN,IF2,AREA)
6 CONTINUE
XL1=1.0
XL2=1.
XL3=1.
YL1=1.
YL2=1.
YL3=1.
IF(IEX(1,J))3001,3001,3000
3000 XL1=XL(1)*IEX(1,J)
3001 IF(IEX(2,J))3002,3003,3002
3002 XL2=XL(2)*IEX(2,J)
3003 IF(IEX(3,J))3005,3005,3004
3004 XL3=XL(3)*IEX(3,J)
3005 IF(IEY(1,I))3007,3007,3006
3006 YL1=YL(1)*IEY(1,I)
3007 IF(IEY(2,I))3009,3009,3008
3008 YL2=YL(2)*IEY(2,I)
3009 IF(IEY(3,I))998,998,3010
3010 YL3=YL(3)*IEY(3,I)
998 VINT=CF*XL1*XL2*XL3*YL1*YL2*YL3
A4=A4+VINT*(EP2(1)*V1+EP2(2)*V2+EP2(3)*V3)
A5=A5+VINT*(EP2(1)*V4+EP2(2)*V5+EP2(3)*V6)
A6=A6+VINT*(EP2(1)*V7+EP2(2)*V8+EP2(3)*V9)
VINTT=VINTT+VINT*(PCAR(1)*VINT1+PCAR(2)*VINT2+PCAR(3)*VINT3)
CAR=CAR+VINT*(PCAR1(1)*VINT1+PCAR1(2)*VINT2+PCAR1(3)*VINT3)
VINTF=VINTF+VINT*(VINT1+VINT2+VINT3)
599 VINT4=VINT4+VINT*(EP2(1)*VINT1+EP2(2)*VINT2+EP2(3)*VINT3)
P4(II)=A4
P5(II)=A5
P6(II)=A6
PRS(II)=VINTT
PRS2(II)=CAR
WRITE(5,60)KP,II
60 FORMAT(/,1X,'**4**',2(12,5X),'*****')
PRS1(II)=VINT4
PRS3(II)=VINTF
WRITE(5,1)KP(II),KS(II),VINTT,VINT4,VINTF
1 FORMAT(20X,'P',2I2,'=',3(E14.7,4X))
50 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR PCLIN
COMMON C VARIABLES 650 PROGRAM 1174

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 02BC (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS UA PCLIN 0016 0047

PAGE 9 FAIVA

CART ID 0047 DE ADDR 5E6F DB CNT 0050

```
// FCR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
C
C----- SLPROGRAMA VINTA
C
      FUNCTION VINTA(M,N,IP,AREA)
      DIMENSION ICSIS(4),FAT(4)
      ICSIS(1)=M
      ICSIS(2)=N
      ICSIS(3)=IP
      ICSIS(4)=2
      DC 1920 K=1,3
1920  ICSIS(4)=ICSIS(4)+ICSIS(K)
      DC 20 I=1,4
      FAT(I)=1.
      K=ICSIS(I)
      IF(K)20,20,5
   5  DC 10 J=1,K
      10  FAT(I)=FAT(I)*FLCAT(J)
      20  CONTINUE
      VNUM=AREA
      DC 16 L=1,3
      16  VNUM=VNUM*FAT(L)
      VINTA=VNUM/FAT(4)
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR VINTA
COMMON VARIABLES 30 PROGRAM 174

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0025 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS UA VINTA 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5E6F DB CNT 0000

```
// FCR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE TSKE1(LINFA,LNCBU,ANGLE)
      REAL MR(96,36),MI(96,36)
      DIMENSION CSI(6,6),LNCPC(30,10),ANGLE(20)
      COMMON MR,MI,FSI(18,18)
      DC 10 I=1,6
      DC 10 J=1,6
      10  CSI(I,J)=0.
      DC 11 I=1,18
      DC 11 J=1,18
      11  FSI(I,J)=0.
      DC 60 I=1,3
      IA=I+4
      IF(LNCBC(LINFA,IA))20,40,20
      20  IACPR=LNCPC(LINFA,IA)
      T=SIN(ANGLE(IACPR))
      C=CCS(ANGLE(IACPR))
      CSI(1,1)=1.
      CSI(2,2)=C
      CSI(2,3)=-T
      CSI(3,2)=T
      CSI(3,3)=C
      CSI(4,4)=C*C
      CSI(4,5)=-2.*T*C
      CSI(4,6)=T*T
      CSI(5,4)=T*C
      CSI(5,5)=CSI(4,4)-CSI(4,6)
      CSI(5,6)=-CSI(5,4)
      CSI(6,4)=CSI(4,6)
      CSI(6,5)=-CSI(4,5)
      CSI(6,6)=CSI(4,4)
      DC 30 IA=1,6
      IE=6*(I-1)+IA
```

```

PAGE 10 FAIVA
      EC 30 IE=1,6
      IG=6*(I-1)+IE
30    PSI(IE,IG)=CSI(IA,IE)
      GC TC 60
40    INIC=6*(I-1)+1
      IFIM=INIC+5
      EC 50 K=INIC,IFIM
50    PSI(K,K)=1.
60    CONTINUE
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR TSKE1
COMMON 21708 VARIABLES 140 PROGRAM 400

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 009E (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*STORE WS UA TSKE1
CART ID 0016 DE ADDR 5560 EB CNT 0018

```

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE TFRE1(LINFA,LNGB0,NI)
REAL MF(96,36),MI(96,36)
REAL NI
DIMENSION LNGB0(30,10),CSJ(6,6)
COMMON MF,MI,PSI(18,18)
DC 10 I=1,6
DC 10 J=1,6
10 CSJ(I,J)=0.
DC 11 I=1,18
DC 11 J=1,18
11 PSI(I,J)=0.
DC 60 I=1,3
IA=I+7
IF(LNGB0(LINFA,IA))40,20,40
40 CSJ(1,1)=1.
CSJ(2,2)=CSJ(1,1)
CSJ(3,3)=CSJ(1,1)
CSJ(4,4)=1./(1.-NI*NI)
CSJ(4,6)=-NI*CSJ(4,4)
CSJ(5,5)=CSJ(1,1)
CSJ(6,4)=CSJ(4,6)
CSJ(6,6)=CSJ(4,4)
DC 30 IA=1,6
IE=6*(I-1)+IA
DC 30 IE=1,6
IG=6*(I-1)+IE
30 PSI(IE,IG)=CSJ(IA,IE)
GC TC 60
20 INIC=6*(I-1)+1
IFIM=INIC+5
DC 50 K=INIC,IFIM
50 PSI(K,K)=1.
60 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR TFRE1
COMMON 21708 VARIABLES 126 PROGRAM 310

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 008A (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*STORE WS UA TFRE1

```


PAGE 11 PAIVA
CART ID 0016 DE ADDR 557E DB CNT 0015

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE PREP1(FE)
REAL MR(96,36),MI(96,36)
DIMENSION FE(18,18),SAVE(18,18)
COMMON MR,MI,PSI(18,18)
DC 930 IA=1,18
DC 930 IB=1,18
SAVE(IA,IB)=1.
DC 930 IC=1,18
930 SAVE(IA,IB)=SAVE(IA,IB)+PSI(IC,IA)*FE(IC,IB)
DC 940 IA=1,18
DC 940 IB=1,18
FE(IA,IB)=0.
DC 940 IC=1,18
940 FE(IA,IB)=FE(IA,IB)+SAVE(IA,IC)*PSI(IC,IB)
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR PREP1
COMMON 21708 VARIABLES 978 PROGRAM 186

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 03D7 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS CA PREP1
CART ID 0016 DE ADDR 5590 DB CNT 0000

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE THMED(NUMNP,NUMEL,NP,DE,POI,E,TH)
DIMENSION THM(50),NP(50,3),TH(50,3),DE(50)
DC 1000 NC=1,NUMNP
THM(NC)=0.
CCUNT=0.
DC 900 N=1,NUMEL
DC 700 I=1,3
IF(NP(N,I)-NC)700,800,700
800 THM(NC)=THM(NC)+TH(N,I)
CCUNT=CCUNT+1.
DC 900 CONTINUE
700 CONTINUE
900 CONTINUE
THM(NC)=THM(NC)/CCUNT
DE(NC)=(E+THM(NC)**3)/(12.*(1.-POI**2))
1000 CONTINUE
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR THMED
COMMON 0 VARIABLES 162 PROGRAM 162

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00AE (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS CA THMED 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5ECB DB CNT 0000

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE TRISK(NUMNP,NELBI,ANGLE,LNOBB,STRS,XORD,YORD)
```

PAGE 12 FAIVA

```

DIMENSION STR(6),XCRD(50),YCRD(50),LNORO(30,10),TRC(6,6),W(150)
DIMENSION STRS(150),ANGLE(20)
WRITE(5,40)
40 FORMAT(1H1,'VALORES DAS INCOGNITAS NODAIS DE PONTOS SITUADOS NO CC
*ATCRNC'//,113X,'ANGULO'/1X,'PONTO'4X,'COORDENADAS'7X,'W'14X,'W,T'1
*2X,'W,N'12X,'W,IT'12X,'W,TN'12X,'W,NN'4X,'(GRAUS)'/)
DC 10 N=1,NUMNP
DC 11 M=1,NELEC
DC 11 L=2,4
IF(LNCEC(M,L)-N)11,20,11
20 I=L+3
IF(LNCEC(M,I))90,10,90
90 IADR=LNCEC(M,I)
S=SIN(ANGLE(IADR))
SS=S**2
C=CCS(ANGLE(IADR))
CC=(**2
SC=S*C
C2S2=CC-SS
DC 30 IA=1,6
DC 30 IE=1,6
30 TRC(IA,IE)=0.
TRC(1,1)=1.
TRC(2,2)=C
TRC(2,3)=-S
TRC(3,2)=-TRC(2,3)
TRC(3,3)=TRC(2,2)
TRC(5,4)=SC
TRC(5,5)=C2S2
TRC(5,6)=-TRC(5,4)
TRC(4,4)=CC
TRC(4,5)=-2.*SC
TRC(4,6)=SS
TRC(6,4)=TRC(4,6)
TRC(6,5)=2.*SC
TRC(6,6)=TRC(4,4)
K=6*(N-1)
DC 80 I=1,6
KI=K+I
W(KI)=0.
DC 80 J=1,6
KJ=K+J
W(KI)=W(KI)+TRC(I,J)*STRS(KJ)
80 CONTINUE
DC 60 J=1,6
KJ=K+J
60 STR(J)=STRS(KJ)
ANGUL = 57.29577951 * ANGLE(IADR)
WRITE(5,50)N,XCRD(N),YCRD(N),(STR(J),J=1,6),ANGUL
50 FORMAT(1X,14,3X,F6.2,2X,F6.2,6(E15.7),2X,F6.2)
DC 12 I=1,6
KI=K+I
STRS(KI)=W(KI)
12 CONTINUE
GC 10 10
11 CONTINUE
10 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR TRISK
COMMON 0 VARIABLES 622 PROGRAM 618

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 02E1 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS UA TRISK 0016 0047
CART ID 0047 DB ADDR 5007 DB CNT 0029

// FOR

*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE TRC(PR,NUMNP,NELBO,LNORO,STRS)
DIMENSION LNCEC(30,10),TEL(6,6),STRS(150),W(150)
DC 10 N=1,NUMNP

PAGE 13 PAIVA

```

      DC 11 M=1,NELEC
      DC 11 L=2,4
      IF(LNCP(C(M,L)-N)11,20,11
20  LL=L+6
      IF(LNCP(C(M,LL))50,11,50
50  DC 30 IA=1,6
      DC 30 IE=1,6
30  TEL(IA,IE)=0.
      TEL(1,1)=1.
      TEL(2,2)=TEL(1,1)
      TEL(3,3)=TEL(1,1)
      TEL(4,4)=1./(1-PR**2)
      TEL(4,6)=-PR*TEL(4,4)
      TEL(5,5)=TEL(1,1)
      TEL(6,4)=TEL(4,6)
      TEL(6,6)=TEL(4,4)
      K=6*(N-1)
      DC 60 I=1,6
      KI=K+I
      W(KI)=0.
      DC 60 J=1,6
      KJ=K+J
      W(KI)= W(KI) + TEL(I,J) * STRS(KJ)
60  CONTINUE
      DC 12 I=1,6
      KI=K+I
      STRS(KI)=W(KI)
12  CONTINUE
      GC TC 10
11  CONTINUE
10  CONTINUE
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR TFFRE
COMMON 0 VARIABLES 580 PROGRAM 326

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 024E (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA TFFRE 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5F00 DR CNT 0016

// FOR

