

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

CÁLCULO AUTOMÁTICO DE VIGAS CONTÍNUAS  
E GRELHAS CONSTITUÍDAS POR BARRAS  
CURVAS

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

ENGº MAURO AUGUSTO DEMARZO

OUTUBRO, 1979

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

CÁLCULO AUTOMÁTICO DE VIGAS CONTÍNUAS E  
GRELHAS CONSTITUÍDAS POR BARRAS CURVAS

ENGº MAURO AUGUSTO DEMARZO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À ESCOLA DE  
ENGENHARIA DE SÃO CARLOS, DA UNIVER-  
SIDADE DE SÃO PAULO, COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE "MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTU-  
RAS"

ORIENTADOR:

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DR. RONALDO GARCIA DE FIGUEIREDO

OUTUBRO, 1979

Dedico à: memória de meu pai  
minha família  
minha noiva  
todos os meus parentes e amigos

Í N D I C E

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO.....1

CAPÍTULO II

MATRIZ DE RIGIDEZ CORRESPONDENTE AOS  
DESLOCAMENTOS NO CENTRO ELÁSTICO

2.1 - Considerações Iniciais.....5  
2.2 - Determinação de Diagramas.....8  
2.3 - Construção dos Elementos da Matriz de Flexibilidade e sua  
Diagonalização  
a) Procura do Centro Elástico (C.E.).....14  
Comentários do Gráfico I.....17  
Gráfico I:  $(\frac{X}{\phi} \times \phi)$ .....18  
b) Cálculo dos Coeficientes de Flexibilidade correspondentes  
aos pares de esforços aplicados no centro elástico.....19  
b.1) Cálculo de  $F_{11}$ .....19  
b.2) Cálculo de  $F_{22}$ .....20  
b.3) Cálculo de  $F_{33}$ .....20  
b.4) Matriz de Rigidez correspondente aos deslocamentos  
no C.E. ....21  
Comentários do Gráfico II.....22  
Gráfico II:  $(\xi_{11} \times \phi)$ .....24  
Comentários do Gráfico III.....25  
Gráfico III:  $(\xi_{22} \times \phi)$ .....26  
Comentários do Gráfico IV.....27  
Gráfico IV:  $(\xi_{33} \times \phi)$ .....28

CAPÍTULO III

MATRIZ DE RIGIDEZ, PARA A BARRA CURVA, COR-  
RESPONDENTE AOS DESLOCAMENTOS NAS EXTREMIDADES

3.1 - Obtenção através da Matriz de Transformação [ A ] .....29  
3.2 - Comparação com a Matriz de Rigidez da barra reta.....31

CAPÍTULO IV

GRELHAS COM SIMETRIA POLAR

4.1 - INTRODUÇÃO.....33  
4.2 - Matriz de Transformação  $[R_T]$ .....34  
4.3 - Matriz de Rigidez  $[S_{MD}]$  da barra curva.....44

CAPÍTULO V

ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

5.1 - INTRODUÇÃO.....45  
5.2 - Matriz de Flexibilidade  
Obtenção das Incógnitas Hiperestáticas.....45  
5.3 - Deslocamentos Devidos às Cargas na Viga Curva em Balanço....49  
5.3.1 - Esforços Solicitantes na Seção Genérica.....49  
a - Carga Uniformemente Distribuída.....49  
b - Carga Concentrada.....49  
c - Momento Torçor Distribuído.....49  
d - Momento Concentrado de Torção.....50  
e - Momento de Torção  $X_1 = 1$ .....50  
f - Momento de Flexão  $X_2 = 1$ .....50  
g - Força Vertical  $X_3 = 1$ .....51  
5.3.2 - Deslocamentos  $\Delta_{i0}$  .....51  
5.3.2.1 - Devido à carga uniformemente distribuída..51  
5.3.2.2 - Devido à carga concentrada.....51  
5.3.2.3 - Devido à momento de torção uniformemente  
distribuído.....52  
5.3.2.4 - Devido à momento de torção concentrado....52  
5.4 - Esforços Hiperestáticos na Extremidade Esquerda.....52  
5.5 - Esforços na Extremidade Engastada da Viga em Balanço Devi-  
do ao Carregamento.....53  
5.5.1 - Carga uniformemente distribuída.....53  
5.5.2 - Carga concentrada.....53  
5.5.3 - Momento de Torção uniformemente distribuído.....54  
5.5.4 - Momento de Torção concentrado.....54  
5.6 - Esforços na Extremidade Engastada da Viga em Balanço Devi-  
dos aos Esforços  $X_1, X_2$  e  $X_3$ .....54

5.7 - Esforços de Engastamento na Extremidade Direita na Viga Bi-Engastada.....	55
5.8 - Esforços de Engastamento Perfeito da Viga Curva.....	56

## CAPÍTULO VI

### EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1 - Introdução.....	57
6.2 - Exemplo 1: Cálculo de um anel.....	57
Figura 34: Anel sobre três apoios.....	58
Figura 35: Perspectiva do anel e carregamento.....	58
Figura 36: Idealização feita por REDDY & TUMA <sup>2</sup> .....	59
Listagem dos resultados.....	59
Comentários sobre os resultados.....	61
6.3 - Exemplo 2: Cálculo de uma viga contínua curva.....	62
Figura 37: Esquema da viga a ser calculada.....	62
Listagem dos resultados.....	63
Figura 38: Sistema de coordenadas locais e globais.....	64
Comentários sobre os resultados.....	64
6.4 - Exemplo 3: Cálculo de uma grelha com carregamento simétrico.....	65
Figura 39: Desenho esquemático da grelha e numeração.....	65
Figura 40: Perspectiva da grelha e carregamento.....	66
Listagem dos resultados.....	66
Comentários sobre os resultados.....	67
6.5 - Exemplo 4: Cálculo de uma grelha com carregamento não simétrico.....	68
Figura 41: Desenho esquemático da grelha e numeração.....	68
Figura 42: Perspectiva da grelha e carregamento.....	69
Listagem dos resultados.....	70
Comentários sobre os resultados.....	72

## CAPÍTULO VII

### PROGRAMA PARA CÁLCULO AUTOMÁTICO

7.1 - Introdução.....	73
7.2 - Organização do programa.....	73
7.3 - Identificadores de variáveis.....	74
Tabela I: os identificadores das variáveis.....	74
7.4 - Preparação dos dados em cartões.....	77

Observação sobre a entrada.....	77
Tabela II: Preparação dos dados para o programa.....	78
Tabela III: Entradas de dados do exemplo nº 3.....	79
Observação sobre a Tabela III.....	80
7.5 - Fluxogramas.....	80
7.5.1 - Fluxograma do Programa Principal.....	81
7.5.2 - Fluxograma da sub-rotina CSMD.....	90
7.5.3 - Fluxograma da sub-rotina RSMD.....	92
7.5.4 - Fluxograma da sub-rotina CRIA.....	95
7.5.5 - Fluxograma da sub-rotina AEPC.....	100
7.5.6 - Fluxograma da sub-rotina AEPR.....	105
7.5.7 - Fluxograma da sub-rotina AMJ.....	108
7.5.8 - Fluxograma da sub-rotina INV.....	110
7.6 - Programa de Cálculo em linguagem FORTRAN IV.....	111
7.6.1 - Listagem do Programa Principal.....	112
7.6.2 - Listagem da sub-rotina CSMD.....	117
7.6.3 - Listagem da sub-rotina RSMD.....	118
7.6.4 - Listagem da sub-rotina CRIA.....	118
7.6.5 - Listagem da sub-rotina AEPC.....	120
7.6.6 - Listagem da sub-rotina AEPR.....	121
7.6.7 - Listagem da sub-rotina AMJ.....	122
7.6.8 - Listagem da sub-rotina INV.....	122

\*  
CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES.....	123
-----------------	-----

BIBLIOGRAFIA.....	125
-------------------	-----

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O cálculo de estruturas curvas planas com cargas perpendiculares ao seu plano vem de a muito sendo estudado, sendo os trabalhos mais antigos voltados para processos de cálculo manual. As exigências de traçado das modernas vias de comunicação levam cada vez mais frequentemente à necessidade de se construírem obras de arte curvas em planta. Além disso, estruturas de silos e galpões circulares com cobertura esférica acabam exigindo vigas de eixo curvo, e neste contexto é de muita valia o cálculo de grelhas com elementos curvos.

O problema da determinação das reações de apoio e dos esforços solicitantes pode ser abordado de forma rigorosa e dentro das hipóteses da Resistência dos Materiais, para o caso de vigas contínuas curvas, contidas em plano perpendicular às cargas, e tendo, em cada tramo, secção transversal e raio de curvatura constantes.

Se por um lado as soluções são "exatas", as limitações geométricas impostas ao problema podem restringir sua aplicação. Entretanto, oferecem, nos casos em que são aplicáveis, a vantagem de um cálculo relativamente simples através do emprego de tabelas e ábacos, ou, se disponível, o emprego de computadores digitais, que dão grande generalidade, e precisão controlável.

Quando iniciado o trabalho lançou-se mão de uma bibliografia e referências baseadas principalmente nos métodos de cálculo manual, pois os trabalhos mais modernos com vistas ao cálculo eletrônico não se encontravam ainda difundidos.

Para um breve levantamento do que já foi realizado, e de acordo com a maneira como se adentrou ao problema, pode-se fazer um breve resumo da maneira como foi atacado.

Uma das primeiras abordagens do problema foi feito por VELU TINI<sup>3</sup> (\*) que a partir da energia devida às forças agindo na viga, desprezando o efeito da força cortante, e usando o teorema de Castigliano, chegou a um sistema de equações relacionando deslocamentos e esforços. A seguir chegou a coeficientes de distribuição de momentos, montando um

---

(\*) Os números que aparecem como expoentes referem-se à bibliografia dada no fim do trabalho.



processo de cálculo idêntico ao Método de Cross.

Nas XV Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Porto Alegre, 1971, TUNEU<sup>5</sup> apresentou um artigo intitulado "Resolucion Análogica de Estructuras Planas Cargadas Transversalmente a su Plano", no qual o autor estabelece uma correspondência entre um conjunto de forças paralelas no espaço e outro conjunto de forças coplanares. Define também uma transformação de curva plana (que pode ser associado ao eixo longitudinal de uma barra) em outra curva plana. Para o caso particular de barras de eixo longitudinal circular, o autor estabelece uma analogia entre a barra carregada normalmente a seu plano e a barra equivalente transformada, carregada com forças coplanares. Demonstra ainda, que a análise de uma barra de eixo circular carregada normalmente ao seu plano pode ser transformada na análise de uma barra plana carregada em seu plano.

Nestas mesmas XV Jornadas Sulamericanas TUNEU & LICHTENSTEIN<sup>1</sup> apresentaram o trabalho "Cálculo de Vigas Circulares Cargadas Normalmente a su Plano. Ecuaciones de los seis giros". Nele os autores subdividem seu trabalho em duas partes:

- a) viga circular engastada à torção e livre à flexão;
- b) viga com engastamentos elásticos.

Os autores chegam a um procedimento para o cálculo de vigas contínuas circulares em planta, escrevendo duas equações sobre as 6 rotações nas extremidades das barras construindo um sistema que resolve o problema. O procedimento, de certa maneira, é análogo ao das equações dos três momentos para vigas contínuas retas.

Partindo do trabalho de VELUTINI<sup>3</sup>, os autores REDDY & TUMA<sup>2</sup> organizam matricialmente o problema e chegam a um sistema de equações de "cinco-momentos". O processo é aplicado manualmente, através de coeficientes de distribuição, embora possa ser adaptado para uso em computadores.

SHORE & ALI<sup>4</sup> apresentam um sistema de cálculo preliminar de pontes com curvatura em plano horizontal utilizando o conceito de viga reta "equivalente", considerando apenas cargas estaticamente aplicadas.

Já mais recentemente VREDEN<sup>8</sup> apresentou uma abordagem mais atual do problema, usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, e algumas de suas expressões são aproveitadas neste trabalho, como veremos adiante, nos momentos de engastamento perfeito de alguns casos de carregamento.

O presente trabalho, desde o seu início procurou resolver de maneira matricial, usando as matrizes de transformação, e outras simplificações, como por exemplo o uso de coordenadas intermediárias no centro elástico da viga curva, o problema do cálculo de vigas contínuas e grelhas de simetria polar para aplicação direta nos computadores.

A idéia inicial foi justamente obter as matrizes de rigidez e esforços de engastamento perfeito para deslocamentos situados num triângulo com eixos tangentes e radiais nas extremidades das barras. Com a adoção dos deslocamentos nestas direções, a grelha com simetria polar pode ser analisada usando o sistema de coordenadas polares, o qual facilitou enormemente a elaboração do programa (pois não houve mais necessidade de rotação de coordenadas), o fornecimento de dados para o mesmo, e a interpretação dos resultados, além de contribuir para um melhor condicionamento do sistema, desde que na grelha com simetria polar os nós sejam numerados do centro para os bordos.

Ressaltamos que as evidentes vantagens de se empregar o Centro Elástico (C.E.) são a obtenção de fórmulas mais compactas, que de outra maneira, nos levaria à expressões trigonométricas, sempre complicadas. Com o uso do C.E. o formulário fica mais simples e fácil de ser programável, dando mais confiabilidade, pois a verificação do conteúdo físico das fórmulas trigonométricas fica sempre mais difícil por causa da complexidade.

Com exemplos resolvidos, o desenvolvimento usado foi comprovado, verificando-se o equilíbrio dos nós, das barras, do conjunto, e os diagramas satisfazendo sempre as equações da estática.

Vamos resumir, em poucas palavras, o que apresentam cada capítulo.

No Capítulo II, a partir de uma viga circular cujas extremidades estão fixadas a duas barras infinitamente rígidas e de mesmo comprimento, encontra-se a MATRIZ DE RIGIDEZ correspondente aos deslocamentos no Centro Elástico, onde as extremidades livres das barras rígidas, acima citadas, repousam. Alguns gráficos são traçados visando-se levantar o comportamento do Centro Elástico, conforme variam a rigidez à flexão e a torção, além da variação dos coeficientes de rigidez segundo a abertura da viga. São feitos alguns comentários sobre os mesmos.

No Capítulo III encontra-se a MATRIZ DE RIGIDEZ correspondente aos deslocamentos nas extremidades da barra curva através de uma "matriz de transformação". Elimina-se assim as duas barras infinitamente rígidas. Neste capítulo faz-se uma comparação com a matriz de rigidez

da barra reta, no caso do ângulo de abertura tender a zero. Verifica-se aí a perfeita convergência daquela matriz para os valores conhecidos desta.

No Capítulo IV aborda-se a grelha com simetria polar. Encontra-se então a MATRIZ DE RIGIDEZ da barra curva para um sistema global (rotações consideradas nas direções radiais e tangenciais).

No Capítulo V apresentam-se o método de cálculo empregado para os Esforços de Engastamento Perfeito. Considerou-se os quatro casos de carregamento que mais comumente aparecem neste tipo de estrutura, ou seja: carga distribuída, carga concentrada, momento de torção distribuído, momento de torção concentrado.

No Capítulo VI apresentam-se os exemplos processados por computador e os resultados obtidos.

No Capítulo VII mostra-se o Programa FORTRAN desenvolvido. Apresenta-se a lista de variáveis envolvidas, a maneira como se deve entrar os dados, os fluxogramas das subrotinas e programa principal, e finalmente, a listagem do programa na linguagem FORTRAN IV processado no computador PDP-10, da DIGITAL, pertencente ao Centro de Processamento de Dados da UNICAMP.

No Capítulo VIII, tece-se alguns comentários sobre as conclusões a que se chegou.

Finalmente apresenta-se a BIBLIOGRAFIA envolvida assim como a referenciada.

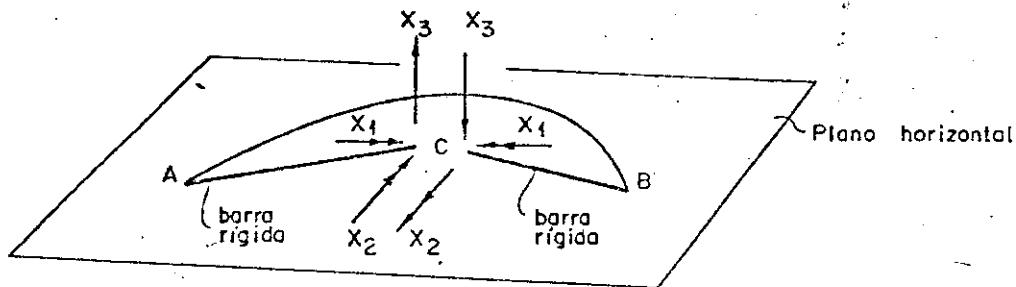
Nossa contribuição para resolução de estruturas dos tipos mencionados amplamente nesta introdução vem se somar a gama de pesquisa que se desenvolve neste sentido. Acreditamos, entretanto, que devido a abordagem feita, através do centro elástico, este trabalho tenha contribuído com uma nova luz sobre o problema e sirva como primeiro passo para criação de outros trabalhos e programas.

## CAPÍTULO II

### MATRIZ DE RIGIDEZ CORRESPONDENTE AOS DESLOCAMENTOS NO CENTRO ELÁSTICO

#### 2.1 - Considerações iniciais

Tomemos inicialmente uma barra circular cujas extremidades estão presas a duas barras infinitamente rígidas, de mesmo comprimento, como na Fig. 1.



( Fig. 1 )

Os esforços no ponto C de encontro das duas barras rígidas estão relacionados estaticamente com os esforços nas extremidades A e B da barra curva, como veremos durante o transcorrer do trabalho.

No apêndice A da publicação "Deslocamentos em Estruturas Lineares" de M.C.Stanato, às pp 95-100, e que trata do "Princípio da Superposição dos Efeitos", vemos que a validade desta superposição pressupõe a proporcionalidade entre causas e efeitos. Quando existem várias causas capazes de produzir determinado efeito, prova-se facilmente que a superposição de efeitos só vale quando o efeito é função linear das causas.

Superposição de efeitos é, portanto, sinônimo de linearidade. Em problemas estruturais, como o em questão, utiliza-se com frequência a superposição de efeitos.

Uma condição inicial para valer o princípio da superposição é que sejam válidas as hipóteses de Resistência dos Materiais (proporcionalidade entre tensões e deformações, conservação das seções planas, etc).

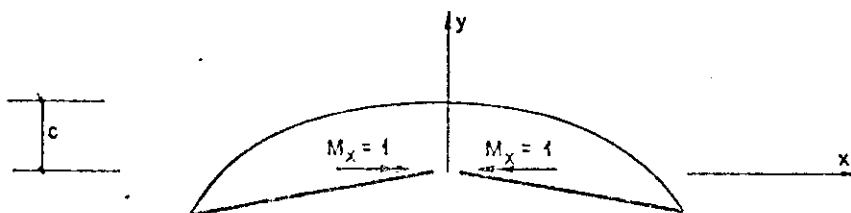
Só essa condição é insuficiente: a exigência adicional é

que a estrutura seja pouco deformável, como ocorre com a maioria das estruturas correntes, executadas com os materiais usuais.

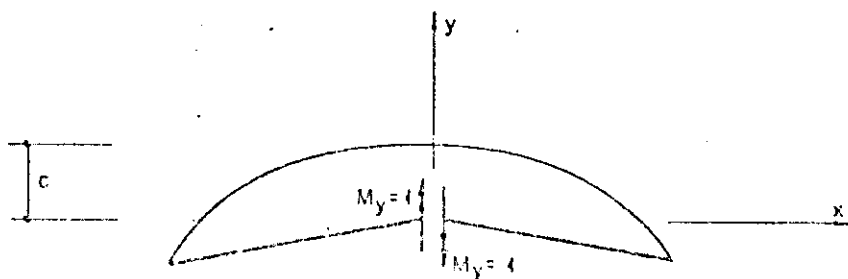
De um dos textos da bibliografia (Anexo 2), "Analysis of Continuous Circular Curved Beams", de Becla Velutini, foram tiradas as hipóteses iniciais para a pesquisa:

- a) A lei de Hooke é válida.
- b) O princípio da superposição é válido.
- c) As deformações devido às cortantes verticais são desprezíveis.
- d) O ângulo de flexão por unidade de comprimento da viga varia com  $\frac{M}{EJ}$  onde  $M$  é o momento em torno do eixo radial, e  $EJ$  é a rigidez à flexão.
- e) O ângulo de torção por unidade de comprimento da viga varia com  $\frac{T}{GJ_T}$ , onde  $T$  é o momento torçor, e  $GJ_T$  é a rigidez de torção.

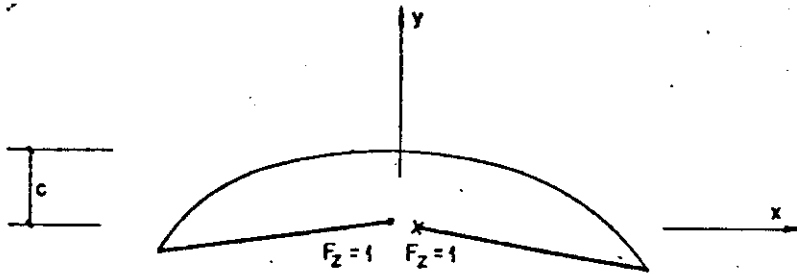
Visto que no nosso problema valerá a superposição de efeito, principiaremos por estudar os três estados de carregamentos unitários, distintos, mostrados nas Figs. 2, 3 e 4.



( Fig. 2 : Carregamento 1 )



( Fig. 3 : Carregamento 2 )



( Fig. 4 : Carregamento 3 )

Naquelas Figs. a distância  $c$  corresponde à posição das extremidades livres das barras rígidas. O valor interessante de  $c$  no nosso problema é aquele que define o centro elástico da barra curva, para os 3 carregamentos unitários descritos.

O centro elástico no presente trabalho será indicado por C.E., para facilidade de escrita.

A matriz de flexibilidade correspondente aos deslocamentos relativos ( $F_{ij}$ ) para o sistema de coordenadas no C.E. será:

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Verificamos aqui a importância de assumirmos o sistema de coordenadas no C.E.; os deslocamentos relativos  $F_{ij}$ , para  $i \neq j$ , se anulam dando-nos portanto uma matriz de flexibilidade diagonal.

Então a matriz de rigidez poderá ser calculada:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{F_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_{33}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

pois  $[S] = [F]^{-1}$  onde  $[F]^{-1}$  indica a inversa da matriz de flexibilidade, e quando a matriz é diagonal a sua inversa é dada pelos inversos dos elementos da diagonal principal, como poderá ser facilmente verificado.

Nossos próximos passos serão, portanto: a) determinação dos diagramas de momento e cortante para determinar-se os deslocamentos relativos, e b) procura do C.E. para a conseqüente diagonalização da matriz de flexibilidade.

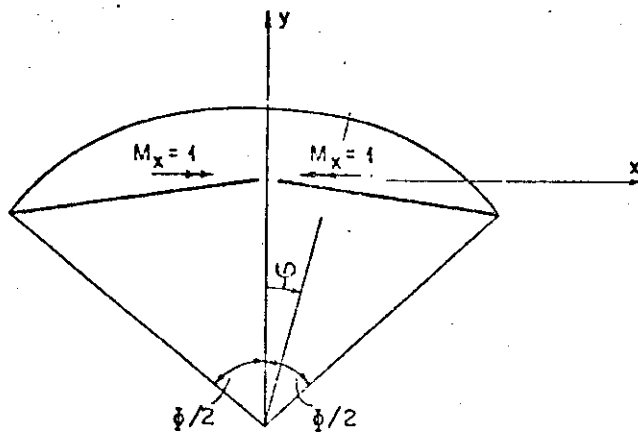
## 2.2 - Determinação de diagramas

Consideremos uma viga de eixo circular horizontal de raio  $\rho$  e ângulo de abertura  $\phi$ .

Consideremos também os 3 casos de carregamento auto-equilibrado anteriormente mencionados. A cada carregamento corresponderá um estado de sollicitação representados por um momento fletor  $M_x$ , um momento torçor  $\tau$ , e uma força cortante  $Q$ .

Carregamento 1 (Fig. 5): Momento  $M_x = 1$

(Estrutura simétrica com carregamento antissimétrico)

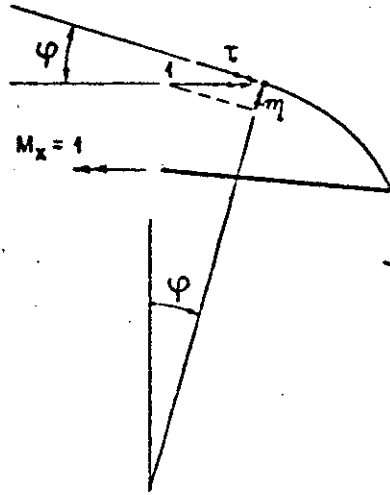


( Fig. 5 )

Procuremos os valores dos esforços sollicitantes em um ponto genérico do arco, definido pelo ângulo contado a partir do eixo  $y$ . Para tanto, isolamos a barra rígida direita e o trecho do arco até o ponto considerado (Fig. 6). O torçor é positivo se pela regra do saca-rolhas atua na seção de maneira que o vetor representativo penetra na seção transversal.

O momento fletor é positivo quando produz tração nas fibras inferiores.

O esforço cortante é positivo quando o vetor representativo percorre a seção no sentido horário, para um observador situado no centro da circunferência que contém a barra curva.



( Fig. 6 )

As componentes  $\sigma$  e  $\tau$  do esforço unitário serão:

$$\sigma = 1 \cdot \text{sen } \varphi = \text{sen } \varphi$$

$$\tau = 1 \cdot \text{cos } \varphi = \text{cos } \varphi$$

A força cortante  $Q$ , para este carregamento, é nula:

$$Q = 0$$

Com estes valores conhecidos podemos traçar os diagramas respectivos. (Figs. 6a, 6b e 6c)

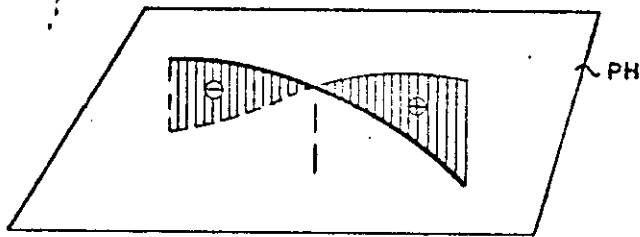
$$\sigma = \text{sen } \varphi \tag{3}$$

$$\tau = \text{cos } \varphi \tag{4}$$

$$Q = 0 \tag{5}$$

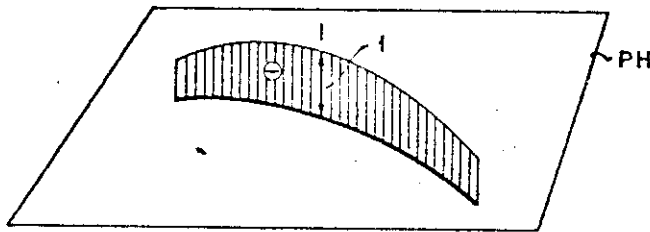
(Vide diagramas à folha seguinte)





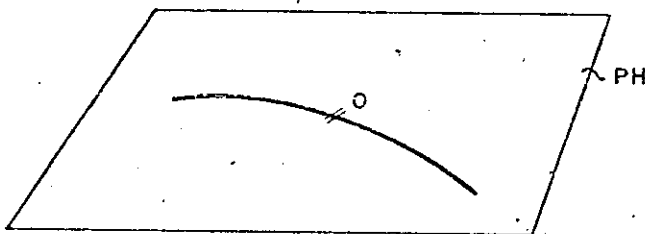
( Fig. 6.a )

Diagrama de  $M$   
(antimétrico)



( Fig. 6.b )

Diagrama de  $\tau$   
(simétrico)

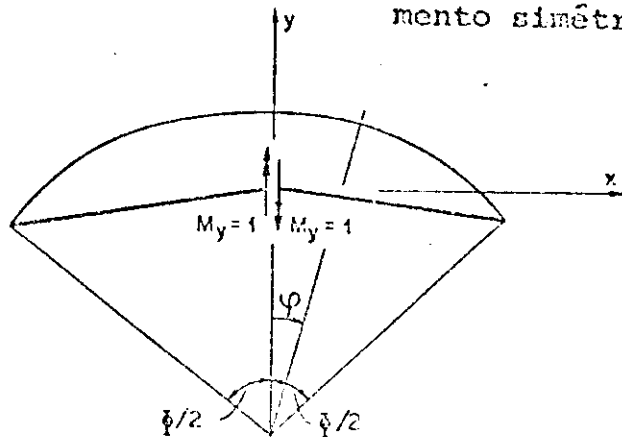


( Fig. 6.c )

Diagrama de  $Q$

Carregamento 2 ( Fig. 7 ): Momento  $M_y = 1$

(Estrutura simétrica com carregamento simétrico)



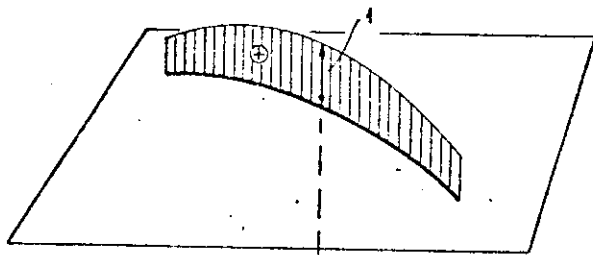
( Fig. 7 )

Por um raciocínio análogo ao anterior chegaremos aos diagramas das Figs. 8.a, 8.b, 8.c.

