

INSTABILIDADE DE EDIFÍCIOS
COM PAREDES DE SEÇÃO ABERTA
CONTRAVENTADAS POR LINTEIS

ENGº F. ANASTÁCIO C. DE CARVALHO

Dissertação apresentada à Escola de Enge
nharia de São Carlos, da Universidade de
São Paulo, como parte dos requisitos pa
ra a obtenção do Título de "Mestre em En
genharia de Estruturas".

ORIENTADOR

Prof. Dr. Eddie Mancini

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eddie Mancini
Profa. Dra. Helena M.C. Carmo Antunes
Prof. Dr. Tioeturo Yagui

SUPLENTES

Prof. Dr. Munir Rachid
Prof. Dr. Paulo Selegchin

*Aos meus pais, irmãos
e a Izilda, pelos
constantes incentivos*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Eddie Mancini que, dentro da mais profícua amizade, conduziu o desenrolar deste trabalho de uma forma entusiástica e interessante, através de sua orientação capaz e segura.

À Fundação Universidade do Amazonas que proporcionou a realização deste trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Estruturas Laerte Aparecido Soares, Wilma Provinciali Vall e Syl - via Helena Moretti, pela presteza com que prepararam os trabalhos de datilografia e desenho.

Ao C.P.D. da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, pela utilização de seu equipamento.

R E S U M O

Apresenta-se, neste trabalho, um processo para a determinação da carga crítica de flambagem em edifícios com paredes de seção aberta, contraventadas ou não, por lintéis. Estuda-se também a instabilidade de painéis planos constituídos por paredes unidas por lintéis.

Em todos os casos, o carregamento é constituido por cargas verticais, uniformemente distribuídas ao longo dos eixos que passam pelos centros de gravidade das seções transversais de cada parede.

Para o desenvolvimento do processo, utiliza-se a Técnica do Meio Contínuo, que consiste basicamente em considerarem-se os elementos horizontais que conectam as paredes, uniformemente distribuídos ao longo da altura.

Na análise das paredes de seção aberta, admite-se, que as mesmas têm comportamento análogo ao das vigas de seção delgada, podendo utilizar-se a teoria de flexo-torção.

O modelo estrutural conduz a uma equação diferencial ou a um sistema de três equações diferenciais, homogêneas, de terceira ordem com coeficientes variáveis. A solução escolhida é por série de Potências e o uso do computador é essencial para a sua solução.

São feitas comparações e os resultados obtidos pelo processo adotado, mostram boa aproximação com as soluções exatas em exemplos nos quais elas podem ser obtidas.

A B S T R A C T

A method for determining the critical buckling load in buildings with structures composed of restrained or not restrained thin walled cantilevers of open cross section is presented. Also the instability of beam connected walls is studied.

In all cases load is uniformly distributed along vertical axes passing through the centroids of walls sections.

In developping the method the continuous medium techniques were utilized which consist of considering uniformly distribuited along the height the horizontal elements connectings the walls.

In the analysis of open cross section walls, it is assumed that these walls behaviour like slender beams; the theory of combined bending and torsion may being used.

The structural model leads to a differential equation or a system of three homogeneous differential equations with variable coefficients. The chosen solution is the one throught power series and the use of computer is essential for solving it.

Comparison are made and the results obtained through the adopted process showed good approximation with exact solutions in examples they can be obtained.

I N D I C E

| | | |
|-----|---|-----|
| I | - INTRODUÇÃO | 1 |
| II | - PAINÉIS PLANOS | 4 |
| | II-1 - Painel parede | 4 |
| | II-2 - Painel geral | 5 |
| | II-3 - Montagem da equação diferencial . . | 6 |
| | II-3-1) Exemplo 1 | 15 |
| III | - EDIFÍCIOS COM UM NÚCLEO DE SEÇÃO ABERTA . . | 21 |
| | III-1 - Hipóteses e considerações | 21 |
| | III-2 - Núcleo de seção aberta sem contraventamento | 21 |
| | III-2-1 - Montagem do sistema de equações diferenciais . . | 22 |
| | III-3 - Núcleo de seção aberta contraventado por lintéis | 35 |
| | III-3-1 - Montagem do sistema de equações diferenciais . . | 37 |
| | III-3-2 - Exemplo 2 | 46 |
| IV | - EDIFÍCIOS COM NÚCLEOS DE SEÇÃO ABERTA . . . | 66 |
| | IV-1 - Núcleos de seção aberta sem contraventamento | 66 |
| | IV-1-1 - Montagem do sistema de equações diferenciais . . | 67 |
| | IV-2 - Núcleos de seção aberta contraventados por lintéis | 74 |
| | IV-2-1 - Montagem do sistema de equações diferenciais . . | 77 |
| | IV-2-2 - Exemplo 3 | 93 |
| V | - CONSIDERAÇÕES FINAIS | 111 |

| | |
|---|-----|
| APÊNDICE 1 - RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO . . . | 112 |
| APÊNDICE 2 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS | 127 |
| APÊNDICE 3 - PROGRAMAS EM LINGUAGEM FORTRAN | 134 |
| BIBLIOGRAFIA | 142 |

I - INTRODUÇÃO

O aparecimento de edifícios cada vez mais altos, têm exigido do engenheiro estrutural, um estudo mais cuidadoso da segurança dos mesmos. A instabilidade de edifícios altos, torna-se objeto de constante preocupação para o engenheiro estrutural, notadamente em edifícios com paredes de seção aberta, internamente às quais localizam-se os poços de elevadores, escadas e outras áreas comunitárias.

Para os edifícios como o da figura (I-1) é comum desprezarem-se as contribuições dos pilares de pequena rigidez lateral e considerarem-se somente as paredes para resistirem os esforços na estrutura.

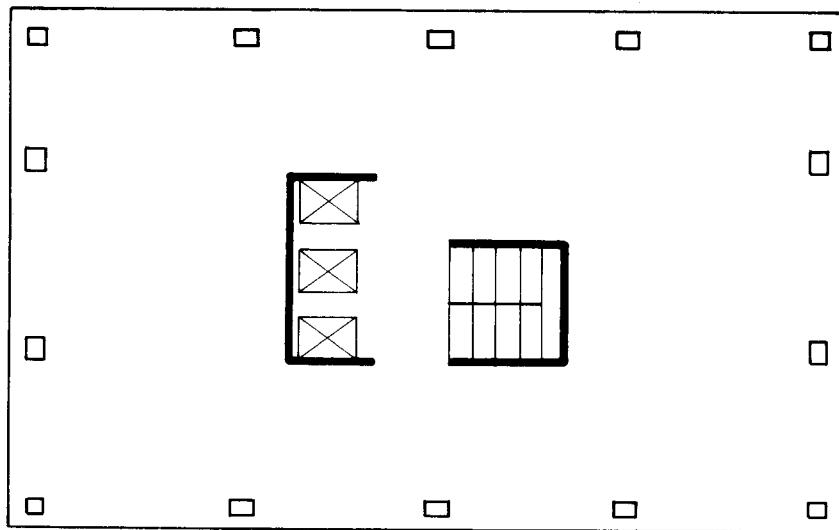


FIG. (I-1) — EDIFÍCIO FORMADO POR PAREDES DE SEÇÃO ABERTA

Desta forma, o modelo estrutural torna-se esbelto, exigindo do calculista uma verificação da estabilidade do edifício.

A análise da instabilidade de edifícios apresentada neste trabalho é baseada no trabalho de GLÜCK e GELLERT [1]. Para seu desenvolvimento, utiliza-se a Técnica do Meio Contínuo, que consiste em substituir-se o sistema discreto de conexões horizontais ao nível dos andares, formado pelas lajes e lintéis, por um meio contínuo de rigidez equivalente, uniformemente distribuída ao longo da altura do edifício. As lajes serão assimiladas a diafrágmas horizontais, com rigidez infinita no seu plano e nula transversalmente. Desta maneira, elas só transmitem esforços horizontais aos elementos verticais e não impedem os seus encastrements. Os lintéis, serão considerados como vigas engastadas em ambas as extremidades, resistentes ao momento fletor e a força cortante. Devido ao comportamento das lajes como diafragma, nos lintéis não aparecerão esforços normais.

Como os edifícios podem também ser formados pela combinação de painéis e paredes de seção aberta, apresenta-se, no Capítulo II, a análise da instabilidade de painéis isolados. As paredes que formam os painéis, são deformáveis por momento fletor e a contribuição do meio contínuo de restrição (lintéis) é suposta proporcional à derivada dos deslocamentos das paredes.

O modelo estrutural, fica expresso através de uma equação diferencial homogênea de terceira ordem com coeficientes variáveis. Para a sua solução, utiliza-se Série de Potências. Faz-se um exemplo numérico para avaliar a precisão do método.

No Capítulo III, apresenta-se a análise de instabilidade de edifícios formados por uma parede de seção aberta. Considera-se que as paredes de seção aberta têm o mesmo comportamento que as barras de seção delgada. A hipótese da teoria de flexo-torção, de que as seções transversais

das barras, são indeformáveis no seu plano, fica fortalecida devido ao comportamento das lajes como diagramas.

Analisa-se ainda, o comportamento das paredes de seção aberta quando introduz-se ao nível dos andares, um contraventamento com lintéis.

O modelo estrutural conduz a um sistema de três equações diferenciais homogêneas de terceira ordem com coeficientes variáveis. Para sua solução, utiliza-se Série de Potências. No final desse capítulo, faz-se um exemplo numérico, avaliando-se a precisão do método e comparando-se as cargas críticas que provocam a instabilidade em edifícios, com uma parede de seção aberta, com e sem contraventamento.

O capítulo IV, trata de estruturas formadas por paredes de seção aberta com e sem contraventamentos.

Em cada parede e conjunto de lintéis, adotam-se os sistemas locais de referências. Adota-se ainda, convenientemente, um sistema global de referência. Com isto, a instabilidade de edifícios formados por paredes de seção aberta unidas por lintéis ou pela combinação de painéis e paredes de seção aberta, pode ser analisado facilmente, bastando para isso que se refere ao sistema global as propriedades de cada parede e conjunto de lintéis.

O modelo estrutural, fica também expresso por um sistema de três equações diferenciais homogêneas de terceira ordem com coeficientes variáveis. No final deste capítulo, faz-se um exemplo numérico para um edifício formado por duas paredes de seção aberta contraventadas ou não por lintéis. Verifica-se o aumento considerável de rigidez da estrutura com a introdução dos lintéis.

Nos apêndices deste trabalho, encontra-se um resumo da teoria de flexo-torção, desenvolvimento do sistema de equações diferenciais por Série de Potências e a listagem do programa, que resolve a série, para o computador IBM - 1130.

II) PAINÉIS PLANOS

II.1) Painel parede

Convenciona-se chamar "parede" a todos os painéis planos, com rigidez transversal suposta nula e supostos perfeitamente rígidos à força cortante e deformáveis apenas ao momento fletor. Todas as paredes serão, neste trabalho, supostas de seção constante em toda a sua altura.

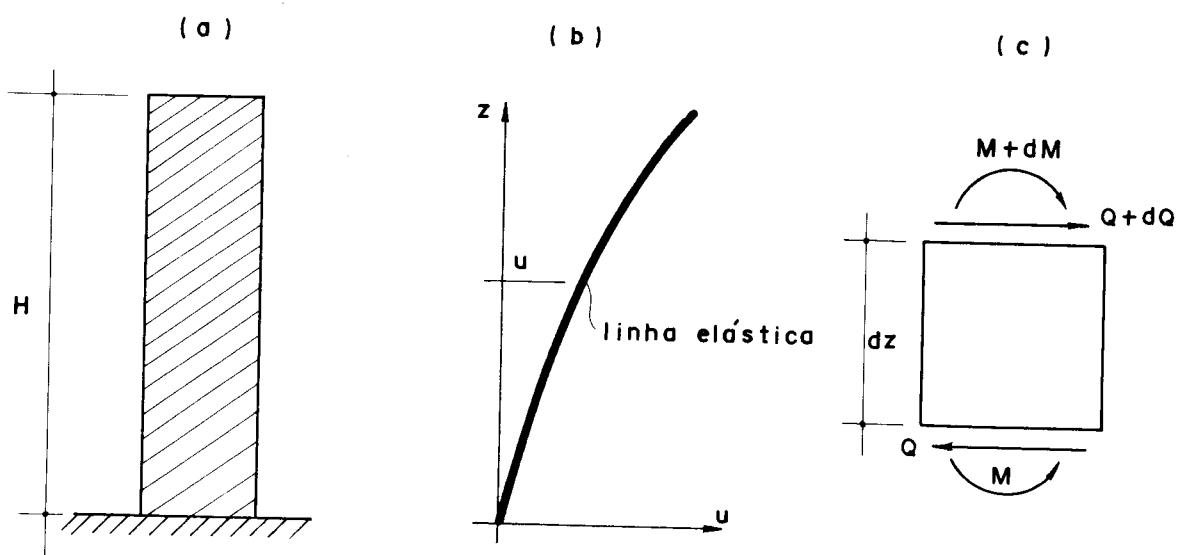


FIG.(II-1) — PAREDE PLANA

A figura (II-1-b) representa uma parede deslocada de u da sua posição inicial. Considerando-se positivos os sentidos dos esforços indicados na figura (II-1-c), a equação relativa ao equilíbrio do elemento dz é:

$$\frac{dM}{dz} = -Q \quad (\text{II-1})$$

Desprezando-se a deformação da parede por força cortante, a equação da elástica é obtida por

$$\frac{du^2}{dz^2} = u'' = \frac{M}{E J} \quad \dots \quad (\text{II-2})$$

Derivando-se uma vez a equação (II-2) e combinando-a com a equação (II-1), obtém-se a expressão para a força cortante no painel a uma cota genérica z .

$$Q = -EJ u'' \quad \dots \quad (\text{II-3})$$

II-2) Painel Geral

Usam-se, frequentemente, em edifícios, painéis planos com a finalidade de oferecerem resistência às cargas laterais e maior estabilidade do edifício.

Para as paredes ligadas apenas pelas lajes, quando esquematicamente representam-se as paredes ligadas por barras bi-articuladas de rigidez axial infinita, conclui-se facilmente que o conjunto pode ser substituído, para efeito de cálculo da carga crítica de instabilidade, por uma única parede de rigidez igual a soma das rigidezes de todas as paredes, solicitada pela soma das cargas externas no painel.

Aumenta-se consideravelmente, a rigidez lateral daqueles painéis, quando unem-se as paredes, por barras prismáticas de rigidez transversal pequena em presença da parede, barras estas denominadas lintéis.

A figura (II-2) representa três paredes, de momentos de inércia J_1 , J_2 e J_3 , respectivamente, ligadas entre si por lintéis igualmente espaçados de h . Os lintéis do primeiro e segundo conjunto têm, respectivamente, momentos de inércia J_{L_1} e J_{L_2} .

O carregamento nas paredes é proveniente das ações das lajes sobre as mesmas. A técnica do meio contínuo considera que as lajes são continuamente distribuidas

ao longo da altura dos painéis, portanto, cada parede receberá uma carga $\alpha_i p$ distribuída ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de gravidade de sua seção transversal.

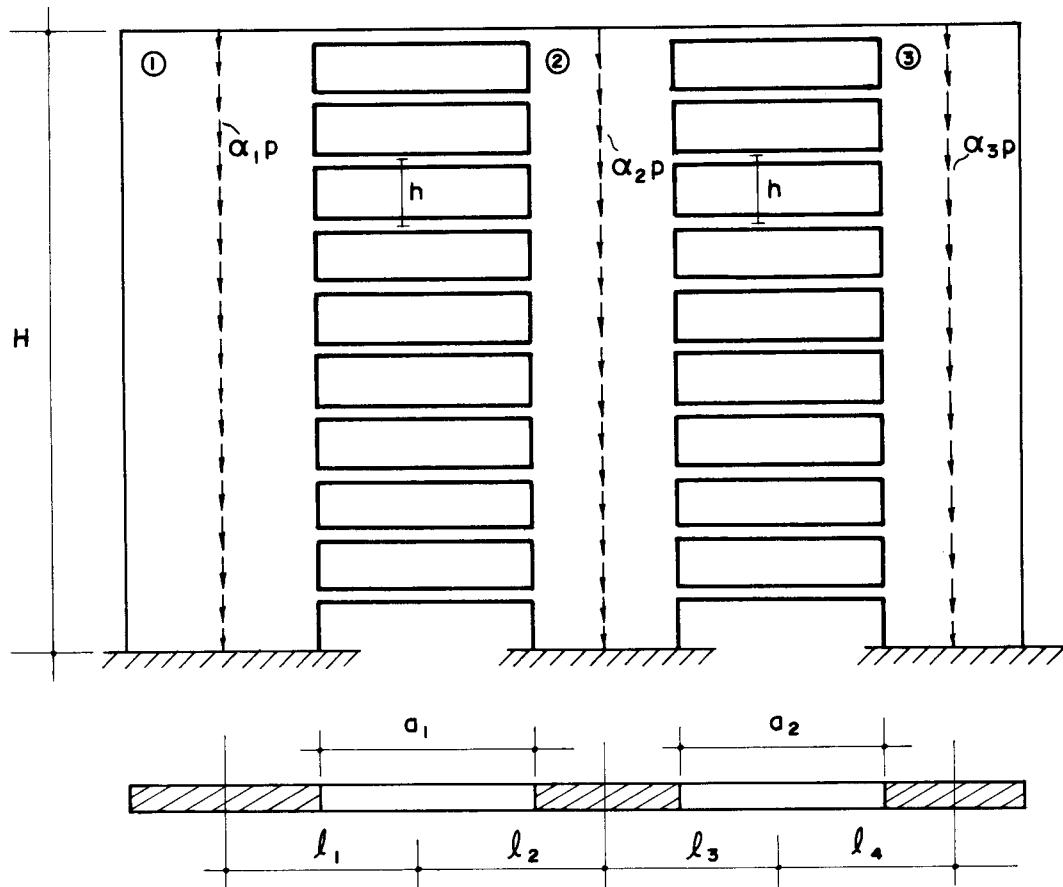


FIG. (II - 2) — ASSOCIAÇÃO DE PAREDES COM LINTÉIS

II-3) Montagem da equação diferencial

A figura (II-3) representa os elementos das paredes com seus respectivos esforços.

No ponto médio dos vãos dos lintéis, aparecem forças cortantes incógnitas V_i . Tendo em vista a hipótese da técnica do meio contínuo, estas forças cortantes serão consideradas uniformemente distribuídas ao longo do espaçamento h dos lintéis.

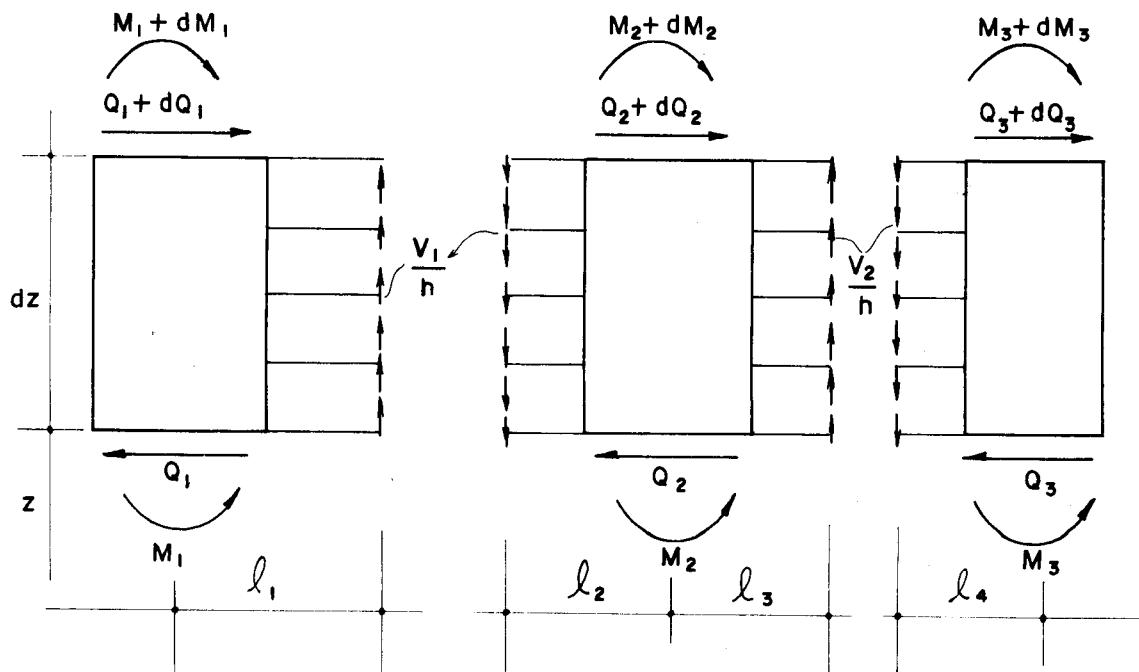


FIG. (II-3) — CONVENÇÃO PARA ESFORÇOS POSITIVOS

Fazendo-se o equilíbrio do elemento genérico da parede (1), com os esforços positivos mostrados na figura (II-3), obtém-se

$$Q_1 = - \frac{dM_1}{dz} + \frac{V_1}{h} l_1 \quad (\text{II-4})$$

Combinando-se as equações (II-4) com a equação da elástica (II-2), a força cortante na parede (1) será

$$Q_1 = -EJ_1 u''' + \frac{V_1}{h} l_1 \quad (\text{II-5})$$

O equilíbrio do elemento genérico da parede (2), de acordo com a convenção adotada, escreve-se

$$Q_2 = - \frac{dM_2}{dz} + \frac{V_1}{h} l_2 + \frac{V_2}{h} l_3 \quad (\text{II-6})$$

Combinando-se a equação (II-2) com a equação (II-6), obtém-se a força cortante na parede (2).

$$Q_2 = -EJ_2 u''' + \frac{V_1}{h} l_2 + \frac{V_2}{h} l_3 \quad (\text{II-7})$$

Do equilíbrio do elemento genérico da parede (3) combinado com a equação da elástica, resulta a força cortante na parede correspondente.

$$Q_3 = -EJ_3 u''' + \frac{V_2}{h} l_4 \quad (\text{II-8})$$

Somando-se as equações (II-5), (II-7) e (II-8) encontra-se a equação da força cortante no painel em função das incógnitas V_1 e V_2

$$\begin{aligned} Q = & - (EJ_1 + EJ_2 + EJ_3) u''' + \frac{V_1}{h} (l_1 + l_2) + \\ & + \frac{V_2}{h} (l_3 + l_4) \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

As forças cortantes incógnitas V_1 e V_2 , são aplicadas nos pontos de momento nulo dos lintéis, supostos no meio dos seus vão. Estes pontos, considerados pertencentes a uma ou a outra parede vizinha, deslocam-se por efeito de flexão da parede a que se consideram pertencentes e da deformação do lintel por flexão e força cortante. Desprezam-se as deformações axiais das paredes.

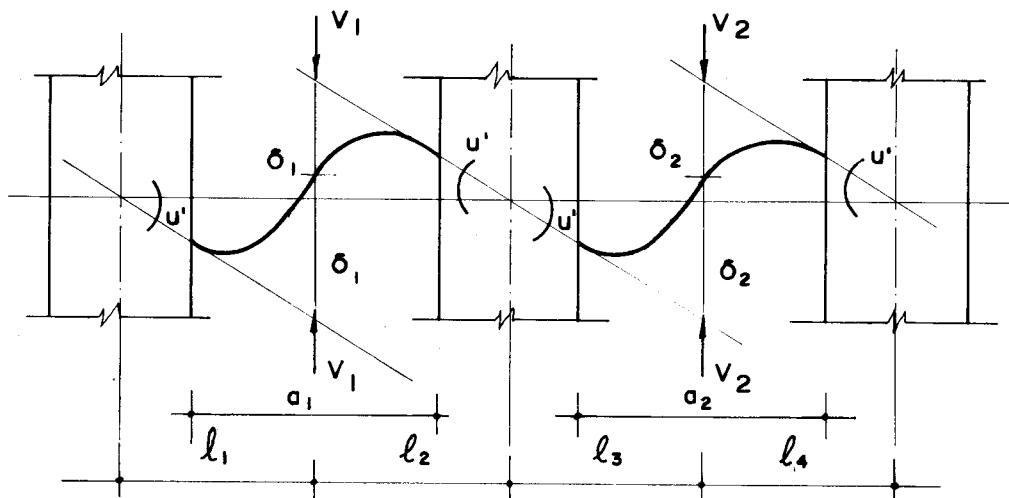


FIG. (II-4) — DESLOCAMENTOS DOS PONTOS MÉDIOS DOS VÃOS DOS LINTÉIS

Convencionando-se positivos os deslocamentos para cima, compatibilizam-se tais deslocamentos com as equações

$$- u' l_1 + \delta_1 = u' l_2 - \delta_1 \quad (\text{II-10})$$

$$- u' l_3 + \delta_2 = u' l_4 - \delta_2$$

onde, δ_1 e δ_2 , representam, respectivamente, os deslocamentos dos lintéis devido às deformações dos mesmos por momento fletor e força cortante.

A flecha, por momento fletor e força cortante de uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, é facilmente deduzida da teoria clássica de Resistência dos Materiais como

$$\delta = \frac{Vl^3}{3EJ} + \frac{Vl}{GA} \quad (\text{II-11})$$

onde l é o vão da viga.

Com base na equação (II-11) os valores de δ_1 e δ_2 são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\frac{V_1}{24} \frac{\alpha_1^3}{EJ_{L_1}}}{+ \frac{V_1}{2GA_1}} \\ \delta_2 &= \frac{\frac{V_2}{24} \frac{\alpha_2^3}{EJ_{L_2}}}{+ \frac{V_2}{2GA_2}} \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

onde J_{L_1} e J_{L_2} são, respectivamente, os momentos de inércia dos lintéis dos conjuntos (1) e (2), E é o módulo de elasticidade longitudinal; G é o módulo de elasticidade transversal; A_1 e A_2 são, respectivamente, as áreas das seções transversais dos lintéis dos conjuntos (1) e (2) e α_1 e α_2 são os vãos dos lintéis.

Substituindo-se as equações (II-12) nas equações (II-10), resultam os valores das forças incógnitas V_1

e V_2 em função da derivada primeira do deslocamento u das paredes.

$$V_1 \left(\frac{\alpha_1^3}{12 E J_{L_1}} + \frac{\alpha_1}{G A_1} \right) = (\ell_1 + \ell_2) u' \quad (II-13)$$

$$V_2 \left(\frac{\alpha_2^3}{12 E J_{L_2}} + \frac{\alpha_2}{G A_2} \right) = (\ell_3 + \ell_4) u'$$

Fazendo-se

$$f_1 = \frac{\alpha_1^3}{12 E J_{L_1}} + \frac{\alpha_1}{G A_1}$$

e

$$f_2 = \frac{\alpha_2^3}{12 E J_{L_2}} + \frac{\alpha_2}{G A_2} \quad (II-14)$$

as forças cortantes nos lintéis, escrevem-se

$$V_1 = \frac{1}{f_1} (\ell_1 + \ell_2) u' \quad (II-15)$$

$$V_2 = \frac{1}{f_2} (\ell_3 + \ell_4) u'$$

Substituindo-se as equações (II-15) na equação .. (II- 9), obtém-se a equação final da força cortante no painel.

$$Q = - (E J_1 + E J_2 + E J_3) u''' + \left[\frac{1}{h f_1} (\ell_1 + \ell_2)^2 + \frac{1}{h f_2} (\ell_3 + \ell_4)^2 \right] u' \quad (II-16)$$

Da equação acima obtém-se os parâmetros de rigidez do painel.

$$K = EJ_1 + EJ_2 + EJ_3 \quad (\text{II-17})$$

e

$$k = \frac{1}{hf_1} (l_1 + l_2)^2 + \frac{1}{hf_2} (l_3 + l_4)^2 \quad (\text{II-18})$$

Estes valores, representam, respectivamente, a rigidez das paredes e dos conjuntos de lintéis.

As equações (II-16), (II-17) e (II-18), permitem concluir que a expressão da força cortante, à uma altura z de um painel constituído de n paredes e m conjuntos de lintéis, é dada por

$$Q = -K u''' + k u' \quad (\text{II-19})$$

onde

$$K = \sum_{i=1}^n EJ_i \quad (\text{II-20})$$

e

$$k = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{f_j} (l_{(2j-1)} + l_{2j})^2 \right] \quad (\text{II-21})$$

Para a obtenção dos esforços externos, a análise é feita com a parede na posição deslocada de equilíbrio. A parede, submetida a um carregamento de compressão uniformemente distribuído ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de gravidade da seção transversal, capaz de causar a sua instabilidade, é considerada em sua nova posição. Esta posição, fica caracterizada pelos deslocamentos u da figura-(II-5-b).

