

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

"CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA DISTRIBUIÇÃO
DOS ESFORÇOS HORIZONTAIS
EM INFRAESTRUTURAS DE PONTES"

ENG. RAIBUNDO MACHADO DE ARAUJO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador: Prof. Dr. Ilio Montanari

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Ilio Montanari (EESC-USP)
Dr. Walter de Almeida Braga (EPUSP)
Dr. Regis L.R. Lima (EESC-USP)

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

São Carlos, abril de 1979

A meus pais e irmãos, à minha
querida esposa e filhos, a to-
dos os meus colegas e amigos,
dedico este trabalho.

Agradeço profundamente:

Ao Exmo. Sr. Evrildo da Costa Nunes Freire, H.D. Governador do Estado de Maranhão e ao Eng. Luis Frazão de Melo e Alvin, H.D., Diretor do Departamento de Estradas de Rodagem do Maranhão, pelo apoio recebido durante a realização do curso.

Em especial ao Prof. Dr. Ilio Montanari pela valiosa orientação dada na realização do presente trabalho.

À Profa. Dra. Helena H.C. Carmo Antunes, pelas informações e sugestões que me ajudaram a desenvolver o Capítulo V deste trabalho.

À CAPES - PICD, pela concessão de Bolsa de Estudo.

Aos Colegas: Eng. Jamildo de Jesus Oliveira, Eng. Solon Tupinambã Leite e Eng. Frederico M. Duailibe pelo apoio dado no momento preciso.

Ao Sr. Rui Roberto Casale e Sra. Wilma Provinciali Vall, pela realização com esmero e eficiência a datilografia deste trabalho.

Ao Sr. João Paulo Moretti e Srta. Silvia Helena Moretti, pelo capricho com que executaram os desenhos.

R E S U M O

Este trabalho versa sobre o estudo da distribuição dos esforços horizontais em infraestruturas de pontes.

Para atingir o objetivo desejado o presente trabalho foi dividido em cinco capítulos; o capítulo I, é dedicado a indicação de cálculo dos aparelhos de apoio usualmente utilizados em pontes e a uma sucinta definição de pilar; no capítulo II, apresentam-se as forças externas que são consideradas no cálculo da infraestrutura, transcrevendo o que as normas; NB-1/78, NB-2 e NB-116, preconizam a respeito destas ações.

No capítulo III, determinam-se as rigidezes dos elementos da infraestrutura (aparelho de apoio, pilar e fundação) para a ação das forças horizontais.

No capítulo IV, aborda-se a determinação da distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas de pontes com tabuleiro contínuo, empregando um processo análogo ao método de SCHIEL para o cálculo de estaqueamento plano.

No capítulo V, aborda-se a distribuição dos esforços horizontais em infraestruturas de pontes com tabuleiro contendo juntas de dilatação, em forma de contribuição ao cálculo automático da distribuição dos esforços anteriormente mencionados.

ABSTRACT

This work studies the distribution of horizontal forces in the substructure of bridges.

To obtain this, the present work was divided in five chapters. The first chapter is dedicated to the analysis of bearings used in bridges and gives a brief definition of piers. The chapter II, presents external forces that are considered in the analysis of substructure from Brazilian Standards; NB-1/78, NB-2 and NB-116, that deal with these forces.

In chapter III is determined the bearings stiffness of substructure elements (bearings, piers and foundations) for the action of horizontal loads.

In chapter IV, is dealt with the determination of distribution of horizontal forces in substructure of continuous deck, using a process similar to SCHIEL method for the analysis of plane piles.

In chapter V, is dealt with the distribution of horizontal forces in substructure of bridges with non continuous deck, with expansion joints, as a contribution to the automatic analysis of the forces previously mentioned.

*

Í N D I C E

INTRODUÇÃO.....	I
CAPÍTULO I - INDICAÇÃO DE CÁLCULO DOS ELEMENTOS DA INFRAESTRUTURA.....	1.1
1.1 - Aparelhos de apoio.....	1.2
1.1.1 - Aparelho de apoio fixo.....	1.2
1.1.2 - Aparelho de apoio móvel.....	1.15
1.1.3 - Aparelho de apoio elástico.....	1.19
1.2 - Pilares.....	1.27
1.2.1 - Pilar em coluna única.....	1.27
1.2.2 - Pilar em pórtico.....	1.28
1.2.3 - Pilar em estrutura celular.....	1.29
1.2.4 - Pilar em treliças.....	1.29
1.3 - Encontros.....	1.29
1.4 - Fundações.....	1.30
1.4.1 - Fundações rasas.....	1.35
1.4.2 - Fundações profundas.....	1.36
CAPÍTULO II - AÇÕES NA INFRAESTRUTURA.....	2.1
2.1 - Ações na superestrutura.....	2.1
2.2 - Ações diretamente aplicadas na infraestrutura.....	2.5
CAPÍTULO III - RIGIDEZES DOS ELEMENTOS DA INFRAESTRUTURA.....	3.1
3.1 - Rigidez dos apoios.....	3.3
3.1.1 - Rigidez do apoio fixo.....	3.3
3.1.2 - Rigidez do apoio móvel.....	3.3
3.1.3 - Rigidez do apoio elástico.....	3.3

3.2 - Rigidez do pilar.....	3.6
3.2.1 - Rigidez do pilar à flexão.....	3.7
3.2.2 - Rigidez à torção do fuste.....	3.10
3.3 - Rigidez da fundação.....	3.11
3.3.1 - Rigidez da fundação.....	3.11
3.3.2 - Rigidez da fundação profunda..	3.14
3.4 - Rigidez global.....	3.20
3.4.1 - Rigidez global à flexão.....	3.20
3.4.2 - Rigidez global à torção.....	3.22
3.5 - Aplicação.....	3.24

CAPÍTULO IV - DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS HORIZONTAIS EM PONTES DE TABULEIRO CONTÍNUO.....	4.1
4.1 - Descrição do processo.....	4.2
4.2 - Determinação dos esforços.....	4.9
4.2.1 - Vento na superestrutura, frenagem ou aceleração.....	4.9
4.2.2 - Variação de temperatura do concreto.....	4.13
4.3 - Pontes retas.....	4.21
4.3.1 - Características geométricas....	4.21
4.3.2 - Exemplo numérico.....	4.23
4.4 - Pontes esconsas.....	4.33
4.4.1 - Características geométricas....	4.33
4.4.2 - Exemplo numérico.....	4.35

CAPÍTULO V - DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS HORIZONTAIS EM PONTES DE TABULEIRO CONTENDO JUNTAS DE DILATAÇÃO.....	5.1
5.1 - Descrição do processo.....	5.2
5.2 - Determinação dos esforços.....	5.32

CAPÍTULO VI - CONCLUSÃO.....	6.1
------------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico alcançado no ramo da engenharia, na atualidade, está levando o projetista de estrutura a procurar constantemente soluções de natureza econômica e tecnicamente viável dentro da realidade de conhecimentos adquiridos, até então, sobre o comportamento das estruturas compatíveis com as características tecnológicas dos materiais disponíveis.

No tocante as pontes o atual estágio de desenvolvimento permitiu que os pesquisadores sobre o assunto desenvolvessem técnicas que matematicamente têm apresentado resultados que de certa forma têm tornado possível a execução de grandes obras mesmo debaixo da grande variação de parâmetros peculiares a cada uma delas.

Quanto a problemas de dimensionamento da superestrutura, o assunto está bastante difundido e a literatura sobre o mesmo é bastante vasta.

Em se tratando de infraestruturas o panorama se altera profundamente. As solicitações que entram no dimensionamento das infraestruturas, estão na dependência das características das superestruturas e de maneira bem complexa, das características geológicas do solo de que é constituído o terreno de fundação. Apesar disso, a distribuição dos esforços verticais ganhou a atenção de vários autores os quais tornaram o assunto bastante acessível ao estudante de engenharia de estruturas, ao nível da graduação e, principalmente, aos que lidam em escritórios de cálculo. Em contrapartida o problema da distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas de pontes, não tem tido muitos adeptos. Com o conhecimento mais profundo da reologia dos materiais e das técnicas disponíveis e equipamentos bastante sofisticados, apareceram outras alternativas para

+

apoios; como exemplo cita-se o caso do emprego de aparelhos de apoio elástico, os quais estão sendo usados frequentemente na atualidade. Os mesmos permitem o movimento relativo entre a super e infraestrutura, controlando, desta forma, a distribuição dos esforços entre os pilares.

Recentemente alguns autores desenvolveram processos que levam em conta as características elásticas dos aparelhos de apoio, [11], [12], [15], etc.

Ao tratar da distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas de pontes, Walter de A. Braga, [11], adota procedimento análogo ao de Nøkkentved, para verificação de estaqueamentos, o qual é aplicado aos sistemas rígidos, consistindo essencialmente na determinação do centro elástico do sistema para o qual são transportadas as forças atuantes.

Para o desenvolvimento do processo, referido autor determina as direções principais do sistema definido acima e para deslocamentos nessas direções, são determinados os esforços nos pilares correspondentes.

Da forma como acima foi descrito é que em [11], são analisadas pontes de tabuleiro contínuo e pontes de tabuleiro com tramos isostáticos apoiados em elastômeros. Sendo que em vista desse último não constituir-se em um sistema rígido, o problema é dividido em casos de vários sistemas rígidos para os quais são, então, aplicados os procedimentos válidos para estes.

As pontes com tabuleiro contendo juntas de dilatação, como foi comentado anteriormente, para efeito da distribuição de esforços se constitui em um mecanismo elástico e desta forma o assunto se torna muito complexo conforme se pode constatar nas referências [11], [12], podendo-se encontrar na primeira referência, a sistematização dos cálculos.

Este trabalho é também dedicado às infraestruturas de pontes em forma de contribuição ao estudo da distribuição dos esforços horizontais quando procura-se enfocar o problema em cinco capítulos os quais são abordados partin-

do da definição dos elementos da infraestrutura, com indicações para o cálculo dos aparelhos de apoio até o objetivo final do trabalho que é a distribuição dos esforços acima mencionado.

O primeiro capítulo é dedicado a definições dos elementos da infraestrutura com o objetivo de formar conceitos necessários para identificar o elemento como fazendo parte fundamental no contexto do assunto, com intuito de fornecer ao leitor uma visão um pouco mais ampla para possibilitá-lo acompanhar o desenvolvimento do trabalho de forma gradual e repetida fertilizando sua imaginação preparando-a para a fase mais dedutiva e conclusiva que será a do objetivo final; capítulos IV e V.

Com a finalidade de reunir informações que de certa forma são fundamentais na análise da transmissão dos esforços entre a super e infraestrutura, procura-se acrescentar indicações para o cálculo dos aparelhos de apoio para pontes, principalmente os de natureza elásticas os quais estão sendo bastante usado atualmente.

No tocante a pilares embora sejam os mesmos os elementos fundamentais na transmissão dos esforços às fundações citam-se apenas os tipos de pilares de usos correntes por se considerar bastante vasta a literatura sobre o assunto, ao contrário dos aparelhos de apoio que são poucos divulgados.

No tocante às fundações julgou-se necessário reunir informações sobre um assunto, também, não muito difundido que é o referente ao problema da erosão em fundação de pilar imerso em águas correntes.

A determinação da profundidade de erosão na base do pilar imerso em águas correntes, além de ser um problema a ser analisado para garantir a segurança da obra, é de fundamental importância na determinação da rigidez do pilar com o fim de determinar o esforço que se transmite a base da fundação.

No segundo capítulo definem-se as ações que provocam esforços nos elementos da infraestrutura, transcrevendo

o que a Norma preconiza a respeito das ações horizontais a serem levadas em consideração no cálculo de pontes. Deixou-se de abordar as ações verticais por serem estas de interesse maior no cálculo dos esforços verticais, assunto este que foge ao âmbito desse trabalho.

No caso do empuxo de terra sobre muros de arrimo e cortina, julgou-se oportuno acrescentar mais algumas informações a respeito do assunto, como exemplo: valores dos coeficientes de empuxo ativo para vários tipos de solos e ângulo de atrito entre o paramento do muro de arrimo e o solo do aterro.

Ao se chegar ao capítulo III, após as definições e comentários feitos nos capítulos anteriores, parte-se para o estudo do comportamento elástico dos elementos frente aos esforços horizontais que a eles vão se transmitir. Determinam-se, pois, as rigidezes: do aparelho de apoio, pilar e fundação, sendo essas características responsáveis pela maior ou menor participação do pilar na transmissão dos esforços à fundação.

Com vista para o caso específico da aplicação numérica do exemplo de distribuição de esforços horizontais constante do capítulo IV, é que se desenvolve literalmente o cálculo da rigidez de um pórtico simples para esforços horizontais.

Após os preparativos feitos nos capítulos precedentes, aborda-se o problema da distribuição de esforços horizontais nas infraestruturas das pontes, nos capítulos IV e V.

No capítulo IV, estuda-se o caso da distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas das pontes com tabuleiros contínuos aplicando-se procedimento análogo ao adotado por F.SCHIEL, para estacas supostas bi-articuladas. Isso foi possível em vista das hipóteses simplificadas como, por exemplo, a de que o tabuleiro é considerado rígido no plano horizontal, hipótese essa feita por BRAGA [11], quando tratou do mesmo assunto.

+

Para a aplicação do processo adota-se um sistema de eixos coordenados coincidentes com o plano que contém os topos dos pilares sendo as forças externas (vento na super, frenagem ou aceleração etc), transportadas para a origem 0 do sistema de eixos com os respectivos momentos.

Determinam-se as direções principais das secções retas dos fustes dos pilares através dos versores das referidas direções, tendo ponto de aplicação o mesmo que os que localizam os topos dos pilares respectivos.

Calcula-se o deslocamento do topo do pilar i, por exemplo, em função do deslocamento da origem do sistema (translação) mais um deslocamento referente a rotação do tabuleiro (corpo rígido) no plano horizontal. Em seguida projeta-se esse deslocamento nas direções principais da secção reta do referido pilar, através do produto escalar entre o vetor deslocamento e o versor da direção em questão. De posse desses deslocamentos, e das rigidezes nas mesmas direções, calculam-se os esforços horizontais que se transmitem para o dito pilar.

Evidentemente o problema não é tão simples como parece, porquanto a determinação dos deslocamentos se faz da condição de equilíbrio entre esforços aplicados nos topos dos pilares e forças externas que provocaram o aparecimento daqueles. Dessa forma o problema é resolvido matricialmente através da determinação da matriz de flexibilidade do conjunto em relação ao sistema de eixos indicado.

No capítulo V, estuda-se o caso das pontes com tabuleiro contendo juntas de dilatação, empregando processo diferente do que foi empregado no caso de pontes contínuas, em vista da complexidade do assunto pois neste caso não estamos mais diante de um corpo rígido e sim de uma cadeia elástica.

O conteúdo do presente capítulo foi desenvolvido com o espírito de indicação para o cálculo automático da distribuição de esforços horizontais em pontes contendo juntas de dilatação.

+

Para equacionar o problema define-se um sistema de coordenadas globais localizados nos topos dos pilares, cujas direções são: as principais das secções retas e as de rotações em torno dos eixos dos mesmos referindo-se, portanto, os deslocamentos dos topos dos pilares e as forças externas, às respectivas coordenadas. Dessa forma calcula-se a matriz de flexibilidade do conjunto em relação ao sistema de coordenadas indicando e determinam-se os deslocamentos dos topos dos pilares, com os quais se calculam os esforços procurados.

Acredita-se que com o presente trabalho se tenha alcançado o objetivo desejado ou seja, acrescentar mais uma parcela de informação para alternativas de cálculo da distribuição de esforços horizontais em infraestruturas de pontes.

CAPÍTULO I

INDICAÇÃO DE CÁLCULO DOS ELEMENTOS DA INFRAESTRUTURA

Os elementos da infraestrutura de uma ponte são: os aparelhos de apoio, os pilares em geral e as fundações. No que segue será apresentado a descrição dos mesmos com a finalidade de ativar a imaginação do leitor no sentido de propiciar ao mesmo uma visão mais ampla no tocante ao problema da distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas de pontes o qual será objeto do ítem final do presente trabalho.

Em vista de não ser bastante divulgado os assuntos referentes a, indicações de cálculo de aparelhos de apoio e observações sobre o comportamento das fundações de pontes, frente a ação hidrodinâmica das águas, julgamos oportuno reunir nos sub-ítemos referentes aos mesmos, informações que possibilitem ao leitor dados importantes para o dimensionamento dos aparelhos de apoio e fundações correspondentes, sem contudo perder de vista o que foi dito anteriormente, ou seja, a preparação do leitor para a análise do problema da distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas das pontes.

*

1.1. Aparelhos de apoio

Como aparelho de apoio compreende-se o elemento que serve de intermediário entre o tabuleiro e o pilar, permitindo a transmissão a este das ações externas que agem naquele, permitindo os movimentos previstos no projeto.

Quanto ao grau de liberdade, os aparelhos de apoio classificam-se em: fixos, móveis e elásticos.

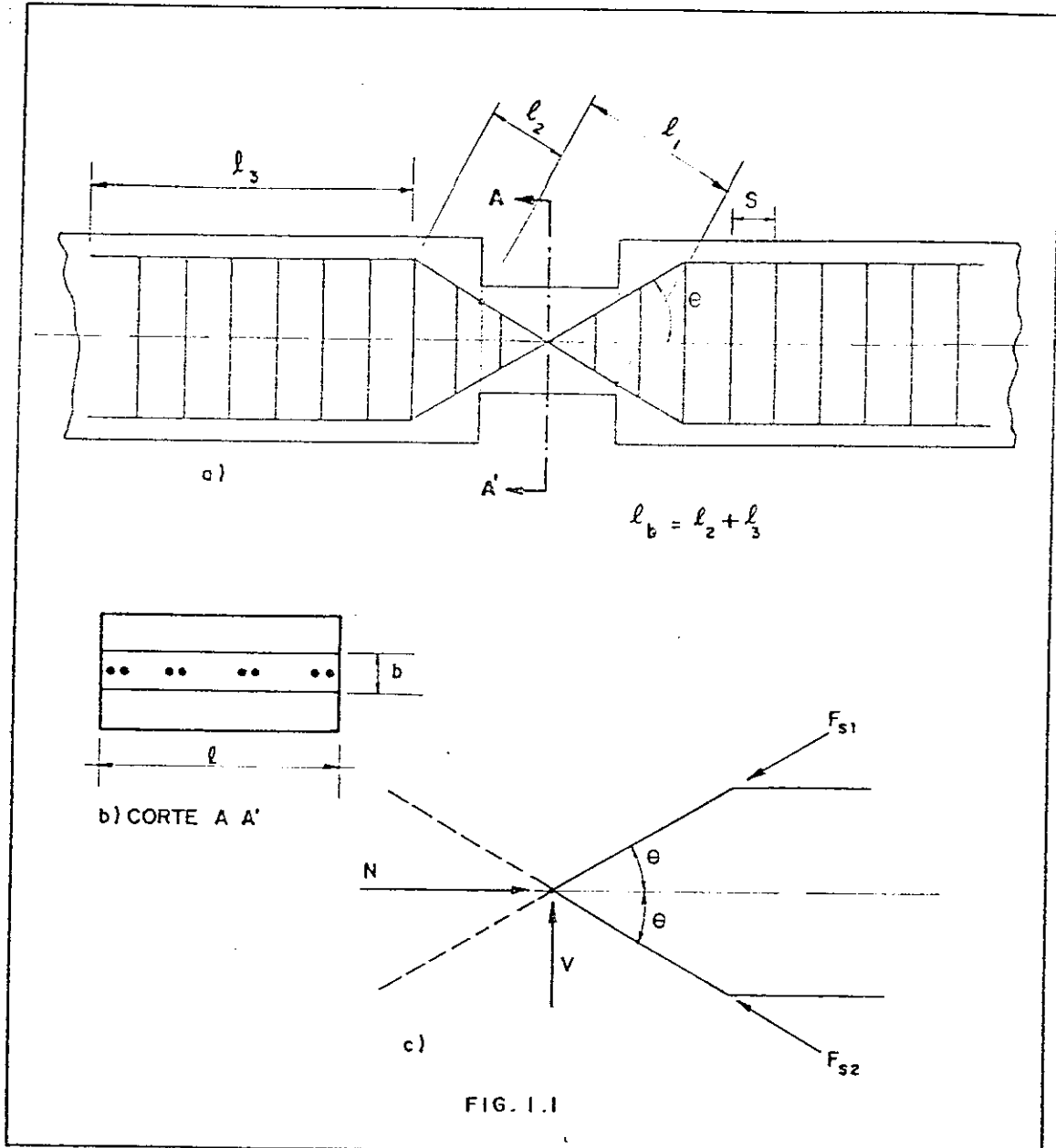
1.1.1. Aparelho de apoio fixo

São aparelhos de apoio que têm um grau de liberdade sendo este a de giro. Consiste essencialmente em se reduzir a secção do apoio no topo do pilar, quando se pretende adotar a solução de executá-lo aproveitando as mesmas características do material de que é feito o pilar e viga (concreto), podendo-se também adotar a solução em apoio metálico, conforme serão adiante apresentados.

Dentre os aparelhos de apoio fixo em concreto citam-se; as articulações MESNAGER e FREYSSINET, enquanto que as de contacto de superfícies cilíndricas são as adotadas para a solução em apoio metálico.

A) Articulação Mesnager

É constituída por barras cruzadas e ancoradas nas duas partes a ligar, tendo estas as funções de resistir ao esforço cortante e transmitir o esforço normal. A função do concreto na área reduzida é simplesmente para proteger o aço contra a ação do intemperismo, (fig. 1.1).



Do equilíbrio de forças na figura 1.1c tem-se:

$$F_{s1} + F_{s2} = N/\cos\theta \quad (1.1)$$

$$F_{s1} - F_{s2} = V/\text{sen}\theta \quad (1.2)$$

Tirando os valores de F_{s1} e F_{s2} , no sistema formado pelas expressões (1.1) e (1.2) tem-se:

$$F_{s1} = 1/2(N/\cos\theta + V/\sin\theta) \quad (1.3)$$

$$F_{s2} = 1/2(N/\cos\theta - V/\sin\theta) \quad (1.4)$$

A expressão (1.3) dá a força máxima que atua no conjunto de pares de barras cruzadas. Se o conjunto tem n pares de barras, a força máxima que atua numa barra será:

$$F_{sm\acute{a}x} = 1/2n(N/\cos\theta + V/\sin\theta) \quad (1.5)$$

Sendo;

$F_{sm\acute{a}x}$ = força máxima que atua em uma barra;

N = valor absoluto da força normal a transmitir;

V = valor da força cortante que age na ligação;

n = número de pares de barras do conjunto;

θ = ângulo entre as barras e o eixo da peça.

A tensão máxima em uma barra será:

$$\sigma_s = \frac{F_{sm\acute{a}x}}{\pi\phi^2/4} \quad (1.6)$$

Sendo ϕ o diâmetro da secção reta da barra.

Sobre a tensão máxima, a referência [1] contém algumas observações; Mesnager manda adotar a taxa admissível de 28% do limite de escoamento do aço utilizado, enquanto Mörrell, recomenda adotar 30% do referido limite de escoamento.

As tensões secundárias que se originam devido a flexão das barras e rotação da articulação, podem ser desprezadas desde que essa última esteja dentro dos limites estipulados pelos referidos autores. Mesnager despreza a influência das referidas tensões, desde que a rotação da articulação não ultrapasse 0,02 rd, enquanto Mörrell leva esse limite a 0,026 rd.

Quanto ao problema da flambagem das barras, o primeiro autor manda adotar o índice de esbeltez entre 20 e 40, enquanto o segundo manda adotar o mesmo índice entre os limites 30 e 40.

Tem-se, portanto, as expressões abaixo:

$$\sigma_{sm\bar{a}x} \leq \frac{4}{n\pi\phi^2} (N/\cos\phi + V/\text{sen}\phi) \leq \begin{cases} 0,28f_y & \text{(Mesnager)} \\ 0,30f_y & \text{(Morrell)} \end{cases} \quad (1.7)$$

Para o comprimento das barras expostas tem-se

$$5\phi \leq \ell_1 \leq 10\phi \quad \text{(Mesnager)} \quad (1.8)$$

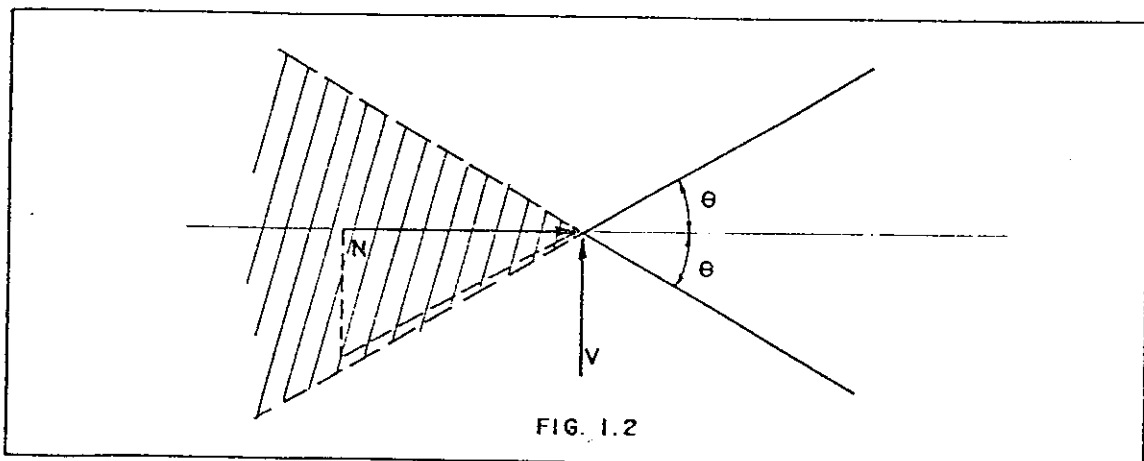
$$7,5\phi \leq \ell_1 \leq 10\phi \quad \text{(Morrell)} \quad (1.9)$$

Sendo:

ℓ_1 = comprimento das barras expostas; (fig. 1.1)

ϕ = diâmetro da barra de aço.

Quanto ao ângulo θ , figura 1.2, recomenda-se que o mesmo seja tal que a linha de pressões caia sempre na região entre as barras



+

Da figura 1.2, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta > V/N \quad (1.10)$$

A largura do concreto que envolve as barras, deve ser menor ou igual ao afastamento entre as superfícies a articular. Chamando de \underline{b} a largura da secção do concreto que envolve as barras de comprimento ℓ_j , figura 1.1, tem-se:

$$\underline{b} \leq \ell_j \cos\theta \quad (1.11)$$

O comprimento de ancoragem das barras é limitado pela aderência entre o aço e o concreto, na transmissão da força normal a secção da barra, $F_{sm\bar{a}x}$, isto é:

$$F_{sm\bar{a}x} \leq \ell_b \pi \phi \tau_{wd}$$

ou

$$\frac{1}{2n} (N/\cos\phi + V/\operatorname{sen}\theta) \leq \ell_b \pi \phi \tau_{wd}$$

Da expressão acima tira-se o comprimento de ancoragem:

$$\ell_b \geq \frac{1}{2n\pi\phi\tau_{wd}} (N/\cos\theta + V/\operatorname{sen}\theta) \quad (1.12)$$

Sendo:

τ_{wd} = tensão admissível de aderência dado pelo item 5.3.1.2c, da NBl/78.

ℓ_b = comprimento de ancoragem

Quanto a armadura transversal, deverá a mesma resistir ao esforço de tração provocado pela componente $F_{sm\bar{a}x} \operatorname{sen}\theta$, da força que atua longitudinalmente na barra, figura 1.1c.

+

Tem-se:

$$F_{sm\bar{a}x} \text{sen}\theta = \frac{V+Nt\text{g}\theta}{2n} \quad (1.13)$$

A distribuição da armadura transversal se faz nu ma extensão igual a 8ϕ , repetindo-se a mesma até o fim da ancoragem [1].

O espaçamento s entre os estribos (armadura trans versal) calcula-se igualando a componente $F_{sm\bar{a}x} \text{sen}\theta$ à força que atua em cada estribo.

Considerando a tensão na secção do estribo a mesma que atua na barra da articulação (1.6), tem-se:

$$F_{sm\bar{a}x} \text{sen}\theta = (8\phi/s) \frac{F_{sm\bar{a}x}}{\pi\phi'^2/4} \pi\phi'^2/4$$

Tirando o valor de s tem-se:

$$s = 8\phi'^2/\phi \text{sen}\theta \quad (1.14)$$

Onde; ϕ' = diâmetro do ferro do estribo.

B) Articulação FREYSSINET

Esse tipo de articulação, consiste na redução da secção do concreto no topo do pilar em contacto com a viga, figura 1.3.

Difere da articulação MESNAGER, por ser a força longitudinal transmitida unicamente pelo concreto da parte reduzida.

A tensão admissível do concreto na secção reduzi da deve ser, NB-1/78, igual a:

$$f_{ud} \leq f_{cd} \sqrt[3]{A_c/A_o} < 210\text{kgf/cm}^2 \quad (1.15)$$

Podendo ser $f_{ud} \leq 400 \text{kgf/cm}^2$, caso $f_{ck} > 225 \text{kgf/cm}^2$ e a largura da zona de contacto não seja maior que 1/5 da largura do bloco a articular (topo do pilar).

Sendo:

f_{ud} = valor último da tensão de cálculo;

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão;

A_c = área do bloco a articular;

A_o = área da secção reduzida do concreto.

Segundo F. Leonardt - E. Monning, [2], a secção da parte reduzida do concreto deve ter um arredondamento em todo perímetro dentro da altura t , figura 1.3, devendo-se ainda obedecer os seguintes critérios:

$$A_{om\acute{a}n} = \frac{N_{m\acute{a}x}}{0,85f_c \left[1 + \alpha(1 - 1,47 \cdot \xi \cdot 0_d / \sqrt{f_c}) \right]}$$

$$A_{om\acute{a}x} = \frac{N_D}{1,25 \cdot 0_d / \sqrt{f_c}}$$

$$a < 0,3b$$

$$t < 0,2a < 2 \text{cm}$$

$$b_r > 0,7a > 5 \text{cm}$$

$$\text{tg}\beta < 0,1$$

Sendo:

$$A_o = a \cdot c \text{ (cm}^2\text{)}$$

$N_{m\acute{a}x}$ = força normal máxima devido a carga de utilização (kgf);

N_D = parcela da força normal que atua permanentemente, no máximo igual a $1,5N_{m\acute{a}n}$ (kgf);

$$\alpha = N_{\text{m\~{a}x}}/N_D < 1; \quad *$$

$$\theta_d = \theta_D/2 + \theta_n = \text{valor de c\~{a}lculo do \~{a}ngulo de rota\~{c}o} \\ (\%);$$

θ_n = \~{a}ngulo de rota\~{c}o que ocorre frequentemente, como por exemplo, devido \~{a} varia\~{c}o de temperatura, cargas m\~{o}veis etc;

θ_D = \~{a}ngulo de rota\~{c}o permanente, que ocorre uma \~{u}nica vez, como por exemplo, devido a protens\~{a}o, retra\~{c}o, deforma\~{c}o lenta etc;

$$\xi = (1,2 - 4a/b) < 0,8;$$

$$f_c = \begin{cases} 1,25f_{ch} & \text{se } f_{ck} < 120\text{kg/cm}^2 \\ 1,18f_{ch} & \text{se } f_{ck} > 212\text{kg/cm}^2 \end{cases} \quad (\text{DIN 1045})$$

A m\~{a}xima for\~{c}a transversal admiss\~{i}vel na articula\~{c}o, [2], deve ser $V < N/8$.

Para $N/8 < V < N/4$, deve-se colocar pinos refor\~{c}ados, centrados na articula\~{c}o, podendo os mesmos ser dimensionados empiricamente, [2], pela seguinte f\~{o}rmula:

$$A_{sw} = V/800 \quad (1.17)$$

Onde:

A_{sw} = \~{a}rea da sec\~{c}o transversal da armadura de fixa\~{c}o (cm^2);

V = for\~{c}a transversal que atua no topo do pilar (kgf);

N = for\~{c}a normal que atua no topo do pilar (kgf);

A_s = \~{a}rea da sec\~{c}o dos pinos refor\~{c}ados (cm^2);

Para $V > N/4$, LEONHARDT manda consultar [18].

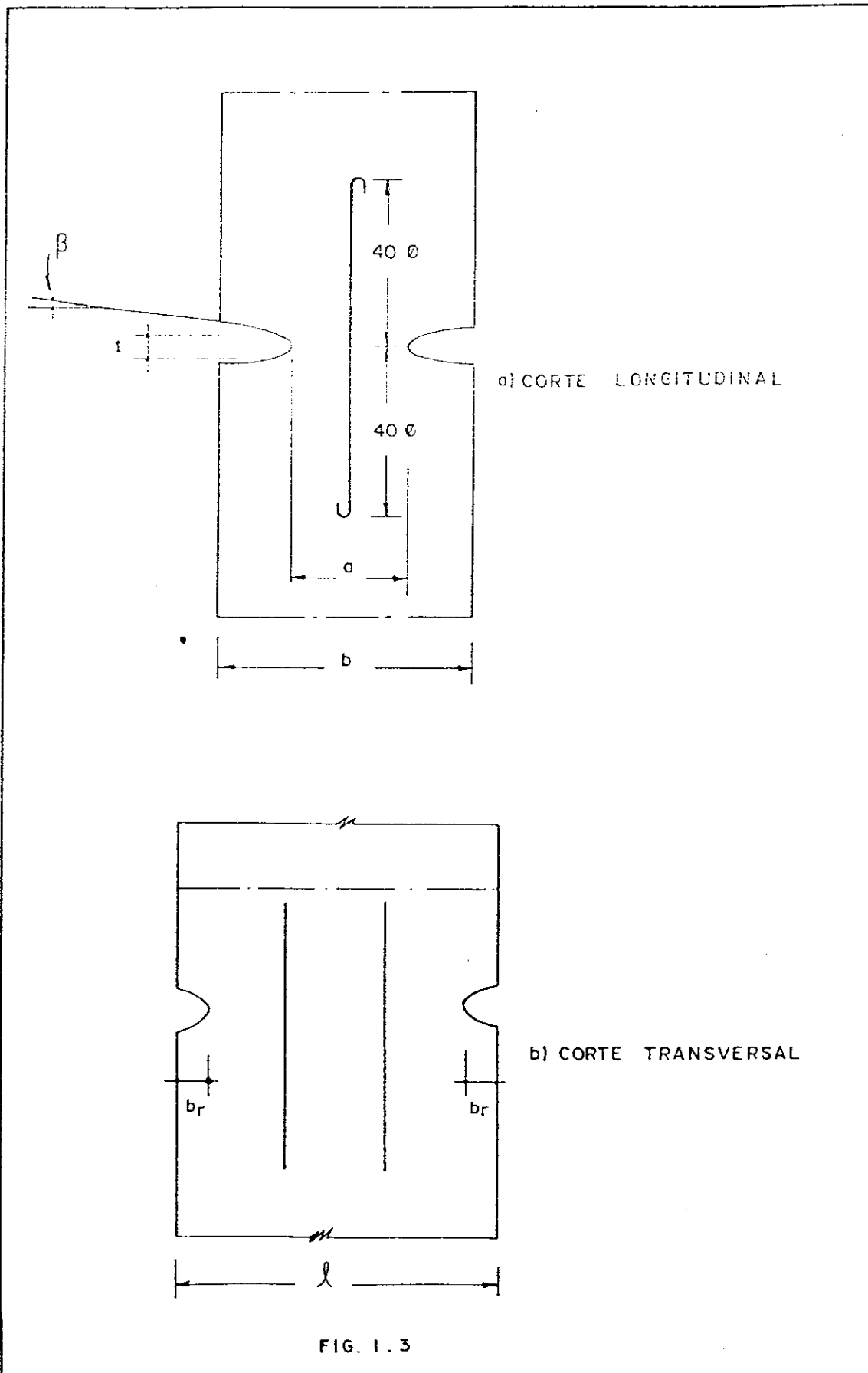
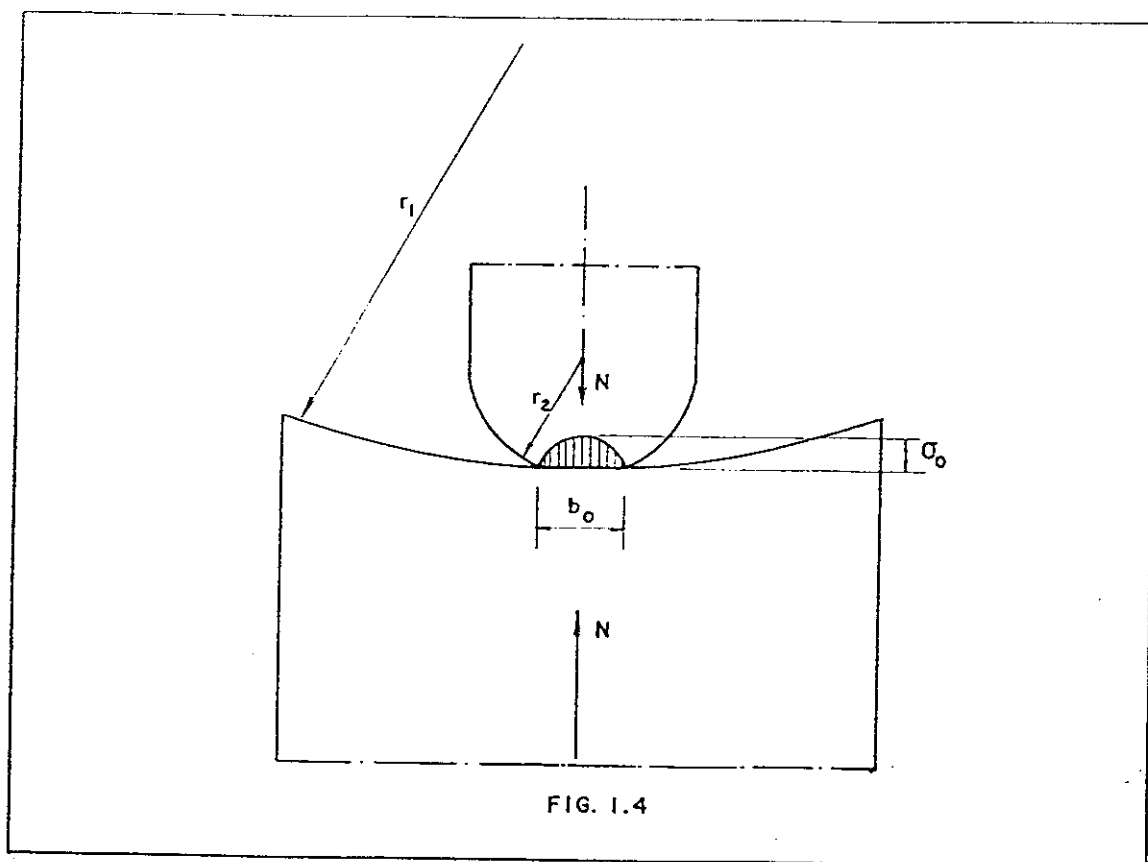


FIG. 1.3

C) Contacto de superfícies cilíndricas

O estudo de articulações dessa natureza está baseado na teoria de Hertz, o qual estudou a transmissão de esforços verticais através do contacto entre duas superfícies cilíndricas. Hertz verificou que o contacto entre duas superfícies como acima descrito não se dá segundo uma geratriz comum e sim segundo uma superfície de contacto, tendo em vista que há plastificação do material em contacto, figura 1.4.



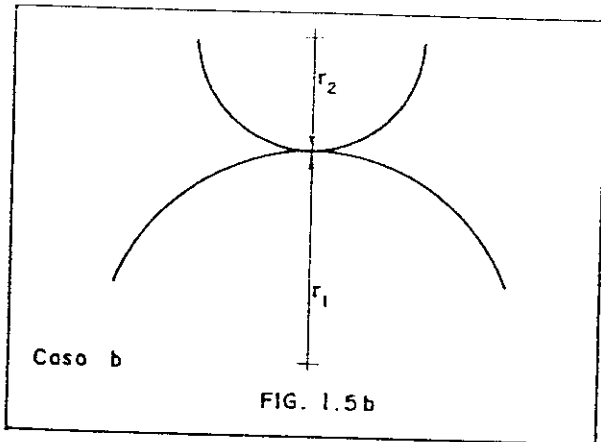
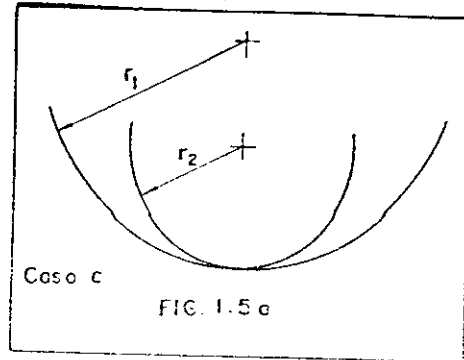
Através de estudos teóricos, referido autor determinou que a distribuição de tensões na superfície de contacto se faz elipticamente sendo que a tensão máxima é dada pela seguinte fórmula:

Caso a: $\sigma_o = 4N/\pi b_o \ell$

$$b_o = 4 \sqrt{\frac{2Nr_1r_2(1-\nu^2)}{\pi \ell E(r_1-r_2)}}$$

Caso b: $\sigma_o = 4N/\pi b_o \ell$

$$b_o = 4 \sqrt{\frac{2Nr_1r_2(1-\nu^2)}{\pi \ell E(r_1+r_2)}}$$



Fazendo $\nu = 1/3$, tem-se:

Para o caso a:

$$b_o = 3,01 \sqrt{\frac{Nr_1r_2}{\ell E(r_1-r_2)}} \quad (1.18)$$

$$\sigma_o = 3/4 \sqrt{\frac{NE(r_1-r_2)}{\pi \ell r_1r_2}} \quad (1.19)$$

Para o caso b:

$$b_o = 3,01 \sqrt{\frac{Nr_1r_2}{\ell E(r_1+r_2)}} \quad (1.20)$$

$$\sigma_o = 3/4 \sqrt{\frac{NE(r_1+r_2)}{\pi \ell r_1r_2}} \quad (1.21)$$

Sendo:

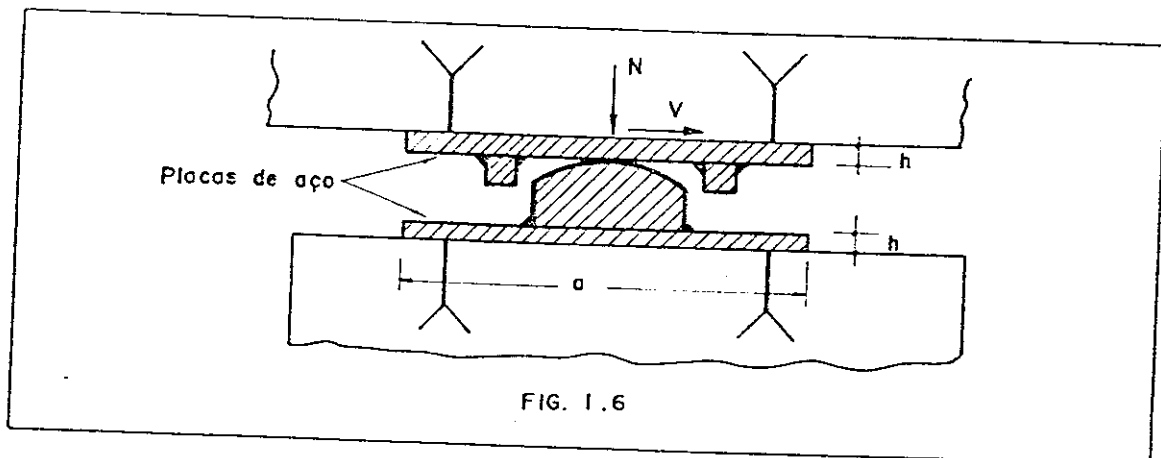
r_1, r_2 = raios de curvatura das superfícies cilíndricas em contacto;

E = módulo de elasticidade do material;

ν = coeficiente de poisson

N = força normal às superfícies cilíndricas.

Uma solução, por exemplo, para apoio fixo é o esquemático na figura 1.6.



O apoio da figura 1.6, no contacto das superfícies cilíndricas, é feito em metal e o σ_o , a adotar depende do tipo de aço a utilizar. Para os aços tipo 37 e 52 os valores de σ_o , são os seguintes [3]:

$$\text{Aço 37: } \sigma_{oadm} = 6.500 \text{kgf/cm}^2$$

$$\text{Aço 52: } \sigma_{oadm} = 9.500 \text{kgf/cm}^2$$

O ângulo de giro da articulação é dado pela expressão seguinte [1]:

$$\theta = s(1/r_1 - 1/r_2) \quad (1.22)$$

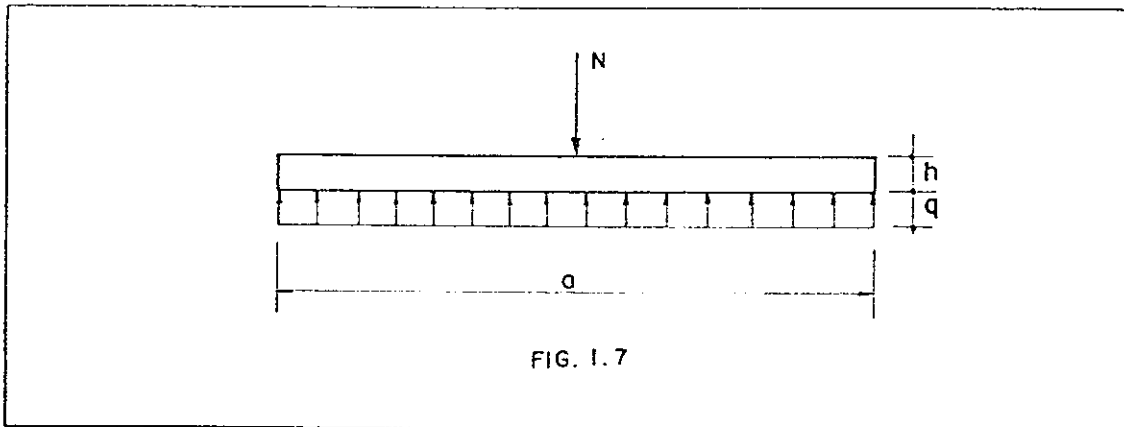
Sendo:

θ = rotação prevista da articulação;

s = comprimento do arco em que se efetuou o rolamento.

Com as expressões (1.19) e (1.22), determinam-se as curvaturas das superfícies cilíndricas.

Para o cálculo da largura a e espessura h da placa metálica que vai ser chumbada no concreto, pode-se considerar a mesma como uma viga de altura h , comprimento a e largura ℓ , figura 1.7



Neste caso, fazendo $q = N/a$, o momento máximo será:

$$M_{\text{máx}} = \frac{Na}{8}$$

A tensão na secção correspondente, será:

$$\sigma_{\text{smáx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W_{\text{máx}}} = \frac{Na/8}{\ell h^2/6}$$

Sendo,

$\sigma_{\text{smáx}}$ = máxima tensão de tração na flexão do aço empregado.

Da expressão acima tira-se o valor de \underline{h} :

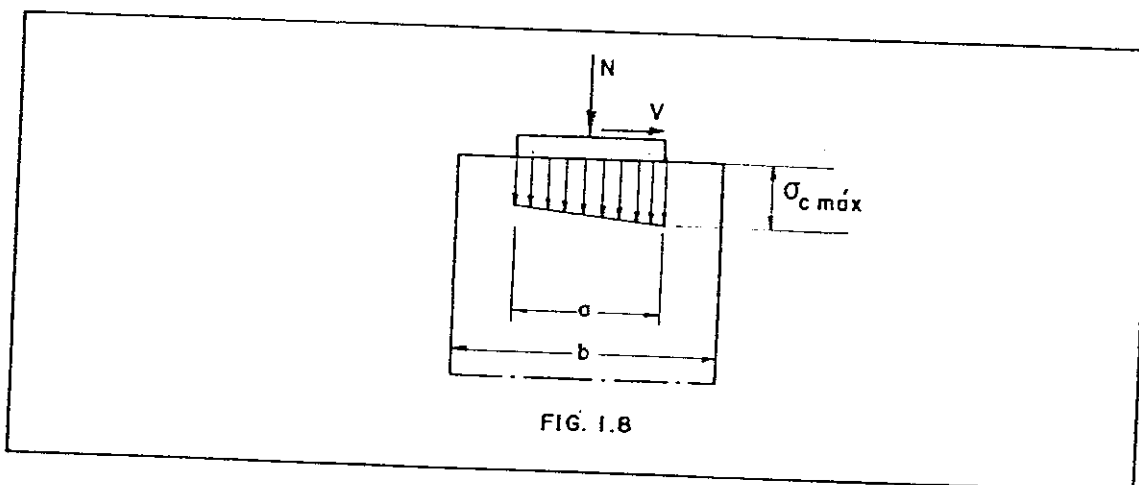
$$h = \sqrt{\frac{3}{4\sigma_{\text{máx}}}} \cdot \sqrt{\frac{Na}{\ell}}, \text{ fazendo } \sqrt{\frac{3}{4\sigma_{\text{máx}}}} = \alpha_s$$

Tem-se:

$$h = \alpha_s \sqrt{\frac{Na}{\ell}} \quad (1.23)$$

Na secção de contacto entre a placa e o topo do pilar, a tensão não poderá ultrapassar ao limite estipulado pela NB-1/78 para a tensão admissível do concreto na secção reduzida.

O diagrama de tensões na secção acima referida é o da figura 1.8



Da figura 1.8 tem-se:

$$\sigma_{\text{cmáx}} = N/a\ell + 6V/h\ell < f_{\text{cd}} \quad a/b \quad (1.24)$$

A expressão (1.24) exprime a condição para que a tensão admissível no concreto não seja ultrapassada.

Com as expressões; (1.23) e (1.24), determinam-se a espessura e a largura da chapa, levando em conta que o comprimento da mesma é a mesma do bloco onde a chapa se apoia.

1.1.2. Aparelho de apoio móvel

Os aparelhos de apoio móveis, são os que permitem movimento em duas direções, sendo as mesmas uma translação e uma rotação. O apoio móvel pode ser realizado de duas maneiras: rolamento e escorregamento.

A) Articulação de rolamento

A.1) Pêndulo de Concreto

Esse tipo de articulação substitui o apoio móvel. Consiste em articular um bloco nas suas duas extremidades, figura 1.9.

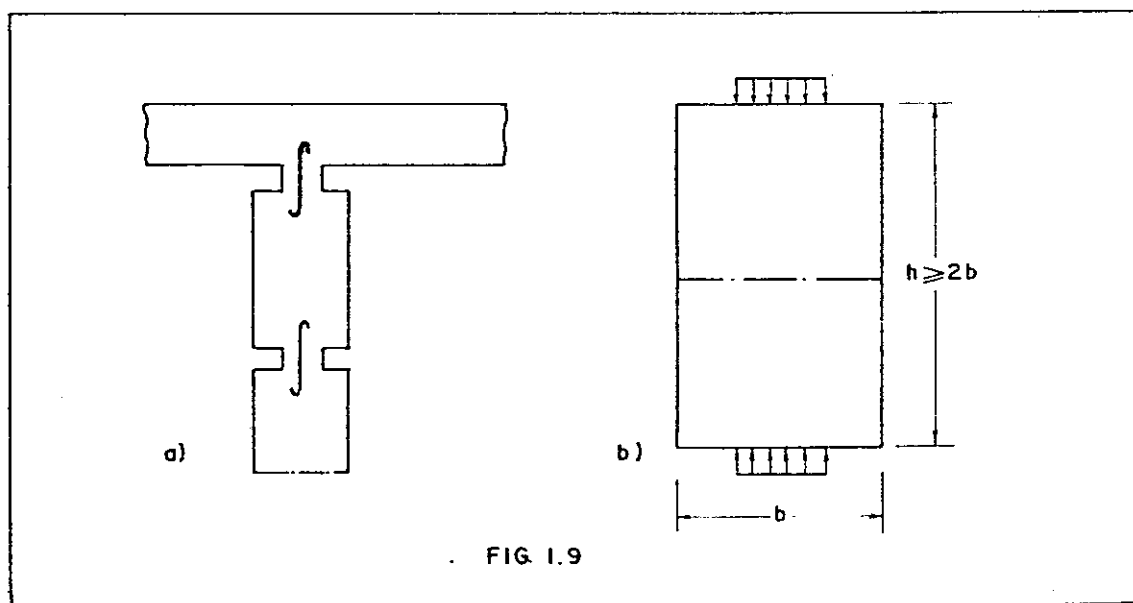


FIG. 1.9



Calculam-se os pêndulos de concreto como se fossem dois blocos de apoio opostos pelas bases, figura 1.9b. Isolando cada um dos blocos, o estudo do pêndulo passa a ser tratado como uma articulação do tipo MESNAGER ou FREYSINET. Basta adotar a mesma sistemática sugerida no item 1.1.1, adotando como altura h do bloco no mínimo duas vezes a sua largura, figura 1.9b.

Para o cálculo da ferragem necessária para combater as tensões de fendilhamento que se desenvolvem no bloco, consultar a [1] ou [2].