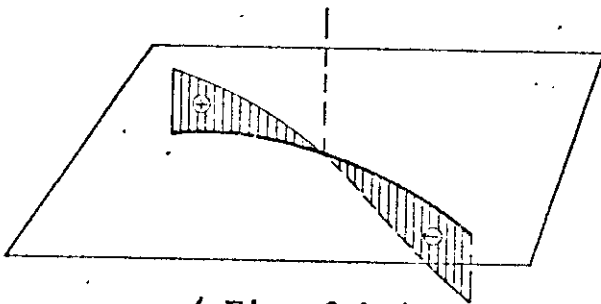
$$\mathcal{N} = \cos \varphi \quad (6)$$

$$\tau = - \operatorname{sen} \varphi \quad (7)$$

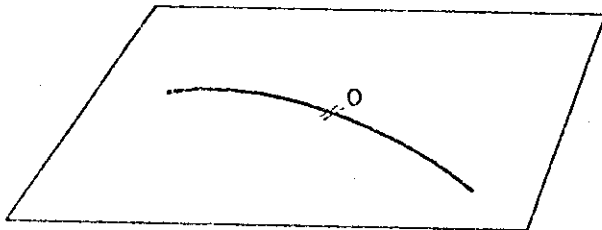
$$Q = 0 \quad (8)$$



( Fig. 8.a )



( Fig. 8.b )



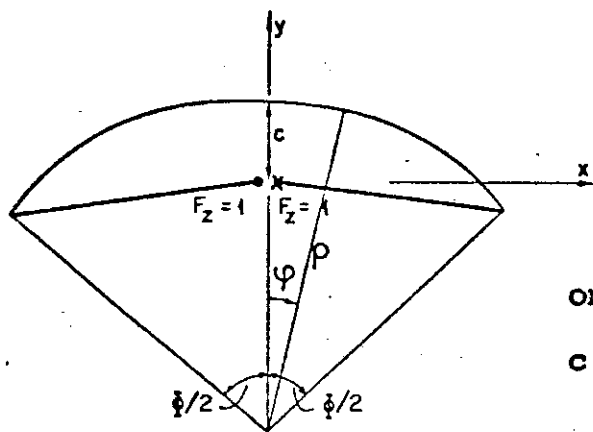
( Fig. 8.c )

Diagrama de  $\mathcal{N}$   
(simétrico)

Diagrama de  $\tau$   
(antimétrico)

Diagrama de  $Q$

Carregamento 3 (Fig. 9): Força  $F_z = 1$  (Estrutura simétrica com carregamento antissimétrico)



( Fig. 9 )

onde :

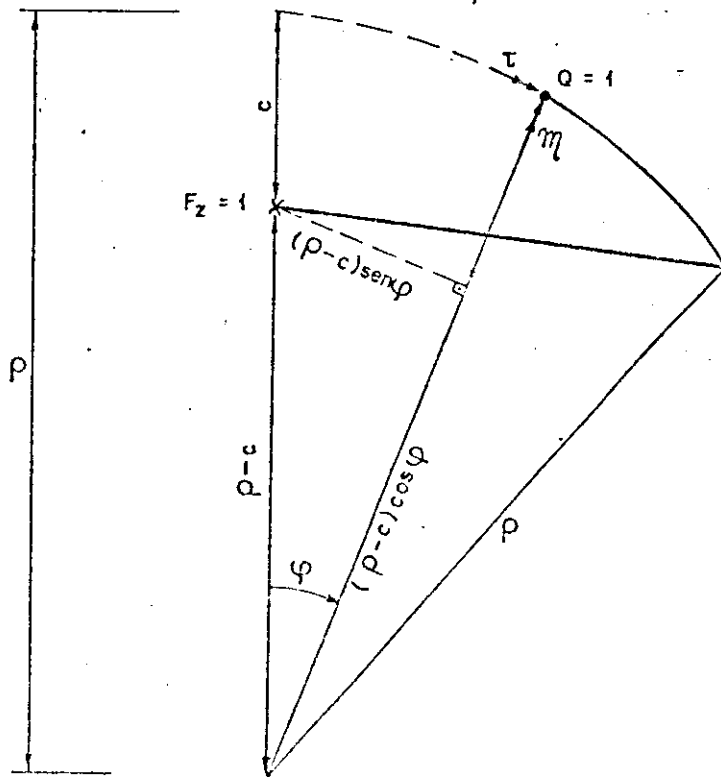
$c$  = posição das extremidades das barras rígidas

$\bullet$  = força de baixo para cima

$\times$  = força de cima para baixo

Para este carregamento, os momentos dependerão do raio  $\rho$  e da distância  $c$  medida sobre o eixo  $y$  entre o eixo da barra e as extremidades livres das barras rígidas.

Assim, isolando um trecho de barra definido pelo ângulo genérico  $\varphi$  (Fig. 10): encontraremos os momentos  $\mathcal{M}$  e  $\tau$  para a secção.



( Fig. 10 )

Os momentos  $\mathcal{M}$  e  $\tau$  para a secção serão:

$$\mathcal{M} = F_z \cdot (\rho - c) \sin \varphi = (\rho - c) \sin \varphi$$

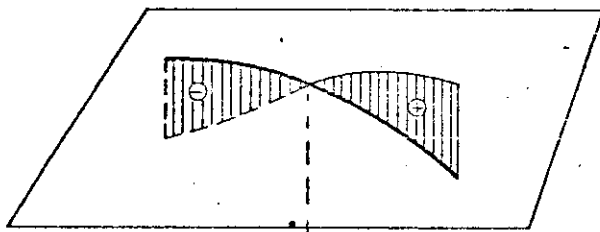
$$\tau = - F_z \cdot [\rho - (\rho - c) \cos \varphi] = - \rho + (\rho - c) \cos \varphi$$

A força cortante  $Q$  será constante para toda a viga:

$$Q = F_z = 1$$

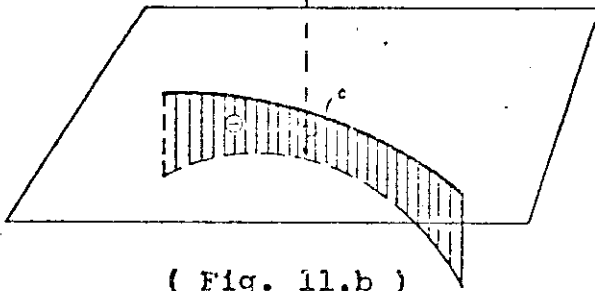
Os diagramas para o carregamento da Fig. 9 aparecem nas Figs. 11.a, 11.b e 11.c.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M} = (\rho - c) \sin \varphi \quad (9) \\ \tau = - \rho + (\rho - c) \cos \varphi \quad (10) \\ Q = 1 \quad (11) \end{array} \right.$$



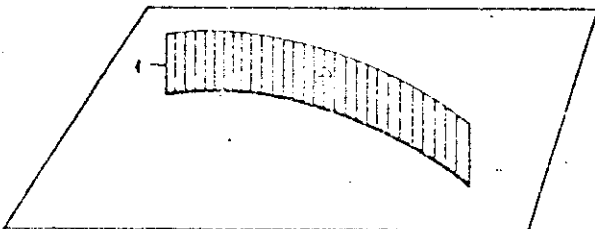
( Fig. 11.a )

Diagrama de  $\mathcal{M}$   
(antimétrico)



( Fig. 11.b )

Diagrama de  $\tau$   
(simétrico)



( Fig. 11.c )

Diagrama de  $Q$   
(constante)

## 2.3 - CONSTRUÇÃO DOS ELEMENTOS DA MATRIZ DE FLEXIBILIDADE E SUA DIAGONALIZAÇÃO

### a) PROCURA DO CENTRO ELÁSTICO:

Os deslocamentos relativos  $F_{ij}$  (que são os coeficientes de flexibilidade na eq. 1) na extremidade livre das barras rígidas, para os carregamentos unitários das Figs. 2, 3 e 4 serão calculados por:

$$F_{ij} = \int_{\text{estrutura}} \frac{\mathcal{M}_i \mathcal{M}_j}{EJ} ds + \int_{\text{estrutura}} \frac{\tau_i \tau_j}{G J_T} ds \quad (12)$$

expressão essa proveniente da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicados aos estados  $i$  e  $j$ , e onde:

$ds$  = elemento genérico da barra

$E$  = módulo de elasticidade

$J$  = momento de inércia da secção transversal

$G$  = módulo de elasticidade transversal

$J_T$  = constante geométrica de torção

Por considerações de simetria e antimetria dos diagramas  $\mathcal{M}$  e  $\tau$ , e fazendo os índices 1, 2 e 3 representarem respectivamente os esforços  $M_x$ ,  $M_y$  e  $F_z$ , tem-se já:

$$F_{12} = F_{M_x, M_y} = 0$$

$$F_{23} = F_{M_y, F_z} = 0$$

Note-se que a matriz de flexibilidade, por ser simétrica, terá os seus valores  $F_{21}$  e  $F_{32}$  também nulos, o que é facilmente demonstrado pela equação (12). Para que a matriz  $[F]$  (eq. 1) resulte diagonalizada é apenas necessário que se anulem os elementos  $F_{13} = F_{31}$  já que os outros elementos fora da diagonal principal são nulos.

O valor de  $F_{13}$  é obtido pela eq. 12 com os valores dos momentos fletores e torçores das eqs. 3, 4, 9 e 10, calculados com o valor genérico  $c$  como coordenada das extremidades das barras rígidas.

Se impusermos a condição:  $F_{13}=0$ , resultará uma equação que fornece o valor de  $c$  para que a condição seja satisfeita. O valor de  $c$  assim encontrado será pois a coordenada do C.E. procurado. (Fig.4)

Deseja-se, então, calcular o valor de  $c$  para que se tenha  $F_{13}=F_{Mx, Fz}=0$ . Assim, considerando-se a rigidez à flexão e à torção constantes:

$$F_{13}=0 = \frac{\rho(\rho-c)}{EJ} \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \frac{\rho}{GJ_T} \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \left[ -\rho \cos \varphi + (\rho-c) \cos^2 \varphi \right] d\varphi$$

Dividindo-se por  $\frac{\rho^2}{EJ}$ , que por hipótese não será nunca igual a zero, e considerando  $\lambda = \frac{EJ}{GJ_T}$  ..... (13)

teremos:

$$0 = \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \lambda \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \left[ -\cos \varphi + \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) \cos^2 \varphi \right] d\varphi$$

$$0 = \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen} 2\varphi \right]_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} + \lambda \left\{ \left[ -\text{sen} \varphi \right]_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} + \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \text{sen} 2\varphi \right]_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \right\}$$

$$0 = \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) \left[ \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2} \text{sen} \phi + \frac{\lambda \phi}{2} + \frac{\lambda}{2} \text{sen} \phi \right] - 2\lambda \text{sen} \frac{\phi}{2}$$

$$\text{Portanto: } \left(1 - \frac{c}{\rho}\right) = \frac{4\lambda \text{sen} \frac{\phi}{2}}{\phi \left[ (1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{\text{sen} \phi}{\phi} \right]}$$

De onde, finalmente:

$$c = \rho \left[ 1 - \frac{4\lambda \frac{\text{sen} \frac{\phi}{2}}{\phi}}{(1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{\text{sen} \phi}{\phi}} \right] \quad (14)$$

Chamando de  $\chi$  a expressão:

$$\chi = 1 - \frac{4\lambda \frac{\text{sen } \frac{\phi}{2}}{\phi}}{(1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{\text{sen } \phi}{\phi}} \quad (15)$$

resulta de (14)

$$c = \rho \chi \quad (16)$$

É importante aqui notar-se que na equação (15):

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \chi = 0 \quad (17)$$

Considerando que a viga curva tem um comprimento  $L$  e que este comprimento é dado por:

$$L = \rho \phi \quad (18)$$

tem-se:

$$c = L \frac{\chi}{\phi} \quad (19)$$

e então:

$$c = L \left\{ \frac{1}{\phi} - \frac{4\lambda \frac{\text{sen } \frac{\phi}{2}}{\phi}}{\phi \left[ (1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]} \right\} \quad (20)$$

sendo:

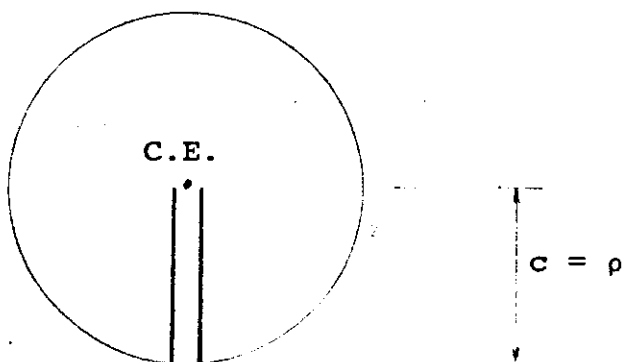
$$\frac{\chi}{\phi} = \left\{ \frac{1}{\phi} - \frac{4\lambda \frac{\text{sen } \frac{\phi}{2}}{\phi}}{\phi \left[ (1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{\text{sen } \phi}{\phi} \right]} \right\} \quad (21)$$

A expressão (20) é útil para o cálculo de  $c$  quando a barra curva é obtida de uma barra reta de comprimento  $L$  encurvada de um ângulo  $\phi$ . O caso limite de  $\phi$  corresponde à barra reta e o limite encontrado para  $\frac{\chi}{\phi}$  (eq. 21) é também zero. Este caso corresponde ao fato conhecido de que a barra reta solicitada por cortante e fletor não terá rotações de torção das secções.

O gráfico I (a seguir) mostra a variação de  $\frac{\lambda}{\phi}$  para diversos valores da relação  $\lambda = \frac{EJ}{GJ_t}$ .

Este gráfico foi traçado a partir dos dados obtidos de um programa processado em computador, onde, para os valores  $\lambda = 0,001; 0,01; 0,05; 0,5; 0,7; 0,9; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500; 1.000; 2.000; 5.000; e 10.000$ , se variou o ângulo  $\phi$  de abertura da viga curva de 0,001 radianos até  $2\pi$  radianos de  $\frac{\pi}{36}$  em  $\frac{\pi}{36}$  ( $5^\circ$ ). Assim sendo, levantou-se 73 pontos para cada curva e a partir deles pode-se montar tal gráfico sobre o qual, agora, teceremos alguns comentários e tiraremos algumas conclusões.

Primeiramente, observando-se a extremidade direita, ao alto, deste gráfico, notamos uma convergência total das curvas, para o valor 0,159155 (que corresponde ao valor  $\frac{1}{2\pi}$ ) quando  $\phi$  tende a  $2\pi$ . Isso é facilmente compreendido se lembrarmos que, quando a barra  $L$  é encurvada de um ângulo  $2\pi$ , o centro elástico correspondente ocupa a posição do centro da circunferência:



ou seja, substituindo-se  $c = \rho$  na equação (19) teremos:

$$c = \rho = L \frac{\lambda}{\phi} = 2\pi \rho \frac{\lambda}{\phi} \dots\dots\dots(22)$$

de onde se conclue que para a viga curva de ângulo  $2\pi$ , o fator  $\frac{\lambda}{\phi}$  valerá:

$$\frac{\lambda}{\phi} = \frac{1}{2\pi} = 0,159155 \dots\dots\dots(23)$$

como mostra o gráfico I.



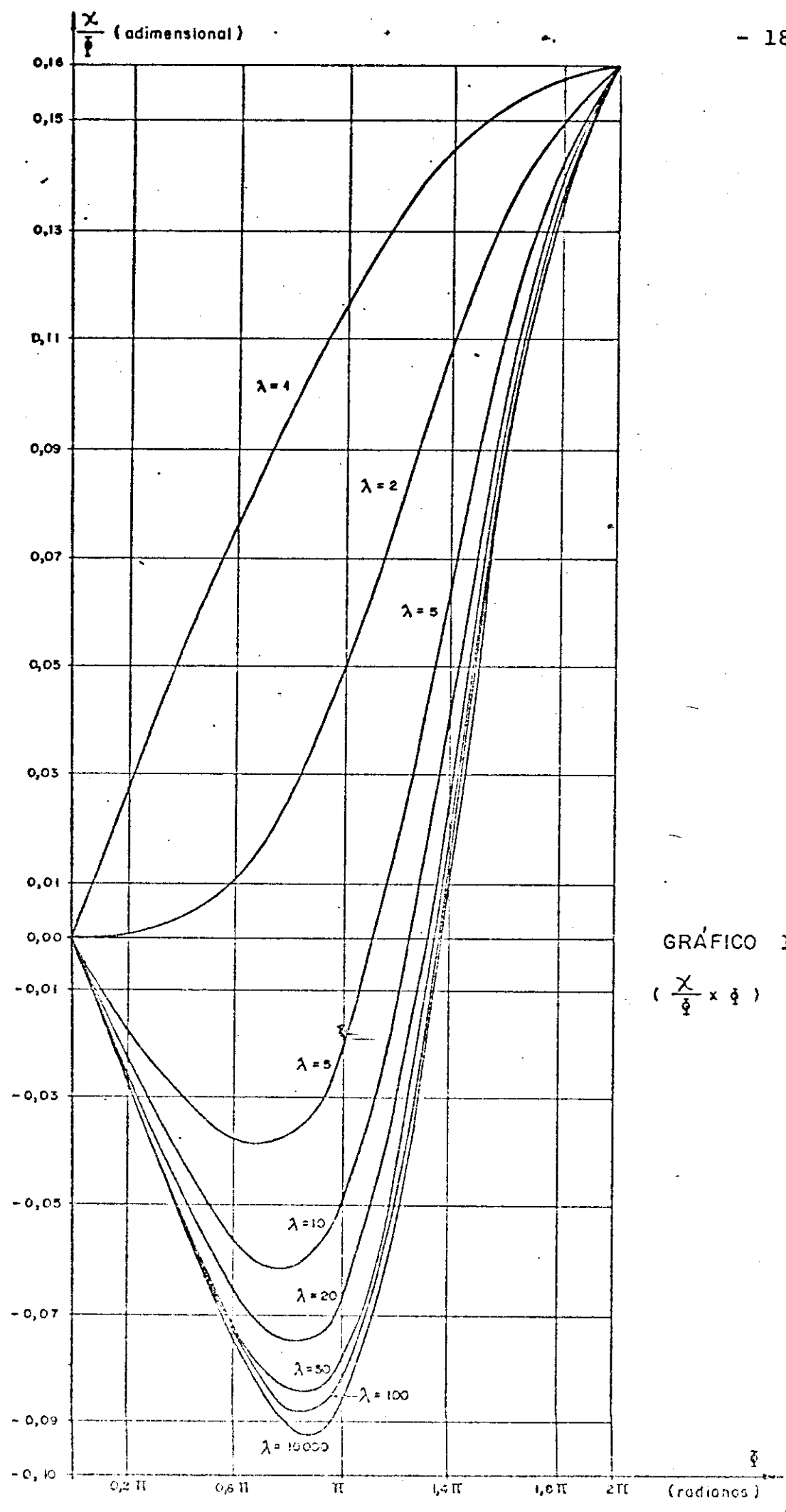
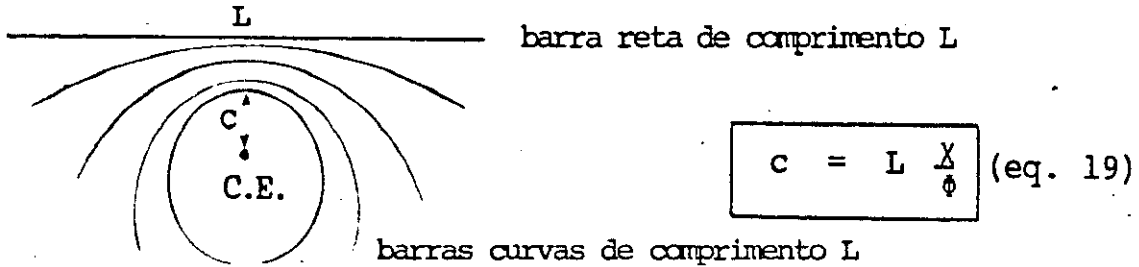
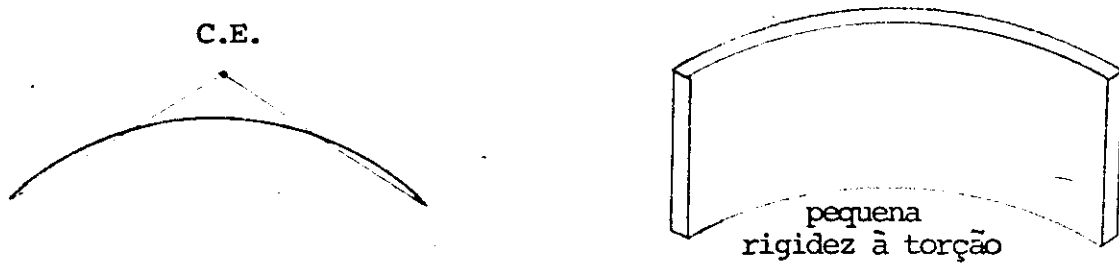


GRÁFICO I :  
(  $\frac{X}{\phi} \times \phi$  )

Lembrando que o fator  $\frac{\lambda}{\phi}$ , segundo a equação (19), é o número que multiplicado pelo comprimento L da barra curva nos fornece a posição do C.E. da mesma,



é interessante notar-se que existe uma faixa de valores de  $\phi$ , conforme se vê no gráfico I, para os quais, quando  $\lambda > 2$  (pequena rigidez à torção), o fator  $\frac{\lambda}{\phi}$  fica negativo, o que significa que o centro elástico passa a se posicionar na parte convexa da viga curva.



Para  $\lambda < 2$ , ou seja, quando a rigidez a flexão se equivale à rigidez de torção, ou mesmo torna-se menor, o C.E. permanece sempre na parte côncava da viga.

b) CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE FLEXIBILIDADE CORRESPONDENTES AOS PARES DE ESFORÇOS APLICADOS NO CENTRO ELÁSTICO

b.1) CÁLCULO DE  $F_{11} = F_{Mx, Mx}$  (ver eq. 12)

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= \frac{\rho}{EJ} \int_{\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + \frac{\rho}{GJ_T} \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi \\
 &= \frac{\rho}{EJ} \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} + \frac{\rho\lambda}{EJ} \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \\
 &= \frac{\rho}{EJ} \left[ \frac{\phi}{2} - \frac{\sin \phi}{2} \right] + \frac{\rho\lambda}{EJ} \left[ \frac{\phi}{2} + \frac{\sin \phi}{2} \right] \\
 &= \frac{L}{EJ} \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} - \frac{(1-\lambda)}{2} \frac{\sin \phi}{\phi} \right]
 \end{aligned}$$

$$F_{11} = \frac{L}{GJ_T} \left[ \frac{(\lambda+1)}{2\lambda} + \frac{(\lambda-1)}{2\lambda} \frac{\sin \phi}{\phi} \right] \quad (24)$$

Convém notar que para  $\phi \rightarrow 0$ , o fator entre colchetes, na eq. 24, tende à unidade.

b.2) CÁLCULO DE  $F_{22} = F_{My,My}$  (ver eq. 12)

$$\begin{aligned}
 F_{22} &= \frac{\rho}{EJ} \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi + \frac{\rho}{GJ_T} \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{\rho}{EJ} \left[ \frac{\phi}{2} + \frac{\text{sen}\phi}{2} \right] + \frac{\rho\lambda}{EJ} \left[ \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen}\phi}{2} \right] \\
 &= \frac{L}{EJ} \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} + \frac{(1-\lambda)}{2} \frac{\text{sen}\phi}{\phi} \right]
 \end{aligned}$$

$F_{22} = \frac{L}{EJ} \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} + \frac{(1-\lambda)}{2} \frac{\text{sen}\phi}{\phi} \right]$	(25)
--	------

Neste caso também, quando  $\phi \rightarrow 0$ , o fator entre colchetes (eq. 25) tende à unidade.

b.3) CÁLCULO DE  $F_{33} = F_{Fz,Fz}$  (ver eq. 12)

$$\begin{aligned}
 F_{33} &= \frac{\rho^3 (1-\chi)^2}{EJ} \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{\rho^3 \lambda}{EJ} \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \left[ (1-\chi)^2 \cos^2 \varphi + 1 - 2(1-\chi) \cos \varphi \right] d\varphi \\
 &= \frac{\rho^3 (1-\chi)^2}{EJ} \left( \frac{\phi}{2} - \frac{\text{sen}\phi}{2} \right) + \frac{\rho^3 \lambda}{EJ} \left[ (1-\chi)^2 \left( \frac{\phi}{2} + \frac{\text{sen}\phi}{2} \right) + \phi - 4(1-\chi) \text{sen} \frac{\phi}{2} \right] \\
 &= \frac{\rho^3}{EJ} \left\{ (1-\chi) \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} (1-\chi) \phi - \frac{(1-\lambda)}{2} (1-\chi) \text{sen}\phi - 4\lambda \text{sen} \frac{\phi}{2} + \frac{\lambda}{(1-\chi)^2} \phi \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$F_{33} = \frac{L^3}{12EJ} \left\{ \frac{12(1-\chi)^2}{\phi^2} \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} - \frac{(1-\lambda)}{2} \frac{\text{sen}\phi}{\phi} - \frac{4\lambda}{(1-\chi)} \frac{\text{sen} \frac{\phi}{2}}{\phi} + \frac{\lambda}{(1-\chi)^2} \right] \right\}$
---

.....(26)

Também aqui, para  $\phi$  tendendo a zero, o fator entre chaves (eq.26) tende a 1.

**b.4) MATRIZ DE RIGIDEZ CORRESPONDENTE AOS DESLOCAMENTOS NO CENTRO ELÁSTICO**

Pelo que foi visto pelas equações 1 e 2 (pág. 07) a matriz de rigidez pode ser facilmente calculada.

Para isso, devemos tomar como matriz inversa a matriz diagonal cujos elementos  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  e  $S_{33}$  são respectivamente os inversos de  $F_{11}$ ,  $F_{22}$  e  $F_{33}$  (eqs. 24, 25 e 26)

$$S_{11} = \frac{1}{F_{11}} = \frac{GJ_T}{L} \left[ \frac{2\lambda}{(\lambda+1) + (\lambda-1) \frac{\text{sen } \phi}{\phi}} \right] \quad (27)$$

$$S_{22} = \frac{1}{F_{22}} = \frac{EJ}{L} \left[ \frac{2}{(1+\lambda) + (1-\lambda) \frac{\text{sen } \phi}{\phi}} \right] \quad (28)$$

$$S_{33} = \frac{1}{F_{33}} = \frac{12EJ}{L^3} \left\{ \frac{\phi^2}{12(1-\chi)^2} \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} - \frac{(1-\lambda)}{2} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} - \frac{4\lambda}{(1-\chi)} \frac{\text{sen } \frac{\phi}{2}}{\phi} + \frac{\lambda}{(1-\chi)^2} \right]^{-1} \right\} \quad (29)$$

ou, de uma maneira compacta:

$$S_{11} = \frac{GJ_T}{L} \{_{11} \quad (30)$$

$$S_{22} = \frac{EJ}{L} \{_{22} \quad (31)$$

$$S_{33} = \frac{12EJ}{L^3} \{_{33} \quad (32)$$

onde

$$\{_{11} = \frac{2\lambda}{(\lambda+1) + (\lambda-1) \frac{\text{sen } \phi}{\phi}} \quad (33)$$

$$\xi_{22} = \frac{2}{(1+\lambda) + (1-\lambda) \frac{\text{sen}\phi}{\phi}} \quad (34)$$

$$\xi_{33} = \frac{\phi^2}{12(1-\lambda)^2} \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} - \frac{(1-\lambda)}{2} \frac{\text{sen}\phi}{\phi} - \frac{4\lambda}{(1-\lambda)} \frac{\text{sen}\frac{\phi}{2}}{\phi} + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \right]^{-1} \quad (35)$$

As variações das funções  $\xi_{11}$ ,  $\xi_{22}$  e  $\xi_{33}$  com o ângulo  $\phi$  da viga curva foram determinadas através de cálculo eletrônico e estão mostradas respectivamente nos Gráficos II, III e IV. Nestes gráficos podemos notar que os coeficientes de rigidez para a barra curva, tendem para os valores correspondentes da barra reta, quando  $\phi$  tende a zero, isto é:

$$S_{11} = \frac{GJ_T}{L}; \quad S_{22} = \frac{EJ}{L}; \quad S_{33} = \frac{12EJ}{L^3}$$

Os gráficos II, III e IV foram traçados para ver se correspondiam a um significado físico.

Vamos tecer alguns comentários sobre os mesmos, segundo o que pudemos observar.

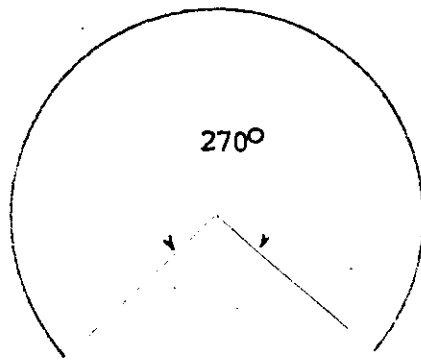
No Gráfico II, é lançado o fator  $\xi_{11}$  variando de acordo com a abertura da viga, desde 0 radianos até  $2\pi$  radianos. Lembrando que, pela equação (30), multiplicando-se  $\frac{GJ_t}{L}$  por  $\xi_{11}$  obtém-se o coeficiente de rigidez  $S_{11}$  (rigidez à torção):

$$S_{11} = \frac{GJ_t}{L} \xi_{11} \quad (\text{eq. 30})$$

a observação do Gráfico II é particularmente interessante para se avaliar o comportamento deste coeficiente de rigidez.

Pode-se notar que:

1) Para valores de  $\lambda > 1$  as curvas assumem um máximo para o ângulo  $\phi$  de abertura em torno de  $1,5\pi$ , ou seja,  $270^\circ$ .



viga que apresenta valores máximos e mínimos para  $\xi_{11}$

- 2) Para  $\lambda = 1$ , ou seja,  $EG = GJ_t$ , o valor de  $\xi_{11}$  será 1 para qualquer  $\phi$ , o que nos leva a um coeficiente de rigidez à torção  $S_{11} = \frac{GJ_t}{L}$ , idêntico a da barra reta.
- 3) Um aumento de  $\lambda = \frac{EJ}{GJ_t}$  corresponde a introduzir rigidez à flexão, e por isso notamos para  $\lambda > 1$  o aumento do valor do fator  $\xi_{11}$ .
- 4) Para  $0 < \lambda < 1$ , os valores de  $\xi_{11}$  ficam abaixo de 1,0 para qualquer  $\phi$  tendendo a um mínimo em torno de  $\phi \approx 270^\circ$ .
- 5) O fator  $\xi_{11}$  tende a 1,0 para a barra reta, como seria de se esperar por sua própria definição, porque na barra reta a torção e a flexão são independentes.