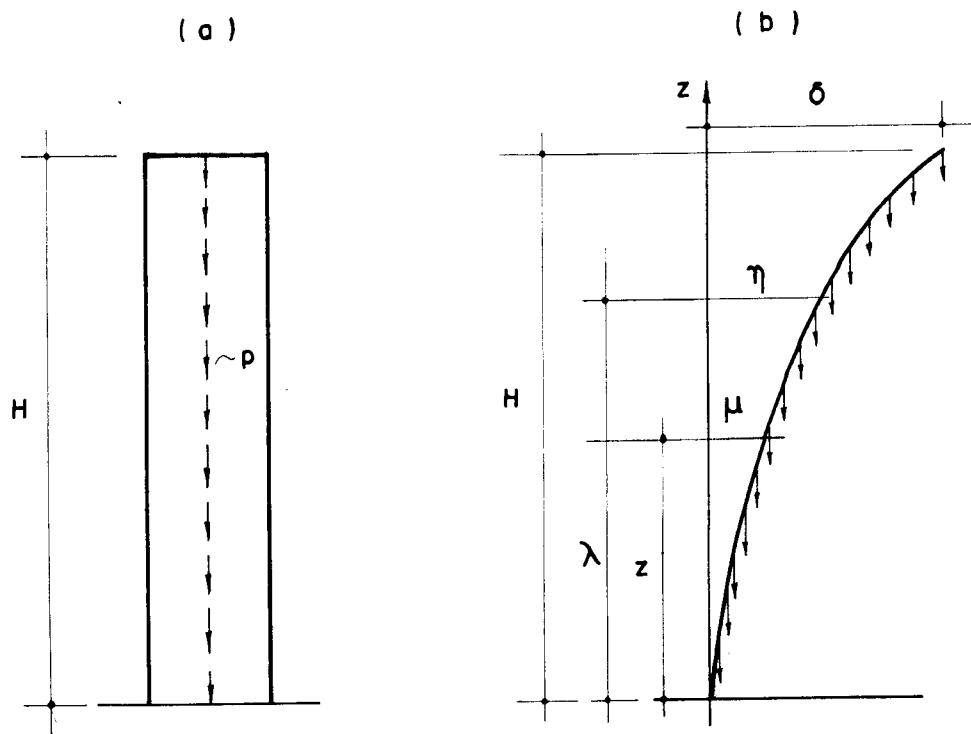


FIG. (II- 5) – PAREDE NA POSIÇÃO DESLOCADA

Adotando-se a mesma convenção de esforços positivos da figura (II-1-C), o momento fletor à uma cota z da parede é dado por

$$M_z = \int_z^H p(\eta - u) d\lambda \quad (\text{II-22})$$

Desenvolvendo-se a equação (II-22), obtém-se

$$M = p \int_z^H \eta d\lambda - p u (H-z) \quad (\text{II-23})$$

Derivando-se uma vez a equação (II-23) tem-se

$$\frac{dM}{dz} = -p\eta(z) + p u - p(H-z)u' \quad (\text{II-24})$$

Lembrando que

$$\eta(z) = u \quad (\text{II-25})$$

e

$$\frac{dM}{dz} = -Q \quad (\text{II-26})$$

e, substituindo-se na equação (II-24), obtém-se a equação da força cortante externa

$$Q = p(H-z)u' \quad (\text{II-27})$$

O painel em estudo é constituído de três paredes, solicitadas por cargas uniformemente distribuídas de valores, respectivamente, $\alpha_1 p$, $\alpha_2 p$ e $\alpha_3 p$. Portanto, baseando-se na equação (II-27), a força cortante em cada parede escreve-se

$$Q_{ext,1} = \alpha_1 p(H-z)u' \quad (\text{II-28})$$

$$Q_{ext,2} = \alpha_2 p(H-z)u'$$

$$Q_{ext,3} = \alpha_3 p(H-z)u'$$

Conclui-se, facilmente, que a força cortante externa no painel é:

$$Q_{ext.} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)p(H-z)u' \quad (\text{II-29})$$

Para um painel formado por n paredes carregadas, a expressão que fornece a força cortante externa é

$$Q_{ext.} = \alpha p(H-z)u' \quad (\text{II-30})$$

onde

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (\text{II-31})$$

A força cortante externa em qualquer nível, é equilibrada pela força cortante interna no painel. Portanto, utilizando as equações (II-19) e (II-30) obtém-se a equação diferencial de equilíbrio

$$-K u''' + k u' = \alpha p (H-z) u' \quad (\text{II-32})$$

ou

$$K u''' - k u' + \alpha p (H-z) u' = 0 \quad (\text{II-33})$$

Com a finalidade de baixar a ordem da equação diferencial (II-33), adota-se

$$\xi = \frac{z}{H} \quad (\text{II-34})$$

e

$$\delta(\xi) = u' \quad (\text{II-35})$$

então

$$u''' = \frac{1}{H^2} \delta''(\xi) \quad (\text{II-36})$$

Substituindo-se as equações (II-34), (II-35) e (II-36) na equação (II-33), tem-se

$$K \delta''(\xi) - H^2 k \delta(\xi) + \alpha p H^3 (1-\xi) \delta(\xi) = 0 \quad (\text{II-37})$$

Considerando-se que na estrutura da figura (II.2) não existem momentos aplicados no topo e sua base é perfeitamente engastada, conclui-se que as condições de contorno,

são

$$\delta(0) = 0 \quad (\text{II-38})$$

$$\delta'(1) = 0 \quad (\text{II-39})$$

onde $\xi=0$ corresponde à base do painel e $\xi=1$ ao topo do mesmo.

A equação (II-37), juntamente com as equações (II-38) e (II-39), permitem determinar o valor da carga crítica p , cuja técnica de obtenção apresenta-se no Apêndice (2).

II-3-1) Exemplo 1

Como exemplo da determinação da carga crítica de instabilidade no plano de painéis, apresenta-se um painel, de 30 andares, formado por 3 paredes de seção transversal constante, com pé-direito dos andares igual a 3,00 m. As dimensões das paredes e lintéis são apresentadas na figura (II-6). Para o módulo de elasticidade longitudinal e transversal de todas as peças do painel, adotam-se, respectivamente, os valores $E = 2,0 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ e $G = 8,0 \times 10^5 \text{ t/m}^2$. Procura-se a carga crítica p , vertical, uniformemente distribuída no plano do painel. As paredes (1), (2) e (3) absorvem esta carga na proporção 0,643 p , 1,983 p e 0,54 p , respectivamente, uniformemente distribuídas ao longo de seus eixos verticais que passam pelos centros de gravidade das seções transversais.

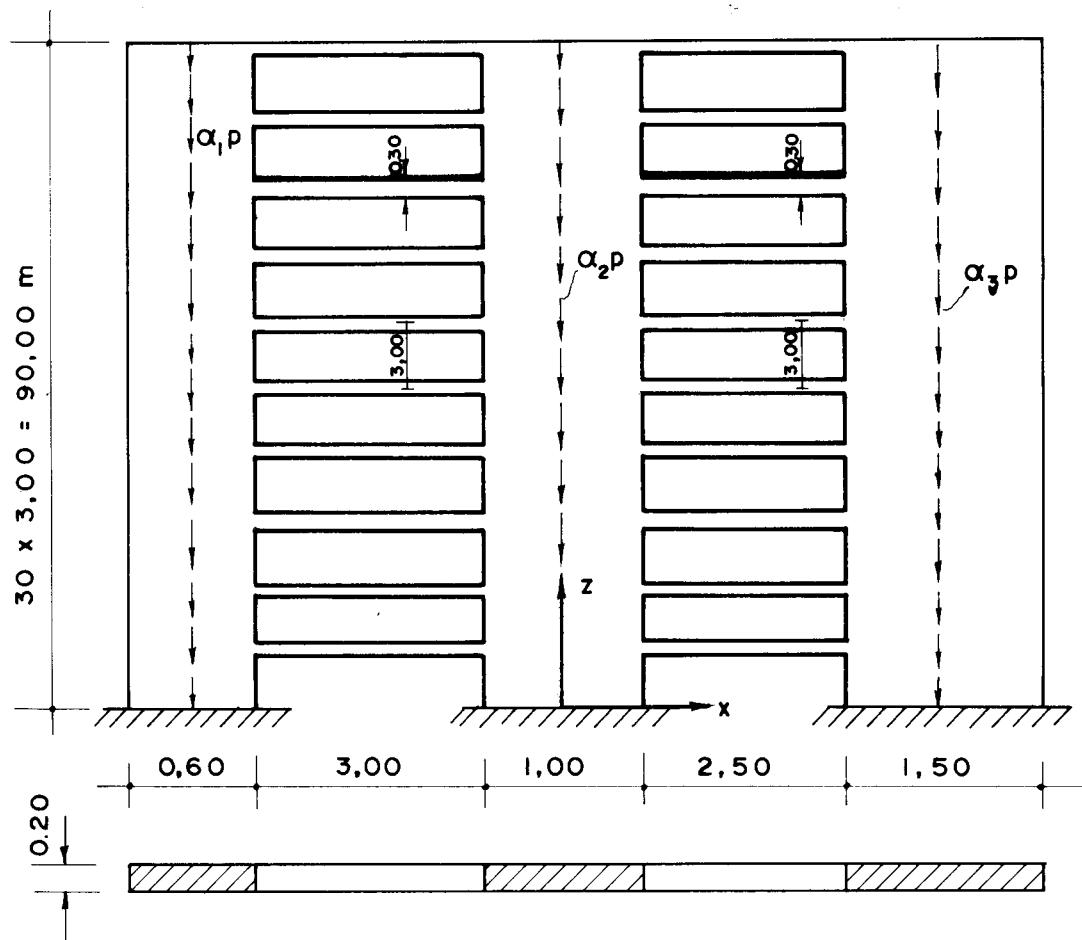


FIG. (II-6) — PAINEL FORMADO POR TRÊS PAREDES

O sistema de referência é constituído pelo eixo ox e pelo eixo oz .

a) Parâmetros geométricos das paredes

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,2 \times 0,6^3}{12} = 0,0036 \text{ m}^4$$

$$J_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,2 \times 1,0^3}{12} = 0,01667 \text{ m}^4$$

$$J_3 = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,2 \times 1,5^3}{12} = 0,05625 \text{ m}^4$$

b) Parâmetros geométricos dos lintéis

$$J_{L_1} = \frac{ed_1^3}{12} = \frac{0,2 \times 0,3^3}{12} = 0,00045 \text{ m}^4$$

$$J_{L_2} = \frac{ed_2^3}{12} = \frac{0,2 \times 0,3^3}{12} = 0,00045 \text{ m}^4$$

$$A_1 = 0,2 \times 0,3 = 0,06 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0,2 \times 0,3 = 0,06 \text{ m}^2$$

O painel do exemplo, é constituído de 3 paredes unidas por 3 conjuntos de lintéis. De acordo com as equações - (II-20) e (II-21), vem

c) Rígidez das Paredes

$$K = EJ_1 + EJ_2 + EJ_3$$

$$\begin{aligned} K &= 2,0 \times 10^6 (0,0036 + 0,01667 + 0,05625) = \\ &= 0,15304 \times 10^6 \text{ tm}^2 \end{aligned}$$

d) Rígidez dos conjuntos de lintéis

$$k = \frac{1}{h f_1} (\ell_1 + \ell_2)^2 + \frac{1}{h f_2} (\ell_3 + \ell_4)^2$$

$$f_1 = \frac{\alpha_1^3}{12EJ_{L_1}} + \frac{\alpha_1}{GA_1}$$

$$f_1 = \frac{3,00^3}{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 0,00045} + \frac{3,00}{0,06 \times 8,0 \times 10^5}$$

$$f_1 = 2,5625 \times 10^{-3} \text{ m/t}$$

$$f_2 = \frac{\alpha_2^3}{12 E J_L^2} + \frac{\alpha_2}{G A_2}$$

$$f_2 = \frac{2,5^3}{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 0,00045} + \frac{2,5}{0,06 \times 8,0 \times 10^5}$$

$$f_2 = 1,49884 \times 10^{-3} \text{ m/t}$$

$$k = \frac{1}{3,00 \times 2,5625 \times 10^{-3}} (1,80 + 2,00)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3,00 \times 1,49884 \times 10^{-3}} (1,75 + 2,0)^2$$

$$k = 5005,793 \text{ tm}$$

O parâmetro α será:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\alpha = 0,643 + 1,983 + 0,54 = 3,166$$

Substituindo-se os valores acima encontrados na equação (II-33), obtém-se

$$0,15304 \times 10^6 u''' - 5005,793 u' + 3,166 p(90,0-z)u' = 0$$

De acordo com a extensão da série $C(p)$, o programa fornece as aproximações para a carga crítica p apresentadas na tabela II-1, onde:

a) A primeira coluna indica o número de termos da série $C(p)$ obtida por

$$C(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n \phi_n$$

b) A segunda coluna indica o grau de polinômio obtido pela extensão da série.

c) A terceira coluna mostra a menor raiz real positiva obtida pela solução do polinômio.

TABELA II-1

| Nº DE TERMOS DA SÉRIE | GRAU DO POLINÔMIO | MENOR RAIZ REAL POSITIVA |
|-----------------------|-------------------|--------------------------|
| 3 | 1º | 17,69 |
| 4 | 1º | 53,09 |
| 5 | 2º | (*) |
| 6 | 2º | 18,00 |
| 7 | 3º | 22,66 |
| 8 | 3º | (*) |
| 9 | 4º | 18,29 |
| 10 | 4º | 21,23 |
| 11 | 5º | 36,87 |
| 12 | 5º | 18,60 |
| 13 | 6º | 20,67 |
| 14 | 6º | 29,88 |
| 15 | 7º | 18,98 |
| 16 | 7º | 20,43 |
| 17 | 8º | 27,13 |
| 18 | 8º | 19,49 |
| 19 | 9º | 20,38 |
| 20 | 9º | 58,85 |
| 21 | 10º | 38,66 |
| 22 | 10º | 20,54 |
| 23 | 11º | 24,61 |
| 24 | 11º | 34,88 |
| 25 | 12º | 20,21 |
| 26 | 12º | 41,18 |
| 27 | 13º | 32,29 |
| 28 | 13º | 21,23 |

continuaçāo

| | | |
|----|-----|-------|
| 29 | 14° | 23,50 |
| 30 | 14° | 30,62 |
| 31 | 15° | 21,88 |
| 32 | 15° | 23,64 |
| 33 | 16° | 29,48 |
| 34 | 16° | 22,74 |
| 35 | 17° | 23,51 |
| 36 | 17° | 46,97 |
| 37 | 18° | 38,22 |
| 38 | 18° | 23,91 |
| 39 | 19° | 27,54 |
| 40 | 19° | 36,11 |
| 41 | 20° | 24,42 |
| 42 | 20° | 41,33 |
| 43 | 21° | 34,61 |
| 44 | 21° | 24,89 |
| 45 | 22° | 25,42 |
| 46 | 22° | 33,73 |
| 47 | 23° | 25,15 |
| 48 | 23° | 25,26 |
| 49 | 24° | 25,11 |
| 50 | 24° | 25,23 |

(*) O polinômio não possui raiz real positiva.

A partir da tabela II-1, admite-se para a carga crítica o valor

$$P_{crit} = 25,23 \text{ t/m}$$

III - EDIFÍCIOS COM UM NÚCLEO DE SEÇÃO ABERTA

III-1) Hipóteses e Considerações

O comportamento das paredes de seção aberta à flexão simples, é análogo ao das paredes planas considerado no item (II-1). Considera-se que as mesmas são deformáveis por momento fletor e extremamente rígida à força cortante.

Devido à sua geometria poligonal, elas apresentam rigidez nas duas direções ortogonais. Para representar os deslocamentos nas direções principais de sua seção transversal x e y , usam-se respectivamente, as notações u e v .

Para a presente análise, leva-se em conta a hipótese básica da teoria de Flexão Simples, admitindo que as seções planas permanecem planas quando fletidas.

Em virtude da pequena espessura das paredes de seção aberta, considera-se ainda, que as mesmas têm o mesmo comportamento à torção que as vigas de seção delgada. Devido ao engastamento na base do edifício, as paredes de seção aberta quando solicitadas à torção, terão seus empênhos impedidos, introduzindo assim, o efeito do bimomento.

No apêndice (1), apresentam-se todas as formulações e convenções referentes a teoria de Flexo-torção necessárias para o desenvolvimento do processo.

III-2) Núcleo de seção aberta sem contraventamento

Considere-se a estrutura da figura (III-1), formada por uma única parede de seção aberta com momentos de inércia J_x J_y em relação aos eixos principais x e y , respectivamente.

Para definir geometricamente a estrutura, usam-se dois sistemas de referência:

a) Sistema de eixos local $Oxyz$ com a origem na base do edifício e formado por três eixos tri-ortogonais Ox , Oy e Oz , sendo o eixo Oz , vertical, passando pelo centro de gravidade da seção transversal da parede e os eixos Ox e Oy , coincidentes com os eixos principais da seção transversal da parede.

b) Sistema de eixos global $OXYZ$ com a origem na base do edifício e formado também, por três eixos tri-ortogonais, OX , OY e OZ , sendo este último, vertical, passando pelo centro de torção da seção transversal da parede. Os eixos OX e OY , estão nas direções principais da seção.

Definem-se ainda, as coordenadas do centro de torção em relação ao sistema de eixos $Oxyz$, por x_D e y_D .

A altura total do edifício é H e o carregamento externo, é constituído de carga vertical uniformemente distribuída ao longo do eixo Oz .

III-2-1) Montagem do sistema de equações diferenciais

A partir do carregamento mostrado na figura (III-1-a) admite-se que

a) O centro de torção D na cota genérica z , deslocou-se de u e v , segundo, respectivamente os eixos OX e OY .

b) Toda a seção transversal da parede na cota genérica z , gira em torno do centro de torção de um ângulo θ .

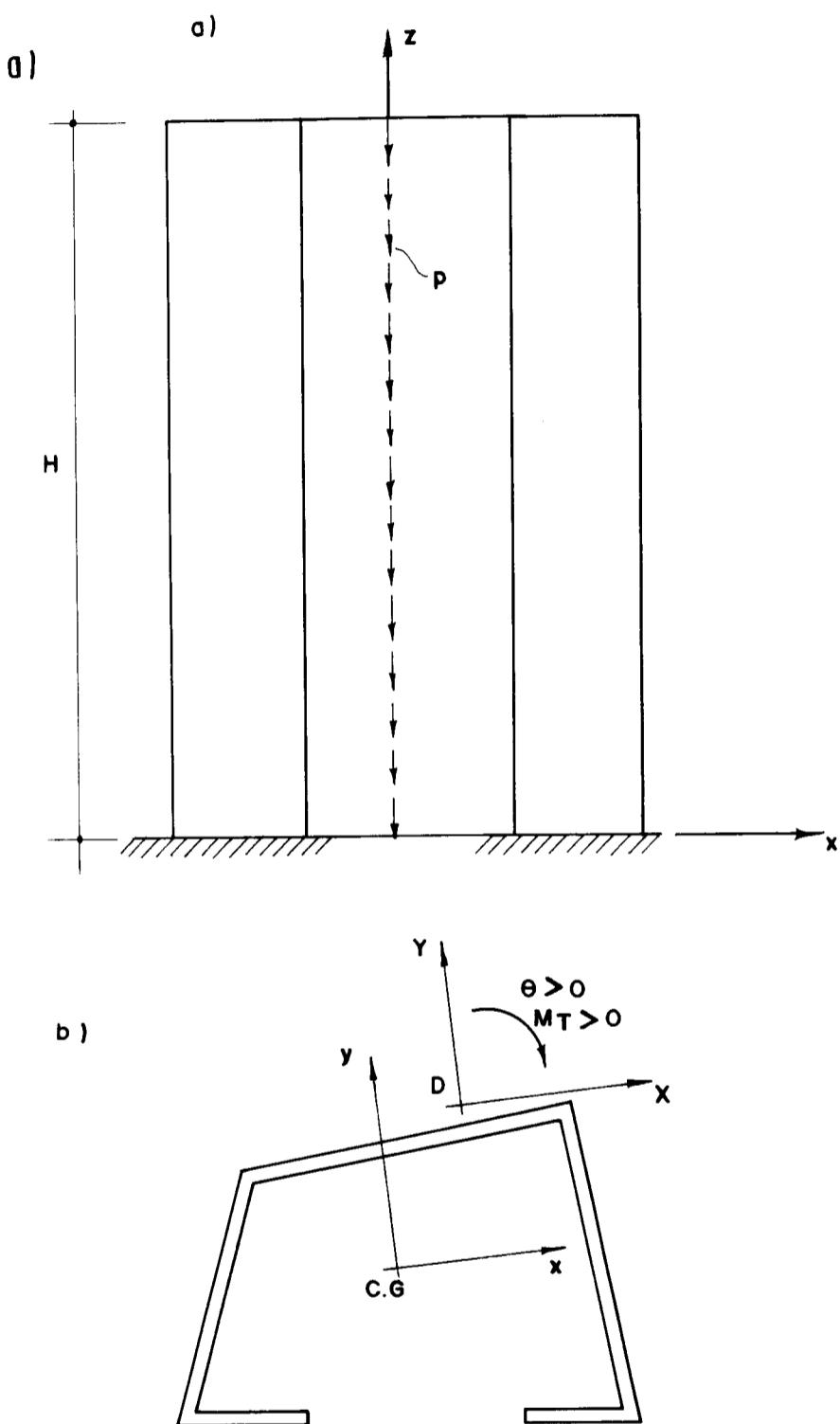


FIG. (III-1) — PAREDE DE SEÇÃO ABERTA

De acordo com a Teoria de Flexo-torção, o centro de torção é o ponto do plano da seção transversal por onde deve passar o plano das cargas transversais, para que a peça fique submetida somente a flexão. Portanto, a força cortante interna na parede, é obtida em função dos deslocamentos do centro de torção na cota genérica z .

Baseando-se na equação (II-3) e adotando-se a mesma convenção de sinais para os esforços mostrados na figura (II-1-c), escrevem-se

$$Q_X = -EJ_y u''' \quad (\text{III-1})$$

$$Q_Y = -EJ_x v'''$$

onde Q_X e Q_Y são as equações das forças cortantes na parede, à uma cota genérica z , nas direções X e Y , respectivamente e E é o módulo de elasticidade longitudinal da parede.

Sabe-se, que o comportamento de uma parede de seção aberta, solicitada à torção, é dado pela equação

$$M_T = M_l + M_{ft} \quad (\text{III-2})$$

onde M_T é o momento de torção total, M_l é o momento de torção livre e M_{ft} é o momento de flexo-torção.

De acordo com a teoria de flexo-torção, sabe-se, que:

$$M_l = GJ_T \theta' \quad (\text{III-3})$$

$$M_{ft} = -EJ_w \theta''' \quad (\text{III-4})$$

onde, G é o módulo de elasticidade transversal da parede, J_T é o momento de inercia à torção da seção transversal da parede, J_w é o momento setorial de inercia da seção transver-

sal e θ é a rotação em torno do centro de torção.

Com a finalidade de homogeneizar a notação adotada para os esforços, passa-se a indicar o momento de torção total M_T por Q_θ . Portanto, substituindo-se as equações: (III-3) e (III-4) em (III-2), obtém-se a equação do momento de torção total em torno do centro de torção à uma cota genérica z , positivo de acordo com a convenção apresentada no apêndice [1], como

$$Q_\theta = -EJ_w \theta''' + GJ_T \theta' \quad (\text{III-5})$$

Para a obtenção dos esforços externos, baseia-se na hipótese da técnica do meio contínuo de que as cargas transmitidas pelas lajes sobre a parede, distribuem-se uniformemente ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de gravidade da seção transversal da parede. Figura (III-2).

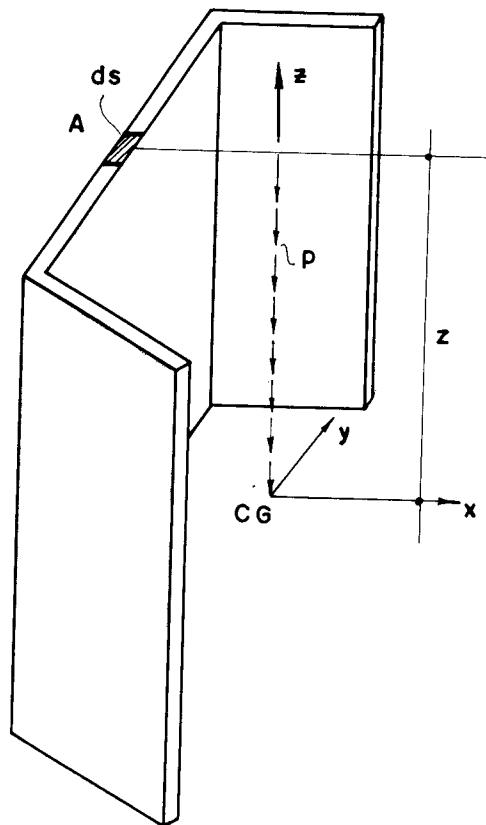


FIG. (III-2) – PAREDE DE SEÇÃO ABERTA SOLICITADA POR CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

Deduz-se facilmente que a ação das forças verticais na seção transversal da parede a uma cota z é dada pela força normal

$$N = p(H-z) \quad (\text{III-6})$$

Quando a parede estiver submetida a um carregamento capaz de provocar a sua instabilidade, ela passará a ocupar uma nova posição de equilíbrio. Tendo em vista a hipótese de que a seção é indeformável no seu plano, essa nova posição ficará caracterizada por três funções de z : os deslocamentos u e v do centro de torção nas direções X e Y , respectivamente, e a rotação θ de toda a seção em torno do centro de torção.

O deslocamento total de um elemento genérico de parede é facilmente equacionado considerando este deslocamento como:

- a) Uma translação u e v nas direções X e Y , respectivamente.
- b) Uma rotação θ em torno do centro de torção.

Supondo positivos os sentidos indicados na figura (III-3), o deslocamento total do elemento é dado por:

$$u_A = u + (y - y_D) \theta \quad (\text{III-7})$$

$$v_A = v - (x - x_D) \theta \quad (\text{III-8})$$

onde x e y são as coordenadas do elemento genérico de parede em relação ao sistema $Oxyz$ e, x_D e y_D são as coordenadas do centro de torção em relação ao mesmo sistema.

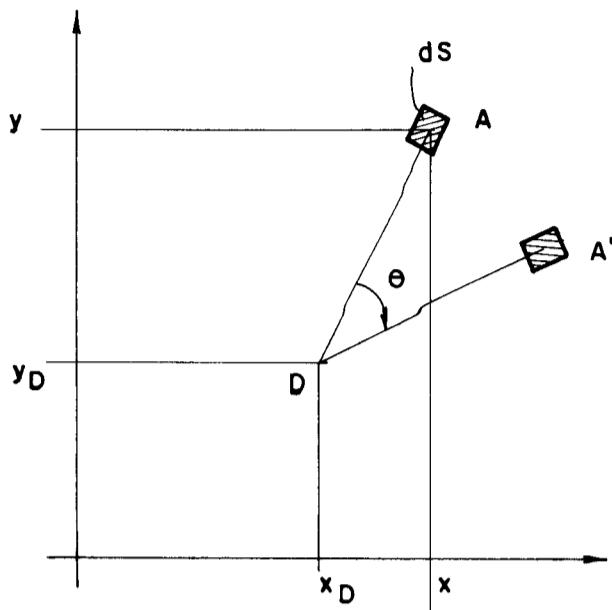


FIG. (III-3) – DESLOCAMENTO DE UM ELEMENTO GÊNERICO DA PAREDE DEVIDO A ROTAÇÃO

Pela equação (II-27), conclui-se que a força cortante, na seção de cota z de uma parede, solicitada à carga vertical uniformemente distribuída ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de gravidade de seção transversal, é dado pelo produto da força normal na referida seção, pela derivada primeira do seu deslocamento, na direção considerada.

Fazendo-se raciocínio semelhante para o elemento genérico A , solicitado pela força normal σds , deslocado da sua posição inicial de u_A , escreve-se

$$dQ_{ext,x} = \sigma ds u'_A \quad (\text{III-9})$$

onde $dQ_{ext,x}$ é a força cortante externa no elemento genérico da parede na direção X .

Analogamente, a força cortante externa no elemento genérico de parede na direção Y é

$$dQ_{ext,y} = \sigma dS v'_A \quad (\text{III-10})$$

onde v'_A é a derivada primeira do deslocamento do elemento de parede segundo Y.

A figura (III-4) mostra, esquematicamente, o sentido da força cortante nas duas direções, atuando sobre o elemento A de parede. Com base nesta figura e considerando-se sentidos positivos nela indicados, deduz-se a equação do momento de torção externo.

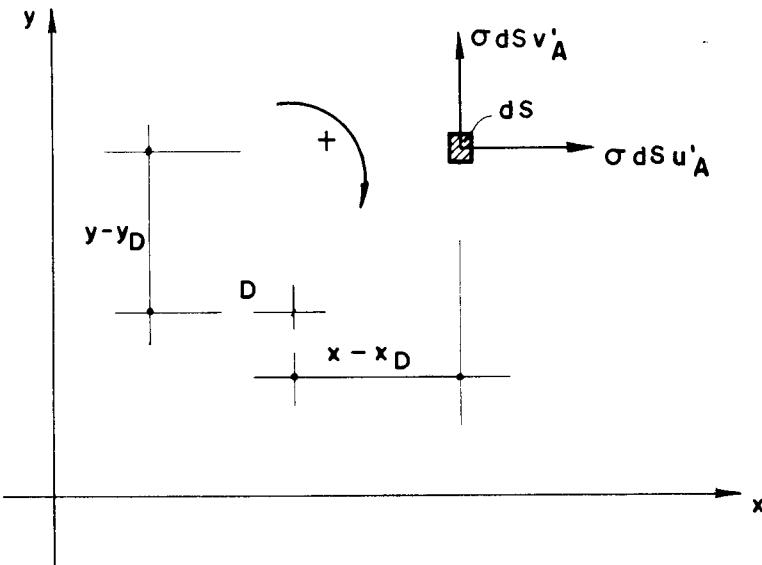


FIG. (III-4) — FORÇAS CORTANTES ELEMENTARES

$$dQ_{ext,\theta} = \sigma dS u'_A (y - y_D) - \sigma dS v'_A (x - x_D) \quad (\text{III-11})$$

Substituindo-se a derivada primeira de u'_A e v'_A nas equações (III-9), (III-10) e (III-11) obtém-se:

$$dQ_{ext,x} = \sigma [u' + (y - y_D) \theta'] dS$$

$$dQ_{ext,y} = \sigma [v' - (x-x_D) \theta'] ds$$

$$\begin{aligned} dQ_{ext,\theta} &= \sigma [u' + (y-y_D) \theta'] (y-y_D) ds - \\ &- \sigma [v' - (x-x_D) \theta'] (x-x_D) ds \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$

Para obter os esforços externos na parede, integram-se, ao longo da superfície de cota z , as equações anteriores.

$$\begin{aligned} Q_{ext,x} &= \int_S dQ_{ext,x} = \int_S \sigma [u' + (y-y_D) \theta'] ds \\ Q_{ext,y} &= \int_S dQ_{ext,y} = \int_S \sigma [v' - (x-x_D) \theta'] ds \\ Q_{ext,\theta} &= \int_S dQ_{ext,\theta} = \int_S \sigma [u' + (y-y_D) \theta'] (y-y_D) ds - \\ &- \int_S \sigma [v' - (x-x_D) \theta'] (x-x_D) ds \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

efetuando-se as integrações e lembrando-se que:

$$\begin{aligned} \int_S y ds &= 0, & \int_S x ds &= 0, \\ \int_S y^2 ds &= J_x, & \int_S x^2 ds &= J_y \end{aligned} \quad (\text{III-14})$$

e fazendo-se

$$I_o = J_x + J_y \quad (\text{III-15})$$

$$\sigma = \frac{p(H-z)}{S} \quad (\text{III-16})$$

as equações dos esforços externos são:

a) Força cortante externa segundo x

$$Q_{ext,x} = p(H-z) (u' - y_D \theta') \quad (\text{III-17})$$

onde, p , é a carga uniformemente distribuída ao longo do eixo z , H é a altura total do edifício, u' , é o deslocamento do centro de torção na direção X , y_D , é a coordenada do centro de torção e θ' é a rotação em torno do centro de torção.

b) Força cortante externa segundo y .

$$Q_{ext,y} = p(H-z) (v' + x_D \theta') \quad (\text{III-18})$$

onde, v' , é o deslocamento do centro de torção na direção Y e x_D , é a coordenada do centro de torção em relação ao sistema $Oxyz$.

c) Momento de torção total externo em relação ao centro de torção.

$$\begin{aligned} Q_{ext,\theta} = p(H-z) & \left[-u'y_D + v'x_D + \right. \\ & \left. + (y_D^2 + x_D^2 + \frac{I_o}{S})\theta' \right] \end{aligned} \quad (\text{III-19})$$

onde, I_o , é o momento polar de inércia da seção transversal em relação ao seu centro de gravidade e S , é a área da seção transversal.