A.2) Aparelho de aço

Consiste basicamente em elementos cilíndricos ou esféricos de aço colocados entre placas também de aço, podendo ter um ou mais elementos para receber os esforços transmitido pela superestrutura, figura; 1.10a e 1.10b.

O contacto das superfícies cilíndricas é estudado utilizando-se a teoria de HERTZ, valendo, portanto, as fórmulas; (1.18) e (1.19). No caso da superfície do elemento ser esférica pode-se empregar, [3], as seguintes fórmulas:

$$b_o = 2,22 \sqrt[3]{Nr/E} \quad (1.25)$$

$$\sigma_o = 0,388 \sqrt[3]{NE^2/r^2} \quad (1.26)$$

Para o cálculo da espessura da placa, no caso da solução, da figura 1.10a, utilizam-se as expressões (1.23) e (1.24). No caso da solução da figura 1.10b, supõe-se que a metade do carregamento se destine a cada rolo, sendo portanto a espessura da placa analisada admitindo-se que a placa funcione como uma viga biapoiada, figura 1.11.

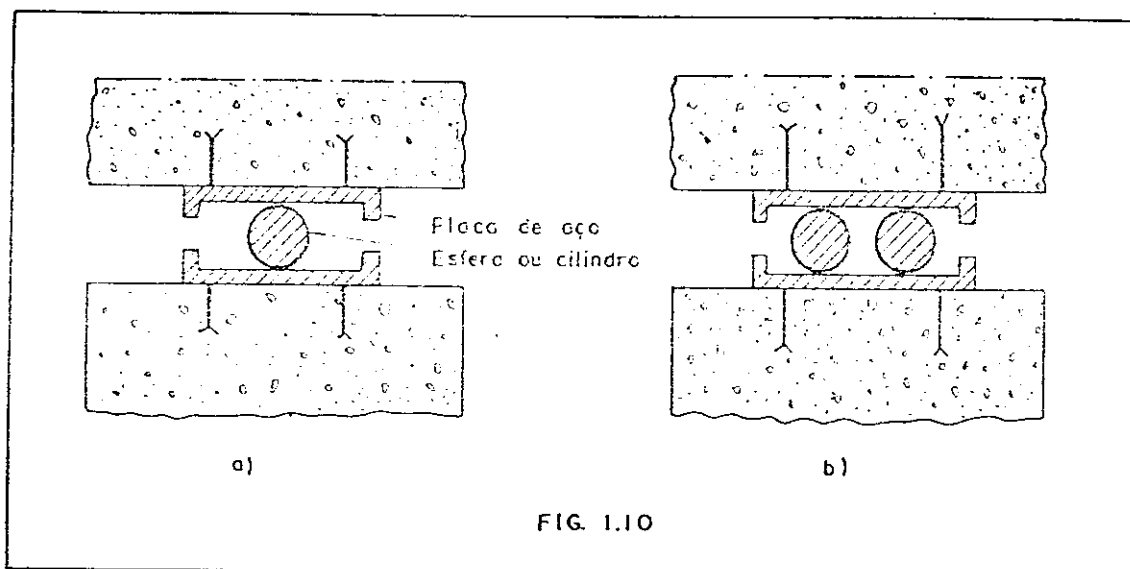


FIG. 1.10

O momento máximo no balanço é dado pela seguinte fórmula:

$$M_{\text{máx}} = Nc^2/2a$$

A tensão máxima na secção de momento máximo será:

$$\sigma_{\text{smáx}} = 3Nc^2/ahl_1^2$$

A altura necessária será portanto:

$$h_1 = c \sqrt{\frac{3}{\sigma_{\text{smáx}}}} \cdot \sqrt{\frac{N}{al}}$$

Fazendo; $\sqrt{3/\sigma_{\text{smáx}}} = \beta_s$, tem-se finalmente:

$$h_1 = \beta_s c \sqrt{N/al} \quad (1.27)$$

O momento máximo no meio do vão e a tensão máxima correspondente, serão:

$$M_{\text{máx}} = \frac{N(a/2-2c)}{4}$$

$$\sigma_{\text{smáx}} = \frac{3N(a/2-2c)}{2h_2^2 \ell}$$

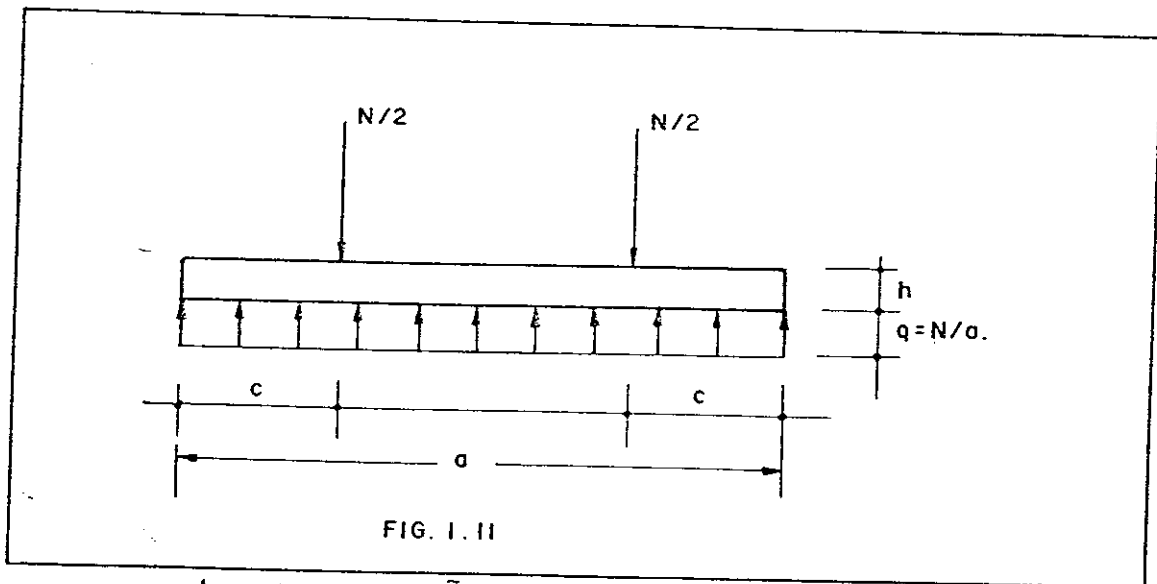
Tirando o valor de h , tem-se:

$$h_2 = \sqrt{3/2 \sigma_{\text{smáx}}} \sqrt{N(a/2-2c)/\ell}$$

Fazendo-se; $\sqrt{3/2 \sigma_{\text{smáx}}} = \gamma_s$, a expressão de h será:

$$h_2 = \gamma_s \sqrt{(N/\ell)(a/2-2c)} \quad (1.28)$$

Adota-se, pois, o maior dos valores calculados pelas; (1.27) e (1.28).



A outra equação que fornece uma relação com a es pes sura da placa é a que se obtém da condição de que a ten são de contacto não ultrapasse a tensão admissível do con cre to, fixado na NB-1/78, ou seja:

$$\sigma_c \leq f_{ud} \sqrt[3]{a/b}$$

σ_c = tensão na superfície de contacto entre a chapa metálica e o concreto;

f_{ud} = tensão última de cálculo do concreto;

a = largura de contacto entre a chapa metálica e o concreto;

b = dimensão da secção reta do pilar na direcção do movimento liberado.

B) Articulação de escorregamento

São articulações que se obtêm, revestindo as superfícies em contacto, com um material de baixo coeficiente de atrito. Atualmente usa-se o TEFLON que é uma resina de Politetrafluoretileno, produzido pela DU PONT de NEUMOURS, cujas propriedades são bastante satisfatórias.

As propriedades que fazem do TEFLON o material indicado para revestimento de superfícies de contacto nos apoios, são: impermeabilidade, imunidade em relação aos factores meteorológicos, inércia a todos os produtos químicos comerciais, estabilidade térmica e alta resistência à deformação.

A qualidade do TEFLON considerada essencial para sua indicação como revestimento, é o seu baixo coeficiente de atrito, o qual ainda diminui quando aumenta a pressão sobre ele.

1.1.3. Aparelho de apoio elástico

São articulações construídas no sentido de permitir deslocamentos da estrutura motivados por ações internas; temperatura, retração etc.

Por serem elásticos, os referidos apoios permitem deslocamentos restritos no plano horizontal enquanto no plano vertical só permitem rotações também restritas.

O material indicado para articulações dessa natureza, além das propriedades citadas no item 1.1.2B, deve ter a flexibilidade necessária para permitir os movimentos indicados no projeto.

Pesquisando material dessa natureza foi que se desenvolveu nos anos 30, a borracha sintética, neoprene, da fábrica Du Pont. Esse material artificial possui as propriedades elásticas da borracha natural, apresentando no entanto elevada resistência à corrosão e envelhecimento.

B. Topaloff, [4], classifica o neoprene através da sua dureza. Trata-se de medir a profundidade de penetração de uma agulha padrão no material mole medido numa escala de 0 a 90. O grau 0, corresponde a um material completamente mole, pelo fato de não oferecer nenhuma resistência à penetração da agulha. Essa escala de dureza chama-se; Escala de dureza SHORE.

Esse mesmo autor estabelece uma relação entre a dureza SHORE do Neoprene e seu módulo de elasticidade apresentando o gráfico da figura 1.12, [4].

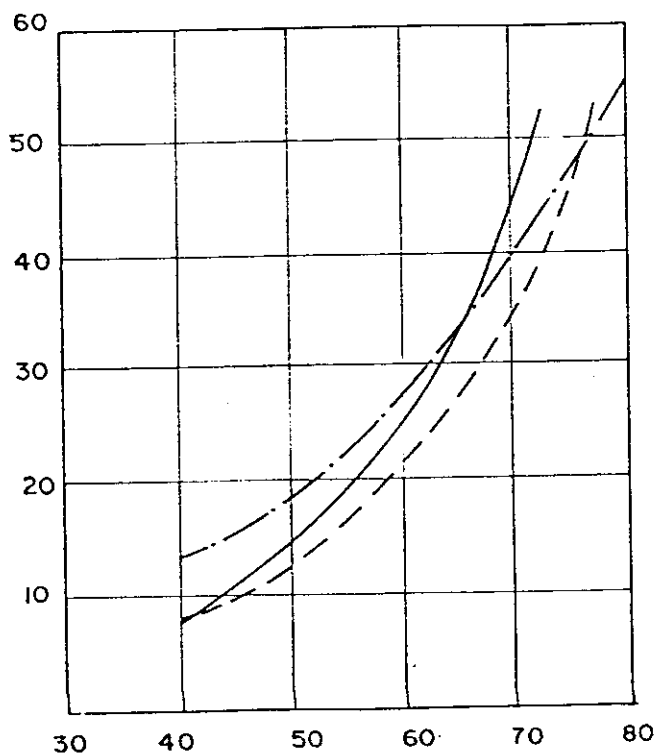


FIG. 1.12

O coeficiente de deformação transversal é considerado $\mu = 0,5$ e o módulo de elasticidade transversal fica:

$$G_a = E_a / 2(1+\nu) = E_a / 3 \quad (1.29)$$

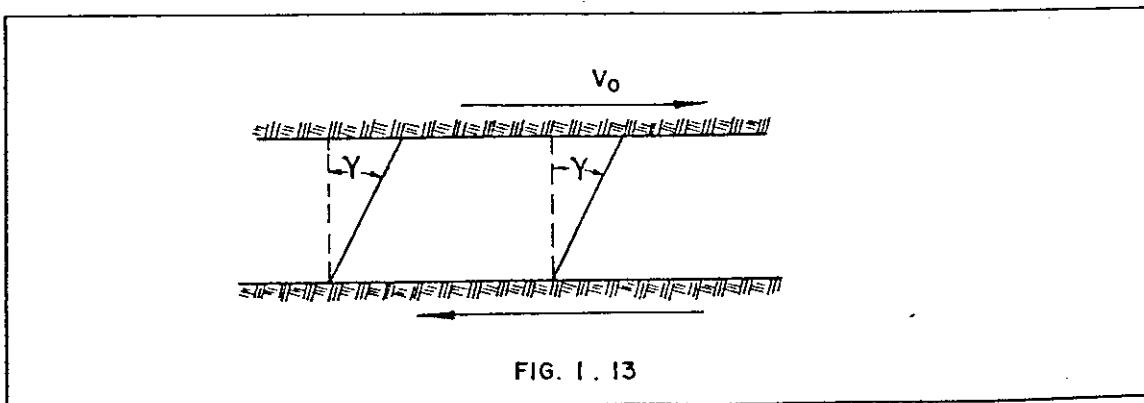
O Neoprene está sujeito à deformação lenta, sendo que o coeficiente de deformação lenta ϕ , consiste na relação entre o alongamento adicional obtido ao longo do tempo e o alongamento registrado por ocasião de carregamento.

$$\phi = \epsilon_t / \epsilon_0 \quad (1.30)$$

Constatou-se que o Neoprene não perde a propriedade de ter deformação lenta com o tempo, apresentando, após anos, deformação lenta para novos carregamentos.

Os esforços secundários que surgem no Neoprene devidos ao encurtamento da superestrutura, são parcialmente extintos. E desta forma o módulo de elasticidade transversal do Neoprene a ser usado no dimensionamento de aparelhos de apoio, deverá depender do tipo de carregamento a ser transferido através do referido aparelho.

Seja γ o ângulo de inclinação do apoio no instante $t = 0$, isto é, quando acontece o encurtamento da superestrutura, figura 1.13.



Tem-se:

$$V_o = A_a \operatorname{tg} \gamma G_{ao} \quad (1.31)$$

Sendo:

A_a = área da placa de Neoprene;

γ = ângulo de inclinação do aparelho de apoio;

G_{ao} = módulo de elasticidade transversal do Neoprene.

a equação diferencial referente à deformação lenta do Neoprene é idêntica à do concreto, portanto tem-se:

$$V_t = V_o e^{-\phi} \quad (1.32)$$

Sendo:

V_t = esforço no Neoprene para $t = \infty$;

V_o = esforço no Neoprene no tempo $t = 0$;

ϕ = coeficiente de deformação lenta definido em (1.30).

Substituindo a (1.31) na (1.32) tem-se:

$$V_t = A_a \operatorname{tg} (G_{ao} e^{-\phi})$$

$$\text{Fazendo; } G_{ao} e^{-\phi} = G_{at} \quad (1.33)$$

Tem-se:

$$V_t = A_a \operatorname{tg} G_t \quad (1.34)$$

O valor G_{at} , é chamado de módulo de elasticidade transversal à deformação lenta, para $t = \infty$.

TOPALOFF, [4], apresenta valores de G_{at} para os seguintes valores da dureza SHORE.

+

Dureza SHORE	ϕ	G_{at}
50	45%	$0,64G_{ao}$
60	35%	$0,70G_{ao}$
70	25%	$0,78G_{ao}$

Tabela 1.1

Usa-se o valor G_{ao} , para ações de curta duração, tais como; vento, frenagem ou aceleração e variação diurna de temperatura. Usa-se o valor G_{at} , para ações de longa duração tais como; protensão, retração do concreto, deformação lenta do concreto, etc.

Para o dimensionamento dos aparelhos de apoio em Neoprene, pode-se usar algumas indicações de ordem prática, cuja validade é devida a conclusões de estudos teóricos e experiências realizadas com o Neoprene [4]. As indicações são as seguintes.

$tg\gamma = 0,7$ (γ = ângulo de inclinação do aparelho de apoio figura 7).

$tg\alpha = V_{max}/N_{min}$ (α = ângulo de atrito entre a superfície do Neoprene e a superfície de concreto em contato com a borracha).

$$\sigma_{adm} = N_{adm}/A_a = 100kg/cm^2$$

$e/a < 0,2$ (e = espessura do Neoprene enquanto a = menor dimensão da placa referida).

Sendo que para espessura total $e > 0,2a$, há perigo de flambagem da placa, figura 1.14.

Atualmente são fabricados aparelhos de apoio elástico em Neoprene em dimensões padronizadas. Faz-se a combinação do elastômero com chapas de aço fortemente ligados por processo químico (vulcanização), dando-se depois um recobrimento, tipo cápsula, envolvendo-o em toda sua periferia, figura 1.15.

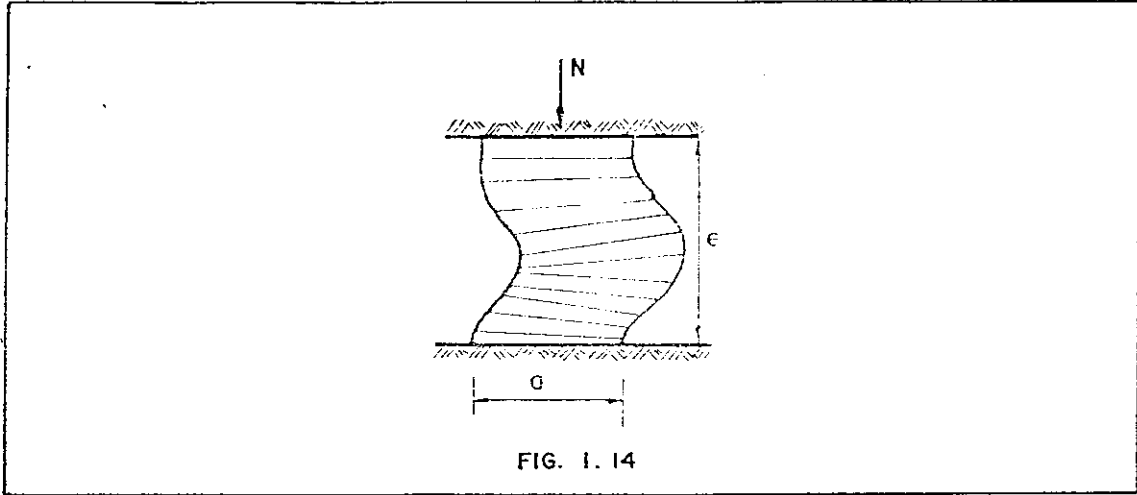


FIG. 1. 14

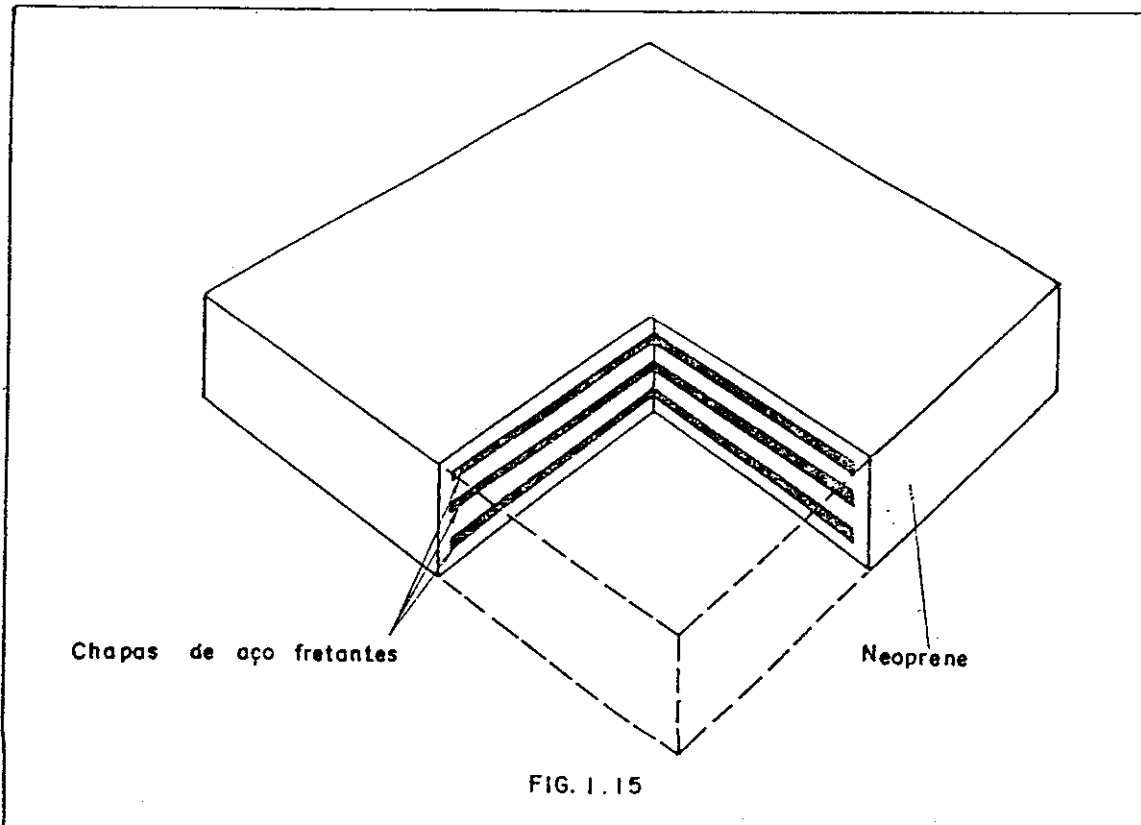
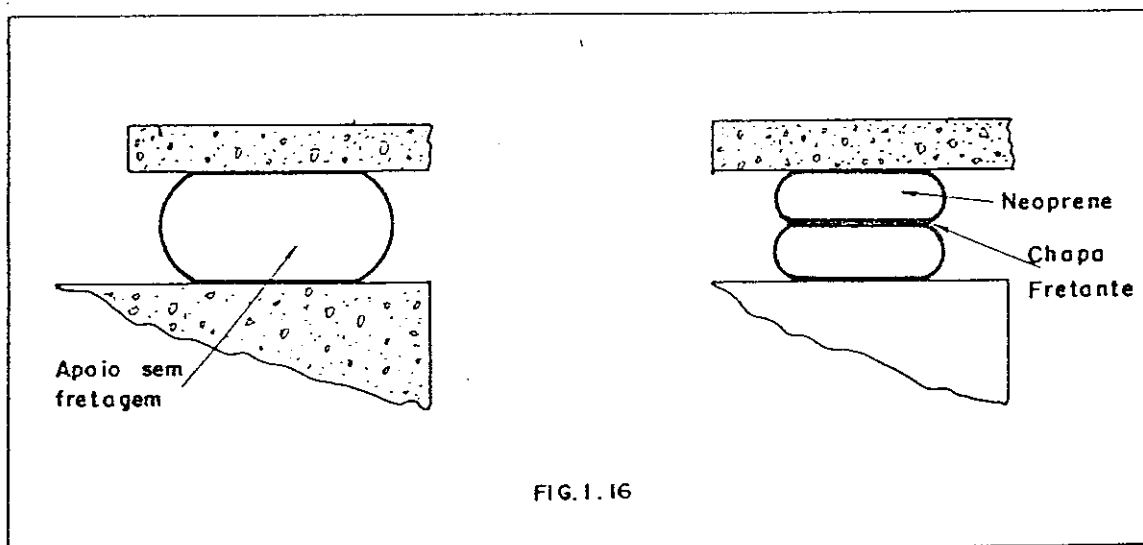


FIG. 1. 15

A função básica das chapas fretantes é a de formar um "monobloco" de camadas múltiplas com o fim de poder aumentar a espessura total do elastômero sem ultrapassar seus limites de resistência.

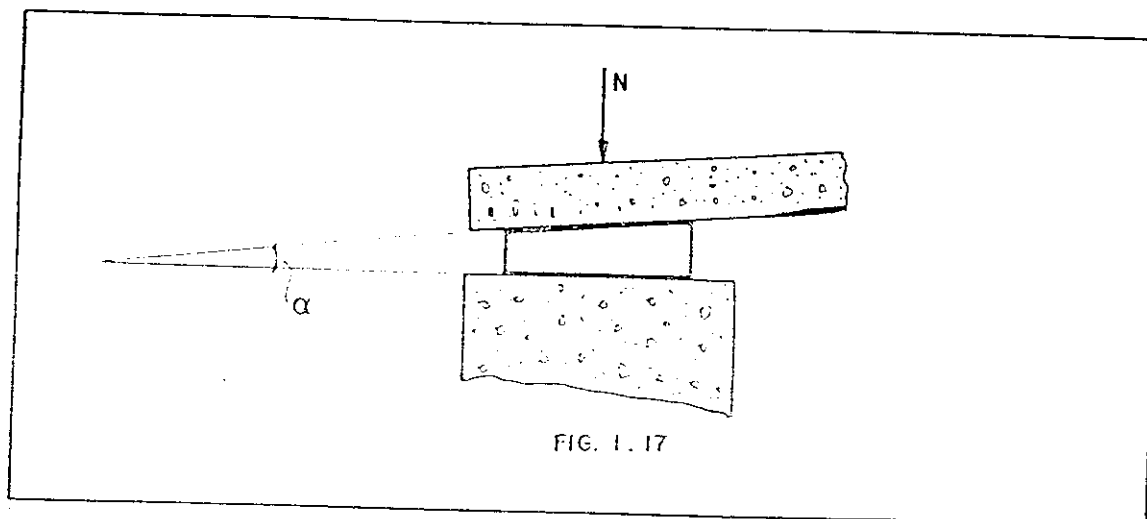
E.G. Kimmich, [5], estudou as relações entre as formas e a resistência do elastômero. Verificou que se uma amostra de mesmo é cortada pela metade e entre estas é colocada uma chapa de aço com perfeita adesão entre as superfícies de contacto desta com as daquelas duas metades, o conjunto assim formado suporta maiores tensões de compressão que o original, figura 1.16.



Define-se fator de forma, como a relação entre a superfície da área sob carga e a superfície total das áreas laterais. Baseado em ensaios de laboratório, [5], constatou-se que para fator de forma igual a 1, e pressão de 36kg/cm^2 , os apoios sofrem uma deformação por compressão de aproximadamente 30%, formando "bojanento" lateral e possíveis fissuras enquanto que se o fator de forma for 6, a deformação por compressão não atingirá valores maiores que 5%, para a mesma tensão. Desta forma é recomendado fatores de forma superiores a 6.

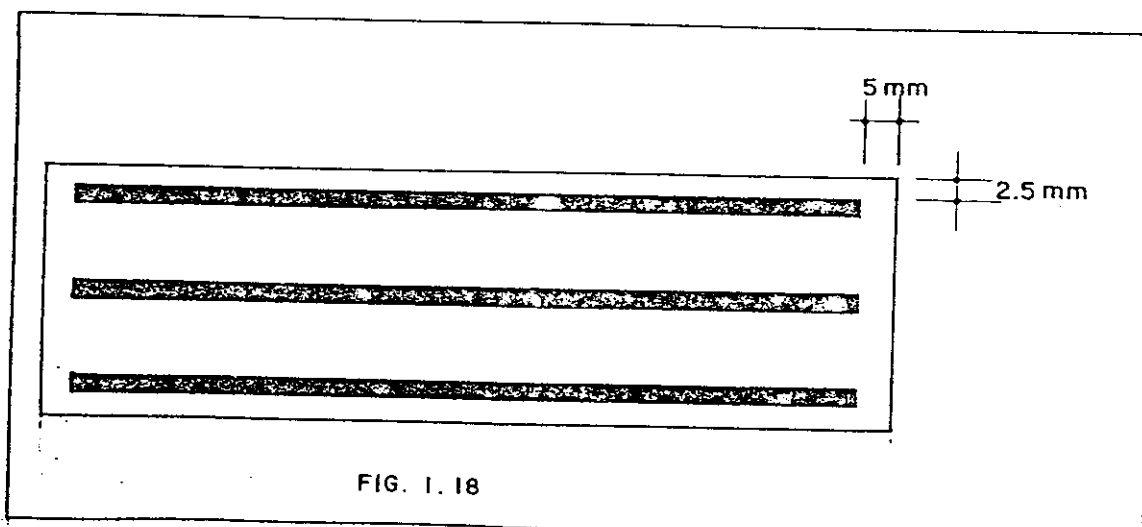
Quanto a adesão elastômero-placas de aço, recomenda-se, [5], adotar 36kg/cm^2 , o que excede a resistência de rasgo do mesmo.

Quanto a deflexão angular, [5], recomenda-se que a mesma não seja superior a 4° , figura 1.17.



Encontram-se na referência [5], as características técnicas dos apoios elásticos em Neoprene fretado, com as formas geométricas; circulares e retangulares, onde para as dimensões para carregamentos de 7,500 tf a 754,00tf, são, respectivamente, 100x14mm e 800x210mm dependendo do deslocamento e ângulo de inclinação admissíveis, enquanto para a segunda o carregamento entre 10,00 tf e 1.215,00tf, as dimensões estão entre 100x100x14 e 900x900x251mm.

Os apoios têm camada envoltória de Neoprene com 2,5mm nas superfícies e 5mm nos lados fig. 1.18.



1.2. Pilares

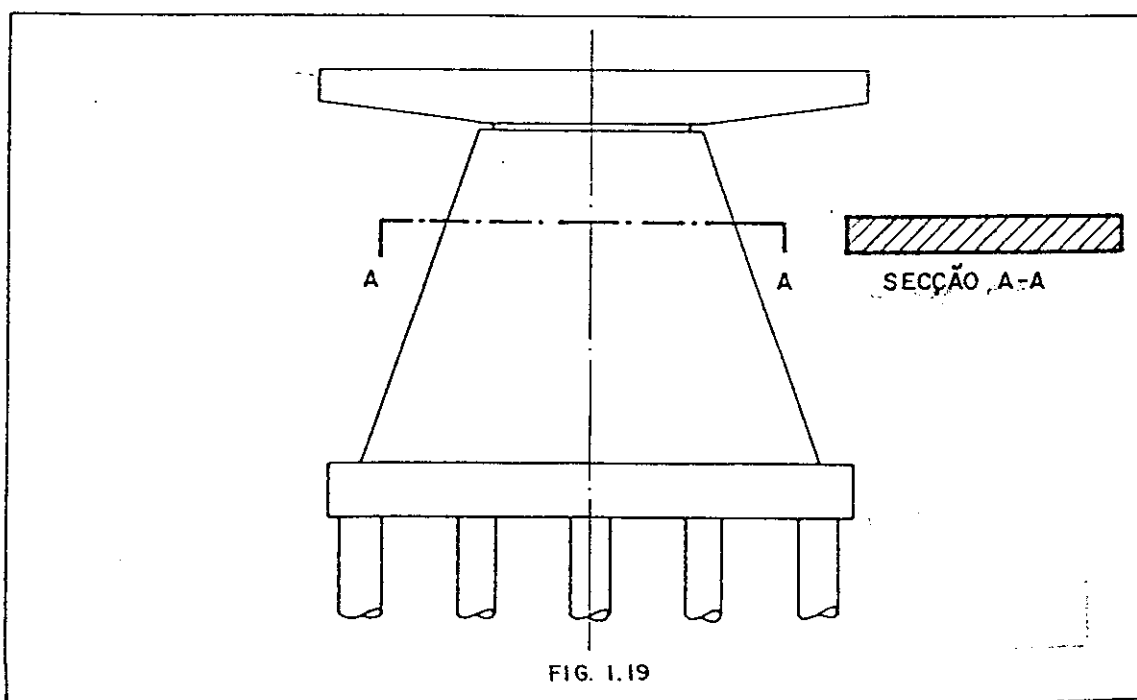
Pilares são os elementos da infraestrutura que tem a finalidade de transmitir ao solo de fundação as ações desenvolvidas na superestrutura, sem ter, normalmente, a função de arrimar o aterro.

Encontram-se diversas soluções para se projetar pilares, entre as quais as seguintes são usualmente empregadas.

- Pilar em coluna única;
- Pilar em pórtico;
- Pilar em estrutura celular;
- Pilar em treliça.

1.2.1. Pilar em coluna única

Os pilares em coluna única são geralmente em estrutura laminar empregadas como solução para viadutos urbanos por razões de ordem estética, figura 1.19.

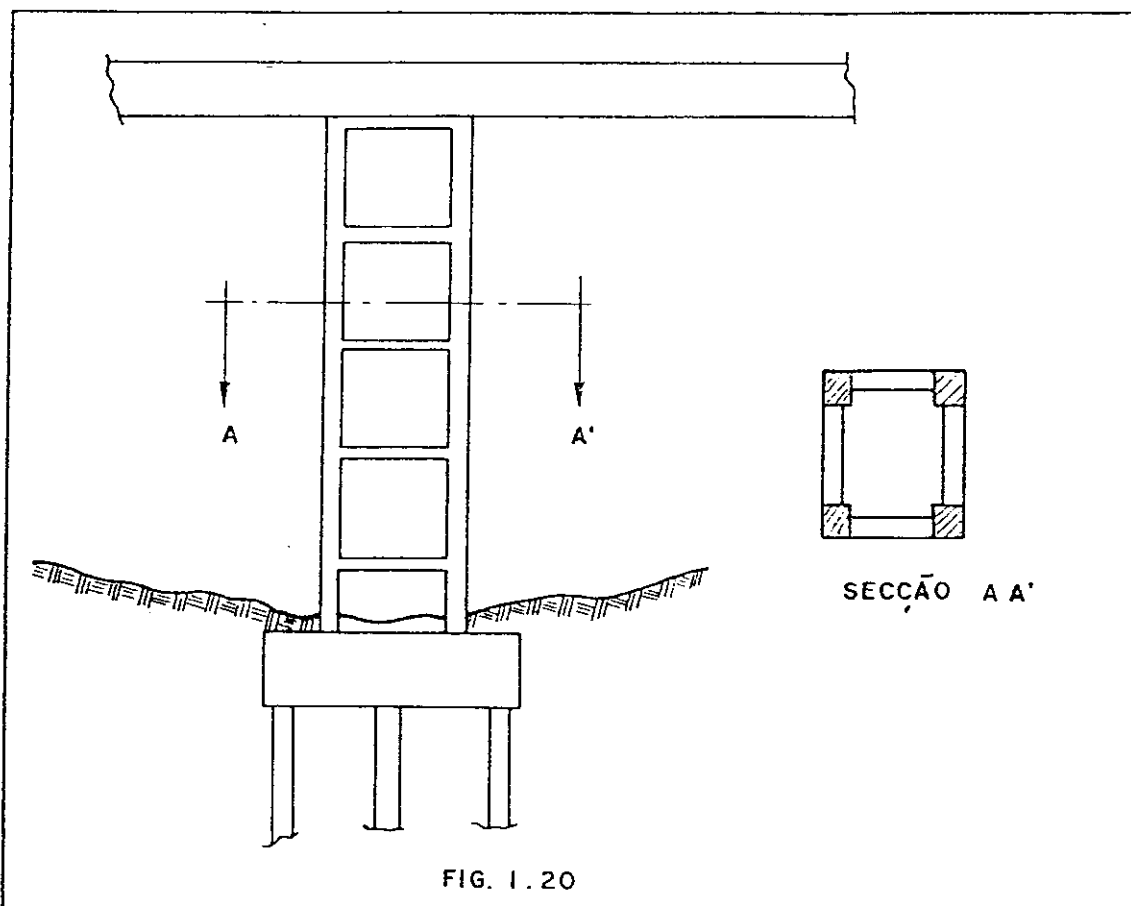




1.2.2. Pilar em pórtico

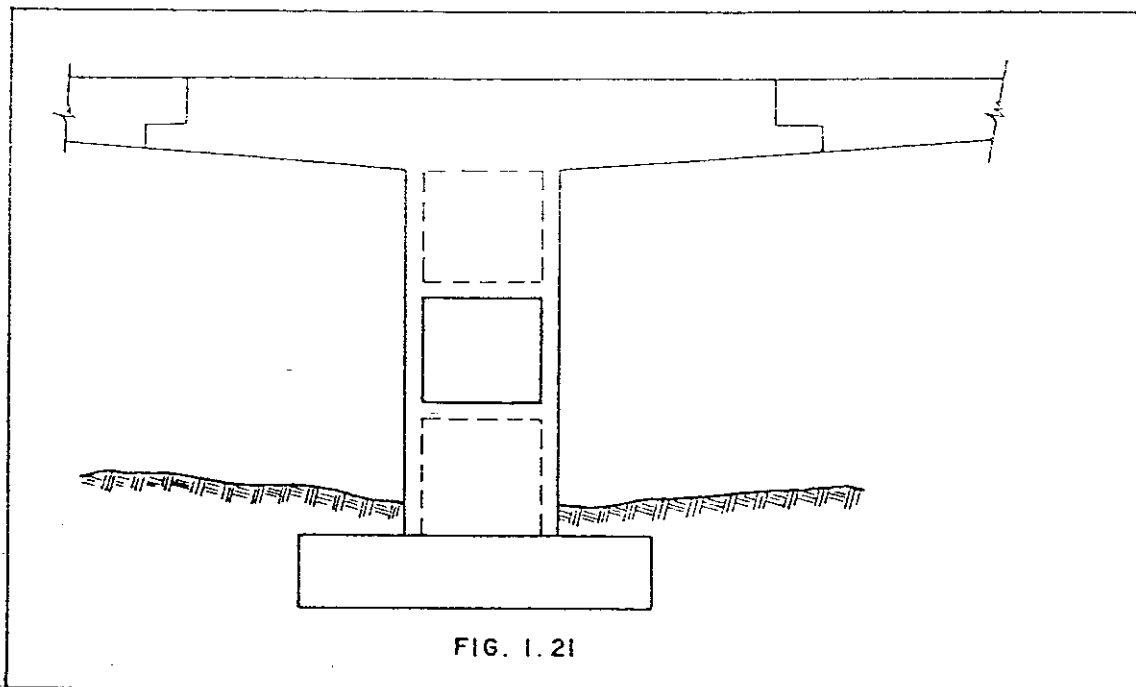
Os pilares em pórtico, podem ser em pórtico plano ou espacial. Quanto ao primeiro, normalmente é composto por duas colunas contraventadas por vigas, nos seus topos. Quando a altura é elevada, comprometendo a estabilidade da estrutura, aparecerão outras vigas de contraventamento.

A solução em pórtico espacial é bastante utilizada, como exemplo de sua utilização, cita-se, [6], a adotada na ponte sobre o rio Cenil, em Iznájar na Espanha. Os pilares são compostos por quatro colunas contraventadas convenientemente, formando um pórtico espacial, figura 1.20.



1.2.3. Pilar em estrutura celular

Os pilares em estrutura celular são adotados para grandes alturas, uma vez que a mesma apesar da economia de material apresenta rigidez suficiente para suportar as solicitações sobre a estrutura, figura 1.21.



1.2.4. Pilar em treliças

A solução em treliças pode ser encontrada, geralmente em pontes pênses, construídas em estrutura metálica é, também, uma alternativa a adotar para pilar de pontes.

Várias outras soluções para pilares de pontes, encontram-se na referência [6].

1.3. Encontros

O termo encontro, dentro de sua concepção original, conforme cita ROBISON, [7], significa uma grande massa de alvenaria com a finalidade de equilibrar a ação das forças externas com o empuxo de terra contido pelo mesmo.



Hã pontes em que os apoios intermediário são feitos encontros, como ã o caso da ponte abobadada da figura 1.22.

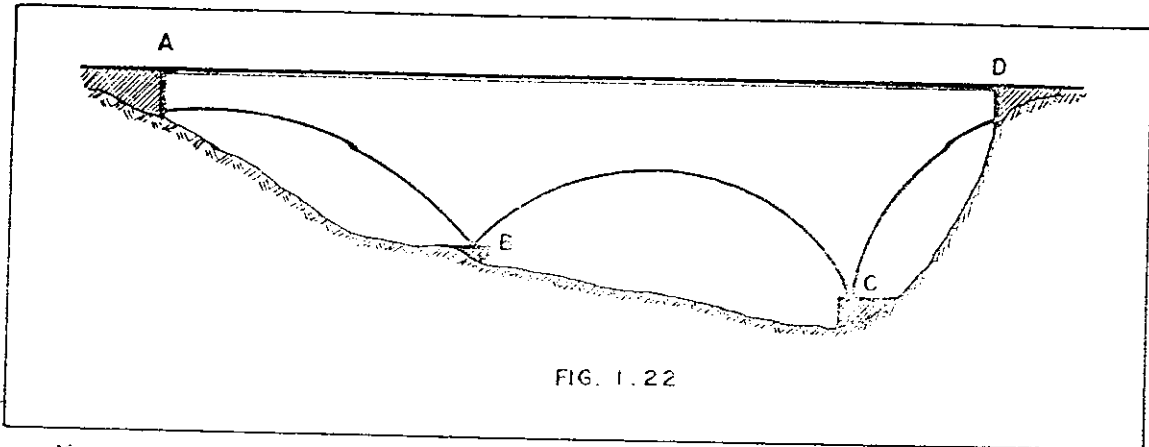


FIG. 1.22

Os encontros A e D, são encontros de tabuleiro, enquanto que os encontros B e C, são encontros de arco.

De um modo geral os encontros são construídos nas cabeceiras das pontes com o fim de transmitir ao solo parte das ações que se desenvolvem no tabuleiro, assim como arrimar os aterros de acesso.

Desta forma os encontros tem a função dupla, isto é, de pilares propriamente ditos e de muros de arrimo. Como pilares eles recebem cargas axiais que são transmitidas às fundações. Como muros de arrimo devem ser estáveis sob o empuxo lateral de terra. Em geral, os encontros são de alvenaria de pedra ou concreto armado, no entanto existem encontros formados por estacas pranchas, de aço, em obras definitivas, ou de madeira, em obras provisórias.

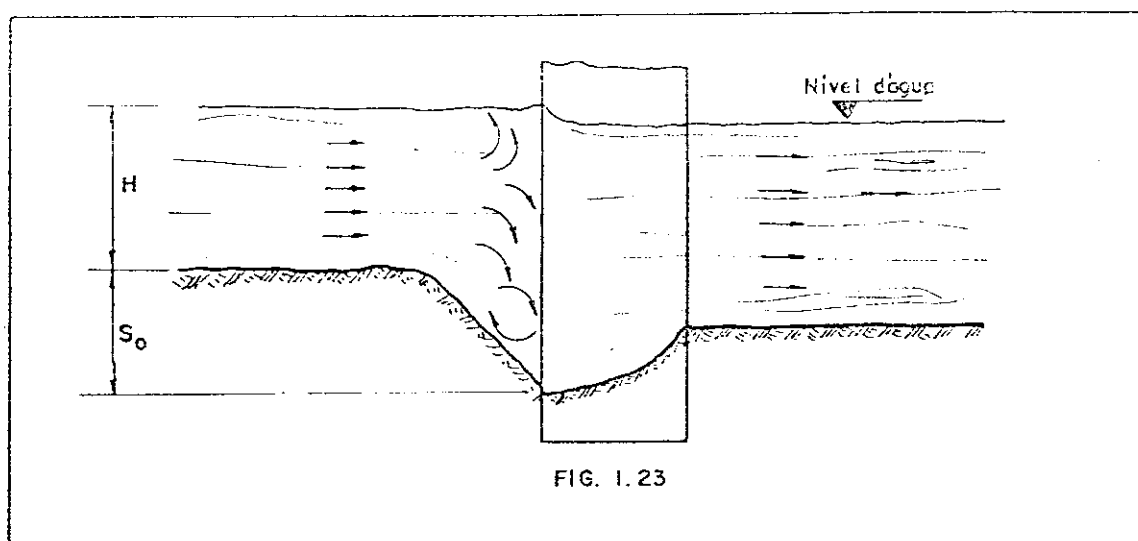
1.4. Fundações

A fundação de uma ponte é o conjunto de elementos utilizados para servir de apoio aos pilares, encontros e blocos de ancoragem de pontes pênses.

No preparo da fundação de uma ponte devem ser tomados cuidados especiais com a ação da erosão motivada

+

pelas modificações das condições hidráulicas das águas devido a presença dos próprios pilares. Com efeito, basta o desvio lateral da corrente causado pelo obstáculo para que aquela adquira um impulso na direção vertical que combinado com o movimento normal da correnteza, dá lugar a trajetórias descendentes, fig. 1.23, que ataca o solo do fundo do rio, aumentando consideravelmente a capacidade de arraste do material em volta da fundação.



Sendo:

H = lâmina d'água no local do pilar;

s_0 = profundidade de erosão.

A profundidade alcançada pelo efeito da erosão, varia com vários fatores, dentre os quais podemos citar; a velocidade das águas; o tipo de solo que forma o fundo do rio; a forma do pilar; largura do pilar e a inclinação, no plano horizontal, da secção citada neste em relação à correnteza.

Os pesquisadores sobre o assunto, baseados nos fatores anteriormente mencionados, desenvolveram fórmulas e relações semi-empíricas com o fim de determinar a profun

didade de erosão. Apesar disto não se pode depositar inteira confiança nas mesmas pois eventualmente podem ocorrer o bras em que, devido as peculiaridades próprias do curso d'água, formação geológica e topográfica do solo que constitui o seu leito, as profundidades de erosão atinjam cotas nunca antes imaginadas.

Há vários métodos para se determinar a profundidade de erosão s_c. RUAREZ e FICO, [17], citam os seguintes métodos:

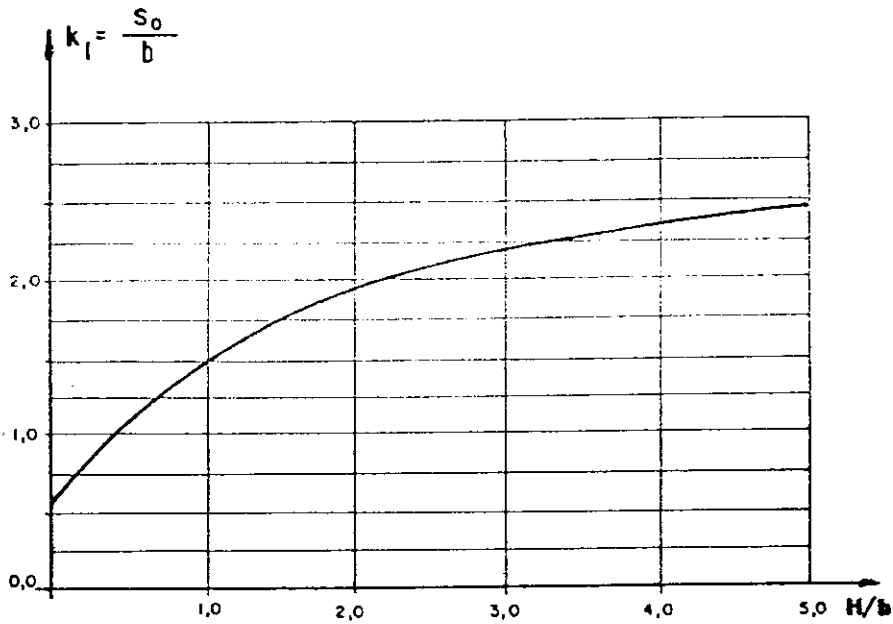
- a) Método de Laursen y Toch;
- b) Método de Yaroslavtziev;
- c) Método baseado em experiências no Laboratório de Poona, Índia;
- d) Método da Divisão de Investigação da Faculdade de Engenharia da Universidad Nacional Autónoma de Mexico.

Estes métodos, são fundamentados em experiências de laboratórios e observações do comportamento de obras semelhantes entre si. Apesar disto todos eles tem suas restrições e a aplicação dos mesmos servirá, portanto, como uma primeira orientação para o projetista. Em cada caso particular, em vista da avaliação prévia obtida por uma das fórmulas propostas, deve o projetista, tirando partido do comportamento de obras semelhantes, fazer valer o seu bom senso.

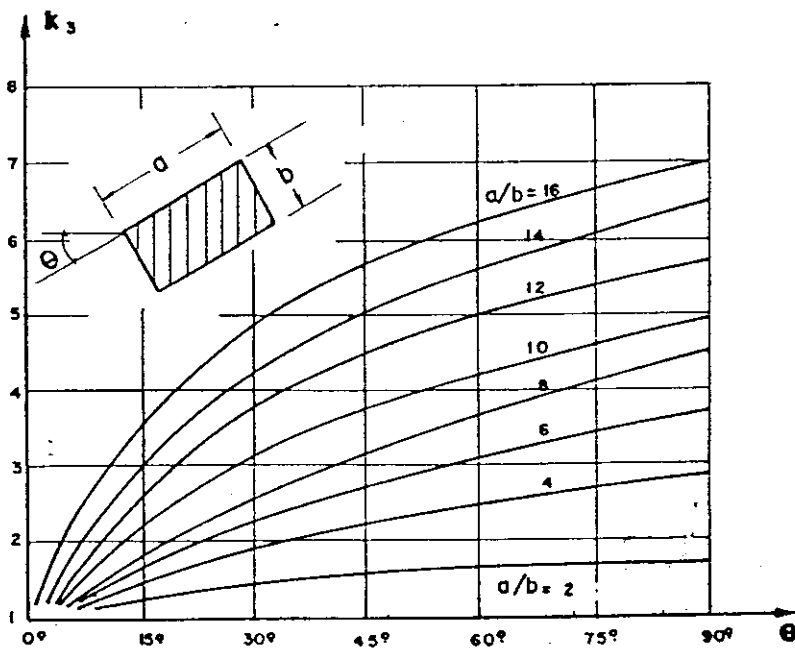
A seguir será apresentado o primeiro método o qual é de fácil compreensão e não requer o conhecimento de parâmetros complexos.

A fig. 1.24a apresenta no eixo das ordenadas a constante K_1 , que é a relação entre a profundidade de erosão e a largura do pilar, enquanto no eixo das abscissas apresenta a relação entre a espessura da lâmina d'água e a largura do pilar.

A fig. 1.24b, quando a corrente incidir obliquamente com o maior eixo da secção reta do pilar apresenta



a)



b)

FIG. 1.24

um fator corretivo K_3 , no eixo das ordenadas, o qual depende do ângulo de inclinação ϕ e da relação entre a maior e a menor dimensão da secção reta do pilar.

Na tabela 1.2 encontra-se um fator de correção K_2 que depende da forma do pilar.

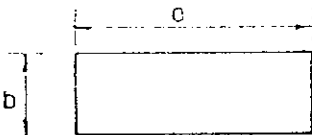
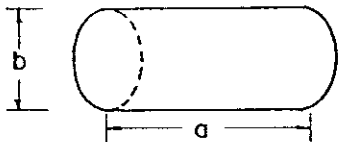
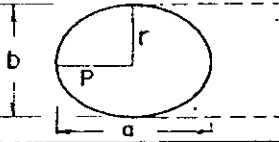
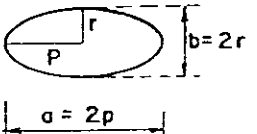
FORMA DO NARIZ DO PILAR		COEFICIENTE K_2
Retangular $a/b = 4$		1,00
Semicircular		0,90
Elíptica $p/r = 2/1$ $p/r = 3/1$		0,81
		0,75
Lenticular		0,81
		0,69

Tabela 1.2

Quando a maior dimensão do pilar está alinhado com a direção principal da corrente, a profundidade de erosão é dado pela expressão: $s_o = K_1 K_2 b$.

Quando a maior dimensão do pilar for oblíquo em relação à direção da corrente do rio, a expressão da profundidade de erosão é: $s_o = K_1 K_3 b$.

A avaliação da profundidade de erosão dada pelas fórmulas acima, se aplica a leitos constituídos de material arenoso. Se entretanto for utilizado o método b), que é mais complexo, a avaliação é mais confiável, pois o mesmo leva em conta, além das características do solo do fundo do rio, a velocidade média das águas acima da fundação, profundidade da lâmina d'água e outros parâmetros de influência, [17].

Costuma-se ainda adotar a profundidade de erosão baseada na variação máxima do nível d'água entre a estiagem e a enchente. Terzaghi e Peck chegaram a conclusão de que a profundidade de erosão chega a alcançar 2 a 3 vezes a maior altura de subida d'água já observada, caso o terreno do fundo do rio seja de natureza arenoso. Na impossibilidade de não se ter em mãos informações sobre o solo do fundo do rio, é recomendado adotar como profundidade de erosão o valor que corresponda a aproximadamente 4 vezes a maior subida d'água observada.

Há várias maneiras de se projetar uma fundação de ponte, BRAGA, [11], classifica as fundações de pontes em quatro grupos:

- Fundações rasas;
- Fundações por estacas;
- Fundações por tubulões;
- Fundações especiais.

1.4.1. Fundações rasas

O emprego de fundações rasas em pontes, é recomendável quando o solo de fundação apresenta boa capacidade de suporte ou quando a profundidade que se deve escavar o terreno para se obter boa resistência, seja menor que a menor dimensão da fundação, figura 1.25.

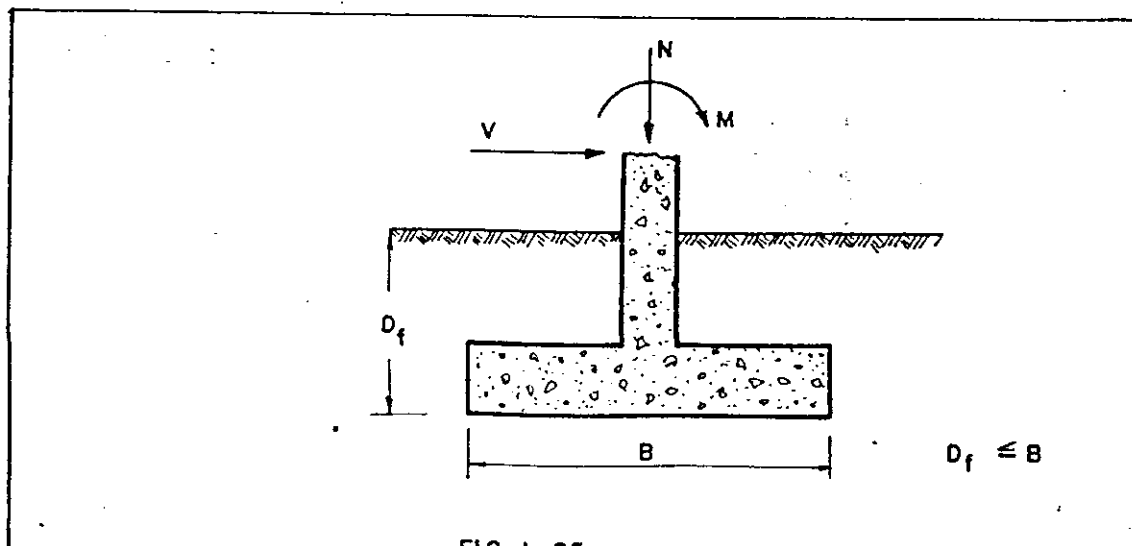


FIG. 1.25

Os tipos de fundações rasas são; as sapatas isoladas e as sapatas corridas.