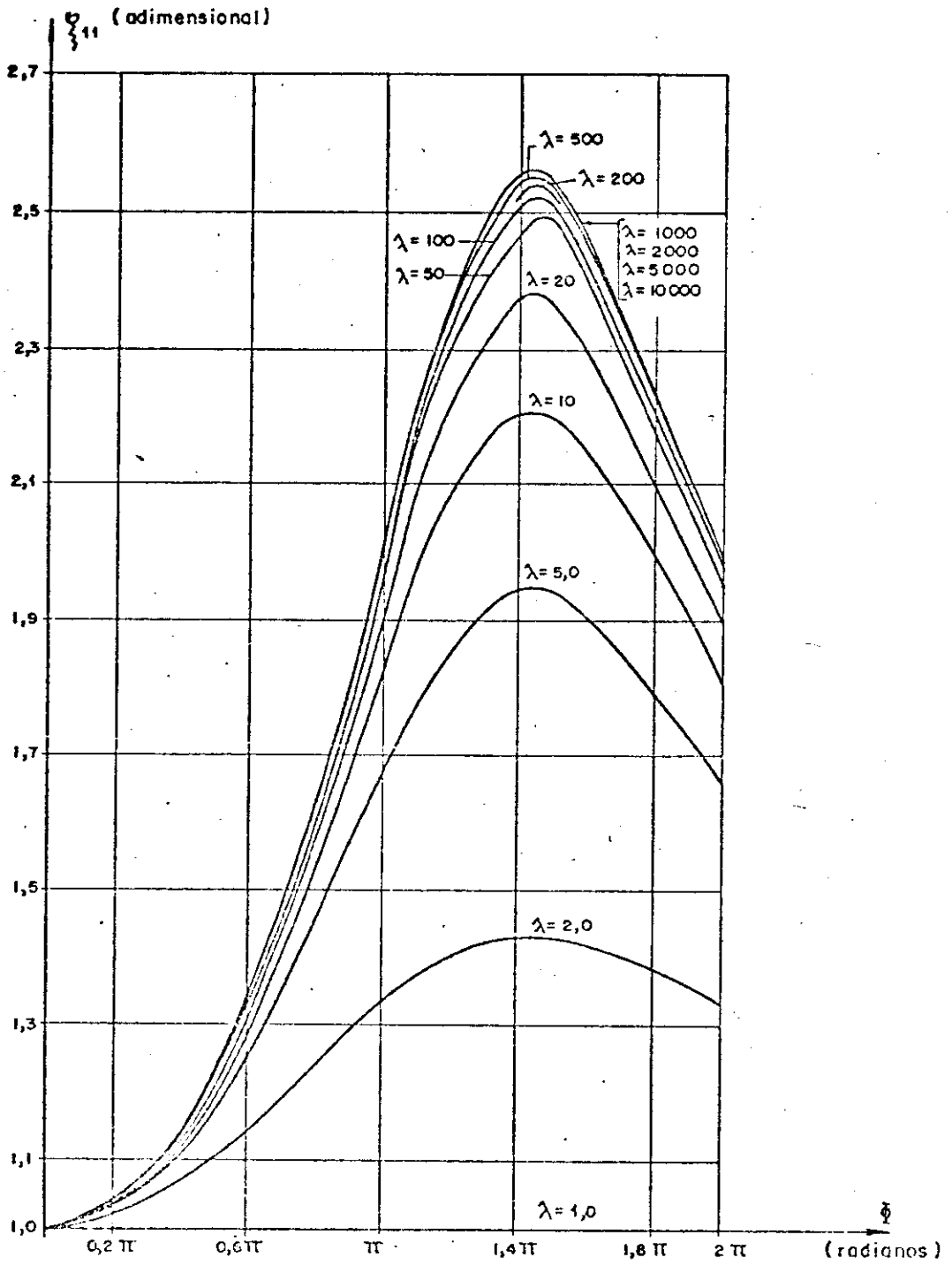


GRÁFICO II :  $(\zeta_{11} \times \phi)$

No Gráfico III as curvas representam o fator  $\xi_{22}$  variando com a abertura  $\phi$  da viga curva, desde 0 radianos até  $2\pi$  radianos.

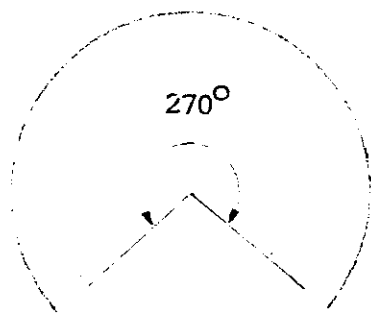
Pela equação (31):

$$S_{22} = \frac{EJ}{L} \xi_{22}$$

Observa-se que o fator  $\xi_{22}$  multiplicado por  $(\frac{EJ}{L})$  nos leva ao coeficiente de rigidez  $S_{22}$  (rigidez à flexão).

Observamos ainda que:

- 1) Para valores de  $\lambda > 1$  as curvas assumem um mínimo para o ângulo de abertura em torno de  $1,5\pi$ , ou seja,  $270^\circ$ .



viga que apresenta valores mínimos e máximos para  $\xi_{22}$

- 2) Para  $\lambda = 1$ ,  $EJ = GJ_t$ , o valor de  $\xi_{22}$  será sempre 1 para qualquer  $\phi$ , levando-nos a um coeficiente de rigidez a flexão  $S_{22} = \frac{EJ}{L}$ .
- 3) Um aumento  $\lambda = \frac{EJ}{GJ_t}$  corresponde a introduzir rigidez à flexão, e por isso notamos para  $\lambda > 1$  a diminuição do valor do fator  $\xi_{22}$ .
- 4) Para  $0 < \lambda < 1$ , os valores de  $\xi_{22}$  ficam acima de 1,0 para qualquer  $\phi$ , tendendo a um máximo em torno de  $\phi = 270^\circ$ .
- 5) O fator  $\xi_{22}$  tende a 1,0 como seria de se esperar para a barra reta, pela própria definição de  $\xi_{22}$ , pois, na barra reta, a flexão e a torção são independentes.



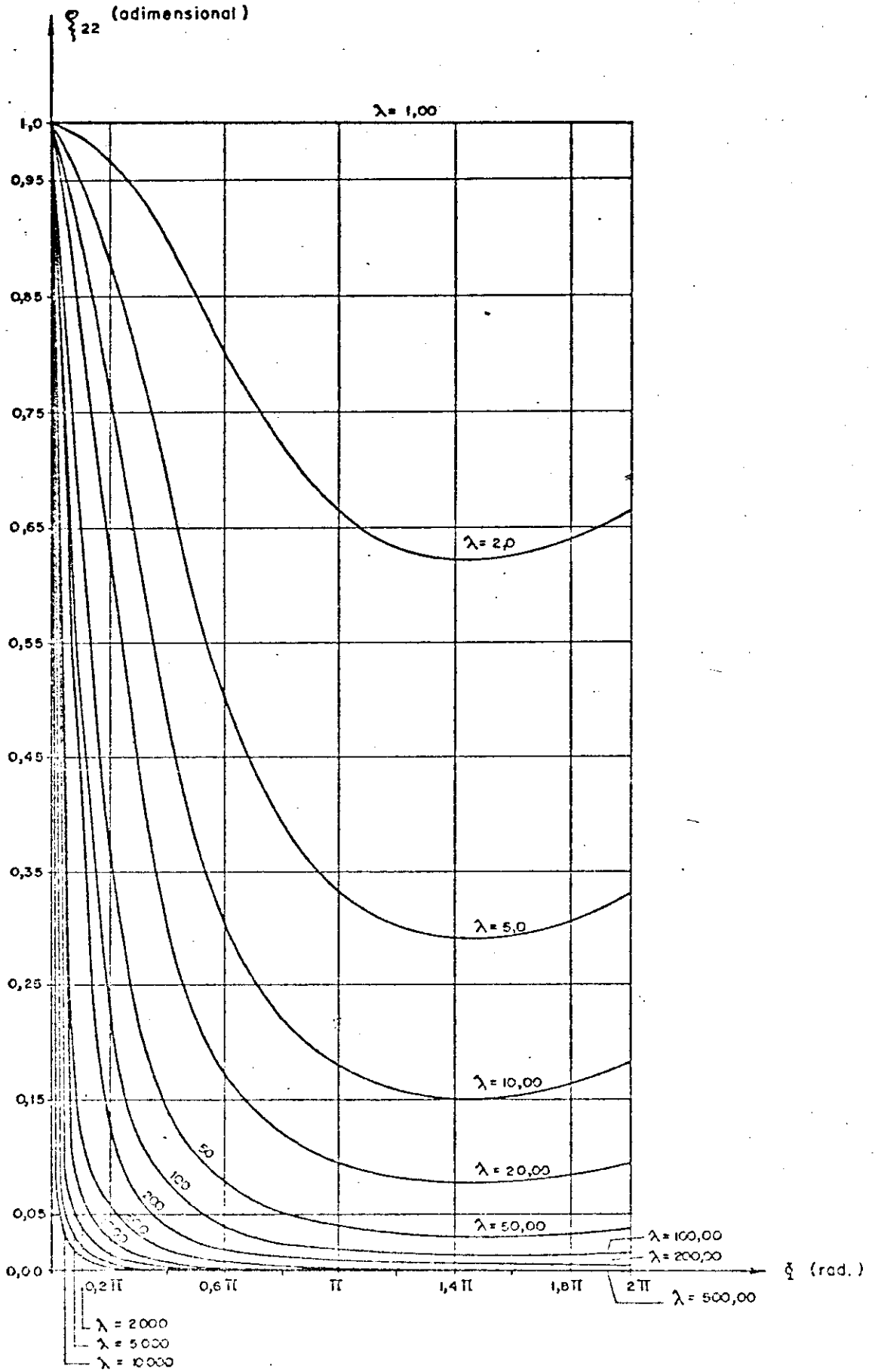


GRÁFICO III : (  $\varphi_{22} \times \xi$  )

No gráfico IV representa-se o fator  $\xi_{33}$  variando com a abertura  $\phi$  da viga curva, desde 0 radianos até  $2\pi$  radianos.

Pela equação (32):

$$S_{33} = \frac{12EJ}{L^3} \xi_{33}$$

observa-se que o fator  $\xi_{33}$  multiplicado por  $(\frac{12EJ}{L^3})$  nos leva ao coeficiente de rigidez  $S_{33}$  (rigidez à força transversal).

Observa-se neste gráfico, que:

- 1) Para valores de  $\lambda > 1$  as curvas assumem um mínimo que a partir de  $\lambda > 5$  ocorre para ângulo de abertura  $\phi \approx 270^\circ$ .
- 2) Para  $\lambda = 1$ , o valor de  $\xi_{33}$  será sempre maior ou igual a 1,0, qualquer que seja a abertura  $\phi$  da viga.
- 3) Para  $1 < \lambda < 5$  observa-se que  $\xi_{33}$  assume alguns valores menores que 1 e outros maiores que 1, segundo o ângulo de abertura  $\phi$  (vide o gráfico).
- 4) Para  $0 < \lambda < 1$ , os valores de  $\xi_{33}$  vão se tornando cada vez maiores, a medida que aumentamos  $\phi$ , ou seja, para o caso de termos rigidez de torção grande o coeficiente de rigidez à força transversal  $S_{33}$  vai aumentando rapidamente.
- 5) O fator  $\xi_{33}$  tende a 1,0 para a barra reta, como seria de se esperar de sua própria definição.

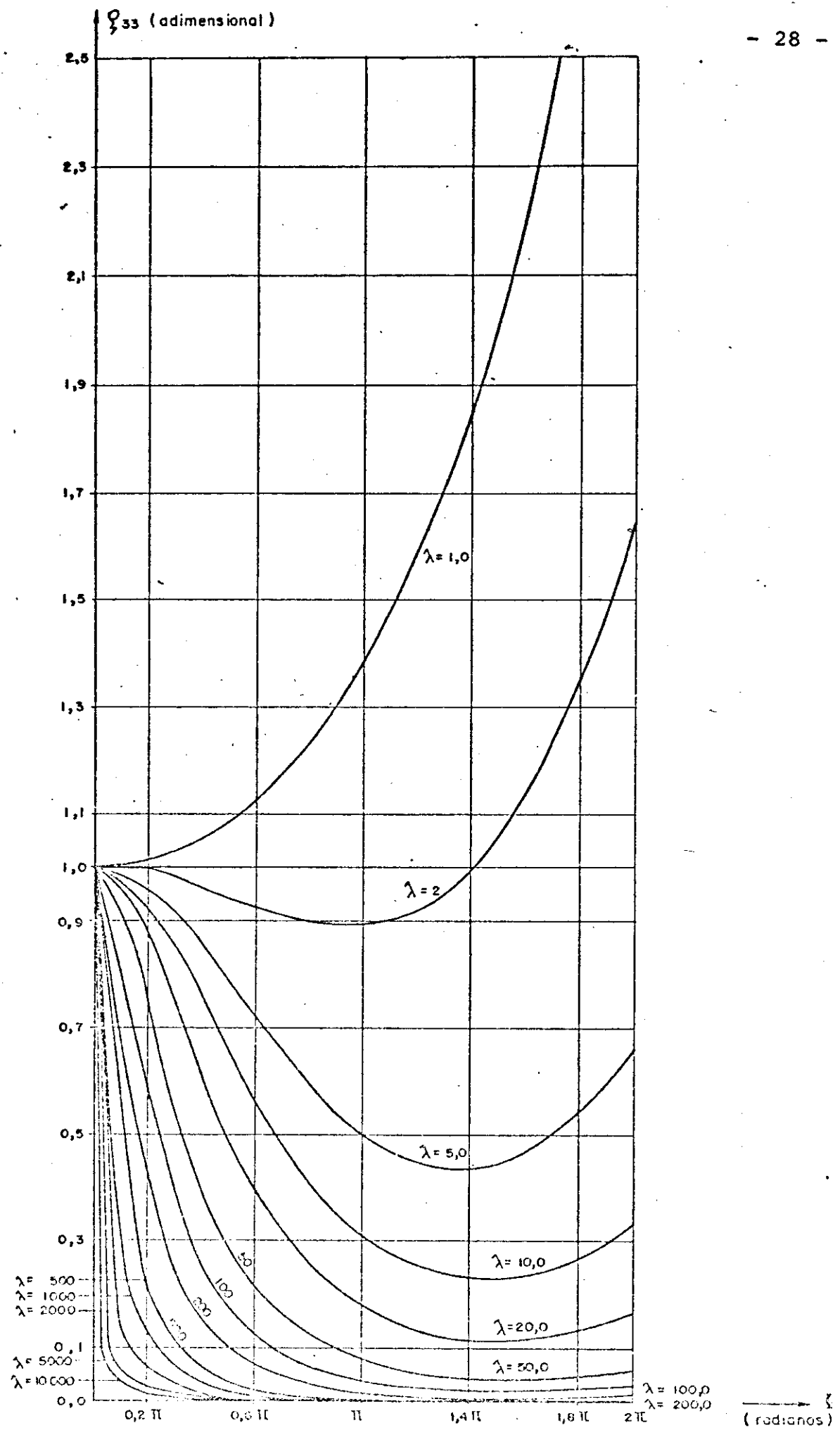


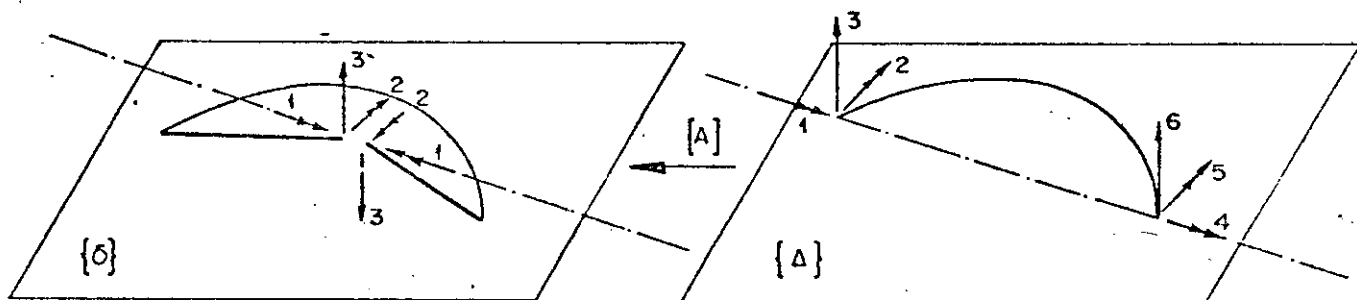
GRÁFICO IV :  $(\varphi_{33} \times \xi)$

### CAPÍTULO III

#### MATRIZ DE RIGIDEZ, PARA A BARRA CURVA, CORRESPONDENTE AOS DESLOCAMENTOS NAS EXTREMIDADES

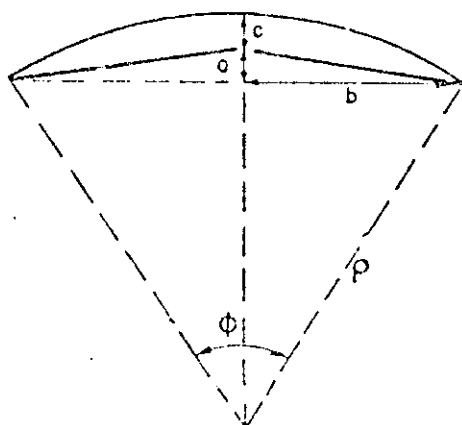
##### 3.1 - OBTENÇÃO ATRAVÉS DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO [A]

Chamemos de  $\{\delta\}$  o vetor dos deslocamentos relativos entre pontos do C.E. (centro elástico) das duas barras rígidas e de  $\{\Delta\}$  o vetor dos deslocamentos absolutos nas extremidades da barra curva (Fig. 12).



(Fig. 12)

Seja  $[A]$  a matriz que transforma deslocamentos  $\{\Delta\}$  em deslocamentos generalizados  $\{\delta\}$ . Esta matriz é obtida tendo-se em conta que o C.E. está situado a distâncias  $a$  e  $b$  da extremidade das barras (vide figura 13).



(Fig. 13)

$$\text{onde } \left\| \begin{array}{l} a = \rho \left(1 - \cos \frac{\phi}{2} - \chi\right) \end{array} \right. \quad (36)$$

$$b = \rho \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \quad (37)$$

$$c = \rho \chi \quad (\text{eq. 15})$$

A matriz [A] será, então:

$$[A] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & -b & 1 & -a & -b & -1 \end{array} \right] \quad (38)$$

A matriz de rigidez  $[S]_{\Delta}$  relativa aos deslocamentos  $\{\Delta\}$  nas extremidades da barra curva pode, portanto, ser calculada:

$$[S]_{\Delta} = [A]^* [S] [A] \quad (39)$$

onde  $[A]^*$  é a matriz transposta de [A] (eq. 38) e [S] é dada pela eq. (2) onde se substitue os valores das eqs. (27), (28) e (29).

Efetuada os produtos matriciais da eq. 39, temos:

$$[s]_{\Delta} = \begin{bmatrix} (S_{11}+a^2S_{33}) & & & & & & \\ -(abS_{33}) & (S_{22}+b^2S_{33}) & & & & & \\ (aS_{33}) & -(bS_{33}) & (S_{33}) & & & & \\ -(S_{11}+a^2S_{33}) & (abS_{33}) & -(aS_{33}) & (S_{11}+a^2S_{33}) & & & \\ -(abS_{33}) & -(S_{22}-b^2S_{33}) & -(bS_{33}) & (abS_{33}) & (S_{22}+b^2S_{33}) & & \\ -(aS_{33}) & (bS_{33}) & -(S_{33}) & (aS_{33}) & (bS_{33}) & (S_{33}) & \end{bmatrix} \quad \text{(simétrico)}$$

..... (40)

onde:



e como ainda:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} bS_{33} = \frac{6EJ}{L^2} \quad \text{e} \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} b^2 S_{33} = \frac{3EJ}{L}$$

chegamos a:

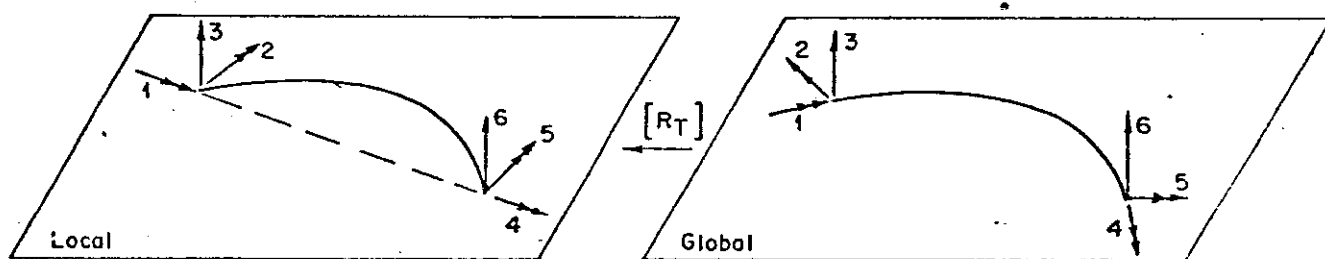
$$\lim_{\phi \rightarrow 0} [S]_{\Delta} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{GJ_T}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{2EJ}{L} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} \\ \hline -\frac{GJ_T}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EJ}{L} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{4EJ}{L} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJ}{L^3} & 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJ}{L^3} \end{array} \right] \quad (41)$$

que é a matriz de rigidez de barra reta de grelha, de comprimento L obtida como limite da barra curva também de comprimento L e raio  $\rho$  infinito.

## CAPÍTULO IV

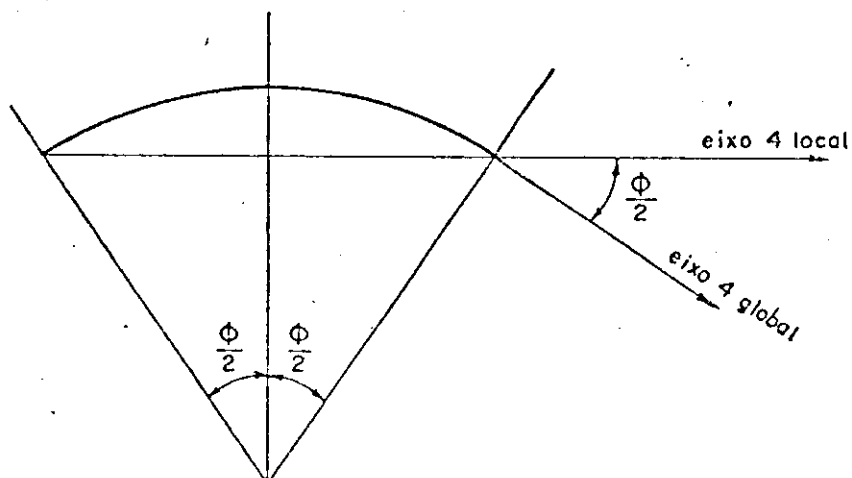
### GRELHAS COM SIMETRIA POLAR

No caso de grelhas com simetria polar, convém adotar um sistema de coordenadas polares. Então, poderemos desde já falar na matriz  $[R]$  de rotação que transforma os deslocamentos da extremidade fim da barra, de um sistema global para um sistema local (Fig. 14)



(Fig. 14)

Para obter-se a matriz de rotação na extremidade fim da barra curva, consideremos a fig. 15, abaixo:



(Fig. 15)



Chamando de  $Cx = \cos \frac{\phi}{2}$  (42)

$Cy = \text{sen} \frac{\phi}{2}$  (43)

chegamos a:

$$[R] = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 \\ -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

A matriz de transformação  $[R_T]$  que efetua a transformação de todos os deslocamentos da barra do sistema global para o sistema local será:

$$[R_T] = \left[ \begin{array}{c|c} [R]^* & [0] \\ \hline [0] & [R] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} Cx & -Cy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Cy & Cx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (45)$$

onde  $[R]^*$  é a transposta da matriz  $[R]$ .

Assim, a matriz de rigidez  $[S_{MD}]$  para a barra, com as rotações consideradas nas direções radiais e tangenciais (direções globais) será:

$$[S_{MD}] = [P_T]^* [S]_{\Delta} [R_T] \quad (46)$$

onde  $[R_T]^*$  é a transposta da matriz dada na eq. (45), e  $[S]_{\Delta}$  é dada pela eq. (40).

Partindo a matriz  $[S]_{\Delta}$  (eq. 40) segundo os deslocamentos em cada extremidade, temos:

$$[S]_{\Delta} = \left[ \begin{array}{c|c} [S_{AA}] & [S_{AB}] \\ \hline [S_{BA}] & [S_{BB}] \end{array} \right] \quad (47)$$

A eq, 46, após efetuarmos os produtos matriciais indicados, fornece:

$$S_{MD} = [R_T]^* [S]_{\Delta} [R_T] = \left[ \begin{array}{c|c} [R] & [0] \\ \hline [0] & [R]^* \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} [S_{AA}] & [S_{AB}] \\ \hline [S_{BA}] & [S_{BB}] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} [R]^* & [0] \\ \hline [0] & [R] \end{array} \right]$$

ou seja

$$[S_{MD}] = \left[ \begin{array}{c|c} [R] [S_{AA}] [R]^* & [R] [S_{AB}] [R] \\ \hline [R]^* [S_{BA}] [R]^* & [R]^* [S_{BB}] [R] \end{array} \right] \quad (48)$$

Os produtos matriciais, relativos a cada sub-matriz do 2º membro da eq. (48) podem ser efetuados separadamente.

Assim da equação (47) temos:

$$[S_{AA}] = \left[ \begin{array}{cc|c} (S_{11} + a^2 S_{33}) & -(abS_{33}) & (aS_{33}) \\ \hline -(abS_{33}) & (S_{22} + b^2 S_{33}) & -(bS_{33}) \\ (aS_{33}) & -(bS_{33}) & S_{33} \end{array} \right] \quad (49)$$

$$[S_{AB}] = \left[ \begin{array}{cc|c} -(S_{11} + a^2 S_{33}) & -(abS_{33}) & -(aS_{33}) \\ \hline (abS_{33}) & -(S_{22} - b^2 S_{33}) & (bS_{33}) \\ -(aS_{33}) & -(bS_{33}) & -(S_{33}) \end{array} \right] \quad (50)$$

$$[S_{BA}] = \begin{bmatrix} -(s_{11} + a^2 s_{33}) & (ab s_{33}) & -(a s_{33}) \\ -(ab s_{33}) & -(s_{22} - b^2 s_{33}) & -(b s_{33}) \\ -(a s_{33}) & (b s_{33}) & -(s_{33}) \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$[S_{BB}] = \begin{bmatrix} (s_{11} + a^2 s_{33}) & (ab s_{33}) & (a s_{33}) \\ (ab s_{33}) & (s_{22} + b^2 s_{33}) & (b s_{33}) \\ (a s_{33}) & (b s_{33}) & (s_{33}) \end{bmatrix} \quad (52)$$

e portanto os seguintes produtos matriciais:

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{AA} \\ S_{AA} \\ S_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 \\ -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{AA} \\ S_{AA} \\ S_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{11}+a^2S_{33})Cx-(abs_{33})Cy & -(abs_{33})Cx+(S_{22}+b^2S_{33})Cy & (aS_{33})Cx-(bS_{33})Cy \\ -(abs_{33})Cx-(S_{11}+a^2S_{33})Cy & (S_{22}+b^2S_{33})Cx+(abs_{33})Cy & -(bS_{33})Cx-(aS_{33})Cy \\ (aS_{33}) & -(bS_{33}) & S_{33} \end{bmatrix}$$

(eq. 53)

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{AB} \\ S_{AB} \\ S_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx & Cy & 0 \\ -Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{AB} \\ S_{AB} \\ S_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(S_{11}+a^2S_{33})Cx+(abs_{33})Cy & -(abs_{33})Cx-(S_{22}-b^2S_{33})Cy & -(aS_{33})Cx+(bS_{33})Cy \\ (abs_{33})Cx+(S_{11}+a^2S_{33})Cy & -(S_{22}-b^2S_{33})Cx+(abs_{33})Cy & (bS_{33})Cx+(aS_{33})Cy \\ -(aS_{33}) & -(bS_{33}) & -(S_{33}) \end{bmatrix}$$

(eq. 54)

$$\begin{bmatrix} Cx & -Cy & 0 \\ Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{BA} \\ S_{BA} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(S_{11}+a^2S_{33})Cx+(abS_{33})Cy & (abS_{33})Cx+(S_{22}-b^2S_{33})Cy & -(aS_{33})Cx+(bS_{33})Cy \\ -(abS_{33})Cx-(S_{11}+a^2S_{33})Cy & -(S_{22}-b^2S_{33})Cx+(abS_{33})Cy & -(bS_{33})Cx-(aS_{33})Cy \\ -(aS_{33}) & (bS_{33}) & -(S_{33}) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 55})$$

$$\begin{bmatrix} Cx & -Cy & 0 \\ Cy & Cx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{BB} \\ S_{BB} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{11}+a^2S_{33})Cx-(abS_{33})Cy & (abS_{33})Cx-(S_{22}+b^2S_{33})Cy & (aS_{33})Cx-(bS_{33})Cy \\ (abS_{33})Cx+(S_{11}+a^2S_{33})Cy & (S_{22}+b^2S_{33})Cx+(abS_{33})Cy & (bS_{33})Cx+(aS_{33})Cy \\ (aS_{33}) & (bS_{33}) & (S_{33}) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 56})$$

Para chegarmos às sub-matrizes da equação (48) precisamos efetuar os produtos matriciais:

$$[R] [S_{AA}] [R]^* \quad (57)$$

$$[R] [S_{AB}] [R] \quad (58)$$

$$[R]^* [S_{BA}] [R]^* \quad (59)$$

$$[R]^* [S_{BB}] [R] \quad (60)$$

As "expressões desenvolvidas" dos produtos matriciais indicados em (57), (58), (59) e (60) estão mostradas pelas equações (61), (62), (63) e (64) nas páginas seguintes.

$$\begin{aligned}
 [R] [S_{AA}] [R]^* = & \left[ \begin{array}{l} (S_{11}+a^2S_{33})Cx^2-2(abs_{33})CxCy+(S_{22}+b^2S_{33})Cy^2 \\ -(abs_{33})Cx^2-[S_{11}-S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy+(abs_{33})Cy^2 \\ (aS_{33})Cx-(bS_{33})Cy \\ -(bS_{33})Cx-(aS_{33})Cy \end{array} \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} -(abs_{33})Cx^2-[S_{11}-S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy+(abs_{33})Cy^2 \\ (S_{22}+b^2S_{33})Cx^2+2(abs_{33})CxCy+(S_{11}+a^2S_{33})Cy^2 \\ -S_{33} \\ -(bS_{33})Cx-(aS_{33})Cy \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

- 40 -  
(eq. 61)

$$\begin{aligned}
 [R] [S_{AB}] [R] = & \left[ \begin{array}{l} -(S_{11}+a^2S_{33})Cx^2+2(abs_{33})CxCy+(S_{22}-b^2S_{33})Cy^2 \\ (abs_{33})Cx^2+[S_{11}+S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy-(abs_{33})Cy^2 \\ -(aS_{33})Cx+(bS_{33})Cy \\ -(bS_{33})Cx-(aS_{33})Cy \end{array} \right. \\
 & \left. \begin{array}{l} -(abs_{33})Cx^2-[S_{11}+S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy+(abs_{33})Cy^2 \\ (-S_{22}+b^2S_{33})Cx^2+2(abs_{33})CxCy+(S_{11}+a^2S_{33})Cy^2 \\ -S_{33} \\ -(bS_{33})Cx-(aS_{33})Cy \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(eq. 62)

$$\begin{aligned}
 [R]^* [S_{BA}] [R]^* &= \begin{bmatrix}
 -(S_{11}+a^2 S_{33})Cx^2+2(abs_{33})CxCy+(S_{22}-b^2 S_{33})Cy^2 & (abs_{33})Cx^2+[S_{11}+S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy-(abs_{33})Cy^2 & -(as_{33})Cx+(bs_{33})Cy \\
 -(abs_{33})Cx^2-[S_{11}+S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy+(abs_{33})Cy^2 & (-S_{22}+b^2 S_{33})Cx^2+2(abs_{33})CxCy+(S_{11}+a^2 S_{33})Cy^2 & -(bs_{33})Cx-(as_{33})Cy \\
 -(as_{33})Cx+(bs_{33})Cy & (bs_{33})Cx+(as_{33})Cy & -s_{33}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

| 41 |  
(eq. 63)

$$\begin{aligned}
 [R]^* [S_{BB}] [R] &= \begin{bmatrix}
 (S_{11}+a^2 S_{33})Cx^2-2(abs_{33})CxCy+(S_{22}+b^2 S_{33})Cy^2 & (abs_{33})Cx^2+[S_{11}-S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy-(abs_{33})Cy^2 & (as_{33})Cx-(bs_{33})Cy \\
 (abs_{33})Cx^2+[S_{11}-S_{22}+(a^2-b^2)S_{33}]CxCy-(abs_{33})Cy^2 & (S_{22}+b^2 S_{33})Cx^2+2(ab s_{33})CxCy+(S_{11}+a^2 S_{33})Cy^2 & (bs_{33})Cx+(as_{33})Cy \\
 (as_{33})Cx-(bs_{33})Cy & (bs_{33})Cx+(as_{33})Cy & s_{33}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(eq. 64)



As matrizes das equações (61), (62), (63) e (64) substituídas na equação (48) já nos fornece a matriz de rigidez  $[S_{MD}]$  da barra curva. Porém, para efeito de simplificação desta matriz final, desenvolvemos cada termo da matriz em função de  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  e  $S_{33}$  e damos nomes aos seus coeficientes assim encontrados.