A equação geral de equilíbrio na parede, exige que os esforços internos, sejam iguais aos esforços externos. Assim, de acordo com as equações (III-1), (III-5), (III-17),

(III-18) e (III-19) obtém-se o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
 -EJ_y u''' &= p(H-z) (u' - y_D \theta') \\
 -EJ_x v''' &= p(H-z) (v' + x_D \theta') \\
 -EJ_\omega \theta''' + GJ_T \theta' &= p(H-z) \left[-u'y_D + \right. \\
 &\quad \left. + v'x_D + (y_D^2 + x_D^2 + \frac{I_o}{S}) \theta' \right]
 \end{aligned} \tag{III-20}$$

Tais equações representam, respectivamente, o equilíbrio de força cortante na direção X , de força cortante na direção Y e de momento de torção total em torno do centro de torção.

As equações (III-20) podem ser representadas na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \\
 p(H-z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_D & x_D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_o}{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{III-21}$$

ou ainda

$$- [K] \begin{Bmatrix} D'''(z) \\ D''(z) \end{Bmatrix} + [K_T] \begin{Bmatrix} D'(z) \\ D''(z) \end{Bmatrix} = (H-z) [t]^T [N] [t] \begin{Bmatrix} D'(z) \\ D''(z) \end{Bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

onde

$$[K] = \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix} \quad (\text{III-23})$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_T \end{bmatrix} \quad (\text{III-24})$$

$$\{D'(z)\} = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \quad (\text{III-25})$$

$$\{D'''(z)\} = \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} \quad (\text{III-26})$$

$[t]^T$, é a transposta de $[t]$ e

$$[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_D \\ 0 & 1 & x_D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

$[N]$ é dada por:

$$[N] = p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_o}{s} \end{bmatrix} \quad (\text{III-28})$$

Fazendo

$$[P] = [t]^T [N] [t] \quad (\text{III-29})$$

a equação (III-22) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} [K]\{\bar{D}'''(z)\} - [K_T]\{D'(z)\} + \\ + (H-z)[P]\{D'(z)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-30})$$

Com a finalidade de diminuir a ordem das equações diferenciais, adotam-se

$$\xi = \frac{z}{H} \quad (\text{III-31})$$

$$\{\delta(\xi)\} = \{D'(z)\} \quad (\text{III-32})$$

portanto

$$\{D'''(z)\} = \frac{1}{H^2} \{\delta''(\xi)\} \quad (\text{III-33})$$

Substituindo-se as equações (III-31), (III-32) e (III-33) na equação (III-30), obtém-se

$$[K]\{\delta''(\xi)\} - H^2 [K_T]\{\delta(\xi)\} + H^3(1-\xi)[P]\{\delta(\xi)\} = 0 \quad (\text{III-34})$$

Considerando-se o carregamento da figura (III-1) e que a parede tem sua base engastada e seu topo livre, as condições de contorno são:

a) Devido o engastamento na base, a parede tem suas distorções angulares nos planos xz e yz e a derivada primeira da rotação em torno do centro de torção, impedidos. Assim, tem-se

$$\{D'(0)\} = \begin{Bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \\ \theta'(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e portanto

$$\{\delta(0)\} = \{0\} \quad (\text{III-35})$$

onde $\xi = 0$ corresponde à base do edifício.

b) Em virtude de no topo do edifício, não se ter momentos fletores e bimomento aplicados, pode-se escrever a segunda condição de contorno como:

$$\left\{ D''(H) \right\} = \begin{Bmatrix} u''(H) \\ v''(H) \\ \theta''(H) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

lembrando-se que

$$\xi = \frac{z}{H}$$

vem

$$\left\{ \delta'(1) \right\} = \{ 0 \} \quad (\text{III - 36})$$

onde $\xi=1$ corresponde ao topo do edifício.

A equação (III-34), juntamente com as equações .. (III-35) e (III-36), permitem determinar o valor da carga critica p , cuja técnica de obtenção apresenta-se no apêndice (2).

III-3) Parede de seção aberta contraventada por lintéis

Aumenta-se, consideravelmente, a rigidez das paredes de seção aberta, quando introduz-se ao nível dos andares um contraventamento por lintéis. A rigidez à flexão dos lintéis aumenta a rigidez da estrutura, com isso, diminuindo o empenamento da seção transversal.

A figura (III-5) mostra um edifício com uma parede de seção aberta, contraventada por lintéis ao nível dos andares.

Para definir geometricamente a estrutura, usam-se os sistemas de referência, considerados no item (III - 2).

A altura total do edifício é H e o pé-direito entre lintéis é h .

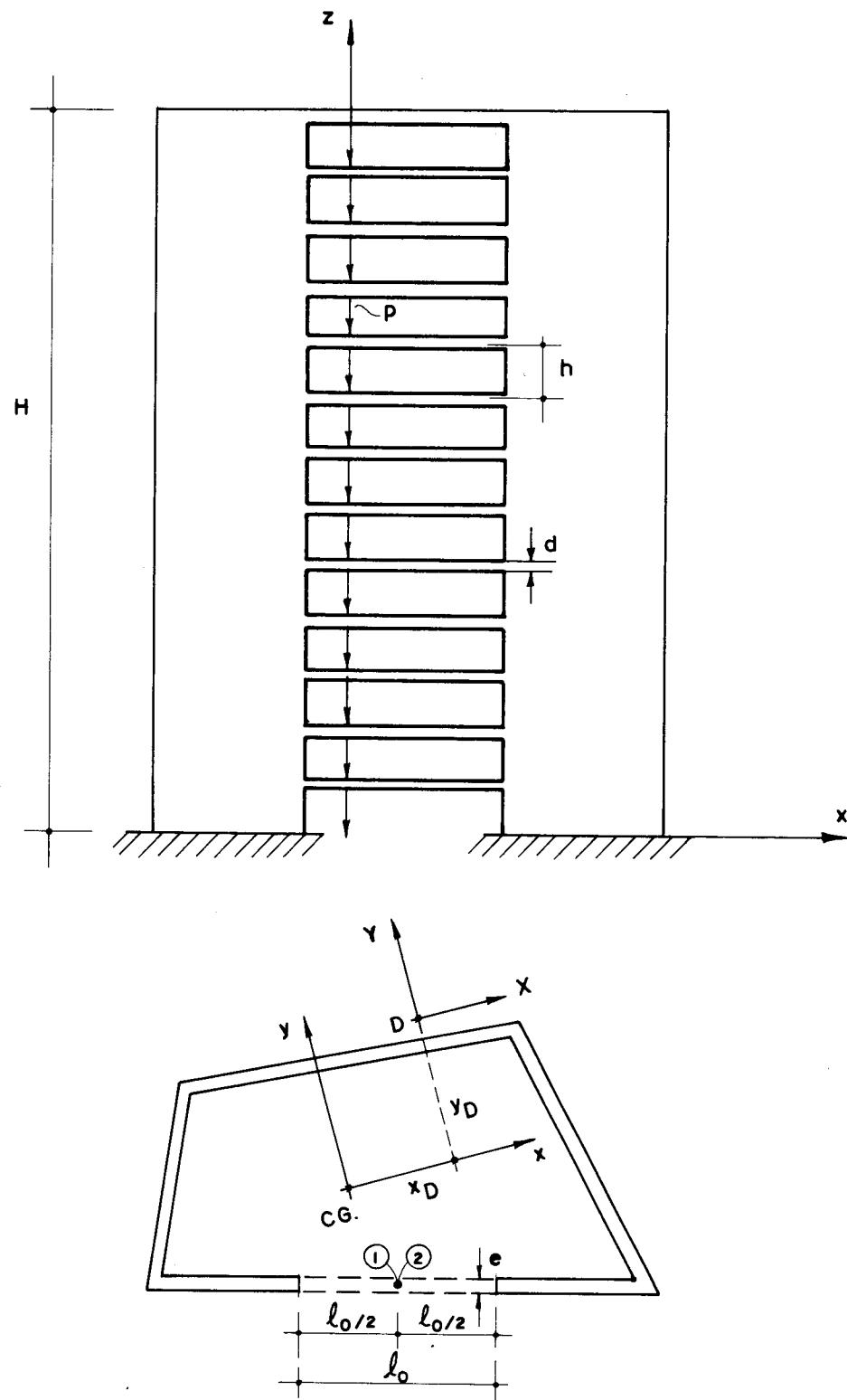


FIG. (III-5) – EDIFÍCIO COM PAREDE DE SEÇÃO ABERTA
CONTRAVENTADA POR LINTÉIS

O carregamento externo é constituído de carga vertical uniformemente distribuída ao longo do eixo Oz .

Para esta análise, considera-se que os lintéis são engastados nas paredes e que os pontos médios dos seus vãos, são pontos de momento nulo. Tendo em vista a técnica do meio contínuo considera-se ainda, que os lintéis são continuamente distribuídos ao longo da altura da parede.

Admite-se que a presença dos lintéis, não altera substancialmente a posição do centro de torção da estrutura. Quanto à esta hipótese, a mesma foi verificada calculando os esforços internos na estrutura pelo processo apresentado em BARBOSA [2]. Os resultados obtidos com esta última técnica e com a hipótese admitida, não apresentaram diferença apreciável.

III-3-1) Montagem do sistema de equações diferenciais

A figura (III-6), representa um lintel seccionado no ponto médio do seu vão.

Nestes pontos, aparecem forças cortantes incógnitas, que, por serem de mesmo valor e de sentidos opostos, não produzem momentos fletores em relação aos eixos x ou y da seção transversal da parede. Portanto, as equações de força cortante na parede, ficam inalteradas com a introdução dos lintéis.

Baseando-se nas equações (III-1), escrevem-se

$$Q_x = - EJ_y u'''$$

e

(III-37)

$$Q_y = - EJ_x v'''$$

onde Q_x e Q_y são, respectivamente, as forças cortantes segundo X e Y na cota genérica z .

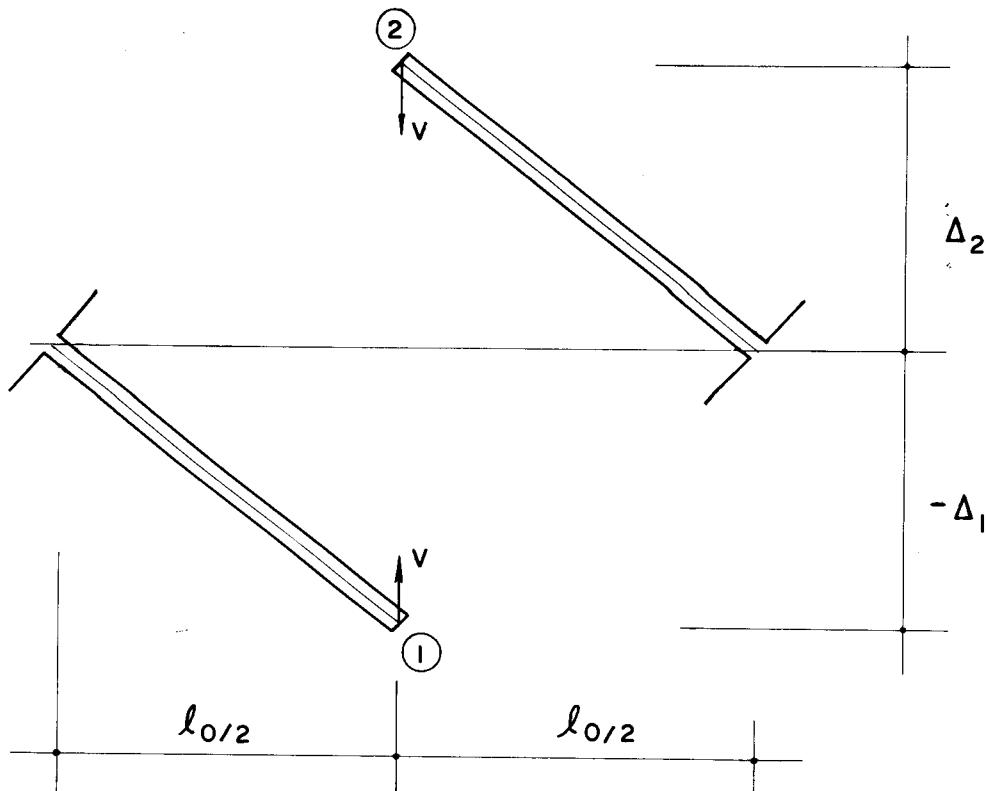


FIG. (III - 6) - DESLOCAMENTO DO LINTEL SECCIONADO

As forças cortantes incógnitas, apesar de não possuirem resultante, produzem um bimomento na parede, cujo efeito é impedir o empenamento da seção transversal da parede, alterando assim a equação de momento de torção total.

Da teoria de flexo-torção, sabe-se, que em uma determinada seção, o bimomento produzido por uma força concentrada aplicada na direção longitudinal, positiva se de tração, é o produto desta força pela área setorial do ponto de aplicação.

Então vem

$$B_1^+ = B_1^- + V \omega_1 \quad (\text{III-38})$$

e

$$B_2^+ = B_2^- - V \omega_2 \quad (\text{III-39})$$

onde o sinal [+] indica os valores acima dos lintéis e o sinal [-], valores abaixo dos mesmos.

Tendo em vista a solução pela técnica do meio contínuo, supõe-se que a força cortante V esteja continuamente distribuída ao longo da altura. Assim, o acréscimo do bimomento na parede é dado por

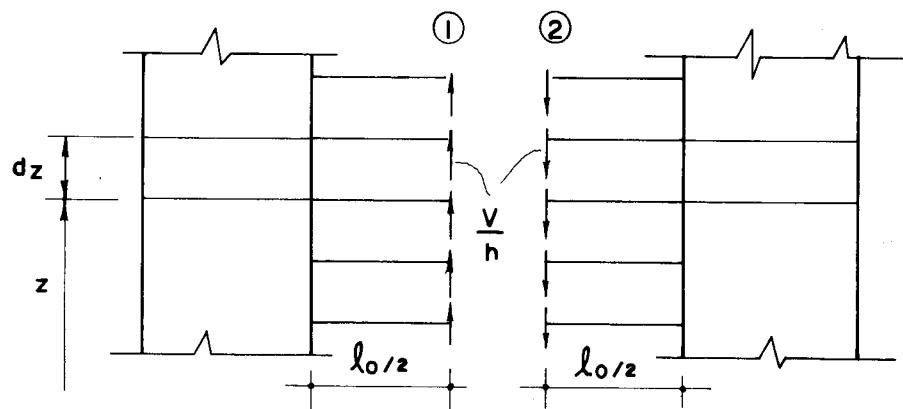


FIG. (III-7) – CONVENÇÃO PARA ESFORÇOS POSITIVOS

$$dB = dB_1 + dB_2 \quad (\text{III-40})$$

onde

$$dB_1 = \frac{V}{h} dz \omega_1$$

e

$$dB_2 = -\frac{V}{h} dz \quad \omega_2 \quad (\text{III-41})$$

onde, ω_1 e ω_2 são as áreas setoriais extrapoladas aos pontos 1 e 2 (pontos médios dos vãos dos lintéis), respectivamente.

Da Teoria de Flexo-Torção, sabe-se, que a derivada do bimomento é igual a menos o momento de flexo-torção. Portanto, substituindo-se as equações (III-41) em (III-40) deduz-se o momento de flexo-torção proveniente da ação do lintel, em função da incógnita V como

$$dB = \frac{V}{h} (\omega_1 - \omega_2) dz$$

ou

$$M_{ft} = -\frac{V}{h} (\omega_1 - \omega_2) \quad (\text{III-42})$$

Para este tipo de seção, sabe-se, que a diferença entre as áreas setoriais nos pontos 1 e 2, é igual a duas vezes a área limitada pelo esqueleto, isto é

$$\omega_1 - \omega_2 = 2 A_e \quad (\text{III-43})$$

Determina-se o valor da incógnita V , compatibilizando-se os deslocamentos dos pontos médios dos vãos dos lintéis. Estes pontos deslocam-se devido à flexão da parede nas direções X e Y , à torção da parede e à deformação dos lintéis por flexão e força cortante.

A figura (III-8) representa uma parede de seção aberta, solicitada por um carregamento capaz de provocar sómente flexão segundo a direção X .

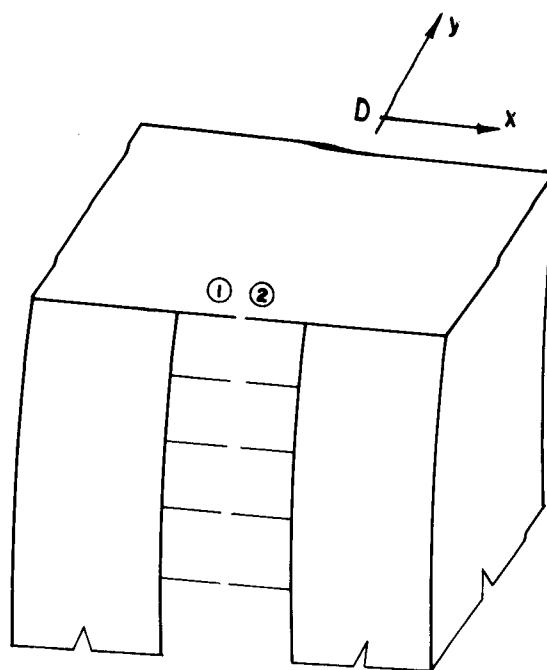


FIG. (III-8) — PAREDE DESLOCADA SEGUNDO X

Nos pontos médios dos vãos dos lintéis, é efetuado um corte. Tendo em vista a hipótese da teoria de flexão simples (seções planas permanecem planas depois de fletidas), os pontos 1 e 2 dos lintéis, por serem coincidentes na estrutura real, deslocam-se, segundo a vertical, de um mesmo valor e sentido, portanto o seu deslocamento relativo é nulo.

Fazendo-se raciocínio análogo para a parede fletida na direção Y, conclui-se que o deslocamento relativo entre os pontos 1 e 2 dos lintéis também é nulo. Neste caso o deslocamento vertical dos lintéis é devido somente à torção da parede e à flexão dos mesmos.

Considerando-se positivos os deslocamentos para cima (sentido do eixo Oz), os empenamentos dos lintéis nos pontos 1 e 2 são obtidos pela teoria de flexo-torção de acordo com a figura (III-6) por

$$\Delta_1 = \omega_1 \theta' \quad (\text{III-44})$$

$$\Delta_2 = \omega_2 \theta' \quad (\text{III-45})$$

Como, na estrutura real, os pontos 1 e 2 mantêm-se ligados, compatibilizam-se os deslocamentos verticais dos mesmos por

$$\omega_1 \theta' + \delta = \omega_2 \theta' - \delta \quad (\text{III-46})$$

onde δ , é o deslocamento dos pontos médios dos vãos dos lintéis por efeito de momento fletor e força cortante nos mesmos e obtido baseando-se na equação (II-11), como:

$$\delta = \frac{Vl_o^3}{24 EJ_L} + \frac{Vl_o}{2 GA} \quad (\text{III-47})$$

onde l_o é o vão do lintel.

Substituindo-se a equação (III-47) na equação (III-46), obtém-se o valor da força cortante incógnita em função da derivada primeira da rotação θ .

$$V = - \frac{1}{f} (\omega_1 - \omega_2) \theta' \quad (\text{III-48})$$

onde

$$f = \frac{l_o^3}{12 EJ_L} + \frac{l_o}{GA} \quad (\text{III-49})$$

A partir das equações (III-48) e (III-42), obtém-se o valor do momento de flexo-torção introduzido pelos lintéis na parede, como

$$M_{ft} = \frac{1}{fh} (\omega_1 - \omega_2)^2 \theta' \quad (\text{III-50})$$

Adicionando-se o efeito dos lintéis na equação ge-

ral do momento de torção total, obtem-se:

$$Q_\theta = - EJ_\omega \theta''' + GJ_T \theta' + \frac{1}{fh} (\omega_1 - \omega_2)^2 \theta'$$

(III-51)

onde, J_ω e J_T são, respectivamente, o momento setorial de inercia e momento de inércia à torção livre da seção transversal da parede.

Agrupando-se as equações (III-37) e (III-51) e escrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_\theta \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_T \end{pmatrix} + \frac{1}{fh} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_1 - \omega_2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (III-52)$$

ou

$$Q = - [K] \left\{ D'''(z) \right\} + \left([K_T] + [k] \right) \left\{ D'(z) \right\}$$

(III-53)

onde

$$[K] = \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix} \quad (\text{III-54})$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_T \end{bmatrix} \quad (\text{III-55})$$

Na equação (III-53), $[k]$ é a matriz que dá a contribuição do lintel calculada por

$$[k] = \frac{1}{fh} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_1 - \omega_2)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-56})$$

$\{D'(z)\}$ e $\{D'''(z)\}$ são, respectivamente, a derivada primeira e terceira do vetor dos deslocamentos referentes ao sistema de eixo $OXYZ$.

É importante observar, que para o caso particular de uma única parede, o lintel contribui apenas na rigidez à torção da parede, não alterando a rigidez à força cortante.

Como o carregamento externo considerado nesta análise é idêntico ao considerado na análise da parede de seção aberta sem contraventamento, os esforços externos são obtidos à partir da equação (III-22), como

$$\{Q_{ext.}\} = (H-z)[t]^T [N][t]\{D'(z)\} \quad (\text{III-57})$$

ou

$$Q_{ext} = (H-z)[P]\{D'(z)\} \quad (\text{III-58})$$

onde $[t]$, $[N]$ e $[P]$ são dadas, respectivamente, pelas equações (III-27), (III-28) e (III-29).

Para que haja equilíbrio na estrutura, é necessário que os esforços internos sejam iguais aos esforços externos. Combinando-se a equação (III-53) com a equação (III-58) obtém-se o sistema de equações diferenciais.

$$-[K]\{D'''(z)\} + ([K_T] + [k])\{D'(z)\} = (H-z)[P]\{D'(z)\}$$

(III-59)

ou

$$[K]\{D'''(z)\} - ([K_T] + [k])\{D'(z)\} +$$

$$+ (H-z)[P]\{D'(z)\} = \{0\} \quad (\text{III-60})$$

Abaixando-se a ordem da equação (III-60) e usando-se as equações (III-31) e (III-32) obtém

$$[K]\{\delta''(\xi)\} - H^2([K_T] + [k])\{\delta(\xi)\} + H^3(1-\xi)[P]\{\delta(\xi)\} = \{0\}$$

(III-61)

A equação (III-61) juntamente com as condições de contorno dadas pelas equações (III-35) e (III-36), permitem que se determine a carga crítica p de instabilidade, cuja técnica de obtenção apresenta-se no apêndice (2).

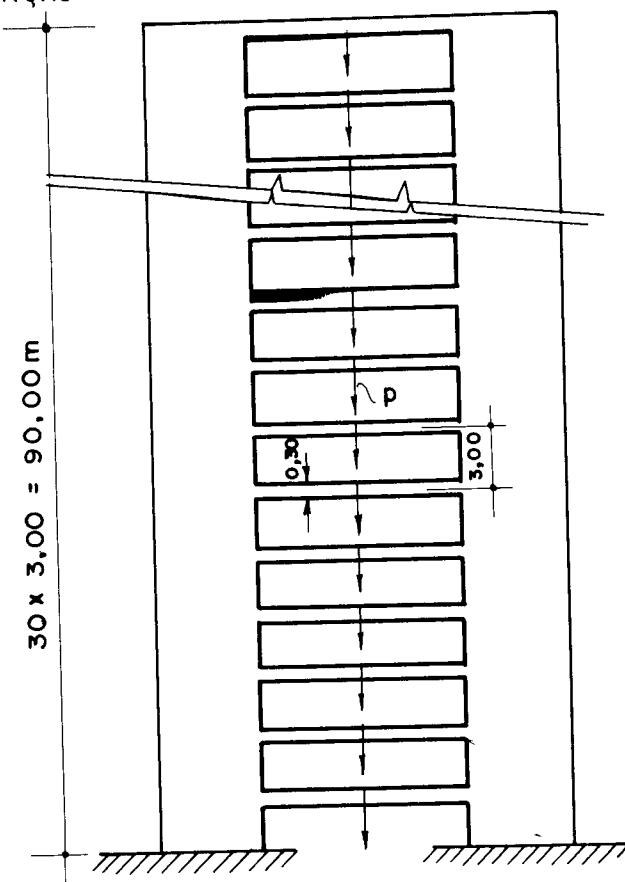
III-3-2) Exemplo 2

A figura (III-9), mostra uma estrutura de 3,00 m de pé direito com 30 andares, formada por uma única parede de seção aberta uniforme ao longo de toda a altura do edifício.

Calcula-se a carga crítica, p_{crit} , uniformemente distribuída ao longo do eixo que passa pelo centro de gravidade da seção transversal da parede.