```

*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
      SUBROUTINE FLEVL(NUMNP,STRS,DE,POI,XORD,YORD,NEQ,IPERF)
      REAL MX,MY,MXY,N(50,3)
      DIMENSION STRS(100),STR(6),TCM(3,6),SMOM(150),XORD(50),YORD(50)
      DIMENSION DE(50),ANGLE(20)

```

C
C----- CALCULO DOS MOMENTOS FLETORES E VOLVENTES
C

```

      WRITE(5,40)
40  FORMAT(1H1,'VALORES DAS INCOGNITAS NODAIS',//,1H,'PONTO',4X,'COORDENADAS',7X,'W',14X,'W,X',12X,'W,Y',12X,'W,XX',12X,'W,XY',12X,'W,Y *Y'/)
      DC 600 I=1,NUMNP
      K=6*(I-1)
      DC 220 J=1,6
      KI=K+J
220  STR(J)=STRS(KI)
      WRITE(5,33)I,XORD(I),YORD(I),(STR(J),J=1,6)
33  FORMAT(1X,I4,3X,F6.2,2X,F6.2,6(1X,E14.7))
600  CONTINUE
      WRITE(5,30)
30  FORMAT(1H0,'MOMENTOS NODAIS',//,1H,'PONTO',4X,'COORDENADAS',12X,' * MX ',12X,' MY ',12X,' MXY '/)
      DC 10 N=1,NUMNP
      DC 20 I=1,3
      DC 20 J=1,6
20  TCM(I,J)=0.
      TCM(1,4)=-DE(N)
      TCM(1,6)=-DE(N)*PCI
      TCM(2,4)=TCM(1,6)

```

PAGE 14 FAIVA

```

TCM(2,6)=TCM(1,4)
TCM(3,5)=TCM(1,4)-TCM(1,6)
K=3*(N-1)
K2=2*K
DC 60 IM=1,3
KIM=K+IM
SMCM(KIM)=0.
DC 60 L=1,6
KL=K2+L
60 SMCM(KIM)=SMCM(KIM)+TCM(IM,L)*STRS(KL)
KM=K+1
KM2=KM+2
10 WRITE(5,32)N,XCRD(N),YCRD(N),(SMCM(NLL),NLL=KM,KM2)
32 FCRMAT(1X,14,3X,F6.2,2X,F6.2,3E20.10)
C
C---- CALCULO DOS MOMENTOS NODAIS PRINCIPAIS
C
WRITE(5,31)
31 FCRMAT(1H0,'MOMENTOS NODAIS PRINCIPAIS'//1H,'PONTO',5X,'COORDENAD
*AS',9X,' M-1 ',10X,' M-2 ',10X,' M-NT-MAX',8X,'ANGLE'//1H,3X,'N',7X,
*'X',7X,'Y'/)
IF(1PERF)80,80,90
90 WRITE(2,93)
93 FCRMAT(/)
80 DC 400 N=1,NUMNF
K=3*(N-1)
K1=K+1
K2=K+2
K3=K+3
MX=SMCM(K1)
MY=SMCM(K2)
MXY=SMCM(K3)
C=0.5*(MX+MY)
DIF=0.5*(MX-MY)
F=SQRT(DIF**2+MXY**2)
M(N,1)=C+F
M(N,2)=C-F
M(N,3)=F
ANGLE(N)=45.*SIGN(1.,MXY)
IF(DIF)319,440,319
319 ANGLE(N)=28.647890*ATAN(MXY/DIF)
440 WRITE(5,34)N,XCRD(N),YCRD(N),(M(N,I),I=1,3),ANGLE(N)
34 FCRMAT(1H,1X,I3,2X,2F8.2,2X,4(3X,E12.4))
IF(1PERF)400,400,910
910 IF(DIF)321,322,322
322 IF(MXY)323,705,322
705 IF(C)710,720,730
710 WRITE(5,740)
IDIR=2
740 FCRMAT(1H+,85X,'QUALQUER DIRECAO E'' 2')
GC TC 410
720 WRITE(5,750)
750 FCRMAT(1H+,85X,'PONTO COM MOMENTOS NULDS')
IDIR=0
GC TC 410
730 WRITE(5,760)
760 FCRMAT(1H+,85X,'QUALQUER DIRECAO E'' 1')
IDIR=1
GC TC 410
321 WRITE(5,37)
37 FCRMAT(1H+,85X,'ANGLE INDICA M-2')
IDIR=2
GC TC 410
323 WRITE(5,38)
38 FCRMAT(1H+,85X,'ANGLE INDICA M-1')
IDIR=1
C
C GRAVACAO DOS CALCOS,P/PLATER,EM CARTOES
410 WRITE(2,95)N,XCRD(N),YCRD(N),(M(N,I),I=1,2),ANGLE(N),IDIR
95 FCRMAT(14,2F14.7,3E15.8,I3)
400 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR FLEVC
COMMON 0 VARIABLES 1078 PROGRAM 1014

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 056C (HEX)

PAGE 15 FAIVA

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA FLEVC 0016 CC47
CART ID 0047 DE ADDR 5F16 EB CNT CC42

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

SUBROUTINE REACA(STRS,NP,LNCEC,XORD,YORD,ITIPD,NEQ,NELBO,NUMNP)
DIMENSION STRS(150),NF(50,3),LNCEC(20,10),XORD(50),YORD(50),
*S(171),F(171),ITIPC(50),FL(18,18),SL(18,18),RE(200),STR(18),
*SF(18),REAC(18)
DC 5 I=1,NEG
5 RE(I)=0.
DC 10 N=1,NELEC
N=LNCEC(N,1)

C
C---- N = NUMERO DE ELEMENTO DA BORCA
C

DC 300 I=1,3
K=NF(N,1)
DC 300 J=1,6
KI=6*(I-1)+J
KJ=6*(K-1)+J
STR(KI)=STRS(KJ)
300 CONTINUE

C
C---- RECUPERACAO DE FL(18,18)
C

NR=2*ITIPC(N)-1
REAC(25*NR)(F(IJ),IJ=1,171)
REAC(20*NR)(S(IJ),IJ=1,171)
IJ=0
DC 90 I=1,18
DC 90 J=1,18
IF(I-J)100,100,110
100 IJ=IJ+1
FL(I,J)=F(IJ)
SL(I,J)=S(IJ)
CC TC 90
110 FL(I,J)=FL(J,I)
SL(I,J)=SL(J,I)
90 CONTINUE
DC 120 I=1,18
DC 120 J=1,18
120 FL(I,J)=FL(I,J)+SL(I,J)
DC 50 I=1,18
SF(I)=0.
DC 50 J=1,18
SF(I)=SF(I)+FL(I,J)*STR(J)
50 CONTINUE
REAC(40*N)(STR(II),II=1,18)
DC 60 I=1,18
REAC(I)=SF(I)+STR(I)
60 CONTINUE
DC 70 I=1,3
K=NF(N,I)
DC 70 J=1,6
IE=6*(I-1)+J
IG=6*(K-1)+J
RE(IG)=RE(IG)+REAC(IE)
70 CONTINUE
10 CONTINUE
WRITE(5,75)
75 FORMAT(1F1,'REACAO VERTICAL NOS APUIS'//1F,'PONTO',5X,'COORDENAD
*AS',7X,'REACAO VERTICAL'/1F,3X,'N',7X,'X',7X,'Y',13X,'R(W)'/)
DC 25 N=1,NUMNP
DC 20 M=1,NELEC
DC 20 L=2,4
IF(LNCEC(N,L)-N)20,30,20
30 K=6*N-5
IF(STRS(K))25,40,25
40 WRITE(5,80)N,XORD(N),YORD(N),RE(K)
80 FORMAT(15,2X,2F8.2,5X,E12.4)
CC TC 25
20 CONTINUE
25 CONTINUE
RETURN
END

PAGE 16 PAIVA

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR REACA
COMMON 0 VARIABLES 3750 PROGRAM 716

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS DEFB (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS UA REACA 0016 CC47
CART ID 0047 DE ADDR 5F58 DB CNT 002E

// FCR

*LIST SOURCE PROGRAM

*EXTENDED PRECISION

*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE RIGP(PRS,PCI,A)
DIMENSION A(21,21),PRS(66)
DO 2 I=1,21
DO 2 J=1,21
2 A(I,J)=0.
PL=(1.-PCI)/2.
P00=PRS(1)
P10=PRS(2)
P01=PRS(3)
P20=PRS(4)
P11=PRS(5)
P02=PRS(6)
P30=PRS(7)
P21=PRS(8)
P12=PRS(9)
P03=PRS(10)
P40=PRS(11)
P31=PRS(12)
P22=PRS(13)
P13=PRS(14)
P04=PRS(15)
P50=PRS(16)
P41=PRS(17)
P32=PRS(18)
P23=PRS(19)
P14=PRS(20)
P05=PRS(21)
P60=PRS(22)
P51=PRS(23)
P42=PRS(24)
P33=PRS(25)
P24=PRS(26)
P15=PRS(27)
P06=PRS(28)
A(4,4)=4.*P00
A(4,6)=4.*PCI*P00
A(4,7)=12.*P10
A(4,8)=4.*P01
A(4,9)=4.*PCI*P10
A(4,10)=12.*PCI*P01
A(4,11)=24.*P20
A(4,12)=12.*P11
A(4,13)=4.*(P02+PCI*P20)
A(4,14)=12.*PCI*P11
A(4,15)=24.*PCI*P02
A(4,16)=40.*P30
A(4,17)=24.*P21
A(4,18)=4.*(3.*P12+PCI*P30)
A(4,19)=4.*(P03+3.*PCI*P21)
A(4,20)=24.*PCI*P12
A(4,21)=40.*PCI*P03
A(5,5)=4.*PL*P00
A(5,8)=8.*PL*P10
A(5,9)=8.*PL*P01
A(5,12)=12.*PL*P20
A(5,13)=16.*PL*P11
A(5,14)=12.*PL*P02
A(5,17)=16.*PL*P30
A(5,18)=24.*PL*P21
A(5,19)=24.*PL*P12
A(5,20)=16.*PL*P03
A(6,6)=4.*P00

```

A(6,7)=12.*FCI*F10
A(6,8)=4.*FCI*F01
A(6,9)=4.*F10
A(6,10)=12.*F01
A(6,11)=24.*FCI*F20
A(6,12)=12.*FCI*F11
A(6,13)=4.*F20+4.*FCI*F02
A(6,14)=12.*F11
A(6,15)=24.*F02
A(6,16)=40.*FCI*F30
A(6,17)=24.*FCI*F21
A(6,18)=4.*(F30+3.*FCI*F12)
A(6,19)=4.*(3.*F21+FCI*F03)
A(6,20)=24.*F12
A(6,21)=40.*F03
A(7,7)=36.*F20
A(7,8)=12.*F11
A(7,9)=12.*FCI*F20
A(7,10)=36.*FCI*F11
A(7,11)=72.*F30
A(7,12)=36.*F21
A(7,13)=12.*F12+12.*FCI*F30
A(7,14)=36.*FCI*F21
A(7,15)=72.*FCI*F12
A(7,16)=120.*F40
A(7,17)=72.*F31
A(7,18)=36.*F22+12.*FCI*F40
A(7,19)=12.*F13+36.*FCI*F31
A(7,20)=72.*FCI*F22
A(7,21)=120.*FCI*F13
A(8,8)=4.*F02+16.*FL*F20
A(8,9)=(8.-4.*FCI)*F11
A(8,10)=12.*FCI*F02
A(8,11)=24.*F21
A(8,12)=12.*F12+24.*FL*F30
A(8,13)=4.*F03+(16.-12.*FCI)*F21
A(8,14)=12.*F12
A(8,15)=24.*FCI*F03
A(8,16)=40.*F21
A(8,17)=24.*F22+32.*FL*F40
A(8,18)=12.*F13+(24.-20.*F01)*F31
A(8,19)=4.*F04+(24.-12.*FCI)*F22
A(8,20)=(16.+8.*FCI)*F13
A(8,21)=40.*FCI*F04
A(9,9)=4.*F20+16.*FL*F02
A(9,10)=12.*F11
A(9,11)=24.*FCI*F30
A(9,12)=12.*F21
A(9,13)=4.*F30+(16.-12.*FCI)*F12
A(9,14)=12.*F21+24.*FL*F03
A(9,15)=24.*F12
A(9,16)=40.*FCI*F40
A(9,17)=(16.+8.*FCI)*F31
A(9,18)=4.*F40+(24.-12.*F01)*F22
A(9,19)=12.*F21+(24.-20.*F01)*F13
A(9,20)=24.*F22+32.*FL*F04
A(9,21)=40.*F13
A(10,10)=36.*F02
A(10,11)=72.*FCI*F21
A(10,12)=36.*FCI*F12
A(10,13)=12.*F21+12.*FCI*F03
A(10,14)=36.*F12
A(10,15)=72.*F03
A(10,16)=120.*FCI*F31
A(10,17)=72.*FCI*F22
A(10,18)=12.*F31+36.*F01*F13
A(10,19)=36.*F22+12.*FCI*F04
A(10,20)=72.*F13
A(10,21)=120.*F04
A(11,11)=144.*F40
A(11,12)=72.*F31
A(11,13)=24.*F22+24.*FCI*F40
A(11,14)=72.*FCI*F31
A(11,15)=144.*FCI*F22
A(11,16)=240.*F50
A(11,17)=144.*F41
A(11,18)=72.*F32+24.*FCI*F50
A(11,19)=24.*F23+72.*FCI*F41
A(11,20)=144.*FCI*F32
A(11,21)=240.*FCI*F23
A(12,12)=36.*F22+36.*FL*F40
A(12,13)=12.*F13+(24.-12.*FCI)*F31
A(12,14)=(18.+16.*FCI)*F22

PAGE 18 FAIVA