Desta maneira temos

$$n_1 = aCx - bCy \quad (65)$$

$$n_2 = bCx + aCy \quad (66)$$

Lembrando que:  $\lambda = \frac{EJ}{GJ_t} \dots\dots\dots(13)$

$\phi =$  ângulo de abertura da viga curva circular

$\rho =$  raio da viga curva circular

$$\chi = 1 - \frac{4\lambda \frac{\text{sen} \frac{\phi}{2}}{\phi}}{(1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{\text{sen} \phi}{\phi}} \dots\dots\dots(15)$$

$$a = \rho(1 - \cos \frac{\phi}{2} - \chi) \dots\dots\dots(36)$$

$$b = \rho \text{sen} \frac{\phi}{2} \dots\dots\dots(37)$$

$$Cx = \cos \frac{\phi}{2} \dots\dots\dots(42)$$

$$Cy = \text{sen} \frac{\phi}{2} \dots\dots\dots(43)$$

$$S_{11} = \frac{GJ_t}{L} \left[ \frac{2\lambda}{(\lambda+1) + (\lambda-1) \frac{\text{sen} \phi}{\phi}} \right] \dots\dots\dots(27)$$

$$S_{22} = \frac{EJ}{L} \left[ \frac{2}{(1+\lambda) + (1-\lambda) \frac{\text{sen } \phi}{\phi}} \right] \quad (28)$$

$$S_{33} = \frac{12EJ}{L^3} \left\{ \frac{\phi^2}{12(1-\chi)^2} \left[ \frac{(1+\lambda)}{2} - \frac{(1-\lambda)}{2} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} - \frac{4\lambda}{(1-\chi)} \frac{\text{sen } \frac{\phi}{2}}{\phi} + \frac{\lambda}{(1-\chi)^2} \right]^{-1} \right\}$$

.....(29)

Chegamos finalmente a:

$Cx^2 S_{11} + Cy^2 S_{22} + n_1^2 S_{33}$								
$-Cx Cys_{11} + Cx Cys_{22} - n_1 n_2 S_{33}$	$Cy^2 S_{11} + Cx^2 S_{22} + n_2^2 S_{33}$							
$n_1 S_{33}$	$-n_2 S_{33}$	$S_{33}$						
$-Cx^2 S_{11} + Cy^2 S_{22} - n_1^2 S_{33}$	$Cx Cys_{11} + Cx Cys_{22} + n_1 n_2 S_{33}$	$-n_1 S_{33}$						
$-Cx Cys_{11} - Cx Cys_{22} - n_1 n_2 S_{33}$	$Cy^2 S_{11} - Cx^2 S_{22} + n_2^2 S_{33}$	$-n_2 S_{33}$						
$-n_1 S_{33}$	$n_2 S_{33}$	$-S_{33}$						

(simétrica)

$[S_{HD}] -$

(eq. 67)

## CAPÍTULO V

### ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo mostra-se como foram obtidos os esforços de engastamento perfeito para a viga curva circular carregada perpendicularmente ao seu plano.

Adota-se como estrutura básica isostática a viga curva engastada em uma extremidade. A partir daí calculam-se as 3 incógnitas hiperestáticas na extremidade livre. Os esforços na extremidade engastada são calculados através de 3 equações de equilíbrio.



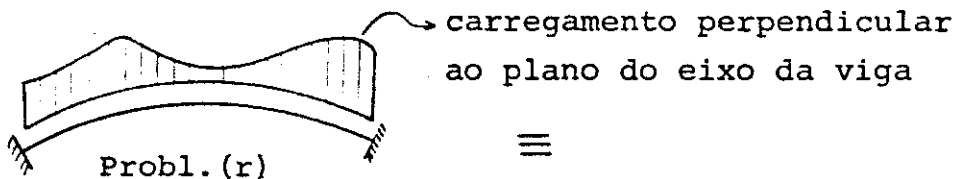
(Fig. 16)

O procedimento adotado segue o mesmo cálculo apresentado por VREDEN<sup>8</sup>, o qual usa o Processo dos Esforços e Princípio dos Trabalhos Virtuais no Cálculo dos Deslocamentos. Também aqui, desprezam-se as deformações devidas ao Esforço Cortante.

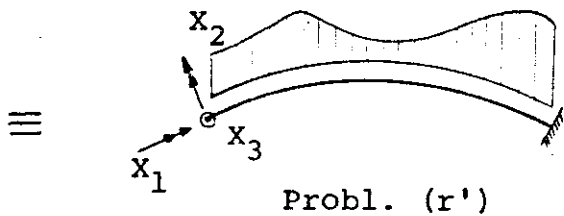
#### 5.2 - MATRIZ DE FLEXIBILIDADE

##### OBTENÇÃO DAS INCÓGNITAS HIPERESTÁTICAS

Dentro do Processo dos Esforços, o cálculo das incógnitas hiperestáticas da viga carregada apresenta o seguinte esquema de Superposição dos Efeitos:

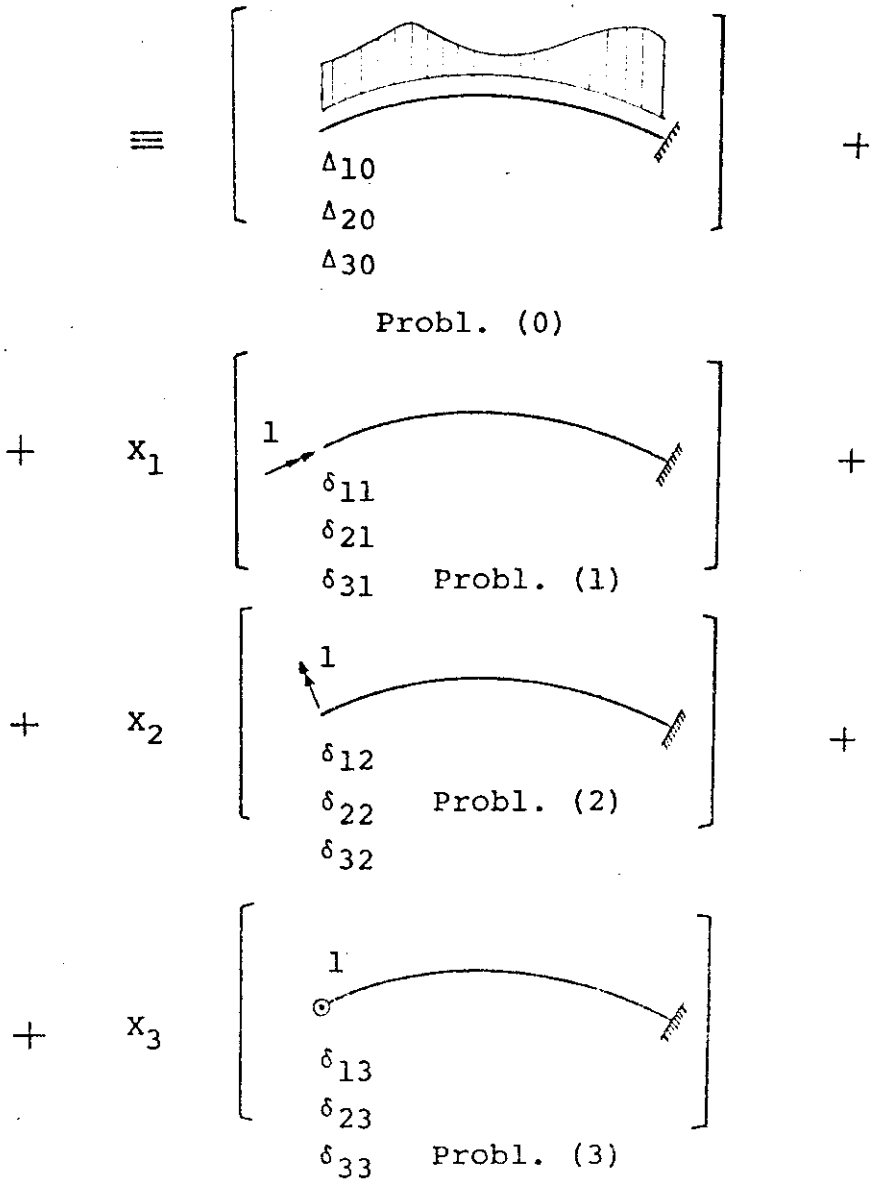


(Fig. 17)



(Fig. 18)

Obs: O símbolo  $\odot$   
indica a força  
 $X_3$  saindo do  
papel.



(Fig. 19 a , 19 b , 19 c , 19 d )

As incógnitas hiperestáticas são  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  onde:

$X_1$  = momento torçor

$X_2$  = momento fletor

$X_3$  = força cortante

Os problemas (1), (2) e (3) são sempre os mesmos, para qualquer tipo de carregamento. O Problema (0) depende do carregamento, isto é, os diagramas de  $M_F$  e  $M_T$  que influem nas deformações devem ser calculados para cada carregamento. Neste trabalho consideram-se quatro tipos possíveis de carregamento.

Os deslocamentos que aparecem no Problema (0) nas direções e sentidos de  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  serão denominados  $\Delta_{10}$ ,  $\Delta_{20}$  e  $\Delta_{30}$ .

Em cada Problema (i) ( $i = 1, 2, 3$ ) atua na viga curva em balanço apenas um carregamento unitário  $X_i = 1$ , que produz, nas direções e sentidos de  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  os deslocamentos  $\delta_{1i}$ ,  $\delta_{2i}$  e  $\delta_{3i}$ .

A compatibilidade de deslocamentos nas direções de  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  fornece o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \Delta_{1r} &= \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} \\ \Delta_{2r} &= \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} \dots\dots\dots (68) \\ \Delta_{3r} &= \Delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} \end{aligned}$$

ou, em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1r} \\ \Delta_{2r} \\ \Delta_{3r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (69)$$

e compactamente:

$$\{ \Delta_r \} = \{ \Delta_o \} + [F] \{ X \} \dots\dots\dots (70)$$

donde a expressão das incógnitas hiperestáticas:

$$\{ X \} = [F]^{-1} \{ \Delta_r - \Delta_o \} \dots\dots\dots (71)$$

Imaginando que não há recalque na direção das incógnitas , tem-se  $\{ \Delta_r \} = 0$  e então,

$$\boxed{ \{ X \} = - [F]^{-1} \{ \Delta_o \} } \dots\dots\dots (72)$$

A matriz:

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (73)$$

é conhecida como a matriz de flexibilidade correspondente aos deslocamentos nas direções 1, 2 e 3 (Fig. 18) e poderia ser calculada pelas expressões de VREDEN<sup>8</sup>.

$$\delta_{11} = \frac{\rho}{EJ} \left[ -\frac{1}{4} (1 - \lambda) \text{sen } 2\phi + \frac{1}{2} \phi (1 + \lambda) \right] \dots\dots\dots (74)$$

$$\delta_{22} = \frac{\rho}{EJ} \left[ \frac{1}{4} (1 - \lambda) \text{sen } 2\phi + \frac{1}{2} \phi (1 + \lambda) \right] \dots\dots\dots (75)$$

$$\delta_{33} = \frac{\rho^3}{EJ} \left[ -\frac{1}{4} (1 - \lambda) \text{sen } 2\phi + \frac{1}{2} \phi (1 + \lambda) - \lambda (2 \text{sen } \phi - \phi) \right] \dots\dots\dots (76)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\rho}{2EJ} (1 - \lambda) \text{sen}^2 \phi \dots\dots\dots (77)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{\rho^2}{EJ} \left[ -\frac{1}{4} (1 - \lambda) \text{sen } 2\phi + \frac{1}{2} \phi (1 + \lambda) - \lambda \text{sen } \phi \right] \dots\dots\dots (78)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{\rho^2}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (1 - \lambda) \text{sen}^2 \phi + \lambda (1 - \text{cos } \phi) \right] \dots\dots\dots (79)$$

Verifica-se pela própria definição de matriz de rigidez, que a matriz  $[F]^{-1}$  correspondente aos deslocamentos 1, 2 e 3 (Fig. ), enquanto a extremidade direita permanece engastada, é justamente a matriz de rigidez da viga curva engastada correspondente aos 3 deslocamentos na esquerda.

Portanto a matriz  $[F]^{-1}$  deverá, obrigatoriamente ser igual à sub-matriz  $[S_{MD_{AA}}]$  (3 x 3) da parte mais superior e mais a esquerda da matriz de rigidez  $[S_{MD}]$  (eq. 67)

$$[S_{MD}] = \begin{bmatrix} [S_{MD_{AA}}] & [S_{MD_{AB}}] \\ [S_{MD_{BA}}] & [S_{MD_{BB}}] \end{bmatrix} = \left[ \dots\dots\dots \right] \text{ (eq. 67)}$$

aqui desenvolvida e obtida através do sistema de coordenadas intermediário localizado no centro elástico.

De fato, foram feitas diversas verificações, resultando sempre:

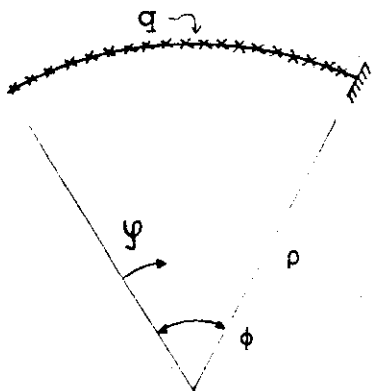
$$[F] [S_{MD_{AA}}] = [I] \text{ (matriz identidade)}$$

o que dá grande confiabilidade aos resultados obtidos com a matriz de rigidez  $[S_{MD}]$  como é aqui calculada.

5.3 - DESLOCAMENTOS DEVIDOS ÀS CARGAS NA VIGA CURVA EM BALANÇO

5.3.1 - Esforços solicitantes na seção genérica

a - Carga uniformemente distribuída [Problema(0)]



(Fig. 20)

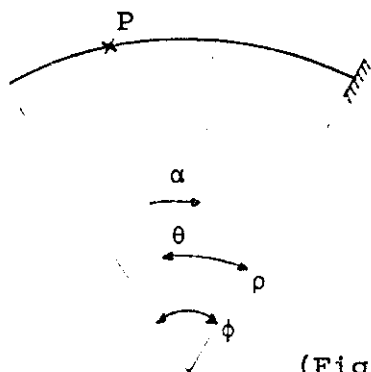
Observações:

- 1 - O símbolo X indica o carregamento q entrando no papel (de cima para baixo)
- 2 -  $\psi$  é a posição de uma seção genérica.
- 3 -  $M_F$  = momento fletor  
 $M_T$  = momento torçor

$$M_F = - q \rho^2 (1 - \cos \psi) \dots\dots\dots (80)$$

$$M_T = + q \rho^2 (\psi - \text{sen } \psi)$$

b - Carga concentrada: [Problema(0)]

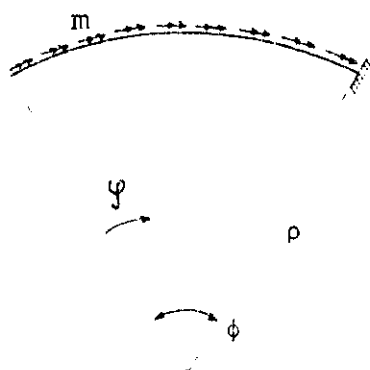


(Fig. 21)

$$M_F = - P \rho \text{ sen } \alpha \dots\dots\dots (81)$$

$$M_T = + P \rho (1 - \cos \alpha)$$

c - Momento Torçor distribuído: [Problema(0)]



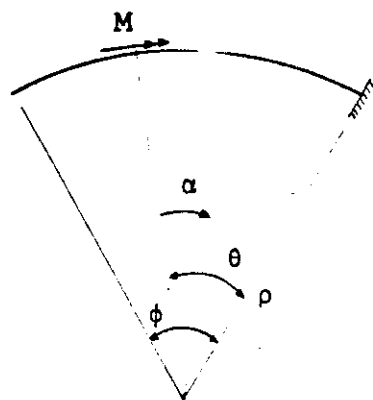
(Fig. 22)

$$M_F = + m \rho (1 - \cos \psi) \dots\dots (82)$$

$$M_T = + m \rho \text{ sen } \psi$$



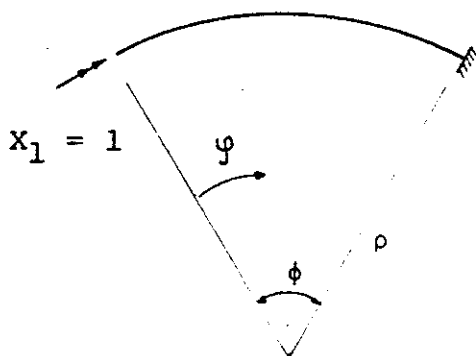
d - Momento concentrado de torção [Problema (o)]



$$\begin{aligned} M_F &= + M \operatorname{sen} \alpha \\ M_T &= + M \operatorname{cos} \alpha \end{aligned} \dots\dots (83)$$

(Fig. 23)

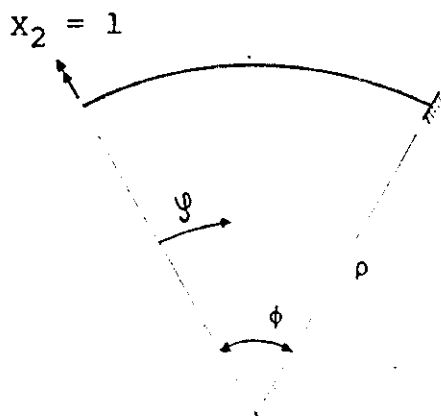
e - Momento de torção  $X_1 = 1$  [Problema (1)]



$$\begin{aligned} M_F &= + \operatorname{sen} \psi \\ M_T &= + \operatorname{cos} \psi \end{aligned} \dots\dots (84)$$

(Fig. 24)

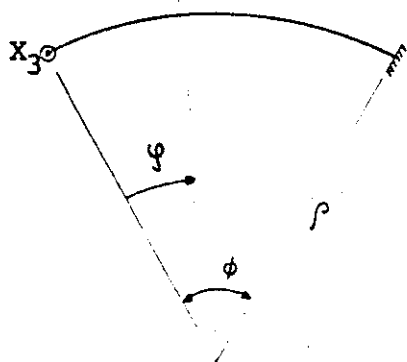
f - Momento de flexão: [Problema (2)]



$$\begin{aligned} M_F &= + \operatorname{cos} \psi \\ M_T &= - \operatorname{sen} \psi \end{aligned} \dots\dots (85)$$

(Fig. 25)

g - Força Vertical  $X_3 = 1$  (para cima) [ Problema (3) ]



$$M_F = + \rho \operatorname{sen} \psi \quad \dots\dots\dots (86)$$

$$M_T = - \rho (1 - \operatorname{cos} \psi)$$

(Fig. 26)

5.3.2 - DESLOCAMENTOS  $\Delta_{i0}$

Os deslocamentos  $\Delta_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são calculados com o Princípio dos Trabalhos Virtuais para cada caso de carregamento.

5.3.2.1 - Deslocamentos devido à carga uniforme vertical

$$E.J. \Delta_{10} = -q \rho^3 \int_0^\phi (1 - \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha + \lambda q \rho^3 \int_0^\phi (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{cos} \alpha \, d\alpha$$

$$\Delta_{10} = \frac{q \rho^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (1 - \lambda) \operatorname{sen}^2 \phi + (1 + \lambda) (\operatorname{cos} \phi - 1) + \lambda \phi \operatorname{sen} \phi \right] \quad \dots\dots\dots (87)$$

$$E.J. \Delta_{20} = -q \rho^3 \int_0^\phi (1 - \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{cos} \alpha \, d\alpha - \lambda q \rho^3 \int_0^\phi (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

$$\Delta_{20} = \frac{q \rho^3}{EJ} \left[ (1 + \lambda) \left( \frac{1}{2} \phi - \operatorname{sen} \phi \right) + \frac{1}{4} (1 - \lambda) \operatorname{sen} 2\phi + \lambda \phi \operatorname{cos} \phi \right] \quad \dots\dots (88)$$

$$E.J. \Delta_{30} = -q \rho^4 \int_0^\phi \operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{cos} \alpha) \, d\alpha - \lambda q \rho^4 \int_0^\phi (1 - \operatorname{cos} \alpha) (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \, d\alpha$$

$$\Delta_{30} = \frac{q \rho^4}{EJ} \left[ (1 - \lambda) \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi + \lambda \left( \phi \operatorname{sen} \phi - \frac{1}{2} \phi^2 \right) + \operatorname{cos} \phi - 1 \right] \quad \dots\dots\dots (89)$$

5.3.2.2 - Deslocamento devido à carga concentrada

$$EJ. \Delta_{10} = -P \rho^2 \int_0^\theta \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} (\phi - \theta + \alpha) \, d\alpha + P \rho^2 \lambda \int_0^\theta (1 - \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen} (\phi - \theta + \alpha) \, d\alpha$$

$$\Delta_{10} = - \frac{P \rho^2}{EJ} \left\{ - \frac{1}{2} (1 - \lambda) \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{cos} \phi - \lambda \left[ \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} (\phi - \theta) \right] + \frac{1}{2} (1 + \lambda) \theta \operatorname{cos} \phi \right\} \quad \dots\dots (90)$$

$$EJ. \Delta_{20} = -P \rho^2 \int_0^\theta \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} (\phi - \theta + \alpha) \, d\alpha - P \rho^2 \cdot \lambda \int_0^\theta (1 - \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen} (\phi - \theta + \alpha) \, d\alpha$$

$$\Delta_{20} = - \frac{P \rho^2}{EJ} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \lambda) \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \phi + \lambda \left[ \operatorname{cos} (\phi - \theta) - \operatorname{cos} \phi \right] - \frac{1}{2} (1 + \lambda) \theta \cdot \operatorname{sen} (\phi - \theta) \right\} \quad \dots\dots\dots (91)$$

$$EJ \Delta_{30} = -P \rho^3 \int_0^\theta \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\phi - \theta + \alpha) d\alpha + \lambda \int_0^\theta (1 - \cos \alpha) [1 - \cos (\phi - \theta + \alpha)] d\alpha$$

$$\Delta_{30} = -\frac{P \rho^3}{EJ} \left\{ -\frac{1}{2} (1 - \lambda) \text{sen } \theta \cdot \cos \phi - \lambda \left[ \text{sen } \phi - \text{sen } (\phi - \theta) + \text{sen } \theta - \theta \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 + \lambda) \theta \cos (\phi - \theta) \right\} \dots\dots\dots (92)$$

5.3.2.3 - Deslocamentos devido ã momento de torção uniformemente distribuído m

$$EJ \Delta_{10} = -m \rho^2 \left[ \int_0^\phi \text{sen } \alpha (\cos \alpha - 1) d\alpha - \lambda \int_0^\phi \cos \alpha \cdot \text{sen } \alpha d\alpha \right]$$

$$\Delta_{10} = -\frac{m \rho^2}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (1 - \lambda) \text{sen}^2 \phi + \cos \phi - 1 \right] \dots\dots\dots (93)$$

$$EJ \Delta_{20} = -m \rho^2 \left[ \int_0^\phi \cos \alpha (\cos \alpha - 1) d\alpha + \lambda \int_0^\phi \text{sen}^2 \alpha d\alpha \right]$$

$$\Delta_{20} = -\frac{m \rho^2}{EJ} \left[ \frac{1}{4} (1 - \lambda) \text{sen } 2\phi + \frac{1}{2} \phi (1 + \lambda) - \text{sen } \phi \right] \dots\dots\dots (94)$$

$$EJ \Delta_{30} = -m \rho^3 \left[ \int_0^\phi \text{sen } \alpha (\cos \alpha - 1) d\alpha + \lambda \int_0^\phi \text{sen } \alpha (1 - \cos \alpha) d\alpha \right]$$

$$\Delta_{30} = -\frac{m \rho^3}{EJ} (1 - \lambda) \left[ \frac{1}{2} \text{sen}^2 \phi + \cos \phi - 1 \right] \dots\dots\dots (95)$$

5.3.2.4 - Deslocamentos devidos ã momento de torção concentrado M

$$EJ \Delta_{10} = M \rho \left[ \int_0^\theta \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\phi - \theta + \alpha) d\alpha + \lambda \int_0^\theta \cos \alpha \cdot \cos (\phi - \theta + \alpha) d\alpha \right]$$

$$\Delta_{10} = \frac{M \rho}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} (1 - \lambda) \text{sen } \theta \cdot \cos \phi + \frac{1}{2} (1 + \lambda) \theta \cdot \cos (\phi - \theta) \right] \dots (96)$$

$$EJ \Delta_{20} = M \rho \left[ \int_0^\theta \text{sen } \alpha \cdot \cos (\phi - \theta + \alpha) d\alpha - \lambda \int_0^\theta \cos \alpha \text{sen } (\phi - \theta + \alpha) d\alpha \right]$$

$$\Delta_{20} = \frac{M \rho}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (1 - \lambda) \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \phi - \frac{1}{2} (1 + \lambda) \theta \cdot \text{sen } (\phi - \theta) \right] \dots\dots\dots (97)$$

$$EJ \Delta_{30} = M \rho^2 \left\{ \int_0^\theta \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (\phi - \theta + \alpha) d\alpha - \lambda \int_0^\theta \cos \alpha [1 - \cos (\phi - \theta + \alpha)] d\alpha \right\}$$

$$\Delta_{30} = \frac{M \rho^2}{EJ} \left[ -\frac{1}{2} (1 - \lambda) \text{sen } \theta \cdot \cos \phi + \frac{1}{2} (1 + \lambda) \theta \cos (\phi - \theta) - \lambda \text{sen } \theta \right]$$

\dots\dots\dots (98)

5.4 - Esforços hiperestáticos na extremidade esquerda

Pela expressão (eq. 72)

$$\{X\} = -[F]^{-1} \{\Delta_0\}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = -[F]^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (99)$$

sendo que  $[F]^{-1} = [S_{MD_{AA}}]$  que é obtida como sub-matriz superior esquerda de ordem (3 x 3) retirada da matriz  $[S_{MD}]$  (expressão 67)

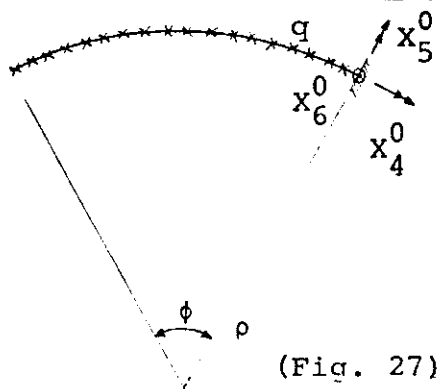
5.5 - Esforços na extremidade engastada da viga em balanço devido ao carregamento

Chamamos de  $x_4^0$ ,  $x_5^0$  e  $x_6^0$  aos esforços calculados na estrutura isostática, que dependem dos valores de cada tipo de carregamento considerado.

Esses esforços, juntamente com as cargas, devem satisfazer 2 equações de momento em relação a eixos ortogonais e uma equação de forças verticais.