Para esta análise, serão estudadas duas estruturas: a primeira com parede de seção aberta sem contraventamento, e a segunda contraventada, ao nível dos andares, por lintéis de seção transversal 25x30 cm. Para o módulo de elasticidade longitudinal de toda a estrutura considerar-se-á o valor $E = 2,0 \times 10^6$ t/m² e para o módulo de elasticidade transversal o valor $G = 8,0 \times 10^5$ t/m².

a) ELEVAÇÃO



b) PLANTA

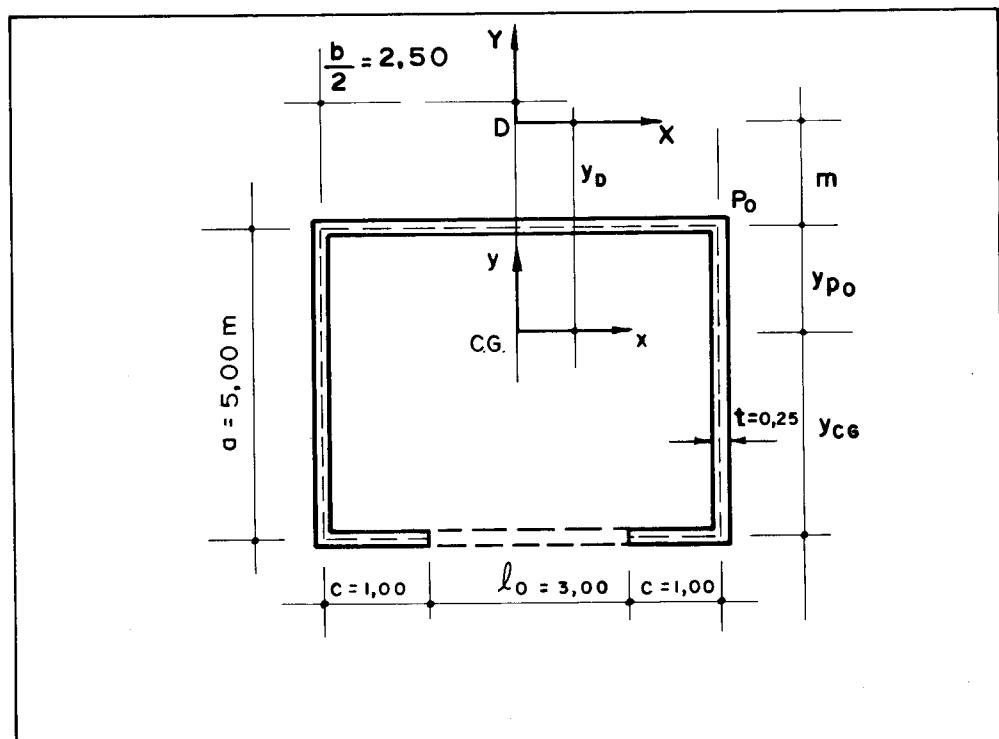


FIG. (III-9) — EDIFÍCIO COM UMA PAREDE DE SEÇÃO ABERTA

Passa-se a seguir, à determinação dos parâmetros geométricos de seção transversal da parede.

a) Posição do centro de gravidade

Sendo o eixo y de simetria, conclui-se facilmente, que o centro de gravidade está sob o referido eixo, então

$$x_{cg} = 0$$

$$y_{cg} = \frac{b \cdot t \cdot a + 2(t \cdot a \cdot \frac{a}{2})}{b \cdot t + 2 \cdot a \cdot t + 2 \cdot c \cdot t}$$

$$y_{cg} = \frac{5,00 \times 0,25 \times 5,00 + 2(0,25 \times 5,00 \times \frac{5,00}{2})}{5,00 \times 0,25 + 2(5,00 \times 0,25) + 2 \times 1,00 \times 0,25}$$

$$y_{cg} = 2,94 \text{ m}$$

b) Momentos de Inércia

$$\begin{aligned} J_x &= 2 \left[\frac{t \cdot a^3}{12} + t \cdot a (y_{cg} - \frac{a}{2})^2 \right] + \frac{b \cdot t^3}{12} \\ &\quad + b \cdot t (a - y_{cg})^2 + 2 \left[\frac{c \cdot t^3}{12} + c \cdot t \cdot y_{cg}^2 \right] \\ J_x &= 2 \left[\frac{0,25 \times 5,00^3}{12} + 0,25 \times 5,00 (2,94 - \frac{5,00}{2})^2 \right] + \\ &\quad + \frac{5,00 \times 0,25^3}{12} + 5,00 \times 0,25 (5,00 - \\ &\quad - 2,94)^2 + 2 \left[\frac{1,00 \times 0,25^3}{12} + 1,00 \times 0,25 \times 2,94^2 \right] \end{aligned}$$

$$J_x = 15,32 \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned}
 J_y &= \frac{t \cdot b^3}{12} + 2 \left[\frac{a \cdot t^3}{12} + a \cdot t \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] + \\
 &\quad + 2 \left[\frac{t \cdot c^3}{12} + t \cdot c \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2} \right)^2 \right] \\
 J_y &= \frac{0,25 \times 5,00^3}{12} + 2 \left[\frac{5,00 \times 0,25}{12} + \right. \\
 &\quad \left. + 5,00 \times 0,25 \cdot \left(\frac{5,00}{2} \right)^2 \right] + 2 \left[\frac{0,25 \times 1,00^3}{12} + \right. \\
 &\quad \left. + 0,25 \times 1,00 \cdot \left(\frac{5,00}{2} - \frac{1,00}{2} \right)^2 \right] \\
 J_y &= 20,28 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

c) Centro de Torção

Para a seção da figura (II-9) as coordenadas do centro de torção ficam determinadas por:

$$x_D = 0$$

$$y_D = m + y_{po}$$

onde

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{J_y} \cdot t \cdot \frac{\alpha}{4} \left[b^2 \cdot \alpha + \frac{2}{3} b^3 - \frac{l_o^2}{3} (3b - l_o) \right] \\
 m &= \frac{1}{20,28} \times 0,25 \times \frac{5,00}{4} \left[5,00^2 \times 5,00 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} \times 5,00^3 - \frac{3,00^2}{3} (3 \times 5,00 - 3,00) \right] \\
 m &= 2,65 \text{ m}
 \end{aligned}$$

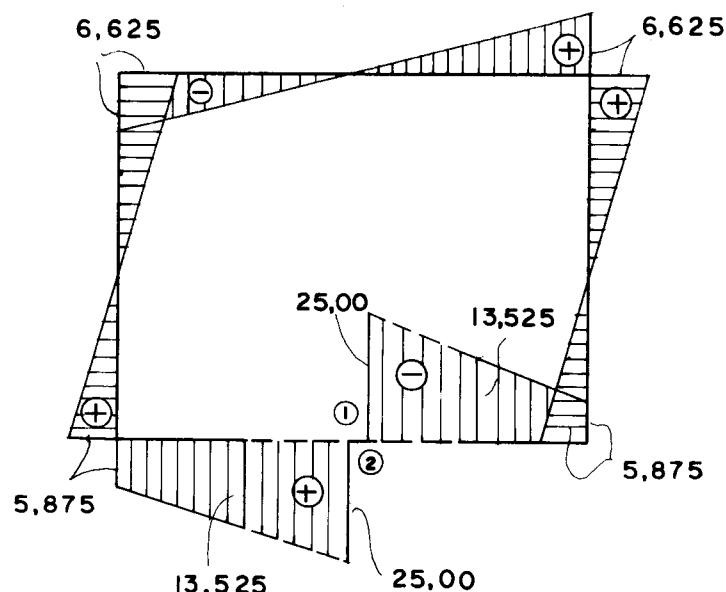
$$y_{po} = \alpha - y_{cg}$$

$$y_{po} = 5,00 - 2,94 = 2,06 \text{ m}$$

então

$$y_s = 4,71 \text{ m}$$

d) Diagrama de Área setorial



e) Momento setorial de inércia

$$J_\omega = \int_S \omega^2 dS$$

Para seções abertas com espessura constante tem-se

$$J_\omega = t \int_S \omega^2 ds$$

onde s é uma coordenada na linha do esqueleto, com sentido

arbitrário e origem convenientemente escolhida.

De acordo com o diagrama de área setorial, obtém-se

$$\begin{aligned}
 J_{\omega} &= 2X0,25 \left\{ \frac{1}{3} X6,625 X6,625 X2,5 + \frac{1}{6} \left\{ -6,625 \right. \right. \\
 &\quad \left[2(-6,625) + 5,875 \right] + 5,875 (-6,625 + \\
 &\quad \left. \left. + 2X5,875 \right\} 5,00 + \frac{1}{6} \left[5,875 (2X5,875 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 13,525) + 13,525 (5,875 + 2X13,525) \right] X 1,00 \right\}
 \end{aligned}$$

$$J_{\omega} = 100,67 \text{ m}^6$$

f) Momento de inércia à torção livre

$$J_T = \frac{1}{3} \int_{s_1}^{s_1} t^3 ds$$

O momento de inércia à torção livre para as seções compostas por retângulos estreitos de largura t e altura s é dado por

$$J_T = \frac{1}{3} \sum t^3 s$$

então

$$J_T = \frac{1}{3} \left[0,25^3 (1,00 + 5,00 + 5,00 + 5,00 + 1,00) \right]$$

$$J_T = 0,0885 \text{ m}^4$$

g) Momento polar de inércia em relação ao centro de gravidade

$$I_o = J_x + J_y$$

$$I_o = 15,32 + 20,28$$

$$I_o = 35,60 \text{ m}^4$$

h) Área da seção transversal

$$S = 0,25(1,00+5,00+5,00+5,00+1,00)$$

$$S = 4,25 \text{ m}^2$$

III-3-2-1) Parede de seção aberta sem contraventamento

a) Montagem da matriz $[K]$

A equação (III-23) fornece

$$[K] = \begin{bmatrix} EJ_y & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x & 0 \\ 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix}$$

Para $E = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ a matriz $[K]$ será:

$$[K] = \begin{bmatrix} 40,56 & 0 & 0 \\ 0 & 30,64 & 0 \\ 0 & 0 & 201,34 \end{bmatrix} \times 10^6$$

b) Montagem da matriz $[K_T]$

A equação (III-24) fornece

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_T \end{bmatrix}$$

Para $G = 8 \times 10^5 \text{ t/m}^2$, a matriz $[K_T]$ será:

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,8 \end{bmatrix} \times 10^3$$

c) Montagem da matriz $[P]$

Da equação (III-27) tem-se:

$$[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da equação (III-28) obtém-se:

$$[N] = p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8,37 \end{bmatrix}$$

O valor da matriz $[P]$ é obtido pela equação (III-29) como

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & 1 \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8,37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & 30,55 \end{bmatrix} p$$

O sistema de equações diferenciais é obtido pela equação (III-30) como:

$$\begin{bmatrix} 40,56 & 0 & 0 \\ 0 & 30,64 & 0 \\ 0 & 0 & 201,34 \end{bmatrix} X10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,8 \end{bmatrix} X10^3$$

$$X \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} + (90,0-z) p \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & 30,55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d) Resultados

Observa-se, no sistema de equações diferenciais, que a equação de equilíbrio à força cortante segundo Y é independente das equações de equilíbrio à força cortante na direção X e à momento torçor. Tal conclusão é imediata,

em virtude do eixo OY ser eixo de simetria da seção transversal da parede.

Em vista desta observação, processou-se o programa para resolver as seguintes equações.

d-1) Solução da equação diferencial de equilíbrio à força cortante segundo y .

$$30,64 \times 10^6 v''' + (90,0 - z) p.v' = 0$$

De acordo com a extensão da série $C_{(p)}$ o programa forneceu as aproximações para a carga crítica p , apresentadas na tabela III-1.

A partir da tabela III-1, admite-se para carga crítica o valor

$$p_{crit} = 329,40 \text{ t/m}$$

Esta carga crítica refere-se a instabilidade por flexão pura ou flambagem de Euler.

Para efeito de comparação, tem-se a solução por função de Bessel fornecida por TIMOSHENKO & GERE [3].

$$p_{crit} = \frac{7,837 EJ}{H^3}$$

Substituindo-se os valores de E , J e H obtém-se

$$p_{crit} = 329,39 \text{ t/m}$$

TABELA III-1

| Nº DE TERMOS DA SÉRIE | GRAU DO POLINOMIO | MENOR RAIZ REAL POSITIVA |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 3 | 1º | 84,06 |
| 4 | 1º | 252,18 |
| 5 | 2º | (*) |
| 6 | 2º | 203,10 |
| 7 | 3º | 234,82 |
| 8 | 3º | (*) |
| 9 | 4º | 322,38 |
| 10 | 4º | 296,07 |
| 11 | 5º | 355,26 |
| 12 | 5º | 332,90 |
| 13 | 6º | 325,64 |
| 14 | 6º | 330,13 |
| 15 | 7º | 329,71 |
| 16 | 7º | 329,23 |
| 17 | 8º | 329,41 |
| 18 | 8º | 329,41 |
| 19 | 9º | 329,40 |
| 20 | 9º | 329,40 |
| 21 | 10º | 329,40 |
| 22 | 10º | 329,40 |
| 23 | 11º | 329,40 |
| 24 | 11º | 329,40 |
| 25 | 12º | 329,40 |
| 26 | 12º | 329,40 |

(*) - O polinômio não possui raiz real positiva.

d-2) Solução simultânea das equações de equilíbrio à força cortante segundo X e à momento torçor.

$$\begin{bmatrix} 40,56 & 0 \\ 0 & 201,34 \end{bmatrix} X 10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 70,8 \end{bmatrix} X 10^3 \begin{Bmatrix} u' \\ \theta' \end{Bmatrix} +$$

$$(90,0 - z) p \begin{bmatrix} 1 & -4,71 \\ -4,71 & 30,55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com a extensão da série $[C(p)]$ até seu 26º termo, o programa forneceu os resultados apresentados na tabela III-2 onde:

1) Na primeira coluna escreve-se o número de termos da série $[C(p)]$ obtida por.

$$[C(p)] = \sum_{n=1}^{\infty} n [\phi_n]$$

2) Na segunda coluna indica-se o grau do polinômio, obtido pelo cálculo do determinante de $[C(p)]$.

3) A terceira coluna fornece a menor raiz real positiva do polinômio.

TABELA III-2

| Nº DE TERMOS DA SÉRIE | GRAU DO POLINÔMIO | MENOR RAIZ REAL POSITIVA |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 3 | 20 | 33,41 |
| 4 | 20 | 100,25 |
| 5 | 40 | (*) |
| 6 | 40 | 61,38 |
| 7 | 60 | 76,49 |
| 8 | 60 | (*) |
| 9 | 80 | 101,16 |
| 10 | 80 | 91,64 |
| 11 | 100 | 452,33 |
| 12 | 100 | 1.597,08 |
| 13 | 120 | 107,54 |
| 14 | 120 | 116,72 |
| 15 | 140 | 115,29 |
| 16 | 140 | 113,56 |
| 17 | 160 | 114,26 |
| 18 | 160 | 114,35 |
| 19 | 180 | 113,98 |
| 20 | 180 | 113,98 |
| 21 | 200 | 114,08 |
| 22 | 200 | 114,08 |
| 23 | 220 | 113,78 |
| 24 | 220 | 114,23 |
| 25 | 240 | 114,27 |
| 26 | 240 | 114,27 |

(*)- O polinômio não fornece raiz real positiva.

A partir da tabela III-2, admite-se para a carga crítica o valor

$$p_{crit} = 114,27 \text{ t/m}$$

Esta carga crítica refere-se à instabilidade por flexo-torção.

Para efeito de comparação utilizou-se o programa de RACHID[4] que analisa a carga crítica em barras de seção delgada pela técnica dos elementos finitos.

O programa forneceu a seguinte aproximação da carga crítica.

$$p_{crit} \text{ entre } 114,199 \text{ e } 114,299 \text{ t/m.}$$

Comparando-se a carga crítica de flexão pura com a carga crítica de flexo-torção conclui-se que para o caso analisado a estrutura perde a estabilidade por flexo-torção com o valor

$$p_{crit} = 114,27 \text{ t/m}$$

d-3) Solução simultânea das equações diferenciais de equilíbrio à força cortante segundo X , à força cortante segundo Y e à momento torçor.

$$\begin{bmatrix} 40,56 & 0 & 0 \\ 0 & 30,64 & 0 \\ 0 & 0 & 201,34 \end{bmatrix} X10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,8 \end{bmatrix} X10^3$$

$$X \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} + (90,0-z) p \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & -30,55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com a extensão da série $[c(p)]$ até seu 26º termo, o programa forneceu os resultados apresentados na tabela III - 3.

A partir da tabela III-3 admite-se uma aproximação para a carga crítica de

$$p_{crit} = 114,27 \text{ t/m}$$

Como era de se esperar, a solução simultânea das três equações de equilíbrio, forneceu a menor carga crítica. Baseando-se nos resultados obtidos por III-1 e III-2 pode-se afirmar que a carga crítica encontrada refere-se à instabilidade por flexo-torção.

TABELA III-3

| Nº DE TERMOS DA SÉRIE | GRAU DO POLINÔMIO | MENOR RAIZ REAL POSITIVA |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 3 | 3º | 33,41 |
| 4 | 3º | 100,24 |
| 5 | 6º | (*) |
| 6 | 6º | 61,38 |
| 7 | 9º | 76,49 |
| 8 | 9º | (*) |
| 9 | 12º | 101,16 |
| 10 | 12º | 91,64 |
| 11 | 15º | 355,26 |
| 12 | 15º | 333,17 |
| 13 | 18º | 107,52 |
| 14 | 18º | 116,72 |
| 15 | 21º | 115,41 |
| 16 | 21º | 113,56 |
| 17 | 24º | 113,42 |
| 18 | 24º | 114,35 |
| 19 | 27º | 114,23 |
| 20 | 27º | 114,23 |
| 21 | 30º | 114,27 |
| 22 | 30º | 114,27 |
| 23 | 33º | 114,08 |
| 24 | 33º | 114,27 |
| 25 | 36º | 114,25 |
| 26 | 36º | 114,27 |

(*) - O polinômio não fornece razis real positiva.

III-3-2-2) Parede de seção aberta com contraventamento.

Os parâmetros geométricos dos lintéis são:

a) Área da seção transversal:

$$A = 0,25 \times 0,30 = 0,075 \text{ m}^2$$

b) Momento de inércia

$$J_L = \frac{0,25 \times 0,30^3}{12} = 5,625 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

c) Parâmetro f

De acordo com a equação (III-49) tem-se:

$$f = \frac{3,00^3}{12 \times 2,05 \times 10^{-3} \times 5,625 \times 10^{-4}} + \frac{3,00}{8,0 \times 10^5 \times 0,075}$$

$$f = 2,05 \times 10^{-3} \text{ m/t}$$

d) Montagem da matriz $[k]$.

Da equação (III-56) tem-se

$$[k] = \frac{1}{2,05 \times 10^{-3} \times 3,00} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (25,0+25,0)^2 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 406,504 \end{bmatrix} \times 10^3$$

O sistema de equações diferenciais é obtido pela equação (III-60) como

$$\begin{bmatrix} 40,56 & 0 & 0 \\ 0 & 30,64 & 0 \\ 0 & 0 & 201,34 \end{bmatrix} \times 10^8 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70,8 \end{bmatrix} \times 10^3 +$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 406,504 \end{bmatrix} \times 10^3 \right\} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} + (90,0-z) p$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4,71 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4,71 & 0 & 30,55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d) Resultados

A solução simultânea do sistema de equações diferenciais, conforme a extensão da série $[C(p)]$, forneceu os seguintes resultados

TABELA III-4

| Nº DE TERMOS DA SÉRIE | GRAU DO POLINÔMIO | MENOR RAIZ REAL POSITIVA |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 3 | 3º | 1030,93 |
| 4 | 3º | 226,69 |
| 5 | 6º | (*) |
| 6 | 6º | 114,74 |
| 7 | 9º | 164,27 |
| 8 | 9º | 1198,37 |
| 9 | 12º | 161,66 |
| 10 | 12º | 180,21 |
| 11 | 15º | 355,26 |
| 12 | 15º | 332,92 |
| 23 | 18º | 206,29 |
| 14 | 18º | 330,13 |
| 15 | 21º | 329,71 |
| 16 | 21º | 231,81 |
| 17 | 24º | 258,29 |
| 18 | 24º | 251,45 |
| 19 | 27º | 245,05 |
| 20 | 27º | 245,05 |
| 21 | 30º | 247,78 |
| 22 | 30º | 247,78 |
| 23 | 33º | 247,83 |
| 24 | 33º | 247,82 |
| 25 | 36º | 247,80 |
| 26 | 36º | 247,81 |

(*) - O polinômio não fornece raiz real positiva.

A partir da tabela III-4, admite-se para a carga crítica o valor

$$p_{crit} = 247,81 \text{ t/m}$$

Conforme observação feita no item (III-3-1), para estruturas com uma parede de seção aberta, os lintéis não contribuem na rigidez à flexão da estrutura. Portanto, a equação diferencial à força cortante segundo Y continua inalterada com a introdução dos lintéis na parede, consequentemente, a carga crítica de flambagem por flexão terá o mesmo valor que a carga crítica de flambagem por flexão nas estruturas sem contraventamento.

Entre as cargas críticas fornecidas pelo programa está a carga crítica de flambagem por flexão.

$$p_{crit} = 329,40 \text{ t/m}$$

Conclui-se que a carga crítica que provoca a flambagem na estrutura

$$p_{crit} = 247,81 \text{ t/m}$$

refere-se à flambagem por flexo-torção.

Nota-se que o contraventamento introduzido na estrutura, produziu um acréscimo da carga crítica de 117% do valor obtido sem contraventamento.

IV - EDIFÍCIOS COM NÚCLEOS DE SEÇÃO ABERTA

IV-1 - Núcleos de seção aberta sem contraventamento.

A figura (IV-1) representa duas paredes de seção aberta ligadas entre si por lajes, consideradas sem rigidez transversal.

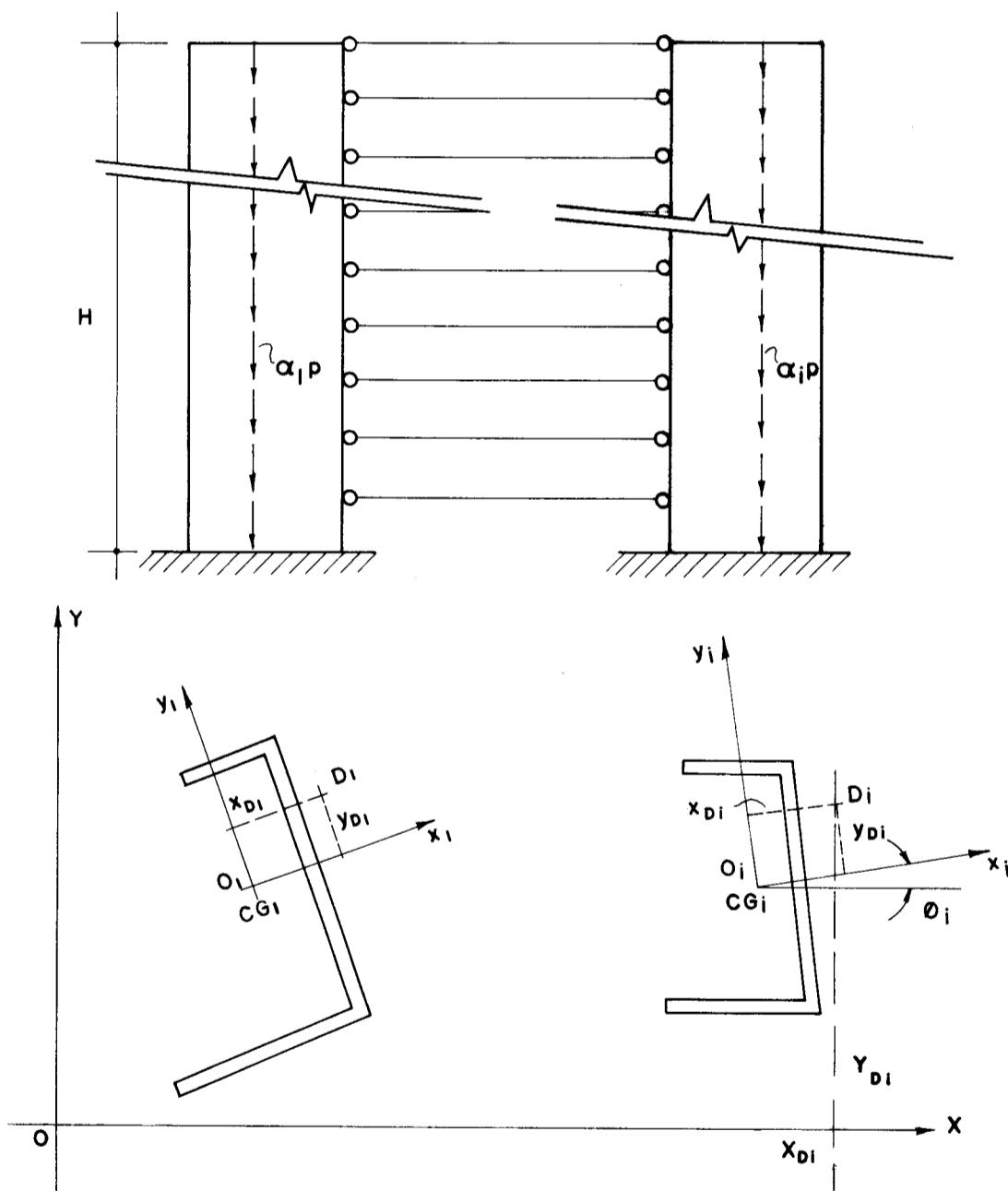


FIG. (IV-1) - PAREDES DE SEÇÃO ABERTA UNIDAS POR LAJES

Para definir geometricamente a estrutura usam-se os sistemas de referência.

a) Em cada parede, um sistema local de eixos tri-ortogonais $O_i^x_i y_i z_i$, sendo os eixos $O_i^x_i$ e $O_i^y_i$ horizontais na base da parede e coincidentes com os eixos principais de inércia da seção transversal. Os eixos $O_i^z_i$ são verticais, orientados da base para o topo das paredes e passam pelo centro de gravidade das seções transversais das mesmas.

b) Sistema de eixo global $OXYZ$, tri-ortogonal, sendo os eixos OX e OY , horizontais, na base da estrutura e o eixo OZ , vertical, orientado da base para o topo da estrutura.

Definem-se ainda o ângulo ϕ_i , formado pelos eixos $O_i^x_i$ e OX e as coordenadas X_{D_i} e Y_{D_i} dos centros de torção em relação ao sistema $OXYZ$.

A altura total da estrutura é H e o carregamento externo é constituído de cargas verticais uniformemente distribuídas ao longo dos eixos $O_i^z_i$.

IV-1-1) Montagem do sistema de equações diferenciais.

Os esforços internos em uma parede de seção aberta, solicitada por forças cortantes e momento de torção, são dadas pelas equações (III-1) e (III-5).

Para a parede i , escrevem-se

$$Q_{x_i} = -EJ_{y_i} u''_i \quad (IV-1)$$

$$Q_{y_i} = -EJ_{x_i} v''_i \quad (IV-2)$$

$$Q_{\theta_i} = -EJ_{w_i} \theta''_i + GJ_{T_i} \theta'_i \quad (IV-3)$$

onde, Q_{x_i} e Q_{y_i} , são as forças cortantes, aplicadas no centro de torção, respectivamente, nas direções x_i e y_i .

Q_{θ_i} é o momento de torção em relação ao centro de torção, u_i e v_i são os deslocamentos do centro de torção segundo x_i e y_i , respectivamente e θ_i é a rotação da seção transversal da parede em relação ao centro de torção.

Os esforços internos na parede i escritos sob a forma matricial são dados por

$$\begin{bmatrix} Q_{x_i} \\ Q_{y_i} \\ Q_{\theta_i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} EJ_{y_i} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_i} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''_i \\ v''_i \\ \theta''_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{T_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} \quad (\text{IV-4})$$

Os esforços externos na parede i são facilmente deduzidos a partir das equações (III-17), (III-18) e (III-19). Considerando-se o carregamento $\alpha_i p$ na parede i , estes esforços são dados por

$$Q_{ext,x_i} = \alpha_i p (H-z) (u'_i - y_{D_i} \theta'_i) \quad (\text{IV-5})$$

$$Q_{ext,y_i} = \alpha_i p (H-z) (v'_i + x_{D_i} \theta'_i) \quad (\text{IV-6})$$

$$Q_{ext,\theta_i} = \alpha_i p (H-z) \left[-u'_i y_{D_i} + v'_i x_{D_i} + \left(y_{D_i}^2 + x_{D_i}^2 + \frac{I_{o_i}}{S_i} \right) \theta'_i \right] \quad (\text{IV-7})$$

onde, Q_{ext,x_i} e Q_{ext,y_i} , são as forças cortantes externas, aplicadas no centro de torção da parede i , segundo, respectivamente, os eixos x_i e y_i e Q_{ext,θ_i} é o momento em relação ao centro de torção.

Os esforços externos na forma matricial são escritos por

$$\{Q_{ext_i}\} = (H-z) [P_i] \{D'_i(z)\} \quad (IV-8)$$

onde

$$[P_i] = [t_i]^T [N_i] [t_i] \quad (IV-9)$$

e

$[t_i]^T$ é a transposta de $[t_i]$ dada por

$$[t_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{D_i} \\ 0 & 1 & x_{D_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV-10)$$

e

$$[N_i] = \alpha_i p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_{o_i}}{S_i} \end{bmatrix} \quad (IV-11)$$

O equilíbrio de uma estrutura formada por n paredes, faz-se referenciando os esforços internos a um sistema global de eixos e igualando-se aos esforços externos, referidos a este mesmo sistema de eixos.

A figura (IV-2) mostra o centro de torção da seção transversal da parede i solicitada por forças cortantes segundo x_i e y_i e momento de torção.

A posição do centro de torção em relação ao eixo global de referência fica definido pelas coordenadas x_{D_i} e y_{D_i} . A direção da força Q_{x_i} forma um ângulo ϕ_i com o eixo OX .

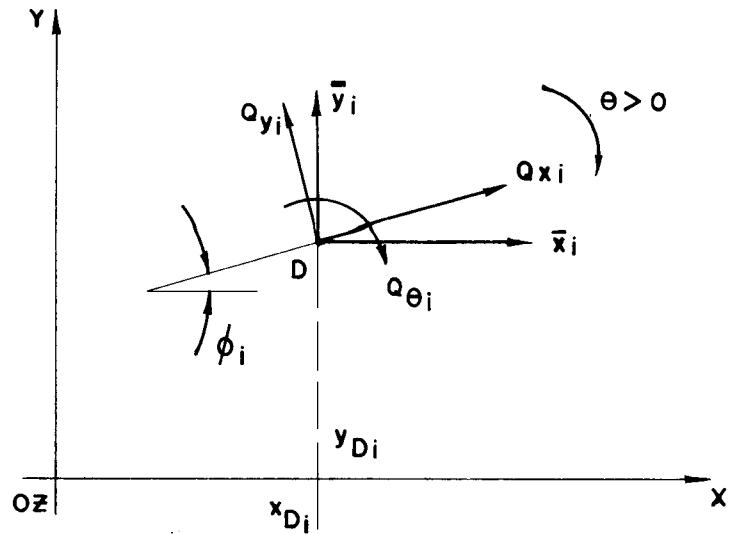


FIG. (IV-2) — ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Os deslocamentos das lajes referidas ao sistema global são definidos pelas funções de z , como

u - deslocamento segundo X

v - deslocamento segundo Y

θ - rotação em torno do eixo OZ , positivo no sentido indicado na figura (IV-2)

Inicialmente, produz-se a rotação do sistema local $O_i x_i y_i z_i$ de maneira a torná-lo paralelo ao sistema de eixos global $OXYZ$ e posteriormente a translação ao sistema global de referência.