O tipo de sapata isolada transmite ao solo a carga correspondente a um só pilar, enquanto o tipo sapata corrida transmite ao solo a carga correspondente ao conjunto de pilares agrupados pela mesma.

1.4.2. Fundações Profundas

A) Fundação por estacas

A solução de fundação por estacas, é adotada quando:

- O terreno de fundação é constituído por espessa camada superficial de material mole;
- A camada superficial resistente se apoia sobre uma camada de baixa capacidade de suporte.

A resistência oferecida pelo terreno ao carregamento atuante numa estaca é realizada conforme mostra a figura 1.26.

Na figura 1.26a, a resistência oferecida pelo terreno se faz por atrito lateral e ponta. Na figura 1.26b, a resistência oferecida pelo terreno é feita pela ponta. Na figura 1.26c, a resistência oferecida pelo terreno é feita pelo atrito lateral somente. Na figura 1.26d, é um caso que poderá ocorrer em terrenos com camadas de solo em estado de adensamento. O terreno oferece resistência à penetração da ponta e lateralmente se desenvolve, no sentido do carregamento, forças de atrito as quais, juntamente com o carregamento, vão ser equilibradas pela reação de ponta. O atrito que assim se desenvolve, chama-se de atrito negativo e, a estaca é chamada de Estaca "Flutuante".

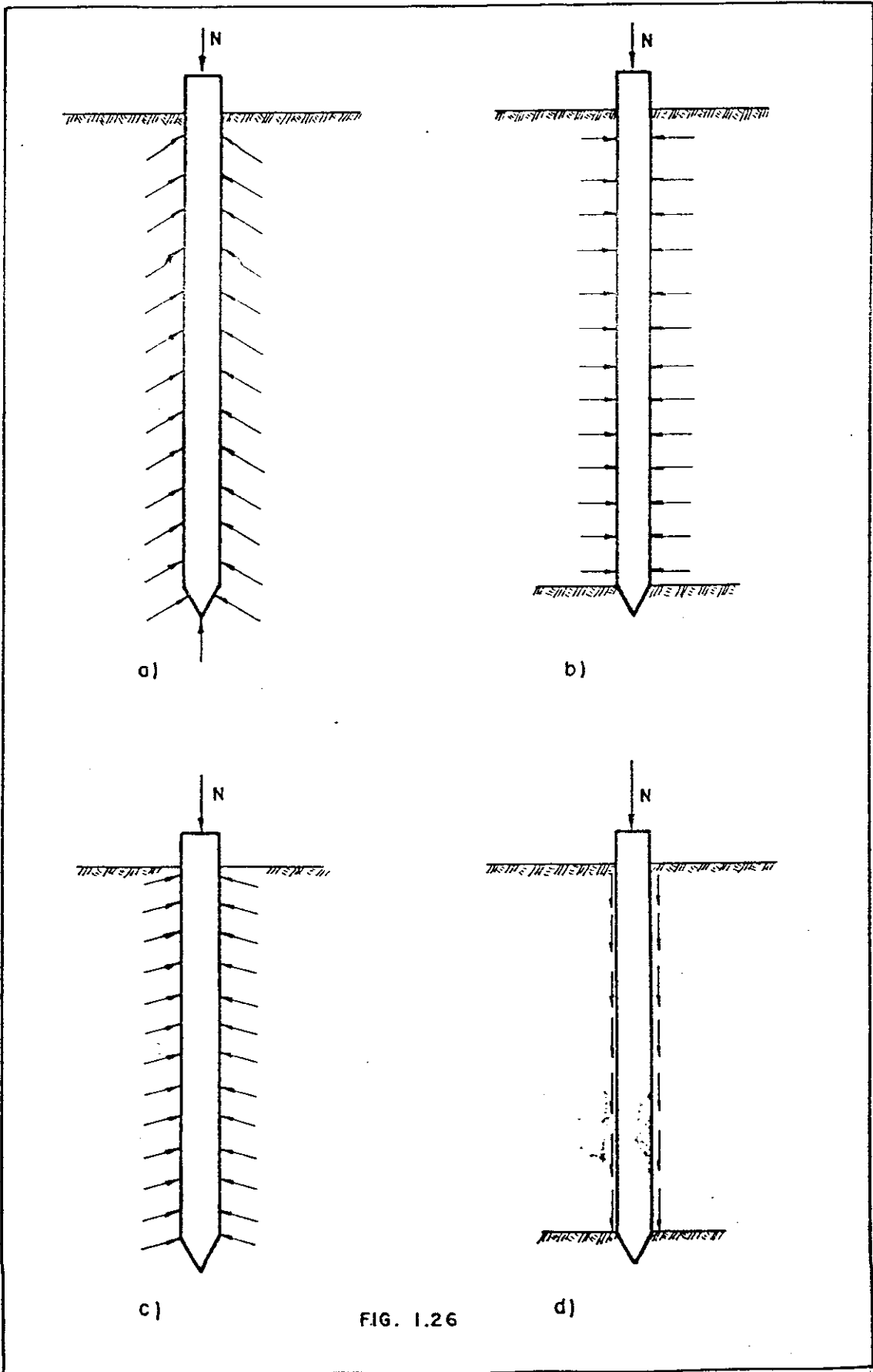


FIG. 1.26

+

B) - Fundações por tubulões

Quando existe um terreno cuja camada de solo de alta capacidade de suporte, se encontra numa cota muito abaixo da superfície do terreno e nos locais onde a fundação é abaixo do nível d'água, é, muitas vezes, mais econômico perfurar um poço até a cota onde se encontra solo firme para posteriormente preencher com concreto. A fundação assim formada chama-se de Fundação por Tubulão.

Em vista do terreno de fundação para o assentamento do tubulão ter alta capacidade de carga, proporcionando pequenos recalques, diminuindo consideravelmente a influência do atrito lateral, a pressão transmitida ao solo de fundação por um tubulão, é definida como a carga total dividida pela área de sua base.

A escolha e julgamento da pressão admissível numa fundação por tubulão deve ser baseada na grandeza do recalque da base. Para a fixação da pressão admissível na base do tubulão costuma-se adotá-la como a correspondente a de uma fundação direta rasa sobre a camada que suporta a base do tubulão, supondo-se que a mesma esteja na superfície do solo. Ao resultado assim obtido acrescenta-se uma percentagem para levar em conta o acréscimo de pressão com a profundidade. Recomendam-se os seguintes critérios para o acréscimo de pressão com a profundidade, 8 .

- Para tubulões fundados em arcia, acrescentar à taxa admissível 10% da mesma a cada metro de profundidade;

- Para tubulões fundados em argilas, acrescentar à taxa admissível, a pressão correspondente ao peso da terra escavada (γh).

CAPÍTULO II

AÇÕES NA INFRAESTRUTURA

As solicitações na infraestrutura são as oriundas de ações aplicadas ou deslocamentos devido a diferentes causas. Estas ações podem estar agindo tanto na superestrutura quanto na própria infraestrutura.

2.1. Ações na superestrutura

As ações que se desenvolvem na superestrutura estão normalizadas no Capítulo II da NB-2. Dentre as ações que serão descritas a seguir, enfocam-se as horizontais ou que tenham componentes na horizontal, as quais serão distribuídas entre os pilares da ponte, objeto do Capítulo IV desse trabalho.

A) Verticais

- Cargas permanentes; constituídas pelo peso próprio e por todas as sobrecargas fixas.

+

- Carga móvel.
- Impacto vertical.

B - Horizontais

- Frenagem ou Aceleração: Nas pontes rodoviárias, a força longitudinal devido à frenagem ou aceleração dos veículos será considerada aplicada na superfície de rolamento, sem impacto, e igual ao maior dos seguintes valores:

- a) 5% do carregamento do estrada, excluído os passeios, com as cargas móveis uniformemente distribuídas;
- b) 30% do peso do veículo tipo.

Nas pontes ferroviárias, a força longitudinal, em cada via, devida à frenagem ou aceleração do trem será considerada aplicada no topo dos trilhos, sem impacto e igual ao maior dos seguintes valores:

- a) 15% da carga móvel para frenagem;
- b) 25% do peso total sobre os eixos motores, para o esforço de aceleração.

- Força Centrífuga: Nas pontes rodoviárias em curva a força centrífuga normal ao seu eixo, será considerada atuando na superfície de rolamento e será avaliada da seguinte forma:

- a) 7% do peso do veículo tipo, com impacto vertical, para os raios até 300 metros;
- b) $\frac{2.100\%}{R}$ do peso do veículo tipo, com impacto vertical, para os raios maiores que 300 metros.

Nas pontes ferroviárias em curva, a força centrífuga será considerada atuando no centro de gravidade do trem, suposto a 1,60m, acima do topo dos trilhos, e avaliada em porcentagem da carga móvel, acrescida do impacto vertical, com os seguintes valores:

- a) para bitola larga (1,60);
 - 12% para curva de raio $R = 1.000m$;
 - $\frac{12.000\%}{R}$ para curva de raio $R = 1.000m$;
- b) para bitola estreita (1.000m);
 - 8% para curva de raio $R = 600m$;
 - $\frac{4.800\%}{R}$ para curva de raio $R = 600m$.



- Deformação Lenta: A NB-116 permite considerar que a deformação lenta seja proporcional à tensão atuante, e que o módulo de elasticidade imediato do concreto seja constante; assim a soma das deformações imediata e lenta em dado instante será:

$$c_c = \frac{c}{E_c} (1 + \zeta_c)$$

Sendo:

c_c = soma das deformações imediatas e lentas;

σ_c = tensão atuante devido aos carregamentos de natureza duradoura;

$$E_c = 2.100 f_{cj} \quad (\text{kgf/cm}^2);$$

$$\zeta_c = 8 \left(\frac{1 - u_r}{3 - 2u_r} \right) \left(\frac{7 + 3t_o}{4 + 6t_o} \right) = \text{coeficiente de deformação lenta final};$$

u_r = umidade relativa do ar;

t_o = idade do concreto (em meses) no instante do aparecimento das tensões que dão origem à deformação lenta.

Sendo c_o multiplicado por 0,9 se a menor dimensão da peça for maior que 70cm ou por 0,8 se ela for maior que 140cm.

- Variação de Temperatura: A NB-1/78, supõe que as variações de temperatura sejam uniforme na estrutura. O coeficiente de dilatação térmica do concreto é considerado igual a 10^{-5} por grau centígrado, salvo quando determinado especificamente para o concreto a ser usado.

A variação de temperatura da estrutura, causada pela variação de temperatura da atmosfera, depende do local da obra e deverá ser considerada entre $\pm 5^\circ$ a $\pm 15^\circ$ em torno da média. Para peças maciças ou ocas com os espaços vazios inteiramente fechados, cuja menor dimensão seja maior que 70cm, admitir-se-á que essa oscilação seja reduzida respectivamente para $\pm 5^\circ$ e $\pm 10^\circ\text{C}$; para peças cu-

ja dimensão esteja entre 50cm e 70cm, será feita interpolação linear entre aqueles valores e estes.

- Retração do Concreto: A NE-1/78, manda considerar para peças de concreto armado, nos casos correntes a deformação específica igual a 15×10^{-5} , salvo nos arcos e abóbadas, com pesos de 0,5% e 0,1% de armadura, onde esse valor será aumentado respectivamente para 20×10^{-5} e 25×10^{-5} . Considerando que o coeficiente de dilatação térmica do concreto seja igual a 10^{-5} por grau centígrado, pode-se considerar o efeito da retração como resultante de uma queda de temperatura de 15°C , salvo nos casos especificados acima.

- Vento na Superestrutura: Em linhas gerais a ação do vento na superestrutura é considerada como a ação de uma carga uniformemente distribuída horizontalmente, normal ao eixo da ponte, da seguinte forma:

a) Ponte descarregada; a pressão do vento é considerada $150\text{kg}/\text{m}^2$ atuando numa superfície igual a projeção da superestrutura no plano normal à direção do vento.

b) Ponte carregada; a pressão do vento é considerada $100\text{kg}/\text{m}^2$ quando for rodoviária ou ferroviária e $70\text{kg}/\text{m}^2$ no caso da ponte para pedestre, atuando numa superfície de incidência igual a do caso a) acrescida de uma faixa limitada superiormente, por uma linha paralela ao estrado e distante:

- Ponte rodoviária; 2,00m da superfície de rolamento.

- Ponte ferroviária; 3,50m do topo dos trilhos.

- Ponte para pedestre; 1,70m do piso.

A norma dispensa o cálculo da ação do vento, quando a estrutura principal for em laje. Pode-se, também dispensar o cálculo da referida ação, nos seguintes casos:

- Abóbadas cuja largura nas nascenças seja maior que 1/10 do vão;



- Arcos paralelos com tabuleiro superior e com contraventamento contínuo, se a distância entre os eixos dos arcos externos for superior a $1/9$ do vão.

- Empuxo de Terra: O empuxo de terra que age nas cortinas é considerado como ação na superestrutura, devendo a sua determinação ser feita da mesma forma que a adotada para encontros a qual será apresentada mais adiante.

- Impacto Lateral: O impacto lateral surge nas pontes ferroviárias como consequência da folga existente entre o friso das rodas e o boleto do trilho. Para levar em conta esse efeito a NB-2 manda considerar uma força horizontal, normal ao eixo da linha e atuando no topo do trilho como carga móvel concentrada. A intensidade da força deve ser de 20% da carga do eixo mais pesado. Em pontes curvas em planta, não se somará o efeito do impacto lateral ao da força centrífuga devendo-se considerar, dentre os dois, apenas o que produzir maiores solicitações.

2.2. Ações diretamente aplicadas na infraestrutura

A - Verticais

- Cargas Permanentes: Constituídas pelos pesos próprios; dos pilares e dos encontros.

- Enchimento dos Encontros.

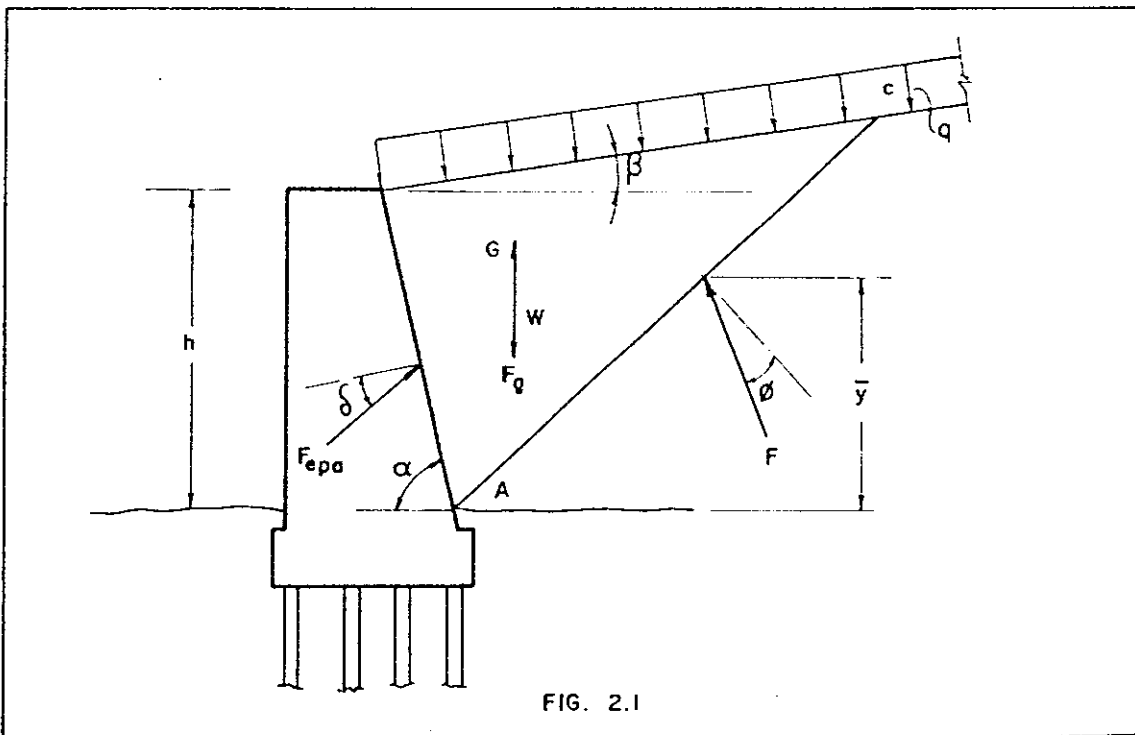
- Componente Vertical do Empuxo; o empuxo de terra nos encontros será analisado a seguir no sub-item referente às ações horizontais.

E) Ações horizontais

- Componente horizontal do empuxo de terra nos encontros: O empuxo de terra nos encontros é de difícil estimativa. Um cálculo aproximado bastante em uso é o baseado na teoria de Coulomb, o qual considera o equilíbrio de uma cunha de solo que está na iminência de escorregar segundo um plano de escorregamento que passa pelo pé do muro.

Para o cálculo do empuxo de terra, considera-se pequena rotação do muro de arrimo para o exterior e faz-se o equilíbrio estático da cunha de escorregamento de solo do arêro.

Seja o muro de arrimo esquematizado na Fig. 2.1. Partindo-se do equilíbrio estático do solo contido na cunha AEC, calcula-se o empuxo de terra de maior valor em função do ângulo θ que o plano de escorregamento AC faz com a horizontal, chega-se à expressão do empuxo ativo F_{epa} .



+

$$F_{epa} = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\text{sen}^2(\alpha + \phi)}{\text{sen}^2 \alpha \cdot \text{sen}(\alpha + \delta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\text{sen}(\phi + \delta) \cdot \text{sen}(\phi - \beta)}{\text{sen}(\alpha - \delta) \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}} \right]^2} \dots (2.1)$$

O ponto de aplicação do empuxo de terra fica localizado a uma distância \bar{Y} do pé do muro, sendo a mesma dada pela expressão seguinte.

$$\bar{Y} = \frac{H}{3} \cdot \left(\frac{\gamma H + 3q}{\gamma H + 2q} \right) \quad (2.2)$$

Sendo:

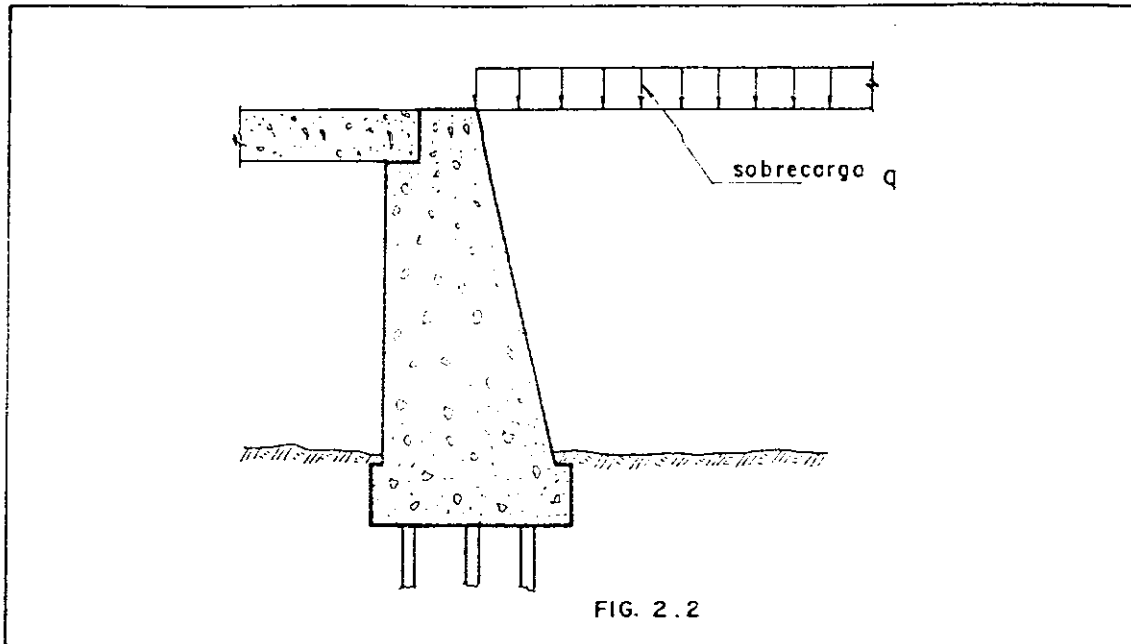
- F_{epa} = empuxo ativo;
- W = peso da cunha de solo ABC;
- F = ação do resto do massiço sobre a cunha de solo ABC;
- ϕ = ângulo de atrito interno do solo;
- δ = ângulo de atrito entre o solo e o muro;
- α = ângulo de inclinação do parâmetro de montante;
- β = inclinação da superfície do terreno;
- γ = peso específico do solo;
- θ = ângulo de inclinação do plano de escorregamento com a horizontal;
- AC = traço do plano de escorregamento;
- q = sobrecarga em cima da superfície do terreno.

Na expressão (2.1) o termo que multiplica $\frac{\gamma h^2}{2}$, é chamado de coeficiente de empuxo ativo K_a .

$$K_a = \frac{\text{sen}^2(\alpha + \phi)}{\text{sen}^2 \alpha \cdot \text{sen}(\alpha + \delta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\text{sen}(\phi + \delta) \cdot \text{sen}(\phi - \beta)}{\text{sen}(\alpha - \delta) \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}} \right]^2} \quad (2.3)$$

*

No caso particular de encontros de pontes tem-se, Fig. 2.2 $\beta = 0$.



A expressão do empuxo poderá ser dada como a seguir.

$$F_{epa} = K_a \cdot (\gamma H^2 / 2 + qH) \quad (2.4)$$

Onde:

$$q = 3 \cdot p + (L-3) \cdot p' / L$$

L = largura da ponte

p = multidão principal

p' = multidão do lado do veículo.

Se a fundação do encontro for sobre sapata, Fig. 2.3, o cálculo do empuxo de terra será feito, [10], da seguinte maneira. Portanto do equilíbrio estático do solo contido na cunha ABC, calcula-se o máximo empuxo de terra em função do ângulo de inclinação da face AC. Com isto chega-se portanto à expressão do empuxo ativo F'_{epa} , observando as indicações que seguem.

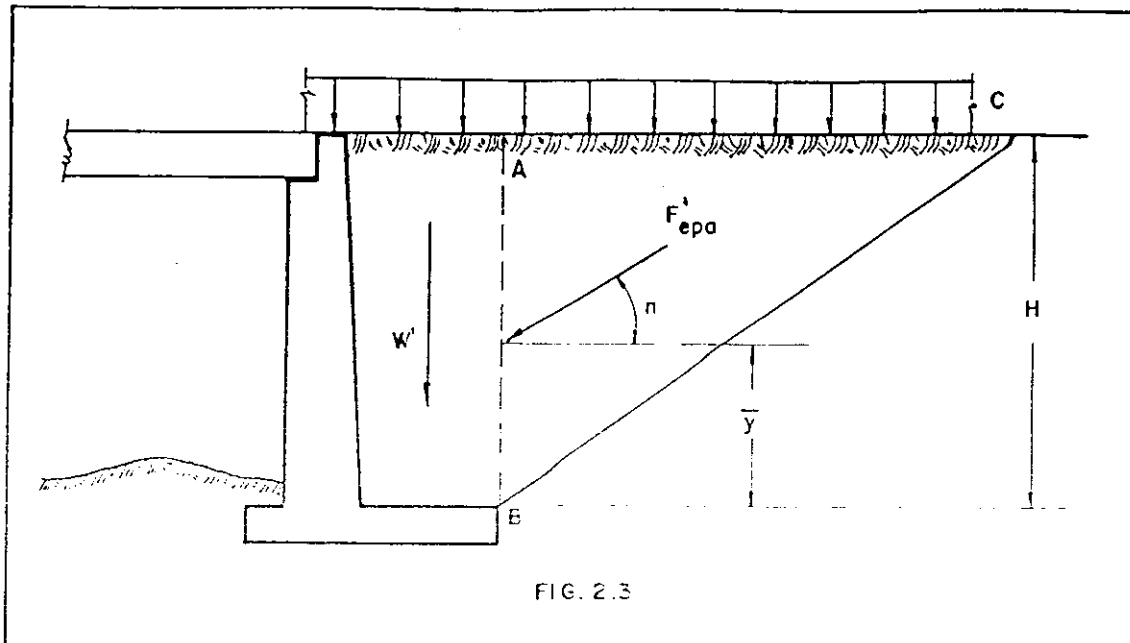


FIG. 2.3

Na Fig. 2.3, tem-se:

- W' = peso do material sobre a sapata;
- F'_{epa} = empuxo de terra sobre o material de peso W' ;
- n = ângulo de atrito entre o material da cunha ABC e o de peso W' ;
- \bar{Y} = ponto de aplicação do empuxo;
- H = altura do muro de arrimo.

A expressão de F'_{epa} é dada pela (2.4), devendo-se observar que $\delta = n$ e $0 \leq \delta \leq \phi$. Isto é, o valor de K_a é o dado pela (2.3), onde o ângulo de atrito deve estar no limite estipulado anteriormente.

A Fig. 2.4, mostra a situação referente às solicições devido ao empuxo de terra nas cortinas.

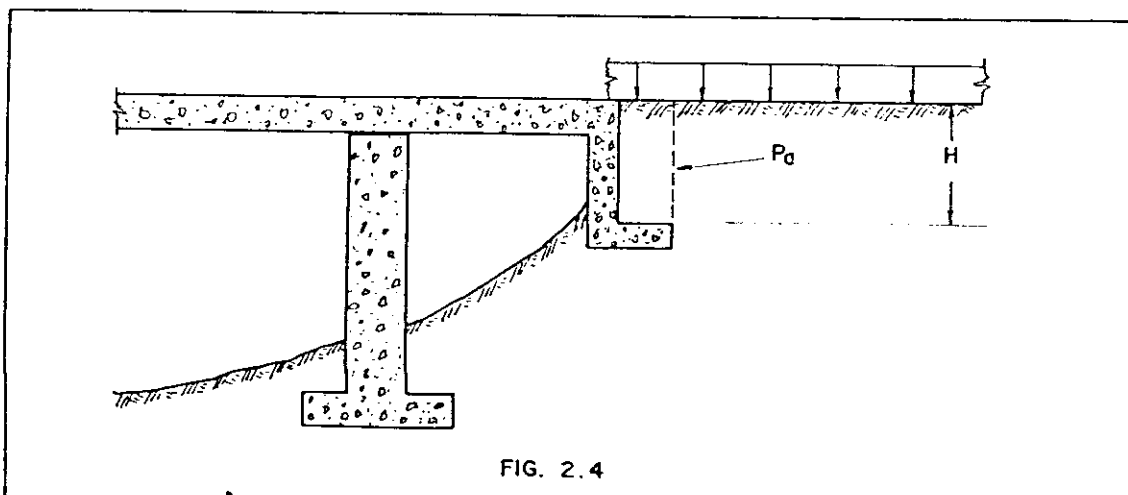


FIG. 2.4



Encontram-se na referência 9, valores dos ângulos de atrito entre a superfície do muro de arrimo de concreto ou alvenaria e os materiais de enchimento, os quais são transcritos na tabela 2.1.

Extraídos, também da mesma referência, transcrevem-se na tabela 2.2, os valores do K_a , para $\beta=0$ e $\alpha=\pi/2$.

M A T E R I A L.	Ângulo de atrito entre o material de enchimento e o parâmetro do muro (em grau) "ô".
Argila de rocha sã	35
Areia grossa Mistura Areia grossa-saibro	29-31
Argila fina à areia média Silte médio à areia de textura grossa	24-29
Areia fina argilosa Silte ou areia argilosa média	19-24
Areia fina siltosa Silte não plástico	17-19
Argila compactada	22-26
Argila e argila siltosa dura	17-19

Tabela 2.1

φ	"δ"				
	0	16	17	20	22
26	0,390	0,349	0,348	0,345	0,343
28	0,361	0,324	0,323	0,320	0,319
30	0,333	0,300	0,299	0,297	0,296
32	0,307	0,278	0,277	0,276	0,275
34	0,283	0,257	0,256	0,255	0,254
36	0,260	0,237	0,237	0,235	0,235
38	0,238	0,218	0,218	0,217	0,217
40	0,217	0,201	0,200	0,199	0,199

Tabela 2.2

- Empuxo de terra nos pilares: Há situações em que o pilar se encontra parcialmente enterrado, Fig. 2.5. Neste caso, diante das dificuldades de um estudo mais rigoroso, a NE-2 adota para o pilar uma largura fictícia, para efeito de cálculo do empuxo de terra no mesmo, igual a 3 vezes a sua largura normal.

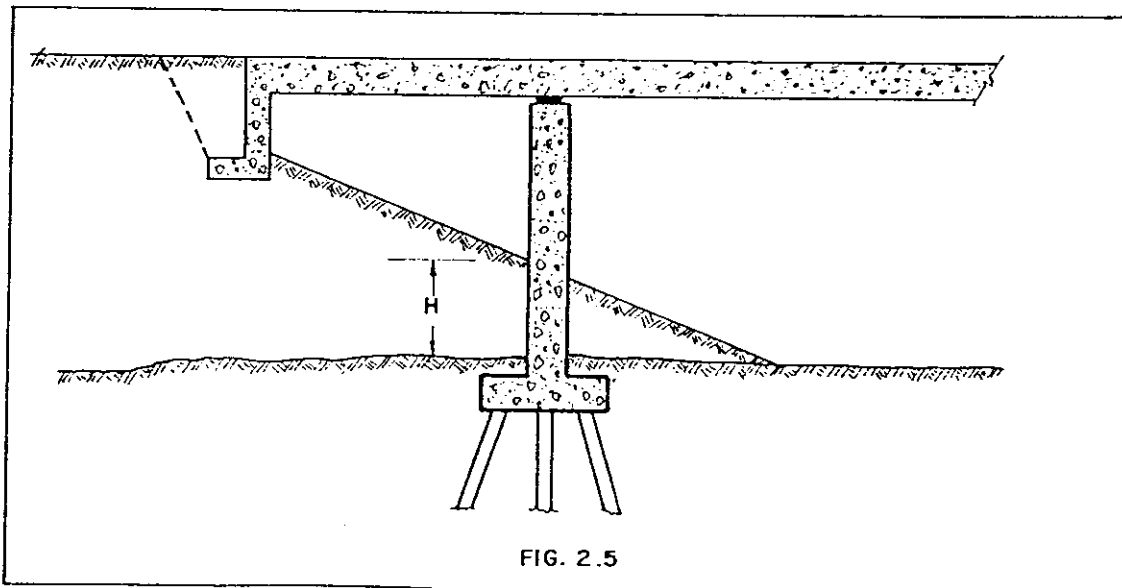


FIG. 2.5

+

- Atrito nos Apoios M6veis: Os esfor7os correspondentes ao atrito nos apoios n6o afetam, geralmente, de modo apreci6vel a superestrutura, no entanto devem sempre ser levados em considera76o no c6lculo dos aparelhos de apoio, pilares e encontros, admitindo-se que a mesma seja de 3% nos apoios de rolamento e 20% nos apoios de escorregamento, da rea76o devida 6 carga permanente e a carga m6vel, sem levar em conta o efeito do impacto vertical.

Permite-se levar em conta os efeitos favor6veis dessas for7as de atrito sobre os apoios, adotando-se valores iguais 6 metade dos acima fixados. Esse efeito favor6vel, todavia n6o pode ser superior 6 metade da for7a longitudinal total, NB-2.

- Empuxo da 6gua nos Pilares: A a76o din6mica das 6guas sobre os pilares, se faz sentir nas partes dos mesmos imersas nas 6guas correntes.

Pode-se avaliar o efeito din6mico das 6guas na parte do pilar submerso, atrav6s da seguinte f6rmula: 11:

$$F_a = C \cdot A \cdot V_m^2 \quad (2.5)$$

Sendo:

F_a = empuxo aplicado ao pilar;

$C = 80 \text{ kg/m}^3$ para faces expostas planas;

$C = 40 \text{ kg/m}^3$ para faces arredondadas ou angulosas;

V_m = velocidade m6dia das 6guas;

A = 6rea da proje76o da parte submersa, sobre o plano normal 6 correnteza.

- Deslocamentos das Funda76es: Em estruturas fundadas em solo recalc6vel, a NB-2 recomenda levar em considera76o os efeitos dos recalques das funda76es.



CAPÍTULO III

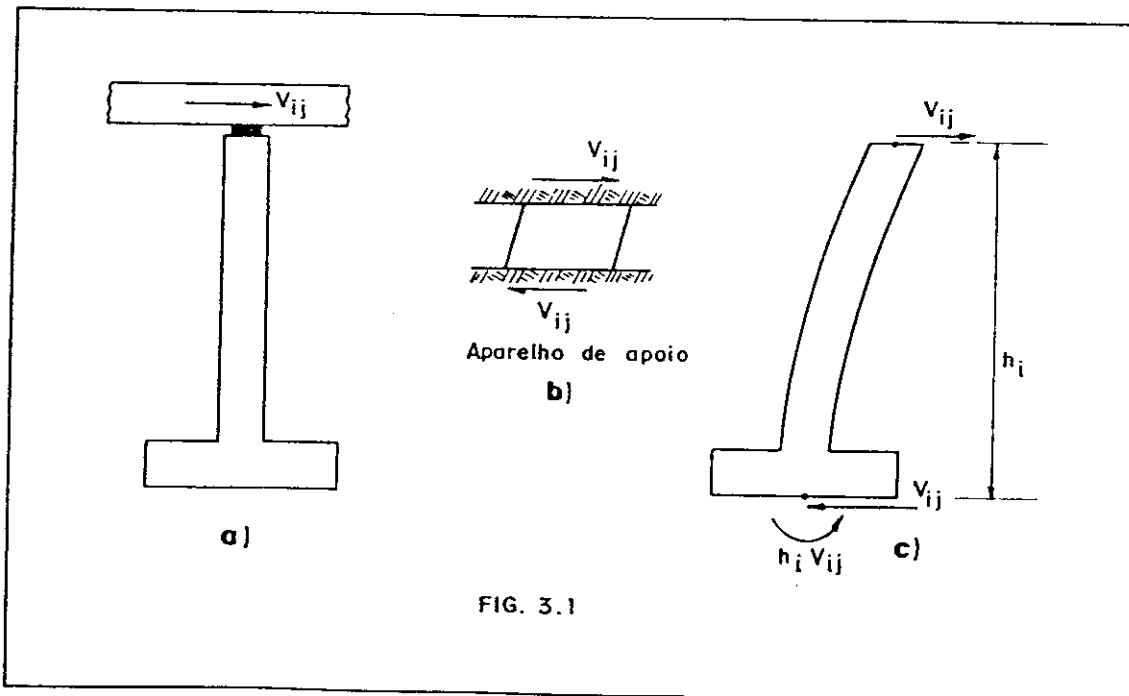
RIGIDEZES DOS ELEMENTOS DA INFRAESTRUTURA

Ao ser aplicada uma força externa na superestrutura de uma ponte, surgirão esforços solicitantes nos elementos que compõem a infraestrutura que estão na dependência das características elásticas dos referidos elementos.

Na figura 3.1, mostra-se um conjunto de elementos da infraestrutura referentes ao pilar i (aparelhos de apoio, fuste do pilar e fundação).

No presente capítulo estuda-se as rigidezes dos elementos no plano horizontal as quais se destinarão ao equacionamento do problema da distribuição dos esforços no referido plano o qual é assunto desenvolvido nos capítulos IV e V.

Da ação que age na superestrutura, uma parcela V_i , se transmite ao conjunto de elementos do pilar i descrito acima e representado na figura 3.1.



Analisando o sistema super-infraestrutura em equilíbrio, constata-se que aquela exerce no aparelho de apoio genérico i , um esforço que chamaremos de V_{ij} . Este por estar vinculado ao topo do pilar correspondente, pela condição de equilíbrio e pelo princípio da ação e reação, exerce no referido pilar o mesmo esforço V_{ij} . Este por estar em contato com a fundação, pela condição de equilíbrio e pelo princípio da ação e reação, exercerá na fundação correspondente, o mesmo esforço V_{ij} acompanhado de momento do mesmo em relação ao ponto de encontro do eixo do pilar com a fundação, figura 3.1c.

Pela seqüência apresentada acima, verifica-se que o esforço V_{ij} , foi transmitido ao solo de fundação após atuar em todos elementos componentes de um pilar (aparelho de apoio e fuste do pilar). E assim o problema da distribuição de esforços na infraestrutura é resolvido analisando-se o comportamento: do aparelho de apoio, do pilar e da fundação correspondente, frente a parcela da ação que aos mesmos se transmite.

Sob a ação do esforço V_{ij} , cada elemento citado acima sofre um certo deslocamento. Para deslocamentos pequenos considera-se que haja proporcionalidade entre os mesmos e os esforços que os produziram, tornando-se o problema equacionado quando a constante de proporcionalidade entre o esforço e a deformação correspondente, é conhecida.

Chamando de K_{ij} , a constante acima referida e δ_{ij} o deslocamento correspondente ao esforço V_{ij} , tem-se:

$$V_{ij} = K_{ij} \delta_{ij} \quad (3.1)$$

A constante K_{ij} , é determinada se fizermos na (3.1) $\delta_{ij} = 1$.

A constante K_{ij} é chamada de coeficiente de rigidez do elemento i na direção j .

Sendo: j a direção principal da secção reta do fuste do pilar.

3.1. Rigidezes dos apoios

Definem-se os tipos de apoios possíveis (fixo, móvel e elástico) os quais vão tornar possíveis os deslocamentos previstos no projeto. Cada caso apresenta uma alternativa no sentido de transmitir maior ou menor parcela dos esforços que vão se desenvolver na infra motivados por forças externas agindo na super ou diretamente na infraestrutura. No que segue analisa-se as rigidezes dos aparelhos de apoio no plano horizontal; características essas claramente definidas para os dois primeiros enquanto que para o terceiro procura-se fazer uma análise mais demorada, acrescentando informações consideradas úteis ao calculista.

3.1.1. Rigidez do apoio fixo

Para os apoios do tipo Fixos, consideram-se rigidezes infinitas nas direções impedidas, como nos aparelhos de apoio; MENASGER e FREYSSINET. Nesses aparelhos de apoio as rigidezes são consideradas infinitas para movimento de translação, e rotação no plano horizontal, enquanto que no plano vertical as rigidezes são consideradas nulas.

3.1.2. Rigidez do apoio móvel

Para os apoios móveis consideram-se rigidezes nulas nas direções livres de movimentos como são os casos dos aparelhos de apoio móveis citados no item 1.2 do capítulo I.

3.1.3. Rigidez do apoio elástico

Para os aparelhos de apoio elásticos, pode-se tirar partido das suas características elásticas, portanto, trataremos do assunto referente ao apoio em material elástico ou mais precisamente o NEOPRENE (chamado também de Elastômero) o qual é bastante usado atualmente.

A) Rígidez transversal

Seja um aparelho de borracha (elastômero), representado esquematicamente na figura 3.2. Uma força horizontal \underline{V} , contida no seu plano, provoca um deslocamento relativo entre as faces inferior e superior, que chamaremos de δ_a .

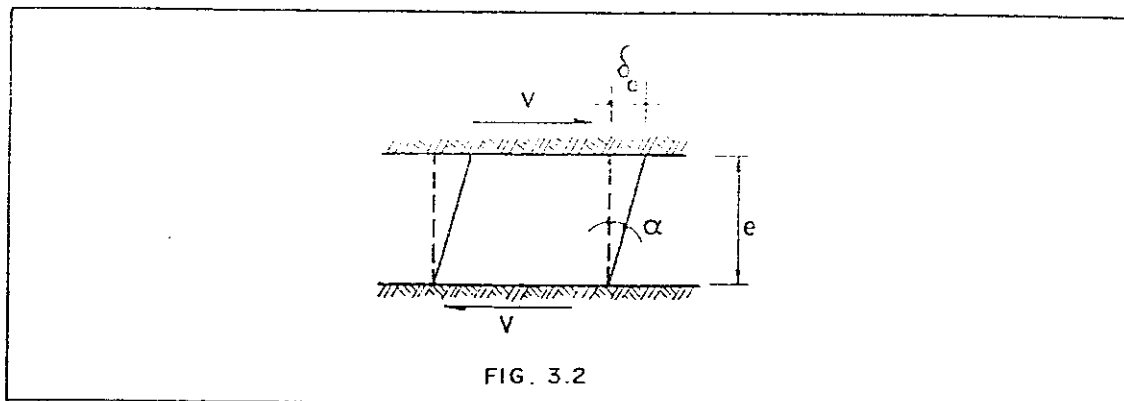


FIG. 3.2

Da resistência dos materiais tiramos as relações seguintes:

$$\tau = G_a \cdot \alpha \approx G_a \cdot \text{tg} \alpha = G_a \cdot \delta_a / e$$

$$V/A_a = C_a \cdot \delta_a / e \quad \therefore \quad V = (G_a \cdot A_a / e) \cdot \delta_a \quad (3.2)$$

Sendo:

A_a = área carregada do elastômero;

G_a = módulo de elasticidade transversal do elastômero;

e = espessura total do elastômero;

δ_a = deslocamento horizontal na direção de \underline{V} , entre as faces superior e inferior do elastômero.

Comparando a (3.2) com a (3.1), tem-se:

$$K_a = C_a \cdot A_a / e \quad (3.3)$$

B) Rigidez à torção.

Seja o mesmo elastômero da figura 3.2, visto em planta na figura 3.3.

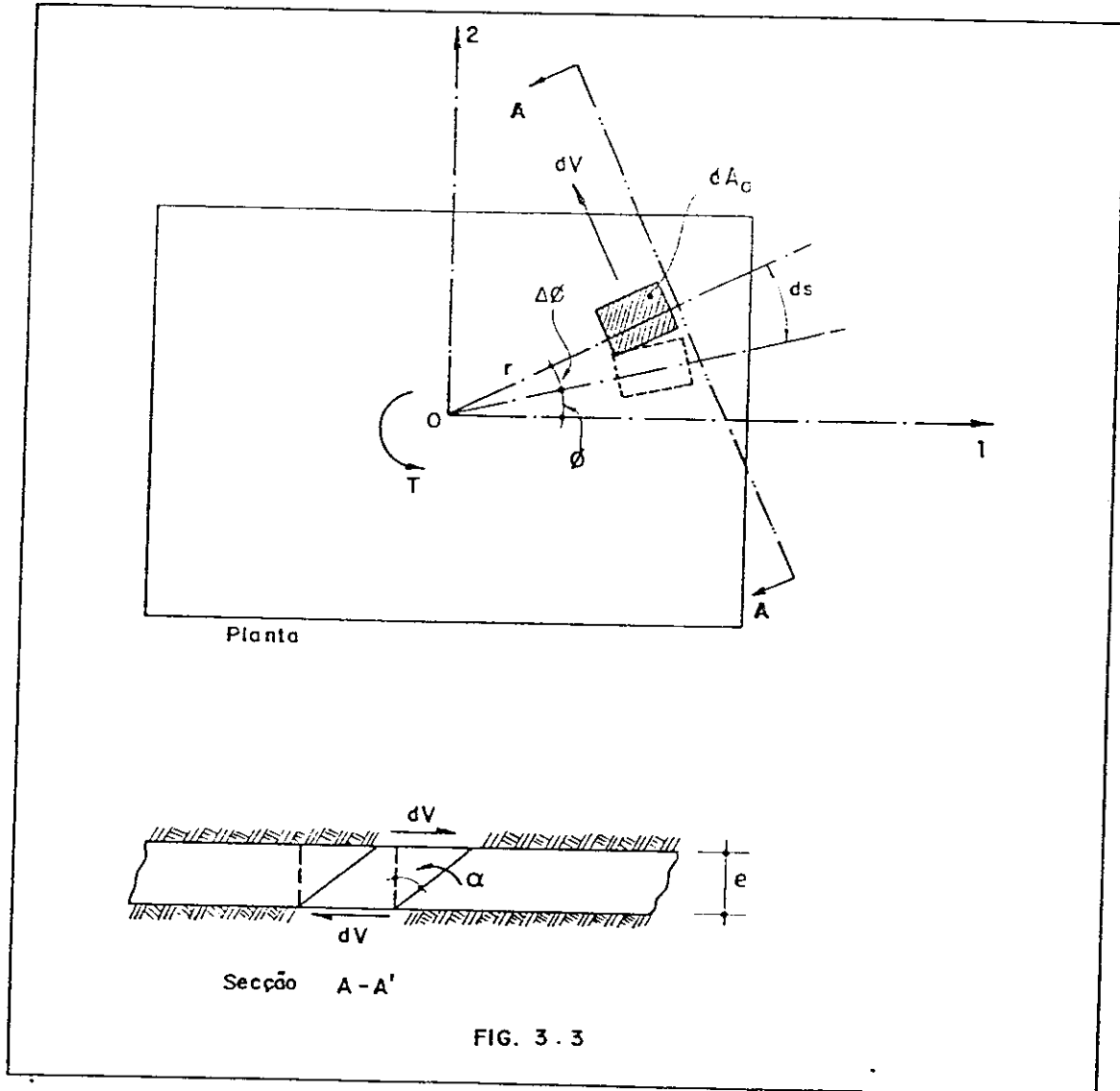


FIG. 3.3

Da figura 3.3 tiram-se as relações:

$$ds = r \cdot \Delta\phi = e \cdot \alpha \quad \therefore \quad \alpha = (r/e) \cdot \Delta\phi \quad (3.4)$$

$$dV = \tau \cdot dA_a = G_a \cdot \alpha \cdot dA_a \quad (3.5)$$

Levando-se a (3.4) à (3.5), esta última ficará:

$$dV = (G_a \cdot r/e) \cdot dA_a \cdot \Delta\phi \quad (3.6)$$

O momento da força dV em relação ao ponto $\underline{0}$, será:

$$dT = r \cdot dV = (G_a \cdot r^2/e) \cdot dA_a \cdot \Delta\phi$$

$$\int_{A_a} dT = T = \int_{A_a} (G_a \cdot r^2/e) \cdot dA_a \cdot \Delta\phi$$

Como o giro $\Delta\phi$ é o mesmo para todos os pontos da área A_a , o momento de torção passa a ter a seguinte expressão:

$$T = (G_a \Delta\phi/e) \cdot \int_{A_a} r^2 \cdot dA_a$$

A expressão $\int_{A_a} r^2 \cdot dA_a = I_p$, chama-se de momento polar de inércia da área A_a , em relação ao ponto $\underline{0}$ (fig.3.3).

Desta forma tem-se:

$$T = (G_a \cdot I_p/e) \cdot \Delta\phi \quad (3.7)$$

O coeficiente de rigidez à torção do elastômero é determinado através da (3.7), fazendo $\Delta\phi = 1$. Chamando de t_a ao coeficiente de rigidez à torção assim determinado, tem-se:

$$t_a = (G_a \cdot I_p/e) \quad (3.8)$$

3.2. Rigidez do pilar

Determinam-se os coeficientes de rigidez dos pilares; à flexão, nas direções dos eixos principais das sec

ções retas dos mesmos e, à torção, dos fustes correspondentes, no plano horizontal.

Aborda-se o caso de pilar único e pórtico plano simples os quais terão aplicação no CAP.IV do presente trabalho.

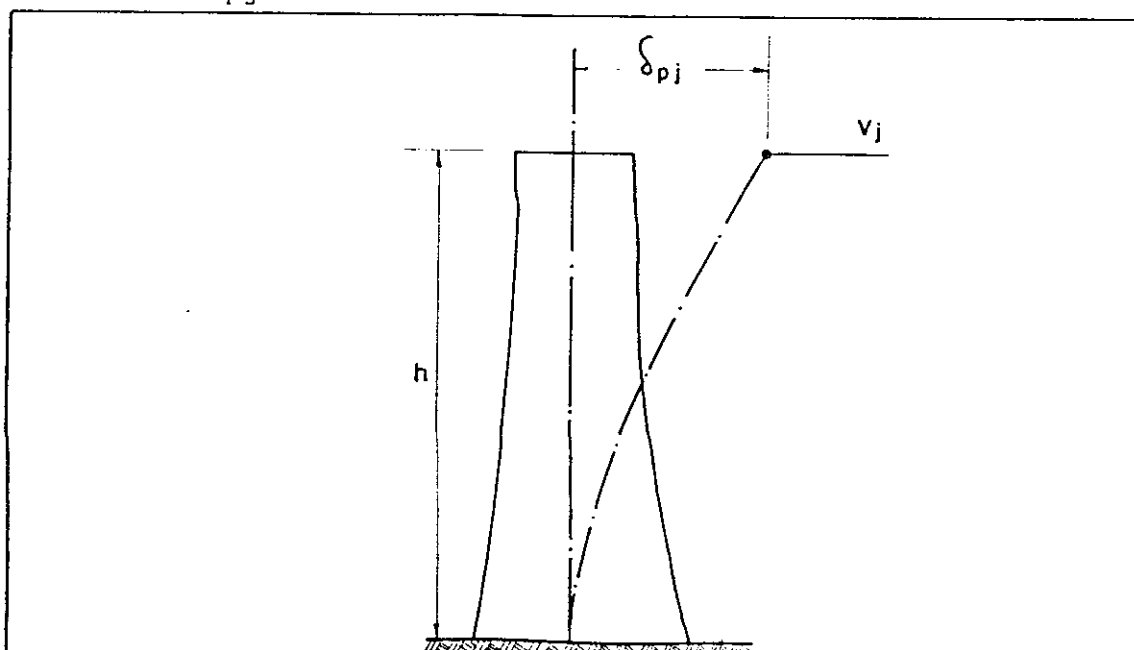
Nos itens que se seguem chamaremos simplesmente de direção 1, a direção principal 1 da secção reta genérica do fuste do pilar e direção 2, a direção principal 2 da secção reta genérica do fuste do pilar considerado.

Chamaremos, simplesmente, de pórtico ao pórtico plano simples referido acima.

Determinam-se a seguir, os coeficientes de rigidez: do fuste do pilar, do solo de fundação e finalmente o global que chamaremos de coeficiente de rigidez global à flexão ou à torção, respectivamente, o qual leva em conta; os aparelhos de apoio, fuste do pilar e fundação correspondente.

3.2.1. Rigidez do pilar à flexão

A figura 3.4, representa um pilar qualquer engastado na base e livre no topo. Ao se aplicar uma força horizontal V_j no seu topo, normal ao seu eixo e na direção j ($j=1$ e $j=2$), surgirá na mesma direção, um deslocamento que chamaremos de δ_{pj} .



+

De acordo com a (3.1), tem-se:

$$V_j = K_{pj} \delta_{pj}$$

Sendo:

V_j = força horizontal na direção j , (1 ou 2);

K_{pj} = coeficiente de rigidez à flexão do fuste na direção j ;

δ_{pj} = deslocamento sofrido pelo topo do fuste devido a ação de V_j .

A determinação do coeficiente de rigidez K_{pj} , pode-se fazer com o auxílio do princípio dos trabalhos virtuais, o qual é encontrado facilmente na literatura sobre o assunto.

Aplicando, portanto, o princípio acima referido à barra da figura 3.4, determina-se o coeficiente de rigidez à flexão, K_{pj} , da mesma na direção j , através da seguinte fórmula:

$$K_{pj} = \frac{E}{\int_0^h \frac{x^2 dx}{I(x)}} \quad (3.9)$$

Sendo:

E = módulo de elasticidade do material;

$I(x)$ = momento de inércia da secção reta do pilar na direção normal à direção do deslocamento.

Quando a variação do momento de inércia não pode ser representada por função conhecida, o K_{pj} poderá ser determinado aproximando o denominador da (3.9), por uma integral numérica (Simpson, etc), bastando para tanto dividir o fuste do pilar em um número n de partes iguais, figura 3.5,

determinando para cada secção reta que contenha um ponto da divisão, os valores da expressão $x^2/I(x)$, empregando-se, em seguida, a integral numérica mais conveniente para calcular o denominador da (3.9).