```

A(12,15)=72.*FC1*F13
A(12,16)=120.*P41
A(12,17)=72.*F32+48.*PL*P50
A(12,18)=36.*F23+(36.-24.*POI)*P41
A(12,19)=12.*F14+36.*P32
A(12,20)=(24.+48.*FCI)*P23
A(12,21)=120.*FCI*F14
A(13,13)=4.*F40+4.*P04+(32.-24.*POI)*P22
A(13,14)=12.*F31+(24.-12.*POI)*P13
A(13,15)=24.*F22+24.*POI*P04
A(13,16)=40.*F32+40.*FCI*P50
A(13,17)=24.*F23+(32.-8.*POI)*P41
A(13,18)=4.*F50+12.*F14+(48.-32.*POI)*P32
A(13,19)=4.*P05+12.*P41+(48.-32.*POI)*P22
A(13,20)=24.*F32+(32.-8.*POI)*P14
A(13,21)=40.*F23+40.*POI*P05
A(14,14)=36.*F22+36.*PL*P04
A(14,15)=72.*F13
A(14,16)=120.*FCI*P41
A(14,17)=(24.+48.*FCI)*P32
A(14,18)=12.*F41+36.*F23
A(14,19)=36.*F32+(36.-24.*POI)*P14
A(14,20)=72.*F23+48.*PL*P05
A(14,21)=120.*P14
A(15,15)=144.*P04
A(15,16)=240.*FCI*P32
A(15,17)=144.*FCI*F23
A(15,18)=24.*F32+72.*FCI*P14
A(15,19)=72.*F23+24.*POI*P05
A(15,20)=144.*P14
A(15,21)=240.*P05
A(16,16)=400.*P60
A(16,17)=240.*P51
A(16,18)=120.*P42+40.*FCI*P60
A(16,19)=40.*F33+120.*FCI*P51
A(16,20)=240.*FCI*P42
A(16,21)=400.*FCI*P33
A(17,17)=144.*P42+64.*PL*P60
A(17,18)=72.*F33+(48.-24.*POI)*P51
A(17,19)=24.*F24+(48.+24.*POI)*P42
A(17,20)=(32.+112.*FCI)*P33
A(17,21)=240.*FCI*F24
A(18,18)=4.*P60+36.*P24+(72.-48.*POI)*P42
A(18,19)=12.*P51+12.*P15+(72.-32.*POI)*P32
A(18,20)=24.*F42+(48.+24.*POI)*P24
A(18,21)=40.*F33+120.*FCI*P15
A(19,19)=4.*P06+36.*P42+(72.-48.*POI)*P24
A(19,20)=72.*F33+(48.-24.*POI)*P15
A(19,21)=120.*F24+40.*FCI*P06
A(20,20)=144.*P24+64.*PL*P06
A(20,21)=240.*P15
A(21,21)=400.*P06
DC 1 I=1,21
DC 1 J=1,21
1 A(J,I)=A(I,J)
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
CNE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRC REQUIREMENTS FOR RIGP
COMMON 0 VARIABLES 110 PROGRAM 2730

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 00B2 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA RIGP
CART ID 0016 DE ADDR 559C DE CNT C003

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*CNE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE MINST(SX,SY,TU,PRS)
DIMENSION PRS(66)
COMMON E(21,21),FE(21,21)
FOG=PRS(1)
F10=PRS(2)

PAGE 19 FAIVA

```

F01=FRS (3)
F20=FRS (4)
F11=FRS (5)
F02=FRS (6)
F30=FRS (7)
F21=FRS (8)
F12=FRS (9)
F03=FRS (10)
F40=FRS (11)
F31=FRS (12)
F22=FRS (13)
F13=FRS (14)
F04=FRS (15)
F50=FRS (16)
F41=FRS (17)
F32=FRS (18)
F23=FRS (19)
F14=FRS (20)
F05=FRS (21)
F60=FRS (22)
F51=FRS (23)
F42=FRS (24)
F33=FRS (25)
F24=FRS (26)
F15=FRS (27)
F06=FRS (28)
F70=FRS (29)
F61=FRS (30)
F52=FRS (31)
F43=FRS (32)
F34=FRS (33)
F25=FRS (34)
F16=FRS (35)
F07=FRS (36)
F80=FRS (37)
F71=FRS (38)
F62=FRS (39)
F53=FRS (40)
F44=FRS (41)
F35=FRS (42)
F26=FRS (43)
F17=FRS (44)
F08=FRS (45)
DC 2 I=1,21
DC 2 J=1,21
2 E(I,J)=0.
E(2,2)=SX*F00
E(2,3)=TU*F00
E(2,4)=2.*F10*SX
E(2,5)=F01*SX+F10*TU
E(2,6)=2.*F01*TU
E(2,7)=3.*F20*SX
E(2,8)=2.*F11*SX+F20*TU
E(2,9)=F02*SX+2.*F11*TU
E(2,10)=3.*F02*TU
E(2,11)=4.*F30*SX
E(2,12)=3.*F21*SX+F30*TU
E(2,13)=2.*F12*SX+2.*F21*TU
E(2,14)=F03*SX+3.*F12*TU
E(2,15)=4.*F03*TU
E(2,16)=5.*F40*SX
E(2,17)=4.*F31*SX+F40*TU
E(2,18)=3.*F22*SX+2.*F31*TU
E(2,19)=2.*F13*SX+3.*F22*TU
E(2,20)=F04*SX+4.*F13*TU
E(2,21)=5.*F04*TU
E(3,3)=F00*SY
E(3,4)=2.*F10*TU
E(3,5)=F10*SY+F01*TU
E(3,6)=2.*F01*SY
E(3,7)=3.*F20*TU
E(3,8)=F20*SY+2.*F11*TU
E(3,9)=2.*F11*SY+F02*TU
E(3,10)=3.*F02*SY
E(3,11)=4.*F30*TU
E(3,12)=F30*SY+3.*F21*TU
E(3,13)=2.*F21*SY+2.*F12*TU
E(3,14)=3.*F12*SY+F03*TU
E(3,15)=4.*F03*SY
E(3,16)=5.*F40*TU
E(3,17)=F40*SY+4.*F31*TU
E(3,18)=2.*F31*SY+3.*F22*TU
E(3,19)=3.*F22*SY+2.*F13*TU

```

E (3,20)=4.*F13*SY+P04***TU**
 E (3,21)=5.*F04***SY**
 E (4,4)=4.*F20***SX**
 E (4,5)=2.*F11***SX+2.*P20***TU****
 E (4,6)=4.*F11***TU**
 E (4,7)=6.*F30***SX**
 E (4,8)=4.*F21***SX+2.*P30***TU****
 E (4,9)=2.*F12***SX+4.*P21***TU****
 E (4,10)=6.*F12***TU**
 E (4,11)=8.*F40***SX**
 E (4,12)=6.*F31***SX+2.*P40***TU****
 E (4,13)=4.*F22***SX+4.*P31***TU****
 E (4,14)=2.*F13***SX+6.*P22***TU****
 E (4,15)=8.*F13***TU**
 E (4,16)=10.*F50***SX**
 E (4,17)=8.*F41***SX+2.*P50***TU****
 E (4,18)=6.*F32***SX+4.*P41***TU****
 E (4,19)=4.*F23***SX+6.*P32***TU****
 E (4,20)=2.*F14***SX+8.*P23***TU****
 E (4,21)=10.*F14***TU**
 E (5,5)=F02***SX+P20***SY+2.*P11***TU****
 E (5,6)=2.*F11***SY+2.*P02***TU****
 E (5,7)=3.*F21***SX+3.*P30***TU****
 E (5,8)=2.*F12***SX+P30***SY+3.*P21***TU****
 E (5,9)=F03***SX+2.*F21***SY+3.*P12***TU****
 E (5,10)=3.*F12***SY+3.*P03***TU****
 E (5,11)=4.*F31***SX+4.*P40***TU****
 E (5,12)=3.*F22***SX+P40***SY+4.*P21***TU****
 E (5,13)=2.*F13***SX+2.*P31***SY+4.*P22***TU****
 E (5,14)=F04***SX+3.*P22***SY+4.*P13***TU****
 E (5,15)=4.*F13***SY+4.*P04***TU****
 E (5,16)=5.*F41***SX+5.*P50***TU****
 E (5,17)=4.*F32***SX+P50***SY+5.*P41***TU****
 E (5,18)=3.*F23***SX+2.*P41***SY+5.*P32***TU****
 E (5,19)=2.*F14***SX+3.*P32***SY+5.*P23***TU****
 E (5,20)=F05***SX+4.*F23***SY+5.*P14***TU****
 E (5,21)=5.*F14***SY+5.*P05***TU****
 E (6,6)=4.*F02***SY**
 E (6,7)=6.*F21***TU**
 E (6,8)=2.*F21***SY+4.*F12***TU****
 E (6,9)=4.*F12***SY+2.*P03***TU****
 E (6,10)=6.*F03***SY**
 E (6,11)=8.*F31***TU**
 E (6,12)=2.*F31***SY+6.*P22***TU****
 E (6,13)=4.*F22***SY+4.*P13***TU****
 E (6,14)=6.*F13***SY+2.*P04***TU****
 E (6,15)=8.*F04***SY**
 E (6,16)=10.*F41***TU**
 E (6,17)=2.*F41***SY+8.*P32***TU****
 E (6,18)=4.*F32***SY+6.*P23***TU****
 E (6,19)=6.*F23***SY+4.*P14***TU****
 E (6,20)=8.*F14***SY+2.*P05***TU****
 E (6,21)=10.*F05***SY**
 E (7,7)=9.*F40***SX**
 E (7,8)=6.*F31***SX+3.*P40***TU****
 E (7,9)=3.*F22***SX+6.*P31***TU****
 E (7,10)=9.*F22***TU**
 E (7,11)=12.*F50***SX**
 E (7,12)=9.*F41***SX+3.*P50***TU****
 E (7,13)=6.*F32***SX+6.*P41***TU****
 E (7,14)=3.*F23***SX+9.*P32***TU****
 E (7,15)=12.*F23***TU**
 E (7,16)=16.*F60***SX**
 E (7,17)=12.*F51***SX+3.*P60***TU****
 E (7,18)=9.*F42***SX+6.*P51***TU****
 E (7,19)=6.*F33***SX+9.*P42***TU****
 E (7,20)=3.*F24***SX+12.*P33***TU****
 E (7,21)=15.*P24***TU**
 E (8,8)=4.*F22***SX+P40***SY+4.*P31***TU****
 E (8,9)=2.*F13***SX+2.*P31***SY+5.*P22***TU****
 E (8,10)=3.*F22***SY+6.*P13***TU****
 E (8,11)=8.*F41***SX+4.*P50***TU****
 E (8,12)=6.*F32***SX+P50***SY+5.*P41***TU****
 E (8,13)=4.*F23***SX+2.*P41***SY+6.*P32***TU****
 E (8,14)=2.*F14***SX+3.*P32***SY+7.*P23***TU****
 E (8,15)=4.*F22***SY+8.*F14***TU****
 E (8,16)=10.*F51***SX+5.*P60***TU****
 E (8,17)=8.*F42***SX+P60***SY+6.*P51***TU****
 E (8,18)=6.*F33***SX+2.*P51***SY+7.*P42***TU****
 E (8,19)=4.*F24***SX+3.*P42***SY+8.*P33***TU****
 E (8,20)=2.*F15***SX+4.*P33***SY+9.*P24***TU****
 E (8,21)=5.*F24***SY+10.*P15***TU****
 E (9,9)=F04***SX+4.*F22***SY+4.*P13***TU**