As componentes do vetor Q_i no sistema de eixos $\bar{O}_i \bar{x}_i \bar{y}_i \bar{z}_i$ são escritos na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{x_i} \\ \bar{Q}_{y_i} \\ \bar{Q}_{\theta_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x_i} \\ Q_{y_i} \\ Q_{\theta_i} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-12})$$

O vetor $\{D_i(z)\}$ pode ser escrito em função do vetor $\{\bar{D}_i(z)\}$ como

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & \sin\phi_i & 0 \\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (\text{IV-13})$$

Combinando-se as equações (IV-12), (IV-4) e (IV-13), tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_i \end{bmatrix} = -[\bar{R}_i]^T [\bar{K}_i] [\bar{R}_i] \{ \bar{D}_i'''(z) \} + [\bar{K}_{T_i}] \{ \bar{D}_i'(z) \} \quad (\text{IV-14})$$

onde, $[\bar{R}_i]^T$ é a transposta da matriz $[\bar{R}_i]$ dada por:

$$[\bar{R}_i] = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & \sin\phi_i & 0 \\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-15})$$

$$[\bar{K}_i] = \begin{bmatrix} EJ_y_i & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x_i & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_i} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-16})$$

e

$$[\bar{K}_{T_i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_T_i \end{bmatrix} \quad (\text{IV-17})$$

Produzindo-se a translação do vetor de esforços \bar{Q}_i para o sistema de eixos $OXYZ$ obtém-se

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Y_{D_i} & -X_{D_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{x_i} \\ \bar{Q}_{y_i} \\ \bar{Q}_{\theta_i} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-18})$$

A partir da figura (IV-3) deduz-se o valor do vetor $\{\bar{D}_i(z)\}$ em função do vetor $\{D(z)\}$ como

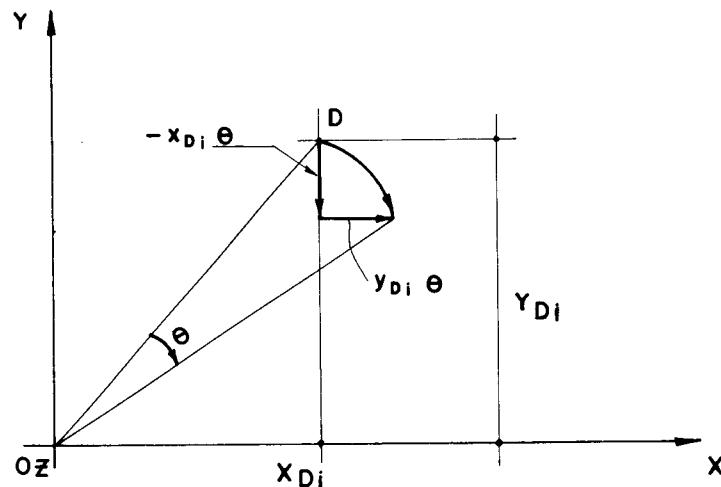


FIG. (IV-3) — TRANSLAÇÃO DE EIXOS

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{D_i} \\ 0 & 1 & -X_{D_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-19})$$

Combinando-se as equações (IV-14), (IV-18) e (IV-19) obtém-se

$$\begin{aligned} \{Q\} = & -[T_i]^T [R_i]^T [K_i] [R_i] [T_i] \{D'''(z)\} + \\ & + [K_{T_i}] \{D'(z)\} \end{aligned} \quad (\text{IV-20})$$

onde, $[T_i]^T$ é a transposta da matriz $[T_i]$ dada por

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{D_i} \\ 0 & 1 & -x_{D_i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-21})$$

Para edifícios constituídos de n paredes, conclui-se facilmente que a equação (IV-20) pode ser obtida por:

$$\{Q\} = -[K] \{D'''(z)\} + [K_T] \{D'(z)\} \quad (\text{IV-22})$$

onde

$$[K] = \sum_{i=1}^n [T_i]^T [R_i]^T [K_i] [R_i] [T_i] \quad (\text{IV-23})$$

e

$$[K_T] = \sum_{i=1}^n [K_{T_i}] \quad (\text{IV-24})$$

Os esforços externos na parede i referenciados ao sistema local são obtidos pela equação (III-58).

Estes esforços, são referenciados ao sistema global através das mesmas matrizes que transformam os esforços internos, portanto escrevem-se

$$\{Q_{ext}\} = (H-Z) [P] \{D'(z)\} \quad (IV-25)$$

onde

$$[P] = [T_i]^T [R_i]^T [P_i] [R_i] [T_i] \quad (IV-26)$$

Para edifícios constituídos de n paredes, a matriz $[P]$ é obtida por:

$$[P] = \sum_{i=1}^n [T_i]^T [R_i]^T [P_i] [R_i] [T_i] \quad (IV-27)$$

O equilíbrio da estrutura é obtido combinando-se a equação (IV-22) com a equação (IV-25).

$$[K] \{D''(z)\} - [K_T] \{D'(z)\} + (H-Z) [P] \{D'(z)\} = \{0\}$$

(IV-28)

Usando-se as equações (III-31) e (III-32), escreve-se

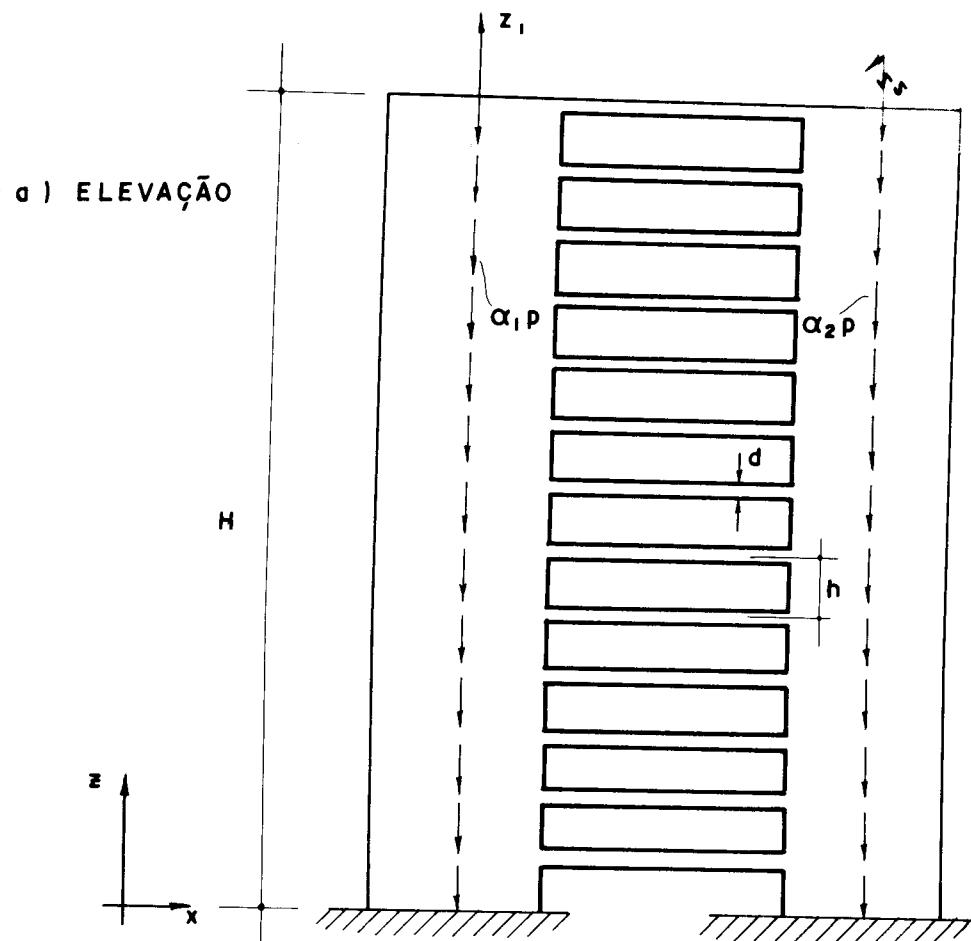
$$[K] \{\delta''(\xi)\} - H^2 [K_T] \{\delta(\xi)\} + H^3 (1-\xi) [P] \{\delta(\xi)\} = \{0\}$$

(IV-29)

Usando-se as equações (III-35) e (III-36) obtém-se o valor da carga crítica p , cuja técnica de obtenção apresenta-se no apêndice (2).

IV-2 - Núcleos de seção aberta contraventados por lintéis

A figura (IV-4) representa um edifício formado por duas paredes de seção aberta contraventadas entre si, por lintéis ao nível dos andares.



b) PLANTA

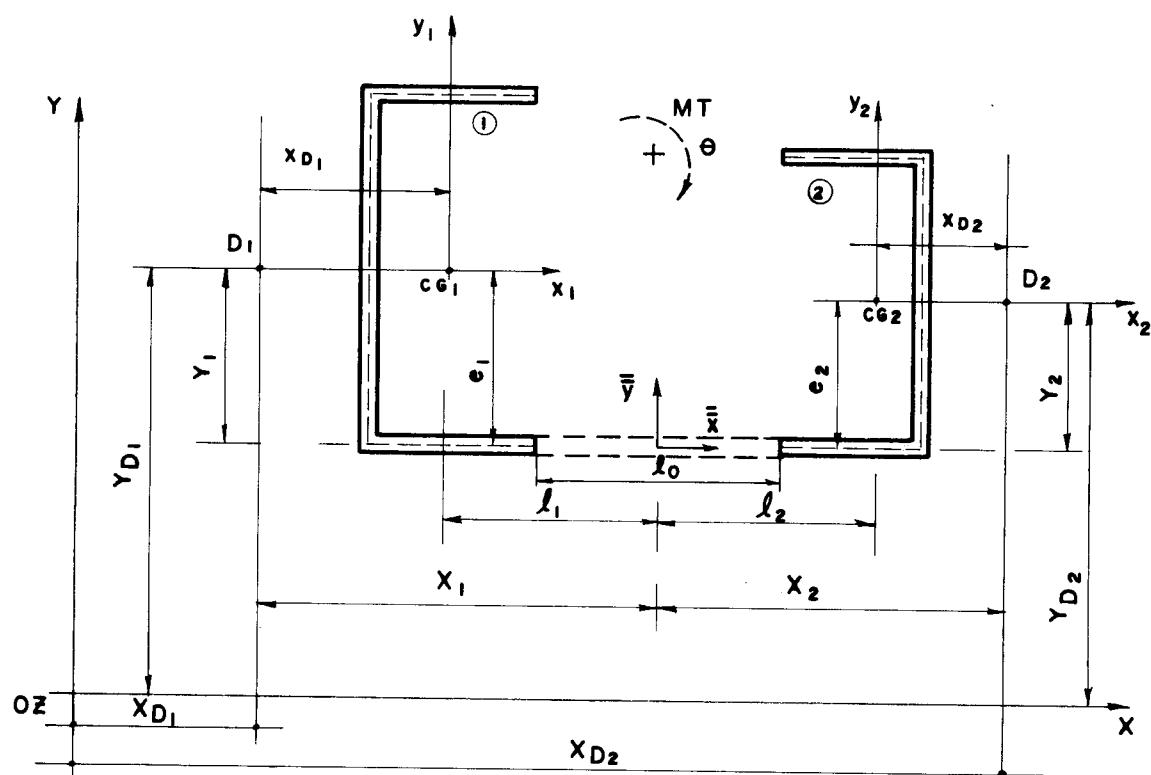


FIG. (IV-4) - PAREDES DE SECÃO ABERTA CONTRAVENTADAS
POR LINTÉIS

Para definir geometricamente a estrutura usam-se os sistemas de referências:

a) Sistemas de eixos locais, tri-ortogonais, em cada parede, com origens na base do edifício, sendo os eixos O_1z_1 e O_2z_2 verticais e passando pelos centros de gravideade das seções transversais das paredes 1 e 2, respectivamente. Os eixos O_1x_1 , O_1y_1 e O_2x_2 e O_2y_2 têm, respectivamente, a mesma direção dos eixos principais de inércia das seções transversais das paredes 1 e 2.

b) Sistemas de eixos local, com origem na base do edifício, sendo o eixo $\bar{\bar{Oz}}$ vertical passando pelos pontos médios dos vãos dos lintéis. Os eixos $\bar{\bar{Ox}}$ e $\bar{\bar{Oy}}$ são horizontais e perpendiculares entre si.

c) Sistema de eixos global $OXYZ$, tri-ortogonal, com origem na base do edifício, sendo o eixo OZ vertical.

Todos os eixos verticais são orientados da base para o topo do edifício.

O carregamento é constituído de cargas verticais, uniformemente distribuídas ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravideade das seções transversais de cada parede, sendo α_1p e α_2p as cargas nas paredes 1 e 2, respectivamente,

A altura total do edifício é H e o espaçamento entre lintéis é h .

Considera-se que os lintéis são engastados nas paredes e que os pontos médios dos seus vãos coincidem com os pontos de momento nulo.

Os deslocamentos da estrutura à uma cota genérica z são:

a) O centro de torção da parede 1, desloca-se nas direções x_1 e y_1 , respectivamente, de u_1 e v_1 e toda a seção transversal da parede gira em torno do seu centro de torção de θ_1 .

b) O centro de torção da parede 2, desloca-se nas

direções dos eixos x_2 e y_2 , respectivamente, de u_2 e v_2 toda a seção da parede gira em torno do seu centro de torção de θ_2 .

c) Os deslocamentos das lajes nos pontos médios dos vãos dos lintéis serão representados, segundo \bar{x} e \bar{y} , por \bar{u} e \bar{v} , respectivamente, e a rotação em torno do eixo $\bar{\theta}\bar{z}$ por $\bar{\theta}$.

IV-2-1) Montagem do sistema de equações diferenciais

Inicialmente escrevem-se as equações de equilíbrio à força cortante e momento torçor das paredes.

Tendo em vista as equações (III-1) e (III-5) as equações de equilíbrio das paredes são:

a) Parede 1

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= -EJ_{y_1} u_1''' \\ Q_{y_1} &= -EJ_{x_1} v_1''' \\ Q_{\theta_1} &= -EJ_{\omega_1} \theta_1'' + GJ_{T_1} \theta_1' \end{aligned}$$

(IV-30)

onde, Q_{x_1} , Q_{y_1} e Q_{θ_1} são, respectivamente, as forças cortantes nas direções x_1 e y_1 e o momento torçor em relação ao centro de torção da parede 1.

b) Parede 2

$$\begin{aligned} Q_{x_2} &= -EJ_{y_2} u_2''' \\ Q_{y_2} &= -EJ_{x_2} v_2''' \\ Q_{\theta_2} &= -EJ_{\omega_2} \theta_2'' + GJ_{T_2} \theta_2' \end{aligned} \quad (\text{IV-31})$$

onde Q_{x_2} , Q_{y_2} e Q_{θ_2} , são, respectivamente, as forças correntes segundo x_2 e y_2 e o momento torçor em relação ao centro de torção da parede 2.

Com base nas equações (IV-22), (IV-23) e (IV-24), os esforços internos nas paredes, referenciados ao sistema global $OXYZ$, são obtidos por:

$$\{Q\} = -[K]\{D'''(Z)\} + [K_T]\{D'(Z)\} \quad (\text{IV-32})$$

onde

$$[K] = [T_1]^T [R_1]^T [K_1] [R_1] [T_1] + [T_2]^T [R_2]^T [K_2] [R_2] [T_2] \quad (\text{IV-33})$$

$$[K_T] = [K_{T_1}] + [K_{T_2}] \quad (\text{IV-34})$$

onde, $[T_1]^T$ é a transposta da matriz $[T_1]$ e $[T_2]^T$ é a transposta da matriz $[T_2]$, obtidas, respectivamente, por:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{D_1} \\ 0 & 1 & -X_{D_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-35})$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{D_2} \\ 0 & 1 & -X_{D_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde, X_{D_1} , Y_{D_1} , X_{D_2} e Y_{D_2} são, respectivamente, as coordenadas dos centros de torção das paredes 1 e 2, em relação ao

sistema global de referência.

$[R_1]^T$ é a transposta da matriz $[R_1]$ e $[R_2]^T$ é a transposta da matriz $[R_2]$, obtidas, respectivamente, por:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & \sin\phi_1 & 0 \\ -\sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-36})$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & \sin\phi_2 & 0 \\ -\sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 , são, respectivamente, os ângulos que os eixos O_1x_1 e O_2x_2 , formam com eixo OX .

$[K_1]$ e $[K_2]$ são dadas, respectivamente, por:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} EJ_{y_1} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_1} \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} EJ_{y_2} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_2} \end{bmatrix}$$

(IV-37)

e, $[K_{T_1}]$ e $[K_{T_2}]$ são as matrizes

$$[K_{T_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{T_1} \end{bmatrix}$$

(IV-38)

$$[K_{T_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{T_2} \end{bmatrix}$$

e $\{D(Z)\}$ é o vetor dos deslocamentos da estrutura em relação ao sistema global.

$$\{D(Z)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

(IV-39)

O efeito do lintel de contraventamento é calculado à partir da figura (IV-5), onde representa-se o lintel seccionado no ponto médio do seu vão.

Nesse ponto aparecem forças cortantes que por serem de mesmo valor e sentido opostos não possuem resultante, mas produzem momentos fletor e bimomentos nas paredes 1 e 2, alterando assim a rigidez da estrutura.

Tendo em vista as considerações do tratamento contínuo, essas forças incógnitas são consideradas distribuídas ao longo do espaçamento h .

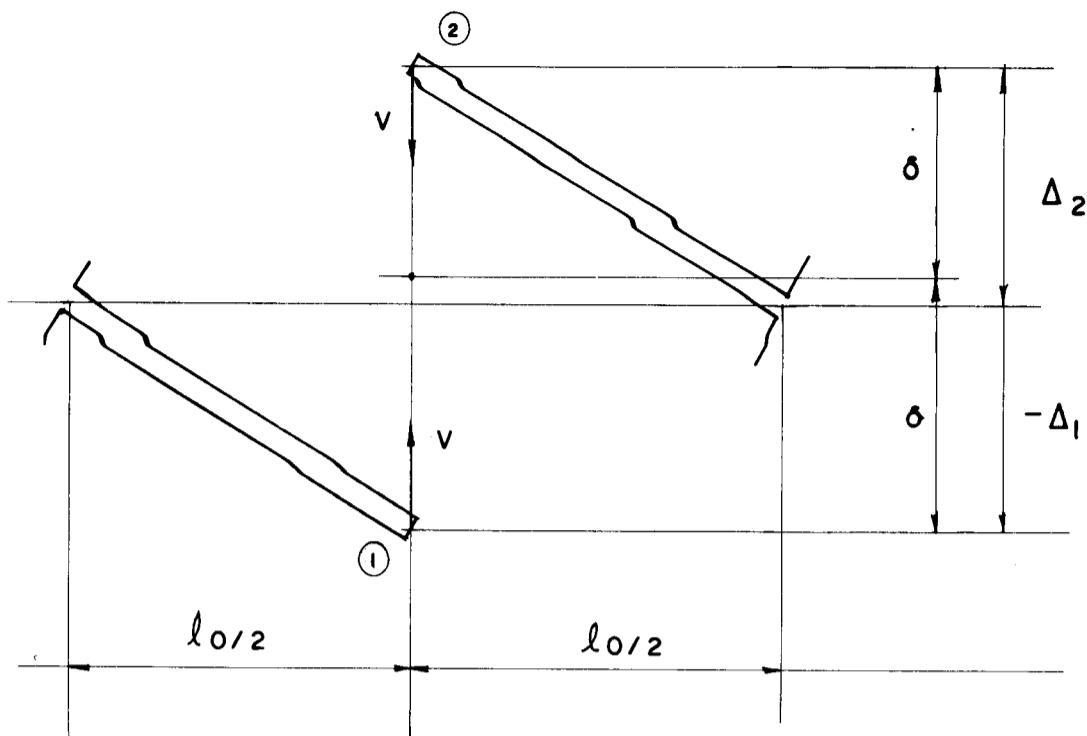


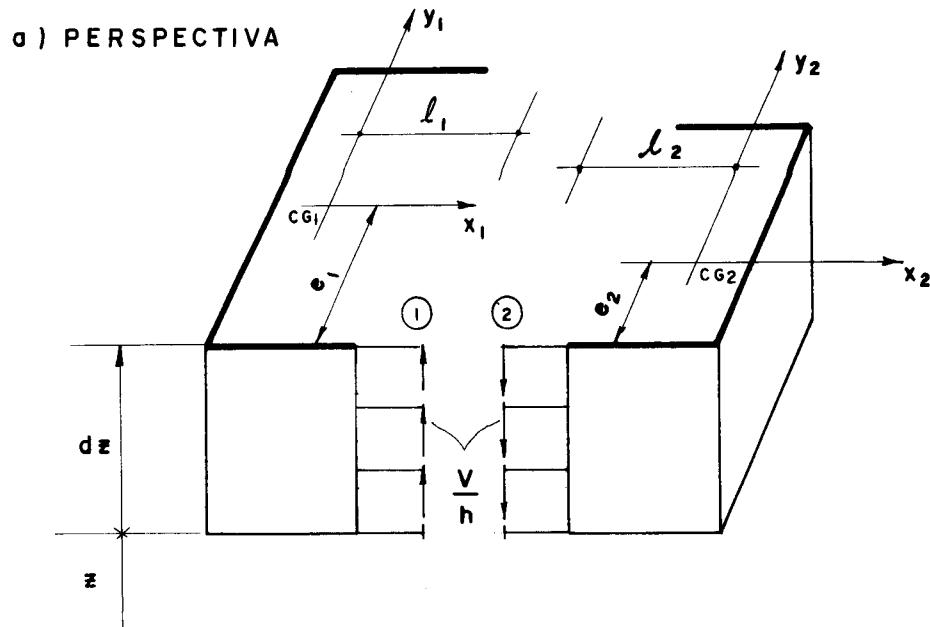
FIG. (IV-5) — DESLOCAMENTOS DO LINTEL SECCIONADO

A partir da figura (IV-6-a) e de acordo com a convenção de esforços positivos mostrados na figura (IV-6-b), obtém-se, pelo equilíbrio dos elementos genéricos das paredes, as seguintes equações:

a) Parede 1

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= -EJ_{y_1} u_1''' + \frac{V}{h} l_1 \\ Q_{y_1} &= -EJ_{x_1} v_1''' - \frac{V}{h} e_1 \\ Q_{\theta_1} &= -EJ_{\omega_1} \theta_1''' + GJ_{T_1} \theta'_1 - \frac{V}{h} \omega_1 \end{aligned} \quad (\text{IV-40})$$

onde, V é a força cortante incógnita que aparece nos pontos médios do vão dos lintéis.



b) CONVENÇÃO DE ESFORÇOS POSITIVOS

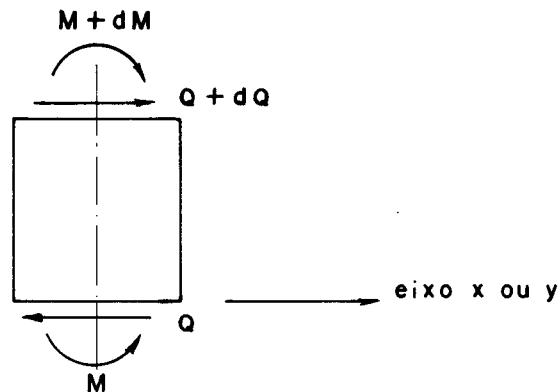


FIG.(IV-6)- ELEMENTO GENÉRICO DA ESTRUTURA

Comparando-se as equações (IV-40) com as equações (IV-30), conclui-se que os lintéis introduzem na parede 1, forças cortantes segundo os eixos x_1 e y_1 e momento torçor em relação a seu centro de torção, de valores, respectivamente, iguais a

$$q_{x_1} = -\frac{V}{h} l_1$$

$$q_{y_1} = -\frac{V}{h} e_1$$

$$q_{\theta_1} = - \frac{V}{h} \omega_1 \quad (\text{IV-41})$$

b) Parede 2

$$\begin{aligned} q_{x_2} &= - EJ_{y_2} u''_2 + \frac{V}{h} l_2 \\ q_{y_2} &= - EJ_{x_2} v''_2 + \frac{V}{h} e_2 \\ q_{\theta_2} &= - EJ_{\omega_2} \theta''_2 + GJ_T \theta'_2 + \frac{V}{h} \omega_2 \end{aligned} \quad (\text{IV-42})$$

Comparando-se as equações (IV-42) com as equações (IV-31), observa-se que os lintéis introduzem na parede 2, forças cortantes segundo x_2 e y_2 e momento torçor em relação ao seu centro de torção, de valores, respectivamente, iguais a:

$$\begin{aligned} q_{x_2} &= \frac{V}{h} l_2 \\ q_{y_2} &= \frac{V}{h} e_2 \\ q_{\theta_2} &= \frac{V}{h} \omega_2 \end{aligned} \quad (\text{IV-43})$$

Deseja-se, referenciar a contribuição dos lintéis na rigidez da estrutura, ao seu sistema local de referência $\bar{O}xyz$.

Considerando-se positivos os sentidos indicados na figura (IV-7), tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= q_{x_1} + q_{x_2} \\ \bar{q}_y &= q_{y_1} + q_{y_2} \\ \bar{q}_z &= q_{x_1} \cdot Y_1 + q_{y_1} \cdot X_1 + q_{\theta_1} + q_{x_2} \cdot Y_2 - q_{y_2} \cdot X_2 + q_{\theta_2} \end{aligned} \quad (\text{IV-44})$$

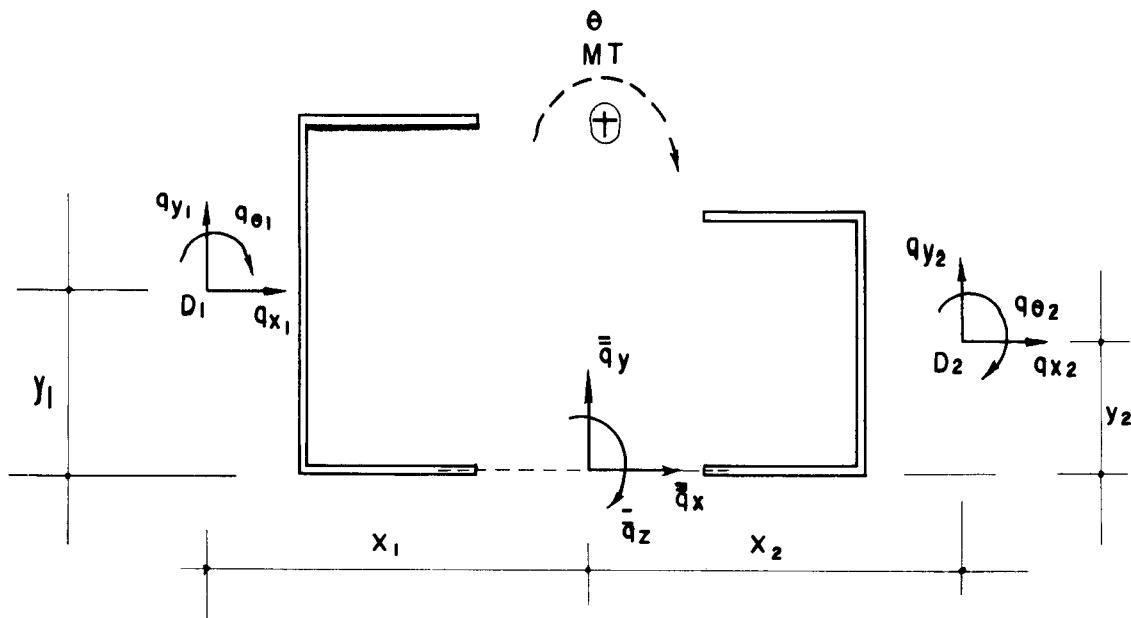


FIG. (IV-7) — TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Substituindo-se as equações (IV-41) e (IV-43) nas equações (IV-44), obtém-se, respectivamente, as forças cortantes e momento torçor, introduzidos pelos lintéis, em função da incógnita V e referenciadas ao sistema de eixos $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{q}}_x &= \frac{V}{h} (l_1 + l_2) \\ \bar{\bar{q}}_y &= \frac{V}{h} (e_2 - e_1) \\ \bar{\bar{q}}_z &= \frac{V}{h} (\omega_{01} - \omega_{02})\end{aligned}\tag{IV-45}$$

onde

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= l_1 Y_1 - e_1 X_1 - \omega_1 \\ \omega_{02} &= -l_2 Y_2 + e_2 X_2 - \omega_2\end{aligned}\tag{IV-46}$$

O valor da incógnita V , fica determinado, compatibilizando-se os deslocamentos do seu ponto de aplicação.

A figura (IV-5) mostra o lintel seccionado no ponto médio do seu vão, onde se aplica a força cortante incógnita. O ponto 1, pertencente à parede 1, desloca-se diferentemente do ponto 2 pertencente à parede 2, sendo cada deslocamento devido, respectivamente, à flexão pura da parede na direção x (figura IV-8-a), à flexão pura da parede na direção y (figura IV-8-b), à torção da parede (figura IV-8-c) e à deformação do lintel por flexão e força cortante (figura IV-8-d).

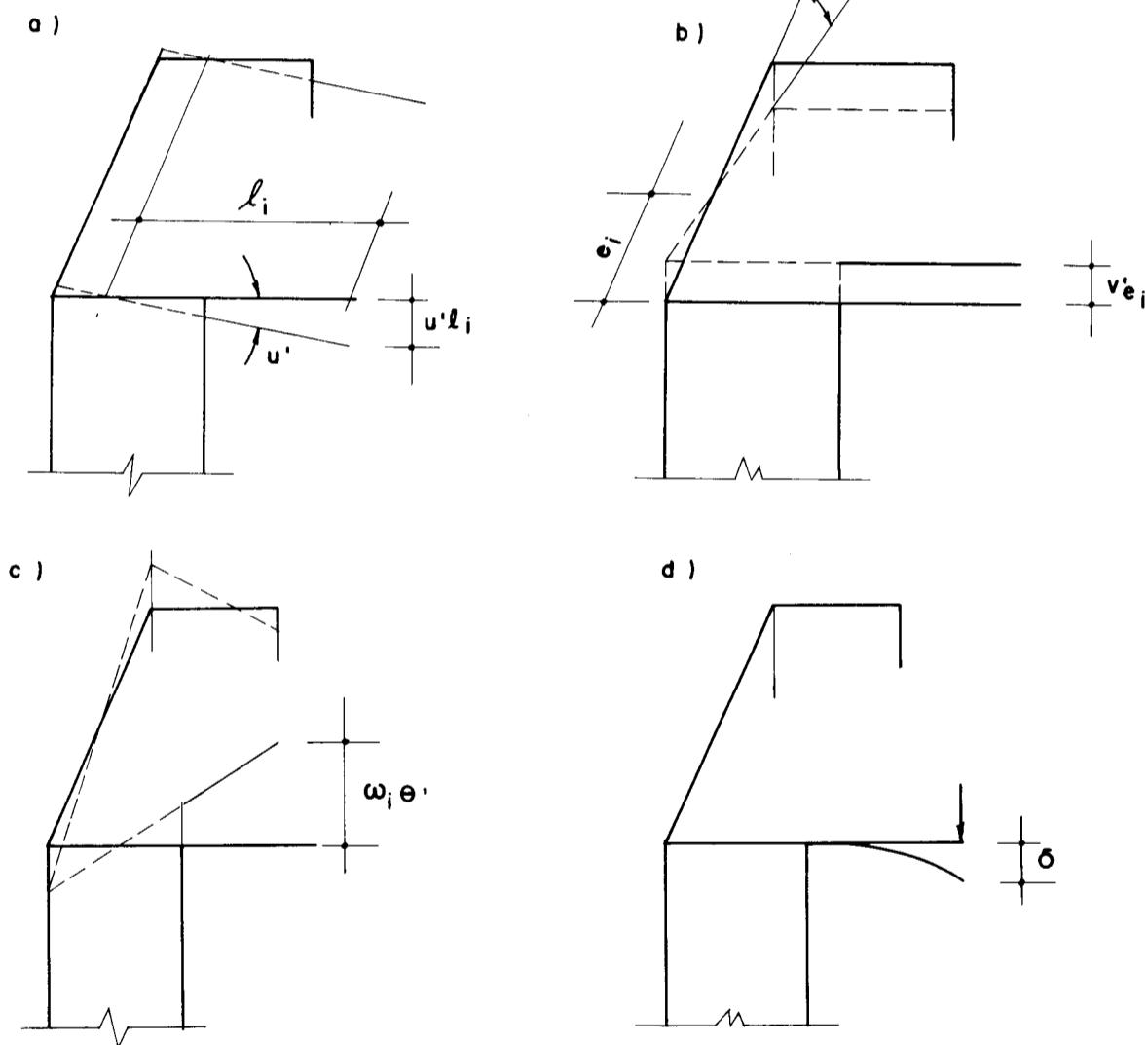


FIG. (IV - 8) — DESLOCAMENTOS DOS PONTOS DE CORTE

A configuração final dos deslocamentos do ponto mé dio do vão do lintel é mostrada na figura (IV-5).