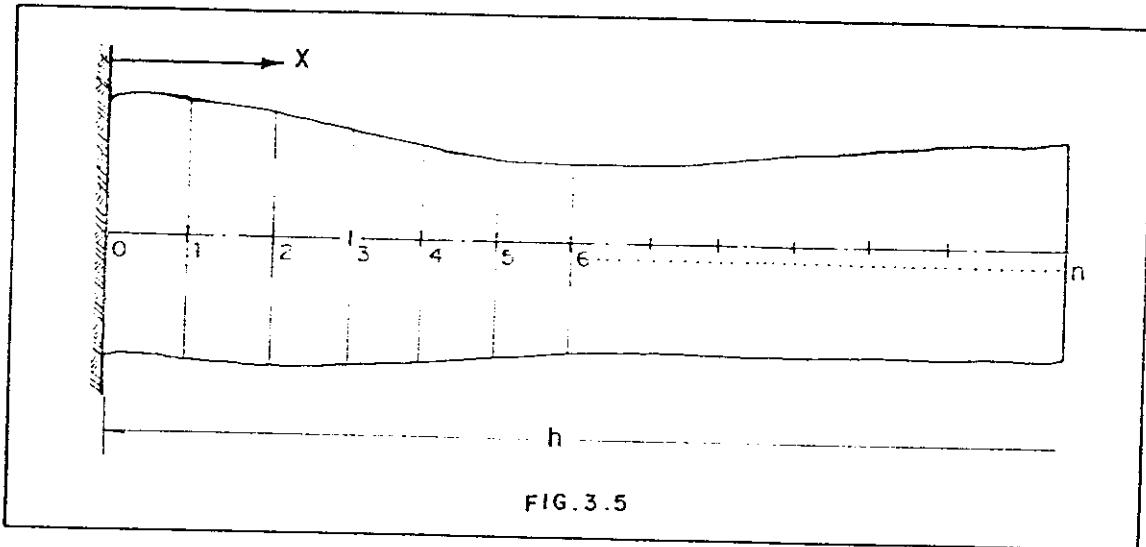


FIG.3.5

Uma expressão muito usada na resolução de integrais desse tipo, é a dada por uma somatória no mesmo intervalo, a qual apresenta-se a seguir:

$$\int_0^h f(x) dx \approx \sum_0^n C_n, \text{ com } f(x) = x^2/I(x)$$

Tendo C_n , as seguintes expressões:

a) Nó de bordo:

$$C_1 = \frac{\Delta x}{12} \cdot \frac{7 \cdot f(x_1) + 6 \cdot f(x_2) - f(x_3)}{2} \quad \text{nó inicial} \quad (3.10)$$

$$C_2 = \frac{\Delta x}{12} \cdot \frac{7 \cdot f(x_n) + 6 \cdot f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{2} \quad \text{nó final}$$

b) Nó intermediário:

$$C_i = \frac{\Delta x}{12} \cdot \left[f(x_{i-1}) + 10 \cdot f(x_i) + f(x_{i+1}) \right] \quad (3.11)$$

Com $f(x)$ dado por $f(x) = x^2/I(x)$.

Sendo:

$\Delta x = h/n$;

n = número de divisões a que foi submetido o eixo da barra;

h = comprimento da barra;

$I(x)$ = momento de inércia da secção reta do fuste em relação ao eixo normal ao considerado.

Se o fuste do pilar tiver secção constante o valor do coeficiente de rigidez será:

$$K_{pj} = 3.E.I/h^3 \quad (3.12)$$

3.2.2. Rigidez à torção do fuste

Para a torção vale ainda a (3.1), sendo que a constante será designada por t_p e o deslocamento, agora, é angular e designa-se por $\Delta\phi$.

Ao se aplicar um momento torçor T , no topo do pilar e no plano horizontal, o fuste do mesmo sofre uma torção em torno do seu eixo provocando um deslocamento angular $\Delta\phi$, relativo da secção reta do topo em relação a secção reta do pé do referido fuste.

Tem-se, portanto, a expressão do momento torçor T , no topo do pilar:

$$T = t_p \cdot \Delta\phi.$$

A expressão de t_p é dado pela fórmula, conhecida, da resistência dos materiais:

$$t_p = G.I_t/h \quad (3.13)$$

Sendo:

G = módulo de elasticidade transversal do material;

I_t = momento de inércia à torção o qual, para secções retangulares, é dado pela expressão: βbc^3 com $b > c$ e com o coeficiente β dado na tabela 3.1.

b/c	1,00	1,500	1,750	2,000	2,500	3,000	4,000	6,000	8,000	10,00
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,333

Tabela 3.1

3.3. RIGIDEZ DA FUNDAÇÃO

3.3.1. Rigidez da fundação rasa

No caso de pilares em fundação direta em terrenos compressíveis, deve-se levar em conta a influência dos recalques na distribuição dos esforços horizontais em infraestruturas de pontes.

As tensões que se desenvolvem no terreno sob a sapata, são supostas proporcionais aos recalques respectivos. Seja, então, a tensão dada pela expressão seguinte:

$$\sigma = K_r \cdot z \quad (3.14)$$

Sendo:

σ = tensão no terreno sob a sapata;

z = recalque do terreno sob a sapata;

K_r = coeficiente de recalque vertical do terreno de fundação.

Para efeito de cálculo da rigidez da fundação, consideram-se a sapata e o fuste do pilar como rígidos, figura 3.6.

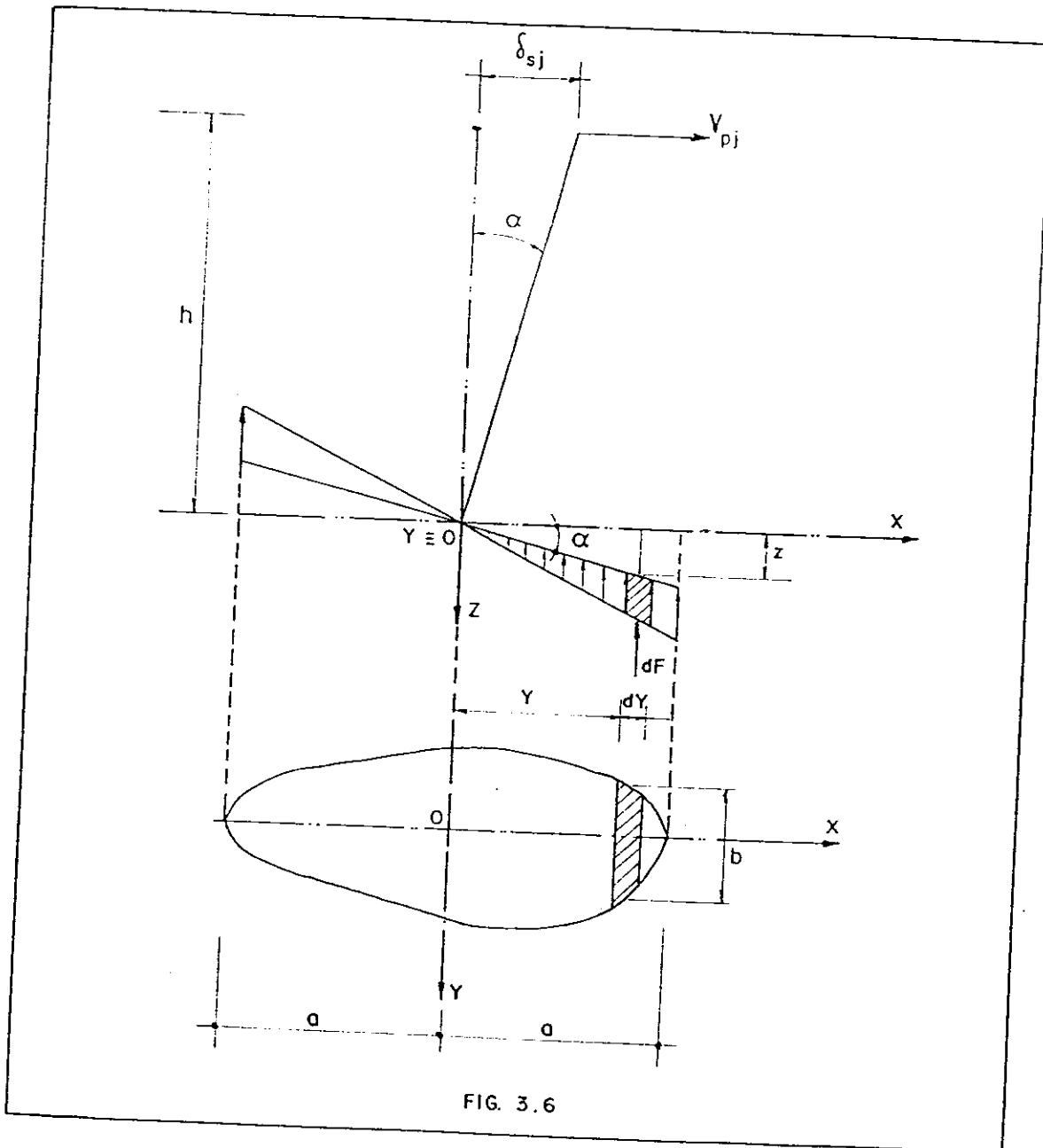


FIG. 3.6

*

A condição de equilíbrio dos momentos das forças dF em relação ao centro O da área da sapata em contacto com o solo de fundação, fig. 3.6, fornece as seguintes relações:

$$h \cdot V_{pj} = \int_A y \cdot dF \quad (3.15)$$

$$\text{Mas } dF = (b \cdot dy) \cdot K_r \cdot z \quad (3.16)$$

Se levarmos a (3.16) à (3.15), esta última ficará:

$$h \cdot V_{pj} = \int_A y \cdot (b \cdot dy) \cdot K_r \cdot z$$

Ou

$$h \cdot V_{pj} = K_r \int_A y \cdot (b \cdot dy) \cdot z \quad (3.17)$$

Da figura 3.6 tira-se a relação entre z e y .

$z/y = \delta_{sj}/h \therefore z = (\delta_{sj}/h) \cdot y$ a qual levada à (3.17), torna esta em:

$$h \cdot V_{pj} = (K_r \cdot \delta_{sj}/h) \cdot \int_A y^2 \cdot (b \cdot dy)$$

Como $b \cdot dy = dA$ (elemento de área da base da fundação do pilar), a integral ficará:

$$\int_A y^2 \cdot (b \cdot dy) = \int_A y^2 \cdot dA = I_y$$

Tem-se:

$$h \cdot V_{pj} = K_r \cdot \delta_{sj} \cdot I_y / h \quad \therefore V_{pj} = (K_r \cdot I_y / h^2) \cdot \delta_{sj} \quad \dots (3.18)$$

Onde I_y = momento de inércia da área da base da fundação do pilar em relação a y .

A expressão (3.18) comparada com a (3.1), fornece o coeficiente de rigidez da fundação direta (K_{sj}):

$$K_{sj} = K_r \cdot I_y / h^2 \quad (3.19)$$

Del Nero, [16], adota os seguintes valores para K_r :

Solo	K_r (tf/m ³)
Turfa.....	500 a 1.000
Aterro de argila ou de areia.....	1.000 a 1.500
Argila mole.....	1.500 a 3.000
Argila média.....	3.000 a 5.000
Argila média a dura.....	5.000 a 8.000
Argila dura.....	8.000 a 10.000
Areia fina.....	8.000 a 10.000
Areia média.....	10.000 a 12.000
Pedregulho.....	7.000 a 12.000
Pedregulho bem graduado.....	12.000 a 15.000
Rocha alterada.....	9.000 a 15.000
Rocha viva.....	15.000 a 20.000

3.3.2. Rigidez da fundação profunda

Quando a fundação é profunda, aconselha-se, no cálculo dos esforços horizontais, levar em conta a resistência do solo sobre as partes laterais da fundação.

★

Para efeito de cálculo da resistênc̃ia que o solo oferece ao movimento da fundaçã̃o do pilar, sã̃o feitas as seguintes hipóteses, [4]:

- a) O solo é considerado como meio elástico deformável, com coeficiente de recalque, K_r , que cresce proporcionalmente com a profundidade, e em todos os níveis a compressibilidade do solo sob a ação das pressões horizontais e verticais é caracterizada por um só e mesmo coeficiente de recalque;
- b) Despreza-se as forças de atrito entre o solo e a fundaçã̃o;
- c) A rigidez da fundaçã̃o é infinitamente grande em relação à rigidez do solo.

A pressão do solo sobre a superfície lateral da fundaçã̃o é determinada na hipótese de uma superfície de escorregamento plana de largura teórica b_p , [4], igual a:

$$b_p = b(1 + 1/b)K_\phi \quad (3.20)$$

Sendo:

b = largura da projeção da fundaçã̃o sobre o plano perpendicular ao plano do esforço;

$1 + 1/b$ = Coeficiente de transformação da forma tridimensional da superfície lateral para uma superfície plana, [4];

K_ϕ = Coeficiente de forma que leva em conta a substituição de uma fundaçã̃o de secção circular para uma fundaçã̃o de secção quadrada. De ensaios resulta $K_\phi = 0,9$.

Seja, então, uma fundaçã̃o profunda (estacas, tubulões, etc) figura 3.7, submetida a ação de uma força horizontal V_j .

+

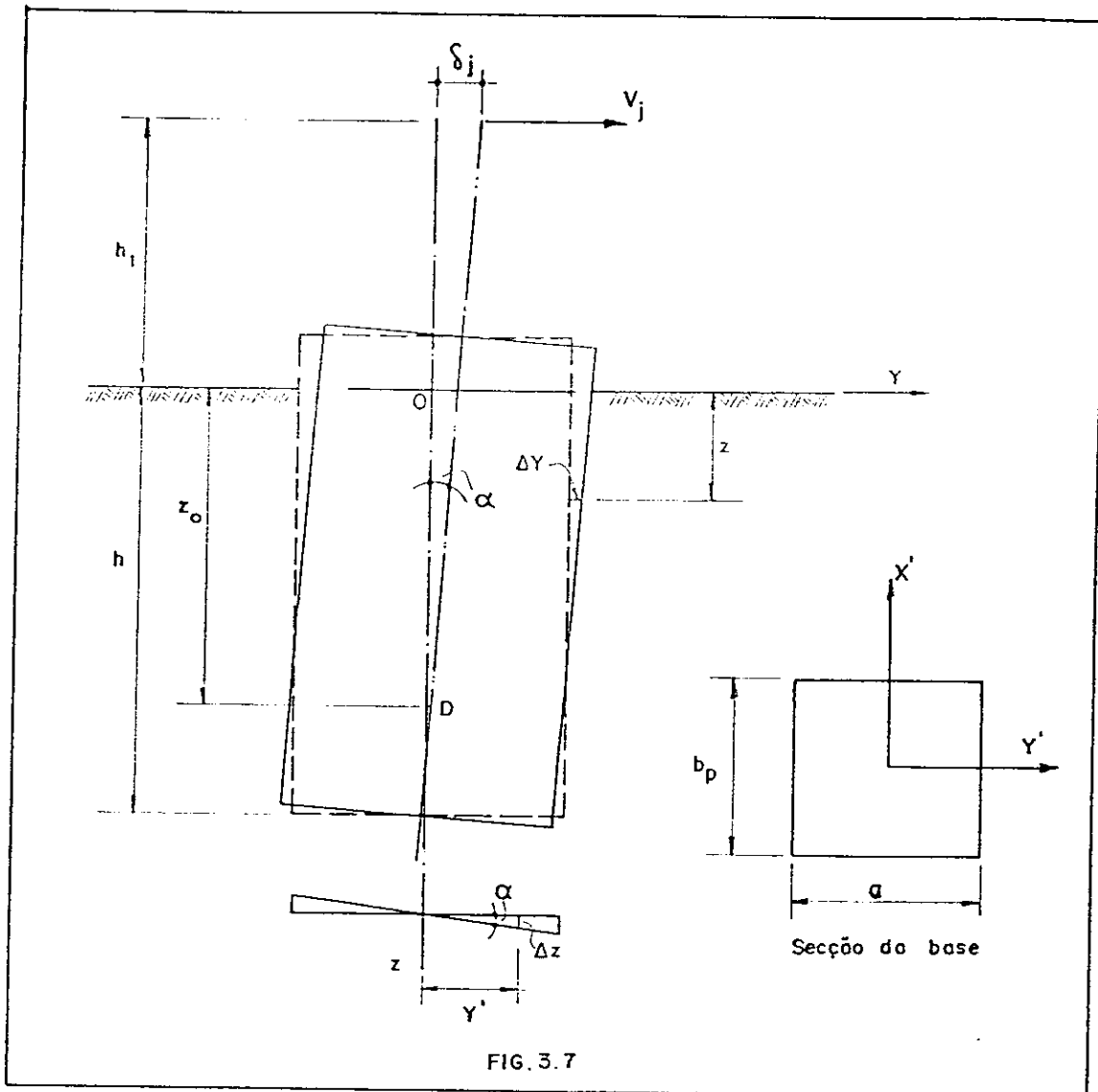


FIG. 3.7

A figura 3.8, representa o diagrama de pressões que o solo exerce sobre as partes laterais e base da fundação profunda sob a ação da força V_j .

A fundação, por ser considerada rígida, sofre uma rotação α em torno do ponto D , quando age uma força V_j , horizontal, a uma distância $(h_1 + h)$ da base da mesma. O deslocamento horizontal Δy da fundação e a tensão σ_y , de contacto correspondente, a uma profundidade z abaixo da superfície do solo, são dados pelas seguintes expressões:

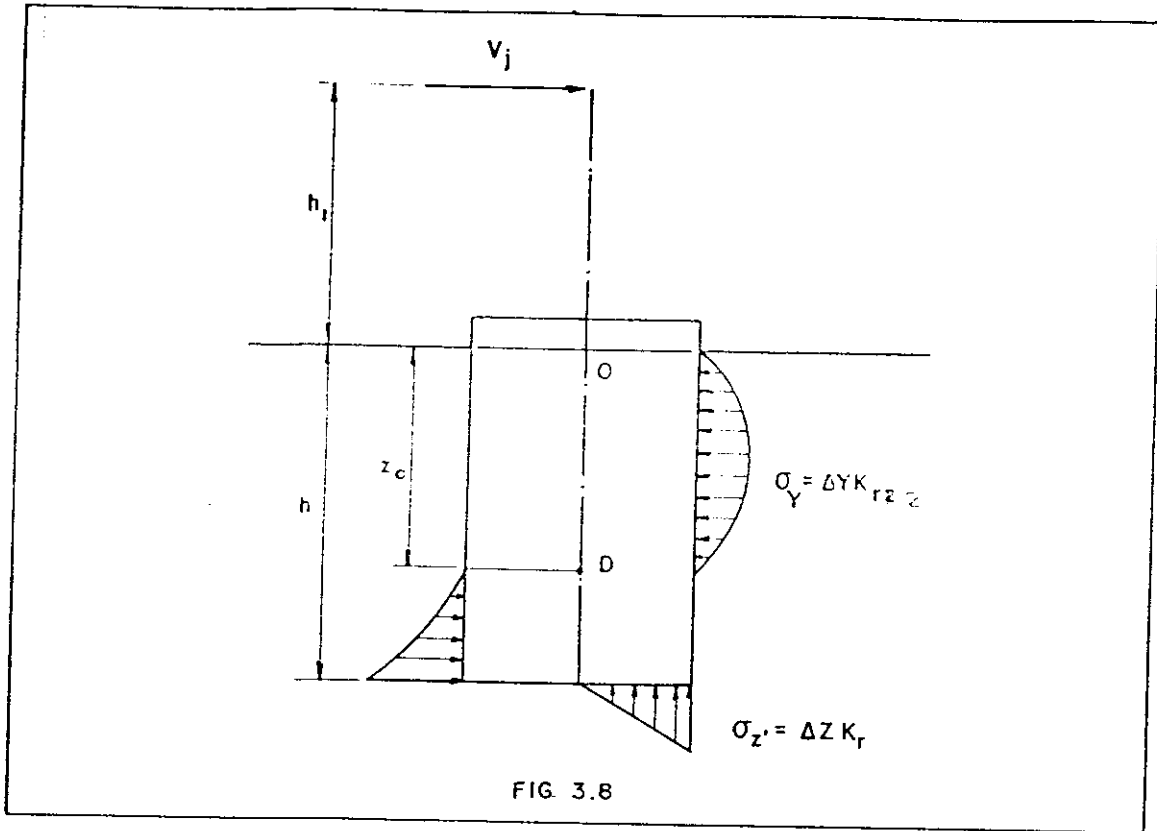


FIG. 3.8

$$\Delta y = (z_o - z) \operatorname{tg} \alpha \quad (3.21)$$

$$\sigma_y = \Delta y K_{rz} = (z_o - z) \operatorname{tg} \alpha K_{rh} z/h \quad (3.22)$$

Sendo:

K_{rh} = coeficiente de recalque horizontal do solo na cota da base da fundação;

K_{rz} = coeficiente de recalque do solo a uma profundidade z , abaixo da superfície do solo ($K_{rz} = K_{rh} z/h$, devido a linearidade assumida na hipótese).

A tensão máxima vertical, $\sigma_{z, \text{máx}}$, que ocorre na cota da base da fundação tem a seguinte expressão:

$$\sigma_{z, \text{máx}} = (a/2) K_r \quad (3.23)$$

*

Sendo:

a = dimensão da secção da base na direcção j ;

K_R = coeficiente de recalque vertical do solo na base da fundação.

Se M é o momento resultante provocado pelas tensões $\sigma_{z'}$, na base da fundação e W_b o momento resistente da secção da mesma base em relação ao eixo x ; a máxima tensão $\sigma_{z'max}$ pode ser calculada, também, pela seguinte expressão:

$$\sigma_{z'max} = M/W_b \quad \therefore \quad M = W_b \sigma_{z'max} \quad (3.24)$$

As incógnitas; z_o e $tg\alpha$, podem ser determinadas da condição de equilíbrio estático da fundação:

$$\Sigma F_y = 0 \quad e \quad \Sigma M_o = 0$$

Da primeira tem-se:

$$\Sigma F_y = V_j - \int_0^h \sigma_y b_p dz = 0$$

Substituindo o valor da (3.22) na equação acima, tem-se:

$$V_j - \int_0^h (z_o - z) dz tg\alpha K_{rh} z/h = 0 \quad (3.25)$$

Da segunda tem-se:

$$\Sigma M_o = V_j h_l + \int_0^h \sigma_y b_p z dz - M = 0$$

Substituindo nesta última equação os valores de σ_y e M dados pelas; (3.22) e (3.24), tem-se:

†

$$V_j h_1 + \int_0^h (z_0 - z) \operatorname{tg} \alpha K_{rh} (z/h) b_p z dz - W_b \sigma'_b z_{\max} \quad (3.26)$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas; (3.25) e (3.26), e fazendo; $K_{rh}/K_r = \beta$, tem-se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12 \beta V_j (2h + 3h_1)}{K_{rh} (\beta b_p h^3 + 18 a W_b)} \quad (3.27)$$

$$z_0 = \frac{b_p [h^2 (3h + 4h_1) + 6 a W_b]}{2 \beta b_p h (3h_1 + 2h)} \quad (3.28)$$

A relação entre força e deslocamento correspondente, é tirada da figura 3.7.

Supondo a fundação como rígida, hipótese simplificadora, a relação entre o deslocamento δ_j , na direção j e a força V_j na mesma direção tira-se da seguinte equação:

$$\delta_j / (h_1 + z_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Logo:

$$\delta_j = (h_1 + z_0) \operatorname{tg} \alpha$$

Substituindo nesta última equação, os valores dados pelas; (3.27) e (3.28), tem-se:

$$V_j = \frac{K_r (b_p h^3 + 18 a W_b / \beta)}{12 h_1 (3 h_1 + 4 h) + 18 h^2 + 36 a W_b / \beta b_p h} \delta_j \quad (3.29)$$

Comparando a (3.29) com a (3.1), tem-se:

$$K_{sj} = \frac{K_r (b_p h^3 + 18 a W_b / \beta)}{12 h_1 (3 h_1 + 4 h) + 18 h^2 + 36 a W_b / \beta b_p h} \quad (3.30)$$

que é o coeficiente de rigidez da fundação profunda em relação ao eixo j .

3.4. Rigidez global

O cálculo do coeficiente de rigidez global do pilar é feito provocando-se um deslocamento unitário na direção da força horizontal que está aplicada no topo do pilar na direção j . Desta forma surgem deslocamentos nos elementos que compõem a infraestrutura: aparelho de apoio, fuste do pilar e fundação.

3.4.1. Rigidez global à flexão

A figura 3.9, mostra os deslocamentos sofridos por cada um dos elementos da infraestrutura acima mencionados.

Sejam, então, as parcelas de deslocamentos nos respectivos elementos citados anteriormente:

δ_{aij} = parcela do deslocamento referente ao deslocamento relativo entre as faces superior e inferior do aparelho de apoio do pilar genérico i ;

δ_{pij} = parcela do deslocamento referente à flexão do fuste do pilar genérico i , na direção j ;

δ_{sij} = parcela do deslocamento referente ao recalque da fundação do pilar genérico i , na direção principal j ;

($i = 1, \dots, n$) = índice que indica a localização do pilar;

($j = 1, 2$) = índice que indica a direção principal da área da secção reta genérica do fuste do pilar.

Da figura 3.9, tiram-se as seguintes relações:

$$\delta_{ij} = \delta_{aij} + \delta_{pij} + \delta_{sij} \quad (3.31)$$

$\delta_{ij} = V_{ij}/K_{ij}$ K_{ij} = coeficiente de rigidez global do pilar genérico i , na direção j ;

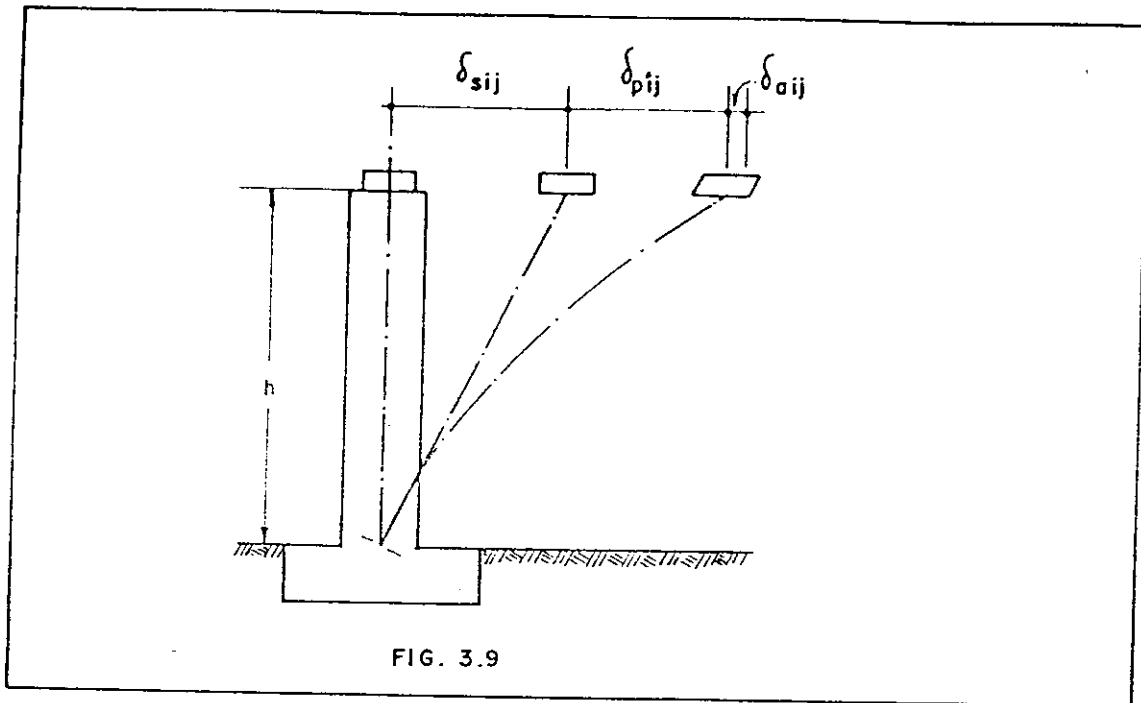


FIG. 3.9

$$\delta_{aij} = V_{pj} / K_{aij}$$

K_{aij} = coeficiente de rigidez do aparelho de apoio do pilar genérico i , na direção j ;

$$\delta_{sij} = V_{pj} / K_{sij}$$

K_{sij} = coeficiente de rigidez da fundação do pilar genérico i , na direção j .

Levando os valores das parcelas dos deslocamentos dados acima à expressão (3.31), tem-se:

$$V_{pj} / K_{ij} = V_{pj} / K_{aij} + V_{pj} / K_{pij} + V_{pj} / K_{sij}$$

Cancelando V_{pj} em ambos os membros da equação acima tem-se a expressão que dá o coeficiente de rigidez global do pilar.

$$1/K_{ij} = 1/K_{aij} + 1/K_{pij} + 1/K_{sij} \quad (3.32)$$

*

Sendo:

K_{aij} = dado pela expressão (3.3)

K_{pij} = dado pela expressão (3.9)

K_{sij} = dado pela expressão (3.19) ou (3.30)

4.2. Rigidez global à torção

A figura 3.10, representa a secção do topo do pilar sujeito a um momento torçor T_i . Sob a ação desse momento torçor, a secção superior do elastômero, sofre um giro ϕ_{ai} relativo em relação a secção da face inferior. Ainda sob o mesmo efeito, o fuste do pilar sofre uma torção, onde a secção reta do topo sofre um deslocamento angular $\Delta\phi_{pi}$, em relação a secção reta do pé do referido fuste.

Da figura 3.10, tira-se a seguinte relação:

$$\Delta\phi_i = \Delta\phi_{ai} + \Delta\phi_{pi} \quad (3.33)$$

Os deslocamentos angulares relacionados com o momento torçor T_i , aplicado, são dados pelas seguintes relações:

$\Delta\phi_i = T_i/t_i$, $\Delta\phi_i$ = deslocamento angular relativo entre a face superior do aparelho de apoio e secção do pé do pilar genérico i.

$\Delta\phi_{ai} = T_i/t_{ai}$, $\Delta\phi_{ai}$ = deslocamento angular relativo da face superior em relação à face inferior do aparelho de apoio do pilar genérico i.

$\Delta\phi_{pi} = T_i/t_{pi}$, $\Delta\phi_{pi}$ = deslocamento angular relativo entre a secção do topo e a secção do pé do fuste do pilar genérico i.

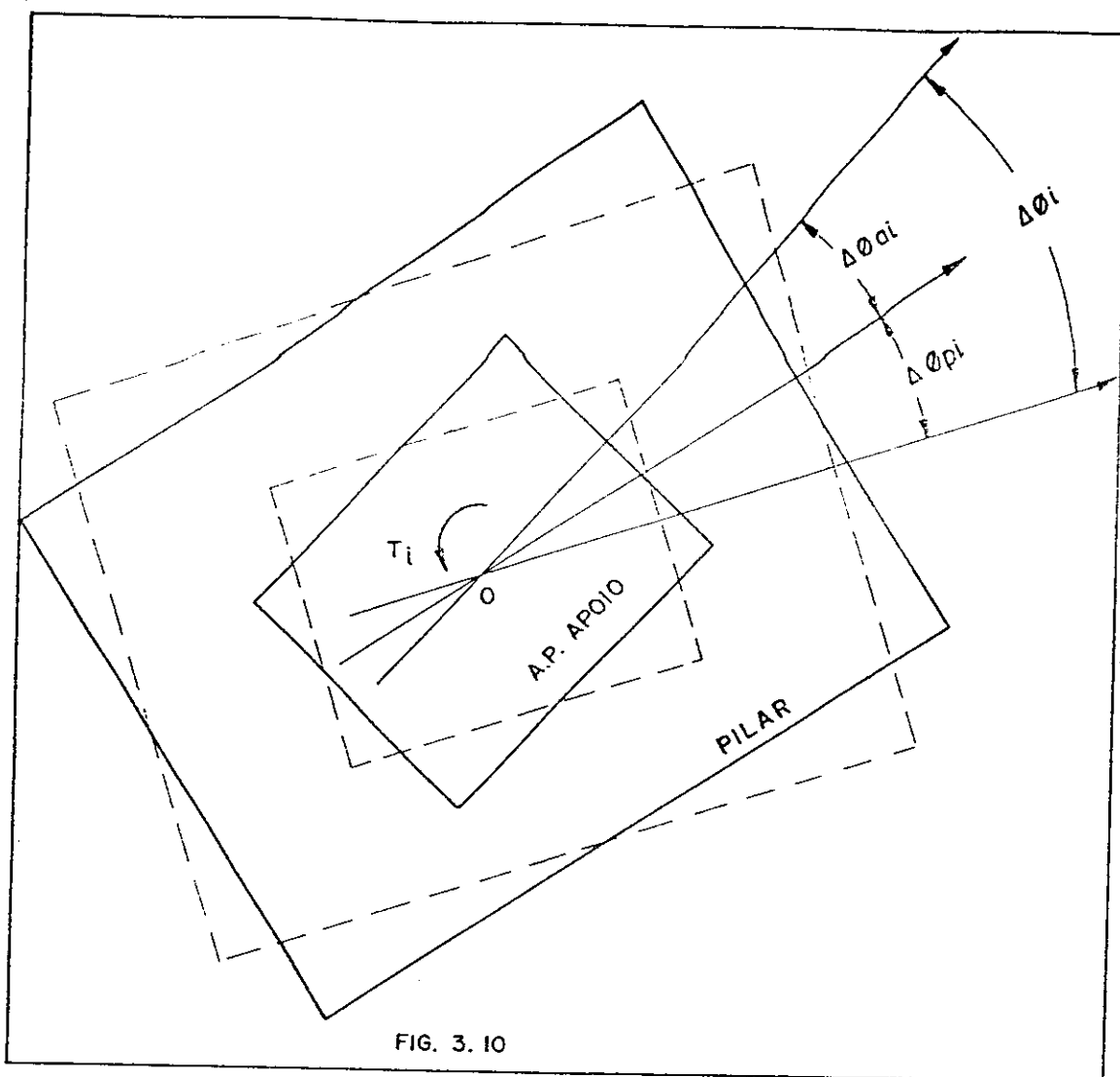


FIG. 3.10

Da expressão (3.33), substituindo-se os valores dos deslocamentos angulares dado acima tem-se:

$$T_i/t_i = T_i/t_{ai} + T_i/t_{pi}$$

Cancelando-se T_i nos dois membros dessa última equação, tem-se:

$$1/t_i = 1/t_{ai} + 1/t_{pi} \quad (3.34)$$

Sendo:

t_{ai} = dado pela expressão (3.8)

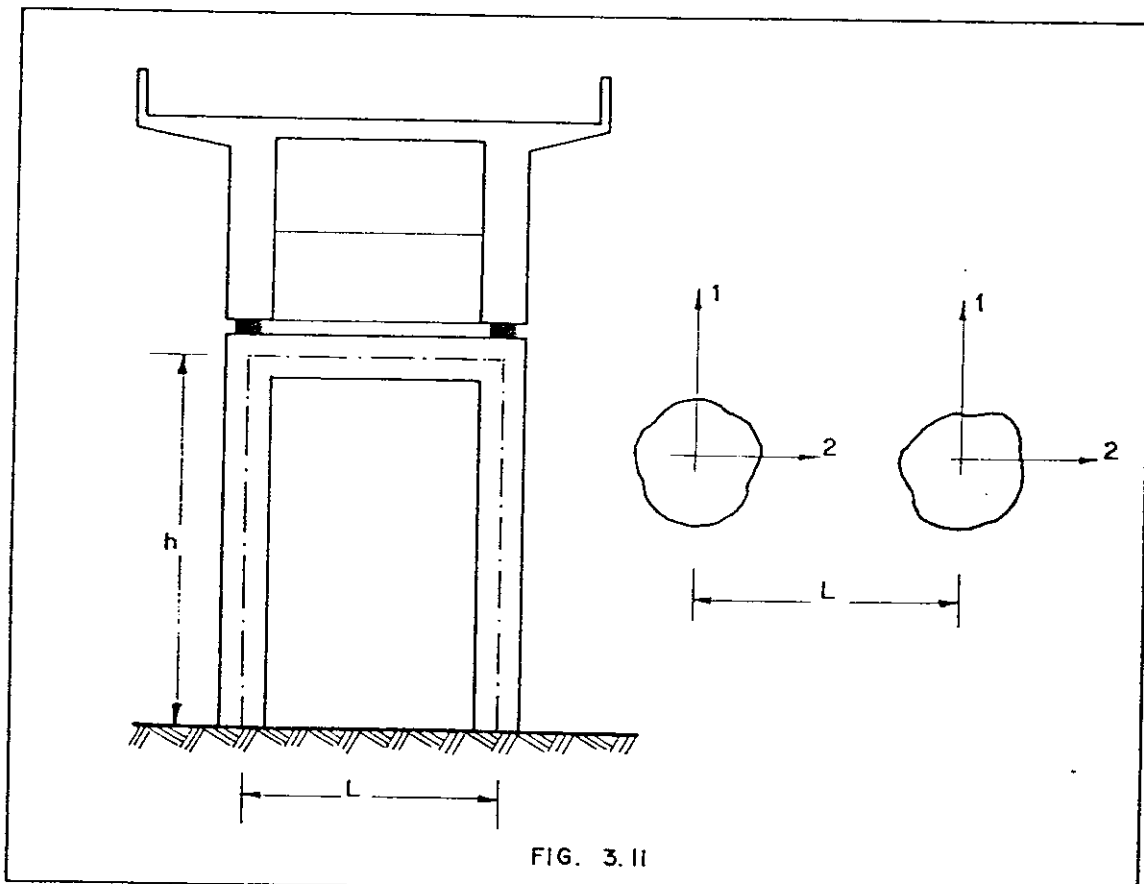
t_{pi} = dado pela expressão (3.13)

+

3.5. Aplicação

Analisaremos um pórtico simples plano o qual chamaremos aqui simplesmente de pórtico, figura 3.11. O mesmo é composto de duas colunas contraventadas nos seus topos por uma travessa.

Para a figura acima referida, apresenta-se num corte A-A' as direções principais $\underline{1}$ e $\underline{2}$, sendo a primeira a que corresponde a direção normal ao plano do pórtico, enquanto a segunda representa a direção, normal à primeira, no plano do pórtico, coincidente com a principal 2 da secção reta do fuste de uma das colunas.



A) Rigidez global à flexão

O coeficiente de rigidez global à flexão do pórtico na direção 1, será o dobro do coeficiente de rigidez de uma das colunas na direção correspondente, considerando que as colunas sejam idênticas entre si. Desta forma tem-se:

$$1/K_{i1} = 1/K_{ai} + 1/2.K_{pi1} + 1/K_{si1} \quad (3.35)$$

Sendo:

K_{i1} = coeficiente de rigidez do pórtico genérico i na direção 1;

K_{ai} = dado pela expressão (3.3);

K_{pi1} = dado pela expressão (3.9);

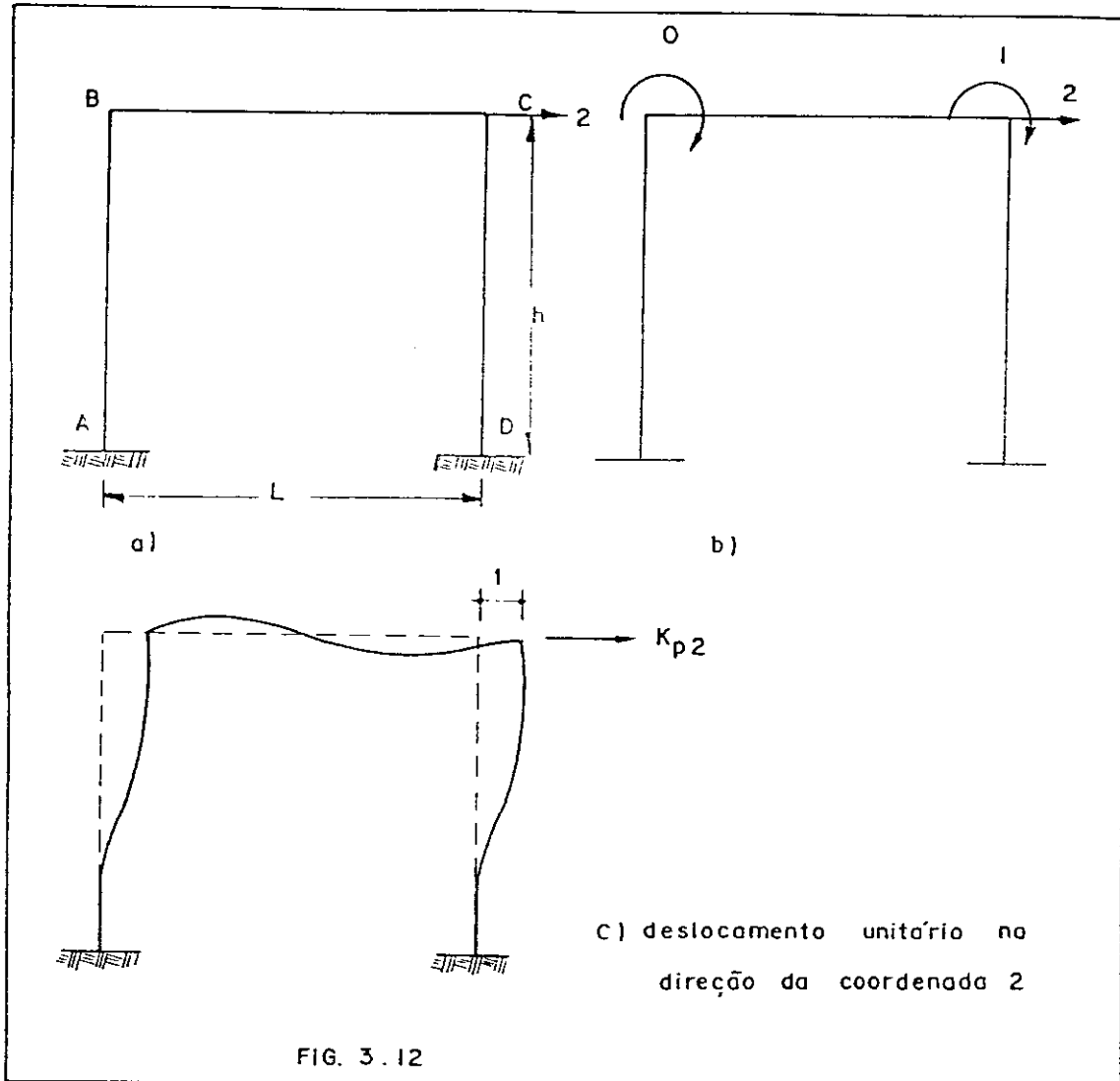
K_{si1} = dado pela expressão (3.19) ou (3.30)

Para se calcular o coeficiente de rigidez global à flexão do pórtico na direção 2, empregam-se os recursos da análise matricial das estruturas.

Seja, na figura 3.12a, o pórtico genérico i , representado pelos eixos das colunas e travessa. Na figura 3.12c, representa-se o mesmo pórtico sujeito a um deslocamento unitário na direção 2.

Para o cálculo do coeficiente de rigidez do pórtico na direção 2, figura 3.12a, determina-se a força necessária para provocar um deslocamento unitário na mesma direção, figura 3.12c.

No sistema de coordenadas indicada na primeira figura, a determinação da rigidez do pórtico se torna bastante complexa, no entanto o problema se simplifica bastante se adotarmos um sistema de três coordenadas e relativa ao mesmo sistema se determina a matriz de rigidez, reduzindo-se em seguida para o sistema de uma só coordenada.



Seja, portanto, o sistema de três coordenadas, figura 3.12b, para o qual se deseja determinar a matriz de rigidez do pórtico.

A equação que transforma os deslocamentos, $\{\delta_i\}$, impostos nas coordenadas em esforços, $\{V_i\}$, correspondentes é a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$



Para se determinar a matriz de rigidez do pórtico relativa ao sistema indicado na figura 3.12b, aplica-se deslocamento unitário numa só coordenada mantendo as demais presas, calculando-se, desta forma, as forças que surgem nas direções das coordenadas.

Na expressão (3.36) os K_{ij} , são as forças que surgem nas coordenadas i , devido a um deslocamento unitário só na coordenada j .

A figura 3.13, representa o deslocamento unitário na coordenada j enquanto se mantêm deslocamentos nulos nas demais.

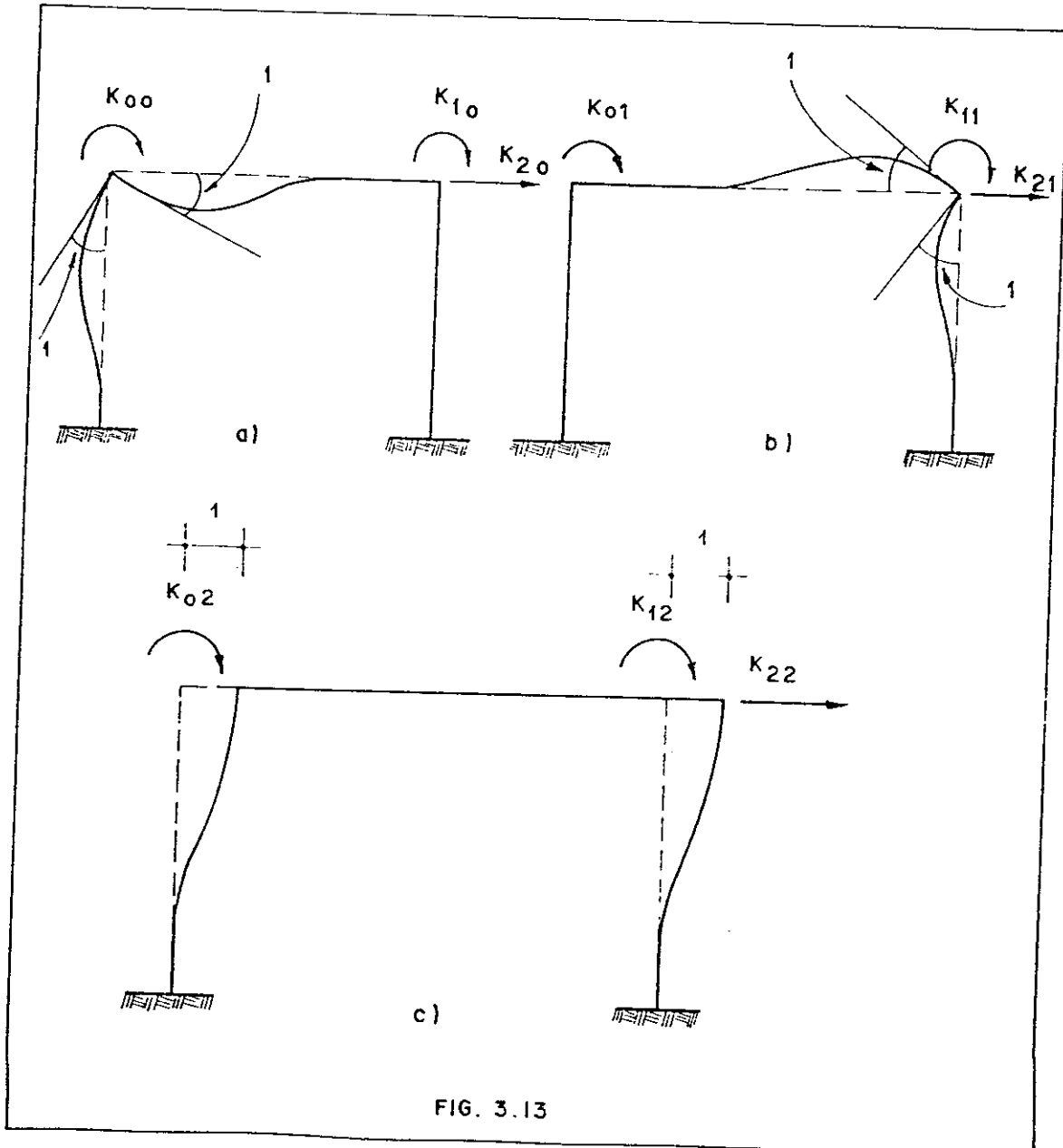


FIG. 3.13

Na figura 3.13a é dado um deslocamento unitário na direção da coordenada $\underline{0}$, mantendo-se as demais com deslocamentos nulos.

Na figura 3.13b é dado um deslocamento unitário na direção da coordenada $\underline{1}$, mantendo-se nos demais, deslocamentos nulos.

Na figura 3.13c é dado um deslocamento unitário na direção da coordenada $\underline{2}$, mantendo-se as demais com deslocamentos nulos.

Os valores dos k_{ij} , para o caso de barras de inércia constante, encontram-se facilmente na literatura sobre o assunto, podendo também, os mesmos serem deduzidos com o auxílio do princípio dos trabalhos virtuais.

Rubstain [13], apresenta os seguintes valores para os k_{ij} no caso de pórtico formado por barras de inércia constante:

$$\begin{aligned}k_{00} &= 4EI_1/h + 4EI_2/L \\k_{10} &= k_{01} = 2EI_2/L \\k_{20} &= k_{02} = -6EI_1/h^2 \\k_{21} &= k_{12} = -6EI_1/h^2 \\k_{11} &= 4EI_2/L + 4EI_1/h \\k_{22} &= 24EI_1/h^3\end{aligned}\tag{3.37}$$

A transformação do sistema de três coordenadas, para o de uma é feita da seguinte forma:

Fazendo:

$$\left[K_{00} \right] = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{bmatrix}, \quad \left[K_{01} \right] = \begin{bmatrix} k_{02} \\ k_{12} \end{bmatrix}, \quad \left[K_{21} \right] = \begin{bmatrix} k_{20} & k_{21} \end{bmatrix}$$

★

$$\left[K_{22} \right] = \left[k_{22} \right] \text{ e } \begin{Bmatrix} v_o \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

Tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \text{ que resolvendo fica:}$$

$$\{0\} = \left[K_{11} \right] \begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_1 \end{Bmatrix} + \left[K_{12} \right] \delta_2 \quad (3.38)$$

$$\{v_2\} = \left[K_{21} \right] \begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_1 \end{Bmatrix} + \left[K_{22} \right] \delta_2 \quad (3.39)$$

Da (54) tira-se:

$$\begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_1 \end{Bmatrix} = - \left[K_{11} \right]^{-1} \left[K_{12} \right] \delta_2$$

Levando esta última equação ã (3.39), tem-se:

$$v_2 = \left[K_{22} \right] - \left[K_{21} \right] \left[K_{11} \right]^{-1} \left[K_{12} \right] \delta_2 \quad (3.40)$$

Da expressão (3.39) tira-se o coeficiente de rigidez ã flexão do pórtico na direção 2:

$$K_{pi2}^* = \left[K_{11} \right] - \left[K_{1o} \right] \left[K_{oo} \right]^{-1} \left[K_{o1} \right] \quad (3.41)$$

Onde os K_{ij} , são os dados anteriormente e $\left[K_{oo} \right]^{-1}$ é dado pela seguinte expressão:

$$\left[K_{oo} \right]^{-1} = \frac{1}{(k_{oo} \cdot k_{11} - k_{o1} \cdot k_{1o})} \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{1o} \\ -k_{o1} & k_{oo} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

+

Se na (3.41) substituem-se os valores dos k_{ij} , dados pelas (3.37) o coeficiente de rigidez do pórtico ficará:

$$K_{pi2}^* = \frac{12EI_1 \left[(6I_2/I_1)(h/L)+1 \right]}{h^3 (3I_2/I_1)(h/L)+2} \quad (3.43)$$

O coeficiente de rigidez global será o dado pela (3.32), observando que no lugar de K_{pij} usa-se o K_{pi2}^* dado pela (3.43).

B) Rigidez global à torção

Para calcular o coeficiente de rigidez global do pórtico à torção, FREITAS, [12], divide o problema da seguinte forma:

- Flexão do fuste das colunas;
- Flexão da travessa;
- Torção do fuste da coluna;

Para o cálculo da flexão das colunas, imagine-se a travessa com liberdade de giro nos topos das colunas, figura 3.14.