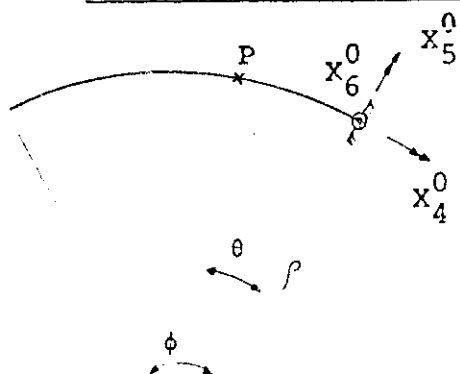
Quando se resolvem essas equações obtêm-se, para cada tipo de carregamento, as expressões de  $\{x^0\}$  mostradas a seguir:

5.5.1 - Carga Uniformemente Distribuída "q"



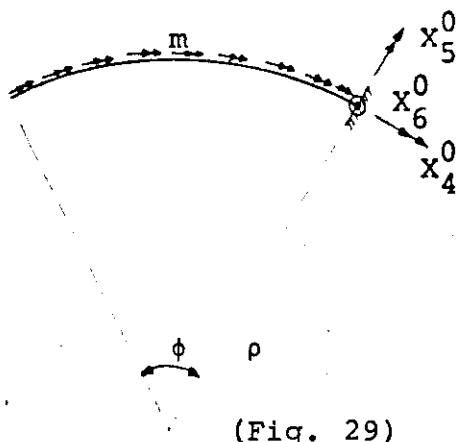
$$\{x^0\} = \begin{Bmatrix} x_4^0 \\ x_5^0 \\ x_6^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q \rho^2 (\phi - \text{sen } \phi) \\ q \rho^2 (1 - \text{cos } \phi) \\ q \rho \phi \end{Bmatrix} \dots\dots (100)$$

5.5.2 - Carga Concentrada "P"



$$\{x^0\} = \begin{Bmatrix} x_4^0 \\ x_5^0 \\ x_6^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \rho (1 - \text{cos } \theta) \\ P \rho \text{sen } \theta \\ P \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (101)$$

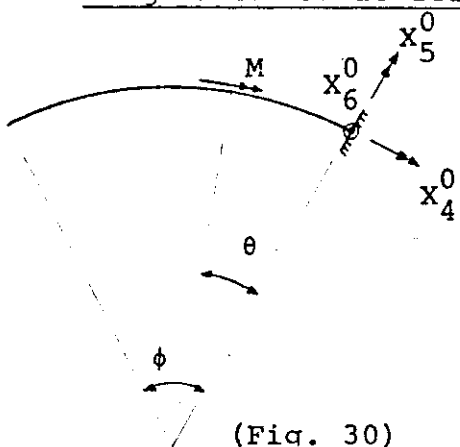
5.5.3 - Carga Momento de Torção Uniformemente Distribuída "m"



(Fig. 29)

$$\{X^0\} = \begin{Bmatrix} X_4^0 \\ X_5^0 \\ X_6^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m\rho \operatorname{sen} \phi \\ -m\rho (1 - \cos \phi) \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (102)$$

5.5.4 - Carga Momento de Torção Concentrada "M"

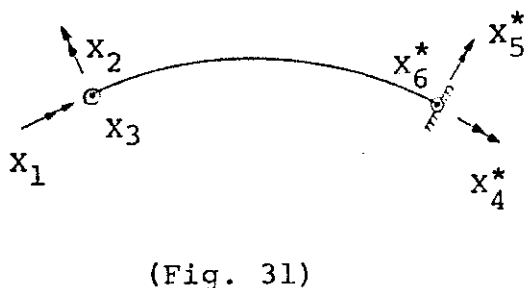


(Fig. 30)

$$\{X^0\} = \begin{Bmatrix} X_4^0 \\ X_5^0 \\ X_6^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M \cos \theta \\ -M \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (103)$$

5.6 - Esforços na extremidade engastada da viga em balanço devidos aos esforços X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> e X<sub>3</sub>

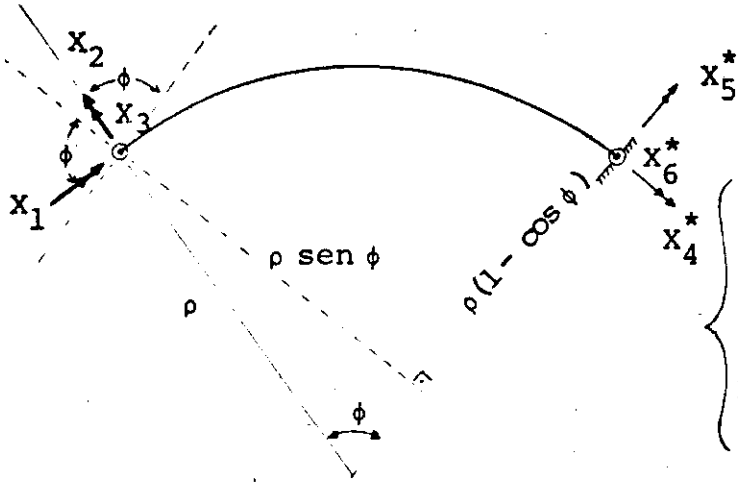
O equilíbrio entre X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> e X<sub>3</sub> e os esforços que chamaremos de X<sub>4</sub><sup>\*</sup>, X<sub>5</sub><sup>\*</sup> e X<sub>6</sub><sup>\*</sup>, calculados na estrutura isostática, levam à expressão:



(Fig. 31)

$$\{X^*\} = \begin{Bmatrix} X_4^* \\ X_5^* \\ X_6^* \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (104)$$

sendo [E] a matriz obtida pelo equilíbrio imposto com X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub> e X<sub>3</sub>.



O equilíbrio fornece:

$$\begin{cases} X_4^* + X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi - X_3 \rho (1 - \cos \phi) = 0 \\ X_5^* + X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi + X_3 \rho \sin \phi = 0 \\ X_6^* + 0 X_1 + 0 X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

(Fig. 32)

.....(105)

ou matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} X_4^* \\ X_5^* \\ X_6^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & -\rho(1 - \cos \phi) \\ -\sin \phi & \cos \phi & \rho \sin \phi \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \dots\dots(106)$$

chegamos a:

$$\begin{Bmatrix} X_4^* \\ X_5^* \\ X_6^* \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(107)$$

onde:

$$[E] = - \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & -\rho(1 - \cos \phi) \\ \sin \phi & \cos \phi & \rho \sin \phi \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(108)$$

5.7 - Esforços de Engastamento na Extremidade Direita na Viga Bi-Engastada

Por simples superposição de efeitos, os esforços na direita serão escritos em função da carga e dos valores  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  já calculados (também  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  correspondem ao carregamento específico)

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix} = \{X^*\} + \{X^0\} = [E] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_4^0 \\ X_5^0 \\ X_6^0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(109)$$

sendo  $[E]$ ,  $\{X^*\}$  e  $\{X^0\}$  conforme visto nas expressões anteriores

5.8 - Esforços de Engastamento Perfeito da Viga Curva



(Fig. 33)

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(110)$$

sendo  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$  e  $X_6$  obtidos da maneira acima exposta (Equações 99 e 109).

## CAPÍTULO VI

### EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

#### 6.1 - INTRODUÇÃO

Baseado nas hipóteses descritas nos capítulos anteriores, foi elaborado um programa automático para o cálculo de grelhas com simetria polar, podendo, o mesmo ser usado também para o cálculo de vigas contínuas curvas. Nos exemplos aqui resolvidos, alguns resultados podem ser previstos de antemão. Assim, foram analisadas primeiramente algumas estruturas de tamanho reduzido para constatar o aparecimento desses resultados previstos.

Os exemplos são os descritos a seguir.

#### 6.2 - EXEMPLO 1

A estrutura deste exemplo foi resolvida, através de cálculo manual, também por REDDY & TUMA<sup>2</sup> e foi aqui incluída, com o mesmo carregamento, justamente para comparação de resultados.

Consta a estrutura de um único anel circular horizontal com raio arbitrário que aqui fixamos  $R = 10,0$  m. Este anel apoia-se em três barras circulares verticais, guardando entre si ângulos de  $120^\circ$ . A estrutura, com nós 1, 2 e 3 é carregada com forças verticais de 5 t, 10 t e 15 t no meio de cada vão, e mostrada nas Fig. 34 e 35.

Adotou-se, em coerência com a estrutura de REDDY & TUMA<sup>2</sup> o valor  $\lambda = 2,00$ , isto é,  $G = 1,00$  t/m<sup>2</sup> e  $E = 2,00$  t/m<sup>2</sup>,  $J = 1,0$  m<sup>4</sup>,  $J_t = 1,0$  m<sup>4</sup>.

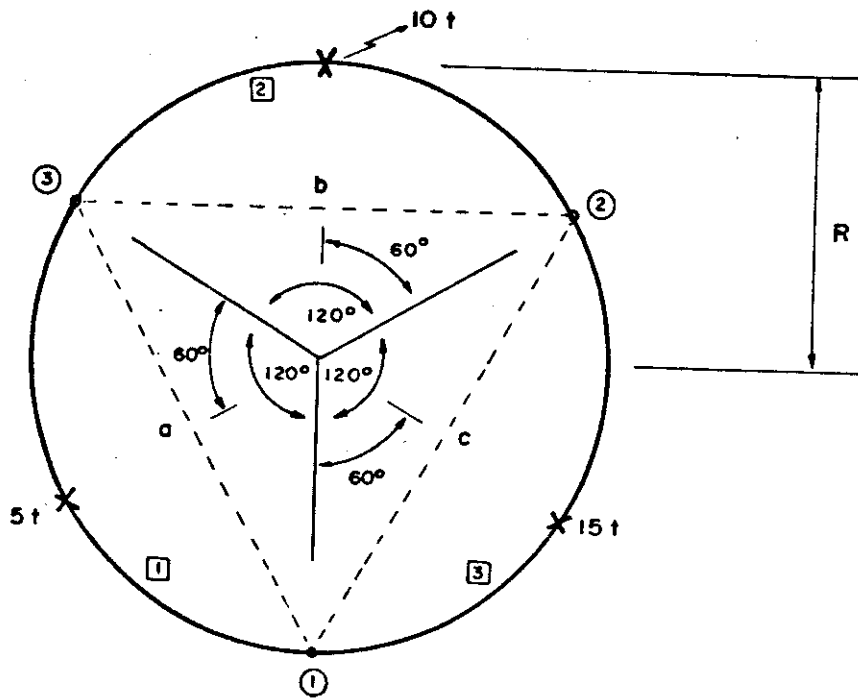
Na elaboração dos dados da estrutura para o programa de computador, as barras foram orientadas no sentido horário.

O cálculo de REDDY & TUMA<sup>2</sup> é realizado manualmente, usando o processo dos Esforços, adotando como estrutura isostática fundamental a estrutura vista na Fig. 36, e como incógnitas hiperestáticas os pares de momentos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  atuando respectivamente nas direções dos nós 1-2, 2-3 e 3-1.

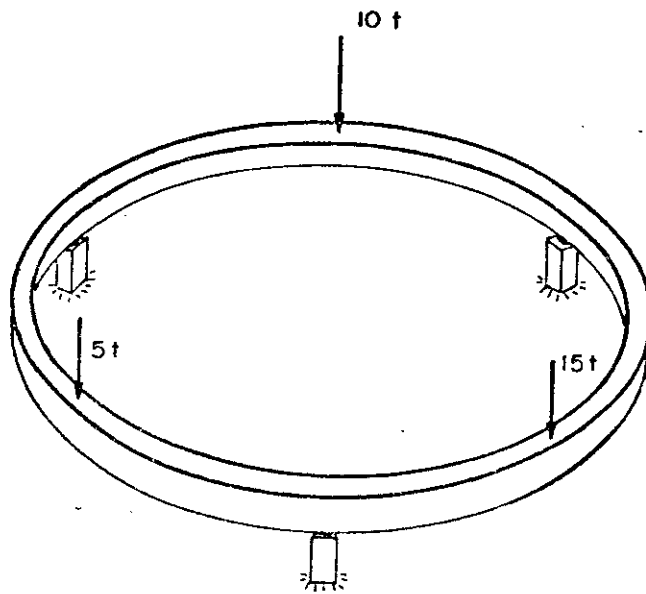


**EXEMPLO Nº 1**

ANEL SOBRE  
3 APOIOS

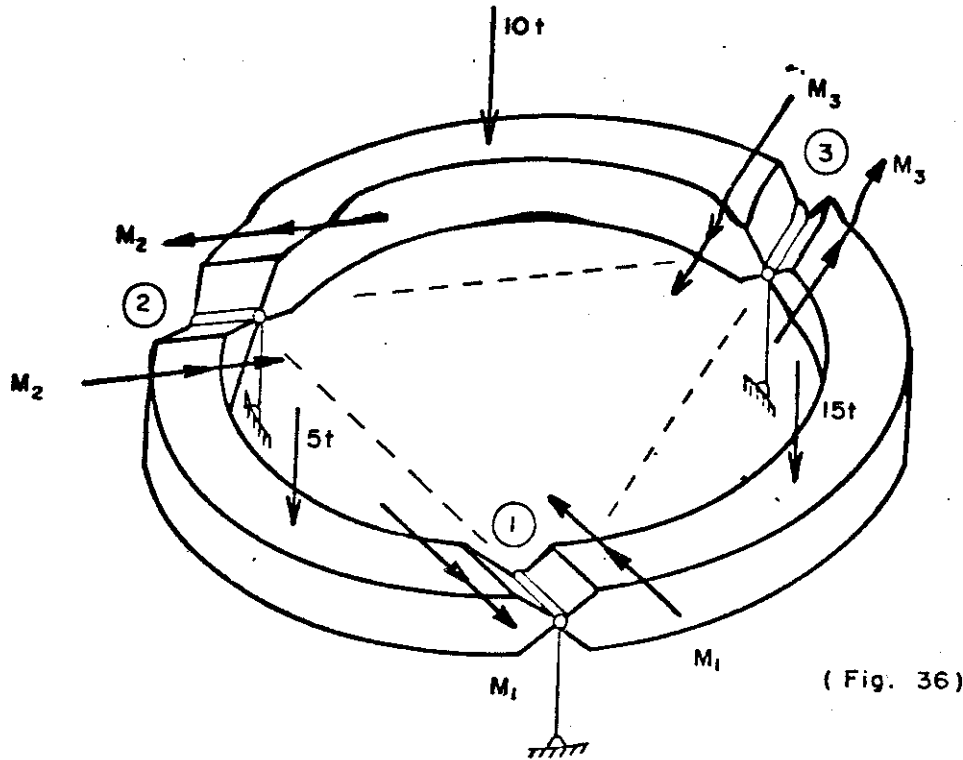


(Fig. 34)



PERSPECTIVA  
DO ANEL

(Fig. 35)



A listagem fornecida pelo computador foi a seguinte:

ANALISE DE VIGAS CONTINUAS CURVAS CIRCULARES

DADOS DA ESTRUTURA

M	MC	MR	N	NJ	NR	NRJ	E	G
3	3	0	6	3	3	3	0.2000000E+01	0.1000000E+01

COORDENADAS DOS NO'S

NO'	RAIO	ANGULO
1	10.00	0.00
2	10.00	120.00
3	10.00	240.00

DESIGNACOES DAS BARRAS E PROPRIEDADES

A) BARRAS CURVAS

BARRA	JJ	JK	IX	IY	RAIO	COMPRIMENTO	ANGULO DE ABERTURA	LAMBDA
1	1	2	0.100E+01	0.100E+01	10.00	20.94	120.00	2.00
2	2	3	0.100E+01	0.100E+01	10.00	20.94	120.00	2.00
3	3	1	0.100E+01	0.100E+01	10.00	20.94	120.00	2.00

RESTRICOES DOS NO'S NO SISTEMA GLOBAL

NO'	RESTR.1	RESTR.2	RESTR.3
1	0	0	1
2	0	0	1
3	0	0	1

DADOS DO CARREGAMENTO

\*\*\*\*\*

NUMERO DE NOS CARREGADOS = NLJ = 0  
 BARRAS CURVAS CARREGADAS = NLMC = 3  
 BARRAS RETAS CARREGADAS = NLMR = 0

ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO DEVIDAS AS CARGAS

BARRA CURVA	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
1	-0.2508E+01	-0.1588E+02	0.2500E+01	-0.2508E+01	0.1588E+02	0.2500E+01
2	-0.5017E+01	-0.3176E+02	0.5000E+01	-0.5017E+01	0.3176E+02	0.5000E+01
3	-0.7525E+01	-0.4765E+02	0.7500E+01	-0.7525E+01	0.4765E+02	0.7500E+01

RESULTADOS

\*\*\*\*\*

DESLOCAMENTOS DOS NO'S

NO'	DESL. 1	DESL. 2	DESL. 3
1	0.4529304E+02	-0.1341499E+03	0.0000000E+00
2	0.3319625E+01	0.6707490E+02	0.0000000E+00
3	0.8726651E+02	0.6707476E+02	0.0000000E+00

REACOES DE APOIO

NO'	REACAO 1	REACAO 2	REACAO 3
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1000001E+02
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.4999997E+01
3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1500000E+02

ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS CURVAS

BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	-0.833E+01	-0.289E+02	0.333E+01	-0.417E+01	0.722E+01	0.167E+01
2	0.417E+01	-0.722E+01	0.333E+01	-0.417E+01	0.505E+02	0.667E+01
3	0.417E+01	-0.505E+02	0.833E+01	0.833E+01	0.289E+02	0.667E+01

Os valores de  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  podem ser calculados somando nas direções dos nós 1-2, 2-3 e 3-1 as componentes dos momentos na extremidade esquerda encontrados nas barras 1, 2 e 3. Assim, os valores aqui obtidos são:

$$M_1 = -(A_{M_1})_1 \times \cos \frac{120^\circ}{2} + (A_{M_2})_1 \times \operatorname{sen} \frac{120^\circ}{2}$$

$$M_2 = -(A_{M_1})_2 \times \cos \frac{120^\circ}{2} + (A_{M_2})_2 \times \operatorname{sen} \frac{120^\circ}{2}$$

$$M_3 = -(A_{M_1})_3 \times \cos \frac{120^\circ}{2} + (A_{M_2})_3 \times \operatorname{sen} \frac{120^\circ}{2}$$

Efetuada-se esses cálculos tem-se

$$M_1 = - 20,8631 \text{ tm}$$

$$M_2 = - 8,3377 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 45,8193 \text{ tm}$$

enquanto que REDDY & TUMA<sup>2</sup> encontraram

$$M_1 = - 20,5441 \text{ tm}$$

$$M_2 = - 8,6144 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 45,8399 \text{ tm}$$

o que mostra a proximidade dos 2 cálculos, sendo que a pequena discrepância deve ser devida a erros do cálculo manual.

Deve-se notar na tabela dos resultados obtidos neste trabalho, que a soma das forças reativas verticais resulta igual a soma das cargas verticais, ou seja, 30,0 t.

Deve-se notar também a nulidade existente em qualquer um dos 3 nós da soma das forças verticais, da soma dos momentos tangenciais e da soma dos momentos radiais aplicados pelas barras nos mesmos nós.

### 6.3 - EXEMPLO 2

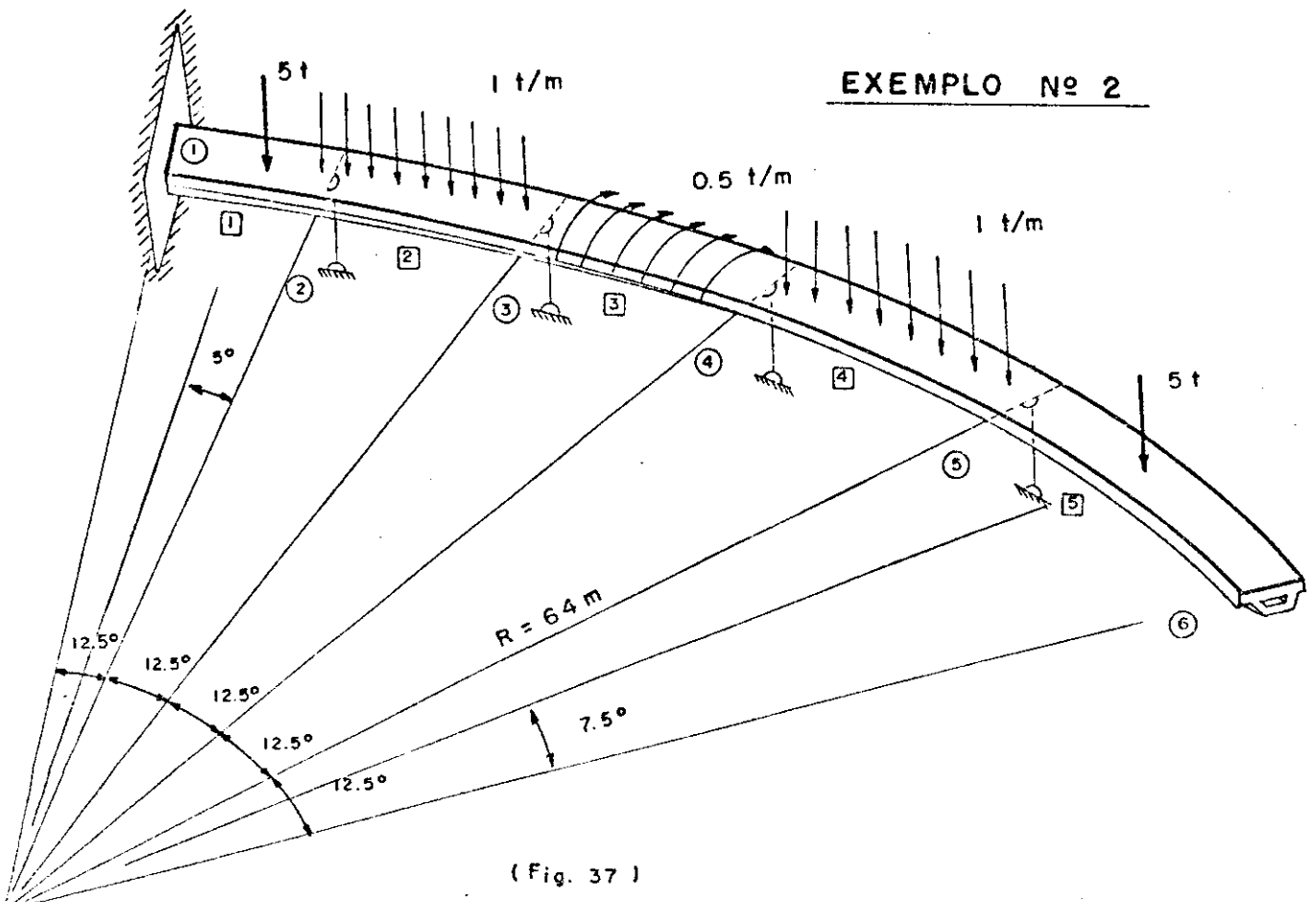
A estrutura resolvida é mostrada na Fig. 37. Consta de uma viga curva de 5 tramos iguais de raio  $\rho = 64 \text{ m}$ , ângulo de abertura  $\phi = 12,5^\circ$ ,  $J = 1,5 \text{ m}^4$ ,  $J_t = 3,25 \text{ m}^4$ ,  $\lambda = 1,24$ . Os apoios 2, 3, 4, 5 não resistem a momento. A extremidade 1 é totalmente engastada, enquanto que a extremidade 6 é livre, de maneira que o tramo 5-6 está em balanço.

O tramo 1-2 é carregado com uma carga concentrada  $P=5t$  na posição correspondente a um ângulo de  $5^\circ$ , a partir da extremidade 2. O tramo 2-3 é carregado com carga vertical uniformemente distribuída  $q = 1 \text{ t/m}$ .

O tramo 3-4 está carregado com um momento de torção uniformemente distribuído  $m = 0,5 \text{ t/m}$  com o sentido indicado na Fig. 37. O tramo 4-5 tem carga idêntica ao tramo 2-3.

O tramo 5-6, em balanço, é carregado com uma carga concentrada  $P = 5 \text{ t}$  na posição correspondente a um ângulo de  $7,5^\circ$  a partir da extremidade 6.

Sobre a entrada de dados em geral serão dadas explicações no Capítulo VII. Convém apenas dizer aqui, que os tramos estão orientados da esquerda para direita, na Fig. 37.



Os resultados listados pelo computador foram os seguintes:

RESULTADOS  
\*\*\*\*\*

DESLOCAMENTOS DOS NÓ'S

NÓ'	DESL. 1	DESL. 2	DESL. 3
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.3450433E-04	0.6792640E-05	0.0000000E+00
3	0.7101763E-04	-0.1322905E-04	0.0000000E+00
4	0.9241542E-04	0.9092559E-05	0.0000000E+00
5	0.9999337E-04	0.1376944E-04	0.0000000E+00
6	0.9087121E-04	0.5955443E-04	-0.6410685E-03

REACOES DE APOIO

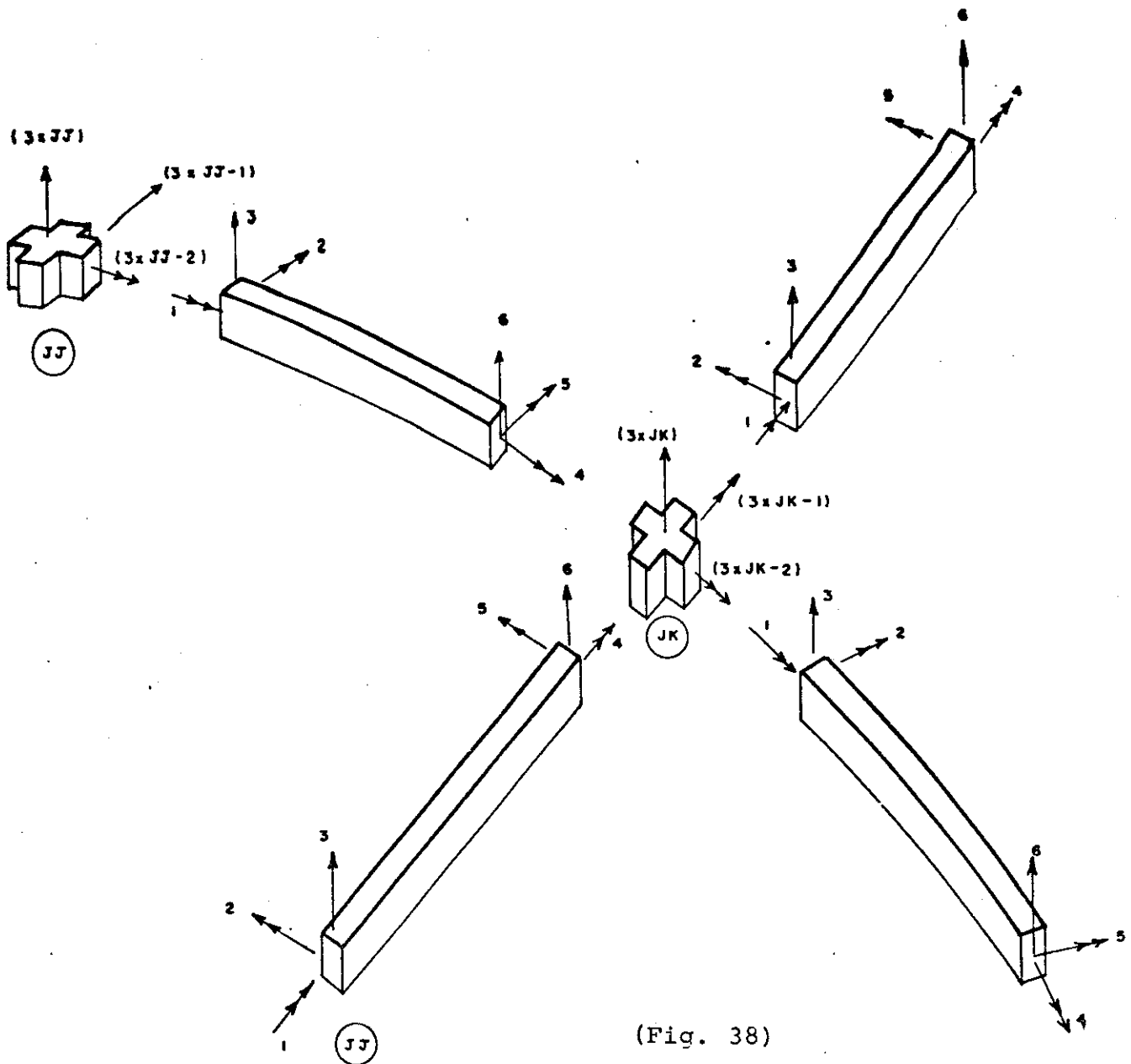
NÓ'	REACAO 1	REACAO 2	REACAO 3
1	-0.6203832E+01	-0.3658247E+01	0.1322047E+01
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1151282E+02
3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.6663739E+01
4	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.4281969E+01
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1414469E+02
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS CURVAS

BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	-0.620E+01	-0.366E+01	0.132E+01	0.605E+01	0.145E+02	0.368E+01
2	-0.605E+01	-0.145E+02	0.783E+01	0.759E+01	0.402E+01	0.613E+01
3	-0.759E+01	-0.402E+01	0.536E+00	0.424E+00	-0.262E+01	-0.536E+00
4	-0.424E+00	0.262E+01	0.482E+01	0.122E+01	0.279E+02	0.914E+01
5	-0.122E+01	-0.279E+02	0.500E+01	0.596E-07	0.954E-06	0.119E-06

O equilíbrio do nó, onde concorrem barras radiais e barras transversais, é feito por superposição de esforços nas direções dos 3 eixos polares relativos ao mesmo, conforme mostrado na figura 38. Atente ao fato de que cada barra contribue em dois nós: JJ = "nó-início" e JK = "nó-fim" da barra.

Supõe-se as barras curvas orientadas e numeradas no sentido horário e as barras radiais orientadas do centro para a periferia:



(Fig. 38)

O equilíbrio dos nós da estrutura foram verificados.

Como exemplo tome-se o nó 2 . Neste nó a soma das parcelas indicadas com  , trocando-se o sinal da reação do apoio, e somadas algebricamente, deve resultar nulo.

A soma de momentos tangenciais nula é comprovada somando-se as parcelas indicadas por .

A soma de momentos radiais também resulta nula somando-se as parcelas indicadas por .

Deve ainda ser notado que a soma das reações verticais na viga contínua curva vale 37,925 t igualando-se ao valor das cargas verticais que é (10,0 + 27,925) t . Note-se ainda os valores nulos encontrados para as reações no apoio 6 (balanço).

6.4 - EXEMPLO 3

A estrutura deste exemplo é formada por 3 anéis concêntricos interligados por 4 vigas radiais, de tal maneira que tem-se 12 barras curvas e 12 barras retas radiais.

A estrutura é vinculada através de 4 apoios engastados como mostrado nas figuras 39 e 40.

Os dados da estrutura são fornecidos de maneira que as barras curvas são todas orientadas no sentido horário e as barras retas radiais são orientadas do centro para a periferia.