Considerando-se positivos os deslocamentos para cima (sentido do eixo OZ), têm-se, respectivamente, os deslocamentos dos pontos 1 e 2, como:

$$\Delta_1 = -l_1 u'_1 + e_1 v'_1 + \omega_1 \theta'_1$$

$$\Delta_2 = l_2 u'_2 + e_2 v'_2 + \omega_2 \theta'_2 \quad (\text{IV-47})$$

Como na estrutura real, os pontos 1 e 2, permanecem unidos, o seu deslocamento relativo deve ser reduzido a zero pelas forças cortantes V , consideradas positivas no sentido indicado. O deslocamento provocado pelas forças V vale

$$\delta = \frac{Vl_o^3}{24 EJ_L} + \frac{Vl_o}{2AG} \quad (\text{IV-48})$$

onde l_o é o vão do lintel.

Compatibilizando-se os deslocamentos nos pontos 1 e 2 do lintel, tem-se

$$\begin{aligned} -l_1 u'_1 + e_1 v'_1 + \omega_1 \theta'_1 + \delta &= \\ = l_2 u'_2 + e_2 v'_2 + \omega_2 \theta'_2 - \delta & \quad (\text{IV-49}) \end{aligned}$$

Os deslocamentos das paredes, referenciados aos seus respectivos sistema de eixos, são escritos em função dos deslocamentos das lajes referenciadas ao sistema de eixos $\bar{\bar{Oxyz}}$, como

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u} + y_1 \bar{\theta} \\ v_1 &= \bar{v} + x_1 \bar{\theta} \\ \theta_1 &= \bar{\theta} \quad (\text{IV-50}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \bar{\bar{u}} + Y_2 \bar{\bar{\theta}} \\
 v_2 &= \bar{\bar{v}} - X_2 \bar{\bar{\theta}} \\
 \theta_2 &= \bar{\bar{\theta}}
 \end{aligned} \tag{IV-51}$$

Combinando-se as equações (IV-48), (IV-49), (IV-50) e (IV-51), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 -\ell_1(\bar{\bar{u}}' + Y_1 \bar{\bar{\theta}}') + e_1(\bar{\bar{v}}' + X_1 \bar{\bar{\theta}}') + \omega_1 \bar{\bar{\theta}}' + \frac{V\ell_o^3}{24EJ_L} + \frac{V\ell_o}{2AG} = \\
 \ell_2(\bar{\bar{u}}' + Y_2 \bar{\bar{\theta}}') + e_2(\bar{\bar{v}}' - X_2 \bar{\bar{\theta}}') + \omega_2 \bar{\bar{\theta}}' - \frac{V\ell_o^3}{24EJ_L} - \frac{V\ell_o}{2AG}
 \end{aligned} \tag{IV-52}$$

Da equação (IV-52) obtém-se o valor de V , como:

$$V = \frac{1}{f} \left[(\ell_1 + \ell_2) \bar{\bar{u}}' + (e_2 - e_1) \bar{\bar{v}}' + (\omega_{o_1} - \omega_{o_2}) \bar{\bar{\theta}}' \right] \tag{IV-53}$$

onde

$$f = \frac{\ell_o^3}{12EJ_L} + \frac{\ell_o}{AG} \tag{IV-54}$$

Substituindo-se a equação (IV-53) nas equações (IV-45), obtém-se a rigidez à força cortante e momento torçor imposta pelo lintel, como

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{q}}_x &= \frac{1}{hf} \left[(\ell_1 + \ell_2)^2 \bar{\bar{u}}' + (\ell_1 + \ell_2) (e_2 - e_1) \bar{\bar{v}}' + \right. \\
 &\quad \left. + (\ell_1 + \ell_2) (\omega_{o_1} - \omega_{o_2}) \bar{\bar{\theta}}' \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\bar{q}}}_y &= \frac{1}{hf} \left[(e_2 - e_1) (\ell_1 + \ell_2) \bar{\bar{u}}' + (e_2 - e_1)^2 \bar{\bar{v}}' + \right. \\
&\quad \left. + (e_2 - e_1) (\omega_{01} - \omega_{02}) \bar{\bar{\theta}}' \right] \\
\bar{\bar{\bar{q}}}_z &= \frac{1}{hf} \left[(\omega_{01} - \omega_{02}) (\ell_1 + \ell_2) \bar{\bar{u}}' + (\omega_{01} - \omega_{02}) \right. \\
&\quad \left. (e_2 - e_1) \bar{\bar{v}}' + (\omega_{01} - \omega_{02})^2 \bar{\bar{\theta}}' \right]
\end{aligned} \tag{IV-55}$$

As equações (IV-55) podem ser escritas na forma matricial como

$$\{\bar{\bar{\bar{q}}}\} = [\bar{\bar{k}}] \{\bar{\bar{\bar{D}}}'(z)\} \tag{IV-56}$$

onde

$$\{\bar{\bar{\bar{q}}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\bar{q}}}_x \\ \bar{\bar{\bar{q}}}_y \\ \bar{\bar{\bar{q}}}_z \end{Bmatrix} \tag{IV-57}$$

$[\bar{\bar{k}}]$ é a matriz que fornece a contribuição dos lintéis na rigidez da estrutura, obtida por:

$$[\bar{\bar{k}}] = \frac{1}{hf} \begin{bmatrix} (\ell_1 + \ell_2)^2 & (\ell_1 + \ell_2)(e_2 - e_1) & (\ell_1 + \ell_2)(\omega_{01} - \omega_{02}) \\ (e_2 - e_1)(\ell_1 + \ell_2) & (e_2 - e_1)^2 & (e_2 - e_1)(\omega_{01} - \omega_{02}) \\ (\omega_{01} - \omega_{02})(\ell_1 + \ell_2) & (\omega_{01} - \omega_{02})(e_2 - e_1) & (\omega_{01} - \omega_{02})^2 \end{bmatrix} \tag{IV-58}$$

e $\{\bar{D}(z)\}$ é a matriz dos deslocamentos das lajes em relação ao sistema de eixos $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, dada por

$$\{\bar{D}(z)\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-59})$$

O vetor $\{\bar{q}\}$ referenciado ao sistema global é obtido por

$$\{q\} = [k] \{D'(z)\} \quad (\text{IV-60})$$

onde

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_X \\ q_Y \\ q_Z \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-61})$$

e

$$[k] = [\bar{T}]^T [\bar{R}]^T [\bar{k}] [\bar{R}] [\bar{T}] \quad (\text{IV-62})$$

onde, $[\bar{T}]^T$ é a transposta da matriz $[\bar{T}]$ dada por:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_L \\ 0 & 1 & -X_L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-63})$$

onde, X_L e Y_L são as coordenadas do ponto médio do vão do

lintel em relação ao sistema global de referência.

$\left[\begin{smallmatrix} \bar{R} \end{smallmatrix} \right]^T$ é a transposta da matriz $\left[\begin{smallmatrix} \bar{R} \end{smallmatrix} \right]$ dada por

$$\left[\begin{smallmatrix} \bar{R} \end{smallmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-64})$$

e ψ é o ângulo formado pelos eixos $\bar{\bar{Ox}}$ e Ox .

Os esforços externos são calculados da mesma maneira que no item (IV-1). Baseando-se na equação (IV-8) obtém-se os esforços externos nas paredes 1 e 2, referenciados aos seus respectivos sistemas de eixos locais e dados por:

$$\left\{ Q_{ext,1} \right\} = (H-z) \left[P_1 \right] \left\{ D'_1(z) \right\} \quad (\text{IV-65})$$

e

$$\left\{ Q_{ext,2} \right\} = (H-z) \left[P_2 \right] \left\{ D'_2(z) \right\} \quad (\text{IV-66})$$

onde

$$\left[P_1 \right] = \left[t_1 \right]^T \left[N_1 \right] \left[t_1 \right] \quad (\text{IV-67})$$

e

$$\left[P_2 \right] = \left[t_2 \right]^T \left[N_2 \right] \left[t_2 \right] \quad (\text{IV-68})$$

a matriz $\left[t_1 \right]^T$ é a transposta da $\left[t_1 \right]$ dada por:

$$\left[t_1 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{D_1} \\ 0 & 1 & x_{D_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-69})$$

$[t_2]^T$ é a transposta da matriz $[t_2]$

$$[t_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{D_2} \\ 0 & 1 & x_{D_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-70})$$

$$[N_1] = \alpha_1 p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_{o_1}}{S_1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-71})$$

e

$$[N_2] = \alpha_2 p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_{o_2}}{S_2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-72})$$

sendo, I_{o_1} e I_{o_2} , respectivamente, os momentos polares de inércia em relação aos centros de gravidade das seções transversais das paredes 1 e 2. S_1 e S_2 , são, respectivamente, as áreas das seções transversais das paredes 1 e 2.

Os esforços externos, referenciados ao sistema global de referência, são obtidos por

$$Q_{ext} = (H-Z) [P] \{D'(Z)\} \quad (\text{IV-73})$$

onde

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-74})$$

A equação de equilíbrio da estrutura é obtida igualando-se os esforços internos aos esforços externos, todos eles referenciados ao sistema global de referência. Portanto tem-se

$$\{Q\} + \{q\} = \{Q_{ext}\} \quad (\text{IV-75})$$

Substituindo-se as equações (IV-32), (IV-60) e (IV-73) na equação (IV-75), obtém-se

$$\begin{aligned} -[K] \{D'''(Z)\} + ([k] + [K_T]) \{D'(Z)\} &= \\ = (H-Z) [P] \{D'(Z)\} \end{aligned} \quad (\text{IV-76})$$

ou

$$\begin{aligned} [K] \{D'''(Z)\} - ([k] + [K_T]) \{D'(Z)\} + \\ + (H-Z) [P] \{D'(Z)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-77})$$

que, juntamente com as condições de contorno (equações (III-35) e (III-36)), permite determinar a carga crítica de instabilidade.

IV-2-2) Exemplo 3

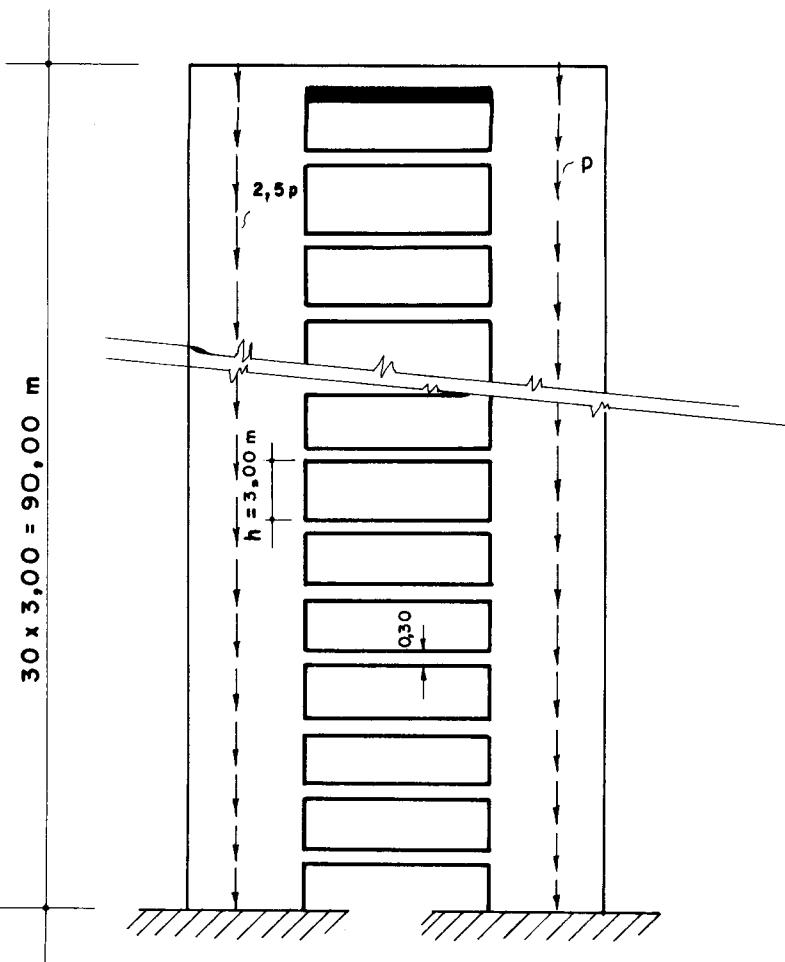
Como exemplo de estruturas constituidas de paredes de seção aberta é apresentado o edifício cuja planta baixa , onde mostram-se as dimensões das paredes, está representada na figura (IV-9-b) e a elevação, onde mostram-se a altura total das paredes e espaçamentos entre lintéis, está representada na figura (IV-9-a).

Os carregamentos são cargas de compressão uniforme _ mente distribuídas ao longo dos eixos verticais que passam pelos centros de gravidade das seções transversais de cada parede. O carregamento na parede 1 é 2,50 p e o carregamen to na parede 2 é 1,00 p. Deseja-se calcular o valor da carga crítica p que leva a estrutura à perda de estabilidade.

Para esta análise,serão apresentadas duas estruturas:a primeira com duas paredes de seção aberta sem contra - ventamento e a segunda, com contraventamento ao nível dos an dares por lintéis de mesma espessura das paredes e de seção transversal 0,20 x 0,30 m.

Tanto para as paredes como para os lintéis, ado - tam-se: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,0 \times 10^6$ t/m^2 e módulo de elasticidade transversal $G = 8,0 \times 10^5$ t/m^2 .

a) ELEVACÃO



b) PLANTA BAIXA

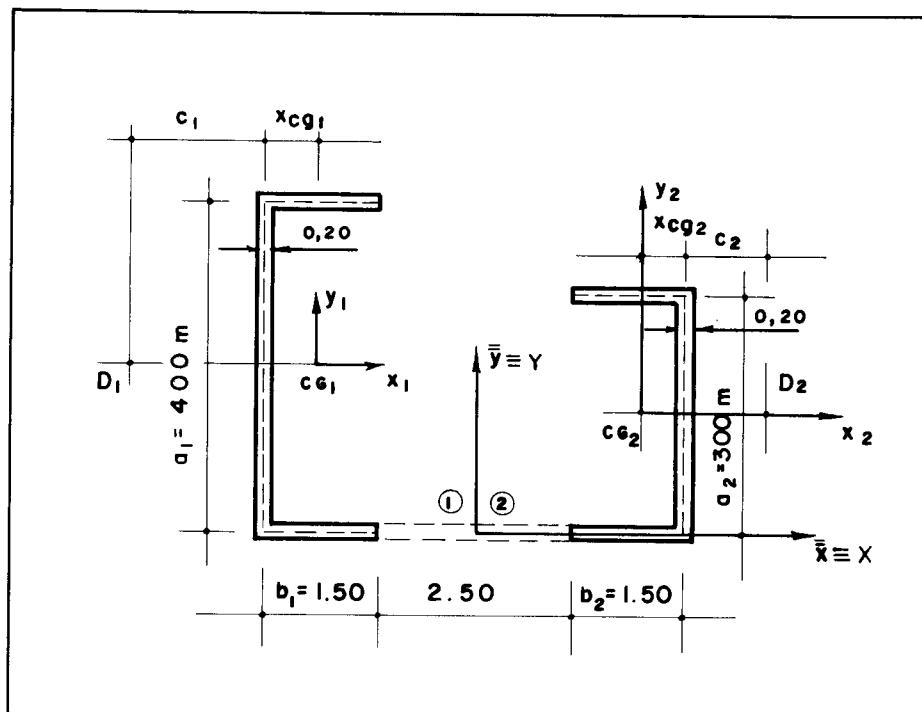


FIG. (IV-9)— EDIFÍCIO COM DUAS PAREDES DE SEÇÃO ABERTAS

A seguir determinam-se os parâmetros geométricos das seções transversais das paredes.

a) Seção transversal da parede 1

a.1) Posição do centro de gravidade

$$x_{CG_1} = \frac{2(1,50X0,20X0,75)}{2(1,50X0,20) + 4,00X0,20} = 0,32m$$

a.2) Momento de inércia em relação ao eixo x_1

$$J_{x_1} = \frac{0,20X4,00^3}{12} + 2 \left(\frac{1,5X0,2^3}{12} + 1,5X0,2X2,0^3 \right)$$

$$J_{x_1} = 3,468 \text{ m}^4$$

a.3) Momento de inércia em relação ao eixo y_1

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= 2 \left(\frac{0,2X1,5^3}{12} + 0,2X1,5X0,429^2 \right) + \\ &+ \left(\frac{4,0X0,2^3}{12} + 4,0X0,2X0,32^2 \right) \end{aligned}$$

$$J_{y_1} = 0,307 \text{ m}^4$$

a.4) Centro de torção (sem contribuição do lin
tel)

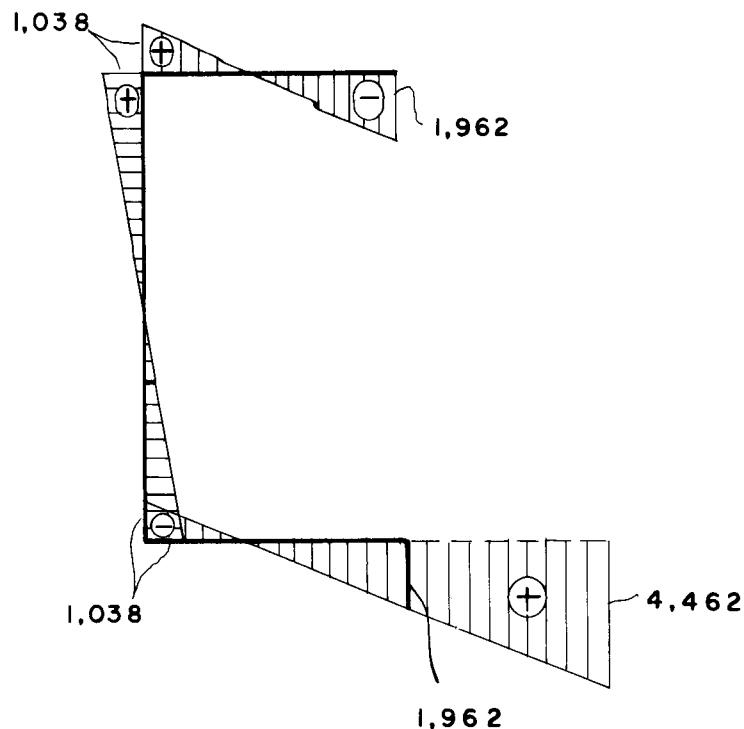
Para este tipo de seção, tem-se:

$$c_1 = \frac{3 \cdot b_1^2}{a_1 + 6b_1}$$

$$c_1 = \frac{3 \times 1,50^2}{4,00 + 6 \times 1,50} = 0,519 \text{ m}$$

a-5) Diagrama de área setorial

Conhecido c_1 e a origem Os , tem-se:



Deve-se lembrar que a área setorial num ponto da seção transversal é positiva se, para um observador colocado na origem do eixo Z e olhando no sentido positivo, o raio vetor traçado do centro de torção girar no sentido horário, partindo da origem Os para o ponto.

a-6) Momento setorial de inércia (sem contribuição do lintel)

$$J_{\omega} = \int_S \omega^2 dS$$

De acordo com o diagrama de área setorial tem-se:

$$\begin{aligned} J_{\omega 1} = & \left(2 \left\{ \frac{1}{6} \left[-1,962(-2 \times 1,962 + 1,038) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 1,038(-1,962 + 2 \times 1,038) \right] \times 1,5 \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{3} X 1,038 X 1,038 X 2,00 \right) \Bigg) X 0,20$$

$$J_{\omega_1} = 0,8654 \text{ m}^6$$

a-7) Momento de inércia à torção

$$J_T = \frac{1}{3} \int_s t^3 \ ds$$

$$J_{T_1} = \frac{1}{3} \left[0,20^3 (1,50 + 4,00 + 1,50) \right]$$

$$J_{T_1} = 0,0186 \text{ m}^4$$

a-8) Momento polar de inércia em relação ao centro de gravidade.

$$I_{O_1} = J_{x_1} + J_{y_1}$$

$$I_{O_1} = 3,468 + 0,307$$

$$I_{O_1} = 3,775 \text{ m}^4$$

a-9) Área

$$S_1 = 0,20 (1,50 + 4,00 + 1,50)$$

$$S_1 = 1,40 \text{ m}^2$$

a-10) Coordenadas do centro de torção em relação ao sistema de eixos $O_1x_1y_1z_1$

$$x_{D_1} = - (c_1 + x_{C_{G_1}})$$

$$X_{D_1} = - (0,519 + 0,320) = - 0,839 \text{ m}$$

$$y_{D_1} = 0$$

a-11) Coordenadas do centro de torção em relação ao sistema de eixos $OXYZ$

$$X_{D_1} = - 3,269 \text{ m}$$

$$Y_{D_1} = 2,00 \text{ m}$$

a-12) Ângulo entre os eixos O_1x_1 e OX

$$\phi_1 = 0^\circ$$

b) Seção transversal da parede 2

b-1) Posição do centro de gravidade:

$$x_{C_G_2} = \frac{2(0,20 \times 1,50 \times 0,75)}{2(0,2 \times 1,50) + 3,00 \times 0,20} = 0,375 \text{ m}$$

b-2) Momento de inércia em relação ao eixo x_2

$$J_{x_2} = \frac{0,2 \times 3,00^3}{12} + 2 \left(\frac{1,5 \times 0,2^3}{12} + 1,5 \times 0,2 \times 1,5^2 \right)$$

$$J_{x_2} = 1,802 \text{ m}^4$$

b-3) Momento de inércia em relação ao eixo y_2

$$J_{y_2} = 2 \left(\frac{0,2 \times 1,5^3}{12} + 0,2 \times 1,5 \times 0,375^2 \right) +$$

$$+ \frac{3,00 \times 0,2^3}{12} + 3,00 \times 0,2 \times 0,375^2$$

$$J_{y_2} = 0,283 \text{ m}^4$$

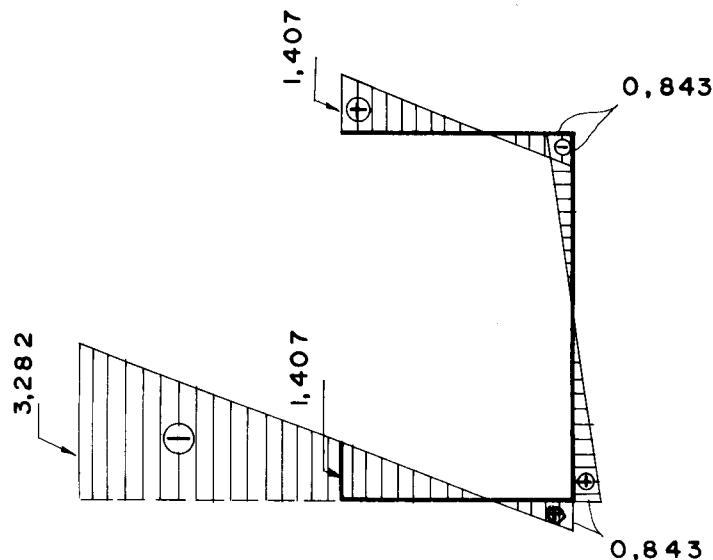
b-4) Centro de torção (sem contribuição do lintel)

$$c_2 = \frac{3 \cdot b_2^2}{a_2 + 6b_2}$$

$$c_2 = \frac{3 \times 1,50^2}{3,00 + 6 \times 1,5} = 0,562 \text{ m}$$

b-5) Diagrama de área setorial

Conhecido c_2 e a origem O_s , tem-se



b-6) Momento setorial de inércia

$$J_{\omega_2} = t \int_{O_s} \omega^2 ds$$

De acordo com o diagrama de área setorial, tem-se

$$J_{\omega_2} = \left(2 \left\{ \frac{1}{6} \left[1,407(2X1,407-0,843) - 0,843(1,407 - 2X0,843) \right] X 1,5 \right\} + 2 \left(\frac{1}{3} X 0,843 X 0,843 X 1,5 \right) \right) X 0,20$$

$$J_{\omega_2} = 0,443 \text{ m}^6$$

b-7) Momento de inércia à torção

$$J_{T_2} = \frac{1}{3} [0,20^3 (1,5 + 3,00 + 1,5)]$$

$$J_{T_2} = 0,016 \text{ m}^4$$

b-8) Momento polar de inércia em relação ao centro de gravidade

$$I_{O_2} = J_{x_2} + J_{y_2}$$

$$I_{O_2} = 1,802 + 0,283$$

$$I_{O_2} = 2,085 \text{ m}^4$$

b-9) Área

$$S_2 = 0,20 (1,50 + 3,00 + 1,50)$$

$$S_2 = 1,20 \text{ m}^2$$

b-10) Coordenadas do centro de torção em relação ao sistema de eixos $O_2x_2y_2z_2$

$$x_{D_2} = C_2 + x_{C_G}_2$$

$$x_{D_2} = 0,562 + 0,375 = 0,937 \text{ m}$$

$$y_{D_2} = 0$$

b-11) Coordenadas do centro de torção em relação ao sistema de eixo global $OXYZ$

$$X_{D_2} = 3,269 \text{ m}$$

$$Y_{D_2} = 1,50 \text{ m}$$

b-12) Ângulo entre os eixos O_2x_2 e OX

$$\phi_2 = 0^\circ$$

IV-2-2-1) Paredes sem contraventamento

a) Montagem da matriz $[K]$

A partir da equação (IV-23), tem-se:

$$[K] = [T_1]^T [R_1]^T [K_1] [R_1] [T_1] + [T_2]^T [R_2]^T [K_2] [R_2] [T_2]$$

onde, as matrizes $[T_1]$ e $[T_2]$ são dadas pela equação (IV-21) como

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,00 \\ 0 & 1 & 3,269 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1,50 \\ 0 & 1 & -3,312 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes $[R_1]$ e $[R_2]$ são obtidas pela equação (IV-15) como

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[R_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[K_1]$ e $[K_2]$ são obtidas a partir da equação (IV-16) como

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0,614 & 0 & 0 \\ 0 & 6,936 & 0 \\ 0 & 0 & 1,730 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0,566 & 0 & 0 \\ 0 & 3,604 & 0 \\ 0 & 0 & 0,886 \end{bmatrix} \times 10^6$$

o valor da matriz $[K]$ será

$$[K] = \begin{bmatrix} 1,18 & 0 & 2,077 \\ 0 & 10,540 & 10,737 \\ 2,077 & 10,737 & 120,000 \end{bmatrix} \times 10^6$$

b) Montagem da matriz $[K_T]$

A partir da equação (IV-24), tem-se

$$[K_T] = [K_{T_1}] + [K_{T_2}]$$

onde as matrizes $[K_{T_1}]$ e $[K_{T_2}]$ são dadas pela equação (IV-17) por

$$[K_{T_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14,88 \end{bmatrix} \times 10^3$$

e

$$[K_{T_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,80 \end{bmatrix} \times 10^3$$

Portanto a matriz $[K_T]$ será

$$[K_T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27,68 \end{bmatrix} \times 10^3$$

c) Montagem da matriz $[P]$

A partir da equação (IV-26), tem-se

$$[P] = [T_1]^T [R_1]^T [P_1][R_1][T_1] + [T_2]^T [R_2]^T [P_2][R_2][T_2]$$

onde $[P_1]$ e $[P_2]$ são obtidas pela equação (IV-9) como

$$[P_1] = [t_1]^T [N_1] [t_1]$$

e

$$[P_2] = [t_2]^T [N_2] [t_2]$$

A equação (IV-10) fornece

$$[t_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,839 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[t_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,937 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da equação (IV-11), obtém-se

$$\begin{bmatrix} N_1 \end{bmatrix} = 2,5 p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,696 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} N_2 \end{bmatrix} = 1,0 p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,737 \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz $[P]$ será:

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,50 & 0 & 6,50 \\ 0 & 3,50 & 3,70 \\ 6,50 & 3,70 & 41,97 \end{bmatrix} p$$

O sistema de equações diferenciais é obtido a partir da equação (IV-28) como

$$\begin{bmatrix} 1,18 & 0 & 2,077 \\ 0 & 10,540 & 10,737 \\ 2,077 & 10,737 & 120,000 \end{bmatrix} \times 10^6 \begin{bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27,68 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{bmatrix} +$$

$$+ (90 - z) p \begin{bmatrix} 3,50 & 0 & 6,50 \\ 0 & 3,50 & 3,70 \\ 6,50 & 3,70 & 41,97 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d) Resultados

Em virtude das 3 equações diferenciais serem dependentes entre si, processou-se o programa para resolvê-las simultaneamente, obtendo-se os resultados apresentados na tabela IV-1.