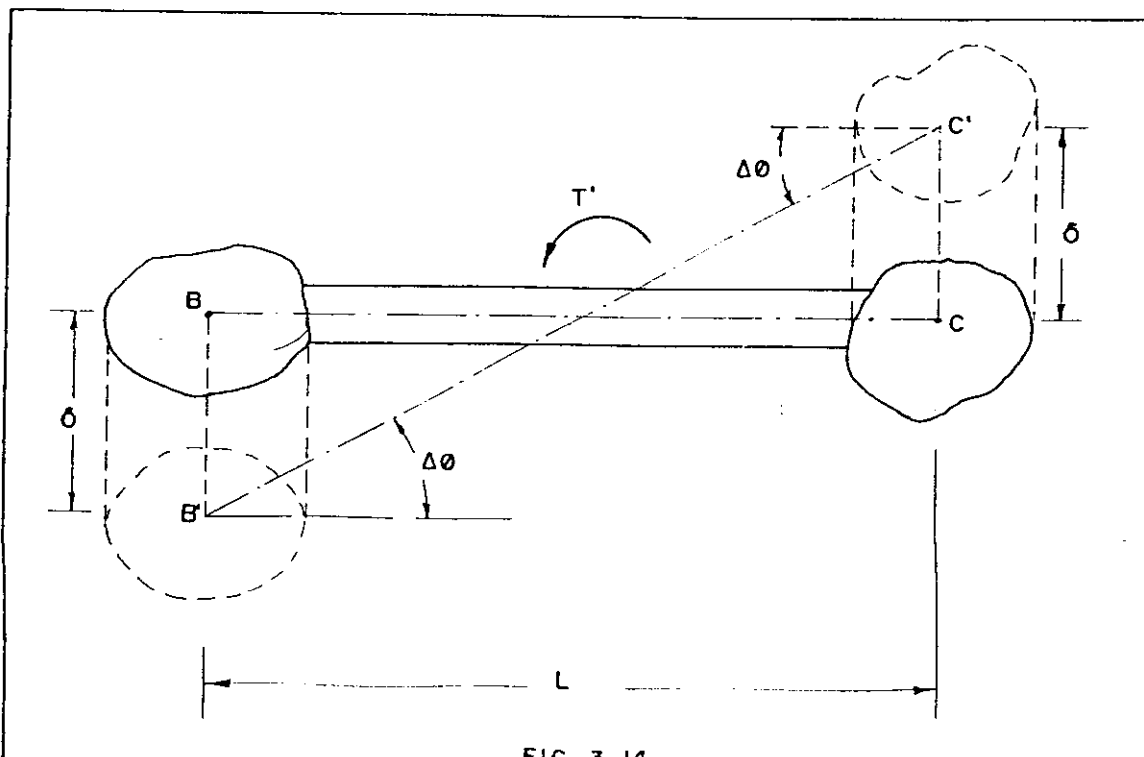


FIG 3.14

Sendo:

ϕ = ângulo de giro do pórtico;

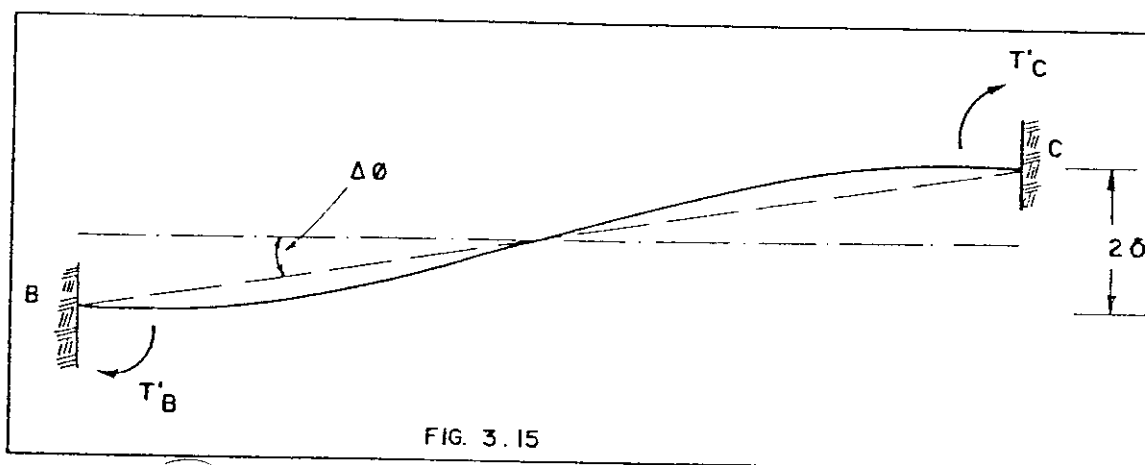
δ = deformação por flexão do fuste da coluna.

Devido aos deslocamentos dos topos dos fustes das colunas tem-se:

$$V_p = E_{pil} \cdot \delta, \quad T' = V_p \cdot L = K_{pil} \cdot L.$$

Como $\delta = (L/2) \cdot \Delta\phi$, resulta; $T' = (K_{pil} \cdot L^2 / 2) \cdot \Delta\phi$
..... (3.44)

Para o cálculo da flexão da travessa imagine-se a mesma representada pelo seu eixo, na figura 3.15.



A situação da figura 3.15, correspondente ao recalque vertical de um apoio em relação ao outro de 2δ , é a relativa a somente a flexão da travessa mantendo-se engastamento perfeito nos topos dos pilares com estes na posição da figura 3.14.

Os momentos de engastamento nos topos B e C são dados pelas expressões:

$$T'_B = (12 \cdot E \cdot I / L^2) \cdot \delta, \quad T'_C = (12 \cdot E \cdot I / L^2) \cdot \delta$$

+

Como $\delta = (L/2) \cdot \Delta\phi$ tem-se:

$$T_B^I = (6 \cdot E \cdot I / L) \cdot \Delta\phi \quad (3.45)$$

$$T_C^I = (6 \cdot E \cdot I / L) \cdot \Delta\phi \quad (3.46)$$

Finalmente a contribuição da torção do fuste das colunas. A figura 3.16 representa a rotação $\bar{\theta}$ das seções dos fustes das colunas do pórtico em relação às seções dos pés dos mesmos fustes.

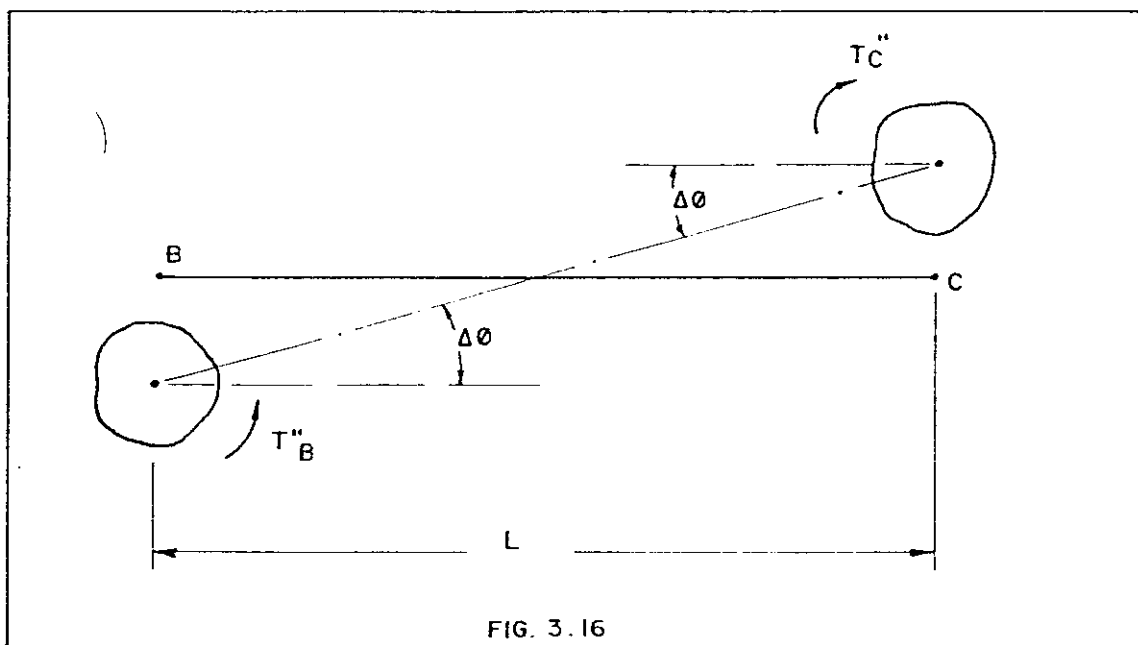


FIG. 3.16

Por ser as duas colunas de mesmo formato geométrico, tem-se:

$$T_B'' = T_C'' = (G \cdot I_t / h) \cdot \Delta\phi \quad (3.47)$$

O coeficiente de rigidez global à torção do pórtico, é calculado da condição de equilíbrio entre o momento torçor e os momentos calculados em cada etapa; T^I , T_B'' e T_C'' , T_B^I , T_C^I .

+

$$T_i = t_{pi}^* \cdot \Delta\phi = (K_{pil} \cdot L^2 / 2 + 12 \cdot E \cdot I / L + 2 \cdot C \cdot I_t / h) \cdot \Delta\phi$$

Fazendo $\Delta\phi = 1$, tem-se:

$$t_{pi}^* = K_{pil} \cdot L^2 / 2 + 12 \cdot E \cdot I / L + 2 \cdot C \cdot I_t / h \quad (3.48)$$

Os coeficientes de rigidez global do pórtico à torção é calculado pela expressão (3.34), observando que no lugar de m_{pi} utiliza-se t_{pi}^* dado pela (3.48).

+

CAPÍTULO IV

DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS HORIZONTAIS EM PONTES DE TABULEIROS CONTÍNUOS

Neste capítulo estuda-se a distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas das pontes contínuas. Os esforços horizontais são os provenientes da ação do vento na superestrutura, frenagem ou aceleração, retração, variação de temperatura e outras que provoquem a variação do comprimento da superestrutura, descritos no capítulo II.

O cálculo da parcela da ação horizontal, que atua na superestrutura e se transmite a um pilar genérico de uma ponte, no caso geral é um problema complexo, sendo que, a deformação por flexão e torção dos fustes dos pilares, a deformação elástica dos aparelhos de apoio, as deformações por flexão e torção do tabuleiro no plano horizontal, são os responsáveis pela complexidade do assunto. No entanto algumas hipóteses simplificadoras podem ser feitas sem que a solução do problema se afaste muito da realidade. Portanto as

+

seguintes hipóteses simplificadoras são feitas na distribuição dos esforços horizontais nas infraestruturas de pontes de tabuleiro contínuo.

- O tabuleiro é considerado horizontal e os eixos dos pilares verticais;
- O centro de gravidade do aparelho de apoio é considerado no eixo vertical do pilar respectivo;
- O tabuleiro é infinitamente rígido, no plano horizontal, sob a ação dos esforços horizontais;
- As ações horizontais que atuam na superestrutura são representadas pelas forças agindo no plano horizontal que contém os topos dos pilares.

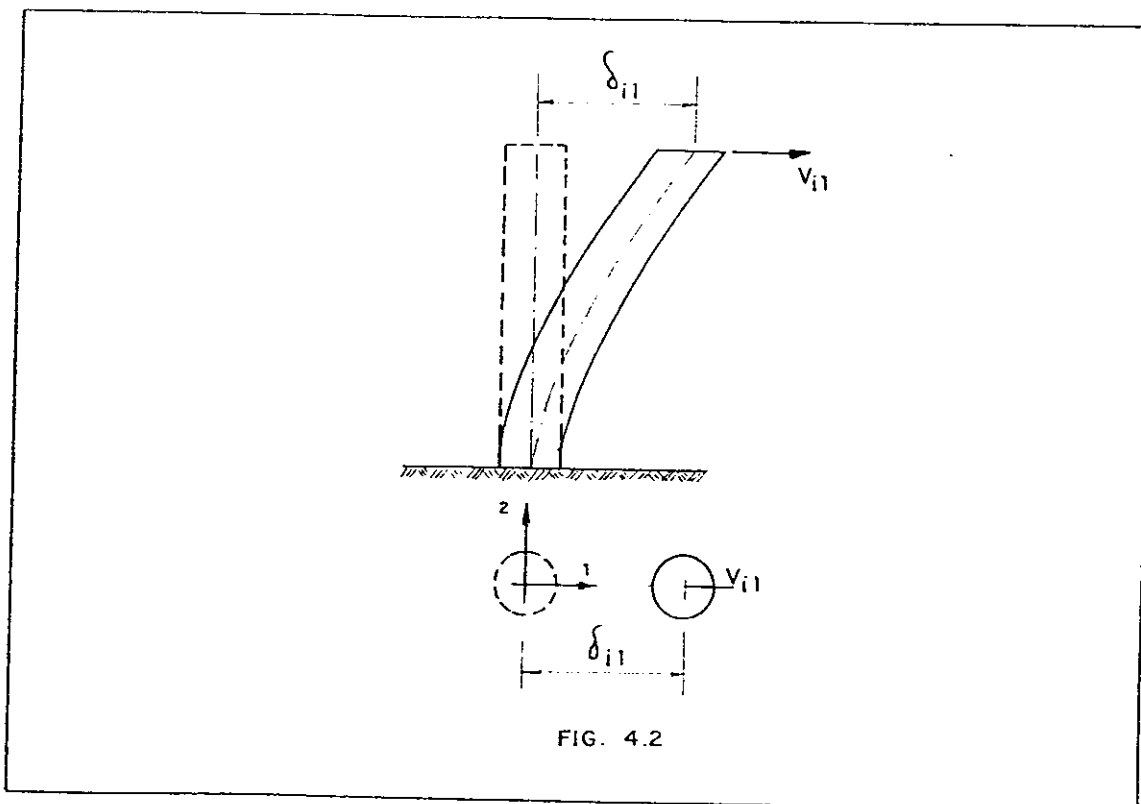
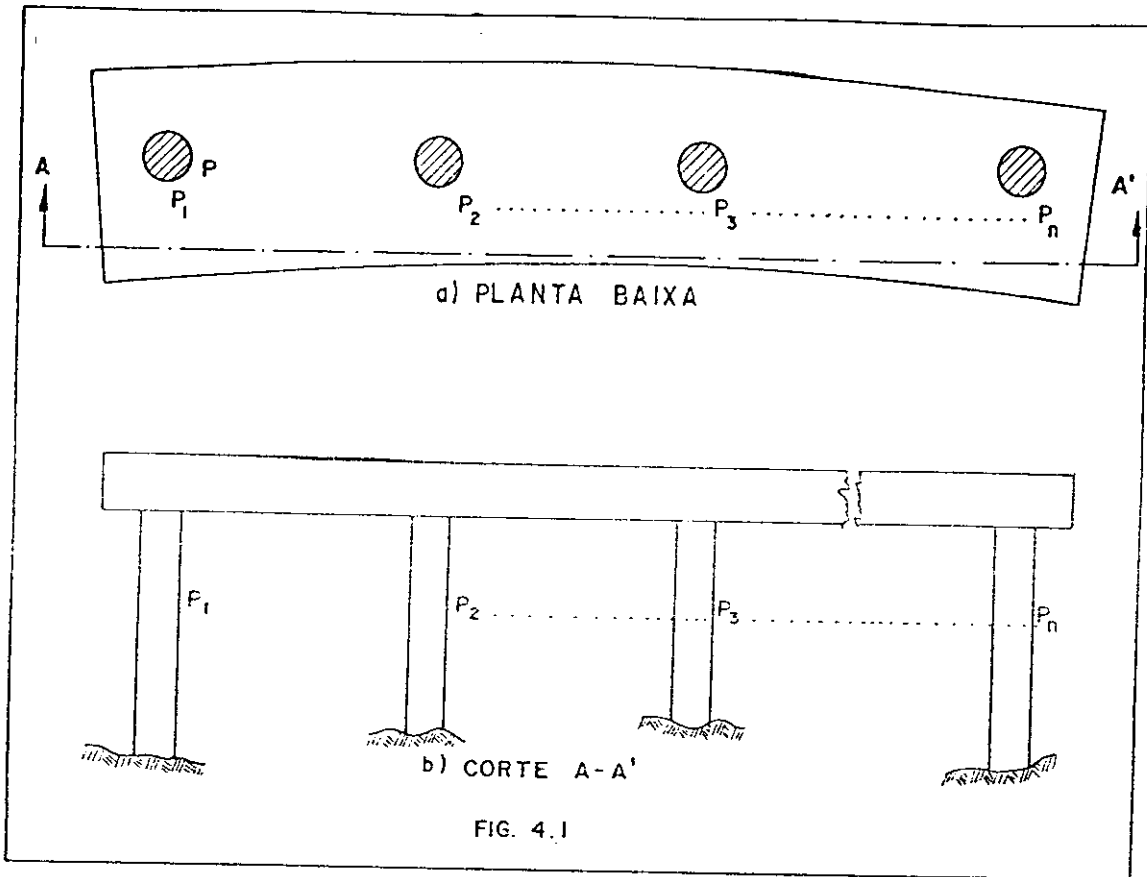
Em vista das hipóteses acima referidas, estuda-se aqui, a distribuição dos esforços horizontais dando tratamento análogo ao do cálculo de um estaqueamento (estacas articuladas).

O processo que será utilizado para abordar o problema é o devido a F. SCHIEL [14], o qual é apresentado a seguir.

4.1 - Descrição do Processo

Seja uma ponte com tabuleiro contínuo sustentado por n pilares (Fig. 4.1).

Vamos isolar, do conjunto, um pilar i e analisar o que acontece quando provocamos no topo do mesmo deslocamentos nas direções principais da secção reta do fuste como está esquematizado na Figura 4.2.



†

Da Fig. 4.2 tira-se a expressão seguinte:

$$V_{i1} = K_{i1} \delta_{i1} \quad (4.1)$$

Onde:

K_{i1} = coeficiente de rigidez global do pilar genérico i na direção principal 1.

δ_{i1} = deslocamento do topo do pilar genérico i , na direção principal 1 de sua secção reta.

Analogamente tem-se para a direção principal 2 da secção referida a seguinte expressão:

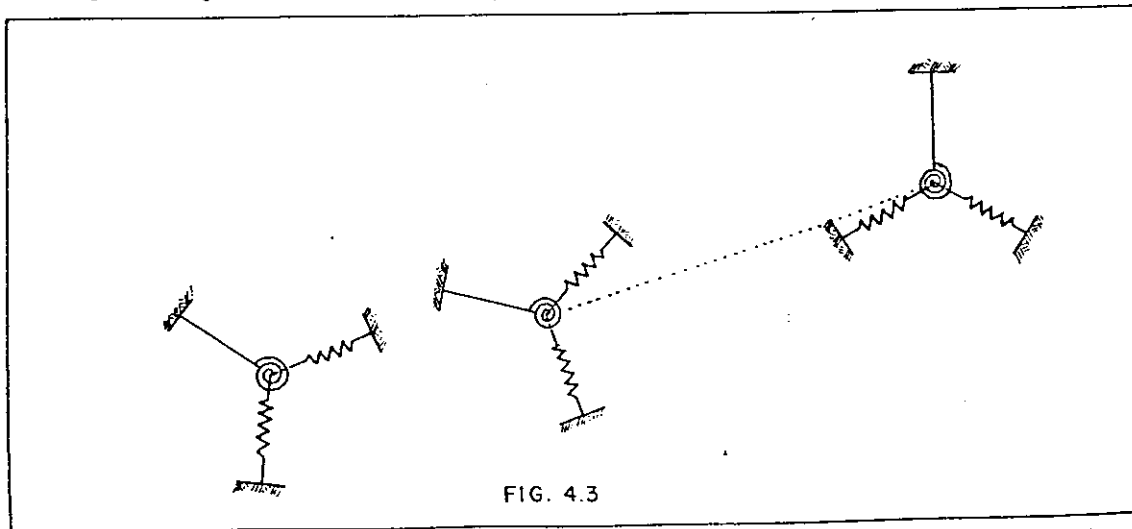
$$V_{i2} = K_{i2} \delta_{i2} \quad (4.2)$$

Onde:

K_{i2} = coeficiente de rigidez global do pilar na direção principal 2;

δ_{i2} = deslocamento do topo do pilar genérico i , na direção principal 2.

Desta forma substituem-se os pilares da figura 4.1 por molas colocadas nas direções principais j , figura 4.3, e na direção normal ao plano do tabuleiro coloca-se molas que representam a torção do pilar-aparelho de apoio.





Conhecido o deslocamento δ_{ij} sofrido pelo topo do pilar genérico i , na direção j e o giro ϕ_i do tabuleiro, os esforços que surgem no topo daquele, serão:

$$V_{ij} = K_{ij} \delta_{ij} \quad (4.3)$$

$$t_i = t_i \phi_i \quad (4.4)$$

Onde:

K_{ij} = rigidez global do pilar genérico i à flexão;

t_i = rigidez global do pilar genérico i à torção.

A figura 4.4 representa o deslocamento δ_{ij} do pilar genérico i , caracterizado pelo versor \vec{p}_{ij} da sua direção e pelo ponto de coordenadas $(x_i, y_i, 0)$, que localiza o topo do pilar genérico no tabuleiro.

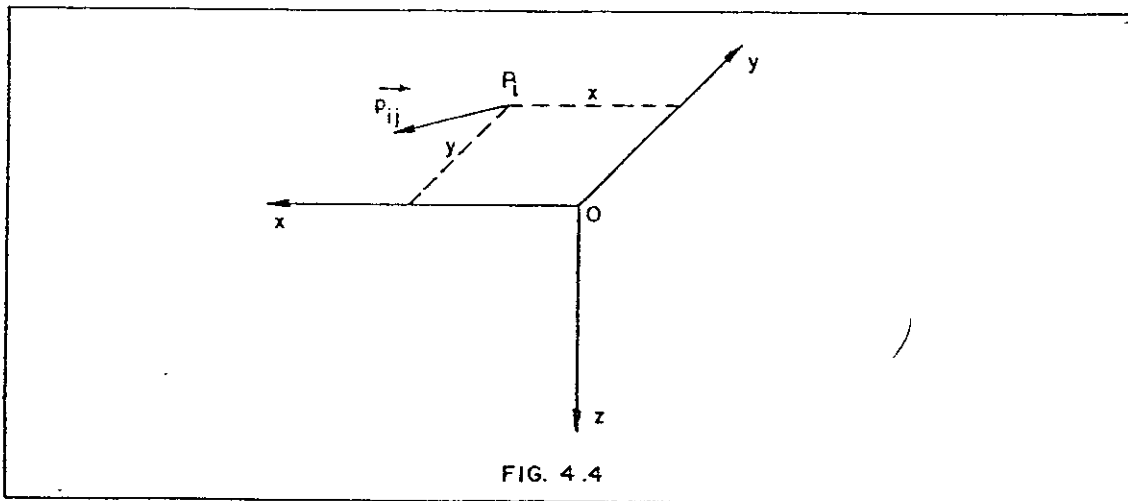


FIG. 4.4

Se \vec{m}_{ij} é o momento do versor \vec{p}_{ij} relativo à origem O do sistema de referência $Oxyz$, P_i é o ponto que representa o topo do pilar genérico i , as seguintes expressões serão verdadeiras.

$$\vec{m}_{ij} = (P_i - O) \wedge \vec{p}_{ij}$$

*

Onde:

$$(P_i - O) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j}$$

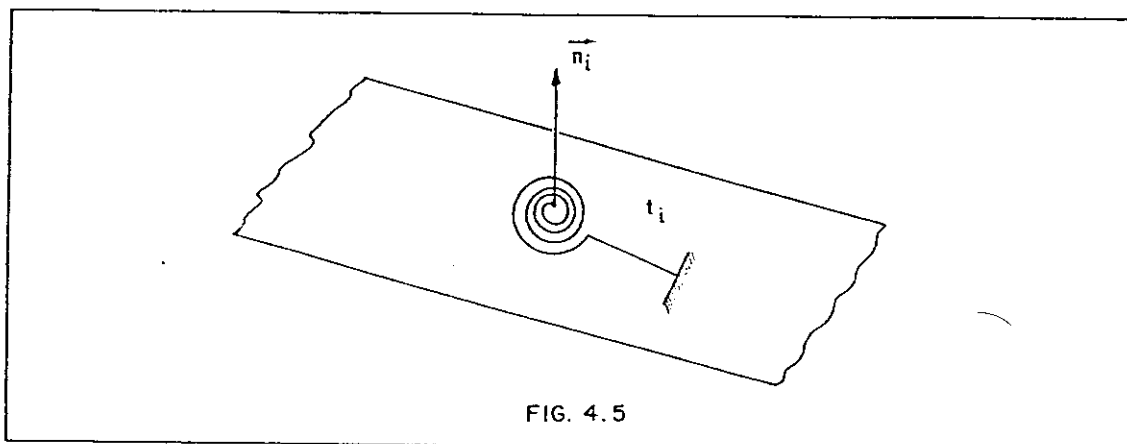
$$\vec{P}_{ij} = p_{xij} \vec{i} + p_{yij} \vec{j}$$

$$\vec{m}_{ij} = p_{cij} \vec{k}$$

(4.5)

$$p_{cij} = x_i p_{yij} - y_i p_{xij}$$

O versor que representa o plano da "mola de torção" será representado por \vec{n}_i , Fig. 4.5.



- Definições

$\vec{P}_{ij} = p_{xij} \vec{i} + p_{yij} \vec{j}$ = versor da direção j da seção reta do pilar i,

$\vec{n}_i = \vec{k}$ = versor perpendicular ao plano do tabuleiro;

$\vec{m}_{ij} = p_{cij} \vec{k}$ = momento do versor \vec{P}_{ij} em relação à origem do sistema de coordenadas Oxyz;

$\vec{u} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ = deslocamento da origem do sistema Oxyz;

$\vec{v} = v_c \vec{k}$ = giro do tabuleiro no plano horizontal;

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ = resultante das forças horizontais externas aplicadas no tabuleiro;

+

$\vec{M} = F_c \vec{k}$ = resultante dos momentos das forças horizontais externas aplicadas no tabuleiro;

\vec{v}_{pij} = deslocamento do topo do pilar genérico i na direção de \vec{p}_{ij} ;

ϕ_i = giro da "mola de torção" i , no plano do tabuleiro;

\vec{V}_{ij} = esforço no topo do pilar genérico i na direção j ,

\vec{T}_i = momento de torção na "mola de torção" i , suposto positivo se causar giro de mesmo sentido que \vec{n}_i .

O deslocamento do topo do pilar genérico i , é composto da translação da origem O do sistema de referência mais a rotação do tabuleiro, Fig.4.6 . Desta forma tem-se:

$$\vec{v}_{pij} = \vec{u} + \vec{w} \wedge (P_i - O) \quad (4.6)$$

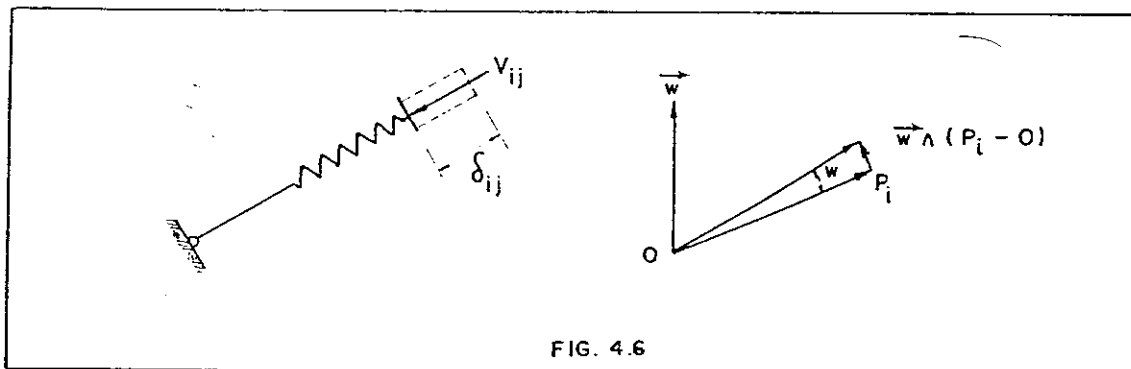


FIG. 4.6

A projeção do deslocamento do topo do pilar genérico i , na direção j é dado pelo produto escalar de \vec{v}_{pij} por \vec{p}_{ij} , como segue:

$$\delta_{ij} = \vec{v}_{pij} \cdot \vec{p}_{ij} = \vec{u} \cdot \vec{p}_{ij} + \vec{w} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{p}_{ij}$$

Como:

$$\vec{w} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{p}_{ij} = (P_i - O) \wedge \vec{p}_{ij} \cdot \vec{w} \quad e$$

+

$(P_i - 0) \Lambda_{P_{ij}}^{\vec{r}} = \vec{m}_{ij}$, tem-se o seguinte:

$$\delta_{ij} = \vec{u} \cdot \vec{p}_{ij} + \vec{v} \cdot \vec{m}_{ij} \quad (4.7)$$

$$\phi_i = \vec{w} \cdot \vec{n}_i \quad (4.8)$$

Análiticamente δ_{ij} e ϕ_i , têm as seguintes expressões:

$$\delta_{ij} = p_{xij} \cdot v_x + p_{yij} \cdot v_y + p_{cij} \cdot v_c$$

$$\phi_i = n_{ci} \cdot v_c$$

Levando estes últimos valores às expressões (4.3) e (4.4), tem-se:

$$V_{ij} = K_{ij} \cdot \delta_{ij} = K_{ij} (p_{xij} \cdot v_x + p_{yij} \cdot v_y + p_{cij} \cdot v_c) \quad (4.9)$$

$$T_i = t_i \cdot n_{ci} \cdot v_c \quad (4.10)$$

Para o equilíbrio estático do topo do pilar é necessário que:

$$\vec{F} - \sum_i \vec{V}_{ij} \cdot \vec{p}_{ij} = 0 \quad (4.11)$$

$$\vec{H} - \sum_i \vec{V}_{ij} \cdot \vec{m}_{ij} - \sum_i \vec{T}_i \cdot \vec{n}_i = 0$$

Análiticamente tem-se:

$$F_x = \sum_i K_{ij} (p_{xij} \cdot v_x + p_{yij} \cdot v_y + p_{cij} \cdot v_c) p_{xij}$$

$$F_y = \sum_i K_{ij} (p_{xij} \cdot v_x + p_{yij} \cdot v_y + p_{cij} \cdot v_c) p_{yij}$$

$$F_c = \sum_i K_{ij} (p_{xij} \cdot v_x + p_{yij} \cdot v_y + p_{cij} \cdot v_c) p_{cij} + \sum_i t_i n_{ci} n_{ci} v_c$$

Ou então sob forma matricial:

*

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i K_{ij} p_{xij}^2 & \sum_i K_{ij} p_{xij} p_{yij} & \sum_i K_{ij} p_{xij} p_{cij} \\ \sum_i K_{ij} p_{yij} p_{xij} & \sum_i K_{ij} p_{yij}^2 & \sum_i K_{ij} p_{yij} p_{cij} \\ \sum_i K_{ij} p_{cij} p_{xij} & \sum_i K_{ij} p_{cij} & \sum_i K_{ij} p_{cij}^2 + \sum_i t_{in}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_c \end{Bmatrix} \quad \dots (4.12)$$

Fazendo:

$$K_{xx} = \sum_i K_{ij} p_{xij}^2$$

$$K_{xy} = K_{yx} = \sum_i K_{ij} p_{xij} p_{yij}$$

$$K_{xc} = K_{cx} = \sum_i K_{ij} p_{xij} p_{cij}$$

(4.13)

$$K_{yc} = K_{cy} = \sum_i K_{ij} p_{yij} p_{cij}$$

$$K_{yy} = \sum_i K_{ij} p_{yij}^2$$

$$K_{cc} = \sum_i K_{ij} p_{cij}^2 + \sum_i t_{in}^2$$

e levando a (4.13) a (4.12), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xc} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yc} \\ K_{xc} & K_{yc} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_c \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Fazendo:

$$\{F^*\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix}, \quad \{v^*\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_c \end{Bmatrix}, \quad \{p_{ij}^*\} = \begin{Bmatrix} p_{xij} \\ p_{yij} \\ p_{cij} \end{Bmatrix}, \quad \{n_i^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n_{ci} \end{Bmatrix}$$

e levando a (4.14), tem-se:

$$\{F^*\} = [K] \{v^*\} \quad \therefore \quad \{v^*\} = [K]^{-1} \{F^*\} \quad (4.15)$$

O deslocamento δ_{ij} , ficará da seguinte forma:

$$\delta_{ij} = \{p_{ij}^*\}^t \{v^*\} \quad (4.16)$$

A substituição de δ_{ij} , por seu valor dado em (4.16), na (4.3), torna esta última em:

$$V_{ij} = K_{ij} \{p_{ij}^*\}^t \{v^*\} \quad (4.17)$$

Levando a (4.15) às (4.17) e (4.10), fazendo, ainda, $[K]^{-1} = [A]$ (matriz de flexibilidade do conjunto referida ao sistema de coordenadas OXYZ), as duas últimas expressões ficarão:

$$V_{ij} = K_{ij} \{p_{ij}^*\}^t [A] \{F^*\} \quad (4.18)$$

$$T_i = t_i \{n_i^*\}^t [A] \{F^*\}$$

4.2 - Determinação dos Esforços

4.2.1 - Vento na Superestrutura, Frenagem ou Aceleração

Para a determinação dos esforços nos pilares devido à ação do vento na superestrutura, frenagem ou aceleração,

*

adota-se um sistema de eixos $Oxyz$, com o tabuleiro no plano Oxy e em relação a este sistema determina-se a matriz $[K]$ para em seguida calcular a matriz $[A]$, com a qual se determinam os esforços acima mencionados, através das fórmulas (4.18).

A matriz de rigidez do conjunto $[K]$, é calculada da seguinte maneira:

Seja na fig. 4.7 dada uma ponte de tabuleiro contínuo, na qual se deseja calcular as solicitações na infraestrutura devido às ações: vento e frenagem ou aceleração, que agem na superestrutura.

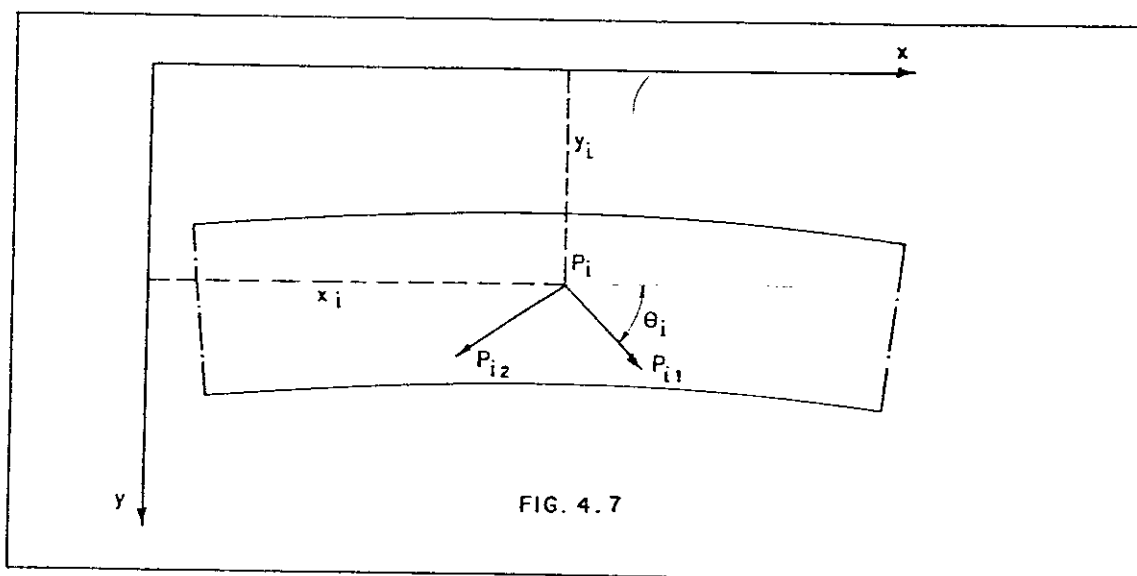


FIG. 4.7

A Fig. 4.7 apresenta o pilar genérico i representado pelos vetores \vec{p}_{ij} das direções principais da secção reta do fuste do mesmo. O ponto P_i , referido ao sistema $Oxyz$, representa o encontro do pilar genérico i com o tabuleiro.

Sob forma matricial apresentam-se os vetores acima definidos, bem como o vetor \vec{n}_i , que representa o plano onde se dá a rotação do tabuleiro.

+

$$\{P_{i1}^*\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta_{i1} \\ \text{sen}\theta_{i1} \\ x_i \text{sen}\theta_{i1} - y_i \cos\theta_{i1} \end{Bmatrix},$$

(4.19)

$$\{P_{i2}^*\} = \begin{Bmatrix} -\text{sen}\theta_{i1} \\ \cos\theta_{i1} \\ x_i \cos\theta_{i1} + y_i \text{sen}\theta_{i1} \end{Bmatrix}, \quad \{n_i^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$P_i = (x_i, y_i, 0)$$

$$K_{xx} = \sum_{ij} K_{ij} \cdot P_x^2 = \sum_i (K_{i1} \cdot \cos^2\theta_i + K_{i2} \cdot \text{sen}^2\theta_i)$$

$$K_{xy} = K_{yx} = \sum_{ij} K_{ij} \cdot P_x \cdot P_y = \sum_i (K_{i1} - K_{i2}) \cdot x_i \cdot \text{sen}\theta_i \cdot \cos\theta_i$$

$$K_{xc} = K_{cx} = \sum_{ij} K_{ij} \cdot P_{xij} \cdot P_{cij} = \sum_i (K_{i1} - K_{i2}) \cdot x_i \cdot \text{sen}\theta_i \cdot \cos\theta_i + \\ - \sum_i y_i \cdot (K_{i1} \cdot \cos^2\theta_i + K_{i2} \cdot \text{sen}^2\theta_i)$$

$$K_{yy} = \sum_{ij} K_{ij} \cdot P_{yij}^2 = \sum_i (K_{i1} \cdot \text{sen}^2\theta_i + K_{i2} \cdot \cos^2\theta_i)$$

$$K_{yc} = K_{cy} = \sum_i x_i \cdot (K_{i1} \cdot \text{sen}^2\theta_i + K_{i2} \cdot \cos^2\theta_i) - \sum_i y_i \cdot (K_{i1} + \\ - K_{i2}) \cdot \text{sen}\theta_i \cdot \cos\theta_i$$

$$K_{cc} = \sum_{ij} K_{ij} \cdot P_{cij}^2 + \sum_i t_i \cdot n_{ci}^2 = \sum_i x_i^2 \cdot (K_{i1} \cdot \text{sen}^2\theta_i + K_{i2} \cdot \cos^2\theta_i) + \\ - \sum_i 2 \cdot x_i \cdot y_i \cdot (K_{i1} - K_{i2}) \cdot \text{sen}\theta_i \cdot \cos\theta_i +$$

$$+ \sum_i y_i^2 \cdot (K_{i1} \cdot \cos^2 \theta_i + K_{i2} \cdot \sin^2 \theta_i) + \sum_i t_i \quad (4.20)$$

A marcha de cálculo para a determinação dos esforços devido às ações do vento na superestrutura, frenagem ou aceleração, é a seguinte:

- 1º) Adota-se um sistema de eixos Oxyz para o conjunto, de forma que o plano Oxy contenha o tabuleiro;
- 2º) Calculam-se os coeficientes de rigidez global, a flexão de todos os pilares segundo as direções principais j, e a torção através das fórmulas (3.32) e (3.34), respectivamente, caso do pilar único e no caso de pórtico simples, observar o que foi calculado no item 3.3 do capítulo III;
- 3º) Calculam-se os cossenos diretores das direções principais j, da secção reta do pilar genérico i;
- 4º) Determinam-se os versores \vec{p}_{ij} e o ponto $P_i(x_i, y_i, 0)$;
- 5º) Calculam-se os elementos da matriz de rigidez [K], do conjunto, através das expressões (4.20) e em seguida determinam-se a matriz de flexibilidade $[A] = [K]^{-1}$;
- 6º) Calculam-se os esforços V_{ij} ($i=1, \dots, n$; $j=1, 2$) e o momento torsor T_i no topo do pilar genérico i através das expressões (4.18);
- 7º) Para verificação, projeta-se as forças V_{ij} nos eixos coordenados \underline{x} e \underline{y} , procedendo-se, em seguida, a somatória nos respectivos eixos, para comparação com a resultante das forças externas aplicadas, através da condição de equilíbrio estático do conjunto dado pelas equações seguintes:

$$\sum_i V_{i1} \cos \theta_{i1} - \sum_i V_{i2} \sin \theta_{i2} \cong F_x \quad (4.21.a)$$

$$\sum_i V_{i1} \sin \theta_{i1} + \sum_i V_{i2} \cos \theta_{i2} \cong F_y \quad (4.21.b)$$

+

Quando as forças externas agem diretamente na infraestrutura (empuxo de terra nos pilares e encontros), o problema se resolve por superposição de efeitos. Seja, por exemplo, um pilar genérico i , sob a ação de uma força horizontal F_{Ii} , Fig. 4.8a. Para se determinar as solicitações que se desenvolvem nos pilares, considera-se a ação da força F_{Ii} equivalente à soma das ações correspondentes às situações das Figs. 4.8b, 4.8c e 4.8d, onde na primeira figura vincula-se o topo do pilar i , através da força F_{Iio} , a qual é calculada aplicando procedimento análogo ao empregado para o cálculo das reações de engastamento elástico para vigas sujeito a carregamento externo.

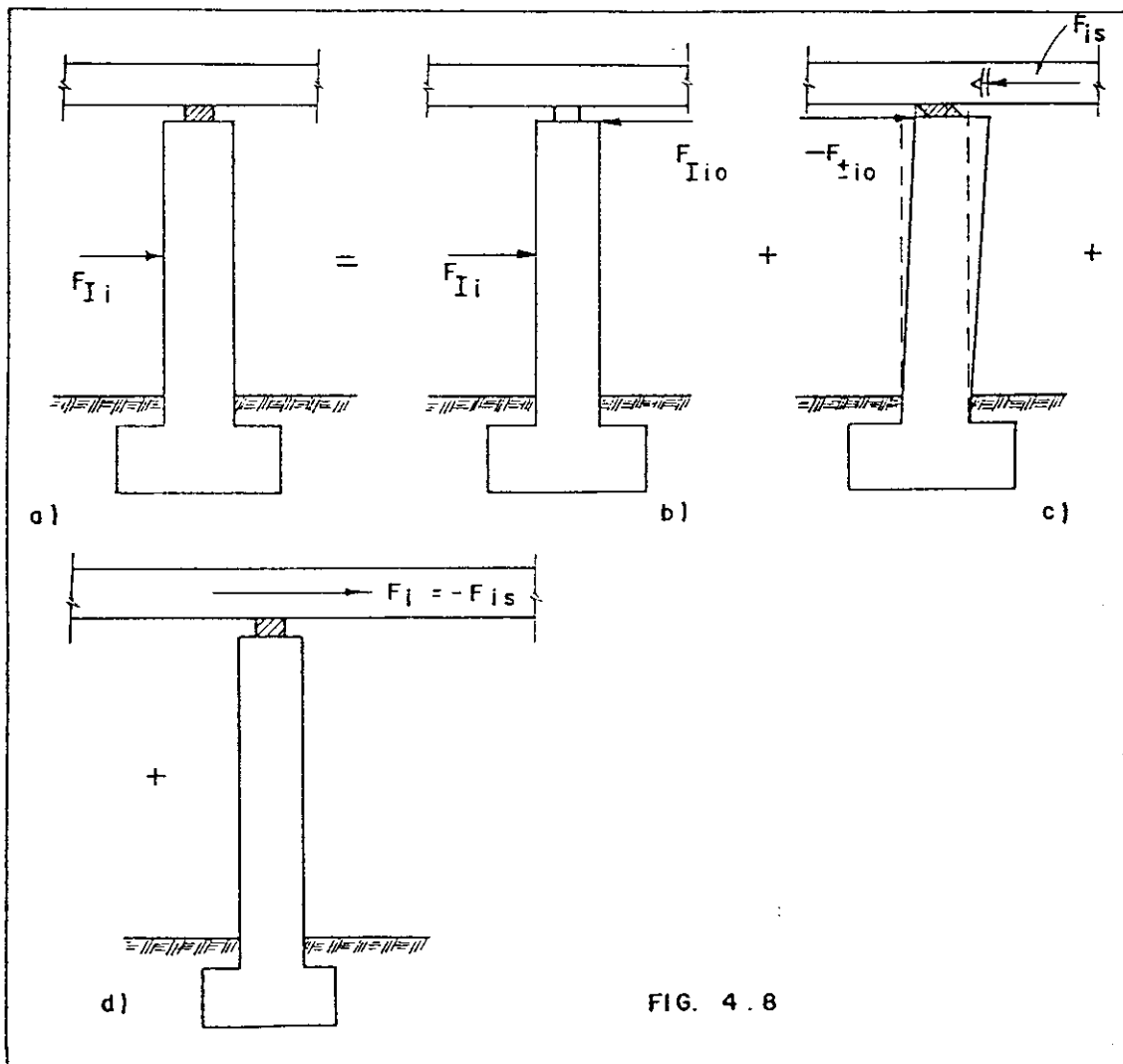


FIG. 4.8

+

No caso presente, corresponde ao de uma viga vinculada em uma extremidade e elasticamente engastada na outra, sendo o engastamento dependente da rigidez da fundação do referido pilar.

Na segunda figura, o pilar está submetido só à força - F_{I0} (coltando o vínculo do topo do pilar), com o tabuleiro vinculado através da força F_{is} . Finalmente, na terceira figura, solta-se o vínculo do tabuleiro aplicando-se uma força - F_{is} no mesmo, sendo esta última força, a parcela da F_{Ii} que vai ser distribuída entre os pilares através do procedimento descrito anteriormente.

Para se determinar F_{is} , estuda-se o equilíbrio de forças no topo do pilar i na situação da Fig. 4.8c, a qual é redesenhada na Fig. 4.9, com a força F_{is} atuando na face superior do aparelho de apoio.

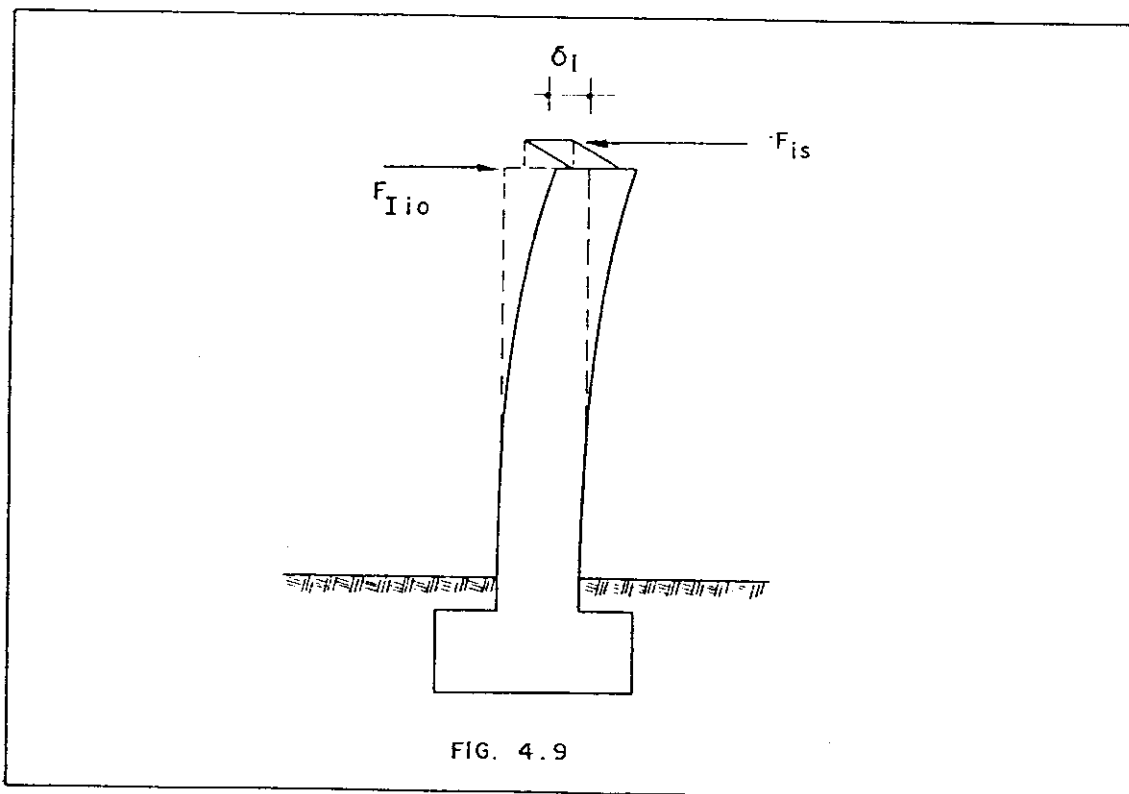


FIG. 4.9

Da Fig. 4.9 tem-se:

$$\sum F = K_{pi} \delta_i$$

$$F_{Iio} - F_{is} = K_{pi} \delta_i \quad (4.21.c)$$

*

Como a deformação do elastômero é a mesma que a do topo do pilar, tem-se:

$$F_{is} = K_{ai} \delta_i$$

Sendo:

δ_i = deslocamento do topo do pilar i na direção principal da secção reta do mesmo pilar;

K_{ai} = coeficiente de rigidez do elastômero do pilar i na direção de δ_i ;

F_{Iio} = reação à ação de F_{Ii} no vínculo do topo do pilar i .

Da última equação, tem-se:

$$\delta_i = F_{is} / K_{ai}$$

Levando o valor de δ_i , dado acima, à expressão (4.21.c) e resolvendo tem-se:

$$F_{is} = \frac{K_{ai}}{K_{ai} + K_{pi}} \cdot F_{Iio} \quad (4.21.d)$$

A força $F_i = -\left[K_{ai} / (K_{ai} + K_{pi}) \right] F_{Iio}$, cujo ponto de aplicação é o que corresponde à localização do topo do pilar genérico i , será a ação a ser distribuída entre os pilares.

O esforço que surge no pilar i será a soma do efeito correspondente à ação da força F_i mais a parcela resultante de $F_{Iio} - F_{is}$, ou seja:

$$V_i = (V_i)_{F_i} + \frac{K_{ai} K_{pi}}{K_{ai} + K_{pi}} \cdot F_{Iio} \quad (4.21.e)$$

Sendo:

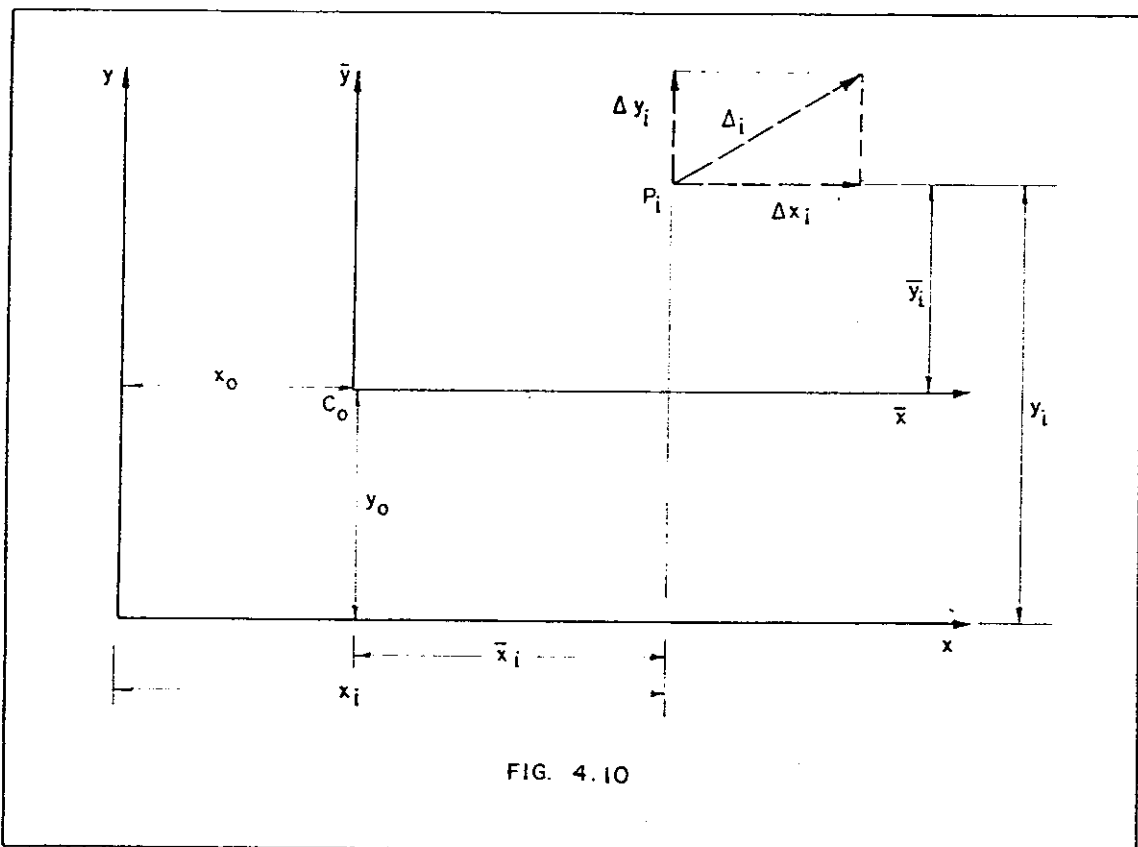
V_i = esforço na direção δ_i , devido à ação da força F_{Ii} atuando no fuste do pilar genérico i ;

$(V_i)_{F_i}$ = esforço no topo do pilar i na direção de δ_i , devido à ação de $F_i = -\left[K_{ai} / (K_{ai} + K_{pi}) \right] F_{Iio}$, atuando na superestrutura.

4.2.2. Variação de temperatura do concreto

A figura 4.10 mostra um trecho do tabuleiro considerado rígido apoiado no pilar i , sujeito à variação de comprimento causado pela variação de temperatura e retração do concreto.

O ponto do tabuleiro que não sofre deslocamento chama-se de ponto de deslocamento nulo (PDN) estando o mesmo representado pelo ponto C_0 . Neste ponto traçam-se dois eixos, \bar{x} e \bar{y} , os quais servirão de referência para os deslocamentos dos pontos P_i , sob a ação da variação da temperatura e retração do concreto.



Na Fig.4.10 Δx_i e Δy_i são as projeções do deslocamento do ponto P_i segundo as direções x e y , respectivamente, do sistema de eixos coordenados Oxy .

Na Fig.4.11 representa-se o mesmo deslocamento Δ_i projetado também nas direções principais $\underline{1}$ e $\underline{2}$ da secção reta do pilar genérico i .