E (9,10)=6.*F13*SY+3.*F04*
E (9,11)=4.*F32*SX+8.*F41*
E (9,12)=3.*F23*SX+2.*F41*SY+7.*P32*
E (9,13)=2.*F14*SX+4.*P32*SY+6.*P23*
E (9,14)=F05*SX+6.*F23*SY+5.*P14*
E (9,15)=8.*F14*SY+4.*F05*
E (9,16)=5.*F42*SX+10.*P51*
E (9,17)=4.*F33*SX+2.*P51*SY+9.*P42*
E (9,18)=3.*F24*SX+4.*P42*SY+8.*P33*
E (9,19)=2.*F15*SX+6.*P33*SY+7.*P24*
E (9,20)=F06*SX+8.*F24*SY+6.*P15*
E (9,21)=10.*F15*SY+5.*F06*
E (10,10)=9.*F04*SY
E (10,11)=12.*P32*
E (10,12)=3.*F32*SY+9.*P23*
E (10,13)=6.*F23*SY+6.*P14*
E (10,14)=9.*F14*SY+3.*P05*
E (10,15)=12.*F05*SY
E (10,16)=15.*F42*
E (10,17)=3.*P42*SY+12.*P33*
E (10,18)=6.*P33*SY+9.*P24*
E (10,19)=9.*F24*SY+6.*P15*
E (10,20)=12.*F15*SY+3.*F06*
E (10,21)=15.*F06*SY
E (11,11)=16.*F60*SX
E (11,12)=12.*F51*SX+4.*F60*
E (11,13)=8.*F42*SX+8.*P51*
E (11,14)=4.*P33*SX+12.*P42*
E (11,15)=16.*F33*
E (11,16)=20.*F70*SX
E (11,17)=16.*F61*SX+4.*P70*
E (11,18)=12.*F52*SX+8.*P61*
E (11,19)=8.*P43*SX+12.*P52*
E (11,20)=4.*F34*SX+16.*P43*
E (11,21)=24.*F34*
E (12,12)=9.*P42*SX+P60*SY+6.*P51*
E (12,13)=6.*F33*SX+2.*P51*SY+8.*P42*
E (12,14)=3.*F24*SX+3.*P42*SY+10.*P33*
E (12,15)=4.*P33*SY+12.*P24*
E (12,16)=15.*F61*SX+5.*P70*
E (12,17)=12.*F52*SX+P70*SY+7.*P61*
E (12,18)=9.*P43*SX+2.*P61*SY+9.*P52*
E (12,19)=6.*P34*SX+3.*P52*SY+11.*P43*
E (12,20)=3.*F25*SX+4.*P43*SY+12.*P34*
E (12,21)=5.*P34*SY+15.*P25*
E (13,13)=4.*F24*SX+4.*P42*SY+8.*P33*
E (13,14)=2.*F15*SX+6.*P33*SY+8.*P24*
E (13,15)=8.*F24*SY+8.*P15*
E (13,16)=10.*F52*SX+10.*P61*
E (13,17)=8.*P43*SX+2.*P61*SY+10.*P52*
E (13,18)=6.*P34*SX+4.*P52*SY+10.*P43*
E (13,19)=4.*F25*SX+6.*P43*SY+10.*P34*
E (13,20)=2.*F16*SX+8.*P34*SY+10.*P25*
E (13,21)=10.*F25*SY+10.*P16*
E (14,14)=F06*SX+9.*P24*SY+6.*P15*
E (14,15)=12.*F15*SY+4.*F06*
E (14,16)=5.*F43*SX+15.*P52*
E (14,17)=4.*P34*SX+3.*P52*SY+13.*P43*
E (14,18)=3.*F25*SX+6.*P43*SY+11.*P34*
E (14,19)=2.*F16*SX+9.*P34*SY+9.*P25*
E (14,20)=F07*SX+12.*F25*SY+7.*P16*
E (14,21)=15.*F16*SY+5.*F07*
E (15,15)=16.*F06*SY
E (15,16)=20.*F43*
E (15,17)=4.*F43*SY+16.*P34*
E (15,18)=8.*P34*SY+12.*P25*
E (15,19)=12.*F25*SY+8.*P16*
E (15,20)=16.*F16*SY+4.*F07*
E (15,21)=20.*F07*SY
E (16,16)=25.*F80*SX
E (16,17)=20.*F71*SX+5.*P80*
E (16,18)=15.*F62*SX+10.*P71*
E (16,19)=10.*F53*SX+15.*P62*
E (16,20)=5.*P44*SX+20.*P53*
E (16,21)=25.*F44*
E (17,17)=16.*F62*SX+P80*SY+8.*P71*
E (17,18)=12.*F53*SX+2.*P71*SY+11.*P62*
E (17,19)=8.*P44*SX+3.*P62*SY+14.*P53*
E (17,20)=4.*F35*SX+4.*P53*SY+17.*P44*
E (17,21)=5.*P44*SY+20.*P35*
E (18,18)=9.*P44*SX+4.*P62*SY+12.*P53*
E (18,19)=6.*F35*SX+6.*P53*SY+13.*P44*
E (18,20)=3.*F26*SX+8.*P44*SY+14.*P35*

PAGE 22 FAIVA

```

E(18,21)=10.*F35*SY+15.*P26*TU
E(19,19)=4.*P26*SX+9.*P44*SY+12.*P35*TU
E(19,20)=2.*F17*SX+12.*P35*SY+11.*P26*TU
E(19,21)=15.*F26*SY+10.*P17*TU
E(20,20)=F08*SX+16.*P26*SY+8.*P17*TU
E(20,21)=20.*F17*SY+5.*F08*TU
E(21,21)=25.*F08*SY
CC 1 I=1,21
CC 1 J=1,21
1 E(J,I)=E(I,J)
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR MINST
COMMON 2646 VARIABLES 158 PROGRAM 5008

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0009 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLF

*SICRE WS LA MINST 0016 0047
CART ID 0047 DE ADDR 5F86 CB CNT 018C

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE FUNEL(PR1)
DIMENSION PR1(66)
COMMON E(21,21),FE(21,21)
F00=PR1(1)
F20=PR1(4)
F11=PR1(5)
F02=PR1(6)
F30=PR1(7)
F21=PR1(8)
F12=PR1(9)
F03=PR1(10)
F40=PR1(11)
F31=PR1(12)
F22=PR1(13)
F13=PR1(14)
F04=PR1(15)
F50=PR1(16)
F41=PR1(17)
F32=PR1(18)
F23=PR1(19)
F14=PR1(20)
F05=PR1(21)
F60=PR1(22)
F51=PR1(23)
F42=PR1(24)
F33=PR1(25)
F24=PR1(26)
F15=PR1(27)
F06=PR1(28)
F70=PR1(29)
F61=PR1(30)
F52=PR1(31)
F43=PR1(32)
F34=PR1(33)
F25=PR1(34)
F16=PR1(35)
F07=PR1(36)
F71=PR1(38)
F80=PR1(37)
F62=PR1(39)
F53=PR1(40)
F44=PR1(41)
F35=PR1(42)
F26=PR1(43)
F17=PR1(44)
F08=PR1(45)
F90=PR1(46)
F81=PR1(47)
F72=PR1(48)
F63=PR1(49)

```

PAGE 23 FAIVA

F54=FR1(50)
P45=PR1(51)
P36=PR1(52)
P27=PR1(53)
P18=PR1(54)
P09=PR1(55)
P100=FR1(56)
P91=PR1(57)
P82=PR1(58)
P73=PR1(59)
P64=PR1(60)
P55=PR1(61)
P46=PR1(62)
P37=PR1(63)
P28=PR1(64)
P19=PR1(65)
P010=FR1(66)
DC 1 J1=1,18
DC 1 J2=1,18
1 FE(J1,J2)=0.0
FE(1,1)=P00
FE(1,4)=P20
FE(1,5)=P11
FE(1,6)=P22
FE(1,7)=P30
FE(1,8)=P21
FE(1,9)=P12
FE(1,10)=P03
FE(1,11)=P40
FE(1,12)=P31
FE(1,13)=P22
FE(1,14)=P13
FE(1,15)=P04
FE(1,16)=P50
FE(1,17)=P41
FE(1,18)=P32
FE(1,19)=P23
FE(1,20)=P14
FE(1,21)=P05
FE(3,3)=P02
FE(3,4)=P21
FE(3,5)=P12
FE(3,6)=P03
FE(3,7)=P31
FE(3,8)=P22
FE(3,9)=P13
FE(3,10)=P04
FE(3,11)=P41
FE(3,12)=P32
FE(3,13)=P23
FE(3,14)=P14
FE(3,15)=P05
FE(3,16)=P51
FE(3,17)=P42
FE(3,18)=P33
FE(3,19)=P24
FE(3,20)=P15
FE(3,21)=P06
FE(4,4)=P40
FE(4,5)=P31
FE(4,6)=P22
FE(4,7)=P50
FE(4,8)=P41
FE(4,9)=P32
FE(4,10)=P23
FE(4,11)=P60
FE(4,12)=P51
FE(4,13)=P42
FE(4,14)=P33
FE(4,15)=P24
FE(4,16)=P70
FE(4,17)=P61
FE(4,18)=P52
FE(4,19)=P43
FE(4,20)=P34
FE(4,21)=P25
FE(5,5)=P22
FE(5,6)=P13
FE(5,7)=P41
FE(5,8)=P32
FE(5,9)=P23
FE(5,10)=P14
FE(5,11)=P51

PAGE 24 FAIVA

FE (5,12) = F42
FE (5,13) = P33
FE (5,14) = P24
FE (5,15) = P15
FE (5,16) = P61
FE (5,17) = P52
FE (5,18) = P43
FE (5,19) = P34
FE (5,20) = P25
FE (5,21) = P16
FE (6,6) = P04
FE (6,7) = P32
FE (6,8) = P23
FE (6,9) = P14
FE (6,10) = P05
FE (6,11) = P42
FE (6,12) = P33
FE (6,13) = P24
FE (6,14) = P15
FE (6,15) = P06
FE (6,16) = P52
FE (6,17) = P43
FE (6,18) = P34
FE (6,19) = P25
FE (6,20) = P16
FE (6,21) = P07
FE (7,7) = P60
FE (7,8) = P51
FE (7,9) = P42
FE (7,10) = P33
FE (7,11) = P70
FE (7,12) = P61
FE (7,13) = P52
FE (7,14) = P43
FE (7,15) = P34
FE (7,16) = P80
FE (7,17) = P71
FE (7,18) = P62
FE (7,19) = P53
FE (7,20) = P44
FE (7,21) = P35
FE (8,8) = P42
FE (8,9) = P33
FE (8,10) = P24
FE (8,11) = P61
FE (8,12) = P52
FE (8,13) = P43
FE (8,14) = P34
FE (8,15) = P25
FE (8,16) = P71
FE (8,17) = P62
FE (8,18) = P53
FE (8,19) = P44
FE (8,20) = P35
FE (8,21) = P26
FE (9,9) = P24
FE (9,10) = P15
FE (9,11) = P52
FE (9,12) = P43
FE (9,13) = P34
FE (9,14) = P25
FE (9,15) = P16
FE (9,16) = P62
FE (9,17) = P53
FE (9,18) = P44
FE (9,19) = P35
FE (9,20) = P26
FE (9,21) = P17
FE (10,10) = P06
FE (10,11) = P43
FE (10,12) = P34
FE (10,13) = P25
FE (10,14) = P16
FE (10,15) = P07
FE (10,16) = P53
FE (10,17) = P44
FE (10,18) = P35
FE (10,19) = P26
FE (10,20) = P17
FE (2,2) = P20
FE (2,3) = P11
FE (2,4) = P30
FE (2,5) = P21