TABELA IV-1

| Nº DE TERMOS DA SÉRIE | GRAU DO POLINÔMIO | MENOR RAIZ REAL POSITIVA |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 3 | 30 | 22,99 |
| 4 | 30 | 2,77 |
| 5 | 60 | (*) |
| 6 | 60 | 2,23 |
| 7 | 90 | 2,58 |
| 8 | 90 | (*) |
| 9 | 120 | 3,54 |
| 10 | 120 | 3,25 |
| 11 | 150 | 22,25 |
| 12 | 150 | 3,27 |
| 13 | 180 | 3,58 |
| 14 | 180 | 3,63 |
| 15 | 210 | 3,62 |
| 16 | 210 | 32,45 |
| 17 | 240 | 32,46 |
| 18 | 240 | 3,62 |
| 19 | 270 | 3,62 |
| 20 | 270 | 3,62 |
| 21 | 300 | 3,62 |
| 22 | 300 | 3,62 |
| 23 | 330 | 3,62 |
| 24 | 330 | 3,62 |
| 25 | 360 | 3,62 |
| 26 | 360 | 3,62 |

(*) - O polinômio não fornece raiz real positiva.

Com base na tabela IV-1, admite-se para a carga critica o valor

$$p_{crit} = 3,62 \text{ t/m}$$

Esta carga, refere-se a flambagem por flexo-torção.

IV-2-2-2) Paredes de seção aberta com contraventamento.

a) Parâmetros geométricos dos lintéis.

a-1) Área da seção transversal

$$A = 0,20 \times 0,30 = 0,06 \text{ m}^2$$

a-2) Momento de inércia

$$J_1 = \frac{0,2 \times 0,0^3}{12} = 4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

a-3) Ângulo entre o eixo $\bar{\bar{x}}$ e OX

$$\Psi = 0^\circ$$

a.4) Parâmetro f .

A partir da equação (IV-54), tem-se

$$f = \frac{2,50^3}{12 \times 2,0 \times 10^6 \times 4,5 \times 10^{-4}} + \frac{2,50}{8,0 \times 10^5 \times 0,06}$$

$$f = 1,498 \times 10^{-3} \text{ m/t}$$

Em virtude do sistema de eixos global escolhido coincidir com o sistema de eixos $\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$, a matriz $[k]$ é obtida, diretamente a partir da equação (IV-58) como:

$$[k] = \frac{1}{3,0 \times 1,498 \times 10^{-3}} \begin{bmatrix} (4,805)^2 & (-0,5)(4,805) & (4,805)(-10,827) \\ (-0,5)(4,805) & (-0,5)^2 & (-0,5)(-10,827) \\ (-10,827)(4,805) & (-0,5)(-10,827) & (-10,827)^2 \end{bmatrix}$$

ou

$$[k] = \begin{bmatrix} 5137,522 & -534,601 & -11576,265 \\ -534,601 & 55,629 & 1204,606 \\ -11576,265 & 1204,606 & 26084,541 \end{bmatrix}$$

O sistema de equações diferenciais é dado pela equação (IV-77) como

$$\begin{bmatrix} 1,18 & 0 & 2,077 \\ 0 & 10,540 & 10,737 \\ 2,077 & 10,737 & 120,000 \end{bmatrix} \times 10^6 \begin{Bmatrix} u''' \\ v''' \\ \theta''' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5137,522 & 534,601 & -11576,265 \\ -534,601 & 55,629 & 1204,606 \\ -11576,265 & 1204,606 & 26084,541 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27,68 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} + (90-2) p \begin{bmatrix} 3,50 & 0 & 6,50 \\ 0 & 3,50 & 3,70 \\ 6,50 & 3,70 & 41,97 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Resultados

Com a resolução simultânea das 3 equações diferenciais, o programa forneceu os seguintes resultados

TABELA IV-2

| Nº DE TERMOS DA SÉRIE | GRAU DO POLINÔMIO | MENOR RAIZ REAL POSITIVA |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 3 | 3º | 69,32 |
| 4 | 3º | 18,11 |
| 5 | 6º | (*) |
| 6 | 6º | 8,37 |
| 7 | 9º | 13,90 |
| 8 | 9º | 68,54 |
| 9 | 12º | 11,85 |
| 10 | 12º | 14,41 |
| 11 | 15º | 35,06 |
| 12 | 15º | 14,95 |
| 13 | 18º | 15,88 |
| 14 | 18º | 32,58 |
| 15 | 21º | 32,87 |
| 16 | 21º | 17,50 |
| 17 | 24º | 30,04 |
| 18 | 24º | 19,02 |
| 19 | 27º | 18,59 |
| 20 | 27º | 18,59 |
| 21 | 30º | 18,99 |
| 22 | 30º | 18,92 |
| 23 | 33º | 18,92 |
| 24 | 33º | 18,97 |
| 25 | 36º | 18,97 |
| 26 | 36º | 18,97 |

(*) - O polinômio não fornece raiz real positiva.

A partir da tabela IV-2 admite-se para a carga critica o valor

$$p_{crit} = 18,97 \text{ t/m}$$

V) CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como se pode observar ao longo deste trabalho, o método apresentado para a determinação da carga crítica de flambagem em estruturas sob cargas uniformemente distribuídas ao longo dos eixos que passam pelos centros de gravidades das seções transversais das paredes, conduz a uma equação diferencial ou a um sistema de equações diferenciais homogêneas de terceira ordem com coeficientes variáveis e sem solução exata.

Como solução aproximada, adota-se Série de Potências. O seu desenvolvimento envolvem repetidas operações com matrizes e para obtenção da convergência recai-se em polinômio s de graus elevados. Portanto, na aplicação da Série de Potências é essencial o uso de computadores.

A precisão do método é avaliada comparando-se os resultados obtidos nos exemplos numéricos com exemplos nos quais é possível obter-se soluções exatas. A solução por Série de Potência é considerada boa.

Avalia-se ainda, o aumento considerável da rigidez da estrutura quando introduz-se ao nível dos andares um contraventamento por lintéis. Esta modificação é proveniente da ação de flexão dos mesmos e pela introdução de momentos de flexo-torção nas paredes.

Utiliza-se sistemas de eixos locais em cada parede e em cada conjunto de lintéis, com a finalidade de estender o método à edifícios formados pela combinação conjunta de paredes de seção aberta e painéis. Para isto é necessário que as propriedades de cada parede e cada conjunto de lintéis sejam referenciados a um sistema global de referência.

APÊNDICE 1 - RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO

1) INTRODUÇÃO

Neste apêndice apresenta-se um resumo da teoria de flexo-torção, baseada em RACHID [4] e SCHIFL [5], a qual utiliza-se na solução de estruturas de edifícios com paredes de seção aberta.

Seja a barra de seção aberta de paredes finas, apresentada na figura(1). Essa barra será referenciada a um sistema de eixo local com origem no centro de gravidade da seção transversal. Os eixos x e y são os eixos principais de inércia e o eixo z , longitudinal. Representa-se, também, uma coordenada na linha do esqueleto, de origem O_s convenientemente escolhida.

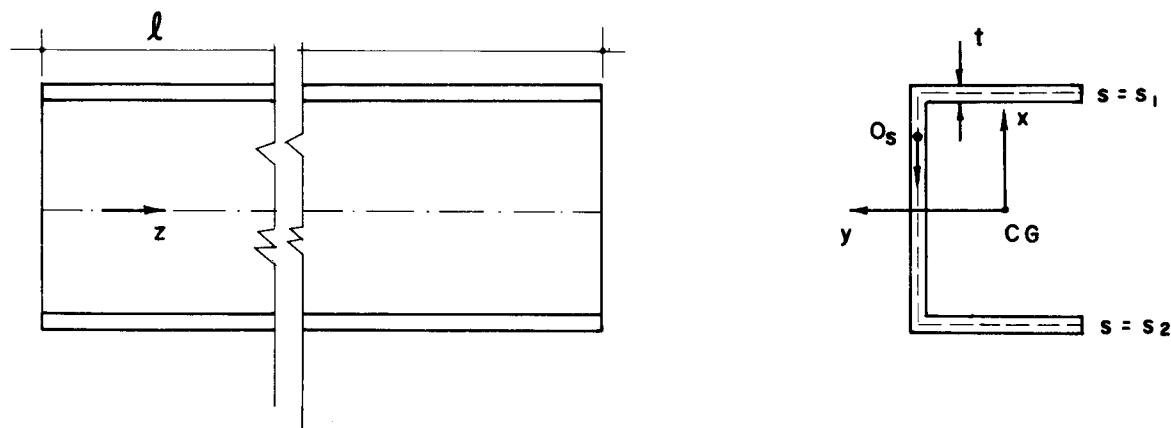


FIG. (1) — SISTEMA DE EIXOS EM UMA BARRA DE SEÇÃO ABERTA DE PAREDES FINAS

A espessura t pode variar com s e o elemento de área da seção é dado por

$$ds = t \, ds \quad (1)$$

Considere-se que

- a) as dimensões da seção não variam com a coordenada z ;
- b) a barra é de paredes finas ou seja a espessura t é bem menor que as outras dimensões características do esqueleto e essas bem menores que o comprimento l da barra.
- c) a seção é indeformável no seu plano.

2) CENTRO DE TORÇÃO OU DE CISALHAMENTO

Define-se como centro de torção ou centro de cisalhamento, o ponto do plano da seção transversal por onde deve passar o plano de aplicação das cargas transversais, para que a peça fique sujeita só à flexão e não à torção.

Para determinar a posição do centro de torção, considere-se a expressão das tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante Q , como

$$\tau = \frac{QM}{tJ} \quad (2)$$

onde M_s é o momento estático e J o momento de inércia, tomados em relação aos eixos apropriados.

Seja um carregamento paralelo ao plano xz , então na equação (2) faz-se:

$$Q = Q_x$$

$$J = J_y \quad (3)$$

$$M_s = \int_{s_1}^{s_2} x \, ds$$

A condição que fornece a localização do centro de torção D é que a resultante dos momentos das tensões τ_{Q_x} , suposta uniformemente distribuída na espessura t , em

relação ao centro de torção seja nula. Tem-se então:

$$\int_{s_1}^{s_2} \tau_{Q_x} dS \cdot n = 0 \quad (4)$$

sendo n a distância do centro de torção à tangente ao esqueleto, de acordo com a figura (2).

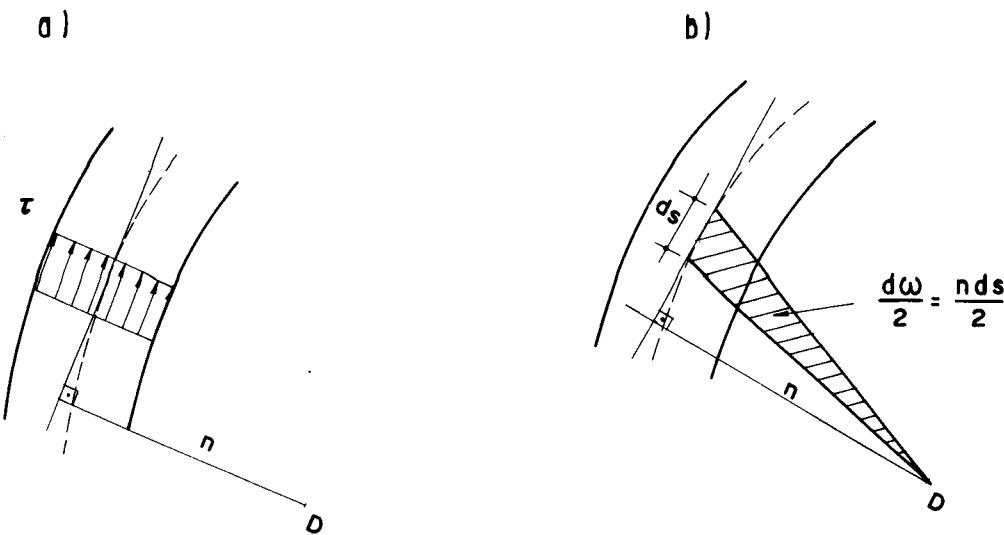


FIG. (2) — CENTRO DE TORÇÃO E ÁREA SETORIAL

Substituindo-se (2) e (3) em (4) e efetuando-se as integrais por partes, tem-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s n \, ds \right) x \, dS = 0 \quad (5)$$

Procedendo-se de forma análoga, para um carregamento paralelo ao plano yz , chega-se à seguinte condição para o centro de torção:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\int_{s_1}^s n \, ds \right) y \, dS = 0 \quad (6)$$

Definindo-se como área setorial a grandeza geométrica

$$\omega = \int_{s_1}^{os} n \, ds \quad (7)$$

as equações (5) e (6) fornecem as duas condições que determinam a posição do centro de torção, como

$$\begin{aligned} \int_S \omega x \, dS &= 0 \\ \int_S \omega y \, dS &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Observa-se, na figura (2-b), que o elemento de área setorial $d\omega$ é o dobro da área do setor elementar composto em D e que comprehende o arco elementar ds , daí provindo o nome de área setorial.

A origem O_s da coordenada s não influí nas condições (8), pois deslocando-se a origem, aparecerá um acrescimo constante na área setorial cuja contribuição às integrais (8) será nula, por serem nulos os momentos estáticos quando se considera a seção inteira.

Para facilitar as aplicações seguintes, a origem é escolhida de maneira a satisfazer a condição:

$$\int_S \omega \, dS = 0 \quad (9)$$

Caso se tenha a área setorial $\bar{\omega}$ com origem arbitrária e se queira a área setorial ω , satisfazendo (9), basta fazer

$$\omega = \bar{\omega} + C \quad (10)$$

Usando-se (9) em (10) tem-se:

$$C = - \frac{1}{S} \int_S \bar{\omega} dS \quad (11)$$

3) FÓRMULAS PARA AS COORDENADAS DO CENTRO DE TORÇÃO

As condições que definem a posição do centro de torção, dadas pelas equações (8), não permitem suas aplicações diretas no cálculo da determinação do centro de torção, porém uma interpretação geométrica da área setorial ω fornecerá a marcha de cálculo para a sua obtenção.

A figura (3) mostra um trecho de esqueleto, onde $Q(x, y)$ é um ponto genérico e $O_s(x_o, y_o)$ é a origem da coordenada s . Pelos pontos $D(x_D, y_D)$ (centro de torção), O_s e Q , traçam-se retas paralelas aos eixos principais de inércia x e y . Chamando-se de Δ a área do triângulo DMO_s (ou DMO_s), pode-se escrever:

$$A + B + 2\Delta = 2 \left(\frac{\omega}{2} + B + \Delta \right) \quad (12)$$

onde A e B são as áreas hachuradas da figura (3).

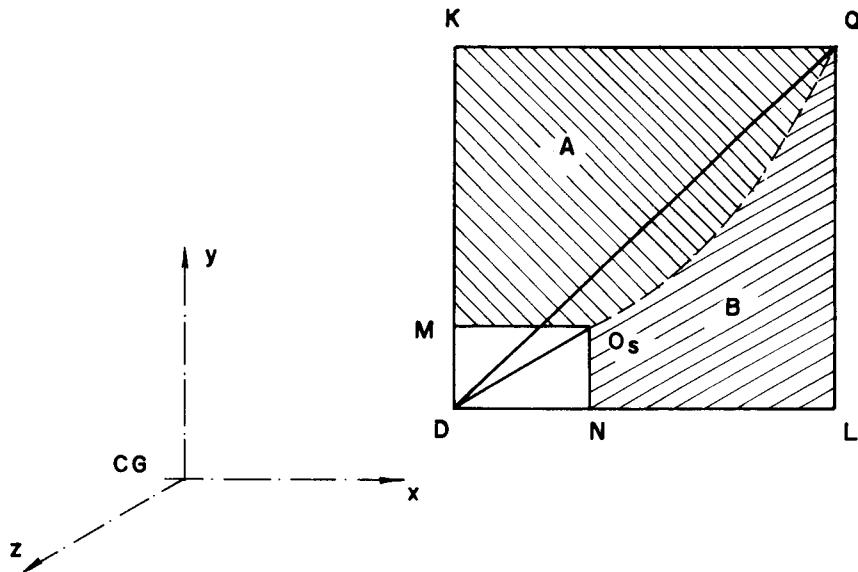


FIG. (3) — PROPRIEDADES DA ÁREA SETORIAL

Da equação (12) tem-se:

$$\omega = A - B \quad (13)$$

O sinal da função ω será positivo se o raio vetor traçado de D , partindo de O_s para o ponto genérico, girar no sentido horário para um observador colocado sobre o eixo z e olhando no seu sentido positivo.

Para facilitar a aplicação desta teoria no desenvolvimento dos capítulos deste trabalho, definiu-se o sistema de eixos da figura (3), de acordo com o sistema de eixos definidos para os edifícios (eixo z orientado da base para o topo do edifício).

Na figura (4) mostra-se um ponto $P(x_p, y_p)$, arbitrariamente escolhido, que servirá de polo provisório para a área setorial. Chamando-se de ω_p esta área setorial e usando-se a equação (13), escreve-se:

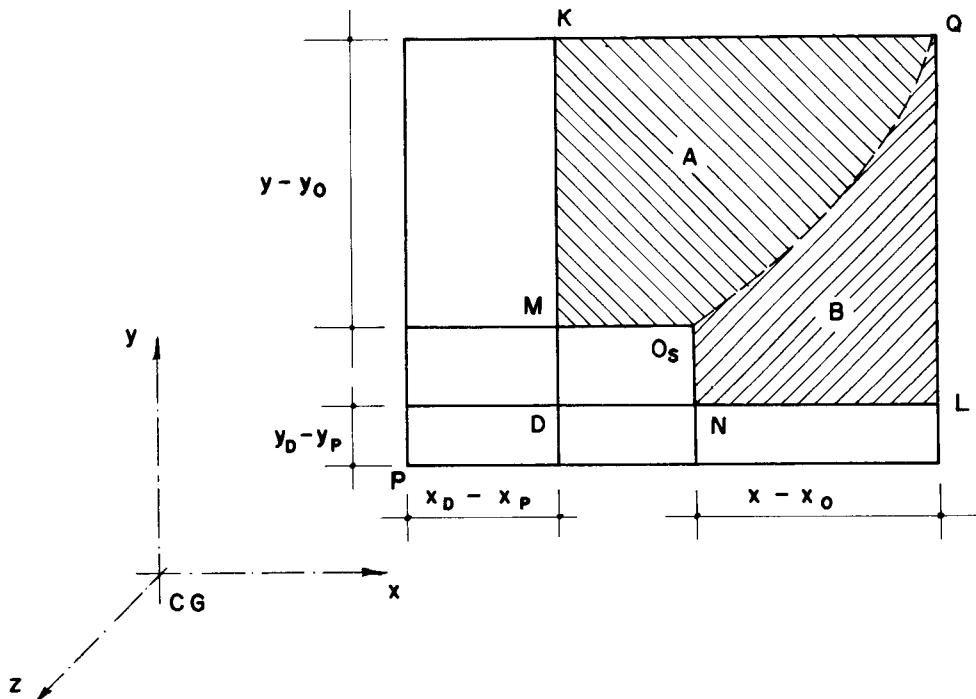


FIG.(4) – ÁREA SETORIAL COM PÓLO ARBITRÁRIO

$$\omega_p = A + (y - y_o)(x_D - x_p) - B - (x - x_o)(y_D - y_p) \quad (14)$$

arrumando-se convenientemente a equação (14) e usando-se a equação (13), obtém-se:

$$\omega = \omega_p + (x - x_o)(y_D - y_p) - (y - y_o)(x_D - x_p) \quad (15)$$

Sendo os eixos x e y os eixos principais de inércia, tem-se:

$$\int_S x^2 dS = J_y \quad (16)$$

$$\int_S y^2 dS = J_x$$

$$\int_S x dS = \int_S y dS = \int_S xy dS = 0$$

Substituindo-se as equações (15) e (16) na equação (8), tem-se as coordenadas do centro de torção dadas por:

$$x_D = x_p + \frac{1}{J_x} \int_S \omega_p y dS \quad (17)$$

$$y_D = y_p - \frac{1}{J_y} \int_S \omega_p x dS$$

3) TORÇÃO UNIFORME OU TORÇÃO LIVRE OU TORÇÃO DE SAINT-VENANT

3.1) Condições para a torção livre

Convenciona-se chamar torção livre quando são satisfeitas as condições:

- a) a seção transversal da barra é constante com z
- b) o momento torçor é constante com z
- c) não há vínculos impedindo os deslocamentos longitudinais da barra.

A Resistência dos Materiais fornece o resultado da torção livre como

$$\theta' = \frac{M_T}{G J_T} \quad (18)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal e J_T é o momento de inércia à torção da seção transversal.

Na figura (5) apresenta-se as convenções de sinal para o momento torçor M_T e para a rotação θ , ou seja: O momento torçor M_T será positivo quando solicita um para fuso direto no sentido de apertá-lo e a rotação θ será positiva se girar no sentido anti-horário para um observador sobre o eixo z e olhando no seu sentido positivo.

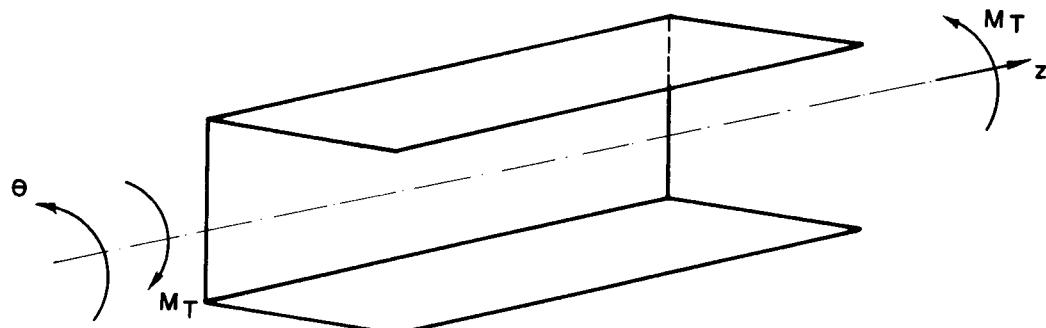


FIG. (5) — CONVENÇÃO DE M_T E θ POSITIVOS

3.2) Deslocamento longitudinal

Consideram-se agora os deslocamentos w na direção z e v segundo s .

Devido ao giro θ na seção em torno do centro de torção, um ponto genérico Q do esqueleto sofre um deslocamento \overline{QQ}' , indicado na figura (6), e dado por:

$$\overline{QQ}' = \theta r \quad (19)$$

onde r é o comprimento do raio vetor que une o centro de torção ao ponto considerado.

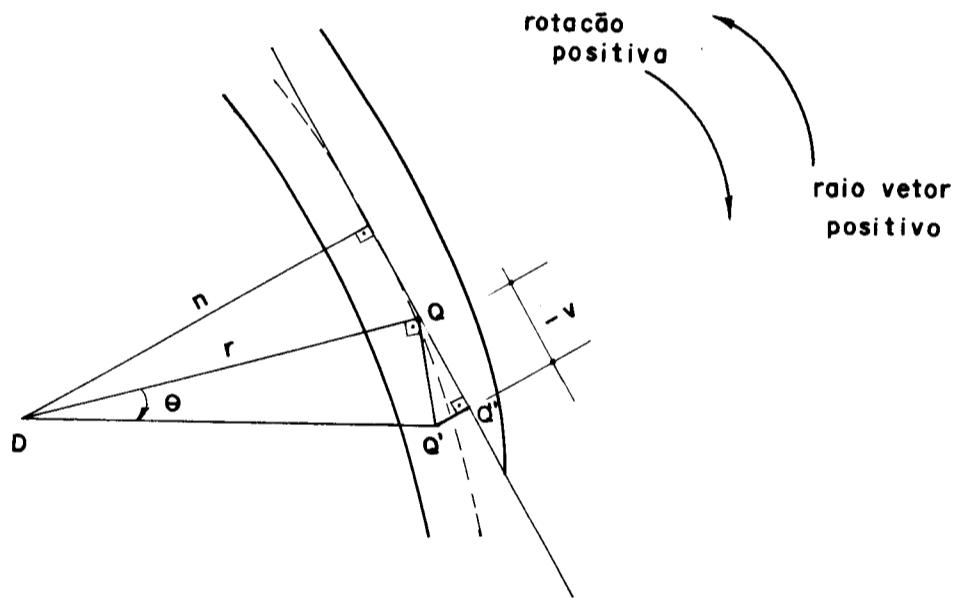


FIG. (6) — DESLOCAMENTO DE UM PONTO DO ESQUELETO

A projeção de \overline{QQ}' sobre a tangente ao esqueleto fornece o deslocamento v , ou seja:

$$-v = n \theta \quad (20)$$

Este deslocamento é negativo em virtude das convenções de sinais do ângulo θ (positivo quando o giro é

anti-horário para um observador olhando no sentido positivo de z) e da ordenada s (positiva quando o raio vetor gira no sentido horário, para a posição mencionada do observador).

Derivando-se uma vez a equação (20), obtém-se:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -n \theta' \quad (21)$$

Como a tensão tangencial é nula no esqueleto, pela lei de Hooke conclui-se que a distorção também será. Nesse caso tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (22)$$

Substituindo-se a equação (21) na equação (22) e lembrando-se que na torção livre o deslocamento longitudinal não é função z , tem-se:

$$\frac{dw}{ds} = n \theta' \quad (23)$$

Integrando-se em s desde a origem O_s até o ponto genérico Q , a equação (23) fica:

$$w = \theta' \int_{O_s}^Q n ds \quad (24)$$

Usando-se a equação (7), tem-se

$$w = \omega \theta' \quad (25)$$

Os deslocamentos longitudinais serão positivos quando concordantes com o sentido positivo de z .

Ao deslocamento longitudinal w dá-se o nome de empenamento.

4) TORÇÃO NÃO UNIFORME OU FLEXO-TORÇÃO

4.1) Hipótese de cálculo

A ocorrência de flexo-torção ficará limitada somente aos casos em que o momento torçor não é constante, ou àqueles em que há vínculos que impeçam o empenamento de alguma seção, isto porque estão sendo consideradas somente barras de seção transversal constante.

A hipótese básica considerada para resolver o problema de flexo-torção é que a equação (25) continua válida, porém com a particularidade de que a derivada do ângulo θ não é mais constante com z .

4.2) Tensão normal de flexo-torção

Desprezam-se as tensões normais, com exceção das quelas em cortes transversais, chamando-se de σ_z e ϵ_z , respectivamente, a tensão normal e a deformação longitudinal, escrevem-se, a partir da Lei de Hooke e da Teoria da Elasticidade.

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \epsilon_z \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{26}$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal.

Combinando-se as equações (26) e (25), tem-se:

$$\sigma_z = E w \theta'' \tag{27}$$

Deve-se observar que as tensões σ_z não têm força nem momento resultante na seção devido às equações (8) e (9). Sua resultante será um novo esforço solicitante, o bimomento, que será introduzido adiante.

A tensão longitudinal em um ponto da seção será considerada positiva se for de tração.

4.3) Tensão tangencial de flexo-torção

Considere-se o elemento de comprimento dz limitado pelas coordenadas s_1 e s . Em virtude da variação das tensões σ_z , o equilíbrio longitudinal é feito considerando-se a presença de tensões de cisalhamento. Na figura(7), representam-se estas tensões, chamadas de tensões tangenciais de flexo-torção, por τ_{ft} .

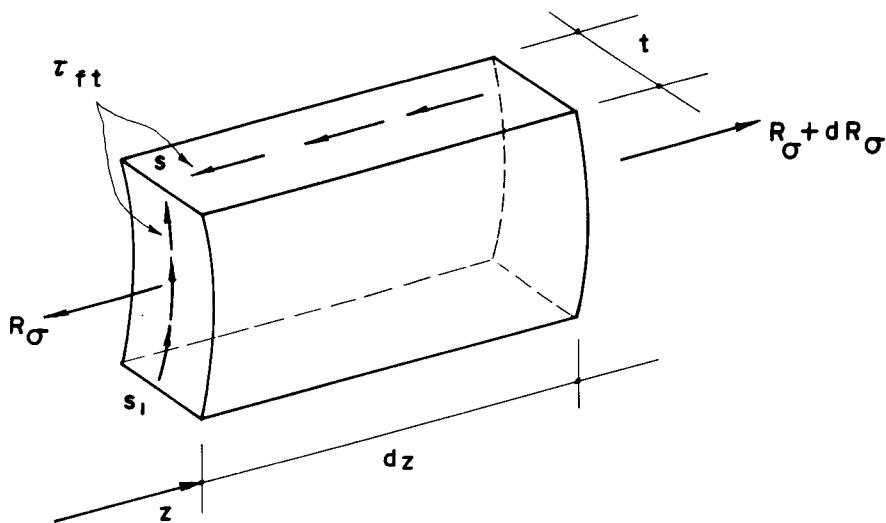


FIG. (7) — TENSÕES TANGENCIAIS DE FLEXO-TORÇÃO

Seja R_σ a resultante das tensões σ_z na face de coordenada z do elemento. Então, usando-se a equação(27), tem-se:

$$R_\sigma = E \theta'' \int_{s_1}^{s_2} \omega \, dS \quad (28)$$

Fazendo-se o equilíbrio do elemento na direção

longitudinal e usando-se a equação (28), tem-se:

$$\tau_{ft} = \frac{E \theta'''}{t} \int_{s_1}^s \omega \, ds \quad (29)$$

4.4) Momento de flexo-torção

As tensões τ_{ft} , por serem pequenas, não afetam a base de cálculo da teoria de flexo-torção em que considera-se distorção nula no esqueleto. Porém, sua contribuição para o momento torçor pode ser considerável. Chamando-se de M_{ft} a contribuição dessas tensões, tem-se:

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} n \tau_{ft} \, ds \quad (30)$$

Usando-se as equações (7), (9) e (29) na equação (30) e efetuando-se as integrações, obtém-se:

$$M_{ft} = -E J_\omega \theta''' \quad (31)$$

onde J_ω é o momento setorial de inércia dado por:

$$J_\omega = \int_S \omega^2 \, ds \quad (32)$$

Substituindo-se a equação (31) na equação (29), tem-se

$$\tau_{ft} = -\frac{M_{ft}}{t} \frac{S_\omega}{J_\omega} \quad (33)$$

onde S_ω é o momento estático setorial dado por:

$$S_\omega = \int_{s_1}^s \omega \, ds \quad (34)$$

4.5) Equação diferencial da flexo-torção

Com a introdução dos conceitos do momento de flexo-torção, o momento torçor passa, agora, a ser definido como

$$M_T = M_l + M_{ft} \quad (35)$$

onde M_l é o momento de torção livre e M_{ft} o momento de flexo-torção.