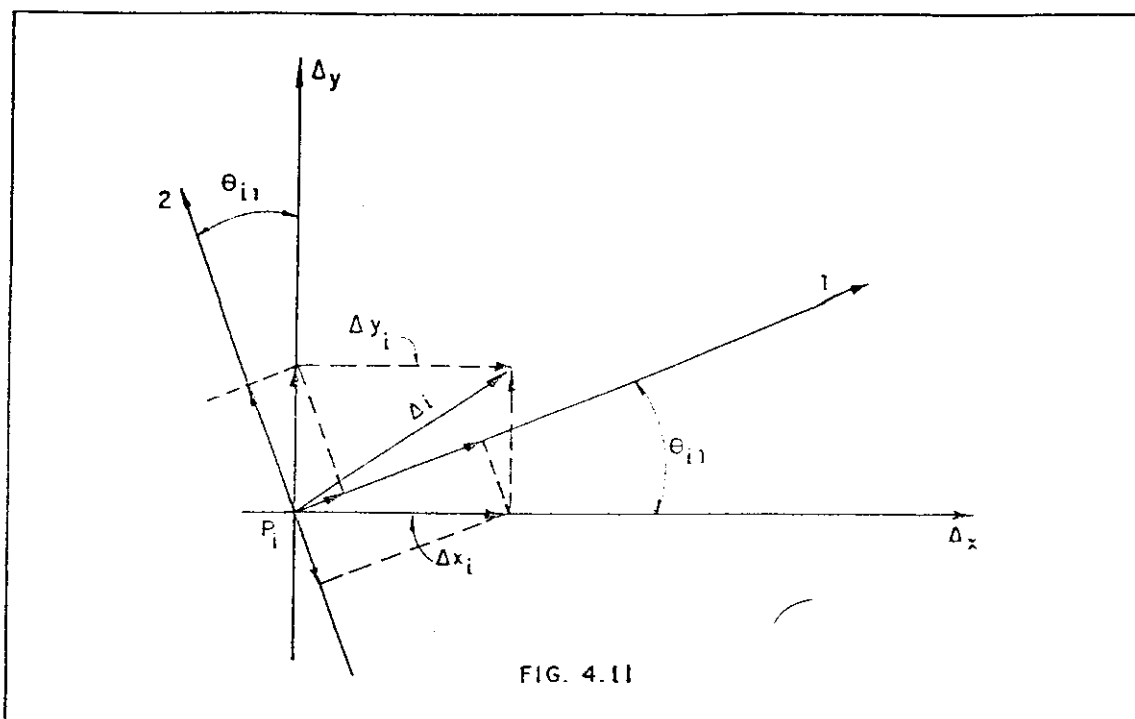


FIG. 4.11

Da Fig. 4.11 tiram-se as relações seguintes:

$$\delta_{i1} = \Delta x_i \cdot \cos \theta_{i1} + \Delta y_i \cdot \text{sen} \theta_{i1} \quad (4.22)$$

$$\delta_{i2} = -(\Delta x_i \cdot \text{sen} \theta_{i1} - \Delta y_i \cdot \cos \theta_{i1}) \quad (4.23)$$

Onde:

δ_{ij} = deslocamento do ponto P_i na direção principal j ;

Δx_i = deslocamento do ponto P_i na direção de x ;

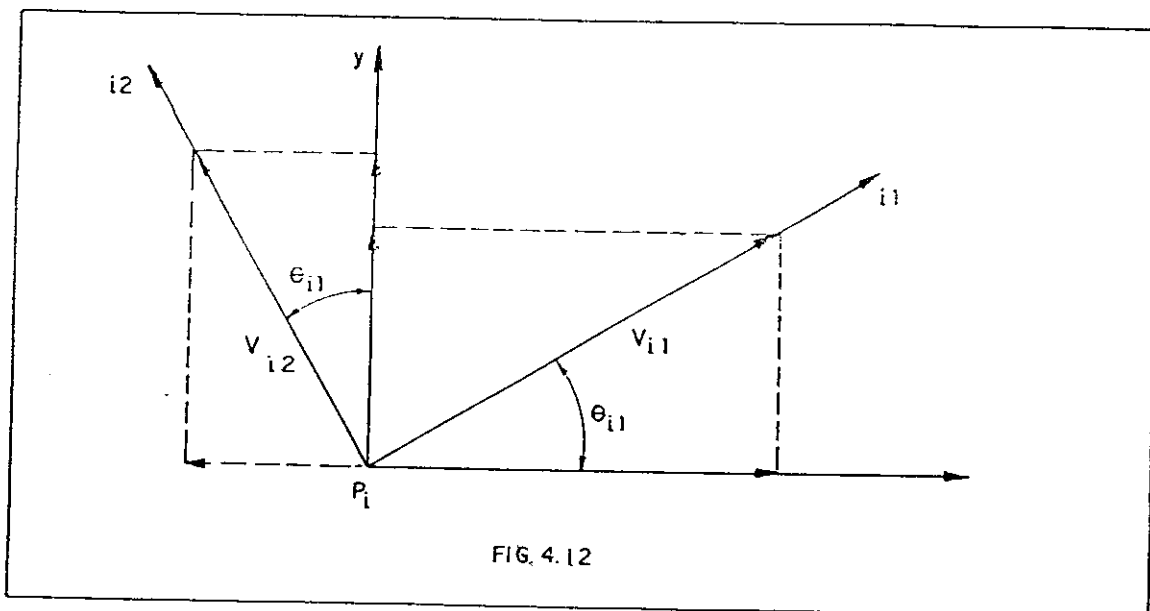
Δy_i = deslocamento do ponto P_i na direção de y ;

θ_{i1} = ângulo entre o eixo principal $\underline{1}$ e o eixo dos x . Considera-se o eixo $\underline{1}$, aquele que fizer o menor ângulo com o eixo \underline{x} .

Conhecidos os deslocamentos nas direções principais $\underline{1}$ e $\underline{2}$, os esforços nas mesmas direções, provocados em razão da flexão do fuste do pilar, serão dados pelas expressões seguintes.

$$V_{i1} = K_{i1} \cdot \delta_{i1} \quad (4.24)$$

$$V_{i2} = K_{i2} \cdot \delta_{i2} \quad (4.25)$$



Chamando-se de X_i e Y_i as projeções das forças V_{ij} sobre os eixos x e y , Fig. 4.12, determinam-se as seguintes expressões:

$$X_i = V_{i1} \cdot \cos\theta_{i1} - V_{i2} \cdot \sin\theta_{i1}$$

$$Y_i = V_{i1} \cdot \sin\theta_{i1} + V_{i2} \cdot \cos\theta_{i1}$$

Se nestas últimas expressões, substitui-se V_{ij} pelos seus valores dados nas expressões (4.22), (4.23), (4.24), (4.25), tem-se:

$$X_i = K_{i1} \cdot (\Delta x_i \cdot \cos\theta_{i1} + \Delta y_i \cdot \sin\theta_{i1}) \cdot \cos\theta_{i1} + K_{i2} \cdot (\Delta x_i \cdot \sin\theta_{i1} - \Delta y_i \cdot \cos\theta_{i1}) \cdot \sin\theta_{i1}$$

Simplificando-se esta última expressão tem-se:

$$X_i = \Delta x_i \cdot (K_{i1} \cdot \cos^2\theta_{i1} + K_{i2} \cdot \sin^2\theta_{i1}) + \Delta y_i \cdot \frac{\sin^2\theta_{i1}}{2} \cdot (K_{i1} - K_{i2})$$

+

Fazendo:

$$Y_i = K_{i1} \cdot \cos^2 \theta_{i1} + K_{i2} \cdot \sin^2 \theta_{i1}$$

$$\beta_i = \frac{\sin^2 \theta_{i1}}{2} \cdot (K_{i1} - K_{i2})$$

Tem-se:

$$X_i = Y_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i \quad (4.26)$$

Desenvolvendo a expressão que dá Y_i tem-se:

$$Y_i = K_{i1} \cdot (\Delta x_i \cdot \cos \theta_{i1} + \Delta y_i \cdot \sin \theta_{i1}) \cdot \sin \theta_{i1} + \\ - K_{i2} \cdot (\Delta x_i \cdot \sin \theta_{i1} - \Delta y_i \cdot \cos \theta_{i1}) \cdot \cos \theta_{i1}$$

que, simplificando, fica:

$$Y_i = \Delta x_i \cdot \frac{\sin^2 \theta_i}{2} \cdot (K_{i1} - K_{i2}) + \Delta y_i \cdot (K_{i1} \cdot \sin^2 \theta_{i1} + K_{i2} \cdot \cos^2 \theta_{i1})$$

Fazendo:

$$X_i = (K_{i1} \cdot \sin^2 \theta_{i1} + K_{i2} \cdot \cos^2 \theta_{i1})$$

Tem-se:

$$Y_i = \beta_i \cdot \Delta x_i + X_i \cdot \Delta y_i \quad (4.27)$$

Em virtude de C_0 ser um ponto de deslocamento nulo, Fig.4.10, tem-se:

$$\Delta x_i = \epsilon_{tot} \cdot \bar{x}_i = \epsilon_{tot} \cdot (x_i - x_0) \quad (4.28)$$

$$\Delta y_i = \epsilon_{tot} \cdot \bar{y}_i = \epsilon_{tot} \cdot (y_i - y_0) \quad (4.29)$$

Onde:

ϵ_{tot} = deformação específica da superestrutura relativa à variação de temperatura e retração do concreto;

x_i = abscissa do ponto P_i em relação a Oxy;

x_o = abscissa do PDR em relação a Oxy;

y_i = ordenada do ponto P_i em relação a Oxy;

y_o = ordenada do ponto C_o (PDR), em relação a Oxy.

Como não há força externa atuando na superestrutura, tem-se:

$$\sum X_i = 0 \quad (4.30)$$

$$\sum Y_i = 0 \quad (4.31)$$

Levando às (4.30) e (4.31) os valores de X_i e Y_i dado por (4.26), (4.29), (4.28) e (4.29) tem-se:

$$\sum \gamma_i \cdot (x_i - x_o) + \sum \beta_i \cdot (y_i - y_o) = 0$$

$$\sum \beta_i \cdot (x_i - x_o) + \sum \alpha_i \cdot (y_i - y_o) = 0$$

Desenvolvendo as expressões acima encontram-se:

$$\sum \gamma_i \cdot x_i - x_o \cdot \sum \gamma_i + \sum \beta_i \cdot y_i - y_o \cdot \sum \beta_i = 0$$

$$x_o \cdot \sum \gamma_i + y_o \cdot \sum \beta_i = \sum (\gamma_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i) \quad (4.32)$$

$$\sum \beta_i \cdot x_i - x_o \cdot \sum \beta_i + \sum \alpha_i \cdot y_i - y_o \cdot \sum \alpha_i = 0$$

$$x_o \cdot \sum \beta_i + y_o \cdot \sum \alpha_i = \sum (\beta_i \cdot x_i + \alpha_i \cdot y_i) \quad (4.33)$$

Resolvendo o sistema de equações composto pela (4.32) e (4.33), encontram-se:

$$x_0 = \frac{(\sum x_i) \sum (\gamma_i \cdot x_i + \beta_i \cdot y_i) - (\sum \beta_i \cdot x_i + x_i \cdot y_i)}{(\sum \gamma_i)(\sum x_i) - (\sum \beta_i)^2} \quad (4.34)$$

$$y_0 = \frac{(\sum \gamma_i) \sum (\beta_i \cdot x_i + x_i \cdot y_i) - (\sum \beta_i) \sum (\gamma_i \cdot x_i + x_i \cdot y_i)}{(\sum \gamma_i)(\sum x_i) - (\sum \beta_i)^2} \quad (4.35)$$

Com os valores de x_0 e y_0 calculados pelas (4.34) e (4.35), calculam-se os esforços nas cabeças dos pilares, devido à variação de comprimento na superestrutura, pelas seguintes expressões:

$$V'_{i1} = K_{i1} \cdot \epsilon_{tot} \cdot (x_i - x_0) \cdot \cos \theta_{i1} + (y_i - y_0) \cdot \sin \theta_{i1} \quad \dots (4.36)$$

$$V'_{i2} = -K_{i2} \cdot \epsilon_{tot} \cdot (x_i - x_0) \cdot \sin \theta_{i1} - (y_i - y_0) \cdot \cos \theta_{i1} \quad \dots (4.37)$$

Com a condição de que não haja força externa resultante sobre a superestrutura, tirou-se o ponto de deslocamento nulo. No entanto haverá momento externo relativo à origem O do sistema de coordenadas Oxy .

Com efeito, a superestrutura provoca no topo do pilar P_i ; esforços X_i e Y_i na direção de \underline{x} e \underline{y} , respectivamente, enquanto este reage e exerce naquele, esforços de mesma intensidade e direção, porém, de sentido oposto, Fig. 4.13. Chamando de V_{ix} e V_{iy} as reações exercidas pelo topo do pilar i , nas direções do eixo \underline{x} e \underline{y} respectivamente, a resultante das forças sobre o tabuleiro segundo essas direções, são:

$$F_x = \sum V_{ix} = 0$$

e

$$F_y = \sum V_{iy} = 0$$

A Fig. 4.13 esquematiza as forças V_{ix} e V_{iy} .

+

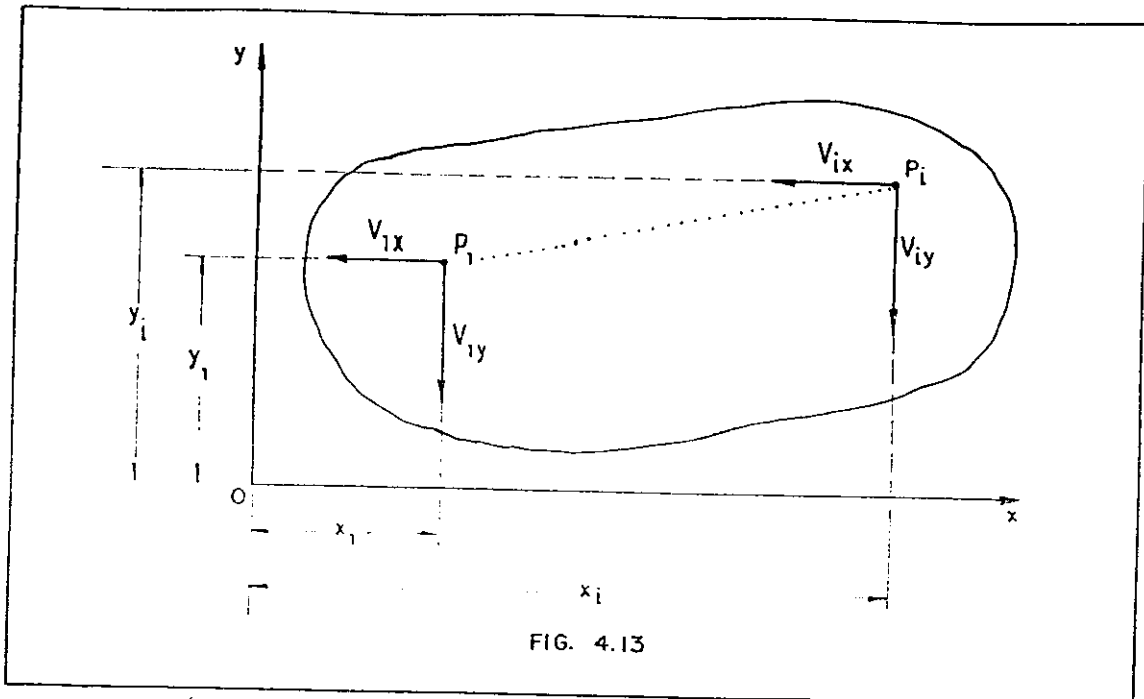


FIG. 4.13

O momento do par (V_{ix}, V_{iy}) em relação à origem do sistema de eixos coordenados Oxy é:

$V_{ix} \cdot y_i - V_{iy} \cdot x_i$, e o momento resultante em relação ao mesmo ponto será:

$$F_c = (V_{ix} \cdot y_i - V_{iy} \cdot x_i) \quad (4.38)$$

Portanto, o aparecimento de um momento externo resultante sobre a superestrutura acarretará o surgimento de esforços nos topos dos pilares, os quais são calculados através do procedimento descrito no item 4.4.

Desta forma tem-se:

$$V_{ij}'' = K_{ij} [S]^{-1} \left\{ P_i^* \right\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_c \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

O esforço no pilar genérico i será então:

$$V_{ij} = V_{ij}' + V_{ij}'' \quad (4.40)$$

$$T_i = t_i \left\{ K_{cx} \ K_{cy} \ K_{cc} \right\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_c \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

+

Sendo:

V_{ij}^I = esforço no topo do pilar genérico i na direção principal i devido à variação de comprimento da superestrutura, dado pelas expressões (4.36) e (4.37).

V_{ij}^{II} = esforço no topo do pilar genérico i na direção principal j devido ao momento em relação à origem O do sistema de eixos Oxy , provocado pela variação de comprimento da superestrutura, dado pela expressão (4.39);

t_i = coeficiente de rigidez à torção (global) do pilar genérico i , dado pela expressão (3.34) no caso do pilar único e, no caso de pórtico simples, observar o item 3.3 do Capítulo III.

A marcha de cálculo para a determinação da distribuição dos esforços na infraestrutura devido à variação de comprimento da superestrutura, é a seguinte:

- 1º) determinam-se γ_i , β_i e x_i ;
- 2º) determinam-se x_o e y_o através das expressões (4.34) e (4.35);
- 3º) determinam-se V_{i1}^I e V_{i2}^I através das expressões (4.36) e (4.37), respectivamente;
- 4º) determinam-se V_{i1}^{II} , V_{i2}^{II} e T_i através das expressões (4.39) e (4.41);
- 5º) determina-se V_{ij} através da expressão (4.40).

4.4 - Pontes Retas

A) - Características Geométricas

São consideradas pontes retas aquelas apresentando o eixo reto em planta e cujos pilares estão localizados de

forma tal que um dos eixos principais de inércia da secção do fuste coincida com o eixo da estrutura. Neste caso, a matriz $[S]$ do conjunto se simplifica bastante.

Tendo em vista que $\theta_i = 0$ e $y_i = 0$, tem-se:

$$P_i = (x_i, 0, 0)$$

$$\left\{ P_{i1}^* \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \left\{ P_{i2}^* \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_i \end{Bmatrix} \quad \left\{ n_i^* \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Os elementos da matriz $[S]$ serão:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sum_i K_{i1} & S_{xy} &= 0 & S_{cx} &= 0 \\ S_{yx} &= 0 & S_{yy} &= \sum_i K_{i2} & S_{yc} &= \sum_i K_{i2} \cdot x_i \\ S_{cx} &= 0 & S_{cy} &= \sum_i K_{i2} \cdot x_i & S_{cc} &= \sum_i K_{i2} \cdot x_i^2 + \sum_i t_i \end{aligned}$$

Chamando de $[A]$ a matriz inversa de $[S]$ tem-se:

$$[S]^{-1} = [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

No caso particular, tem-se:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\sum_i K_{i1}} & A_{12} &= 0 & A_{13} &= 0 \\ A_{21} &= 0 & A_{22} &= \frac{\sum_i K_{i2} \cdot x_i^2 + \sum_i t_i}{\sum_i (K_{i2}) \cdot (\sum_i K_{i2} \cdot x_i^2 + \sum_i t_i) - (\sum_i K_{i2} \cdot x_i)^2} \end{aligned}$$

*

$$A_{23} = \frac{\sum_i K_{i2} \cdot x_i}{(\sum_i K_{i2}) \cdot (\sum_i K_{i2} \cdot x_i^2 + \sum_i t_i) - (\sum_i K_{i2} \cdot x_i)^2}$$

$$A_{31} = 0$$

$$A_{31} = 0$$

$$A_{32} = \frac{\sum_i K_{i2} \cdot x_i}{(\sum_i K_{i2}) \cdot (\sum_j K_{j2} \cdot x_i^2 + \sum_j t_j) - (\sum_i K_{i2} \cdot x_i)^2}$$

$$A_{33} = \frac{\sum_i K_{i2}}{(\sum_i K_{i2}) \cdot (\sum_i K_{i2} \cdot x_i^2 + \sum_i t_i) - (\sum_i K_{i2} \cdot x_i)^2}$$

(4.42)

E a matriz $[A]$ que é a de flexibilidade do conjunto ficará:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Utilizando as expressões (4.18), tem-se:

$$V_{i1} = K_{i1} \cdot \{1, 0, 0\} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix}$$

$$V_{i2} = K_{i2} \cdot \{0, 1, x_i\} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix}$$

$$T_i = t_i \cdot \left\{ 0, 0, 1 \right\} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix}$$

Resolvendo os sistemas de equações anteriores, tem-se:

$$V_{i1} = K_{i1} \cdot A_{11} \cdot F_x \quad (4.44)$$

$$V_{i2} = K_{i2} \cdot (A_{22} + x_i \cdot A_{32}) \cdot F_y + K_{i2} \cdot (A_{23} + x_i \cdot A_{33}) \cdot F_c \quad (4.45)$$

$$T_i = m_i \cdot A_{32} \cdot F_y + t_i \cdot A_{33} \cdot F_c \quad (4.46)$$

Sendo:

V_{i1} = força no topo do pilar i na direção principal 1;

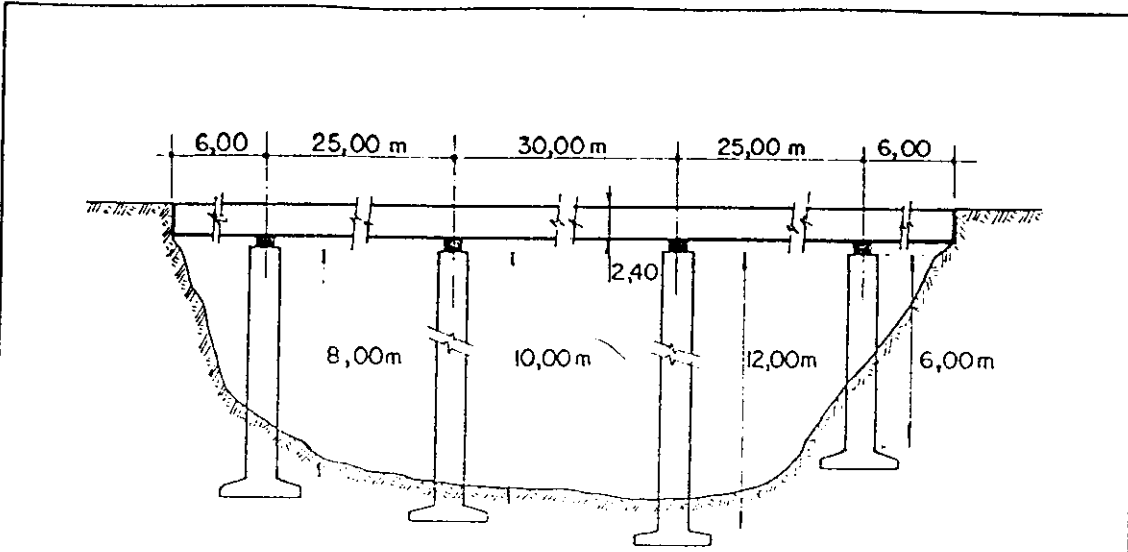
V_{i2} = força no topo do pilar i na direção principal 2;

T_i = momento de torção no topo do pilar i .

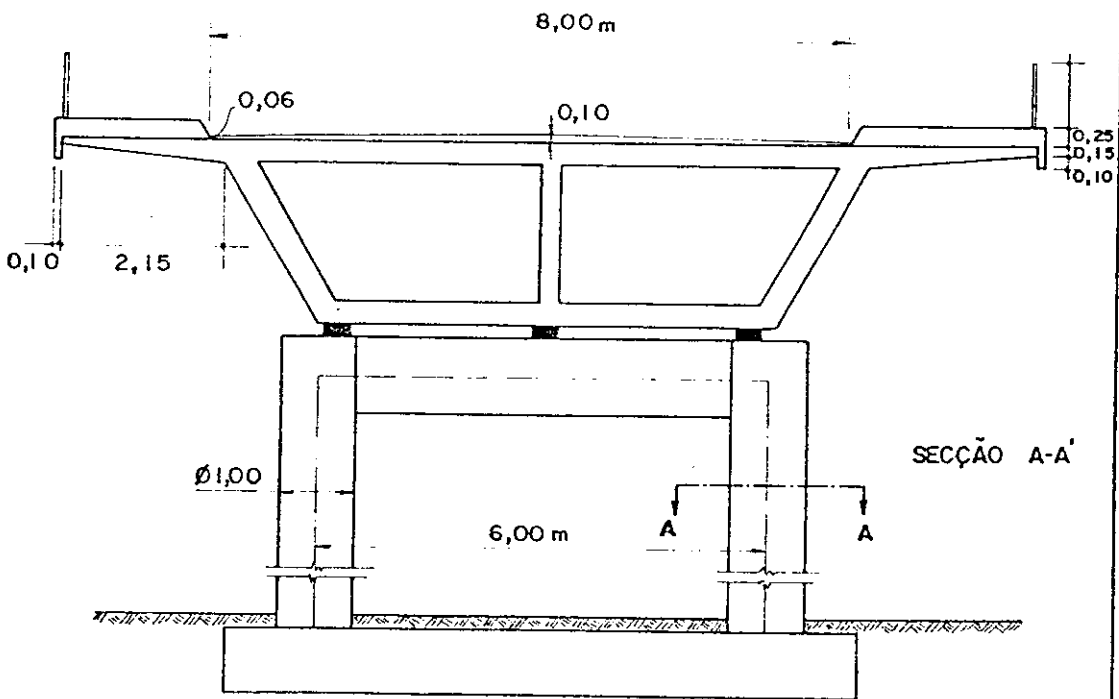
4.4.2 - Exemplo Numérico

Seja calcular os esforços horizontais nos topos dos pilares da ponte reta de tabuleiro contínuo, devido a frenagem e aceleração, vento e variação de comprimento causado pela variação de temperatura e retração.

A Fig. 4.14 mostra as secções longitudinal e transversal da ponte acima referida.



a) Secção longitudinal



b) Secção transversal

FIG. 4.14

A) - Características dos Elementos da Infraestrutura

As articulações nos topos dos pilares (0), (2) e (3) são elásticas, tendo sido adotado o neoprene, enquanto no topo do pilar (1) adotou-se articulação Freyssinet. As características dos elementos dos apoios são as seguintes:

1) - Placas de Neoprene: (3 por pilar)

Pilares (2) e (3) $4 \times 30 \times 50 \text{ cm}^3$

Pilar (1) $4 \times 30 \times 80 \text{ cm}^3$

2) - Articulação Freyssinet: (3 por pilar)

Pilar (1) $2 \times 25 \times 80 \text{ cm}^3$

O terreno é considerado incompressível, $K_s = \infty$, e os módulos de elasticidade do concreto e transversal do neoprene são:

- Módulo de elasticidade do concreto: $E = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$

- Módulo de elasticidade transversal do neoprene:

$$G_a = 80 \text{ tf/m}^2$$

B) - Ações na Superestrutura

1) - Ação do vento

Considerando a ponte carregada tem-se:

$$P_v = 0,100 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{Área de influência } A_i = (2,40 + 0,10 + 2,00) \cdot 92 = 414,00 \text{ m}^2$$

$$F_v = 0,100 \times 414,00 = 41,400 \text{ tf}$$

2) - Frenagem ou Aceleração

De acordo com a NE-2 tem-se:

*

$$F_f' = 0,30 \times 36,000 = 10,800 \text{ tf}$$

$$F_f'' = 0,05 \times (0,500 \times 3,00 + 0,300 \times 5,00) \times 92,00 = 13,800 \text{ tf}$$

Adotando-se para F_f' o maior dos dois valores,
tem-se:

$$F_f = 13,800 \text{ tf}$$

(c) - Coefficientes de Rigidez

Os coeficientes de rigidez são calculados pelas fórmulas seguintes:

1) - Rigidez Transversal

O cálculo da rigidez transversal é feito considerando as duas direções principais da secção reta do fuste do pilar; na direção 1, para o pilar aplica-se a (3.32) levando-se em conta que o mesmo é composto de duas colunas. Tem-se então:

$$K_{Pil} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{i2}}{h_i^3}$$

Na direção 2, tendo em vista tratar-se de um pórtico simples, aplica-se a expressão (3.43)

$$K_{pi2}^* = \frac{12EI_{i1} \cdot \left[(6I_v/I_{i1})(h_i/L_i) + 1 \right]}{h_i^3 \left[(3I_v/I_{i1})(h_i/L_i) + 2 \right]}$$

As colunas dos pórticos têm o mesmo diâmetro $d = 1,00 \text{ m}$ e, as vigas de apoio têm o mesmo comprimento $L = 6,00 \text{ m}$.

Os valores dos momentos de inércia dos elementos dos pórticos serão:

$$I_{i1} = I_{i2} = \frac{\pi \cdot (1,00)^4}{64} = 0,049087 \text{ m}^4$$

$$I_v = \frac{0,40 \cdot (1,50)^3}{12} = 0,1125 \text{ m}^4$$

As fórmulas dos coeficientes de rigidez ficarão:

$$K_{pi1} = \frac{5,89044 \times 10^5}{h_i^3}$$

$$K_{pi2} = \frac{11,78088 \times 10^5 (2,25804 \cdot h_i + 1)}{h_i^3 (1,1459240 \cdot h_i + 2)}$$

Para os aparelhos de apoio usa-se a expressão:

$$K_a = C_a \cdot A/e$$

Nos pilares (0) e (3) tem-se:

$$C_a = 80 \text{ tf/m}^2 \quad e \quad A_a = 0,15 \text{ m}^2 \quad e = 0,04 \text{ m}$$

$$K_a = 3 \times 80 \times 0,24/0,04 = 1.440 \text{ tf/m}$$

A rigidez global de pilar é dado pela expressão (3.32), sendo portanto, calculados na tabela 4.2 com a fórmula seguinte:

$$1/K_{ij} = 1/K_{pij} + 1/K_{ai} + 1/K_{si}$$

2) - Rigidez à Torção

A rigidez à torção é a do pórtico simples dado pela expressão (3.42), cuja transcrição é feita a seguir.

Para o pórtico sem os aparelhos de apoio tem-se:

$$r_{pi} = \frac{3EI_{i2}L_i^2}{2h_i^3} + \frac{12EI_{iv}}{L} + \frac{2GI_t}{h_i}$$

+

$$I_{i2} = 0,049087 \text{ m}^4$$

$$I_{iv} = 1,5 \times 0,40^3 / 12 = 0,008 \text{ m}^4$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2 \quad G = 0,84 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$I_{ti} = 11 \cdot (1,00)^2 / 32 = 0,0981748 \text{ m}^4$$

$$t_{pi} = \left(\frac{530,14}{h_i^3} + \frac{16,49}{h_i} + 3,2 \right) \cdot 10^4 \text{ tfm}$$

Para o aparelho de apoio tem-se:

$$t_a = G_a \cdot I_{pa} / e \quad (\text{para uma placa})$$

$$G_a = 80 \text{ tf/m}, \quad e = 0,04 \text{ m} \quad \text{e} \quad I_{pa} = (a \cdot b / 12) \cdot (a^2 + b^2)$$

Com a e b sendo as dimensões da placa de neoprene. Desta forma tem-se:

$$I_{pa} = 0,30 \times 0,50 \cdot (0,30)^2 + (0,50)^2 / 12 = 0,00425 \quad \text{para os pilares (0) e (3).}$$

$$I_{pa} = 0,30 \times 0,80 \cdot (0,30)^2 + (0,80)^2 / 12 = 0,0146 \text{ m}^4, \quad \text{para o pilar (2).}$$

Finalmente tem-se:

- Pilares (0) e (3) $t_a = 25,5 \text{ tfm}$
- Pilar (2) $t_a = 87,6 \text{ tfm}$
- Pilar (1) $t_a = \infty$

A fórmula que dá a rigidez global à torção do pilar genérico i é a dada pela expressão (3.42), ou seja:

$$1/t_i = 1/t_{pi} + 1/t_{ai}$$

Onde:

t_i = rigidez global à torção do pilar genérico i ;

t_{pi} = rigidez do pilar genérico i ;

t_{ai} = rigidez do aparelho de apoio do pilar genérico i .

As tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente, dão os valores dos coeficientes de rigidez do pilar, do aparelho de apoio e as rigidezes globais dos mesmos.

Pilar	h_i (m)	K_{pi1} (tf/m)	K_{pi2} (tf/m)	t_{pi} (tfm)	K_{ai} (tf/m)	t_{ai} (tfm)	Observações
0	8,00	3929	1150,5	62966,8	900	25,5	Ap.Neoprene
1	10,00	2064,5	589	53791,4	00	00	Ap.Freyssinet
2	12,00	1216,4	349,9	48809,6	1440	87,6	Ap.Neoprene
3	6,00	3942,2	272,7	84026,8	900	25,5	Ap.Neoprene

Tabela 4.1

Pilar	K_{i2} (tf/m)	K_{i1} (tf/m)	t_i (tf·m)
0	732,26	504,97	25,49
1	2064,50	589	53791,40
2	659,40	281,50	87,40
3	817,70	209,30	25,50

Tabela 4.2

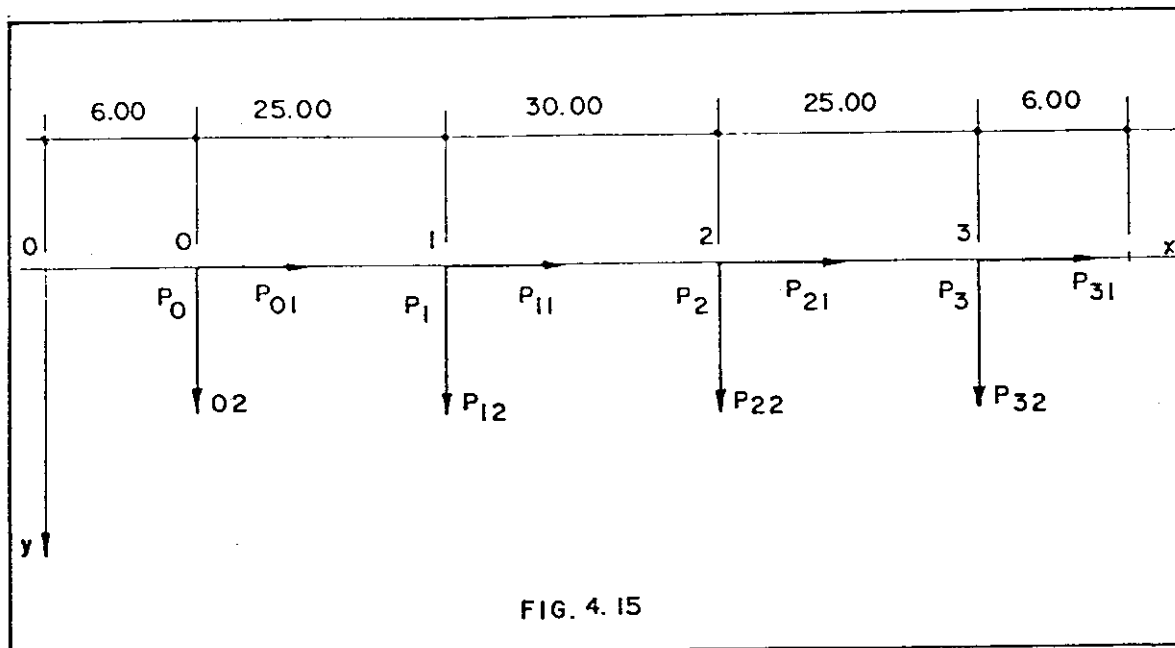
D) - Matriz de rigidez do conjunto

Para montar a matriz de rigidez do conjunto, escolhe-se um sistema de eixos coordenados, que tire partido das particularidades do problema.

O sistema de eixos, para o qual montaremos a matriz de rigidez do conjunto, foi escolhido com o eixo x coincidindo

do com o eixo da estrutura. O eixo y , no plano do tabuleiro, foi locado na ponta do balanço correspondente ao pilar (0).

Portanto, o sistema Oxy é o indicado na planta esquemática da estrutura, conforme Fig. 4.15



Os versores das direções principais da secção re-
ta do fuste do pilar genérico i , e da direção normal ao pla-
no Oxy (plano do tabuleiro), são os seguintes:

$$\left\{ P_{i1}^* \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \left\{ P_{i2}^* \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_i \end{Bmatrix}, \quad \left\{ n_i^* \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Partindo da matriz de rigidez calcula-se a matriz de flexibilidade do conjunto com a qual se determinam os esforços nos topos dos pilares. Os elementos da matriz acima referida, são calculados através das expressões (4.20).

As tabelas 4.3 e 4.4 auxiliarão no cálculo dos elementos da matriz $[A]$.

Pilar	K_{i1} (tf/m)	K_{i2} (tf/m)	t_i (tfm)	x_i (m)
0	504,97	732,26	25,49	6,00
1	589,00	2064,50	53791,90	31,00
2	281,50	659,40	87,40	61,00
3	209,30	817,70	25,50	86,00
Σ i	1584,80	4273,86	53930,30	—

Tabela 4.3

Pilar	$K_{i2} \cdot x_i$	$K_{i2} \cdot x_i^2$
0	4393,56	26361,36
1	63999,5	1983984,50
2	40223,40	2453627,40
3	70322,20	6047709,20
Σ i	178938,66	10511682,46

Tabela 4.4

Das tabelas 4.3 e 4.4, tiram-se os elementos de A .

$$A_{11} = 1/1584,80 = 63,1 \times 10^{-5}$$

$$A_{22} = \frac{10511682,46 + 53930,30}{4273,86 \times (10511682,46 + 53930,30) - (178938,66)^2} = 80,43 \times 10^{-5}$$

$$A_{32} = \frac{178938,66}{4273,86 \cdot (10511682,46 + 53930,30) - (178938,66)^2} = -1,36 \times 10^{-5}$$

$$A_{33} = \frac{4273,86}{4273,86 \cdot (10511682,46 + 53930,30) - (178938,66)^2} = 0,03 \times 10^{-5}$$

*

Com os valores acima calculados e levados às expressões (4.44)(4.45) e (4.46), constroi-se a tabela 4.5, a qual dá as expressões de V_{i1} , V_{i2} e T_i em função de $F = (F_x, F_y, F_c)$.

Pilar	V_{i1} (tf)	V_{i2} (tf)	T_i (tfm)
0	$0,31865 F_x$	$0,52909F_y - 0,00855F_c$	$-0,000347F_y + 0,000008F_c$
1	$0,37166 F_x$	$0,78867F_y - 0,00729F_c$	$-0,732703F_y + 0,017500F_c$
2	$0,17762 F_x$	$-0,01755F_y + 0,00410F_c$	$-0,001191F_y + 0,000028F_c$
3	$0,13207 F_x$	$-0,30020F_y + 0,01174F_c$	$-0,000347F_y + 0,000008F_c$

Tabela 4.5

E) - Distribuição das Ações Horizontais

Tendo as expressões dos esforços nos topos dos pilares em função das componentes que agem na superestrutura, tabela 4.5, decompõe-se a ação a distribuir em componentes, e com a utilização da tabela citada, calcula-se a parcela que vai para cada pilar.

As tabelas 4.6 e 4.7, apresentam os esforços nos pilares devido a ações da ação do vento e frenagem ou aceleração.

F) - Ação do Vento: $F_v = (0, - 41,4 - 1904,4)$

Pilar	V_{i1} (tf)	V_{i2} (tf)	T_i (tfm)
0	0	-5,63	$-14,32 \times 10^{-4}$
1	0	-18,75	-2,99
2	0	-7,08	$-47,98 \times 10^{-4}$
3	0	-9,93	$-14,20 \times 10^{-4}$
Σ i	0	-41,39	—

Tabela 4.6



C) - Frenagem ou Aceleração: $F_f = (14,4, 0, 0)$

Pilar	V_{i1} (tf)	V_{i2} (tf)	T_i (tfm)
0	4,59	0	0
1	5,35	0	0
2	2,56	0	0
3	1,90	0	0
Σ i	14,40	0	0

Tabela 4.7

4.5 - PONTES ESCONSAS

Neste trabalho consideram-se pontes esconsas, aquelas cujos eixos são retilíneos em planta e cujas direções principais da secção reta do fuste dos pilares, não são coincidentes com a do eixo da estrutura.

4.5.1 - Características Geométricas

No exemplo que será resolvido mais adiante, estuda-se o caso da ponte esconsa cujas secções retas dos fustes dos pilares têm os eixos principais correspondentes paralelos entre si.

Escolhendo-se um sistema de coordenadas com o eixo da estrutura coincidindo com o eixo x , adotando o versor \vec{p}_{i1} na direção positiva do referido eixo, assim como adotando o versor \vec{p}_{i2} na direção e sentido positivo do eixo y , os versores \vec{p}_{ij} e \vec{n}_i , sendo este último na direção e sentido positivo do eixo z , sendo portanto expressos pelos vetores dados a seguir.

+

$$\left\{ p_{i1}^* \right\} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \\ x_i \cdot \text{sen}\theta \end{Bmatrix}, \quad \left\{ p_{i2}^* \right\} = \begin{Bmatrix} -\text{sen}\theta \\ \cos\theta \\ x_i \cdot \cos\theta \end{Bmatrix}, \quad \left\{ n_i^* \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Os elementos da matriz de rigidez do conjunto terão as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \cos^2\theta \cdot (\sum_i K_{i1}) + \text{sen}^2\theta \cdot (\sum_i K_{i2}) \\ S_{xy} &= S_{yx} = \text{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \sum_i (K_{i1} - K_{i2}) \\ S_{xc} &= S_{cx} = \text{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot \sum_i (K_{i1} - K_{i2}) \cdot x_i \\ S_{yy} &= \text{sen}\theta \cdot (\sum_i K_{i1}) + \cos\theta \cdot (\sum_i K_{i2}) \\ S_{yc} &= S_{cy} = \text{sen}^2\theta \cdot (\sum_i K_{i1} \cdot x_i) + \cos^2\theta \cdot (\sum_i K_{i2} \cdot x_i) \\ S_{cc} &= \text{sen}^2\theta \cdot (\sum_i K_{i1} \cdot x_i^2) + \cos^2\theta \cdot (\sum_i K_{i2} \cdot x_i^2) + \sum_i t_i \end{aligned} \quad (4.47)$$

Os elementos da matriz de flexibilidade do conjunto são dados pelas expressões seguintes:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{S_{yy} \cdot S_{cc} - S_{cy}^2}{|s|}, & A_{12} &= A_{21} = \frac{S_{cy} \cdot S_{cx} - S_{yx} \cdot S_{cc}}{|s|} \\ A_{13} &= A_{31} = \frac{S_{xy} \cdot S_{cy} - S_{yy} \cdot S_{xc}}{|s|}, & A_{22} &= \frac{S_{xx} \cdot S_{cc} - S_{xc}^2}{|s|} \\ A_{23} &= A_{32} = \frac{S_{xy} \cdot S_{cx} - S_{xx} \cdot S_{cy}}{|s|}, & A_{33} &= \frac{S_{xx} \cdot S_{yy} - S_{xy}^2}{|s|} \end{aligned} \quad \dots (4.48)$$

Utilizando as expressões (4.44) e (4.45), calculam-se os esforços nos topos dos pilares.

+

$$V_{i1} = K_{i1} \cdot \{\cos\theta, \text{sen}\theta, x_i \cdot \text{sen}\theta\} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix}$$

$$V_{i2} = K_{i2} \cdot \{-\text{sen}\theta, \cos\theta, x_i \cdot \cos\theta\} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix}$$

$$T_i = t_i \cdot \{0, 0, 1\} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_c \end{Bmatrix}$$

Resolvendo as equações acima tem-se:

$$\begin{aligned} V_{i1} &= K_{i1} \cdot (\cos\theta \cdot A_{11} + \text{sen}\theta \cdot A_{21} + x_i \cdot \text{sen}\theta \cdot A_{13}) \cdot F_x \\ &+ K_{i1} \cdot (\cos\theta \cdot A_{21} + \text{sen}\theta \cdot A_{22} + x_i \cdot \text{sen}\theta \cdot A_{23}) \cdot F_y \\ &+ K_{i1} \cdot (\cos\theta \cdot A_{31} + \text{sen}\theta \cdot A_{32} + x_i \cdot \text{sen}\theta \cdot A_{33}) \cdot F_c \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} V_{i2} &= K_{i2} \cdot (-\text{sen}\theta \cdot A_{11} + \cos\theta \cdot A_{12} + x_i \cdot \cos\theta \cdot A_{13}) \cdot F_x \\ &+ K_{i2} \cdot (-\text{sen}\theta \cdot A_{21} + \cos\theta \cdot A_{22} + x_i \cdot \cos\theta \cdot A_{23}) \cdot F_y \\ &+ K_{i2} \cdot (-\text{sen}\theta \cdot A_{31} + \cos\theta \cdot A_{32} + x_i \cdot \cos\theta \cdot A_{33}) \cdot F_c \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$T_i = t_i \cdot (A_{11} \cdot F_x + A_{23} \cdot F_y + A_{33} \cdot F_c) \quad (4.51)$$

OBS.: |S| = determinante da matriz [S].

+

4.5.2 - Exemplo Numérico

Calcular os esforços horizontais, nos topos dos pilares da ponte esconsa de tabuleiro contínuo, devido a ação do vento e a ação da frenagem ou aceleração.

As Figs. 4.16 e 4.17 são secções longitudinal e transversal e planta respectivamente, da ponte acima referida.

A)- Características dos Elementos da Infraestrutura

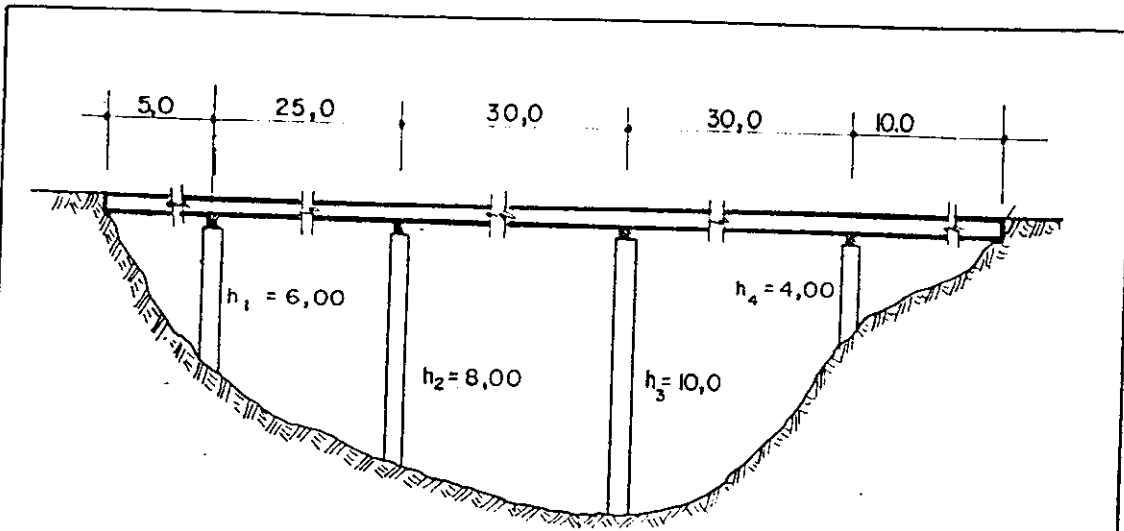
As articulações nos topos dos pilares são em neoprene, cujas características estão abaixo relacionadas.

- Dimensões: 2 placas por pilar ($30 \times 60 \times 2 \text{ cm}^3$)
- Módulo de elasticidade transversal: $G_a = 80 \text{ tf/m}^2$

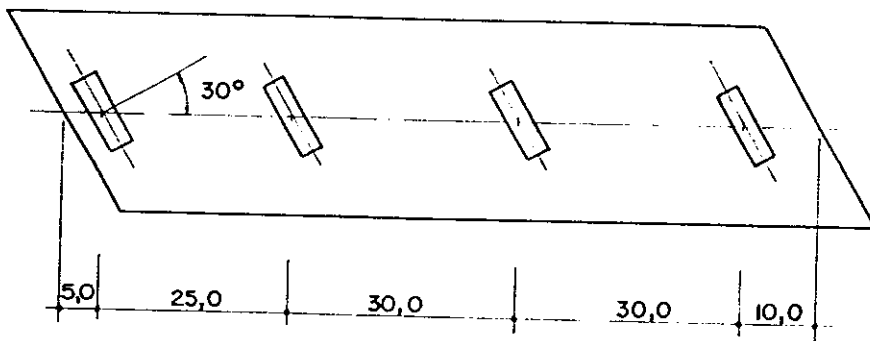
Os pilares são de secção retangular constante ao longo do fuste e cujas características são as seguintes:

- Dimensões: $0,50 \times 4,00 \text{ m}^2$ e altura variável, de acordo com o pilar em questão.
- Módulo de elasticidade do concreto: $E = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$
- Módulo de elasticidade transversal do concreto: $C = 0,9 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$

+

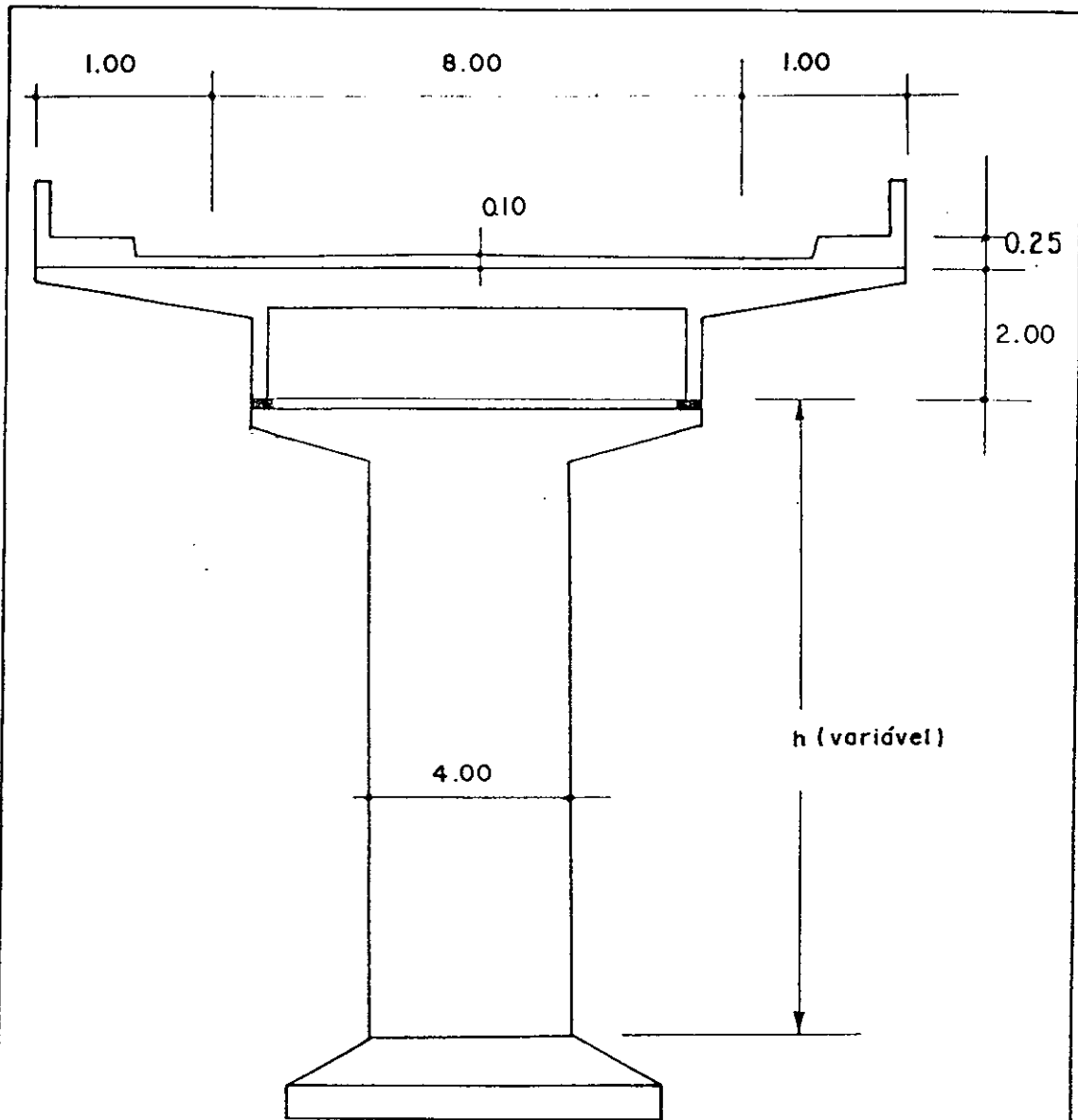


a) Secção longitudinal

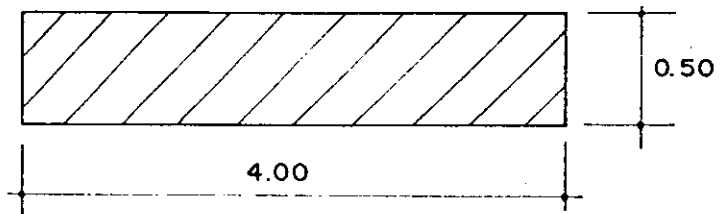


b) Planta

FIG. 4. 16



b) SEÇÃO TRANSVERSAL



a) SEÇÃO RETA DO PILAR

FIG. 4.17

+

E)- Coefficiente de rigidez dos pilares e aparelhos de apoios

a) - Aparelhos de apoio

Usando-se as expressões (3.3) e (3.8), tem-se:

$$K_a = C_a \cdot A_a / e = 80 \times 0,30 \times 0,60 \times 2 / 0,02 = 1.440 \text{ tf/m}$$

$$t_a = C_a \cdot I_p / e$$

Sendo:

$$I_p = 0,30 \times 0,60 \times (0,30^2 + 0,60^2) / 12 = 0,00675 \text{ m}^4$$

$$t_a = 80 \times 0,00675 \times 2 / 0,02 = 54 \text{ tf} \cdot \text{m}$$

b) Pilares

Usando-se as expressões (3.18) e (3.19) tem-se:

$$K_p = 3 EI / h^3$$

Sendo:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$I = 0,50 \times 4,00^3 / 12 = 2,6667 \text{ m}^4 \text{ (direção principal 1)}$$

$$I = 4,00 \times 0,50^3 / 12 = 0,041667 \text{ m}^4 \text{ (direção principal 2)}$$

$$t_p = G \cdot I_t / h$$

Sendo:

$$G = 0,9 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$$

$$I_t = \beta b \cdot c^3 = 0,307 \times 4,00 \times 0,50^3 = 0,1535 \text{ m}^4 \quad (\beta = 0,307 \text{ tirado da tabela 3.1, em função de } b/c = 8)$$

h = variável de acordo com o pilar.