FE(2,6)=F12
FE(2,7)=F40
FE(2,8)=F31
FE(2,9)=F22
FE(2,10)=F13
FE(2,11)=F50
FE(2,12)=F41
FE(2,13)=F32
FE(2,14)=F23
FE(2,15)=F14
FE(2,16)=F60
FE(2,17)=F51
FE(2,18)=F42
FE(2,19)=F33
FE(2,20)=F24
FE(2,21)=F15
FE(10,21)=F08
FE(11,11)=F80
FE(11,12)=F71
FE(11,13)=F62
FE(11,14)=F53
FE(11,15)=F44
FE(11,16)=F90
FE(11,17)=F81
FE(11,18)=F72
FE(11,19)=F63
FE(11,20)=F54
FE(11,21)=F45
FE(12,12)=F62
FE(12,13)=F53
FE(12,14)=F44
FE(12,15)=F35
FE(12,16)=F81
FE(12,17)=F72
FE(12,18)=F63
FE(12,19)=F54
FE(12,20)=F45
FE(12,21)=F36
FE(13,13)=F44
FE(13,14)=F35
FE(13,15)=F26
FE(13,16)=F72
FE(13,17)=F63
FE(13,18)=F54
FE(13,19)=F45
FE(13,20)=F36
FE(13,21)=F27
FE(14,14)=F26
FE(14,15)=F17
FE(14,16)=F63
FE(14,17)=F54
FE(14,18)=F45
FE(14,19)=F36
FE(14,20)=F27
FE(14,21)=F18
FE(15,15)=F08
FE(15,16)=F54
FE(15,17)=F45
FE(15,18)=F36
FE(15,19)=F27
FE(15,20)=F18
FE(15,21)=F09
FE(16,16)=F100
FE(16,17)=F91
FE(16,18)=F82
FE(16,19)=F73
FE(16,20)=F64
FE(16,21)=F55
FE(17,17)=F82
FE(17,18)=F73
FE(17,19)=F64
FE(17,20)=F55
FE(17,21)=F46
FE(18,18)=F64
FE(18,19)=F55
FE(18,20)=F46
FE(18,21)=F37
FE(19,19)=F46
FE(19,20)=F37
FE(19,21)=F28
FE(20,20)=F28
FE(20,21)=F19
FE(21,21)=F010

PAGE 26 PAIVA

```
      DC 2   J1=1,21
      DC 2   J2=J1,21
2     FE(J2,J1)=FE(J1,J2)
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR FUNEL
COMMON 2646 VARIABLES 210 PROGRAM 1918

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0008 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

```
*STCRE      WS  UA  FUNEL
CART ID 0016  DE ADDR 5670  DB CNT  0090
```

// FOR

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE VET1(S18,PRS2,F,C)
      DIMENSION PRS2(66),F(3,18),S18(18),SAUX(21),C(21,21)
      DC 32  J=1,21
      SAUX(J)=0.0
      DC 32  IF=1,21
      SAUX(J)=SAUX(J)+C(IF,J)*PRS2(IF)
32     CONTINUE
      DC 322 I=1,18
      S18(I)=0.0
      DC 321 K=1,3
      S18(I)=S18(I)+F(K,I)*SAUX(K+18)
321    CONTINUE
      S18(I)=S18(I)+SAUX(I)
322    CONTINUE
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR VET1
COMMON 0 VARIABLES 70 PROGRAM 164

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0040 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLP

```
*STCRE      WS  UA  VET1      0016  0047
CART ID 0047  DE ADDR 6112  DB CNT  0000
```

// FOR

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE DET1(N2,DST,INC,DT,EJ,LRS)
      COMMON S(96,36)
      IF(INC)2,1,2
1     IF(S(1,1))9,9,2
2     DST=1.
      DT=S(1,1)
      DC 20  J=2,N2
      II=J-LRS+2
      IF(II-2)3,4,4
3     II=2
4     K1=II-1
      DC 10  I=II,J
      K2=I-1
      DC 10  K=K1,K2
      IA=J-I+1
      IB=I-K+1
      IC=J-K+1
10    S(I,IA)=S(I,IA)-S(K,IB)*S(K,IC)/S(K,1)
      DT=DT*S(J,1)/EJ
      IF(INC)5,5,20
```


PAGE 27 FAIVA

```

5 IF(S(J,1))6,6,20
20 CONTINUE
GC TC 11
6 IF(J-N2)9,7,7
7 IF(S(J,1))9,8,8
8 CST=0.0
GC TC 11
9 CST=-1.
11 AA=0.0
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR DET1
COMMON 10368 VARIABLES 16 PROGRAM 248

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0018 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUF

*STORE WS UA DET1
CART ID 0016 DE ADDR 5700 DB CNT CC11

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE REST1(NREST,IR,IRES,NELAS,IE,KML,B,LBS)
REAL MR(96,36),KML(30,3)
DIMENSION IR(30),IE(30),IRES(30,6),B(150)
COMMON MR
77 IF(NREST)77,78,77
DC 160 I=1,NREST
KIR=IR(I)
IZ=6*KIR-5
IX=IZ+1
IY=IZ+2
IXX=IZ+3
IXY=IZ+4
IYY=IZ+5
IA=LBS-1
NZ=IZ-IA
NX=IX-IA
NY=IY-IA
NXX=IXX-IA
NXY=IXY-IA
NYY=IYY-IA
150 IF(IRES(KIR,1)-1)140,150,150
19 IF(IZ-LBS)19,19,21
JI=IZ
NZ=1
GC TC 155
21 JI=LBS
155 DC 173 IJ=NZ,IZ
MR(IJ,JI)=0.0
173 JI=JI-1
DC 171 JJ=1,LBS
171 MR(IZ,JI)=0.0
MR(IZ,1)=1.
B(IZ)=0.
140 IF(IRES(KIR,2)-1)35,170,170
170 IF(IX-LBS)31,31,32
31 JI=IX
NX=1
GC TC 33
32 JI=LBS
33 DC 174 IJ=NX,IX
MR(IJ,JI)=0.0
174 JI=JI-1
DC 180 JJ=1,LBS
180 MR(IX,JI)=0.0
MR(IX,1)=1.0
B(IX)=0.0
35 IF(IRES(KIR,3)-1)1,2,2
2 IF(IY-LBS)3,3,4
3 JI=IY
NY=1

```

PAGE 28 FAIVA

```

GC TC 5
4  JI=LBS
5  DC 6  IJ=NY,IY
   MR(IJ,JI)=0.0
6  JI=JI-1
   DC 7  JJ=1,LBS
7  MR(IY,JJ)=0.0
   MR(IY,1)=1.0
   B(IY)=0.0
1  IF(IRES(KIR,4)-1)8,9,9
9  IF(IXX-LBS)10,10,11
10 JI=IXX
   NXX=1
   GC TC 12
11 JI=LBS
12 DC 13  IJ=NXX,IXX
   MR(IJ,JI)=0.0
13 JI=JI-1
   DC 14  JJ=1,LBS
14 MR(IXX,JJ)=0.0
   MR(IXX,1)=1.0
   B(IXX)=0.0
8  IF(IRES(KIR,5)-1)15,16,16
16 IF(IXY-LBS)17,17,18
17 JI=IXY
   NXY=1
   GC TC 36
18 JI=LBS
36 DC 20  IJ=NXY,IXY
   MR(IJ,JI)=0.0
20 JI=JI-1
   DC 37  JJ=1,LBS
37 MR(IXY,JJ)=0.0
   MR(IXY,1)=1.0
   B(IXY)=0.0
15 IF(IRES(KIR,6)-1)22,23,23
23 IF(IYY-LBS)24,24,25
24 JI=IYY
   NYI=1
   GC TC 26
25 JI=LBS
26 DC 27  IJ=NYI,IYY
   MR(IJ,JI)=0.0
27 JI=JI-1
   DC 28  JJ=1,LBS
28 MR(IYY,JJ)=0.0
   MR(IYY,1)=1.0
   B(IYY)=0.0
22 CONTINUE
160 CONTINUE
78 IF(NELAS)41,41,42
42 DC 80  I=1,NELAS
   KIE=IE(I)
   IZ=6*KIE-5
   IX=IZ+1
   IY=IZ+2
   MR(IZ,1)=MR(IZ,1)+KML(KIE,1)
   MR(IX,1)=MR(IX,1)+KML(KIE,2)
   MR(IY,1)=MR(IY,1)+KML(KIE,3)
80 CONTINUE
41 CONTINUE
DC 600  I=1,24
600 WRITE(5,601)(MR(I,J),J=1,24)
601 FORMAT(24(1X,F4.1))
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CCRE REQUIREMENTS FOR REST1
CCMCA 10368 VARIABLES 28 PROGRAM 930

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 002E (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA REST1
CART ID 0016 LB ADDR 5711 DB CNT 003B

PAGE 29 PAIVA

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*CNE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE SOLVE(N, LB, B, KS)
DIMENSION E(150)
COMMON U(96,36)
DC 2 I=1, N
AUX=E(I)
NF=I-LB+1
NG=I-1
IF(NF-1)1,3,3
1 NF=1
3 IF(NF-NG)5,5,2
5 DC 4 J=NF, NG
K=I-J+1
4 AUX=AUX-U(J,K)*E(J)
2 E(I)=AUX*U(I,1)
DC 6 L=1, N
I=N-L+1
AUX=E(I)
NF=I+LB-1
NG=I+1
IF(NF-N)7,7,9
9 NF=N
7 IF(NG-NF)11,11,6
11 DC 8 J=NG, NF
K=J-I+1
8 AUX=AUX-U(I,K)*E(J)
6 E(I)=AUX*U(I,1)
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
CNE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR SOLVE
COMMON 10368 VARIABLES 12 PROGRAM 248

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0000 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA SLLVE
CARD ID 0016 DE ADDR 5740 DB CNT 0011

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*CNE WORD INTEGERS
SUBROUTINE DECCN(N, LB, KS)
COMMON A(96,36)
KS=0
DC 2 I=1, N
NF=N-I+1
IF(LB-NF)1,3,3
1 NF=LB
3 DC 2 J=1, NF
AUX=A(I,J)
NG=LB-J
IF(NG-I+1)5,5,7
7 NG=I-1
5 IF(NG)9,9,11
11 DC 4 K=1, NG
IK=I-K
JK=J+K
K1=K+1
4 AUX=AUX-A(IK,K1)*A(IK,JK)
9 IF(J-1)13,13,15
13 IF(AUX)17,17,19
19 TEMP=1.0/SGRT(AUX)
A(I,J)=TEMP
GC TC 2
15 A(I,J)=AUX*TEMP
2 CONTINUE
GC TC 6
17 KS=1
6 RETURN
END

```

PAGE 30 FAIVA

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR DECCN
 COMMON 10368 VARIABLES 16 PROGRAM 210

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0015 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLF

*STORE WS UA DECCN
 CART ID 0016 DB ADDR 575D DB CNT 000E

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS
 *EXTENDED PRECISION

```

SUBROUTINE MCNG1(NP,N,R,S,NNCS,NVARN)
REAL MR(96,36),MI(96,36)
DIMENSION NF(50,3),R(18,18),S(18,18)
COMMON MR,MI,PSI(18,18)
DO 820 I=1,NNCS
L=NP(N,I)
NLG=NVARN*L-(NVARN-1)
DO 810 J=1,NNCS
K=NP(N,J)
NCG=NVARN*K-(NVARN-1)
DO 830 II=1,NVARN
NUMLL=NVARN*(I-1)+II
NUMLG=(NLG-1)+II
DO 840 JJ=1,NVARN
NUMCL=NVARN*(J-1)+JJ
NUMCG=NCG-1+JJ
IF (NUMCG-NUMLG)840,20,20
20 KI=NUMCG-NUMLG+1
MI(NUMLG,KI)=MI(NUMLG,KI)+S(NUMLL,NUMCL)
MR(NUMLG,KI)=MR(NUMLG,KI)+R(NUMLL,NUMCL)
840 CONTINUE
830 CONTINUE
810 CONTINUE
820 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR MCNG1
 COMMON 21708 VARIABLES 18 PROGRAM 226

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0013 (HEX)

END OF COMPILATION

// DLF

*STORE WS UA MCNG1
 CART ID 0016 DB ADDR 576E DB CNT 000F

// FOR

*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS
 *EXTENDED PRECISION

*NAME PRCG1

```

DEFINE FILE 12(3,320,U,KJ),13(4,320,U,KW),14(10,320,U,KQ)
DEFINE FILE 15(6,320,U,KV)
DEFINE FILE 50(10,320,U,KA)
INTEGER CFAU1(6,11),CFAU2(6,10)
REAL KML(30,3)
DIMENSION IXAU1(6,11),IXAU2(6,10),IYAU1(6,11),IYAU2(6,10)
DIMENSION CF(18,21),IEX(18,21),IEY(18,21),NOME(40),IKES(30,6)
DIMENSION NF(50,3),ITIPC(50),NTP(14),EP(50,3),IR(30),IE(30)
DIMENSION XCRD(50),YCRD(50),IPERM(3),LNUBO(30,10),ANGLE(20)
DIMENSION PCAR(30,2),CD(30,3),ITC(20),NTC(6),EPI(50,3)
DIMENSION CFE(30),INC(30)
DIMENSION SVAR(18,9)
DATA IPERM/2,3,1/

```

PAGE 31 FAIVA