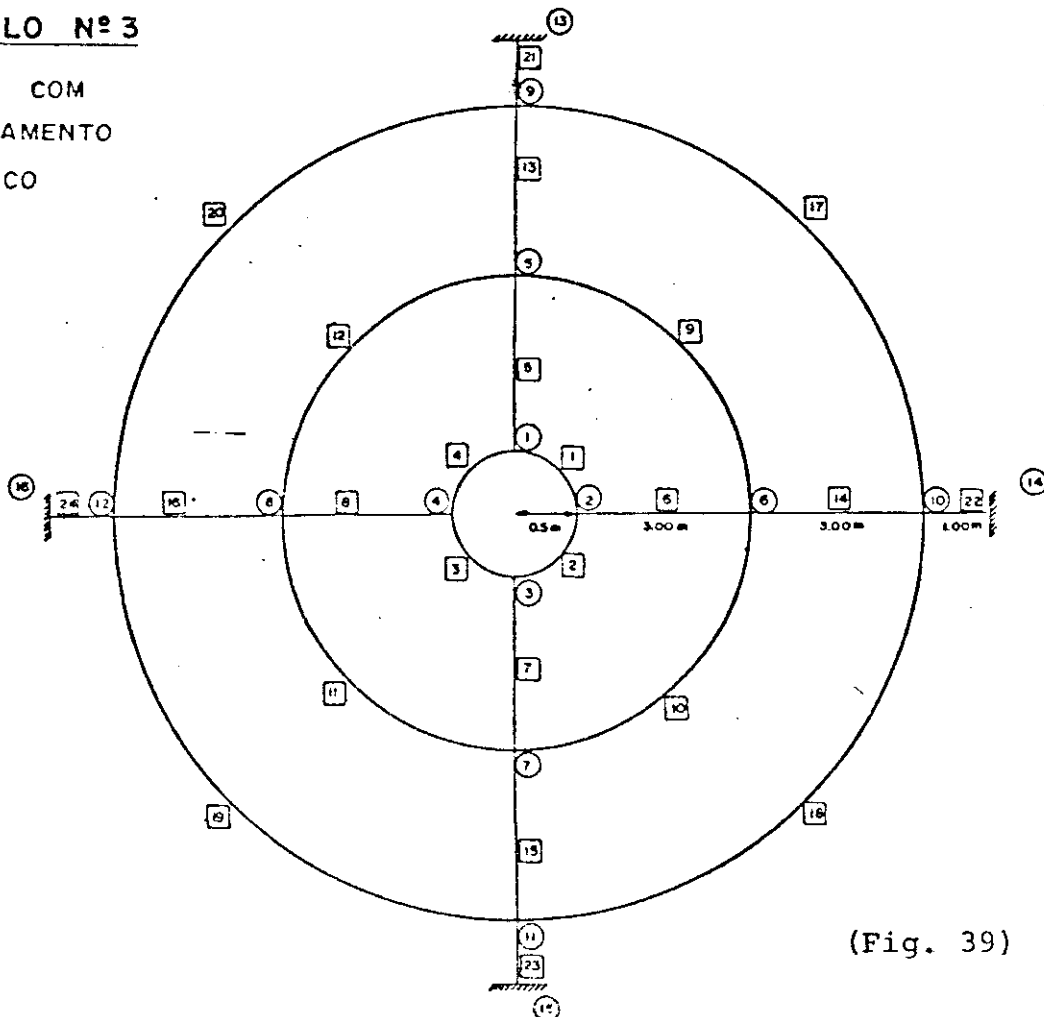
Todas as barras possuem  $J = 4,16 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  e  $J_t = 8,3 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ , o raio interno vale 0,5 m, o raio intermediário vale 3,5 m e o raio do anel externo vale 6,5 m, como mostrado na Fig. 39.

As barras retas e curvas estão carregadas com a única carga vertical  $q = 1 \text{ t/m}$  ao longo de todo o tramo.

Como trata-se de caso de estrutura simétrica com carregamento simétrico espera-se a mesma simetria polar nos resultados.

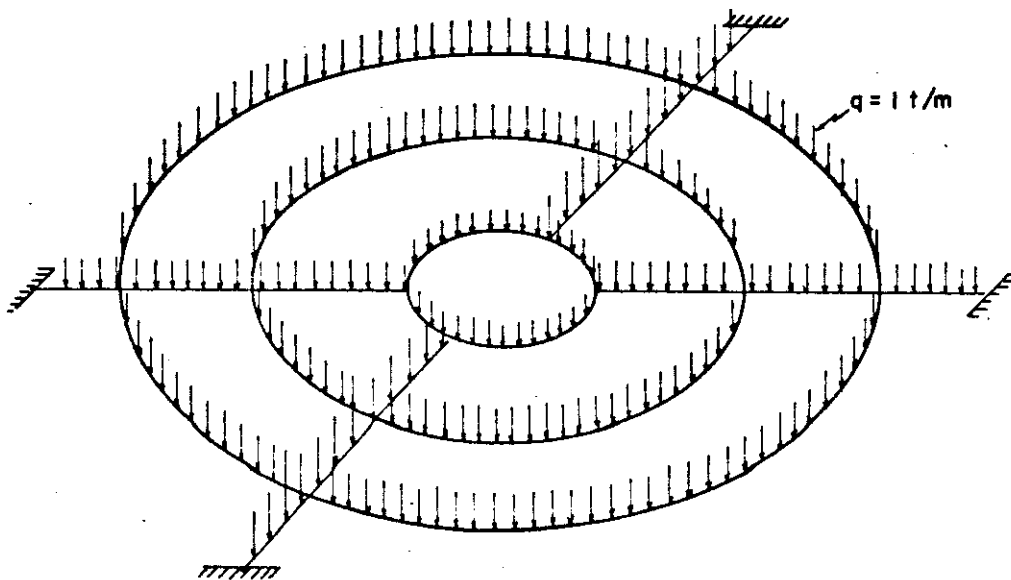
EXEMPLO Nº 3

GRELHA COM  
CARREGAMENTO  
SIMÉTRICO



(Fig. 39)





(Fig. 40)

A seguir mostram-se os resultados como saíram do computador:

DESLOCAMENTOS DOS NO'S

NO'	DESL. 1	DESL. 2	DESL. 3
1	0.5305881E-02	0.4481990E-08	-0.2059012E+00
2	0.5305894E-02	-0.3707563E-07	-0.2059012E+00
3	0.5305943E-02	-0.4525646E-08	-0.2059012E+00
4	0.5305906E-02	0.3708006E-07	-0.2059012E+00
5	0.3420056E-01	0.3601599E-08	-0.1407554E+00
6	0.3420056E-01	-0.1382426E-07	-0.1407554E+00
7	0.3420055E-01	-0.2080924E-08	-0.1407553E+00
8	0.3420055E-01	0.1506757E-07	-0.1407554E+00
9	0.2974426E-01	0.2877641E-08	-0.1706549E-01
10	0.2974426E-01	-0.5260828E-09	-0.1706548E-01
11	0.2974424E-01	0.1680746E-08	-0.1706548E-01
12	0.2974425E-01	0.4991754E-08	-0.1706548E-01
13	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
14	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
15	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
16	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00

REACOES DE APOIO

NO'	REACAO 1	REACAO 2	REACAO 3
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
7	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
8	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
9	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
10	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
11	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
12	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
13	-0.3756461E+02	-0.1862965E-05	0.2349337E+02
14	-0.3756460E+02	0.3405860E-06	0.2349337E+02
15	-0.3756459E+02	-0.1088115E-05	0.2349337E+02
16	-0.3756460E+02	-0.3231662E-05	0.2349338E+02

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS CURVAS

BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	0.555E+01	0.549E+01	0.393E+00	0.555E+01	-0.549E+01	0.393E+00
2	0.555E+01	0.549E+01	0.393E+00	0.555E+01	-0.549E+01	0.393E+00
3	0.555E+01	0.549E+01	0.393E+00	0.555E+01	-0.549E+01	0.393E+00
4	0.555E+01	0.549E+01	0.393E+00	0.555E+01	-0.549E+01	0.393E+00
9	0.495E+01	0.232E+01	0.275E+01	0.495E+01	-0.232E+01	0.275E+01
10	0.495E+01	0.232E+01	0.275E+01	0.495E+01	-0.232E+01	0.275E+01
11	0.495E+01	0.232E+01	0.275E+01	0.495E+01	-0.232E+01	0.275E+01
12	0.495E+01	0.232E+01	0.275E+01	0.495E+01	-0.232E+01	0.275E+01
17	0.183E+01	-0.724E+01	0.511E+01	0.183E+01	0.724E+01	0.511E+01
18	0.183E+01	-0.724E+01	0.511E+01	0.183E+01	0.724E+01	0.511E+01
19	0.183E+01	-0.724E+01	0.511E+01	0.183E+01	0.724E+01	0.511E+01
20	0.183E+01	-0.724E+01	0.511E+01	0.183E+01	0.724E+01	0.511E+01

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS RETAS

BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
5	0.190E-06	0.111E+02	-0.785E+00	-0.190E-06	-0.424E+01	0.379E+01
6	-0.502E-05	0.111E+02	-0.785E+00	0.502E-05	-0.424E+01	0.379E+01
7	-0.528E-06	0.111E+02	-0.785E+00	0.528E-06	-0.424E+01	0.379E+01
8	0.475E-05	0.111E+02	-0.785E+00	-0.475E-05	-0.424E+01	0.379E+01
13	0.156E-06	0.141E+02	-0.928E+01	-0.156E-06	0.182E+02	0.123E+02
14	-0.287E-05	0.141E+02	-0.928E+01	0.287E-05	0.182E+02	0.123E+02
15	-0.812E-06	0.141E+02	-0.928E+01	0.812E-06	0.182E+02	0.123E+02
16	0.217E-05	0.141E+02	-0.928E+01	-0.217E-05	0.182E+02	0.123E+02
21	0.186E-05	-0.146E+02	-0.225E+02	-0.186E-05	0.376E+02	0.235E+02
22	-0.341E-06	-0.146E+02	-0.225E+02	0.341E-06	0.376E+02	0.235E+02
23	0.109E-05	-0.146E+02	-0.225E+02	-0.109E-05	0.376E+02	0.235E+02
24	0.323E-05	-0.146E+02	-0.225E+02	-0.323E-05	0.376E+02	0.235E+02

Observe-se a simetria nas reações que são iguais em todos os nós 13, 14, 15 e 16, e observe-se, também, a simetria dos esforços nas extremidades das barras simétricas como as curvas (9 - 10 - 11 - 12) e radiais (5 - 6 - 7 - 8).

A carga vertical total, calculada, vale 93,973 t e encontrou-se para a soma das reações verticais, no apoio, valor idêntico. Para verificar o equilíbrio dos nós da estrutura tome-se, por exemplo, o nó 5. Nele, a soma das forças verticais é igual a soma das parcelas assinaladas por .

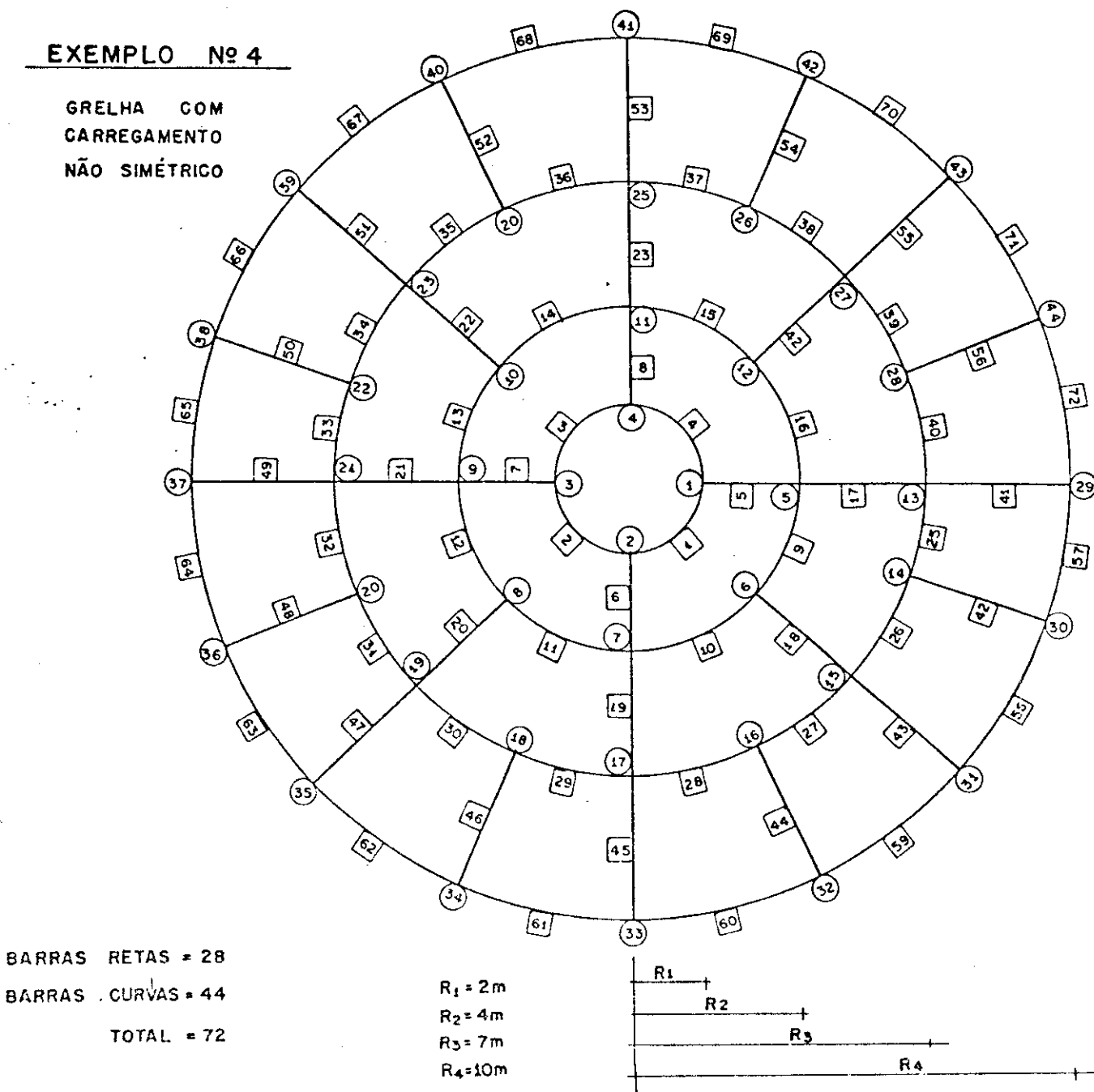
Para a soma dos momentos tangenciais soma-se algebricamente os valores assinalados com , lembrando-se que, devido ao sistema local adotado para as barras retas, os valores obtidos nas direções 2 e 5 devem ter o seu sinal trocado, o que ocorre com o valor AM2 da barra 13 e AM5 da barra 5.

Para a soma dos momentos radiais soma-se algebricamente os valores assinalados com .

### 6.5 - EXEMPLO 4

Este exemplo é de uma estrutura de tamanho mais avançado. Adota-se  $E = 2.100.000 \text{ t/m}^2$ ,  $G = 780.000 \text{ t/m}^2$ , para todas as barras. Nas barras curvas tem-se  $J = 16,8 \text{ m}^4$ ,  $J_t = 0,4 \text{ m}^4$ , e nas retas,  $J = 0,5 \text{ m}^4$  e  $J_t = 0,25 \text{ m}^4$ . Os anéis concêntricos têm raios respectivos de 2,0; 4,0; 7,0 e 10,0 m.

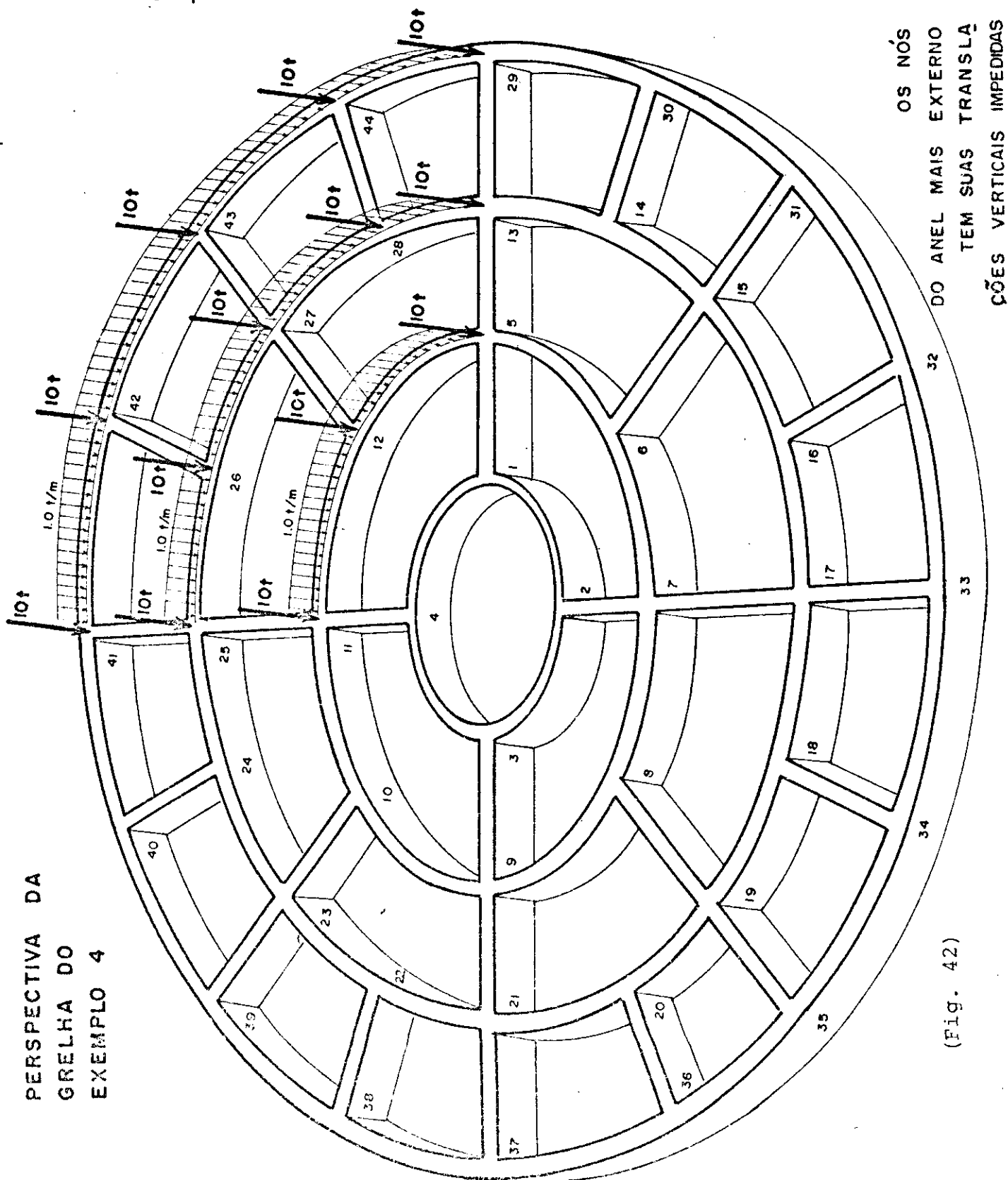
As dimensões são mostradas na Fig. 41, e uma vista em perspectiva está na Fig. 42. As barras curvas são orientadas no sentido horário enquanto as barras radiais são orientadas do centro para a periferia.



(Fig. 41)

O carregamento é constituído de cargas verticais concentradas e distribuídas, cujas posições e valores são mostrados na Fig. 42. Como se pode observar na figura mencionada, o carregamento ficou localizado em um dos quadrantes da grelha circular, não existindo simetria polar de carregamento, embora mantenha simetria em torno de um dos diâmetros da grelha.

A vinculação da estrutura é feita através de apoios em todos os nós do anel externo, articulações estas que não resistem a momento, mas somente a forças verticais.



As reações de apoio e os esforços nas extremidades de barra listados pelo computador são os seguintes:

REACOES DE APOIO

NO'	REACAO 1	REACAO 2	REACAO 3
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
5	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
7	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
8	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
9	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
10	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
11	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
12	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
13	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
14	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
15	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
16	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
17	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
18	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
19	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
20	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
21	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
22	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
23	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
24	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
25	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
26	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
27	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
28	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
29	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2279700E+02
30	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.6562781E+01
31	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.5548988E+01
32	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2332004E+01
33	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2412403E+01
34	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.7682055E+00
35	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.1669749E+01
36	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.7681945E+00
37	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2412390E+01
38	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2331980E+01
39	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.5548981E+01
40	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.6562747E+01
41	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2279700E+02
42	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2631671E+02
43	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2784089E+02
44	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.2631673E+02

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS CURVAS

BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	0.191E+01	0.258E+01	-0.110E+01	0.383E+00	0.280E+00	0.110E+01
2	0.210E+00	0.210E+00	-0.572E-05	0.210E+00	-0.210E+00	0.572E-05
3	0.383E+00	-0.280E+00	0.110E+01	0.191E+01	-0.258E+01	-0.110E+01
4	0.259E+01	0.259E+01	-0.153E-04	0.259E+01	-0.259E+01	0.153E-04
9	0.566E+01	0.176E+02	-0.423E+01	0.352E+01	-0.451E+01	0.423E+01
10	0.271E+01	0.511E+01	-0.874E+00	0.671E+00	-0.306E+01	0.874E+00
11	0.150E+01	0.294E+01	-0.657E+00	0.251E+00	-0.128E+01	0.657E+00
12	0.251E+00	0.128E+01	0.657E+00	0.150E+01	-0.294E+01	-0.657E+00
13	0.671E+00	0.306E+01	0.874E+00	0.271E+01	-0.511E+01	-0.874E+00
14	0.352E+01	0.451E+01	0.423E+01	0.566E+01	-0.176E+02	-0.423E+01
15	0.808E+01	0.172E+02	0.415E+01	0.101E+02	-0.249E+02	-0.101E+01
16	0.101E+02	0.249E+02	-0.101E+01	0.808E+01	-0.172E+02	0.415E+01
25	0.107E+02	0.592E+02	-0.114E+02	0.672E+01	-0.283E+02	0.114E+02
26	0.558E+01	0.288E+02	-0.369E+01	0.392E+01	-0.189E+02	0.369E+01
27	0.403E+01	0.188E+02	-0.346E+01	0.161E+01	-0.961E+01	0.346E+01
28	0.212E+01	0.991E+01	-0.635E+00	0.150E+01	-0.827E+01	0.635E+00
29	0.192E+01	0.807E+01	-0.998E+00	0.779E+00	-0.552E+01	0.998E+00
30	0.106E+01	0.559E+01	0.458E+00	0.141E+01	-0.680E+01	-0.458E+00
31	0.141E+01	0.680E+01	-0.458E+00	0.106E+01	-0.559E+01	0.458E+00
32	0.779E+00	0.552E+01	0.998E+00	0.192E+01	-0.807E+01	-0.998E+00
33	0.150E+01	0.827E+01	0.635E+00	0.212E+01	-0.991E+01	-0.635E+00
34	0.161E+01	0.961E+01	0.346E+01	0.403E+01	-0.188E+02	-0.346E+01
35	0.392E+01	0.189E+02	0.369E+01	0.558E+01	-0.288E+02	-0.369E+01
36	0.672E+01	0.283E+02	0.114E+02	0.107E+02	-0.592E+02	-0.114E+02
37	0.120E+02	0.591E+02	0.287E+01	0.126E+02	-0.632E+02	-0.125E+00
38	0.128E+02	0.629E+02	0.456E+01	0.142E+02	-0.715E+02	-0.181E+01
39	0.142E+02	0.715E+02	-0.181E+01	0.128E+02	-0.629E+02	0.456E+01
40	0.126E+02	0.632E+02	-0.125E+00	0.120E+02	-0.591E+02	0.287E+01
57	0.697E+01	0.347E+02	-0.174E+01	0.551E+01	-0.280E+02	0.174E+01
58	0.529E+01	0.275E+02	-0.288E+01	0.343E+01	-0.164E+02	0.288E+01
59	0.322E+01	0.159E+02	-0.920E+00	0.242E+01	-0.124E+02	0.920E+00
60	0.231E+01	0.121E+02	-0.141E+01	0.143E+01	-0.670E+01	0.141E+01
61	0.136E+01	0.653E+01	0.527E-01	0.128E+01	-0.675E+01	-0.527E-01
62	0.125E+01	0.667E+01	-0.635E+00	0.914E+00	-0.421E+01	0.635E+00
63	0.914E+00	0.421E+01	0.635E+00	0.125E+01	-0.667E+01	-0.635E+00
64	0.128E+01	0.675E+01	-0.527E-01	0.136E+01	-0.653E+01	0.527E-01
65	0.143E+01	0.670E+01	0.141E+01	0.231E+01	-0.121E+02	-0.141E+01
66	0.242E+01	0.124E+02	0.920E+00	0.322E+01	-0.159E+02	-0.920E+00
67	0.343E+01	0.164E+02	0.288E+01	0.529E+01	-0.275E+02	-0.288E+01
68	0.551E+01	0.280E+02	0.174E+01	0.697E+01	-0.347E+02	-0.174E+01
69	0.733E+01	0.352E+02	0.423E+01	0.891E+01	-0.439E+02	-0.303E+00
70	0.901E+01	0.442E+02	0.219E+01	0.924E+01	-0.450E+02	0.174E+01
71	0.924E+01	0.450E+02	0.174E+01	0.901E+01	-0.442E+02	0.219E+01
72	0.891E+01	0.439E+02	-0.303E+00	0.733E+01	-0.352E+02	0.423E+01

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS RETAS

BARRA	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
5	0.160E-01	0.450E+01	0.110E+01	-0.160E-01	-0.670E+01	-0.110E+01
6	-0.490E+00	0.593E+00	-0.110E+01	0.490E+00	0.160E+01	0.110E+01
7	0.490E+00	0.593E+00	-0.110E+01	-0.490E+00	0.160E+01	0.110E+01
8	-0.160E-01	0.450E+01	0.110E+01	0.160E-01	-0.670E+01	-0.110E+01

17	-0.409E+00	0.204E+02	-0.883E+01	0.409E+00	0.604E+01	0.883E+01
18	-0.595E+00	0.623E+01	-0.336E+01	0.595E+00	0.384E+01	0.336E+01
19	-0.374E+00	0.571E+00	-0.131E+01	0.374E+00	0.337E+01	0.131E+01
20	0.148E-06	0.501E+00	-0.131E+01	-0.148E-06	0.344E+01	0.131E+01
21	0.374E+00	0.571E+00	-0.131E+01	-0.374E+00	0.337E+01	0.131E+01
22	0.595E+00	0.623E+01	-0.336E+01	-0.595E+00	0.384E+01	0.336E+01
23	0.409E+00	0.204E+02	-0.883E+01	-0.409E+00	0.604E+01	0.883E+01
24	-0.588E-06	0.202E+02	-0.798E+01	0.588E-06	0.378E+01	0.798E+01
41	-0.502E+00	0.166E+02	-0.103E+02	0.502E+00	0.143E+02	0.103E+02
42	-0.559E+00	0.123E+02	-0.770E+01	0.559E+00	0.108E+02	0.770E+01
43	-0.445E+00	0.411E+01	-0.359E+01	0.445E+00	0.665E+01	0.359E+01
44	-0.301E+00	0.373E+01	-0.282E+01	0.301E+00	0.474E+01	0.282E+01
45	-0.176E+00	0.527E-01	-0.950E+00	0.176E+00	0.280E+01	0.950E+00
46	-0.784E-01	0.184E+01	-0.146E+01	0.784E-01	0.253E+01	0.146E+01
47	-0.776E-06	-0.632E+00	-0.399E+00	0.776E-06	0.183E+01	0.399E+00
48	0.784E-01	0.184E+01	-0.146E+01	-0.784E-01	0.253E+01	0.146E+01
49	0.176E+00	0.527E-01	-0.950E+00	-0.176E+00	0.280E+01	0.950E+00
50	0.301E+00	0.373E+01	-0.282E+01	-0.301E+00	0.474E+01	0.282E+01
51	0.445E+00	0.411E+01	-0.359E+01	-0.445E+00	0.665E+01	0.359E+01
52	0.559E+00	0.123E+02	-0.770E+01	-0.559E+00	0.108E+02	0.770E+01
53	0.502E+00	0.166E+02	-0.103E+02	-0.502E+00	0.143E+02	0.103E+02
54	0.278E+00	0.254E+02	-0.144E+02	-0.278E+00	0.179E+02	0.144E+02
55	0.857E-06	0.246E+02	-0.144E+02	-0.857E-06	0.185E+02	0.144E+02
56	-0.278E+00	0.254E+02	-0.144E+02	0.278E+00	0.179E+02	0.144E+02

Aqui também pode-se notar que a soma das reações verticais é igual a carga vertical na estrutura, ou seja, 162,986 t.

Note-se, nos resultados, a simetria obtida nas reações de apoio e nos esforços nas extremidades das barras simétricas em relação a um diâmetro.

Verifica-se, também, o equilíbrio em todos os nós, como por exemplo, o nó nº 26. Neste nó, a soma das parcelas indicadas por , que representam os esforços verticais, resulta nula.

A soma dos momentos tangenciais recebe as contribuições das barras curvas 37 e 38, e da barra reta 54. Assim sendo, tais parcelas estão assinaladas por . Para esta contribuição deve-se trocar o sinal do AM2 da barra 54, devido ao sistema local adotado para as barras retas.

A soma dos momentos radiais no mesmo nó 26, também resulta nula. A verificação é facilmente efetivada somando-se as parcelas denotadas por .

Verifica-se, ainda, simetria nas reações verticais dos nós simétricos: (34-36), (33-37), (32-38) etc, e também nos esforços nas extremidades das barras simétricas (15-16), (37-40), (38-39), (69-72), (70-71).

## CAPÍTULO VII

### PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO

#### 7.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo descreve-se, segundo os procedimentos descritos nos anteriores, um programa automático, em linguagem FORTRAN IV, que foi processado em um Terminal ELEBRA IS-1201, sediada na Faculdade de Engenharia de Limeira da Universidade Estadual de Campinas, e conectado, via micro-onda, com o Computador PDP-10, da DIGITAL EQUIPMENTS CORPORATION, pertencente ao Centro de Processamento de Dados da mesma Universidade.

#### 7.2 - ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA

O programa principal faz uso de 6 sub-rotinas, além da sub-rotina INV, que inverte matrizes quadradas pelo processo de GAUSS-JORDAN-RUTISHAUSER. A seguir são dadas estas sub-rotinas:

- 1 - CSMD - Calcula a matriz de rigidez SMD para uma barra curva, nas direções globais (que coincidem com as locais).
- 2 - RSMD - Calcula a matriz de rigidez SMD para uma barra reta de grelha, nas direções:  
locais (se II = 0)  
globais (se II = 1)
- 3 - CRIA - Constroe a matriz de rigidez S da estrutura a partir das matrizes SMD de cada barra da estrutura.
- 4 - AEPC - Calcula as Ações de Engastamento Perfeito para as barras curvas. O cálculo é feito para quatro tipos de carregamento, segundo o valor do argumento TIPOC:  
1 = carga distribuída  
2 = carga concentrada  
3 = momento de torção distribuído  
4 = momento de torção concentrado
- 5 - AEPR - Calcula as Ações de Engastamento Perfeito para as barras retas. Aqui, o cálculo também é feito para os quatro tipos de carregamento, já citados acima, para a sub-rotina AEPC.