As tabelas 4.8 e 4.9 dão os valores das rigidezes: do pilar, aparelhos de apoio e global referente às direções principais 1 e 2 da secção reta do fuste do pilar genérico i.

Pilar	h_i (m)	K_{pil} (tf/m)	K_{pi2} (tf/m)	K_{ai} (tf/m)	t_{pi} (tf·m)	t_{ai} (tf·m)
1	6	1157,407	74074,074	1440,000	23025,000	54,000
2	8	488,281	31250,000	1440,000	17268,750	54,000
3	10	250,000	16000,000	1440,000	13815,000	54,000
4	4	3906,250	250000,000	1440,000	34537,000	54,000

Tabela 4.8

Pilar	x_i (m)	K_{xi1} (tf/m)	K_{xi2} (tf/m)	t_i (tf·m)
1	0,00	641,665	1414,540	53,874
2	25,00	364,638	1376,568	53,832
3	55,00	213,018	1321,101	53,789
4	85,00	1052,139	1431,753	53,916

Tabela 4.9

c) - Matriz de flexibilidade do conjunto

Os elementos da matriz de flexibilidade do conjunto são calculados usando-se as expressões (4.47) e (4.48).

Para utilização das expressões citadas anteriormente, a construção das tabelas 4.10 e 4.11 é de fundamental importância, haja visto que as mesmas sistematizam os cálculos.

+

Pilar	x_i (m)	K_{i1} (tf/m)	K_{i2} (tf/m)	t_i (tf.m)
1	0,00	641,665	1414,540	53,874
2	25,00	364,638	1376,568	53,832
3	55,00	313,018	1321,101	53,789
4	85,00	1052,139	1431,753	53,916
		2271,460	5543,962	215,411

Tabela 4.10

Pilar	x_i (m)	$K_{i1} \cdot x_i$ (tf)	$K_{i2} \cdot x_i$ (tf)	$K_{i1} \cdot x_i^2$ (tf.m)	$K_{i2} \cdot x_i^2$ (tf.m)
1	0,00	0,000	0,000	0,000	0,00
2	25,00	9115,950	34414,200	227898,00	860355,00
3	55,00	11715,99	72660,560	644379,450	3996330,50
4	85,00	89431,815	121669,610	7601704,300	10344415,00
		110263,76	228773,770	8473982,500	15201101,00

Tabela 4.11

Das tabelas 4.10 e 4.11 tiram-se os valores de K_{i1} , K_{i2} , $K_{i1} \cdot x_i$, $K_{i1} \cdot x_i^2$, $K_{i2} \cdot x_i$, $K_{i2} \cdot x_i^2$ e calculam-se os S_{gh} usando-se as expressões (4.47).

$$S_{xx} = 0,8660254^2 \times (2271,46) + 0,5^2 \times (5543,962) = +3089,585$$

$$S_{xy} = 0,8660254 \times 0,5 \times (2271,46 - 5543,962) = -1417,035$$

$$S_{xc} = 0,8660254 \times 0,5 \times (110263,76 - 228773,770) = -51316,339$$

$$S_{yy} = 0,5^2 \times (2271,46) + 0,8660254^2 \times (5543,962) = +4725,836$$

$$S_{cy} = 0,5^2 \times (110263,76) + 0,8660254^2 \times (228773,770) = +199146,270$$

+

$$S_{cc} = 0,5^2 \times (8473982,500) + 0,3660254^2 \times (15201101,000) + 215,411 = 13519537,000$$

O determinante $|S|$, formado com os elementos S_{gh} será:

$$\begin{aligned} |S| &= 3089,585 \times 4725,836 + 2 \times (-1417,035) \times (199146,270) \times (-51316,339) + \\ &\quad - (+199146,270)^2 \times (+3089,585) - (-51316,339)^2 \times (4725,836) + \\ &\quad - (-1417,035)^2 \times (+13519537,000) = +6,4237206 \times 10^{13} \end{aligned}$$

Os elementos A_{gh} , da matriz de flexibilidade do conjunto são calculados através das expressões (4.48), como segue:

$$\begin{aligned} |S| \cdot A_{11} &= (+4725,836) \times (+13519537,000) - (+199146,270)^2 = \\ &= +2423,1885 \times 10^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S| \cdot A_{12} &= (+199146,270) \times (-51316,339) - (-1417,035) \times (13519537,000) = \\ &= +893,8199 \times 10^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S| \cdot A_{13} &= (-1417,035) \times (+199146,270) - (+4725,836) \times (-51316,339) = \\ &= -3,9684607 \times 10^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S| \cdot A_{22} &= (+3089,585) \times (13519537,000) - (-51316,339)^2 = \\ &= 3913,6399 \times 10^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S| \cdot A_{23} &= (-1417,035) \times (-51316,339) - (+3089,585) \times (+199146,270) = \\ &= -54,256238 \times 10^7 \end{aligned}$$

$$|S| \cdot A_{33} = (+3089,585) \times (4725,836) - (-1417,035)^2 = +1,2592888 \times 10^7$$

+

D) - Cálculo dos esforços nos topos dos pilares

O cálculo dos esforços horizontais nos topos dos pilares é feito através das expressões (4.44), (4.45) e (4.46).

Utilizando-se os valores dos Λ_{gh} , acima calculados, e com os valores: $\cos\theta = 0,8660254$, $\sin\theta = 0,5$ tem-se:

Pilar	V_{i1} (tf)	x_i (m)	K_{i1} (tf/m)
1	$+0,254265F_x + 0,272789F_y - 0,003053F_c$	0	641,665
2	$+0,141675F_x + 0,116519F_y - 0,000842F_c$	25,00	364,638
3	$+0,080791F_x + 0,041081F_y + 0,000135F_c$	55,00	213,018
4	$+0,382294F_x + 0,069611F_y + 0,003758F_c$	85,00	1052,139
SOMA	$+0,866025F_x + 0,500000F_y - 0,000000F_c$	—	—

Tabela 4.12

Pilar	x_i (m)	K_{i2} (tf/m)	V_{i2} (tf)
1	0,00	1414,540	$-0,096345F_x + 0,647934F_y - 0,009909F_c$
2	25,00	1376,568	$-0,112171F_x + 0,378813F_y - 0,003801F_c$
3	55,00	1321,101	$-0,128856F_x + 0,073646F_y + 0,003080F_c$
4	85,00	1431,753	$-0,162628F_x - 0,234368F_y + 0,010630F_c$
SOMA			$-0,500000F_x - 0,866025F_y + 0,000000F_c$

Tabela 4.13

+

Pilar	x_i (m)	t_i (tf·m)	T_i (tf·m)		
1	0,00	53,874	$-0,0000333F_x$	$-0,000455F_y$	$+0,0000106F_c$
2	25,00	53,832	$-0,0000333F_x$	$-0,000455F_y$	$+0,0000106F_c$
3	55,00	53,789	$-0,0000332F_x$	$-0,000454F_y$	$+0,0000105F_c$
4	85,00	53,916	$-0,0000333F_x$	$-0,000455F_y$	$+0,0000106F_c$
SOMA			$-0,0001332F_x$	$-0,001819F_y$	$+0,0000424F_c$

Tabela 4.14

As tabelas 4.12, 4.13 e 4.14 expressam os esforços nos topos dos pilares em função das componentes das forças externas referentes ao sistema de eixos Oxy.

As tabelas 4.15 e 4.16 dão os esforços nos topos dos pilares devidos às ações do vento e frenagem ou aceleração, respectivamente.

a) Ação do vento (NB-2)

- Área de incidência de vento: $100 \times 4,60 = 460,00 \text{ m}^2$
- Pressão do vento ponte carregada: $0,100 \text{ tf/m}^2$
- Ponto de aplicação em relação à origem do sistema de eixos Oxy, da resultante (Fig. 4.16): (45, 0, 0)
- Resultante da ação do vento: $F_v = (0, 46, 2185)$

Pilar	F_{i1} (tf)	F_{i2} (tf)	T_i (tf·m)
1	+5,878	+8,153	+0,00223
2	+3,521	+9,120	+0,00223
3	+2,186	+10,117	+0,00206
4	+11,414	+12,445	+0,00223
SOMA	+22,999	+39,838	+0,00896

Tabela 4.15

*

b) Frenagem ou aceleração

Segundo a NB-2, deve-se adotar o maior dos seguintes valores:

$$F_f^I = 0,30 \times 36 = 10,800 \text{ tf}$$

$$F_f^{II} = 0,05(0,500 \times 3,00 + 0,300 \times 5,00) \times 100 = 15,000 \text{ tf}$$

$$\text{Portanto, } F_f = (15, 0, 0)$$

Pilar	V_{i1} (tf)	V_{i2} (tf)	T_i (tf·m)
1	+3,814	-1,445	-0,00050
2	+2,125	-1,683	-0,00050
3	+1,212	-1,993	-0,00050
4	+5,839	-2,439	-0,00050
SOMA	+12,990	-7,500	-0,00200

Tabela 4.16



CAPÍTULO V

DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS HORIZONTAIS EM PONTES DE TABULEIRO CONTENDO JUNTAS DE DILATAÇÃO

Quando a ponte é constituída de tramos independentes apoiados nos topos dos pilares através de aparelhos de apoio elásticos, o problema da distribuição dos esforços horizontais na infraestrutura de uma ponte se torna bastante complexo.

No que segue apresenta-se uma indicação geral para o cálculo automático da distribuição dos esforços acima referidos, adotando um processo diferente do que foi empregado para o caso de pontes com tabuleiros contínuos. Para o caso presente adota-se um sistema de coordenadas globais cujas direções são: as principais das secções retas dos fustes dos pilares e as de rotação em torno dos eixos dos mesmos. Para as forças externas que atuam nas direções das coordenadas calculam-se os deslocamentos correspondentes e, através da expressão (3.1) determinam-se os valores dos esforços nos topos dos pilares.

São adotadas, neste capítulo, as mesmas hipóteses

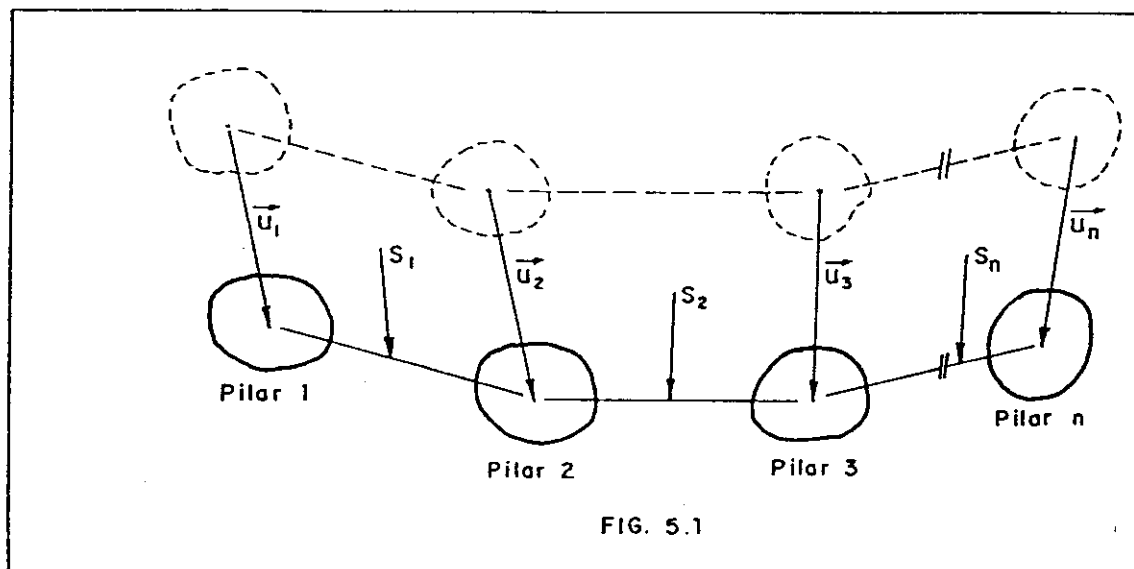
+

simplificadoras feitas no capítulo IV.

O tabuleiro é representado pela linha que representa seu eixo e dois tabuleiros consecutivos que se encontram no mesmo pilar se apoiam em alastômeros supostos centrados com o eixo do referido pilar.

5.1. Descrição do Processo

A figura 5.1, representa um esquema geral de uma ponte com tramos independentes. Os tabuleiros estão representados por barras e os pilares, visto em planta, estão sendo representados pelas figuras geométricas que reúnem duas barras consecutivas, sendo os mesmos numerados de 1 a n. Ainda na mesma figura, indicam-se os deslocamentos \vec{u} dos topos dos pilares no plano do tabuleiro e as forças S que os produzem.



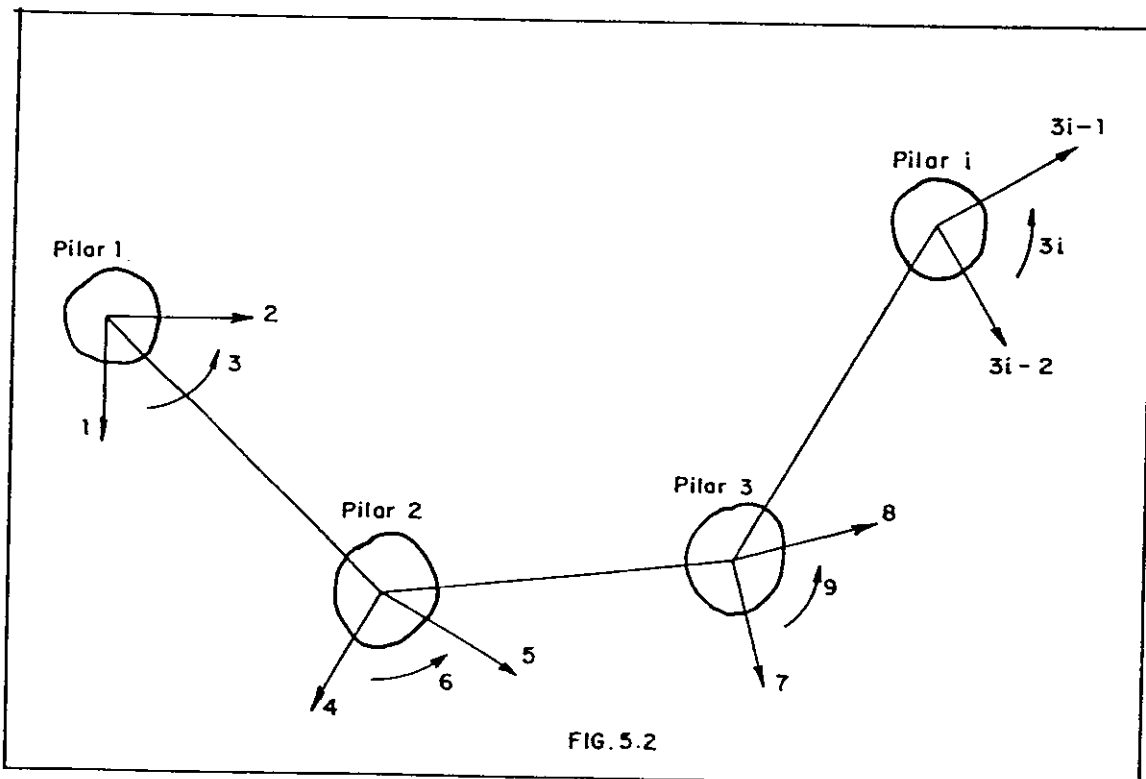
Adota-se um sistema de coordenadas globais localizadas nos topos dos pilares, conforme se especificou anteriormente, e os deslocamentos u_i serão referidos às mesmas coordenadas. A figura 5.2 representa uma ponte qualquer com juntas de dilatação nos topos dos pilares e as

†

coordenadas são colocadas nas direções: principais das seções retas dos fustes dos pilares e de rotações em torno dos eixos dos mesmos.

A numeração das coordenadas obedece a seguinte sequência:

- Pilar 1: direção principal 1 = coordenada 1;
direção principal 2 = coordenada 2;
direção 3 (torção) = coordenada 3;
- Pilar 2: direção principal 1 = coordenada 4;
direção principal 2 = coordenada 5;
direção 3 (torção) = coordenada 6;
- Pilar i: direção principal 1 = coordenada $3i - 2$;
direção principal 2 = coordenada $3i - 1$;
direção 3 (torção) = coordenada $3i$.



Sob a ação das forças externas \vec{S} a estrutura atinge o equilíbrio estático, desenvolvendo-se nos topos dos pilares esforços horizontais (cortante e momento torçor), os quais são proporcionais aos deslocamentos em suas

+

respectivas direções. De acordo com a expressão (3.1), pode-se expressar os esforços acima referidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V_{i1} &= K_{i1} u_{i1} \\ V_{i2} &= K_{i2} u_{i2} \\ V_i &= t_i u_{i3} \text{ (torção)} \end{aligned} \quad \text{com } \vec{u}_i = \begin{Bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{Bmatrix}$$

Ou então, sob forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ V_{i3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & t_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Sendo:

V_{ij} ($j=1,2,3$) = esforço que surge no topo do pilar i na mesma direção que o deslocamento ocorrido;

u_{ij} ($j=1,2,3$) = deslocamento do topo do pilar i , na direção da coordenada correspondente à direção j ;

j = índice que identifica: as direções principais da seção reta do pilar i e a direção da rotação em torno do eixo do mesmo pilar;

K_{ij} = coeficiente de rigidez do pilar i à flexão na direção j ($j=1,2$);

t_i = coeficiente de rigidez à torção do pilar i na direção $j = 3$.

Como se observa, expressão (5.3), se os deslocamentos $\{u_i\}$ são conhecidos, os esforços $\{V_i\}$ ficam determinados, bastando para tanto determinar a matriz que trans-



forme as ações externas que agem nos topos dos pilares, nas direções das coordenadas globais acima definidas, em deslocamentos $\{u_i\}$, os quais, através da (5.3) são levados aos esforços correspondentes.

Para se determinar os $\{u_i\}$, procura-se a matriz A que transforma as forças externas atuando nas coordenadas globais em deslocamentos correspondentes, 13 , ou seja:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Sendo:

F_m = componente da resultante das forças externas que atuam nos tramos que concorrem no topo do pilar possuidor da coordenada m ;

A_{gh} ($g=1, \dots, m$ e $h=1, \dots, m$) = elementos da matriz de flexibilidade do conjunto em relação ao sistema de coordenadas indicado.

Normalmente determinar-se-ia a matriz de flexibilidade do conjunto em relação ao sistema de coordenadas indicado, caso a operação não fosse tão complicada. Para a estrutura analisada neste capítulo, é mais conveniente determinar a matriz de rigidez do conjunto e invertê-la obtendo, desta maneira, a matriz de flexibilidade A . Essa operação é possível porque as forças e os deslocamentos nas direções das coordenadas estabelecidas são independentes.

No que segue, portanto, determina-se a matriz de

+

rigidez $[S]$ do conjunto em relação ao mesmo sistema com a qual soluciona-se o problema, porquanto $[A] = [S]^{-1}$.

A equação que relaciona os deslocamentos $\{u_i\}$, com as forças externas que agem nos topos dos pilares nas direções das coordenadas globais, é a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ F_h \\ \cdot \\ F_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1h} & \dots & S_{1m} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2h} & \dots & S_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ S_{h1} & S_{h2} & \dots & S_{hh} & \dots & S_{hm} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mh} & \dots & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_h \\ \cdot \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

A partir da expressão (5.5), fazendo deslocamento unitário na direção da coordenada h , mantendo deslocamentos nulos nas direções das demais, obtêm-se os elementos da coluna h da matriz $[S]$.

Os elementos das demais colunas são determinados aplicando raciocínio análogo ao acima comentado, ou seja, dá-se deslocamento unitário na coordenada correspondente ao número da coluna, prendendo os movimentos nas direções das demais coordenadas calculando em seguida os esforços que surgem nos extremos das barras do conjunto.

Uma observação que cabe comentar aqui, é a de que o deslocamento na direção de uma só coordenada, em vista das demais permanecerem presas, desperta esforços no topo do pilar onde está a coordenada e nos topos dos pilares imediatamente vizinhos (pilar anterior e posterior), permanecendo esforços nulos nos topos dos demais pilares.

A matriz de rigidez, em vista do que foi acima comentado, é composta de submatrizes 9×3 , sendo cada submatriz correspondente a influência dos deslocamentos unitários

+

rios nas direções das três coordenadas do pilar correspondente, exceção apenas para o pilar inicial e final do conjunto, os quais, conforme se pode constatar claramente, contribuem com submatrizes 6×3 , portanto tem-se:

$$[S] = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} S_1 \\ 6 \times 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} S_2 \\ 9 \times 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} S_3 \\ 9 \times 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} S_4 \\ 9 \times 3 \end{array} \right] \\ \dots \\ \left[\begin{array}{c} S_{n-1} \\ 9 \times 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} S_n \\ 6 \times 3 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (5.6)$$

Na expressão (5.6) as submatrizes $[S_i]$, como foi comentado anteriormente, representa a contribuição do pilar i para a matriz total $[S]$.

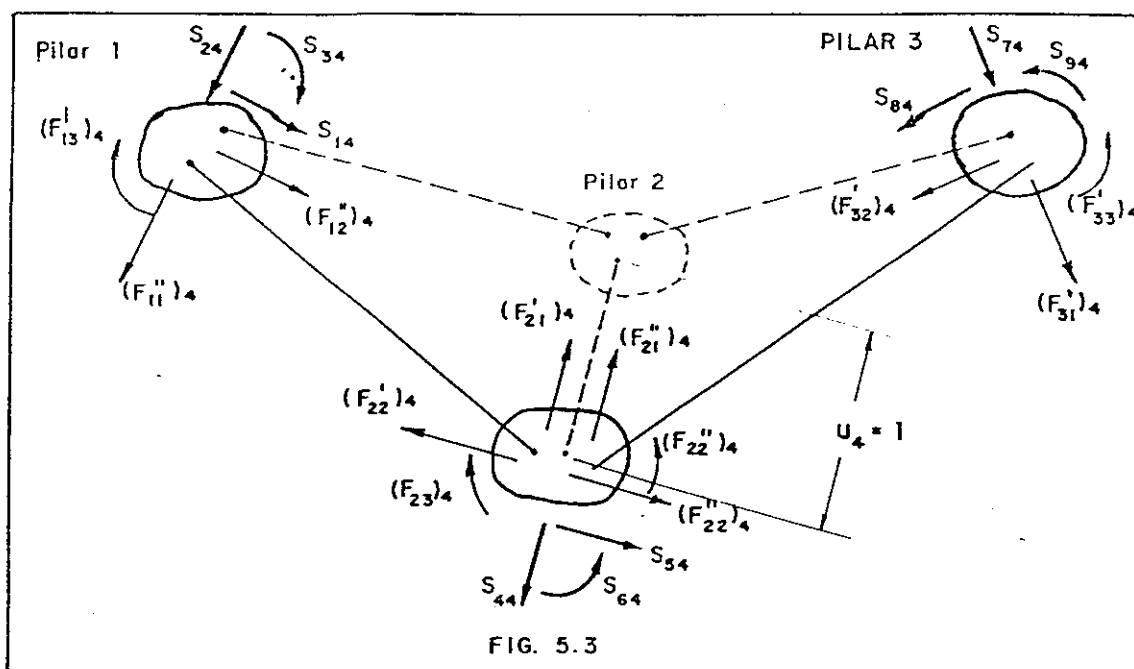
Para se determinar as submatrizes acima referidas, tira-se do esquema da figura 5.2 uma seqüência de três pilares consecutivos e determina-se para o pilar central da seqüência, a submatriz correspondente, a qual, por simples troca de índices representará a submatriz para qualquer pilar do conjunto.

Determinação da submatriz $[S_i]$

Como foi exposto acima, a determinação da submatriz $[S_i]$ é feita destacando-se do conjunto, uma seqüência de três pilares, tendo como central o pilar i . Na determinação dos elementos da submatriz trabalha-se, portanto, com os pilares de índices: $i-1, i, i+1$. Para evitar expressões com índices extensos ($i-1, i+1$), analisa-se a seqüência composta pelos pilares: 1, 2, 3, e por troca de índices têm-se as expressões de todas submatrizes do conjunto.

A figura 5.3 representa a seqüência de pilares a

cima referida, na qual se provoca um deslocamento unitário só na direção da coordenada 4, mantendo-se deslocamentos nu los nas direções das demais.



Provocando-se um deslocamento unitário na coordenada 4 (direção principal 1) do pilar 2, surgem, em consequência, esforços nas coordenadas globais referentes aos pilares; 1, 2 e 3, os quais estão indicados na figura 5.3.

Da condição de equilíbrio estático de forças após ter se processado os deslocamentos, determinam-se os elementos da 1ª coluna da submatriz $[S_2]$. Para se calcular os elementos das demais colunas da mesma submatriz, basta aplicar deslocamentos unitários nas direções das coordenadas globais correspondentes às posições das colunas, obedecendo o que foi feito para a coordenada 4.

Fazendo o equilíbrio de forças, figura 5.4:

Pilar central (pilar 2)

*

$$S_{gh} - \sum_i (F_{ij})_h = \begin{cases} K_{ij} & \text{se } j = 1 \text{ e } 2 \\ t_i & \text{se } j = 3 \end{cases}$$

Pilares vizinhos (pilares 1 e 3)

$$S_{gh} - \sum_i (F_{ij})_4 = 0$$

$$S_{14} = - (F''_{11})_4$$

$$S_{15} = - (F''_{11})_5$$

$$S_{24} = - (F''_{12})_4$$

$$S_{25} = - (F''_{12})_5$$

$$S_{34} = - (F''_{13})_4$$

$$S_{35} = - (F''_{13})_5$$

$$S_{44} = K_{21} - [(F'_{21})_4 + (F''_{21})_4]$$

$$S_{45} = - [(F'_{21})_5 + (F''_{21})_5]$$

$$S_{54} = - [(F'_{22})_4 + (F''_{22})_4]$$

$$S_{55} = K_{22} - [(F'_{22})_5 + (F''_{22})_5]$$

$$S_{64} = - [(F'_{23})_4 + (F''_{23})_4]$$

$$S_{65} = - [(F'_{23})_5 + (F''_{23})_5]$$

$$S_{74} = - (F'_{31})_4$$

$$S_{75} = - (F'_{31})_5$$

$$S_{84} = - (F'_{32})_4$$

$$S_{85} = - (F'_{32})_5$$

$$S_{94} = - (F'_{23})_4$$

$$S_{95} = - (F'_{33})_5$$

$$S_{16} = - (F''_{11})_6$$

$$S_{26} = - (F''_{12})_6$$

$$S_{36} = - (F''_{13})_6$$

$$S_{46} = - [(F'_{21})_6 + (F''_{21})_6]$$

$$S_{56} = -[(F'_{22})_6 + (F''_{22})_6]$$

$$S_{66} = t_2 - [(F'_{23})_6 + (F''_{23})_6]$$

$$S_{76} = - (F'_{31})_6$$

$$S_{86} = - (F'_{32})_6$$

$$S_{96} = - (F'_{33})_6 \tag{5.7}$$

Logo a submatriz $[S_2]$ será:

$$\begin{bmatrix} -(F''_{11})_4 & -(F''_{11})_5 & -(F''_{11})_6 \\ -(F''_{12})_4 & -(F''_{12})_5 & -(F''_{12})_6 \\ -(F''_{13})_4 & -(F''_{13})_5 & -(F''_{13})_6 \\ t_{21} - [(F'_{21})_4 + (F''_{21})_4] & - [(F'_{21})_5 + (F''_{21})_5] & - [(F'_{21})_6 + (F''_{21})_6] \\ - [(F'_{22})_4 + (F''_{22})_4] & - [(F'_{22})_5 + (F''_{22})_5] - [(F'_{22})_6 + (F''_{22})_6] & - [(F'_{22})_6 + (F''_{22})_6] \\ - [(F'_{23})_4 + (F''_{23})_4] & - [(F'_{23})_5 + (F''_{23})_5] & t_2 - [(F'_{23})_6 + (F''_{23})_6] \\ -(F'_{31})_4 & -(F'_{31})_5 & -(F'_{31})_6 \\ -(F'_{32})_4 & -(F'_{32})_5 & -(F'_{32})_6 \\ -(F'_{33})_4 & -(F'_{33})_5 & -(F'_{33})_6 \end{bmatrix}$$

Sendo:

S_{gh} ($g=1\dots 9$ e $h=4,5,6$) = esforço que surge na coordenada g devido a deslocamento unitário somente na coordenada h ;

$(F'_{ij})_h$ = esforço no pilar i na direção j , exercido pelo aparelho de apoio da extremidade direita da barra em contacto com o referido pilar, devido ao deslocamento unitário imposto na direção da coordenada global h ;

+

$(F''_{ij})_h$ = idem para a extremidade esquerda da barra em contato com o pilar \underline{i} ;

(K_{ij}) = coeficiente de rigidez à flexão do fuste do pilar \underline{i} , na direção principal j ;

(t_i) = coeficiente de rigidez à torção do fuste do pilar \underline{i} (direção 3)

Para os demais pilares, basta mudar os índices; 1, 2, 3, 9, das expressões (5.7) e (5.8), para os índices correspondentes à numeração das coordenadas da sequência de três pilares, tendo como pilar central o pilar cuja submatriz se quer determinar.

Os esforços acima definidos são os que se manifestam nos topos dos pilares da sequência, quando se provocou deslocamento unitário na direção da coordenada h do pilar $\underline{2}$, nas condições descritas anteriormente. Estes esforços foram exercidos pelas extremidades das barras $\underline{1-2}$ e $\underline{2-3}$, as quais em contrapartida, recebem daqueles, em seus extremos, esforços de mesmas direções e intensidades, porém de sentidos contrários.

Chamaremos de; S' , S'' , S'_0 e S''_0 , os esforços que atuam nas extremidades das barras $\underline{1-2}$ e $\underline{2-3}$, os quais são definidos a seguir, para deslocamento unitário imposto na coordenada h do pilar $\underline{2}$, mantendo-se deslocamentos nulos nas demais coordenadas.

A - Extremidades iniciais das barras; $\underline{1-2}$ e $\underline{2-3}$

$(S''_{gt})_h$ = esforço, na direção do eixo da barra, que o topo do pilar exerce na extremidade g ($g=1$ e 2), da barra;

$(S''_{gn})_h$ = esforço, na direção normal à barra, que o topo do pilar exerce na extremidade g ($g=1$ e 2);

+

$(S''_{\theta})_h$ = momento, no plano horizontal, que o topo do pilar exerce na extremidade g ($g=1$ e 2).

D - Extremidades finais das barras; 1-2 e 2-3

$(S'_{gt})_h$ = esforço, na direção do eixo da barra, que o topo do pilar exerce na extremidade g ($g=2$ e 3);

$(S'_{gn})_h$ = esforço, na direção normal ao eixo da barra, que o topo do pilar exerce na extremidade g ($g=2$ e 3);

$(S'_{g\theta})_h$ = momento, no plano horizontal, que o topo do pilar exerce na extremidade g ($g=2$ e 3).

Determinação dos esforços: $(F'_{ij})_h$ e $(F''_{ij})_h$

Para se calcular a ação das extremidades das barras acima referidas, no topo do pilar 2, por exemplo, passa-se um plano pelo topo do pilar em questão e traça-se um sistema de eixos com as mesmas direções que as das coordenadas globais referentes a este pilar. Projetam-se, em seguida, nestas direções, os esforços ultimamente definidos:

Pilar 2

A figura 5.4 representa o topo do pilar 2 da sequência desenhada na figura 5.3, na qual se indicam os esforços provocados pelas extremidades; final da barra 1-2 e inicial da barra 2-3.

+

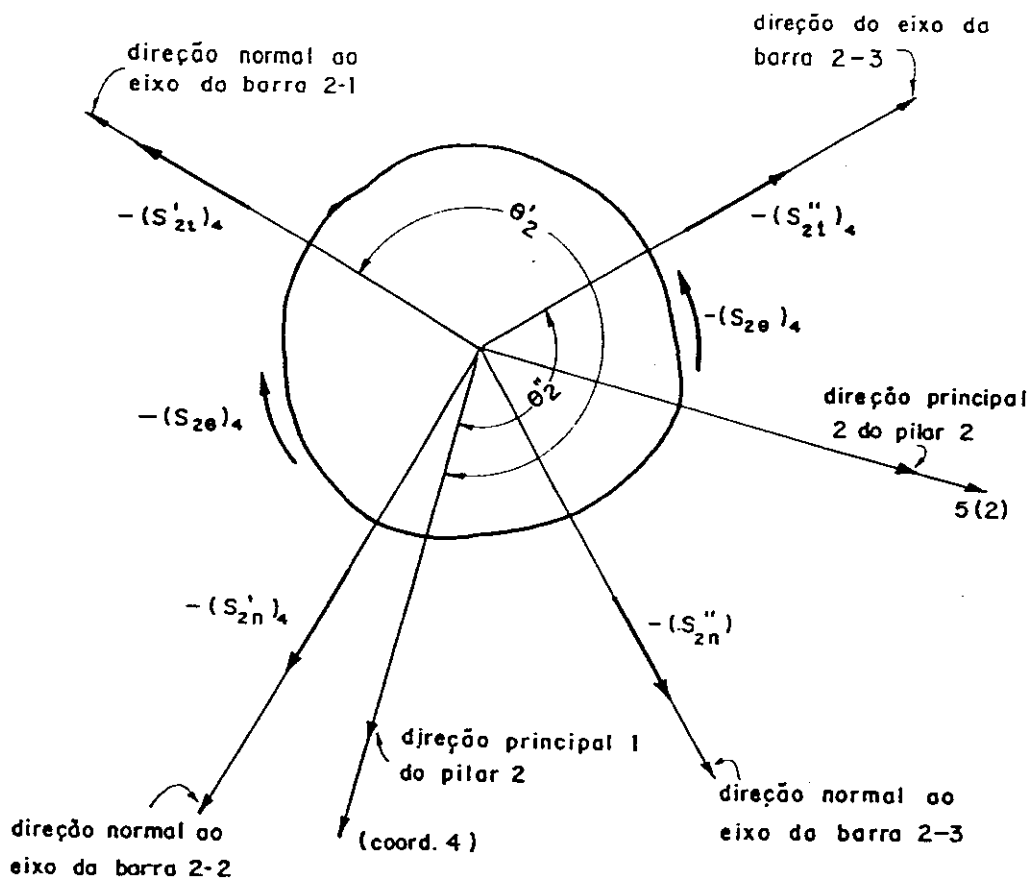


FIG. 5.4

*

$\theta_2'' = \hat{\text{ângulo}}$ (medido no sentido da coordenada 6) entre a direção da coordenada 4 (direção principal 1 da secção reta do pilar 2) e a do eixo da barra 2-3;

$\theta_2' = \hat{\text{ângulo}}$ (medido no sentido da coordenada 6) entre a direção da coordenada 4 e a do eixo da barra 2-1.

Projetando os esforços segundo as direções das coordenadas globais; 4, 5 e 6 tem-se:

$$(F_{21}'')_4 = (S_{2t}'')_4 \cos \theta_2'' - (S_{2n}'')_4 \cos(\theta_2'' - \pi/2)$$

$$(F_{22}'')_4 = - (S_{2t}'')_4 \sin \theta_2'' - (S_{2n}'')_4 \sin(\theta_2'' - \pi/2)$$

$$(F_{23}'')_4 = - (S_{2\theta}'')_4$$

$$(F_{21}')_4 = - (S_{2t}')_4 \cos \theta_2' - (S_{2n}')_4 \cos(\theta_2' - \pi/2)$$

$$(F_{22}')_4 = - (S_{2t}')_4 \sin \theta_2' - (S_{2n}')_4 \sin(\theta_2' - \pi/2)$$

$$(F_{23}')_4 = - (S_{2\theta}')_4$$

Ou então sob forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} (F_{21}'')_4 \\ (F_{22}'')_4 \\ (F_{23}'')_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2'' & -\sin \theta_2'' & 0 \\ -\sin \theta_2'' & \cos \theta_2'' & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (S_{2t}'')_4 \\ (S_{2n}'')_4 \\ (S_{2\theta}'')_4 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\begin{Bmatrix} (F_{21}')_4 \\ (F_{22}')_4 \\ (F_{23}')_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2' & -\sin \theta_2' & 0 \\ -\sin \theta_2' & \cos \theta_2' & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (S_{2t}')_4 \\ (S_{2n}')_4 \\ (S_{2\theta}')_4 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

*

Pilar 1

A figura 5.5, representa o topo do pilar 1 da sequência desenhada na figura 5.3, na qual se indica os esforços provocados pela extremidade inicial da barra 1-2.

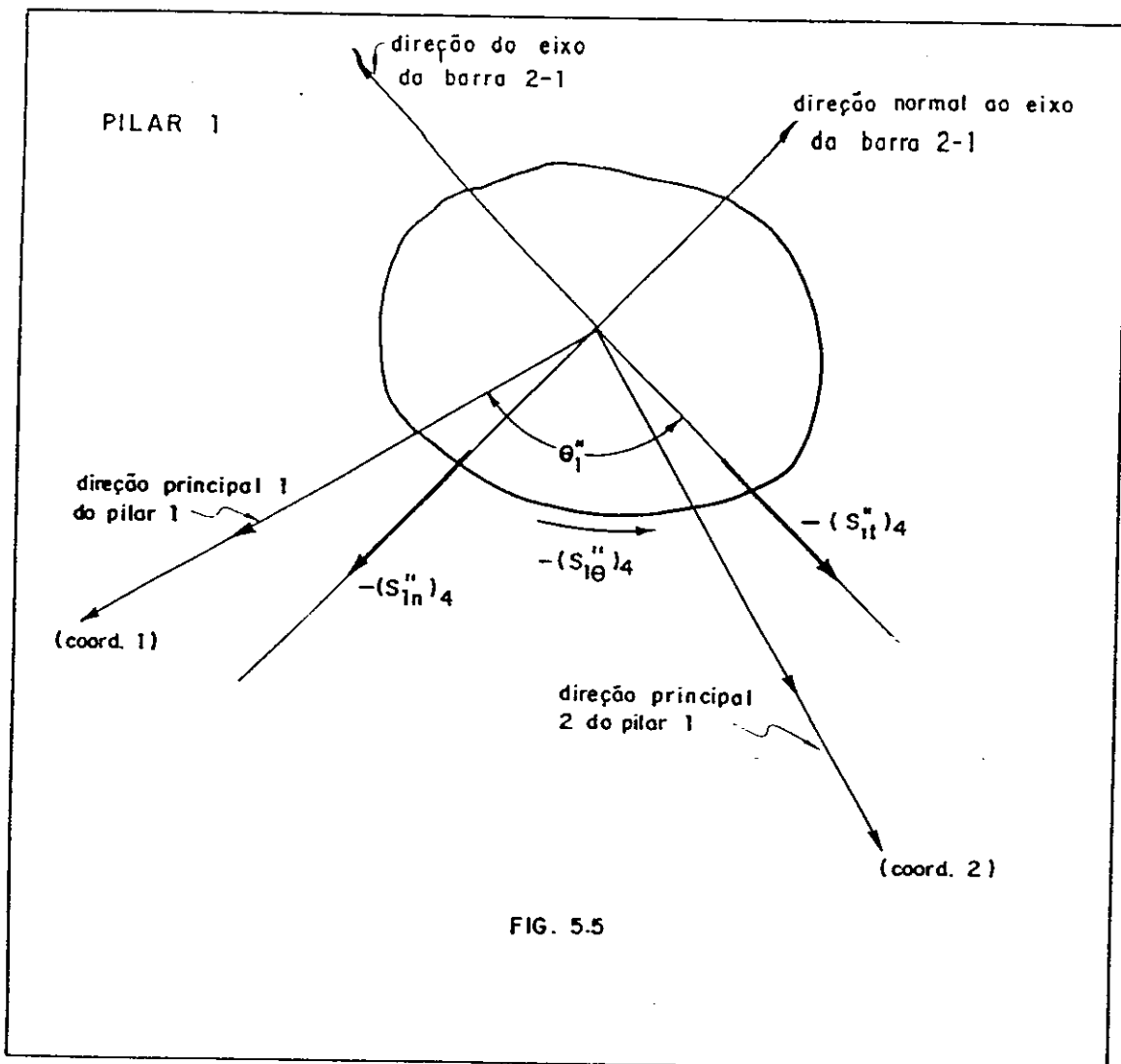


FIG. 5.5

+

Sendo:

$\theta_1'' = \hat{\text{ângulo}}$ (medido no sentido da coordenada 3) entre a direção da coordenada 1 (direção principal 1 da seção reta do pilar 1) e a do eixo da barra 2-3.

Projetando os esforços nas direções das coordenadas globais; 1, 2 e 3, tem-se:

$$(F_{11}'')_4 = -(S_{1t}'')_4 \cos(\theta_1'' + \pi) - (S_{1n}'')_4 \cos(\theta_1'' + \pi/2)$$

$$(F_{12}'')_4 = -(S_{1t}'')_4 \sin(\theta_1'' + \pi) - (S_{1n}'')_4 \sin(\theta_1'' + \pi/2)$$

$$(T_1'')_4 = - (S_{1\theta}'')_4$$

Ou então sob forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} (F_{11}'')_4 \\ (F_{12}'')_4 \\ (T_1'')_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1'' & \sin\theta_1'' & 0 \\ \sin\theta_1'' & -\cos\theta_1'' & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (S_{1t}'')_4 \\ (S_{1n}'')_4 \\ (S_{1\theta}'')_4 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Pilar 3

A figura 5.6, representa o topo do pilar 3 da sequência desenhada na figura 5.3, na qual se indica os esforços provocados pela extremidade final da barra 2-3.

+

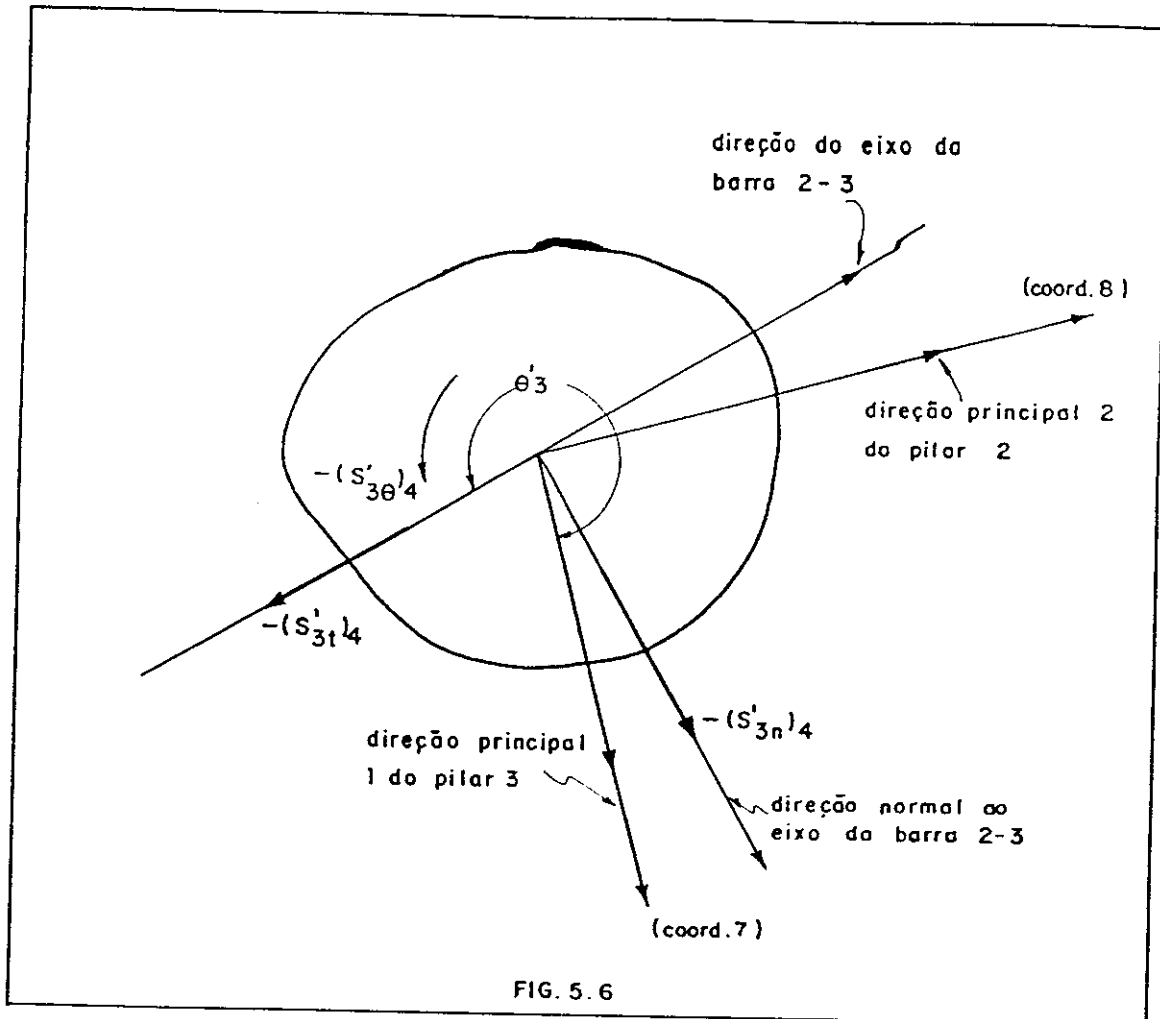


FIG. 5.6

θ'_3 = ângulo (medido no sentido da coordenada 9) entre a direção da coordenada 7 (direção principal 1) e a do eixo da barra 2-3.

Projetando os esforços nas direções das coordenadas globais; 7, 8 e 9, tem-se:

+

$$(F'_{31})_4 = -(S'_{3t})_4 \cos(\theta'_3 - \pi) - (S'_{3n})_4 \cos(\theta'_3 - 3\pi/2)$$

$$(F'_{32})_4 = -(S'_{3t})_4 \sin(\theta'_3 - \pi) - (S'_{3n})_4 \sin(\theta'_3 - 3\pi/2)$$

$$(F'_{33})_4 = -(S'_{3\theta})_4$$

Ou então, sob forma matricial:

$$\begin{pmatrix} (F'_{31})_4 \\ (F'_{32})_4 \\ (F'_{33})_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta'_3 & -\sin\theta'_3 & 0 \\ \sin\theta'_3 & -\cos\theta'_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (S'_{3t})_4 \\ (S'_{3n})_4 \\ (S'_{3\theta})_4 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Determinação dos esforços: S_{it} , S_{in} e $S_{i\theta}$

Os esforços nas barras: S_{it} , S_{in} e $S_{i\theta}$, são determinados através dos deslocamentos unitários que são provocados nas coordenadas: 4, 5 e 6. No que segue, calculam-se os esforços que se desenvolvem sô nas extremidades da barra 2-3, utilizando-se para a barra 1-2, por analogia, as mesmas expressões utilizadas para aquela outra, devendo-se fazer apenas uma troca conveniente de índices, onde o índice 3 é trocado pelo índice 1.

Deslocamento unitário na coordenada 4

A figura 5.7 apresenta a barra 2-3 apoiada nos pilares; 2 e 3, quando se provoca um deslocamento unitário sô na coordenada 4 do pilar 2. Devido à elasticidade dos dos e lastômeros, se desenvolvem esforços nas extremidades da referida barra, os quais estarão, após o deslocamento, em equilíbrio estático.

+

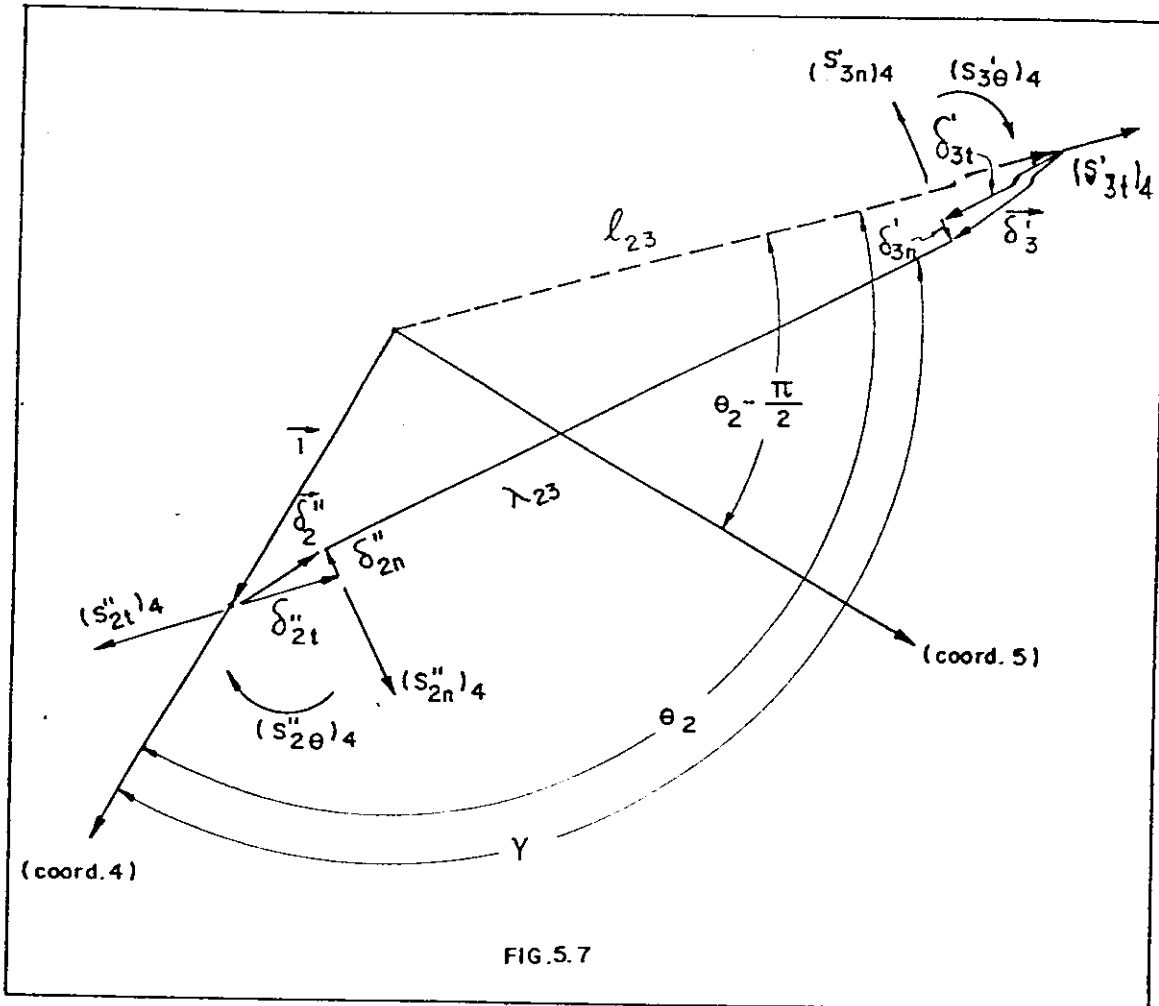


FIG.5.7

Sendo:

θ_2'' = ângulo entre a direção da coordenada 4 e a do eixo da barra antes de se processar o deslocamento unitário naquela direção;

γ = ângulo entre a direção da coordenada 4 e o eixo da barra deslocada após se estabelecer o equilíbrio estático;

+

\vec{i} = unitário da direção do eixo da barra;

\vec{j} = unitário da direção normal ao eixo da barra;

\vec{k} = unitário da direção normal ao plano horizontal.