```

DATA CFAU1/1,5*1,2*1,4*0,1,0,1,3*0,1,2,0,2,2*0,3*1,0,1,0,1,0,2,2*0
*,2,1,3,0,6,2*0,1,2,1,2*2,0,1,1,2,0,2*2,1,0,3,2*0,6,1,4,0,12,2*0/
DATA CFAU2/1,3,1,6,3,0,1,3*2,4,2,2*1,3,0,3,6,1,0,4,2*0,12,1,5,0,20
*,2*0,1,4,1,12,4,0,1,3,2,2*6,2,1,2,3,2,6,6,2*1,4,0,4,12,1,0,5,2*0,2
*/
DATA IXAU1/6*0,1,11*0,2,1,4*0,1,0,1,5*0,3,2,0,1,2*0,2,1,2,0,1,0,1,
*0,1,0,0,1,6*0,4,3,0,2,0,0/
DATA IXAU2/3,2,3,1,2,0,2,1,2,0,1,2,1,0,1,0,0,1,6*0,5,4,0,3,0,0,4,3
*,4,2,3,0,3,2,3,1,2,3,2,1,2,0,1,2,1,0,1,0,0,1,6*0/
DATA IYAU1/12*0,1,11*0,1,1,4*0,2,0,1,9*0,1,1,0,1,0,0,2,2,1,0,1,0,3
*,0,2,0,0,1,6*0/
DATA IYAU2/1,1,0,1,0,0,2,2,1,2,1,0,3,3,2,0,2,1,4,0,3,0,0,2,6*0,1,1
*,0,1,0,0,2,2,1,2,1,0,3,3,2,3,2,1,4,4,3,0,3,2,5,0,4,0,0,3/

```

```

DC 1981 I=1,6
DC 1981 J=1,21
I6=I+6
I12=I+12

```

```

1982 IF(J-11)1982,1982,1982
CF(I,J)=FLCAT(CFAU1(I,J))
IEX(I,J)=IXAU1(I,J)
IEY(I,J)=IYAU1(I,J)
CF(I6,J)=FLCAT(CFAU1(I,J))
IEX(I6,J)=IXAU1(I,J)
IEY(I6,J)=IYAU1(I,J)
CF(I12,J)=FLCAT(CFAU1(I,J))
IEX(I12,J)=IXAU1(I,J)
IEY(I12,J)=IYAU1(I,J)
GC TC 1981

```

```

1983 L=J-11
CF(I,J)=FLCAT(CFAU2(I,L))
IEX(I,J)=IXAU2(I,L)
IEY(I,J)=IYAU2(I,L)
CF(I6,J)=FLCAT(CFAU2(I,L))
IEX(I6,J)=IXAU2(I,L)
IEY(I6,J)=IYAU2(I,L)
CF(I12,J)=FLCAT(CFAU2(I,L))
IEX(I12,J)=IXAU2(I,L)
IEY(I12,J)=IYAU2(I,L)

```

```

1981 CCNTINUE
WRITE(15,1)CF,IEX,IEY
DC 100 I=1,3
DC 100 J=1,3
PCAR(I,J)=0.0
100 CCNTINUE

```

```

C-----
C-----
C-----PRIMEIRO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----

```

```

READ(2,40)(NCME(I),I=1,40)
40 FCRMAT(40A1)
WRITE(5,41)(NCME(I),I=1,40)
41 FCRMAT(///,20X,80(' '),/,40X,20(' '),40A1,20(' '),/,20X,80(' '),/)

```

```

C-----
C-----
C-----SEGUNDO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----

```

```

READ(2,1)M,NREST,NELAS,NPN,NTIPO,NELBO,NANG,NNC,NEC,NETC,NEFE,ISKE
*,ISVAR,PCI,E
1 FCRMAT(13I2,4X,F5.2,F10.1)

```

```

C-----
C-----
C-----TERCEIRO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----

```

```

READ(2,2)IIF,IPRES,IPERF,FAT,BETA,SX,SY,TU
2 FCRMAT(3I1,F7.3,4F10.3)

```

```

C-----
C-----
C-----QUARTO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----

```

```

READ(2,59)(NTP(I),I=1,14)
59 FCRMAT(14I2)
IF(NETC)89,88,89

```

```

C-----
C-----
C-----QUINTO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----

```

```

89 READ(2,111)(NTC(I),I=1,6)
111 FCRMAT(6I2)

```

PAGE 32 PAIVA

C-----
C-----
C-----
C-----
C-----

```

88 DC 3 J=1,M
3 REAC(2,4)N,ITIPC(N),(NP(N,I),I=1,3),ITC(N),CFE(N),(EP(N,I),I=1,3),
  *(CD(N,I),I=1,3)
4 FCRMAT(6I2,F8.2,6F10.5)
  WRITE(5,8)M,AREST,NELAS,E,NPN,NELBO,NNC,NEC
8 FCRMAT(//,10X,'NUMERO DE ELEMENTOS FINITOS',16X,I2,/,10X,'NUMERO
  DE RESTRICCOES DE APLIC',14X,I2,/,10X,'NUMERO DE APOIOS COM VIMEN
  2TCS ELASTICOS---',I2,/,10X,'MODULO DE ELASTICIDADE',13X,F15.0,/,
  310X,'NUMERO DE PONTOS NODAIS',20X,I2,/,10X,'NUMERO DE ELEMENTOS
  *NA BORCA',15X,I2,/,10X,'NUMERO DE NOS COM CARREGAMENTO',13X,I2,/,
  *,10X,'NUMERO DE ELEMENTOS COM CARGA DISTRIBUIDA',2X,I3)
  WRITE(5,77)PCI
77 FCRMAT(//,10X,'COEFICIENTE DE POISSON',20X,F5.3,/)
  IF(ISKEW)50,51,50

```

C-----
C-----
C-----
C-----
C-----

```

50 WRITE(5,52)NANG
52 FCRMAT(//,10X,'NUMERO DE LACOS ESCONSOS',19X,I2,/)
51 IAR=0
  NE=6*NPN
  WRITE(5,60)
60 FCRMAT(37X,'EXP. DOS ELEMENTOS',6X,'CARGA DISTRIBUIDA',/,10X,'ELEM
  *ENTO ITIPC I J K EXP1 EXP2 EXP3 CAR1 CAR2 CAR3 ',
  *5X,'CARR-TIPC')
  MAXFC=6
  DC 6 I=1,M
6 WRITE(5,7)I,ITIPC(I),(NP(I,N),N=1,3),(EP(I,N),N=1,3),(CD(I,J),J=1,
  *3),ITC(I)
7 FCRMAT(//,13X,I2,8X,I2,2X,I2,2I3,3X,3(F4.2,2X),4X,3(F5.2,2X),7X,I2)
  IF(ISVAR)70,71,70
71 WRITE(5,1222)SX,SY,TU
1222 FCRMAT(//,2X,'ESTADO DE TENSOES CONSTANTE EM TODA FOLHA',/,20X,'S
  *X=',F10.5,20X,'SY=',F10.5,20X,'TXY=',F10.5,/)
  GC TC 1223
70 WRITE(5,87)
87 FCRMAT(2X,'TENSAO VARIAVEL NO ELEMENTO',/,2X,'ELEMENTO I J
  * K ',12X,'NO 1',29X,'NO 2',30X,'NO 3',/,30X,'SX',10X,'SY',9X,'TX
  * ',10X,'SX',10X,'SY',10X,'TU',10X,'SX',10X,'SY',10X,'TU',/)

```

C-----
C-----
C-----
C-----
C-----

```

DC 48 I=1,M
75 REAC(2,75)(SVAR(I,J),J=1,9)
  FCRMAT(9F8.3)
  WRITE(5,76)I,(NP(I,J),J=1,3),(SVAR(I,J),J=1,9)
76 FCRMAT(//,3X,I2,8X,3(I2,2X),4X,9(F8.4,4X))
48 CONTINUE
1223 CONTINUE
  IF(NEFE)63,63,64
64 WRITE(5,67)
67 FCRMAT(//,10X,'PLACA COM FUNDACAO ELASTICA',/,10X,'ELEMENTO',20X,
  *'CONSTANTE ELASTICA',20X,'ELEMENTO-TIPO',/)
  DC 73 I=1,M
73 WRITE(5,74)I,CFE(I),ITIPC(I)
74 FCRMAT(14X,I2,26X,F8.3,31X,I2)
63 CONTINUE

```

C-----
C-----
C-----
C-----
C-----

```

DC 80 N=1,NELEC
80 REAC(2,81)(LACBC(N,K),K=1,10)
81 FCRMAT(10I2)
  WRITE(5,82)
82 FCRMAT(1H0,'INFORMACOES SOBRE BORDAS,NO CASO DE ESCONSIDADE F/OU C
  *ONDICCOES DE CONTORNO')
  *1H0,'ELEMENTOS NA BORCA',24X,'ENDERECO DOS ANGULOS'
  *2X,'TIPOS DE PARAMETROS NODAIS'
  */1H0,4X,'ELEMENTOS',22X,'NO 1 NO 2 NO 3',1X,'ANG 1 ANG 2 ANG
  * 3',4X,'AC 1 AC 2 AC 3'//)
  WRITE(5,83)((LACBC(K,J),J=1,10),K=1,NELBO)
83 FCRMAT(1H0,I9,I29,3I6,2I8,3I7)

```

PAGE 33 FAIVA

```

IF (ISKEW) 300, 301, 301
301 WRITE (5, 302)
302 FCRMAT (///, 10X, 14 ('*'), 'PLACA ESCONSA', 14 ('*'), ///)
WRITE (5, 90)
90 FCRMAT (///, 10X, 'ANGULOS QUE DEFINEM AS ESCONSIDADES', ///)
C-----
C-----
C-----DECIMO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----
DC 777 NA=1, NANG
READ (2, 800) ANGLE (NA)
800 FCRMAT (F10.7)
WRITE (5, 301) NA, ANGLE (NA)
801 FCRMAT (///, 10X, 'ANGLE (' , I2, ') = ', F10.7, 2X, 'RADIANS')
777 CONTINUE
300 WRITE (5, 45)
45 FCRMAT (///, 10X, 'ELEMENTO TIPO', 10X, 'ELEMENTO')
DC 46 IN=1, NTIPC
46 WRITE (5, 47) IN, NTP (IN)
47 FCRMAT (/ , 10X, I2, 22X, I2)
IF (NEC) 92, 91, 92
92 WRITE (5, 99)
99 FCRMAT (///, 10X, 'CARREGAMENTO TIPO', 10X, 'ELEMENTO')
DC 98 I=1, NITC
98 WRITE (5, 97) I, NITC (I)
97 FCRMAT (/ , 17X, I2, 17X, I2)
C-----
C----- DETERMINACAO DA LARGURA DE BANDA
C-----
91 IF (NAC) 55, 54, 55
55 WRITE (5, 56)
56 FCRMAT (/ , 10X, 'CARREGAMENTO NOS NOS', / , 10X, 'NO', 10X, 'PZ', 10X, 'MX', 1
*0X, 'MY', ///)
C-----
C-----
C-----DECIMO PRIMEIRO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----
DC 57 N=1, NAC
READ (2, 58) J, (PCAR (N, I), I=1, 3)
58 FCRMAT (I2, 8X, 3 (F7.3, 3X))
INC (N) = J
57 WRITE (5, 69) J, (PCAR (N, I), I=1, 3)
69 FCRMAT (/ , 10X, I2, 9X, 3 (F7.3, 3X))
54 K=0
C-----
C-----CALCULO DA LARGURA DA SEMI BANDA
C-----
DC 9 N=1, M
DC 9 I=1, 2
K1=NF (N, I)
IF (K1) 9, 9, 10
10 I9=I+1
DC 11 J=19, 3
K2=NF (N, J)
IF (K2) 11, 11, 12
12 KM=IAES (K2-K1)
IF (KM-K) 13, 13, 14
14 K=KM
13 IF (KM-MAXPC) 11, 11, 15
15 WRITE (5, 16) MAXPC, N
16 FCRMAT (///, 40X, 'MAXIMA DIFERENCA ENTRE PONTOS NODAIS=', I2, 'FCI ULTR
1 A PASSADA AO ELEMENTO=', I2, ///)
IAR=1
GC TC 1000
11 CONTINUE
9 CONTINUE
LES=6*K+6
WRITE (5, 17) LES
17 FCRMAT (/ , 10X, 'LARGURA DA SEMI BANDA', I5, /)
C-----
C-----
C-----DECIMO SEGUNDO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----
WRITE (5, 18)
18 FCRMAT (/ , 10X, 'COORDENADAS DOS VERTICES', / , 10X, 'NO', 20X, 'XORD', 20X
1, 'YORD', /)
DC 19 N=1, NFN
READ (2, 20) J, XCRD (J), YCRD (J)
20 FCRMAT (I2, 8X, 2F10.4)
19 WRITE (5, 21) J, XCRD (J), YCRD (J)

```

PAGE 34 FAIVA