Como M_l é agora uma parcela de M_T , a equação (18) deve ser modificada para:

$$M_l = G J_T \theta' \quad (36)$$

Substituindo-se as equações (31) e (36) na equação diferencial no ângulo de giro:

$$M_T = -E J_\omega \theta''' + G J_T \theta' \quad (37)$$

Com a solução da equação (37) resolve-se o problema da flexo-torção, uma vez que é possível achar todas as grandezas envolvidas.

4.6) Introdução ao Bimomento

Define-se o bimomento por

$$B = \int_S \sigma_z \omega dS \quad (38)$$

Usando-se as equações (27) e (32) na equação (38), obtém-se:

$$B = E J_\omega \theta'' \quad (39)$$

Pela substituição da equação (39) na equação (27) obtém-se a tensão longitudinal σ_z , de forma análoga ao da flexão simples, ou seja:

$$\sigma_z = \frac{B}{J_w} \omega \quad (40)$$

Derivando-se a equação (40) e comparando-se com a equação (31), tem-se que:

$$M_{ft} = -B' \quad (41)$$

Caso na extremidade de uma viga sejam aplicadas cargas axiais P_i , positivas de tração, concentradas em pontos de área setorial ω_i , o bimomento pode ser calculado como

$$B = \sum P_i \omega_i \quad (42)$$

APÊNDICE 2 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste apêndice será exposto o método de solução por série de potências do sistema de equações diferenciais.

$$[K] \{D'''(z)\} = ([k] + [K_T] \cdot \{D'(z)\}) + \\ + (E-z) [P] \{D'(z)\} = \{0\} \quad (1)$$

A exposição prender-se-á à solução do sistema de equações diferenciais resultante da análise do exemplo a presentado no item (III-3-1), que é o caso geral. Os casos particulares em que $[k] = [0]$ e/ou $[K_T] = [0]$, não invalidam o método.

As matrizes $[K]$, $[K_T]$ e $[P]$ e o vetor $\{D(z)\}$ são determinados de acordo com o caso analisado.

Com a finalidade de baixar a ordem da equação diferencial (1), adotam-se:

$$\{\delta(\xi)\} = \{D(z)'\} \quad (2)$$

e

$$\xi = \frac{z}{H} \quad (3)$$

A partir das equações (2) e (3) escreve-se

$$\{D'''(z)\} = \frac{1}{H^2} \{\delta''(\xi)\} \quad (4)$$

Substituindo-se as equações (2), (3) e (4) na equação (1), obtém-se

$$[K] \{\delta(\xi)''\} - H^2 \left([k] + [K_T] \right) \{\delta(\xi)\} + \\ + H^3 (1-\xi) [P] \{\delta(\xi)\} = \{0\} \quad (5)$$

A solução da equação (5) por série de potências será:

$$\{\delta(\xi)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\} \xi^n \quad (6)$$

onde $\{A_n\}$ é um vetor constante dado por:

$$\{A_n\} = \begin{Bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \end{Bmatrix}$$

Derivando-se duas vezes a equação (6), obtém-se:

$$\{\delta''(\xi)\} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \{A_n\} \xi^{(n-2)} \quad (8)$$

Substituindo-se as equações (6) e (8) na equação (5) tem-se:

$$\begin{aligned} & [K] \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \{A_n\} \xi^{(n-2)} - E^2 ([k] + [K_T]) \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\} \xi^n + \\ & + E^3 (1-\xi) [P] \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\} \xi^n = \{0\} \end{aligned} \quad (9)$$

Para facilitar a reunião dos termos na equação (9) mudam-se os índices das duas últimas séries da equação (9) por $n-2$, o que certamente não acarreta prejuízo à série. Portanto a equação (9) fica:

$$\begin{aligned} & [K] \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \{A_n\} \xi^{n-2} - \\ & - E^2 ([k] + [K_T]) \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{(n-2)}\} \xi^{(n-2)} + E^3 [P] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{(n-2)}\} \xi^{n-2} - \\ & - E^3 [P] \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{(n-2)}\} \xi^{(n-1)} = \{0\} \end{aligned} \quad (10)$$

Multiplicando todos os termos da equação (10) pela inversa da matriz $[K]$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\{A_n\} \xi^{n-2} - H^2 [K]^{-1} [k] + \\
 & + [K_T]) \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \xi^{n-2} + H^3 [P][K]^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \xi^{n-2} - \\
 & - H^3 [F][K]^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \{A_{n-2}\} \xi^{n-1} = \{0\} \tag{11}
 \end{aligned}$$

- Primeira condição de contorno

Devido ao engastamento perfeito na base do edifício, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
 u'(o) &= 0 \\
 v'(o) &= 0 \\
 \theta'(o) &= 0 \tag{12}
 \end{aligned}$$

portanto

$$\{\delta(o)\} = \{0\} \tag{13}$$

onde $\delta(o)$ representa a base do edifício.

Combinando-se as equações (6) e (13) resulta:

$$\{A_o\} = \{0\} \tag{14}$$

Para que a equação (6) seja solução de equação diferencial, é necessário que a soma dos coeficientes de potências iguais de ξ sejam todos nulos.

Esta condição permite que se determine o valor do vetor $\{A_n\}$.

Desenvolvendo-se a equação (11) para os valores iniciais de $n=2$, $n=3$ e $n=4$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & 2(2-1)\{A_2\}\xi^0 - H^2[K]^{-1}([k]+[K_T])\{A_0\}\xi^0 + \\
 & + H^3[P][K]^{-1}\{A_0\}\xi^0 - H^3[P][K]^{-1}\{A_0\}\xi^1 + 3(3-1)\{A_3\}\xi^1 - \\
 & - H^2[K]^{-1}([k]+[K_T])\{A_1\}\xi^1 + H^3[P][K]^{-1}\{A_1\}\xi^1 - \\
 & - H^3[P][K]^{-1}\{A_1\}\xi^2 + 4(4-1)\{A_4\}\xi^2 - H^2[K]^{-1}([k]+ \\
 & + [K_T])\{A_2\}\xi^2 + H^3[P][K]^{-1}\{A_2\}\xi^2 - H^3[P][K]^{-1}\{A_2\}\xi^3 + \\
 & + \sum_{n=5}^{\infty} n(n-1)\{A_n\}\xi^{n-2} - H^2[K]^{-1}([k]+[K_T]) \sum_{n=5}^{\infty} \{A_{n-2}\}\xi^{n-2} + \\
 & + H^3[P][K]^{-1} \sum_{n=5}^{\infty} \{A_{n-2}\}\xi^{n-2} - H^3[P][K]^{-1} \sum_{n=5}^{\infty} \{A_{n-2}\}\xi^{n-1} = \{0\}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Anulando-se o termo de potência zero (ξ^0) da equação (15) e tendo em vista a equação (14), obtém-se:

$$2(2-1)\{A_2\} = \{0\} \tag{16}$$

ou

$$\{A_2\} = \{0\} \tag{17}$$

Anulando-se o termo de potência 1 (ξ^1) da equação (15), resulta:

$$\begin{aligned}
 & -H^3[P][K]^{-1}\{A_0\}\xi + \left[3(3-1)\{A_3\} - H^2[K]^{-1}([k]) + \right. \\
 & \left. + [K_T]\{A_1\} + H^3[P][K]^{-1}\{A_1\} \right] \xi = \{0\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Extraindo-se o valor de $\{A_3\}$ da equação (18), resulta:

$$\begin{aligned} \{A_3\} &= \frac{1}{3(3-1)} \left[(H^2 [K]^{-1} ([k] + [K_T])) - \right. \\ &\quad \left. - H^3 [P] [K]^{-1} \{A_1\} + H^3 [P] [K]^{-1} \{A_0\} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Fazendo-se

$$[C_1] = H^2 [K]^{-1} \left(H[P] - [k] - [K_T] \right) \quad (20)$$

e

$$C_2 \neq H^3 [K]^{-1} [P] \quad (21)$$

Estas equações são chamadas de relação de recorrência (ou equações de diferença finita) e podem ser usadas para exprimir A_n para $n \geq 3$. Desta forma, combinando-se as equações (20) e (21) com a equação (19), obtém-se:

$$\{A_3\} = \frac{1}{3(3-1)} \left([C_2] \{A_0\} - [C_1] \{A_1\} \right) \quad (22)$$

A partir da anulação do termo de potência 2 (ξ^2) da equação (15), obtém-se:

$$\begin{aligned} &-H^3 [P] [K]^{-1} \{A_1\} \xi^2 + 4(4-1) \{A_4\} \xi^2 - \\ &- H^2 [K]^{-1} ([k] + [K_T]) \{A_2\} \xi^2 + H^3 [P] [K]^{-1} \{A_2\} \xi^2 = \{0\} \end{aligned} \quad (23)$$

Extraindo o valor de $\{A_4\}$ e tendo em vista as equações (20) e (21), resulta:

$$\{A_4\} = \frac{1}{4(4-1)} \left([C_2] \{A_1\} - [C_1] \{A_2\} \right) \quad (24)$$

Desenvolvendo-se a equação (11) até seu enésimo termo, conclui-se que

$$\{A_n\} = \frac{1}{n(n-1)} \left([C_2] \{A_{n-3}\} - [C_1] \{A_{n-2}\} \right) \quad (25)$$

Fazendo-se

$$\{A_n\} = [\phi_n] \{A_1\} \quad (26)$$

Tendo em vista as equações (14), (17) e (26), obtém-se:

$$[\phi_0] = [0] \quad (27)$$

$$[\phi_1] = [I] \quad (27)$$

$$[\phi_2] = [0]$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. O valor da matriz $[\phi_n]$ para $n \geq 3$, fica determinado por:

$$[\phi_n] = \frac{1}{n(n-1)} \left([C_2][\phi_{n-3}] - [C_1][\phi_{n-2}] \right) \quad (28)$$

Substituindo-se a equação (26) na equação (6) e tendo em vista a equação (14)

$$\{\delta(\xi)\} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n] \xi^n \right) \{A_1\} \quad (29)$$

Como no topo do edifício não existe momentos fletores aplicados, nem bimomentos, a segunda condição de contorno é facilmente deduzida como

$$\{\delta'(1)\} = \{0\} \quad (30)$$

onde $\{\delta'(1)\}$ corresponde à primeira derivada do vetor $\{\delta(\xi)\}$ no topo do edifício.

Derivando-se uma vez a equação (29) obtém-se:

$$\{\delta'(\xi)\} = \left([\phi_1] + 2[\phi_2]\xi + \dots + n[\phi_n]\xi^{n-1} \right) \{A_1\} \quad (31)$$

No topo do edifício, tem-se

$$\{\delta'(1)\} = \left([\phi_1] + 2[\phi_2] + \dots + n[\phi_n] \right) \{A_1\} \quad (32)$$

Combinando-se a equação (30) com a equação (32), resulta:

$$\left([\phi_1] + 2[\phi_2] + \dots + n[\phi_n] \right) \{A_1\} = \{0\} \quad (33)$$

Fazendo-se

$$[C_{(p)}] = \sum_{n=1}^{\infty} n [\phi_n] \quad (34)$$

A equação (33) escreve-se

$$[C_{(p)}] \{A_1\} = \{0\} \quad (35)$$

Tendo em vista que o vetor $\{A_1\}$ é diferente de zero e a matriz $[C_{(p)}]$ é função da carga crítica p , o valor desta é determinado como:

a) Se a ordem da matriz $[C_{(p)}]$ for 1×1 , com a anulação de $C_{(p)}$, isto é,

$$C_{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \phi_n = 0 \quad (36)$$

b) Se a ordem da matriz $[C_{(p)}]$ for diferente de 1×1 , com a anulação do determinante de $[C_{(p)}]$, o que garante a existência de solução diferente da trivial, isto é:

$$\det [C_{(p)}] = 0 \quad (37)$$

APÊNDICE 3 - PROGRAMA FORTRAN PARA O COMPUTADOR IBM-1130

Este programa foi escrito em linguagem FORTRAN, para o computador IBM-1130 com 32 K de memória interna, com a finalidade de resolver, por Série de Potências, a equação diferencial deduzida no capítulo II ou os sistemas de equações diferenciais deduzidos nos capítulos III e IV.

O programa principal faz uso de 3 subrotinas:

RAPOL - programada com base na subrotina científica POLRT do manual de programas da IBM: 1130 Scientific Subroutine Package. Tem a finalidade de obter as raízes reais e complexas dos polinômios de no máximo do 36º grau. Esta subrotina apresenta um código de erro de acordo com a tabela 3.1.

TABELA 3.1 - TABELA DE ERROS

| Nº DO ERRO - IER | CAUSA DO ERRO |
|------------------|--|
| 0 | Não houve erro |
| 1 | Grau do polinômio é menor que 1 |
| 2 | Grau do polinômio é maior que 36 |
| 3 | Incapaz de calcular a raiz com 500 iterações para 5 valores iniciais |
| 4 | Coeficiente do termo de maior grau é zero |

INV - inverte a matriz quadrada pelo método de GAUSS-JORDAN.

PRMAT - efetua o produto de duas matrizes quadradas.

A seguir são identificadas as principais variáveis que figuram no programa principal.

NE - Ordem das matrizes coeficientes do sistema de equações

ções diferenciais. Pode assumir os valores $1 \leq NE \leq 3$.

H - altura total da estrutura.

KMA - matriz de rigidez da estrutura à flexo-torção- $[K]$ - de ordem 1, (2×2) ou (3×3) .

KMI - matriz de rigidez imposta pelos lintéis - $[k]$ - de ordem 1, (2×2) ou (3×3) .

KT - matriz de rigidez da estrutura à torção livre - $[K_T]$ - de ordem 1, (2×2) ou (3×3) .

P - matriz dos esforços externos na estrutura - $[P]$ - de ordem 1, (2×2) ou (3×3) .

N - Número de termos da série.

FN - matriz ϕ_n conforme a equação (28) do apêndice 2.

C - matriz $C_{(p)}$ conforme equação (37) do apêndice 2.

$ALFA$ - vetor contendo os coeficientes do polinômio gerado pelo cálculo do determinante da matriz $[C_{(p)}]$.

$PCRT$ - vetor contendo as raízes reais do polinômio.

$PCRTI$ - vetor contendo as raízes imaginárias do polinômio.

Os cartões de dados para o programa devem ser fornecidos na forma e na ordem da tabela 3.2.

TABELA 3.2 - TABELA DE DADOS

| DADOS | Nº DE CARTÕES | VARIÁVEIS POR CARTÕES | FORMATO |
|---|---------------|-----------------------|---------|
| Ordem das matrizes coeficientes do sistema de equações diferenciais | 1 | NE | I1 |
| Altura da estrutura | 1 | H | F15.0 |
| Matriz K | NE | cada linha da matriz | 3F15.0 |
| Matriz k | NE | cada linha da matriz | 3F15.0 |
| Matriz K_T | NE | cada linha da matriz | 3F15.0 |
| Matriz P | NE | cada linha da matriz | 3F15.0 |
| Cartão em branco | | | |

O programa estende a série até seu 26º termo. A cada extensão são impressos: o número de termos considerados na série, o grau e coeficientes do polinômio gerado pelo cálculo do determinante de $[c_{(p)}]$, o código de erro na resolução do polinômio e as raízes reais e complexas do polinômio.

Segue a listagem do programa.

PAGE 1 FACC

// JCB T

FACC

| LOG DRIVE | CART SPEC | CART AVAIL | PHY DRIVE |
|-----------|-----------|--------------|--------------|
| 0000 | . 0016 | 0016 0021 | 0000 C001 |

V2 M10 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// * C.P.C. - E.E.S.C. - U.S.P.

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```

C---- INITIALE SUBROUTINE RAPOL
      SUBROUTINE RAPOL(XCCF,CCF,M,ROOTR,ROOTI,IER)
      DIMENSION XCCF(1),CCF(1),ROOTR(1),ROOTI(1)
      IFIT=0
      N=M
      IER=0
      IF(XCCF(N+1)) 10,25,10
  10 IF(N) 15,15,32
C---- SET ERROR CODE TO 1
  15 IER=1
  20 RETURN
C---- SET ERROR CODE TO 4
  25 IER=4
  26 GC TC 20
C---- SET ERROR CODE TO 2
  30 IER=2
  31 GC TC 20
  32 IF(N-36) 35,35,30
  35 NX=N
  36 NXX=N+1
  37 N2=1
  38 KJ1 = N+1
  39 GC 40 L=1,KJ1
  40 MT=KJ1-L+1
  41 CCF(MT)=XCCF(L)
C---- SET INITIAL VALUES
  42 XC=.00500101
  43 YC=0.01000101
C---- ZERO INITIAL VALUE COUNTER
  44 IN=0
  45 X=XC
C---- INCREMENT INITIAL VALUES AND COUNTER
  46 XC=-10.0*YC
  47 YC=-10.0*X
C---- SET X AND Y TO CURRENT VALUE
  48 X=XC
  49 Y=YC
  50 IN=IN+1
  51 GC TC 59
  52 IFIT=1
  53 XPR=X
  54 YPR=Y
C---- EVALUATE POLYNOMIAL AND DERIVATIVES
  55 ICT=0
  56 UX=0.0
  57 UY=0.0
  58 V=0.0
  59 YT=0.0
  60 XT=1.0
  61 U=CCF(N+1)
  62 IF(U) 65,130,65
  63 OC 70 I=1,N
  64 L=N-I+1
  65 XT2=X*XT-Y*YT
  66 YT2=X*YT+Y*XT
  67 U=U+CCF(L)*XT2
  68 V=V+CCF(L)*YT2
  69 FI=I
  70 UX=UX+FI*XT*CCF(L)
  71 UY=UY-FI*YT*CCF(L)
  72 XT=XT2
  73 YT=YT2
  74 SUMSC=UX*UX+UY*UY
  75 IF(SUMSC) 75,110,75
  76 DX=(V*UY-U*UX)/SUMSC
  77 X=X+DX
  78 DY=-(U*UY+V*UX)/SUMSC
  79 Y=Y+DY
  80 IF(ABS(DY)+ABS(DX)-1.0E-02) 100,80,80

```

PAGE 2 FACC

```

C---- STEP ITERATION COUNTER
 80 ICT=ICT+1
    IF(ICT-500) 60,85,85
 85 IF(IFIT) 100,90,100
 90 IF(IN-5) 50,95,95
C---- SET ERRCR CODE TO 3
 95 IER=3
    GC TC 20
100 DC 105 L=1,NXX
    MT=KJ1-L+1
    TEMP=XCCF(MT)
    XCCF(MT)=CCF(L)
105 CCF(L)=TEMP
    ITEMP=N
    N=NX
    NX=ITEMP
    IF(IFIT) 120,55,120
110 IF(IFIT) 115,50,115
115 X=XPR
    Y=YPR
120 IFIT=0
    IF(X) 122,125,122
122 IF(ABS(Y)-ABS(X)*1.0E-04) 135 , 125 , 125
125 ALPHA=X+X
    SUMSQ=X*X+Y*Y
    N=N-2
    GC TC 140
130 X=0.0
    NX=NX-1
    NXX=NXX-1
135 Y=0.0
    SUMSQ=0.0
    ALPHA=X
    N=N-1
140 L1=1
    L2=2
    CCF(L2)=CCF(L2)+ALPHA*COF(L1)
145 DC 150 L=2,N
150 CCF(L+1)=CCF(L+1)+ALPHA*COF(L)-SUMSQ*COF(L-1)
155 RCCTI(N2)=Y
    RCCTR(N2)=X
    N2=N2+1
    IF(SUMSQ) 160,165,160
160 Y=-Y
    SUMSQ=0.0
    GC TC 155
165 IF(N) 20,20,45
END

```

UNREFERENCED STATEMENTS
78 145

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR RAPOL
COMMON 0 VARIABLES 80 PROGRAM 766

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 006D (HEX)

END OF COMPIRATION

// DUP

*STCRE WS UA RAPCL
CART ID 0016 DB ACDR 38F3 DB CNT 0037

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
    SUBROUTINE INV(A,N)
C---- INVERSE DE UMA MATRIZ
C---- DIMENSAC A(3,3)
    DIMENSION A(3,3)
    IF(N-1)8,9,8
 9 A(1,1)=1./A(1,1)
    GC TC 10
 8 DC 11 I=1,N
    AUX=A(I,I)
    A(I,I)=1.
    DC 12 J=1,N

```

PAGE 3 FACC

```

12 A(I,J)=A(I,J)/AUX
    DC 13 K=1,N
    IF(I-K) 14,13,14
14 AUX=A(K,I)
    A(K,I)=0.
    DC 15 M=1,N
    A(K,M)=A(K,M)-AUX*A(I,M)
15 CCNTINUE
13 CCNTINUE
11 CCNTINUE
10 RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED

*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR INV
COMMON 0 VARIABLES 10 PROGRAM 176

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0011 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```
*STCRE WS UA INV
CART ID 0016 DE ADDR 392A DB CNT 000C
```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
      SUBROUTINE PRMAT(A,B,C,N)
C---- PRCRDT DE DUAS MATRIZES (AXB=C)
      DIMENSION A(3,3),B(3,3),C(3,3)
      DC 8 I=1,N
      DC 8 J=1,N
      C(I,J)=0.
      DC 8 K=1,N
      8 C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
      RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR PRMAT
COMMON 0 VARIABLES 6 PROGRAM 106

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000A (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```
*STCRE WS UA PRMAT
CART ID 0016 DE ADDR 3936 DB CNT 0008
```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IICCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*EXTENDED PRECISION
      REAL KMA(3,3),KMI(3,3),KT(3,3)
      DIMENSION C1(3,3),C2(3,3),C(3,3,13),FN1(3,3,13),FN2(3,3,13),FN3(3,
*3,13),FN(3,3,13),P(3,3),AUX(3,3),A(3,3),ALFA(37),COF(37),PCR(36),P
      *CRI(36)
      READ(2,4)NE
      4 FCRRMAT(I1)
      READ(2,5)H
      5 FCRRMAT(F15.0)
      DC 1 I=1,NE
      1 READ(2,6)(KMA(I,J),J=1,NE)
      6 FCRRMAT(3F15.0)
      DC 2 I=1,NE
      2 READ(2,7)(KMI(I,J),J=1,NE)
      7 FCRRMAT(3F15.0)
      DC 3 I=1,NE
      3 READ(2,8)(KT(I,J),J=1,NE)
      8 FCRRMAT(3F15.0)
      DC 10 I=1,NE
```

PAGE 4 FACC

```

10 READ(2,9)(P(I,J),J=1,NE)
9 FCRMAT(3F15.0)
C---- CALCULO DA RELACAO DE RECORRENCA
CALL INV(KMA,NE)
CALL PRMAT(KMA,P,C1,NE)
DC 50 I=1,NE
DC 50 J=1,NE
C1(I,J)=C1(I,J)*H**3
50 AUX(I,J)=KMI(I,J)+KT(I,J)
CALL PRMAT(KMA,AUX,C2,NE)
DC 55 I=1,NE
DC 55 J=1,NE
55 C2(I,J)=C2(I,J)*H**2
DC 56 N=3,26
NN=(N+1)/2
M1=NE*(NN-1)
DC 60 I=1,NE
DC 60 J=1,NE
DC 65 K=1,NN
65 C(I,J,K)=0.
FN3(I,J,1)=0
FN2(I,J,1)=0
60 FN1(I,J,1)=0
DC 63 I=1,NE
FN2(I,I,1)=1.
63 C(I,I,1)=1.
WRITE(5,61)N
61 FCRMAT('1',20X,'NUMERO DE TERMOS DA SERIE =',I2,5(/))
DC 70 IN=3,N
N3=(IN-2)/2
N2=(IN-1)/2
N1=IN/2
NC=(IN+1)/2
DC 75 I=1,NE
DC 75 J=1,NE
DC 75 K=1,NC
75 FN(I,J,K)=0.
DC 80 L=1,N3
DC 80 I=1,NE
DC 80 J=1,NE
DC 80 K=1,NE
80 FN(I,J,L+1)=FN(I,J,L+1)+C1(I,K)*FN3(K,J,L)
DC 85 I=1,NE
DC 85 L=1,N2
DC 85 J=1,NE
DC 85 K=1,NE
FN(I,J,L+1)=FN(I,J,L+1)-C1(I,K)*FN2(K,J,L)
85 FN(I,J,L)=FN(I,J,L)+C2(I,K)*FN2(K,J,L)
DC 90 I=1,NE
DC 90 J=1,NE
DC 90 K=1,NC
FN(I,J,K)=FN(I,J,K)/(IN*(IN-1))
90 C(I,J,K)=C(I,J,K)+IN*FN(I,J,K)
DC 105 I=1,NE
DC 105 J=1,NE
DC 110 K=1,N2
110 FN3(I,J,K)=FN2(I,J,K)
DC 115 K=1,N1
115 FN2(I,J,K)=FN1(I,J,K)
DC 105 K=1,NC
105 FN1(I,J,K)=FN(I,J,K)
70 CCNTINUE
C---- DETERMINANTE DA MATRIZ C
IF(NE-2) 201,202,203
201 WRITE(5,200)M1
200 FCRMAT(21X,'CCF. DO POLINOMIO DE GRAU =',I2,/)
DC 205 K1=1,NN
ALFA(K1)=C(I,1,K1)
205 WRITE(5,209)K1,ALFA(K1)
209 FCRMAT(//,20X,'ALFA',I3,'=',E15.7)
GC TC 210
202 N4=2*NN
WRITE(5,136)M1
136 FCRMAT(21X,'CCF. DO POLINOMIO DE GRAU =',I2,/)
DC 120 K=2,N4
K1=K-1
ALFA(K1)=0.
DC 125 J1=1,NN
DC 125 J2=1,NN
M=J1+J2
IF(M-K) 125,130,125
130 DC 135 I=1,NE
A(I,1)=C(I,1,J1)

```

PAGE 5 FACC

```

135 A(I,2)=C(I,2,J2)
    D=A(1,1)*A(2,2)
    D=D-A(1,2)*A(2,1)
    ALFA(K1)=ALFA(K1)+C
125 CCNTINUE
    WRITE(5,140)K1,ALFA(K1)
140 FCNMAT(/,21X,'ALFA',I3,I=1,E15.7)
120 CCNTINUE
    GC TO 210
203 N4=3*NN
    WRITE(5,137)M1
137 FCNMAT(21X,'CCF. DO POLINOMIO DE GRAU =',I2,/)
    DC 121 K=3,N4
    K1=K-2
    ALFA(K1)=0.
    DC 126 J1=1,NN
    DC 126 J2=1,NN
    DC 126 J3=1,NN
    M=J1+J2+J3
    IF(M-K) 126,127,126
127 DC 128 I=1,3
    A(I,1)=C(I,1,J1)
    A(I,2)=C(I,2,J2)
128 A(I,3)=C(I,3,J3)
    D=A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)
    D=D+A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)
    D=D+A(1,3)*A(3,2)*A(2,1)
    D=D-A(1,3)*A(2,2)*A(3,1)
    D=D-A(1,2)*A(2,1)*A(3,3)
    D=D-A(1,1)*A(3,2)*A(2,3)
    ALFA(K1)=ALFA(K1)+C
126 CCNTINUE
    WRITE(5,142)K1,ALFA(K1)
142 FCNMAT(/,21X,'ALFA',I3,I=1,E15.7)
121 CCNTINUE
210 CALL RAPCL(ALFA,CCF,M1,PCR,PCRI,IER)
    WRITE(5,141)IER
141 FCNMAT(3(/),21X,'CODIGO DE ERRO IER =',I2,3(/),21X,'RAIZES DO PO
    *LINCMIC',3(/))
    DC 56 I=1,M1
    WRITE(5,146)PCR(I),PCRI(I)
146 FCNMAT(/,21X,'PCR =',E15.7,4X,E15.7)
56 CCNTINUE
    CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 2446 PROGRAM 1652

END OF COMPILEATION

// XEQ

BIBLIOGRAFIA

- 1 - GLÜCK, J. and GELLERT, M. - Buckling of Lateral Restrained Thin-Walled Cantilevers of Open Cross Section. *Journal of the Structural Division, ASCE.* 98 (9):2031-2042 sep., 1972.
- 2 - BARBOSA, J.A. - *Edifícios com Paredes de Secção Aberta Contraventadas por Lintéis, sob Carga Lateral.* São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1978. 342 p.
- 3 - TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. - *Theory of Elastic Stability* - McGraw-Hill, New York, 1961.
- 4 - RACHID, M. - *Instabilidade de Barras de Secção Delgada* - São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, fev., 1975. 119p.
- 5 - SCHIEL, F. - *Barras de Secção Delgada* - São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1964/1965.
- 6 - MANCINI, E. - *Análise Continua de Estruturas de Edifícios Elevados Sujeitas à Ação do Vento* - São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, dez. 1973, 140 p.
- 7 - VLASSOV, B.Z. - *Pieces Longues en Voiles Minces* - Eyrolles, 1962, 655 p.
- 8 - GALAMBOS, T.V. - *Structural Members and Frames* - Prentice - Hall, N.J., 1968. 373 p.
- 9 - STAMATO, M.C. - *Associação Continua de Painéis de Contraventamento* - São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, abril, 1972. 72 p. (Publ. Nº 157).
- 10 - KREIDER, D.L., KULLER, R.G. e OSTBERG, D.R. - *Equações Diferenciais* - São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda. 1972. 279-322 p.