Da figura 5.7, levando em conta que;

$$(S''_{2t})_4 = -\delta_{2t} K''_{a2t} \quad (S'_{3t})_4 = -\delta_{3t} K'_{a3t}$$

$$(S''_{2n})_4 = -\delta_{2n} K''_{a2n} \quad (S'_{3n})_4 = -\delta_{3n} K'_{a3n}$$

$$(S''_{2\theta})_4 = -(\gamma - \theta''_2) t''_{a2} \quad (S'_{3\theta})_4 = -(\gamma - \theta''_2) t'_{a3}$$

tem-se:

$$(\vec{S}''_2)_4 = -\delta_{2n} K''_{a2t} \vec{i} - \delta_{2t} K''_{a2n} \vec{j}$$

$$(\vec{S}'_3)_4 = -\delta_{3t} K'_{a3t} \vec{i} - \delta_{3n} K'_{a3n} \vec{j}$$

$$(\vec{S}''_{2\theta})_4 = -(\gamma - \theta''_2) t''_{a2} \vec{k}$$

$$(S'_{3\theta})_4 = -(\gamma - \theta''_2) t'_{a3} \vec{k}$$

$$\vec{l}_{23} = \vec{l}_{23} \vec{i}$$

$$\vec{\lambda}_{23} = l_{23} \cos(\gamma - \theta''_2) \vec{i} - l_{23} \sin(\gamma - \theta''_2) \vec{j}$$

$$\vec{\delta}''_2 = \delta''_{2t} \vec{i} + \delta''_{2n} \vec{j}$$

$$\vec{\delta}'_3 = \delta'_{3t} \vec{i} + \delta'_{3n} \vec{j}$$

$$\vec{l} = -\cos \theta''_2 \vec{i} + \sin \theta''_2 \vec{j}$$

Condições de equilíbrio estático

$$\sum_{i=0} \vec{(S}_i)_4 = 0 \quad e \quad \sum H_3 = 0$$

+

Da primeira condição; $(\vec{S}_2'')_4 + (\vec{S}_3')_4 = 0$, substituindo nessa equação os valores da (5.9), tem-se:

$$-\delta_{2t} K''_{a2t} \vec{i} - \delta_{2n} K''_{a2n} \vec{j} - \delta_{3t}' K_{a3t} \vec{i} - \delta_{3n}' K_{a3n} \vec{j} = 0$$

$$(\delta_{2t} K''_{a2t} + \delta_{3t}' K_{a3t}) \vec{i} + (\delta_{2n} K''_{a2n} + \delta_{3n}' K_{a3n}) \vec{j} = 0$$

Logo:

$$\delta_{2t} = - \frac{K'_{a3t}}{K''_{a2t}} \delta_{3t} \quad (5.14)$$

$$\delta_{2n} = - \frac{K'_{a3n}}{K''_{a2n}} \delta_{3n}$$

Da segunda condição; $-\lambda_{23} \Lambda (\vec{S}_2'')_4 + (\vec{S}_{20}'')_4 + (\vec{S}_{30}')_4 = 0$, observando os valores da (5.13), tem-se:

$$-\lambda_{23} \cos(\gamma - \theta_2'') \vec{i} - \lambda_{23} \sin(\gamma - \theta_2'') \vec{j} \Lambda - (\delta_{2t} K''_{a2t} \vec{i} + \delta_{2n} K''_{a2n} \vec{j}) +$$

$$-(\gamma - \theta_2'') (t''_{a2} + t'_{a3}) = 0$$

ou seja:

$$\lambda_{23} \delta_{2n} K''_{a2n} \cos(\gamma - \theta_2'') + \lambda_{23} \delta_{2t} K''_{a2t} \sin(\gamma - \theta_2'') - (\gamma - \theta_2'') (t''_{a2} + t'_{a3}) \stackrel{\vec{K}=0}{=} 0$$

ou então:

$$\delta_{2n} K''_{a2n} \cos(\gamma - \theta_2'') + \delta_{2t} K''_{a2t} \sin(\gamma - \theta_2'') - (\gamma - \theta_2'') \left(\frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\lambda_{23}} \right) = 0$$

Por ser $(\gamma - \theta_2'')$ bem pequeno pode-se fazer as seguintes simplificações:

+

$$\cos(\gamma - \theta_2'') \cong 1$$

$$(\gamma - \theta_2'') \cong \text{sen}(\gamma - \theta_2'')$$

Então a última equação ficará:

$$\delta_{2n} k_{a2n}'' + \delta_{2t} k_{a2t}'' - \left(\frac{t_{a2}'' + t_{a3}'}{l_{23}} \right) \text{sen}(\gamma - \theta_2'') = 0 \quad (5.15)$$

Compatibilidade de deslocamentos

$$\vec{l} + \delta_2 + \lambda_{23} = \vec{l}_{23} + \delta_3$$

ou seja:

$$\begin{aligned} -\cos\theta_2'' \vec{i} + \text{sen}\theta_2'' \vec{j} + \delta_{2t} \vec{i} + \delta_{2n} \vec{j} + l_{23} \cos(\gamma - \theta_2'') \vec{i} - l_{23} \text{sen}(\gamma - \theta_2'') \vec{j} = \\ = l_{23} \vec{i} + \delta_{3t} \vec{i} + \delta_{3n} \vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cos\theta_2'' - l_{23} + (\delta_{2t} - \delta_{3t}) + l_{23} \cos(\gamma - \theta_2'') \vec{i} + \text{sen}\theta_2'' + \delta_{2n} - l_{23} \text{sen}(\gamma - \theta_2'') + \\ + \delta_{3n} \vec{j} \end{aligned}$$

$$(\delta_{2t} - \delta_{3t}) - \cos\theta_2'' + l_{23} \cos(\gamma - \theta_2'') = 0$$

$$(\delta_{2n} - \delta_{3n}) + \text{sen}\theta_2'' - l_{23} \text{sen}(\gamma - \theta_2'') = 0$$

Em vista das simplificações feitas tem-se:

$$(\delta_{3t} - \delta_{2t}) = -\cos\theta_2''$$

$$\text{sen}(\gamma - \theta_2'') = \frac{-\delta_{3n} + \delta_{2n} + \text{sen}\theta_2''}{l_{23}}$$

+

Se substituirmos nessas duas últimas expressões e ainda na (5.13) os valores da (5.14), tem-se:

$$-\frac{K'_{a3n}}{K''_{a2n}} \cdot K_{a2n} \delta_{3n} + -\frac{K'_{a3t}}{K''_{a2t}} \cdot K_{a2t} \delta_{3t} - \left(\frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}} \right) \text{sen}(\gamma - \theta) = 0 \quad \dots (5.16)$$

$$\left(\frac{K''_{a2t} + K'_{a3t}}{K''_{a2t}} \right) \delta_{3t} = -\cos \theta \quad (5.17)$$

$$\text{sen}(\gamma - \theta''_2) = \frac{-\left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K''_{a2n}} \right) \delta_{3n} + \text{sen} \theta''_2}{\ell_{23}} \quad (5.18)$$

Resolvendo as equações; (5.16), (5.17) e (5.18) tem-se:

$$\delta_{3t} = -\frac{K''_{a2t} \cos \theta''_2}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} \quad (5.19)$$

$$\delta_{2t} = +\frac{K'_{a3t} + \cos \theta''_2}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} \quad (5.20)$$

$$\delta_{3n} = \frac{\frac{K'_{a3t} K''_{a2t}}{(K''_{a2t} + K'_{a3t})} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}} \text{sen} \theta''_2}{-K'_{a3n} \ell_{23} + \left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K''_{a2n}} \right) \frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}} \quad (5.21)$$

$$\delta_{2n} = -\frac{\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{(K''_{a2t} + K'_{a3t})} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}} \text{sen} \theta''_2}{-K''_{a2n} \ell_{23} + \left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K'_{a3n}} \right) \frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}} \quad (5.22)$$

*

$$\text{sen}(\gamma - \theta''_2) \cong (\gamma - \theta''_2) = - \frac{\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}} \text{sen} \theta''_2}{\left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}}\right) + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}} - \frac{k''_{a2n} + k'_{a3n} \ell_{23}}{(k''_{a2n} + k'_{a3n})}} \dots (5.23)$$

Das expressões; (5.19) a (5.23), tem-se:

$$(S''_{2t})_4 = - \left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}}\right) \cos \theta''_2$$

$$(S''_{2n})_4 = \frac{\left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right) \text{sen} \theta''_2}{-\ell_{23} + \left(\frac{k''_{a2n} + k'_{a3n}}{k''_{a2n} + k'_{a3n}}\right) \left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right)}$$

$$(S''_{2\theta})_4 = \frac{t''_{a2} \left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right) \text{sen} \theta''_2}{\left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right) - \frac{k''_{a2n} + k'_{a3n} \ell_{23}}{k''_{a2n} + k'_{a3n}}}$$

$$(S'_{3t})_4 = \left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}}\right) \cos \theta''_2 \quad (5.24)$$

$$(S'_{3n})_4 = - \frac{\left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right) \text{sen} \theta''_2}{-\ell_{23} + \left(\frac{k''_{a2n} + k'_{a3n}}{k''_{a2n} + k'_{a3n}}\right) \left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right)}$$

$$(S'_{3\theta})_4 = \frac{t'_{a3} \left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right) \text{sen} \theta''_2}{\left(\frac{k''_{a2t} + k'_{a3t}}{k''_{a2t} + k'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}\right) - \frac{k''_{a2n} + k'_{a3n} \ell_{23}}{k''_{a2n} + k'_{a3n}}}$$

†

Para a barra 1-2, basta trocar, nas expressões (5.24), o índice 3 pelo índice 1, observando, ainda a troca do expoente (') pelo expoente ('') ou seja:

$$(S'_{2t})_4 = -\left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}}\right) \cos \theta'_2$$

$$(S'_{2n})_4 = \frac{\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}} \operatorname{sen} \theta'_2}{-\ell_{12} + \left(\frac{K' a_{2n} K'' a_{1n}}{K' a_{2n} + K'' a_{1n}}\right) \left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}}\right)}$$

$$(S'_{20})_4 = \frac{t'' a_2 \left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}}\right) \operatorname{sen} \theta'_2}{\left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}}\right) - \frac{K' a_{2n} K'' a_{1n} \ell_{12}}{K' a_{2n} + K'' a_{1n}}}$$

$$(S''_{1t})_4 = \left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}}\right) \cos \theta'_2$$

(5.25)

$$(S''_{1n})_4 = -\frac{\left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}}\right) \operatorname{sen} \theta'_2}{-\ell_{12} + \left(\frac{K' a_{2n} K'' a_{1n}}{K' a_{2n} + K'' a_{1n}}\right) \left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}}\right)}$$

$$(S''_{10})_4 = \frac{t' a_1 \left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}}\right) \operatorname{sen} \theta'_2}{\left(\frac{K' a_{2t} K'' a_{1t}}{K' a_{2t} + K'' a_{1t}} + \frac{t' a_2 + t'' a_1}{\ell_{12}}\right) - \frac{K' a_{2n} K'' a_{1n} \ell_{12}}{K' a_{2n} + K'' a_{1n}}}$$

Deslocamento unitário na coordenada 5

Para a determinação dos esforços nas extremidades das barras; 1-2 e 2-3, devidos a um deslocamento unitário na coordenada 5, basta substituir nas expressões; (5.24) e (5.25), o ângulo θ por $(\theta - \pi/2)$, resultando assim as seguintes equações:

$$(S''_{2t})_5 = - \left(\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} \right) \text{sen} \theta''_2$$

$$(S''_{2n})_5 = - \frac{\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}} \cos \theta''_2}{-l_{23} + \left(\frac{K''_{a2n} K'_{a3n}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}} \right) \frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}}}$$

$$(S''_{20})_5 = - \frac{\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}} \cos \theta''_2}{\left(\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}} \right) - \frac{K''_{a2n} K'_{a3n} l_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}}$$

$$(S'_{3t})_5 = \left(\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} \right) \text{sen} \theta''_2 \tag{5.26}$$

$$(S'_{3n})_5 = \frac{\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}} \cos \theta''_2}{-l_{23} + \left(\frac{K''_{a2n} K'_{a3n}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}} \right) \frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}}}$$

$$(S'_{30})_5 = - \frac{t'_{a3} \left(\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}} \right) \cos \theta''_2}{\left(\frac{K''_{a2t} K'_{a3t}}{K''_{a2t} + K'_{a3t}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{l_{23}} \right) - \frac{K''_{a2n} K'_{a3n} l_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}}$$

+

Para a barra 1-2, basta trocar, nas expressões (5.26), o índice 3 pelo índice 1, observando, ainda, a troca do expoente (') pelo expoente (''), ou seja:

$$(S'_{2t})_5 = - \left(\frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} \right) \text{sen} \theta'_2$$

$$(S'_{2n})_5 = \frac{\frac{K'_{a2t} K'_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t'_{a2} + t''_{al}}{\ell_{23}} \cos \theta'_2}{-\ell_{23} + \left(\frac{K'_{a2n} + K''_{aln}}{K'_{a2n} K''_{aln}} \right) \frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t''_{a2} + t'_{a3}}{\ell_{23}}}$$

$$(S'_{2\theta})_5 = - \frac{t''_{a2} \frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t'_{a2} + t''_{al}}{\ell_{12}} \cos \theta'_2}{\left(\frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t'_{a2} + t''_{al}}{\ell_{12}} \right) - \frac{K'_{a2n} K''_{aln} \ell_{12}}{K'_{a2n} + K''_{aln}}}$$

(5.27)

$$(S''_{1t})_5 = \left(\frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} \right) \text{sen} \theta'_2$$

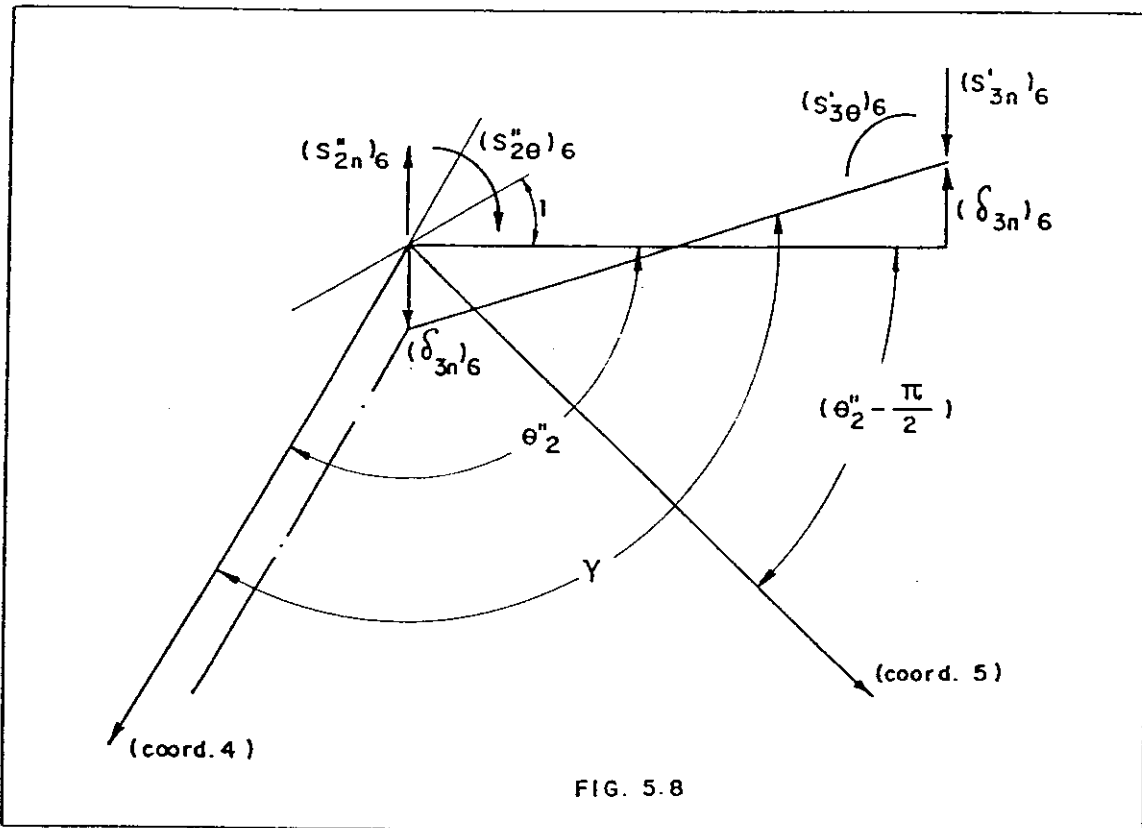
$$(S''_{1n})_5 = \frac{\frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t'_{a2} + t''_{al}}{\ell_{12}} \cos \theta'_2}{-\ell_{12} + \left(\frac{K'_{a2n} + K''_{aln}}{K'_{a2n} K''_{aln}} \right) \frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t'_{a2} + t''_{al}}{\ell_{12}}}$$

$$(S''_{1\theta})_5 = - \frac{\left(\frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t'_{a2} + t''_{al}}{\ell_{12}} \right) \cos \theta'_2}{\left(\frac{K'_{a2t} K''_{alt}}{K'_{a2t} + K''_{alt}} + \frac{t'_{a2} + t''_{al}}{\ell_{12}} \right) - \frac{K'_{a2n} K''_{aln} \ell_{12}}{K'_{a2n} + K''_{aln}}}$$



Deslocamento unitário na coordenada 6

A figura 5.8, apresenta a barra 2-3 apoiada nos pilares; 2 e 3, quando se provoca um deslocamento unitário sô na coordenada 6 do pilar 2. Devido à elasticidade dos elastômeros, se desenvolvem esforços nas extremidades da referida barra, os quais estarão, após o deslocamento, em equilíbrio estático.



Condição de equilíbrio estático

$$\sum \vec{S} = 0 \quad \text{e} \quad \sum \vec{M}_3 = 0$$

$$-K''_{a2n} \delta_{2n} \vec{j} - K'_{a3n} \delta_{3n} \vec{j} = 0$$

$$\delta_{2n} = - \frac{K'_{a3n}}{K''_{a2n}} \delta_{3n} \quad (5.28)$$

+

$$- (\ell_{23} \cos(\gamma - \theta_2'') \vec{i} - \ell_{23} \sin(\gamma - \theta_2'') \vec{j}) \wedge -K''_{a2n} \delta_{2n} \vec{j} +$$

$$- t_{a2} (1 - (\gamma - \theta_2'')) + t'_{a3} (\gamma - \theta_2'') \vec{k} = 0$$

$$\ell_{23} K''_{a2n} \delta_{2n} \cos(\gamma - \theta_2'') - t''_{a2} + (t''_{a2} - t'_{a3}) (\gamma - \theta_2'') = 0 \quad (5.29)$$

Compatibilidade de deslocamentos

$$\vec{\delta}_2 + \vec{\lambda}_{23} = \vec{\ell}_{23} + \vec{\delta}_3$$

$$\delta_{2n} \vec{j} + \ell_{23} \cos(\gamma - \theta_2'') \vec{i} - \ell_{23} \sin(\gamma - \theta_2'') \vec{j} - \ell_{23} \vec{i} + \delta_{3n} \vec{j}$$

$$\ell_{23} \cos(\gamma - \theta_2'') - \ell_{23} = 0$$

$$\cos(\gamma - \theta_2'') = 1 \quad (5.30)$$

$$\delta_{2n} - \delta_{3n} - \ell_{23} \sin(\gamma - \theta_2'') = 0$$

$$\sin(\gamma - \theta_2'') = \frac{\delta_{3n} - \delta_{2n}}{\ell_{23}}$$

Substituindo nessa última equação o valor de δ_{2n} dado pela (5.28) tem-se:

$$\sin(\gamma - \theta_2'') = \left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K''_{a2n} \ell_{23}} \right) \delta_{3n} \quad (5.31)$$

Substituindo na (5.29) os valores de δ_{2n} , $\cos(\gamma - \theta_2'')$ e $\sin(\gamma - \theta_2'')$ dados pelas; (5.28), (5.30) e (5.31), tem-se:

$$- \frac{K''_{a2n} K'_{a3n}}{K''_{a2n}} \delta_{3n} - \frac{t''_{a2}}{\ell_{23}} + \frac{(t''_{a2} - t'_{a3})}{\ell_{23}} \left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K''_{a2n} \ell_{23}} \right) \delta_{3n} = 0$$

+

$$\delta_{3n} = \frac{t_{a2}}{\left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K''_{a2n}}\right) \frac{(t''_{a2} - t'_{a3})}{\ell_{23}^2}} - K'_{a3n} \quad (5.32)$$

$$\delta_{2n} = - \frac{t''_{a2}}{\left(\frac{K''_{a2n} + K''_{a3n}}{K'_{a3n}}\right) \frac{(t''_{a2} - t'_{a3})}{\ell_{23}^2}} - K''_{a2n} \quad (5.33)$$

$$(\gamma - \theta''_2) = \frac{t''_{a2}}{\frac{t''_{a2} - t'_{a3}}{\ell_{23}} - \frac{K''_{a2n} K'_{a3n} \ell_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}} \quad (5.34)$$

$$1 - (\gamma - \theta''_2) = \frac{\frac{t''_{a2} (1 - \ell_{23}) - t'_{a3}}{\ell_{23}} - \frac{K''_{a2n} K'_{a3n} \ell_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}}{\frac{t''_{a2} - t'_{a3}}{\ell_{23}} - \frac{K''_{a3n} K'_{a3n} \ell_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}}$$

Os comentários que foram feitos para os esforços nas extremidades das barras; 1-2 e 2-3, devidos à deslocamentos unitários na coordenada 4 vale também para os esforços provenientes do deslocamento unitário na coordenada 6. Desta forma tem-se:

$$(S''_{1t})_6 = 0$$

$$(S''_{1n})_6 = - \frac{K''_{a1n} t'_{a2}}{\left(\frac{K'_{a2n} + K''_{a1n}}{K'_{a2n}}\right) \frac{(t'_{a2} - t''_{a1})}{\ell_{12}^2}} - K''_{a1n}$$

$$(S''_{10})_6 = \frac{t''_{a2} t''_{a1}}{\left(\frac{t'_{a2} - t''_{a1}}{\ell_{12}} - \frac{K'_{a2n} K''_{a1n} \ell_{12}}{K'_{a2n} + K''_{a1n}}\right)} \quad (5.35)$$

$$(S'_{2t})_6 = 0$$

*

$$(S'_{2n})_6 = \frac{K'_{a2n} + K''_{a1n}}{\left(\frac{K''_{a1n}}{a1n}\right)} \left(\frac{t'_{a2} - t''_{a1}}{\ell_{12}^2}\right) - K'_{a2n}$$

$$(S'_{2c})_6 = - \frac{\frac{t'_{a2}(1-\ell_{12}) - t''_{a1}}{\ell_{12}} - \frac{K'_{a2n} K''_{a1n} \ell_{12}}{K'_{a2n} + K''_{a1n}}}{\left(\frac{t'_{a2} - t''_{a1}}{\ell_{12}} - \frac{K'_{a2n} K''_{a1n} \ell_{12}}{K'_{a2n} + K''_{a1n}}\right)}$$

$$(S''_{2t})_6 = 0$$

$$(S''_{2n})_6 = \frac{K''_{a2n} t''_{a2}}{\left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K''_{a3n}}\right)} \left(\frac{t''_{a2} - t'_{a3}}{\ell_{23}^2}\right) - K''_{a2n}$$

$$(S''_{2c})_6 = - \frac{t''_{a2} \frac{t''_{a2}(1-\ell_{23}) - t'_{a3}}{\ell_{23}} - \frac{K''_{a2n} K'_{a3n} \ell_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}}{\frac{t''_{a2} - t'_{a3}}{\ell_{23}} - \frac{K''_{a2n} K'_{a3n} \ell_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}}$$

$$(S'_{3t})_6 = 0$$

$$(S'_{3n})_6 = - \frac{K'_{a3n} t''_{a2}}{\left(\frac{K''_{a2n} + K'_{a3n}}{K''_{a2n}}\right)} \left(\frac{t''_{a2} - t'_{a3}}{\ell_{23}^2}\right) - K'_{a3n}$$

$$(S'_{3c})_6 = - \frac{t'_{a3} t''_{a2}}{\left(\frac{t''_{a2} - t'_{a3}}{\ell_{23}}\right) - \left(\frac{K''_{a2n} K'_{a3n} \ell_{23}}{K''_{a2n} + K'_{a3n}}\right)}$$

Com os $(S_{it})_h$ calculados nas expressões: (5.24), (5.25), (5.26), (5.27), (5.35) e levados às expressões: (5.9), (5.10), (5.11), (5.12), determinam-se os $(F_{ij})_h$ com os quais, através da (5.7), calculam-se os elementos da submatriz $[S_i]$.

5.2. Determinação dos esforços

Calculados os elementos das submatrizes monta-se a matriz de rigidez S do conjunto dada pela (5-6) e em seguida, calcula-se a sua inversa $[A] = [S]^{-1}$.

Os esforços V_i , nos topos dos pilares, são calculados levando-se à (5.3) os valores dos u_i dados pela (5-4), observando que $[A] = [S]^{-1}$.

Fazendo:

$$\begin{Bmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ V_{i3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_i \end{Bmatrix} : \begin{bmatrix} K_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & t_i \end{bmatrix} = [K_i]$$

tem-se:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [S_1] \\ [S_2] \\ [S_3] \\ \cdot \\ \cdot \\ [S_{n-1}] \\ [S_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix}$$

.... (5.36)

Quando as ações externas (vento, frenagem, etc.), não atuam diretamente nas coordenadas, vinculam-se os topos dos pilares para movimentos nas direções das coordenadas globais e determinam-se os esforços que surgem nos elastô-

+

meros, nas direções das coordenadas, devido as referidas ações, retirando-se em seguida, os vínculos aplicando, em sentido contrário e nas direções respectivas, os esforços a cima referidos, figura 5.9.

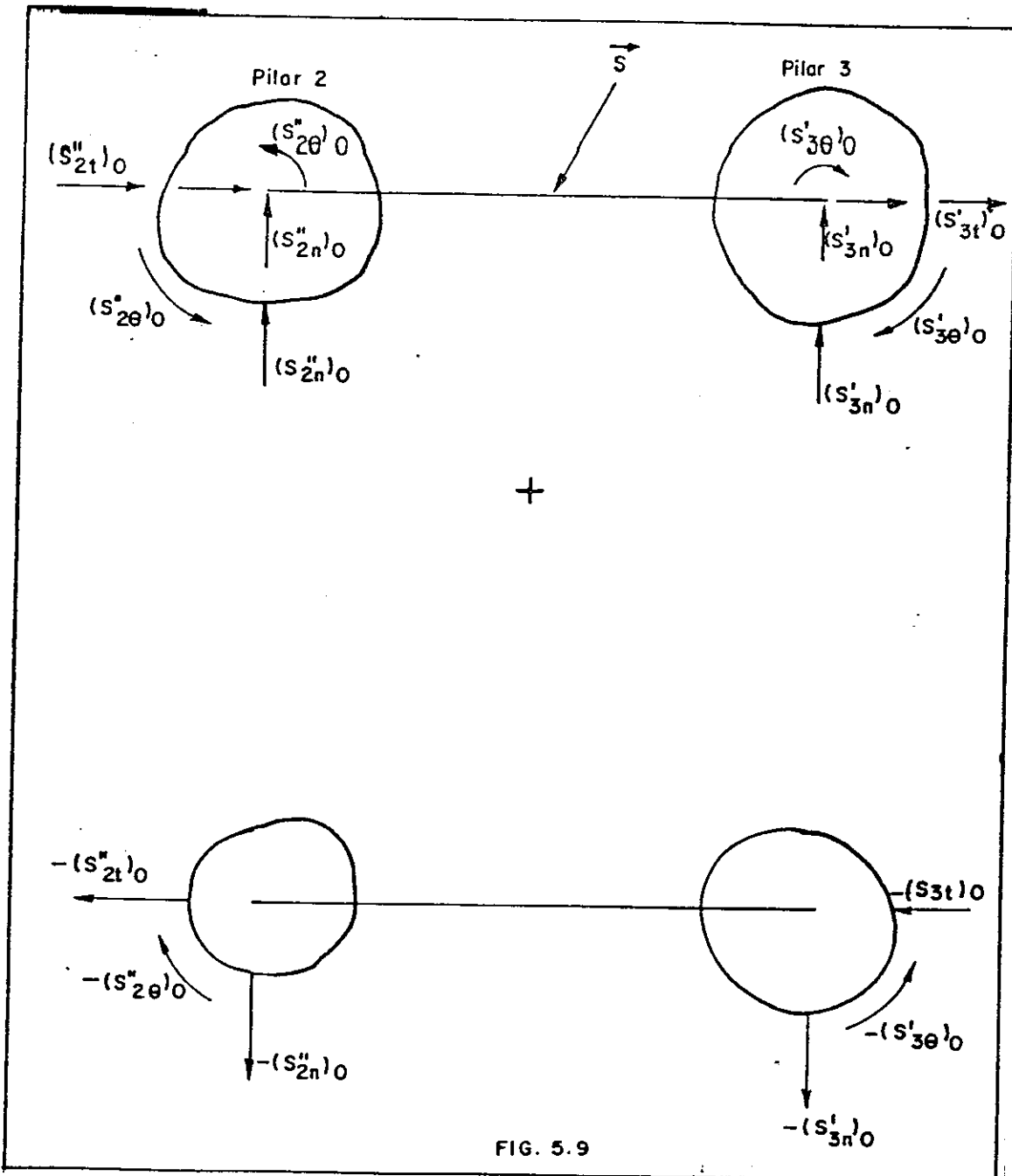


FIG. 5.9

Sendo:

$(S_{gt})_o$ = esforço, na extremidade g da barra 2-3, na direção do seu eixo, devido a ação da força F atuando na barra, quando se vinculam os pilares; 2 e 3;

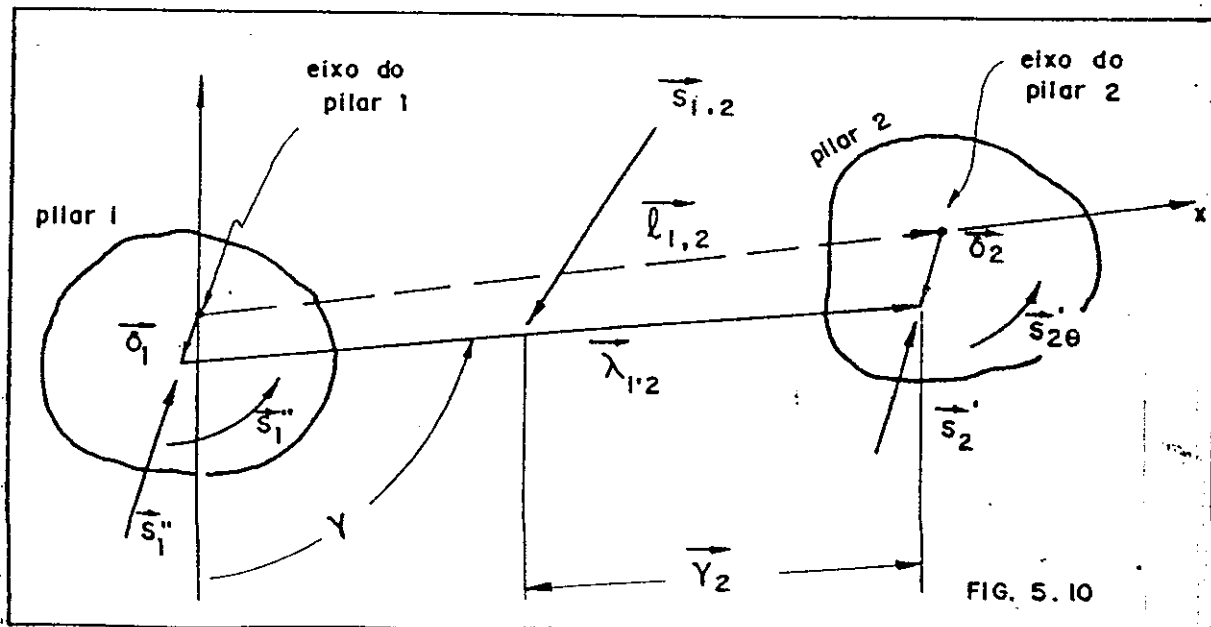
$(S_{gn})_o$ = esforço, na extremidade g da barra 2-3, na direção normal ao eixo da barra, devido a ação da força F atuando na barra, quando se vinculam os pilares; 2 e 3;

$(S_g)_o$ = momento, na extremidade g da barra 2-3, no plano horizontal devido a ação da força F , atuando na barra, quando se vinculam os topos dos pilares; 2 e 3.

Obs: para $g = 2$, o esforço S terá expoente (") e para $g = 3$, o esforço S terá expoente (').

Determinação das reações de engastamento elástico

O cálculo das reações de engastamento elástico exercidos pelos topos dos pilares nas extremidades das barras devidos a ação de \vec{S} , é feito da condição de equilíbrio estático da barra 1-2 quando sujeita a ação da referida força, figura 5.10:



$$\underline{\Sigma \vec{S} = 0}$$

$$\vec{S}_1'' + \vec{S}_2' + \vec{S}_{1,2} = 0 \quad (5.36)$$

$$\underline{\Sigma \vec{M} = 0} \text{ (em relação ao eixo do pilar 2, por exemplo)}$$

$$\vec{\lambda}_{1,2} \wedge \vec{S}_1'' + \vec{S}_{1\theta}'' + \vec{S}_{2\theta}' + \vec{r}_{1,2} \wedge \vec{S}_{1,2} = 0 \quad (5.37)$$

Compatibilidade de deslocamentos

$$\vec{\delta}_1'' + \vec{\lambda}_{1,2} = \vec{\delta}_{1,2} + \vec{\delta}_2' \quad (5.38)$$

Sendo:

$\vec{\delta}_1''$ = deslocamento sofrido pelo elastômero do topo do pilar 1 sob a ação da força S;

$\vec{\delta}_2'$ = idem para o elastômero do topo do pilar 2;

\vec{r}_2 = vetor posição da força S em relação ao eixo do pilar 2;

$\vec{S}_1'' = -K_{a1}'' \vec{\delta}_1''$ = esforço (cortante) que surge na extremidade 1 da barra 1-2, devido a deformação do elastômero do topo do pilar 1;

$\vec{S}_2' = -K_{a2}' \vec{\delta}_2'$ = idem para a extremidade 2 da barra 1-2;

$\vec{S}_{1\theta}'' = -t_{ai}'' (\vec{\gamma} - \pi/2)$ = esforço (momento fletor) que surge na extremidade 1 da barra 1-2, devido a deformação por torção do elastômero do topo do pilar 1;

$\vec{S}_{2\theta}' = -t_{a2}' (\vec{\gamma} - \pi/2)$ = idem para a extremidade 2 da barra 1-2.

Com relação aos deslocamentos, considera-se positivos os que são efetuados nos sentidos positivos dos eixos X e Y, adotados para a barra 1-2, conforme mostra a figura 5.10.

Chamando de \vec{i} o unitário da direção \underline{X} e \vec{j} o unitário da direção \underline{Y} , tem-se:

$$\vec{\ell}_{1,2} = \ell_{1,2} \vec{i}$$

$$\vec{\lambda}_{1,2} = \ell_{1,2} \cos(\gamma - \pi/2) \vec{i} + \ell_{1,2} \text{sen}(\gamma - \pi/2) \vec{j}$$

$$\vec{\delta}_1'' = \delta_{1t}'' \vec{i} + \delta_{1n}'' \vec{j} \quad (5.39)$$

$$\vec{\delta}_2' = \delta_{2t}' \vec{i} + \delta_{2n}' \vec{j}$$

$$\overline{(\gamma - \pi/2)} = (\gamma - \pi/2) \vec{k}$$

Levando as expressões da (5.39) à (5.38) tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[\delta_{1t}'' + \ell_{1,2} \cos(\gamma - \pi/2) \right] \vec{i} + \delta_{1n}'' + \left[\ell_{1,2} \text{sen}(\gamma - \pi/2) \right] \vec{j} = \\ & = \left[\delta_{2t}' + \ell_{1,2} \right] \vec{i} + \delta_{2n}' \vec{j} \quad \text{ou seja:} \end{aligned}$$

$$\delta_{1t}'' - \delta_{2t}' + \ell_{1,2} \cos(\gamma - \pi/2) - \ell_{1,2} = 0$$

$$\delta_{1n}'' - \delta_{2n}' + \ell_{1,2} \text{sen}(\gamma - \pi/2) = 0$$

Por ser os deslocamentos sofridos pelos elastômeros infinitesimais, pode-se fazer as seguintes simplificações:

$$\cos(\gamma - \pi/2) \cong 1$$

$$\text{sen}(\gamma - \pi/2) \cong (\gamma - \pi/2) \quad \text{e desta forma tem-se:}$$

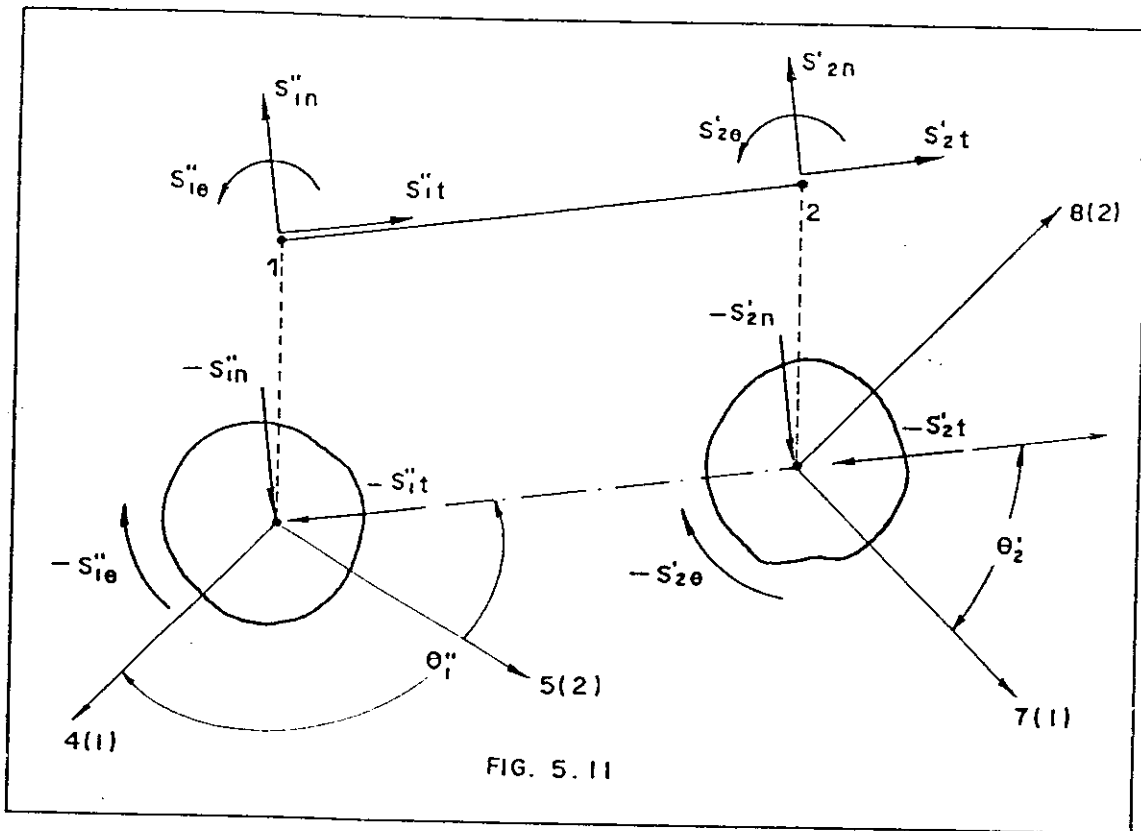
$$\delta_{1t}'' \cong \delta_{2t}' \quad (5.40)$$

$$(\gamma - \pi/2) \cong \frac{\delta_{2n}' - \delta_{1n}''}{\ell_{1,2}} \quad (5.41)$$

Substituindo nas (5.36) e (5.37) os valores dados pelas (5.40) e (5.41), determinam-se os valores dos S_1'' e S_2' .

Ação da força \vec{S} no pilar 1

Seja, figura 5.11, uma força \vec{S} atuando na barra 1-2. A referida barra se apoia nos topos dos pilares 1 e 2 os quais estão vinculados; neste caso há deslocamento da barra devido à elasticidade dos elastômeros.



Da figura 5.11, tem-se:

$$F''_{14} = -S''_{it} \cos \theta''_1 - S''_{in} \cos(\theta''_1 + \frac{\pi}{2})$$

$$F''_{15} = -S''_{it} \sin \theta''_1 - S''_{in} \sin(\theta''_1 + \frac{\pi}{2})$$

$$F''_{16} = -S''_{ie}$$

Ou seja:

$$F''_{14} = -S''_{1t} \cos \theta''_1 + S''_{1n} \sin \theta''_1$$

$$F''_{15} = -S''_{1t} \sin \theta''_1 - S''_{1n} \cos \theta''_1$$

$$F''_{16} = -S''_{1\theta}$$

Ou ainda sob forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F''_{11} \\ F''_{12} \\ F''_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta''_1 + \sin \theta''_1 & 0 \\ -\sin \theta''_1 - \cos \theta''_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S''_{1t} \\ S''_{1n} \\ S''_{1\theta} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

Ação da força \vec{S} no pilar 2

Da figura 5.11 tem-se:

$$F'_{21} = -S'_{2t} \cos \theta'_2 - S'_{1n} \cos(\theta'_2 + \pi/2)$$

$$F'_{22} = -S'_{2t} \sin \theta'_2 - S'_{2n} \sin(\theta'_2 + \pi/2)$$

$$F'_{23} = -S'_{2\theta}$$

Ou seja:

$$F'_{21} = -S'_{2t} \cos \theta'_1 + S'_{2n} \sin \theta'_1$$

$$F'_{22} = -S'_{2t} \sin \theta'_1 - S'_{2n} \cos \theta'_1$$

$$F'_{23} = -S'_{2\theta}$$

+

Ou então sob forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F'_{21} \\ F'_{22} \\ F'_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta'_2 & \text{sen}\theta''_2 & 0 \\ -\text{sen}\theta'_2 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S'_{2t} \\ S'_{2n} \\ S'_{2\theta} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

Como se pode notar a matriz:

$$[R_{\theta}] = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz de rotação}$$

para projetar as forças que atuam nas extremidades das barras nas direções das coordenadas dos pilares.

De um modo geral se o pilar 1 exerce nas barras: 1,2 e 2,3, forças que se opõem às ações: $\vec{S}_{1,2}$ e $\vec{S}_{2,3}$ e se $\{S'_1\}$ e $\{S''_1\}$ são os vetores coluna que representam as forças nas direções: do eixo da barra; normal ao eixo da barra no plano do tabuleiro e normal ao eixo da barra perpendicular ao plano do tabuleiro, as componentes dos $\{S'_1\}$ e $\{S''_1\}$, nas direções das coordenadas do referido pilar são dadas pela expressão matricial seguinte:

$$\{F_1\} = \begin{bmatrix} [RO'_1] \\ [RO''_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{S'_1\} \\ \{S''_1\} \end{Bmatrix}$$

Onde

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \end{Bmatrix}, \quad [RO'_1] = \begin{bmatrix} -\cos\theta'_1 & \text{sen}\theta'_1 & 0 \\ -\text{sen}\theta'_1 & -\cos\theta'_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*

$$\left[RC_1'' \right] = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1'' & \text{sen}\theta_1'' & 0 \\ -\text{sen}\theta_1'' & -\cos\theta_1'' & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\left\{ S_1' \right\} = \begin{Bmatrix} S_{1t}' \\ S_{1n}' \\ S_{10}' \end{Bmatrix}, \quad \left\{ S_1'' \right\} = \begin{Bmatrix} S_{1t}'' \\ S_{1n}'' \\ S_{10}'' \end{Bmatrix}$$

Para uma barra genérica $i-i+1$ é suficiente fazer uma troca de índice; o índice i para o lugar do índice 1 e o índice $i+1$ para o lugar do índice 2.

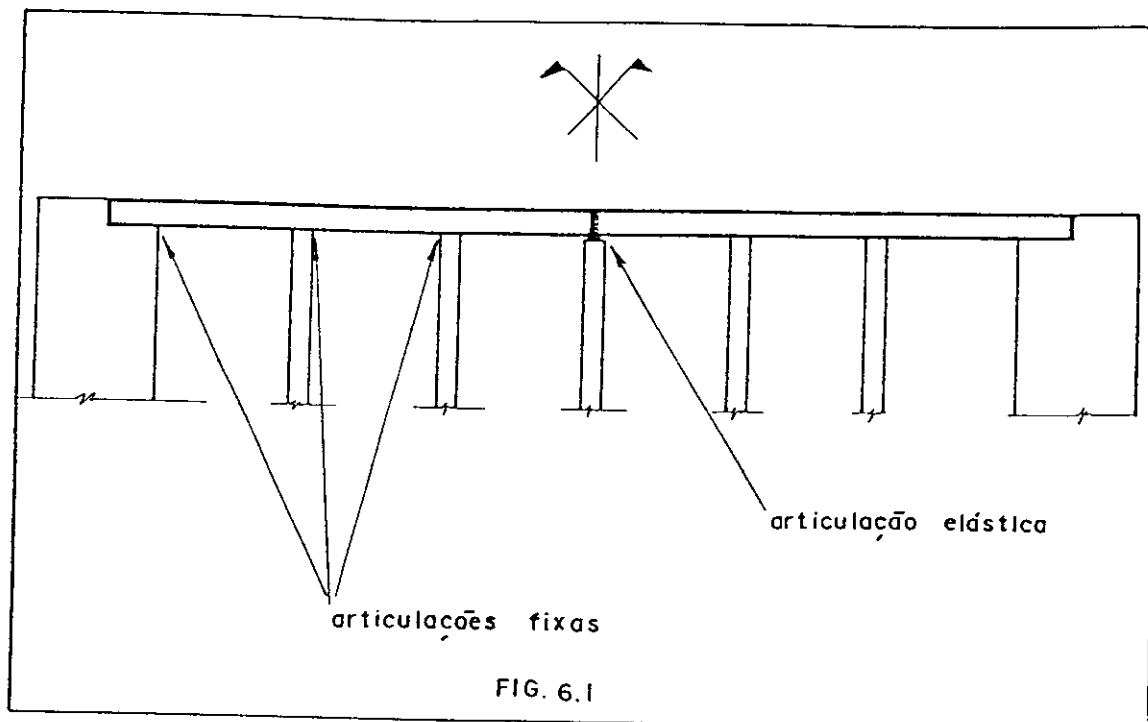
CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

A respeito da validade das hipóteses simplificadas feitas no capítulo IV, BRAGA, [11], abordando o mesmo assunto recomenda analisar melhor as hipóteses de que o tabuleiro tem rigidez infinita e a referente ao desprezo da influência da resistência à torção do tabuleiro na distribuição dos esforços horizontais.

No caso de pontes com tabuleiro contínuo se a rigidez global dos apoios for em todos eles da mesma ordem de grandeza, a validade da primeira hipótese é reforçada pela subdivisão do comprimento total, quanto à flexão no plano horizontal. No caso de alguns apoios muito mais rígidos que outros, a influência da flexão do tabuleiro no plano horizontal poderá se tornar sensível; Como exemplo aquele autor cita o caso apresentado na figura 6.1.

+



Na figura 6.1 o esquema apresenta uma ponte com dois trechos contínuos, fixados a encontros e separados um do outro através de uma junta central e articulações elásticas. Os encontros apresentam rigidez muito grande tanto à translação quanto à rotação; nesse caso as parcelas que solicitarão os pilares, provocadas pelas ações que se desenvolvem no plano horizontal, dependerão sensivelmente da deformação do tabuleiro no referido plano.

Quanto a validade da segunda hipótese a mesma só pode ser determinada através de cálculo mais rigoroso, conforme é sugerido por BRAGA, [11], item 8.2.

O presente trabalho não trata do cálculo mais rigoroso em vista do assunto ser muito complexo e requerer bastante tempo para o desenvolvimento do mesmo de maneira clara e objetiva. No entanto é necessário que referido assunto seja desenvolvido com o fim de se prever até que ponto vai o grau de confiabilidade no cálculo "simplista" apresentado nos capítulos precedentes.

Apesar das observações feitas anteriormente o problema da Distribuição dos Esforços Horizontais em Infraestruturas de pontes, abordado através dos processos descritos nos capítulos IV e V, é bem mais próximo da realidade do que determinados critérios para se avaliar referidos esforços; por exemplo o cálculo das solicitações devido à ação do vento na superestrutura, através da "superfície de influência" relativa ao pilar considerado, onde a solicitação é calculada pelo produto da referida área pelo valor da pressão do vento (item 2.1 do presente trabalho). Essa área é considerada limitada superiormente conforme indicado na NB-2 e transcrito neste trabalho no item acima referido e lateralmente pelas distâncias médias do pilar em questão aos pilares contíguos. Esse critério pode conduzir a valores bastante diferente da realidade e, naturalmente, bem mais crítico do que o apresentado pelo processo desenvolvido no presente trabalho.

Dos exemplos numéricos apresentados no capítulo IV tira-se algumas conclusões interessantes; nota-se por exemplo que a inclusão de aparelhos elásticos nos topos dos pilares reduz sensivelmente a rigidez global de cada pilar principalmente à torção diminuindo consideravelmente o momento de torção no topo de cada pilar; como se pode observar o momento de torção se torna praticamente desprezível.

No capítulo V desenvolveu-se o estudo da Distribuição dos Esforços Horizontais em Infraestrutura de Pontes com Tabuleiro contendo Juntas de Dilatação onde foi dada uma indicação geral para o cálculo automático dos referidos esforços; em vista do assunto requerer fórmulas extensas para sua resolução é que se pensou em tratar o problema matricialmente sendo esse processo mais prático para o uso computacional.

As fórmulas apresentadas no referido capítulo podem ter expressões mais simples, desde que a ponte em questão apresente certas particularidades; por exemplo nas pontes retas onde todos os ângulos θ são iguais a 0 já simplifica bastante o problema.

A solução matricial como foi proposto para a resolução do problema sem o uso do computador apresenta um inconveniente pois o processo envolve a inversão da matriz de rigidez do conjunto [S] a qual é no mínimo de ordem 6x6 quando a ponte se apoia somente em dois pilares. No entanto pode-se melhorar o processo quando se definem (além das coordenadas globais) um sistema de coordenadas locais localizado na própria barra (eixo do tabuleiro); por exemplo um sistema de coordenadas locais localizado no centro da barra.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - LANGENDONCK, T.V. - Cálculo de Concreto Armado, Vol.I - Associação Brasileira de Cimento Portland, 2a. Edição - São Paulo, 1954.
- 2 - LEONHARDT, F. e HÖNNIG, E. - Construções de Concreto, Vol.2. Traduzido por MERINO, J.L.E. - Editora Interciência LTDA, 1a. Edição, 1978.
- 3 - MASON, J. - Pontes em Concreto Armado e Protendido, 1977 - Pontes Metálicas e Mistas em Viga Reta, Projeto e Cálculo, 1976 - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- 4 - TOPALOFF, E. (Apoios de Borracha para Pontes, Cálculo e Aplicação. Traduzido por ALMEIDA, J.R.L.) e DAMITIO, C.R. (Bases do Cálculo das Fundações Profundas Engastadas num Solo Elástico e Submetidas a Esforços Horizontais - Traduzido por BENÉVOLO, H.) - Revista Brasileira de Estradas de Rodagem - NT/DNER Ano III nº 10.
- 5 - MANUAL TÉCNICO DA MEPEL - BASEFLEX, Apoios Elásticos para Pontes - Editado pelo Departamento Técnico da MEPEL COM. IND. S.A., outubro de 1978.
- 6 - WITTFOUT, H. - Puentes Internacionales - Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona 1975.
- 7 - ROBINSON, J.R. - Piles, Culées et Cintres des Ponts - Dunod, 1958 - Imprimido na França.
- 8 - MANUAL DO ENGENHEIRO "O GLOBO" - 4º volume 1º Tomo, 3a. Edição 2a. Impressão - Editora Globo, Porto Alegre/1973.
- 9 - BOWLES, J.E. - Foundation Analysis And Design - McGRAW-HILL KOGAKUSHA, LTD. - Second Edid, 1977.
- 10 - WINTERKON, H.F. e FANG, H. - Foundation Engineering Handbook - Publicado pela VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY.

- 11 - BRAGA, W.A. - Considerações Sobre as Infra-estruturas das Pontes - Tese de Doutorado Apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - São Paulo de 1972.
- 12 - FREITAS, M. - Infraestruturas de Pontes, Distribuição dos Esforços Horizontais - EPUSP - PEF, Janeiro/1977.
- 13 - RUBINSTEIN, M.F. - Matrix Computer Analysis of Structures - Editado por Prentice-Hall, Inc. em 1966.
- 14 - STAMATO, H.C. - Determinação dos Esforços nas Barras Elásticas que Vinculam um Corpo Rígido - Tese Apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos (USP), para o Concurso de Livre Docência - São Carlos/1964.
- 15 - BRANCO, A.M.C. e NOGUEIRA, J. - Cálculo dos Esforços em Infraestrutura Curva, XV^a Jornada Sul Americana de Engenharia Estrutural, Porto Alegre, 1971.
- 16 - DEL NERO, J.A. - Estabilidade de Pilares nas Obras de Arte, Trabalho Apresentado à EPUSP para a Obtenção do Título de Mestre - 1972.
- 17 - BADILLO, E.J. e RODRIGUES, A.R. - Mecânica de Suelos Tomo III, Flujo de Água en Suelos - Editorial Limusa, México/1975.
- 18 - LEONHARDT, F.; REIMANN, H.: Betongelenke, Versuchsbericht und Vorschläge zur Bemessung und Konstruktiven Ansbildung. DATStb., Caal. 175, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1965.