```

21  FORMAT(/,10X,I2,16X,F10.4,14X,F10.4)
C-----
C-----
C-----DECIMO TERCEIRO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----
      IF(NREST)22,22,23
23  WRITE(5,1001)
1001 FORMAT(/,3X,'CONDICIONES DE CONITORNO',/)
      WRITE(5,24)
24  FORMAT(/,10X,'NC',5X,'RESTZ',5X,'RESTX',5X,'RESTY',5X,'RESXX',5X,'
*RESXY',5X,'RESYY')
      DC 25 K=1,NREST
      REAL(2,26)J,(IRES(J,I),I=1,6)
26  FORMAT(I2,6I1)
      IR(K)=J
25  WRITE(5,27)J,(IRES(J,I),I=1,6)
27  FORMAT(//,10X,I2,7X,I1,6(9X,I1))

```

```

C-----
C-----
C-----DECIMO CUARTO CONJUNTO DE DADOS
C-----
C-----

```

```

22  IF(NELAS)28,28,29
29  WRITE(5,30)
30  FORMAT(/,10X,'NC',20X,'KZ',20X,'KX',20X,'KY')
      DC 31 K=1,NELAS
      REAL(2,32)J,(KML(J,I),I=1,3)
32  FORMAT(I2,8X,3F10.4)
      IE(K)=J
31  WRITE(5,33)J,(KML(J,I),I=1,3)
33  FORMAT(/,10X,I2,16X,F10.4,12X,F10.4,12X,F10.4)

```

```

C-----
C-----
C-----TESTE SOBRE OS ELEMENTOS
C-----

```

```

28  DC 34 I=1,M
      J=NP(I,1)
      K=NF(I,2)
      L=NP(I,3)
      AR=0.5*(XCRC(J)*(YCRC(K)-YORD(L))+XORD(K)*(YORD(L)-YORD(J))+XORD(
*L)*(YCRC(J)-YCRC(K)))
      IF(AR)35,35,34
35  WRITE(5,36)I
36  FORMAT(///,40X,'AREA NEGATIVA NO ELEMENTO',I2,/)
      IAR=1
34  CONTINUE
      DC 180 N=1,M
      DC 180 L=1,3
      EF1(N,L)=(E*EF(N,L)**2)/(12.*(1.-POI**2))
180  CONTINUE
      WRITE(12'1)NP,LNCEC,ANGLE,ITIPC,M,NTP,NIPO,ISKEW,NELBO,NE,LBS,PCI
*,PCAR,MNC,NEC,INC,BETA
      WRITE(13'1)IRES,KML,EP,IR,IE,IIP,IPRES,NE,LBS,NREST,NELAS,FAT,SX,
*SY,IU,E,BETA
      WRITE(14'1)YCRC,XCRC,NTP,NP,NTIPG,SX,SY,TU,POI,PCAR,CD,NTC,NETC,M,
*EF1,ITC,ITIPC,EP,CPE,SVAR,ISVAR,NEFE
      WRITE(50'1)NF,LNCEC,ITIPC,M,NE,NELBO,IPERF,EP,ANGLE,XORD,YORD,PCI,
*,E,ISKEW,NREST,IR,IE,KML,NELAS,IRES,NPN,LBS
1000 CALL EXIT
      END

```

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
ICCS

```

```

CORE REQUIREMENTS FOR PROCI
COMMON      0  VARIABLES      5890  PROGRAM      3076

```

END OF COMPILATION

// DLP

```

*STORE      WS  UA  PROG1
CART ID 0016  DE ADDR 577A  DB CNT  0103

```

```

// FCK
*LIST SOURCE PROGRAM
*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPERWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*NAME  PROG2
      DEFINE FILE 2(2,18,U,I2),3(2,30,U,I3),4(2,45,U,I4),5(2,63,U,I5),

```



```

*6(2,84,U,16),7(2,108,U,17),8(2,135,U,18),1(2,9,U,11)
DEFINE FILE 14(10,320,U,KJ),15(6,320,U,KV),20(36,320,U,K4)
DEFINE FILE 25(36,320,U,KN),40(50,54,U,1W)
DEFINE FILE 9(2,165,U,IS),10(2,198,U,11C)
DIMENSION C(21,21),G(21,18),A(21,21),X(3),Y(3),SK(18,21),SL(18,21)
DIMENSION F(171),S(171),SENG(3),COSU(3),H(3,18),IPERM(3),KR(66),EP
*1(50,3),NTC(6),PCAR(30,3),CD(30,3),PCAR1(3),D(3),PRS2(66),ITIPC(50
*) ,EP(50,3),EP2(3)
DIMENSION KS(66),FRS(66),NP(50,3),NTP(14),XORD(50),YORD(50),XLC(6)
DIMENSION YLC(6),KCF(66),KE(3,66),ITC(30),S1(18),S18(18),PRS1(66)
DIMENSION PRS3(66)
DIMENSION CFE(30)
DIMENSION SVAR(18,9),AE(21,21)
DIMENSION P4(66),P5(66),P6(66)
COMMON F(21,21),FE(21,21)
DATA IPERM/2,3,1/
DATA S1/18*0.0/
DATA KR/1,1,0,2,1,0,3,2,1,0,4,3,2,1,0,5,4,3,2,1,0,6,5,4,3,2,1,0,7,
*6,5,4,3,2,1,0,8,7,6,5,4,3,2,1,0,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0,10,9,8,7,6,5,4
*,3,2,1,0/
DATA KS/0,0,1,0,1,2,0,1,2,3,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,6,0,
*1,2,3,4,5,6,7,0,1,2,3,4,5,6,7,8,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,1,2,3,4,5,6,
*7,8,9,10/
READ(14'1')YORD,XORD,NTP,NP,NTIPO,SX,SY,TU,POI,PCAR,CD,NTC,NETC,M,
*EP1,ITC,ITIPC,EP,CFE,SVAR,ISVAR,NEFE
IRIS=10
IF(NEFE)61,61,60
60 KK=66
CC TC 62
61 KK=45
62 CCNTINUE
DC 200 I=1,IRIS
NN=(I+1)*(I+2)/2
L=I
IL=I
CALL CCEF(KCF,L,NN)
CALL EXPS(KE,IL)
WRITE(I'1')(KCF(J),J=1,NN)
WRITE(I'2')((KE(K,J),J=1,NN),K=1,3)
200 CCNTINUE
DC 20 JI=1,NTIPC
N=NTP(JI)
DC 30 J=1,3
K1=NP(N,J)
PCAR1(J)=CD(N,J)
EP2(J)=EP(N,J)
D(J)=EP1(N,J)
X(J)=XORD(K1)
Y(J)=YORD(K1)
30 CCNTINUE
CALL CCLCC(X,Y,IPERM,XLC,YLC)
AREA=0.
DC 10 I=1,3
J=IPERM(I)
K=IPERM(J)
10 AREA=AREA+XLC(I)*(YLC(J)-YLC(K))
CALL MATC(C,X,Y,XLC,YLC,SENG,COSU,IPERM)
CALL INVP(C,21)
CALL MATRH(X,Y,SENG,COSU,F,IPERM)
CALL FCLIN(KK,KR,KS,XLC,YLC,AREA,PRS,PRS1,D,EP2,PRS3,P4,P5,P6,ISVA
*R,PCAR1,PRS2)
IF(NETC)15,44,15
15 CC 40 I=1,NETC
I3=I
N1=NTC(I)
IF(ITIPC(N1)-JI)40,42,40
40 CCNTINUE
CC TC 44
42 CALL VETI(S18,PRS2,F,C)
DC 45 KE=1,M
IF(ITC(KD)-ITC(N1))45,46,45
46 WRITE(40'KD')(S18(J1),J1=1,18)
45 CCNTINUE
C-----
44 DC 320 I=1,21
DC 320 J=1,18
G(I,J)=C(I,J)
DC 320 K=1,3
320 G(I,J)=G(I,J)+C(I,K+18)*F(K,J)
CALL RIGP(FRS,POI,A)
IF(ISVAR)21,22,21
22 CALL MINST(SX,SY,TU,PRS1)
CC TC 31

```

```

PAGE 36 PAIVA
21 DC 23 I=1,21
    DC 23 J=1,21
23 AE(I,J)=0.0
    SX=SVAR(N,1)
    SY=SVAR(N,2)
    TU=SVAR(N,3)
    CALL MINST(SX,SY,TU,P4)
    DC 24 I=1,21
    DC 24 J=1,21
24 AE(I,J)=AE(I,J)+E(I,J)
    SX=SVAR(N,4)
    SY=SVAR(N,5)
    TU=SVAR(N,6)
    CALL MINST(SX,SY,TU,P5)
    DC 25 I=1,21
    DC 25 J=1,21
25 AE(I,J)=AE(I,J)+E(I,J)
    SX=SVAR(N,7)
    SY=SVAR(N,8)
    TU=SVAR(N,9)
    CALL MINST(SX,SY,TU,P6)
    DC 26 I=1,21
    DC 26 J=1,21
26 E(I,J)=E(I,J)+AE(I,J)
31 CCNTINUE
    IF(CFE(N))52,52,53
53 CALL FUNEL(PKS3)
    DC 51 I=1,21
    DC 51 J=1,21
    FE(I,J)=CFE(N)*FE(I,J)
    A(I,J)=A(I,J)+FE(I,J)
51 CCNTINUE
52 CCNTINUE
    DC 210 I=1,18
    DC 210 J=1,21
    SL(I,J)=0.0
    SK(I,J)=0.0
    DC 210 K=1,21
    SL(I,J)=SL(I,J)+C(K,I)*E(K,J)
210 SK(I,J)=SK(I,J)+C(K,I)*A(K,J)
    IJ=0
    DC 420 I=1,18
    DC 420 J=1,18
    IF(I-J)410,410,420
410 IJ=IJ+1
    S(IJ)=0.
    F(IJ)=0.
    DC 430 K=1,21
    S(IJ)=S(IJ)+SL(I,K)*C(K,J)
430 F(IJ)=F(IJ)+SK(I,K)*C(K,J)
420 CCNTINUE
    IC=2*IJ-1
    WRITE(20,IC)(F(IM),IM=1,171)
    WRITE(25,IC)(S(IM),IM=1,171)
20 CCNTINUE
    DC 47 K2=1,M
    IF(ITC(K2))47,40,47
48 WRITE(40,K2)(S1(J3),J3=1,18)
47 CCNTINUE
    CALL EXIT
    END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR PROG2
COMMON 2646 VARIABLES 13284 PROGRAM 1296

END OF COMPILATION

// DLP

*STORE WS LA PROG2
CARD ID 0016 DE ADDR 5870 DB CNT 0079

// FOR
*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYFEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*NAME PROG3

PAGE 37 PAIVA

```

DEFINE FILE 30(40,288,U,KA),35(40,288,U,KB),20(36,320,U,K4),
*45(2,320,U,K0)
DEFINE FILE 25(36,320,U,K5),12(3,320,U,KJ),40(50,54,U,IW)
DEFINE FILE 60(40,288,U,KT)
REAL MR(96,36),MI(96,36)
DIMENSION ANGLE(20),NP(50,2),F(171),S(171),FL(18,18)
DIMENSION SL(18,18),ITIPC(50),LNOCB(30,10),NTP(14)
DIMENSION SAUX(18),S18(18),STRS(150),PCAR(30,3)
DIMENSION INC(3)
COMMON MR,MI,PSI(18,18)
DATA STRS/150*0.0/
READ(12'1)NP,LNOCB,ANGLE,ITIPC,M,NTP,NTIPO,ISKEW,NELBO,NE,LBS,PCI,
*PCAR,NNC,NEC,INC,BETA

```