6 - AMJ - Esta sub-rotina tem a finalidade de calcular os esforços finais nas extremidades das barras da estrutura.

Os fluxogramas das sub-rotinas e programa principal serão fornecidos mais adiante.

### 7.3 - IDENTIFICADORES DE VARIÁVEIS

A Tabela I, a seguir, mostra os principais indicadores usados no programa principal e sub-rotinas.

TABELA I

#### IDENTIFICADORES DE VARIÁVEIS USADAS

IDENTIFICADORES	DEFINIÇÃO
E	módulo de elasticidade longitudinal
G	módulo de elasticidade transversal
IX [ ]	momento de inércia contra torção: $J_t$
IY [ ]	momento de inércia em relação ao eixo y: J
L [ ]	comprimento da barra curva ao longo de seu eixo.
RHO [ ]	raio da viga curva.
LAMBD [ ]	variável $\lambda$ (eq. 13).
FI [ ]	ângulo de abertura da barra circular, em radianos.
FIA [ ]	ângulo de abertura da barra circular, em graus.
N1 [ ]	variável $n_1$ (eq. 65).
N2 [ ]	variável $n_2$ (eq. 66).
CX [ ]	variável $C_x$ (eq. 42).
CY [ ]	variável $C_y$ (eq. 43).

(segue)

(continuação)

IDENTIFICADORES

DEFINIÇÃO

SMD{6,6}

matriz de rigidez da barra curva circular.

s{ , }

matriz de rigidez da estrutura.

J1,J2,J3,K1,K2,K3

índices que representam as extremidades da barra.

S11,S22,S33

elementos da diagonal principal da matriz de rigidez da barra curva, para os deslocamentos no centro elástico, ou seja, S<sub>11</sub>, S<sub>22</sub> e S<sub>33</sub>.

A{ }

matriz que contem as ações aplicadas nos nós.

AC{ }

matriz A rearranjada segundo as restrições dos nós.

AM{ }

matriz que contem as ações nas extremidades das barras curvas.

AR{ }

matriz que contem as reações de apoio.

D{ }

matriz de deslocamentos.

M

número de barras

N

número de graus de liberdade.

NJ

número de nós.

NR

número de restrições.

NRJ

número de nós com deslocamentos impedidos.

NLJ

número de nós carregados.

NJ3

representa o triplo de número de nós.

RL{ }

lista de restrições dos nós.

CRL{ }

lista acumulada de restrições dos nós.

(segue)

(continuação)

IDENTIFICADORES

DEFINIÇÃO

RAIO [ ]	raio do referencial polar para cada nó da estrutura
ANG [ ]	ângulo do referencial polar para cada nó da estrutura, positivo no sentido anti-horário
AE [ ]	vetor que contém as cargas equivalentes nos nós
AML [ , ]	matriz que contém as ações de engastamento perfeito de cada barra considerando todos os carregamentos sobre ela.
X [ ]	vetor que contém, parcialmente as ações de engastamento perfeito de cada barra, um carregamento por vez
JJ [ ]	vetor dos nós-início
JK [ ]	vetor dos nós-fim
TIPOC	tipo de carga: 1 = carga distribuída 2 = carga concentrada 3 = torçor distribuído 4 = torçor concentrado
Q	valor numérico da carga
IN [ ]	vetor dos índices dos deslocamentos
IB [ ]	vetor dos índices das barras
MC	quantidade de barras curvas
MR	quantidade de barras retas
MCl	indica a posição da primeira barra reta
NLMC	quantidade de barras curvas carregadas
NLMR	quantidade de barras retas carregadas
OMEGA [ ]	representa o valor $(1 - \alpha)$ . (ver eq. 15)
ACE, BCE	coordenadas do C.E. (eqs. 36 e 37)
SMDG [ , ]	contém as SMD de todas as barras

#### 7.4 - PREPARAÇÃO DOS DADOS EM CARTÕES

A Tabela II mostra a forma e ordenação de como devem ser fornecidos os cartões de dados para o programa.

Com a finalidade de mostrar a elaboração dos dados de uma estrutura qualquer, toma-se a estrutura do EXEMPLO 3 deste trabalho (pág. 65).

Observa-se que, para efeito de fornecimento de dados do carregamento para este programa, as cargas forças verticais nos nós são positivas para cima, enquanto que as cargas forças verticais nas barras são positivas para baixo.

Nota-se ainda que a variável TETA, para as barras curvas, representa o ângulo  $\theta$ , a partir da "extremidade-fim" da barra, que localiza a posição das cargas concentradas (força ou momento). Para as cargas distribuídas, o valor TETA não tem significado e, portanto, para efeito do programa, pode-se entrar com o valor zero.

No caso das barras retas, para manter-se uma analogia com as curvas, usa-se a variável TETA para representar a distância de uma carga concentrada (força ou momento) a partir da "extremidade-fim" da barra. Aqui, também, o valor da variável TETA não tem significado para os carregamentos distribuídos, e pode, sem problemas, ser fornecido igual a zero.

O programa permite que as barras da estrutura recebam mais do que um carregamento. Para isto basta entrar com o número da barra e seu carregamento quantas vezes for necessário.

Ao final dos cartões que representam o carregamento das barras curvas é necessário introduzir-se um cartão com valor zero para o número da barra.

Deve-se ter o mesmo procedimento ao final dos cartões que representam o carregamento das barras retas.

TABELA II

PREPARAÇÃO DE DADOS PARA O PROGRAMA DE CÁLCULO DE VIGA CURVA  
COM CARREGAMENTO PERPENDICULAR AO SEU PLANO.

Os cartões de dados para o programa apresentado, devem ser fornecidos ao computador na forma e ordenação da tabela abaixo:

	Dados	Número de cartões	Valores em cada cartão
D A D O S  D A E S T R U T U R A	a. Parâmetros da estrutura	1	MC MR NJ NR NRJ E G (5I,2F)
	b. Coordenadas dos nós	NJ	J RAI0(J) ANG(J) (I,2F)
	c. Designações das barras curvas e propriedades	MC	I JJ(I) JK(I) IX(I) IY(I) (3I,2F)
	d. Designações das barras retas e propriedades	MR	I JJ(I) JK(I) IY(I) IY(I) (3I,2F)
	e. Lista de restrições nos nós no sistema global	NRJ	K RL(3K-2) RL(3K-1) RL(3K) (4I)
D A D O S  D O C A R R E G A M E N T O	f. quantidade de nós carregados	1	NLJ NLMC NLMR (3I)
	g. ações aplicadas nos nós	NLJ	K A(3K-2) A(3K-1) A(3K) (I,3F)
	h. carregamento das barras curvas	quantidade de carregamentos, mais um	I TIPOC Q TETA (2I,2F) a) TETA tem valor zero para os casos de TIPOC igual a 1 ou 3. b) O último cartão deve conter o valor <u>zero</u> para I.
i. carregamento das barras retas	quantidade de carregamentos, mais um	I TIPOC Q TETA (2I,2F) a) TETA tem valor zero para os casos de TIPOC igual a 1 ou 3. b) O último cartão deve conter o valor <u>zero</u> para I.	

A Tabela III, a seguir, mostra a entrada de dados para o EXEMPLO 3, pág. 65, deste trabalho.

Para esta estrutura adota-se  $E = 2.100.000 \text{ t/m}^2$  (E),  $G = 780.000 \text{ t/m}^2$  (G),  $J_t = 8,3 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  (IX),  $J = 4,16 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  (IY).

É composta de 12 barras curvas (MC), 12 barras retas (MR), 16 nós (NJ), vinculada por 12 restrições de nós (NR), em 4 nós com restrições (NRJ).

TABELA III

ENTRADAS DE DADOS DO EXEMPLO Nº 3 (pág. 65)

12 12 16 12 4 2100000. 780000.										(cont.)				
1	.5	90.								13	1	1	1	(Restrições dos nós)
2	.5	0.								14	1	1	1	
3	.5	270.								15	1	1	1	
4	.5	180.								16	1	1	1	
5	3.5	90.								0	12	12	(NLJ, NLMC, NLMR)	
6	3.5	0.								1	1	1.	0.	(Cargas nas barras curvas)
7	3.5	270.								2	1	1.	0.	
8	3.5	180.								3	1	1.	0.	
9	6.5	90.								4	1	1.	0.	
10	6.5	0.								9	1	1.	0.	
11	6.5	270.								10	1	1.	0.	
12	6.5	180.								11	1	1.	0.	
13	7.5	90.								12	1	1.	0.	
14	7.5	0.								17	1	1.	0.	
15	7.5	270.								18	1	1.	0.	
16	7.5	180.								19	1	1.	0.	
										20	1	1.	0.	
										0				
1	1	2	.00083	.000416						5	1	1.	0.	(Cargas nas barras retas)
2	2	3	.00083	.000416						6	1	1.	0.	
3	3	4	.00083	.000416						7	1	1.	0.	
4	4	1	.00083	.000416						8	1	1.	0.	
9	5	6	.00083	.000416						13	1	1.	0.	
10	6	7	.00083	.000416						14	1	1.	0.	
11	7	8	.00083	.000416						15	1	1.	0.	
12	8	5	.00083	.000416						16	1	1.	0.	
17	9	10	.00083	.000416						21	1	1.	0.	
18	10	11	.00083	.000416						22	1	1.	0.	
19	11	12	.00083	.000416						23	1	1.	0.	
20	12	9	.00083	.000416						24	1	1.	0.	
										0				

(segue)

De acordo com a maneira de preparar os dados de qual quer estrutura, explicitada na Tabela II, se no presente exemplo existissem NLJ n<sup>o</sup>s carregados, deveriam ser introduzidos NLJ cartões, situados na Tabela III entre os dados descritos nesta tabela por (NLJ, NLMC, NLMR) e (Cargas nas barras curvas). Cada cartão conteria, na ordem, os valores: K, A(3K - 2), A(3K - 1), A(3K).

#### 7.5 - FLUXOGRAMAS

Os fluxogramas do programa principal e das sub-rotinas são apresentados nas páginas seguintes.

Este programa é composto por 7 sub-rotinas e 1 programa principal expostos a seguir como mostrado abaixo:

- 7.5.1 - Fluxograma do Programa Principal
- 7.5.2 - Fluxograma da sub-rotina CSMD
- 7.5.3 - Fluxograma da sub-rotina RSMD
- 7.5.4 - Fluxograma da sub-rotina CRIA
- 7.5.5 - Fluxograma da sub-rotina AEPC
- 7.5.6 - Fluxograma da sub-rotina AEPR
- 7.5.7 - Fluxograma da sub-rotina AMJ
- 7.5.8 - Fluxograma da sub-rotina INV

### 7.5.1 - Fluxograma do PROGRAMA PRINCIPAL

O programa principal é subdividido em 5 itens:

#### 1 - ENTRADA E IMPRESSÃO DOS DADOS

- 1.a - Parâmetros da Estrutura e Módulos de Elasticidade.
- 1.b - Coordenadas dos nós
- 1.c - Designações das barras e propriedades
  - 1.c.1 - Barras Curvas
  - 1.c.2 - Barras Retas
- 1.d - Lista das Restrições dos Nós, Lista das Restrições Acumuladas
  - 1.d.1 - Zerar Matrizes e Vetores
  - 1.d.2 - Leitura e Impressão da Lista de Restrições .
  - 1.d.3 - Criação da Lista das Restrições Acumuladas.

#### 2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

- 2.a - Geração da matriz de rigidez de cada barra
  - 2.a.1 - Barras Curvas
  - 2.a.2 - Barras Retas
- 2.b - Inversão da Matriz de Rigidez

#### 3 - ENTRADA E IMPRESSÃO DOS DADOS REFERENTES AO CARREGAMENTO

- 3.a - Quantidade de Nós e Barras Carregadas. Unidades Utilizadas.
- 3.b - Ações Aplicadas nos Nós
- 3.c - Ações de Engastamento Perfeito
  - 3.c.1 - Barras Curvas
  - 3.c.2 - Barras Retas

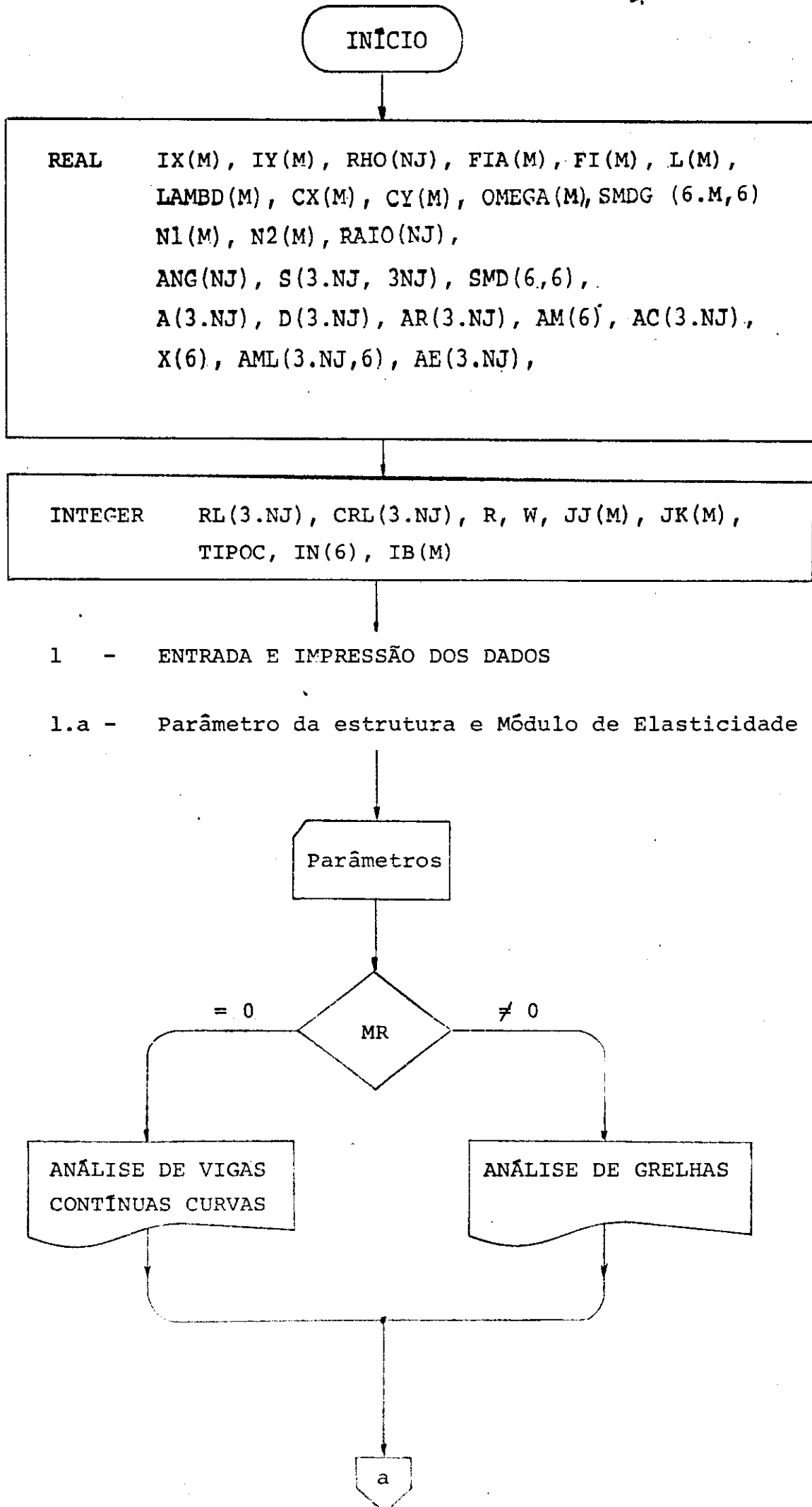
#### 4 - CONSTRUÇÃO DOS VETORES ASSOCIADOS COM AS CARGAS

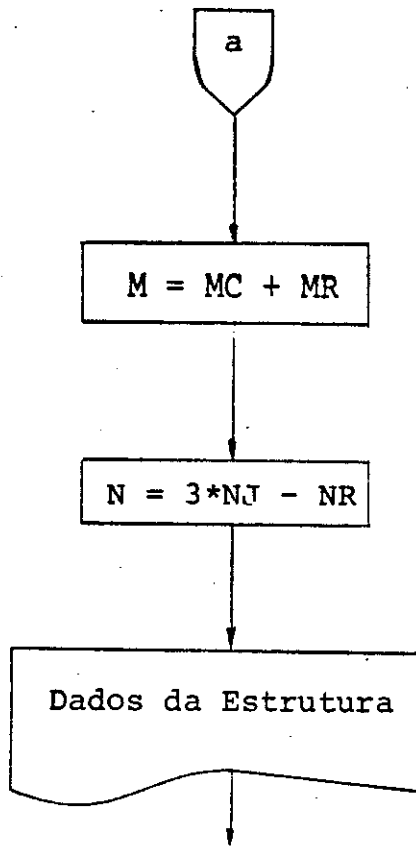
- 4.a - Cargas Equivalentes nos Nós.
  - 4.a.1 - Barras Curvas
  - 4.a.2 - Barras Retas
- 4.b - Ações Combinadas nos Nós.

#### 5 - CÁLCULO E SAÍDA DOS RESULTADOS

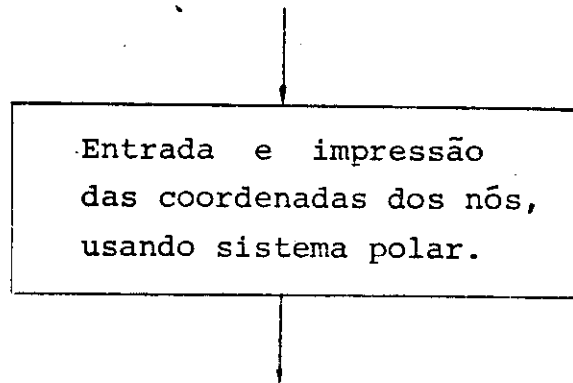
- 5.a - Deslocamentos dos Nós
- 5.b - Reações de Apoio
- 5.c - Expansão do Vetor Deslocamento
- 5.d - Impressão dos Resultados
  - 5.d.1 - Deslocamentos dos Nós.
  - 5.d.2 - Reações de Apoio
  - 5.d.3 - Esforços nas Extremidades das Barras Curvas
  - 5.d.4 - Esforços nas Extremidades das Barras Retas.





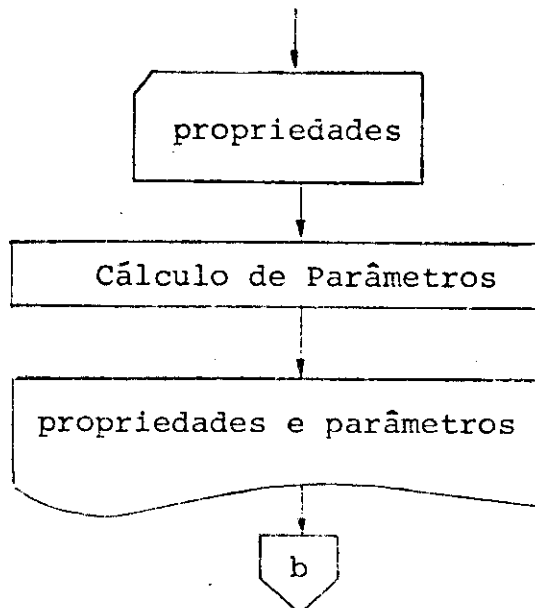


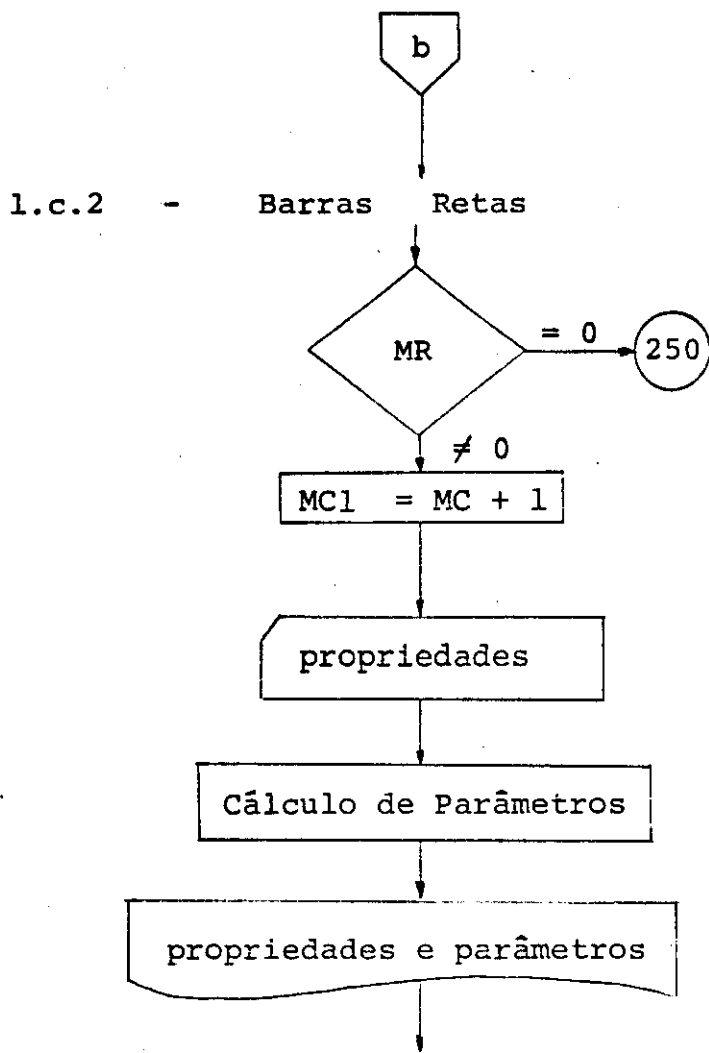
1.b - Coordenada dos nós



1.c - Designações das Barras. Propriedades

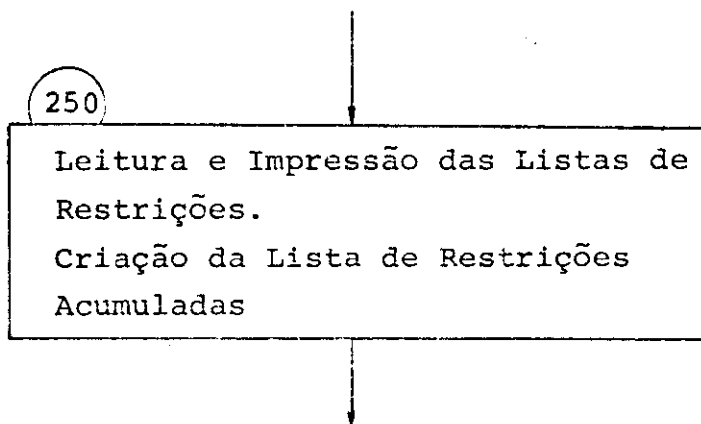
1.c.1 - Barras Curvas





1.d - Lista das Restrições dos Nós

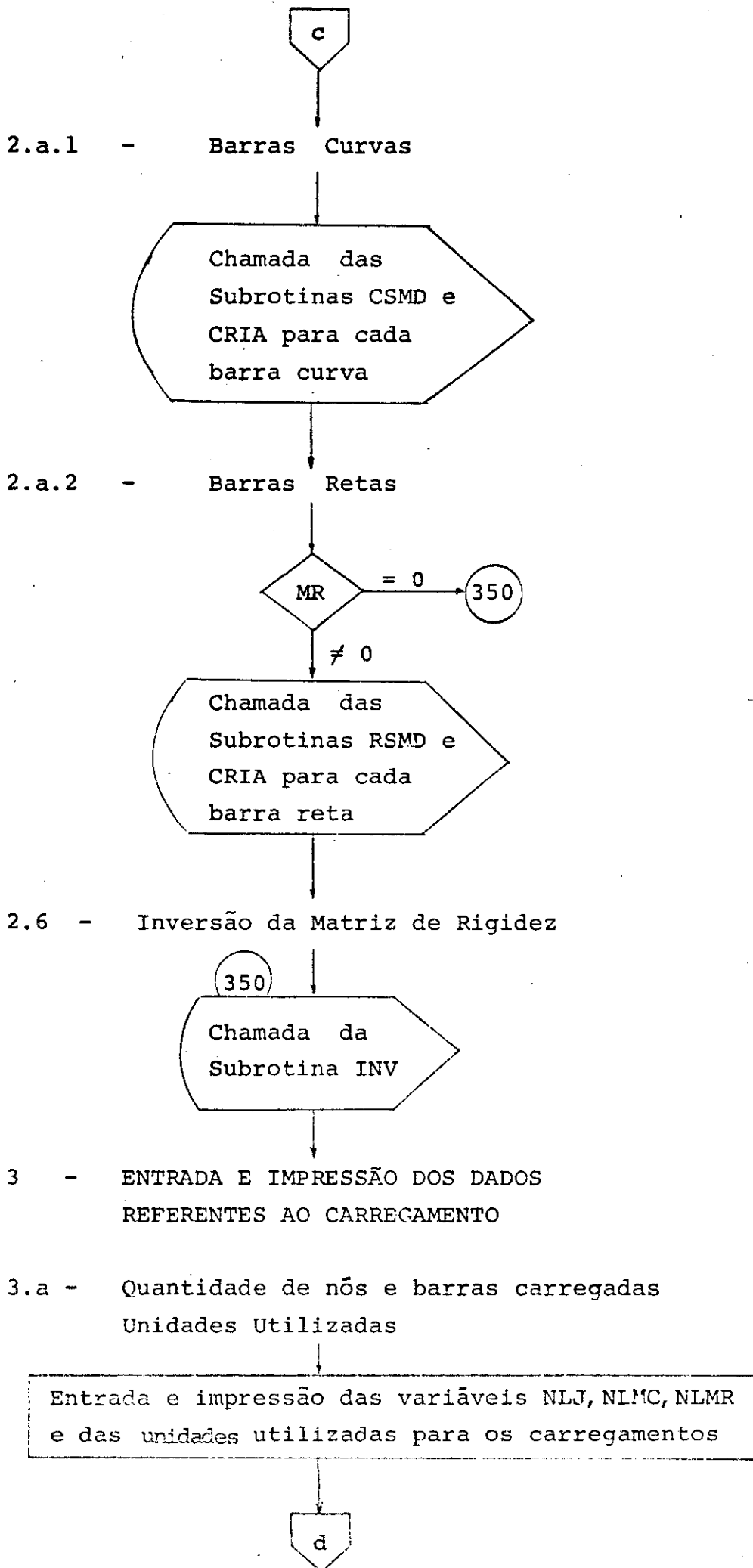
Lista das Restrições Acumuladas

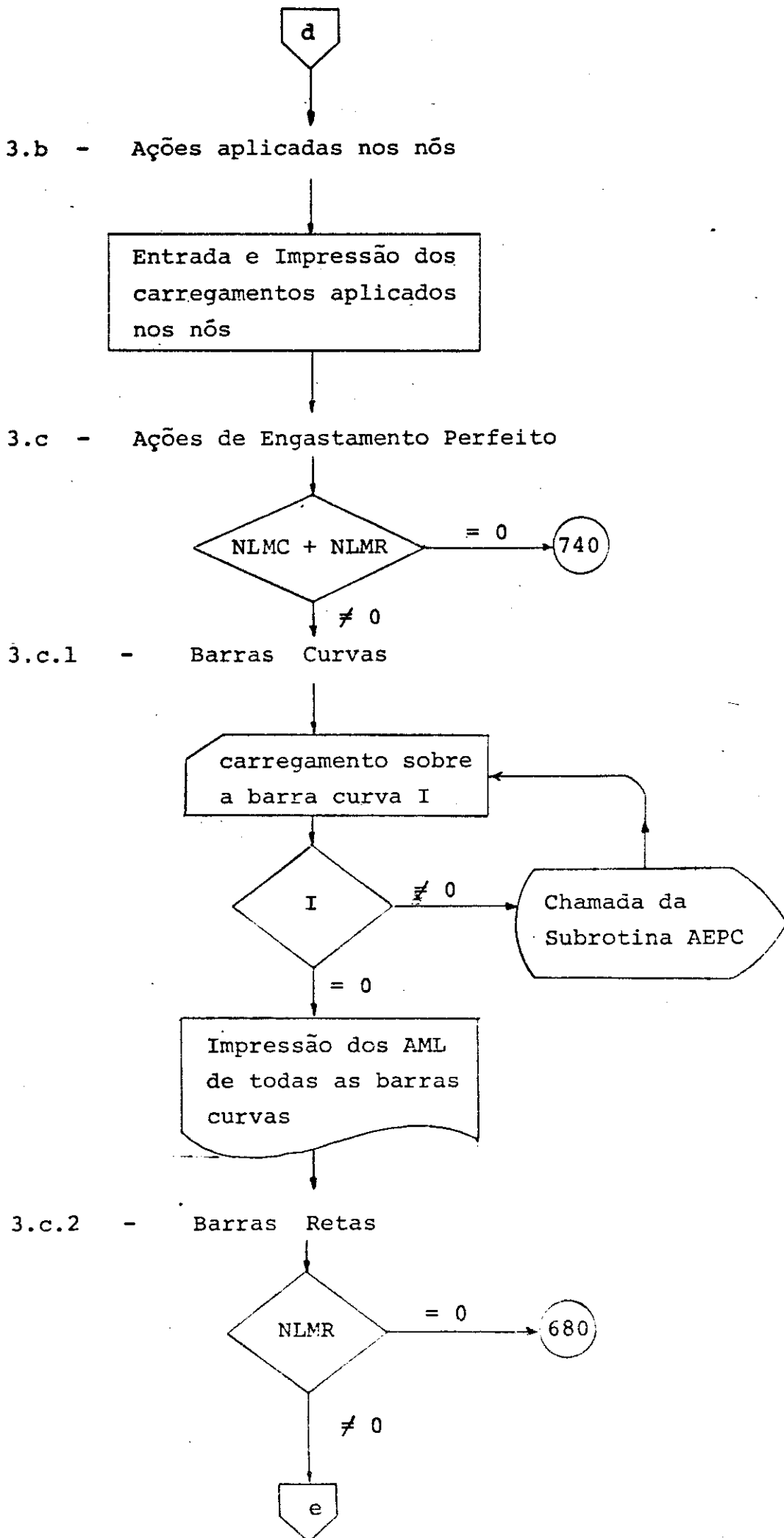


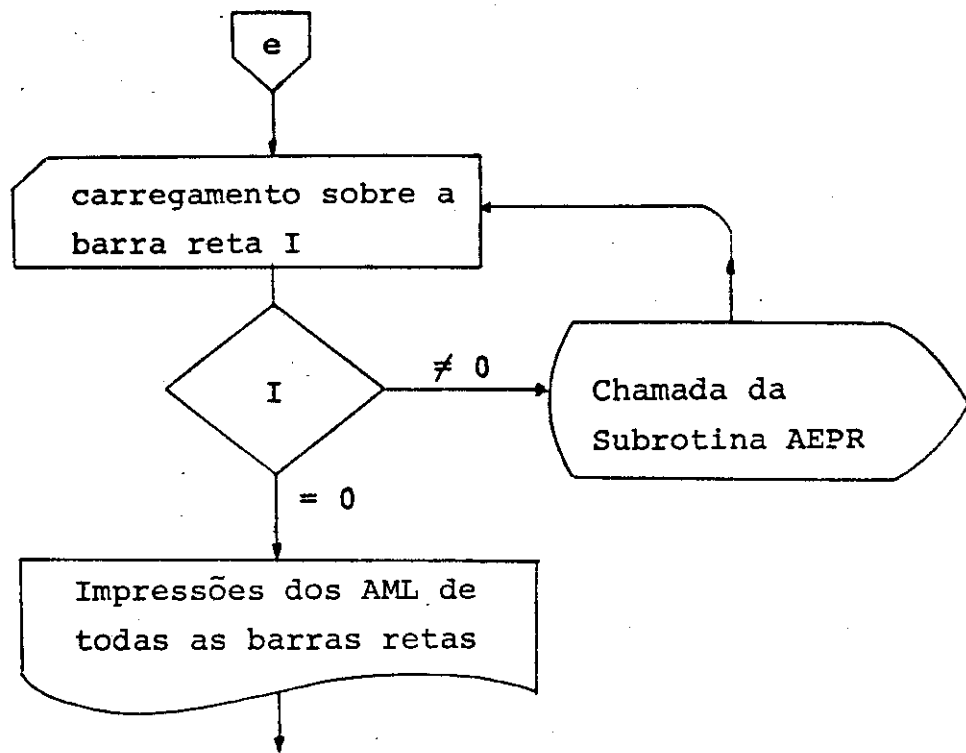
2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