```

C-----
C-----MCS-NUMERO DE MCS DO ELEMENTO
C-----
C-----MVARN-NUMERO DE VARIÁVEIS POR NO DO ELEMENTO
C-----

```

```

MCS=3
MVARN=6
DC 3 JM=1,NE
DC 3 JL=1,LES
MR(JM,JL)=0.1
MI(JM,JL)=0.0
3 CONTINUE
DC 40 IT=1,NTIPC
KI=NTP(IT)
NR=2*IT-1
READ(20'NR)(F(IJ),IJ=1,171)
READ(25'NR)(S(IJ),IJ=1,171)

```

```

C-----
C-----RECUPERACAO DAS MATRIZES
C-----

```

```

IJ=0
DC 99 I=1,18
DC 99 J=1,18
IF(I-J)320,320,210
320 IJ=IJ+1
FL(I,J)=F(IJ)
SL(I,J)=S(IJ)
GC TC 99
210 SL(I,J)=SL(J,I)
FL(I,J)=FL(J,I)
99 CONTINUE
IX=0
DC 30 KI=1,M
IF(ITIPC(KI)-ITIPC(KI))30,20,30
20 IF(IX)909,60,909
60 LINHA=0
DC 912 IA=1,NELEC
IF(LNOCB(IA,1)-KI)912,911,912
911 LINHA=IA
GC TC 913
912 CONTINUE
913 IF(LINHA)909,909,914
914 IF(ISKEW)916,916,915
915 CALL TSKEW(LINHA,LNOCB,ANGLE)
CALL PREF1(SL)
CALL PREF1(FL)
916 DC 630 I=8,10
IF(LNOCB(LINHA,I))650,630,650
630 CONTINUE
GC TC 909
650 CALL TFREI(LINHA,LNOCB,PCI)
CALL PREF1(FL)
CALL PREF1(SL)
909 CALL MONGI(MR,KI,FL,SL,ANOS,MVARN)
IX=IX+1
30 CONTINUE
40 CONTINUE
WRITE(30'1)MR
WRITE(35'1)MI
DC 1002 I=1,NE
DC 1002 J=1,LES
1002 MR(I,J)=MR(I,J)+BETA*MI(I,J)
WRITE(60'1)MR
IF(NEC)11,12,11
11 DC 6 N=1,M
READ(40'N)S18
DC 900 IA=1,NELEC
IF(LNOCB(IA,1)-N)900,910,900
910 LINHA=IA
GC TC 930

```

PAGE 38 FAIVA

```

900 CONTINUE
930 IF (LINFA)950,950,940
940 IF (ISKEW)960,960,970
C-----
970 CALL TSKE1(LINFA,LNCEC,ANGLE)
C-----
      DC 800 IG=1,18
      SAUX(IG)=0.0
      DC 800 IF=1,18
800 SAUX(IG)=SAUX(IG)+PSI(IF,IG)*S18(IF)
      DC 810 L=1,18
810 S18(L)=SAUX(L)
960 DC 980 I=8,10
      IF (LNCEC(LINFA,I))990,980,990
980 CONTINUE
      GC TC 950
990 CALL IPRE1(LINFA,LNCEC,PCI)
      DC 850 IC=1,18
      SAUX(IC)=0.0
      DC 850 IF=1,18
850 SAUX(IC)=SAUX(IC)+PSI(IF,IC)*S18(IF)
      DC 860 L=1,18
860 S18(L)=SAUX(L)
950 CONTINUE
      DC 6 I=1,3
      K=NF(N,I)
      DC 6 J=1,6
      IE=6*(I-1)+J
      IG=6*(K-1)+J
      STRS(IG)=STRS(IG)+S18(IE)
6 CONTINUE
12 IF (NMC)13,14,13
13 DC 7 I=1,NMC
      K=INC(I)
      I1=6*K-5
      I2=I1+1
      I3=I1+2
      STRS(I1)=PCAR(K,1)+STRS(I1)
      STRS(I2)=PCAR(K,2)+STRS(I2)
      STRS(I3)=PCAR(K,3)+STRS(I3)
7 CONTINUE
14 CONTINUE
      WRITE(45,1)STRS
      CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR PRCG3
COMMON 21708 VARIABLES 4510 PROGRAM 584

END OF COMPILATION

// DLF

*STORE WS UA PRCG3
CARD ID 0016 DE ALER 58F6 DB CNT 005D

// FOR

```

*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPERWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*NAME PRCG4
      DEFINE FILE 30(40,288,U,KA),35(40,288,U,KB),13(4,320,U,KJ)
      REAL MR(96,36),MI(96,36)
      REAL KML(30,3)
      DIMENSION IR(30),IE(30),EP(50,3),IRES(30,6),B(150)
      COMMON MR
      ITEST=0
      READ(13,1)IRES,KML,EP,IR,IE,IIP,IPRES,NE,LBS,NREST,NELAS,FAT,SX,
*SY,TU,C,BETA
      EJ=D
      WRITE(5,60)
60 FORMAT(//,5X,'BETA',10X,'SX',10X,'SY',10X,'TU',10X,'DT',11X,'DST',
*//)
      ALFA=FAT
      DC 10 IF=1,IPREN
100 READ(30,1)MR
      READ(35,1)MI

```

PAGE 39 FAIVA

```

INC=0
DC 20 J1=1,NE
DC 20 J2=1,LBS
20 MR(J1,J2)=MR(J1,J2)+BETA*MI(J1,J2)
CALL REST1(NREST,IR,IRES,NELAS,IE,KML,B,LBS)
CALL DET1(NE,DST,INC,DT,EJ,LBS)
ITEST=ITEST+1
A1=BETA*SX
A2=BETA*SY
A3=BETA*TL
WRITE(5,81)BETA,A1,A2,A3,DT,DST
81 FCRMAT(//,3X,F8.4,6X,F8.4,4X,F8.4,4X,F8.4,3X,E14.7,3X,E14.7)
IF(DST)84,82,83
83 IF(ITEST-50)90,91,91
82 GC TC 200
91 WRITE(5,92)
92 FCRMAT(30X,'O ESTADO CRITICO DE TENSORES NAO FOI ENCONTRADO EM 50 I
*INTERACCES')
GC TC 1000
90 BETA=BETA+ALFA
GC TC 100
84 BETA=BETA-ALFA
ALFA=ALFA/10.
BETA=BETA+ALFA
10 CONTINUE
BETA=BETA+4.*ALFA
SX=BETA*GX
SY=BETA*SY
TU=BETA*TL
200 WRITE(5,300)SX,SY,TU
300 FCRMAT(///,2X,'O ESTADO CRITICO DE TENSORES E',10X,'SX=',F11.5,10X,
*'SY=',F11.5,10X,'TU=',F11.5,/)
WRITE(5,1002)BETA
1002 FCRMAT(///,10X,'O ESTADO CRITICO DE TENSORES (VARIAVEL OU NAO)E CBT
*ICC',//,10X,'MULTIPLICANCO-SE O ESTADO INICIAL DE TENSORES PELO FAT
*CR BETA',//,10X,'PARA ESSE PROBLEMA BETA=',F8.4)
1000 CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED
CNE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR PROCG4
CCMCN 10368 VARIABLES 11854 PROGRAM 516

END OF COMPILATION

// DLP

```

*STORE WS LA PROCG4
CART ID 0016 DE ADDR 5953 DB CNT 0025

```

// FCR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ICCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*CNE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*NAME PROCG5

```

```

DEFINE FILE 50(10,320,U,K0)
DEFINE FILE 20(12,320,U,K4),25(12,320,U,KN),40(50,54,U,IW)
DEFINE FILE 45(2,320,U,KC)
DEFINE FILE 60(40,288,U,KT)
REAL MR(96,36),KML(30,3)
DIMENSION IR(30),IE(30),IRES(20,6),DE(50)
DIMENSION NP(50,3),LNCBO(30,10),ITIPO(50),EP(50,3),ANGLE(20)
DIMENSION XORD(50),YORD(50),STRS(150)
CCMCN MR
READ(50'1)NP,LNCBO,ITIPO,M,NE,NELBO,IPERF,EP,ANGLE,XORD,YORD,PCI,E
*,ISKEW,NREST,IR,IE,KML,NELAS,IRES,NPN,LBS
READ(60'1)MR
READ(45'1)STRS
CALL REST1(NREST,IR,IRES,NELAS,IE,KML,STRS,LBS)
CALL TRNEC(NPN,M,NP,DE,PCI,E,EP)
CALL DECCN(NE,LES,KS)
CALL SOLVE(NE,LES,STRS,KS)
IF(ISKEW)1,1,2
2 CALL TRISK(NPN,NELEC,ANGLE,LNCBO,STRS,XORD,YORD)
1 CALL TRFRE(PCI,NPN,NELBO,LNCBO,STRS)
CALL REACA(STRS,NP,LNCBO,XORD,YORD,ITIPO,NE,NELBO,NPN)
CALL FLEVQ(NPN,STRS,DE,PCI,XORD,YORD,NE,IPERF)
CALL EXIT

```

PAGE 40 PAIVA

END

FEATURES SUPPORTED
CAME WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR PROG5
COMMON 10368 VARIABLES 2484 PROGRAM 172

END OF COMPILATION

// DLF

*STORE WS UA PROG5
CART IC C016 DE ADDR 5978 CB CNT C010

// XEQ PROG1 1

*FILES(15,QUIZE),(12,DOZE1),(13,TREZE),(14,QTRZE),(50,CQTA1)

DADOS DO PROGRAMA UM

// XEQ PROG2 4

*FILES(1,TEGR1),(2,TEGR2),(3,TEGR3),(4,TEGR4),(5,TEGR5),(6,TEGR6),

*FILES(7,TEGR7),(8,TEGR8),(15,QUIZE),(14,QTRZE),(20,VINTE),

*FILES(25,VINT5),(9,TEGR9),(10,TEG10),(40,QRNTA)

*LOCALPROG2,MINST,RIGP,FUNEL,MATC

// XEQ PROG3 3

*FILES(30,TRITA),(35,TRIT5),(20,VINTE),(25,VINT5),(12,DOZE1)

*FILES(40,QRNTA),(45,QRTA5)

*LOCALPROG3,MONG1,ISKE1,TFRE1,PREP1

// XEQ PROG4 2

*FILES(30,TRITA),(35,TRIT5),(13,TREZE)

*LOCALPROG4,DET1,REST1

// XEQ PROG5 3

*FILES(50,CQTA1),(45,QRTA5)

*FILES(25,VINT5),(40,QRNTA),(20,VINTE),(60,SSNTA)

*LOCALPROG,REST1,SOLV1

BIBLIOGRAFIA

1. TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. - *Teoria de placas y laminas.* Espanha, Urmo, 1970. 621p.
2. BORESI, A. & LYNN, P.P. - *Elasticity in engineering mechanics.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1974. 475p.
3. LANGHAAR, H.L. - *Energy methods in applied mechanics.* New York, Wiley, 1962. 35p.
4. ELSGOLTZ, L. - *Ecuaciones diferenciales y calculo variacional.* Moscou, Mir, 1969. 432p.
5. BREBBIA, C.A. & CONNOR, J.J. - *Metodos de los elementos finitos en la ingenieria civil.* Madrid, CPPE, 1975. 279p.
6. DEGASPARE, J.C. - *Aplicações do elemento finito T-18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas.* São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1975. Dissertação apresentada à EESC-USP, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.
7. HOLLAND, I. & BELL, K., edited. - *Finite element methods: in stress analysis.* Norway, Tapir, 1970. 500p.
8. SAVASSI, W. - *Contribuição ao emprego dos elementos finitos em elasticidade plana.* São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1972. 204p.
9. BULSON, P.S. - *The stability of flat plates.* London, Chatto & Windus, 1970. 470p.

10. ZIENKIEWICZ, O.C. & CHEUNG, Y.K. - *The finite element method in structural and continuum mechanics.* London, McGraw-Hill, 1967. 274p.
11. RACHID, M. - *Instabilidade de barras de secção delgada.* São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1975. 119p.
12. TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M. - *Theory of elastic stability.* New York, McGraw-Hill, 1961. 541p.
13. MONTANARI, I. & MARTINELLI, D.A.O. - *Placas Elásticas: equações gerais e placas retangulares.* São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1976. 74p.
14. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND - *Vocabulário de Teoria das Estruturas.* São Paulo, ABCP, 1967.
15. SAVASSI, W. - *Integração de funções em domínios triangulares planos.* XVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. 1976.