2.a - Geração da Matriz de Rigidez de cada Barra



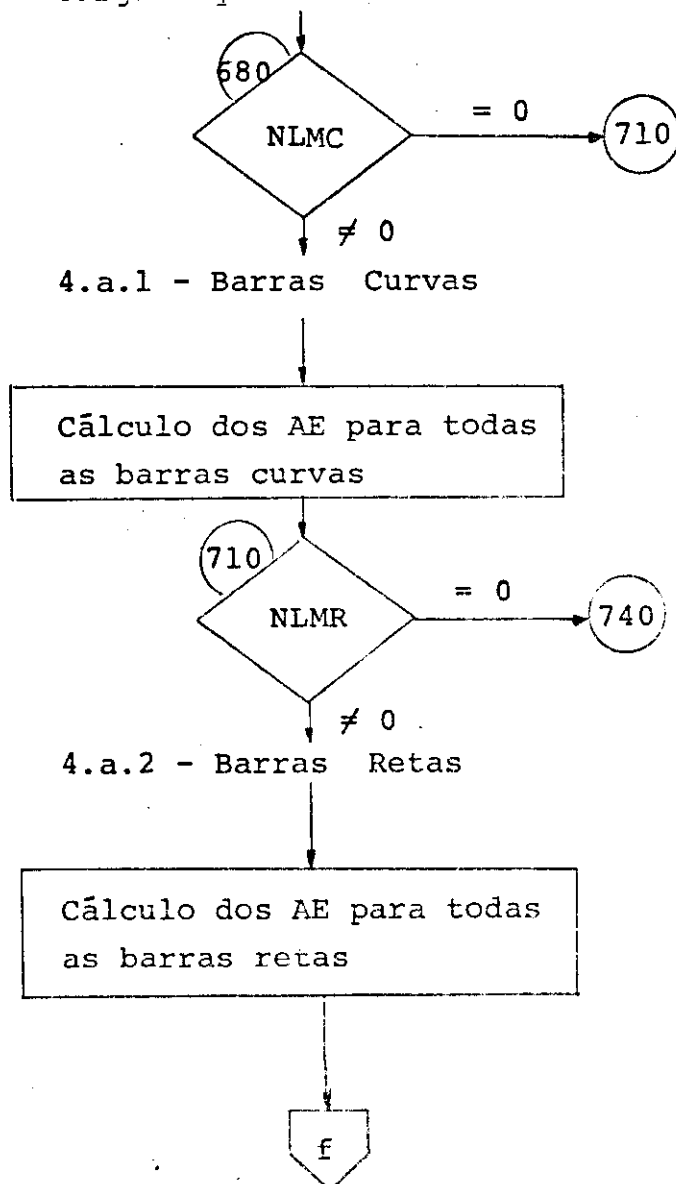


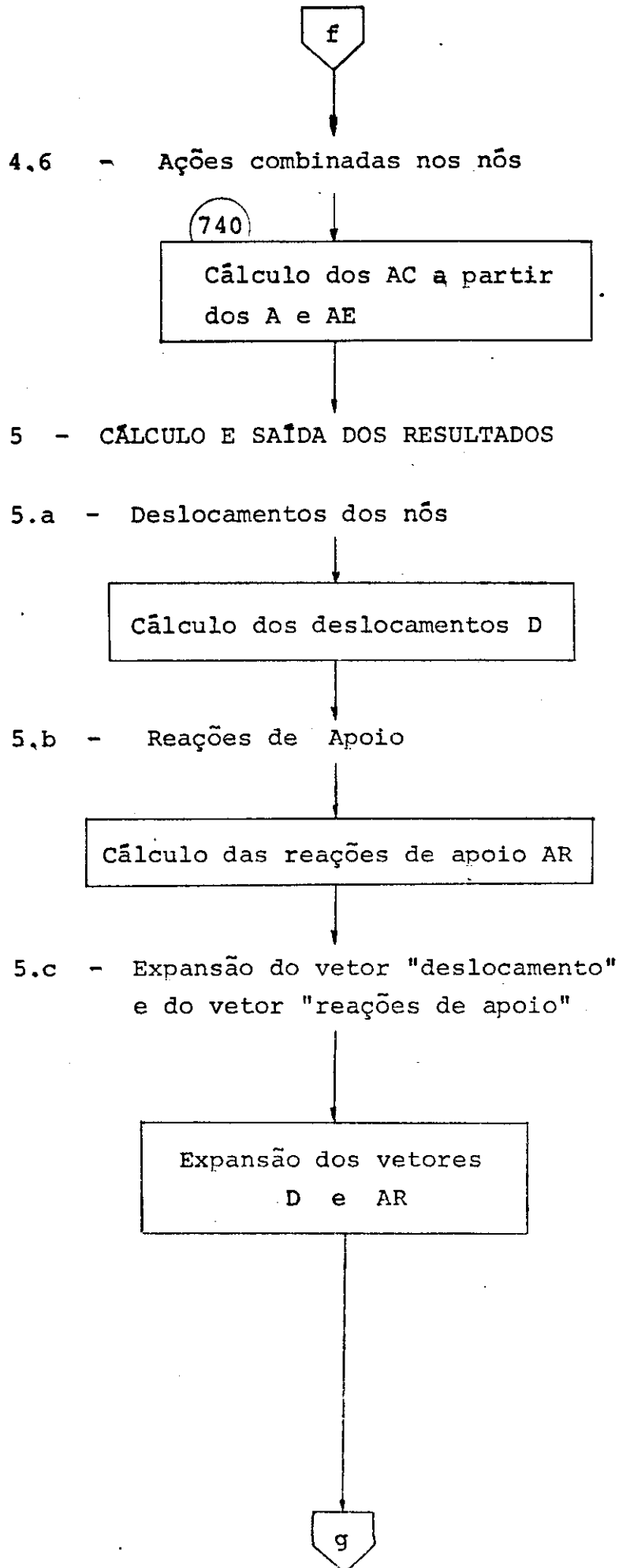




4 - CONSTRUÇÃO DOS VETORES ASSOCIADOS COM AS CARGAS

4.a - Cargas Equivalentes nos nós

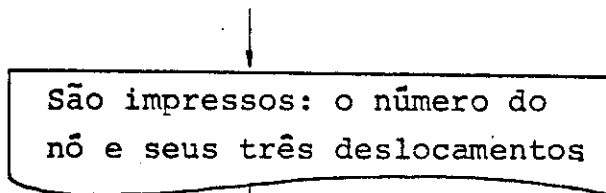




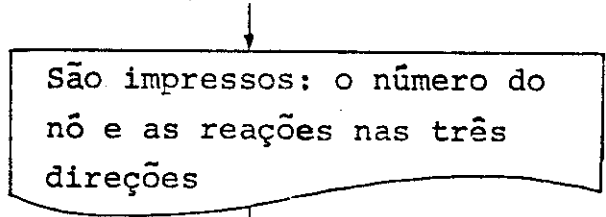


5.d - Impressão dos Resultados

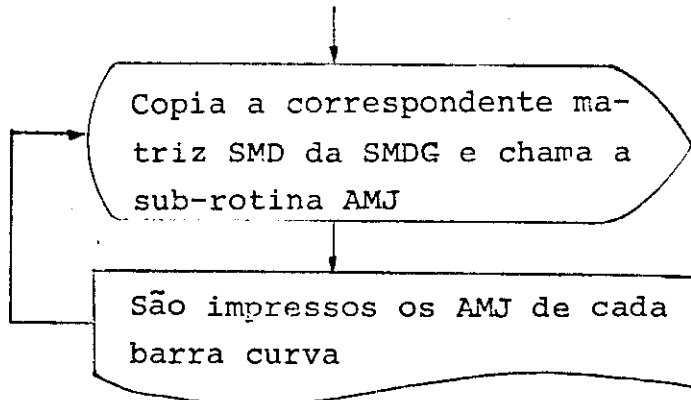
5.d.1 - Deslocamentos dos nós



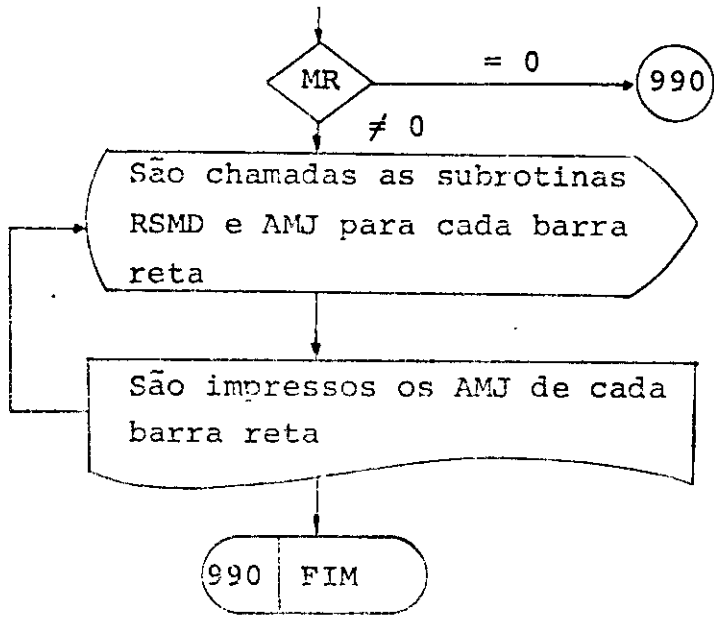
5.d.2 - Reações de apoio



5.d.3 - Esforços nas Extremidades das Barras Curvas



5.d.4 - Esforços nas Extremidades da Barras Retas





### 7.5.2 - Fluxograma da subrotina CSMD

Esta subrotina tem a finalidade de calcular a matriz de rigidez para a barra curva, nas direções globais (que coincidem com as locais).

Os argumentos tem o seguinte significado:

E = módulo de elasticidade longitudinal

G = módulo de elasticidade transversal

IX = momento de inércia contra torção:  $J_t$

IY = momento de inércia da seção : J

L = comprimento da barra curva

LAMBD = variável  $\lambda$  (eq. 13)

OMEGA =  $1 - \chi$  (ver eq. 15)

FI = ângulo de abertura  $\phi$ , da viga

N1 = variável  $n_1$  (eq. 65)

N2 = variável  $n_2$  (eq. 66)

CX =  $\cos \frac{\phi}{2}$

CY =  $\sen \frac{\phi}{2}$

SMD = matriz (6x6) que conterá os coeficientes de rigidez da barra curva, nas direções globais (que coincidem com as locais).

ENTRADA

SUBROUTINE CSMD(E,G,IX,IY,L,LAMBD,OMEGA,FI,N1,N2,CX,CY,SMD)

REAL IX,IY,L,LAMBD,N1,N2,SMD(6,6)

SCM1=G\*IX/L  
SCM2=E\*IY/L  
SCM3=SCM2/L\*\*2

S11=SCM1\*2.\*LAMBD/((LAMBD+1.)+(LAMBD-1.)\*SIN(FI)/FI)  
S22=SCM2\*2./((1.+LAMBD)+(1.-LAMBD)\*SIN(FI)/FI)  
S33=SCM3\*FI\*\*2/((-1.+LAMBD)+(1.-LAMBD)\*SIN(FI)/FI)\*OMEGA\*\*2/2.+LAMBD)

SMD(1,1)=CX\*\*2\*S11+CY\*\*2\*S22+N1\*\*2\*S33  
SMD(2,1)=CX\*CY\*(S22-S11)-N1\*N2\*S33  
SMD(2,2)=CY\*\*2\*S11+CX\*\*2\*S22+N2\*\*2\*S33  
SMD(3,1)=N1\*S33  
SMD(3,2)=-N2\*S33  
SMD(3,3)=S33  
SMD(4,1)=-CX\*\*2\*S11+CY\*\*2\*S22-N1\*\*2\*S33  
SMD(4,2)=CX\*CY\*(S11+S22)+N1\*N2\*S33  
SMD(4,3)=-SMD(3,1)  
SMD(4,4)=SMD(1,1)  
SMD(5,1)=-SMD(4,2)  
SMD(5,2)=CY\*\*2\*S11-CX\*\*2\*S22+N2\*\*2\*S33  
SMD(5,3)=SMD(3,2)  
SMD(5,4)=-SMD(2,1)  
SMD(5,5)=SMD(2,2)  
SMD(6,1)=-SMD(3,1)  
SMD(6,2)=-SMD(3,2)  
SMD(6,3)=-SMD(3,3)  
SMD(6,4)=SMD(3,1)  
SMD(6,5)=-SMD(3,2)  
SMD(6,6)=SMD(3,3)

M1=1,5

M2=M1+1

M3=M2,6

SMD(M1,M3)=SMD(M3,M1)

RETURN

### 7.5.3 - Fluxograma da subrotina RSMD

Esta subrotina tem a finalidade de calcular a matriz de rigidez para a barra reta de grelha, nas direções:

locais (se  $II = 0$ )

globais (se  $II = 1$ )

Os argumentos tem o seguinte significado:

E = módulo de elasticidade longitudinal

G = módulo de elasticidade transversal

IX = momento de inércia contra torção ( $J_t$ )

IY = momento de inércia da seção (J)

L = comprimento da barra reta

CX = terá o valor 1 ou -1 dependendo da orientação da barra

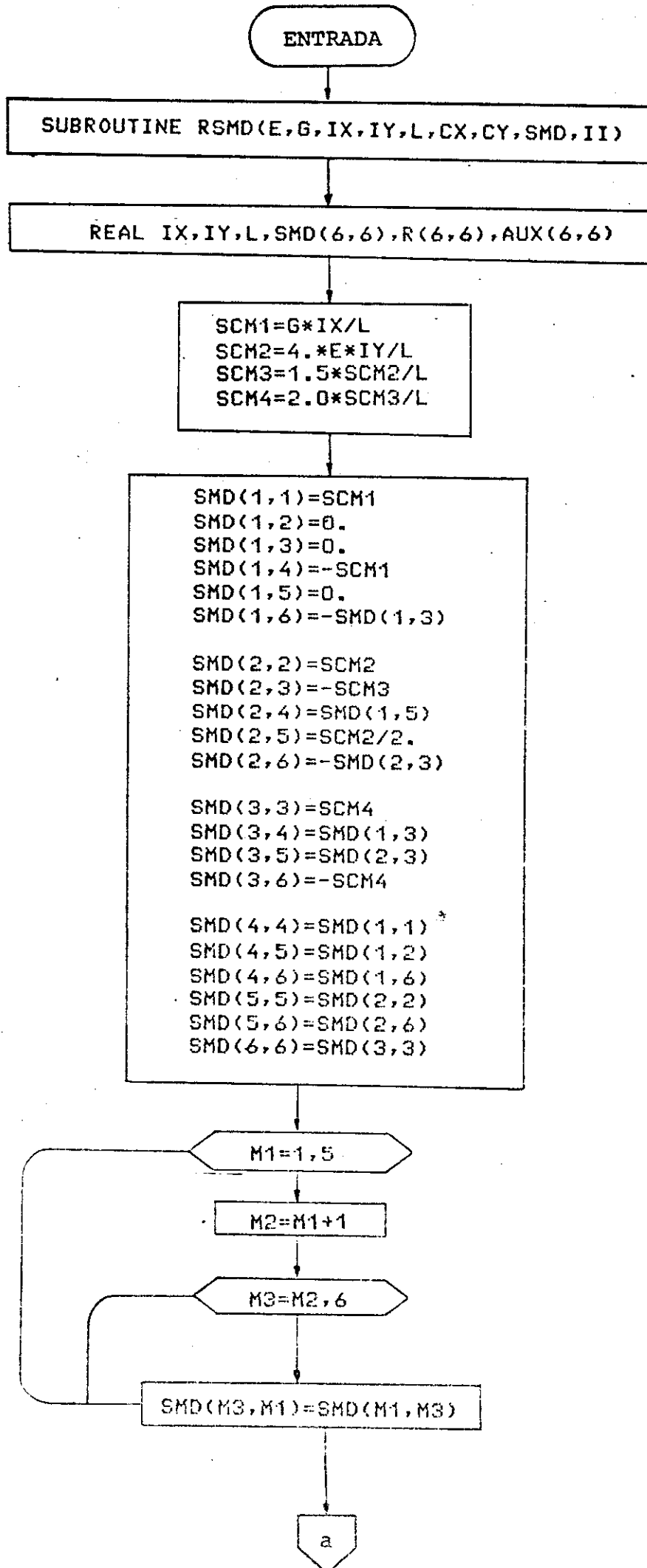
CY = terá o valor -1 ou 1 dependendo da orientação da barra

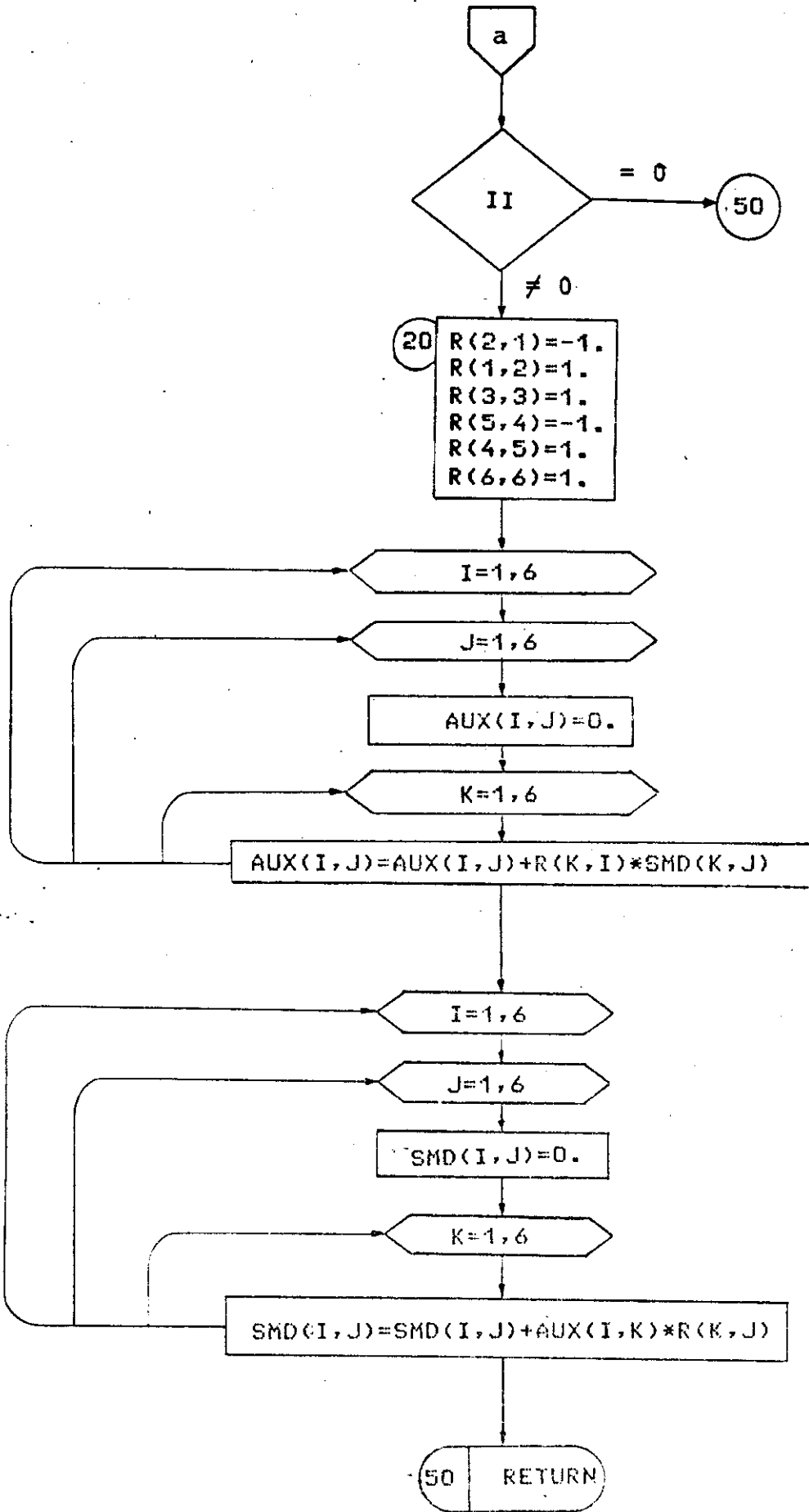
SMD = matriz (6x6) que conterà os coeficientes de rigidez da barra reta de grelha nas direções locais ou globais, segundo o valor de II.

II = variável que indicará se queremos SMD local ou global:

Se  $II = 0$  a subrotina calcula SMD local

Se  $II = 1$  a subrotina calcula SMD global.





#### 7.5.4 - Fluxograma da subrotina CRIA

Esta subrotina tem a finalidade de construir a matriz de rigidez S da estrutura a partir das matrizes SMD de cada barra da estrutura.

Os argumentos tem o seguinte significado:

N = número de graus de liberdade.

JJ = número da extremidade-início.

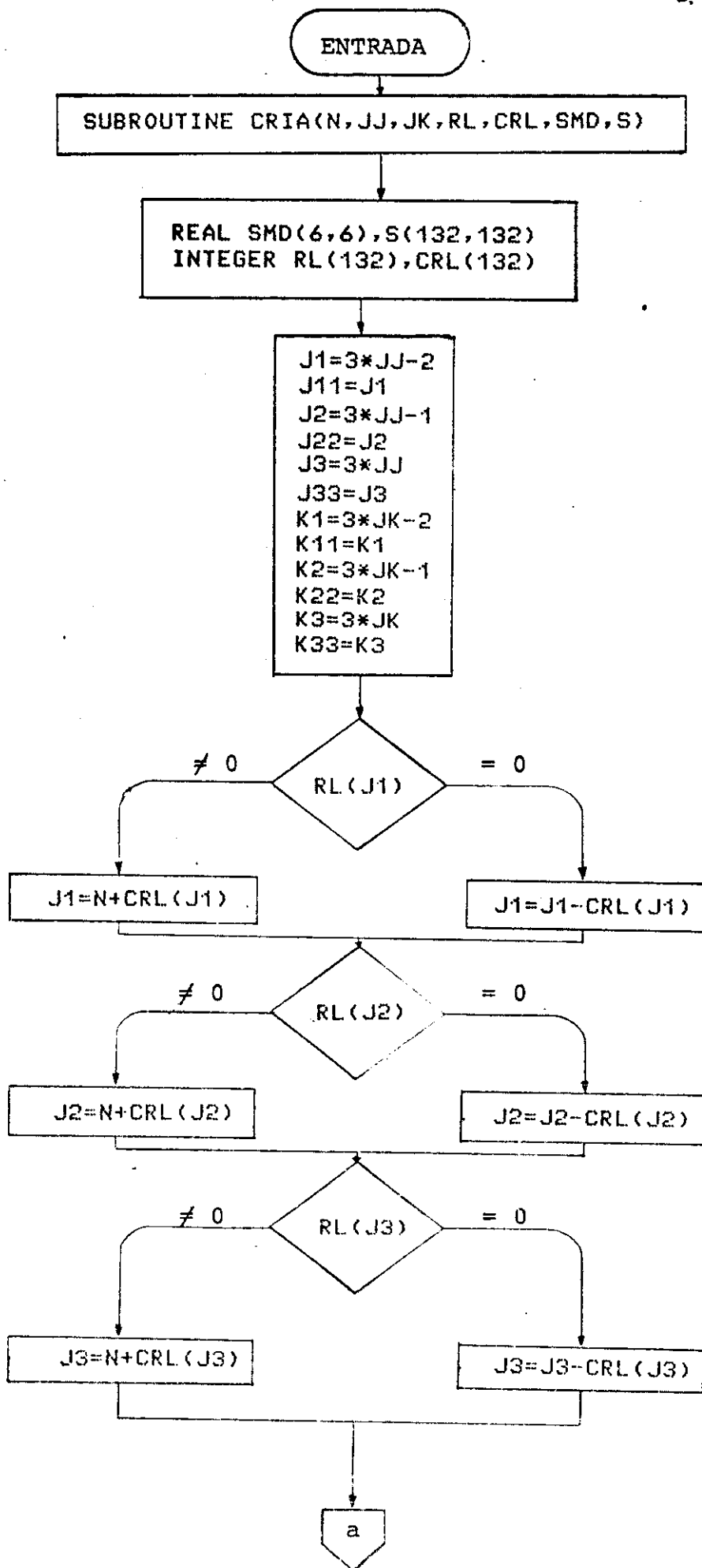
JK = número da extremidade-fim.

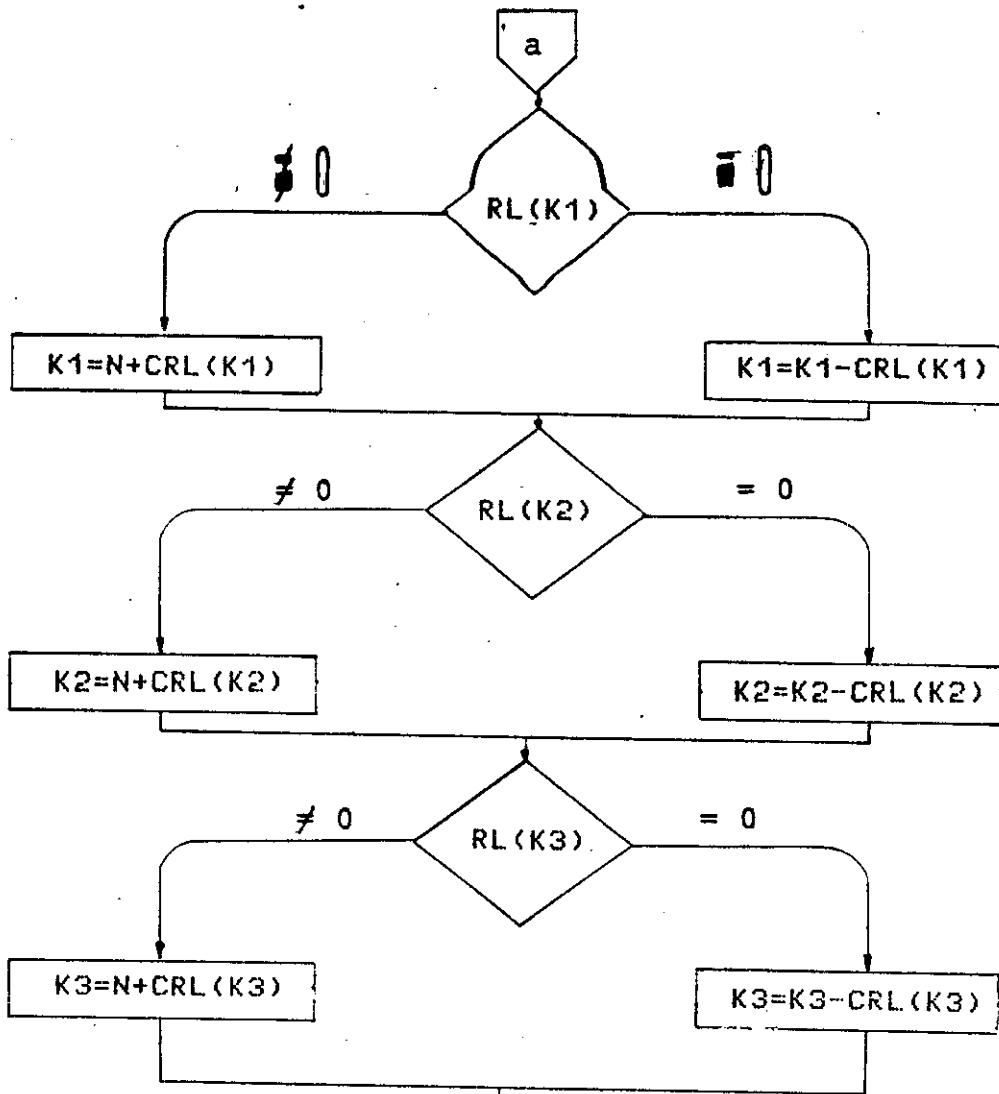
RL = lista das restrições dos nós.

CRL = lista acumulada das restrições dos nós.

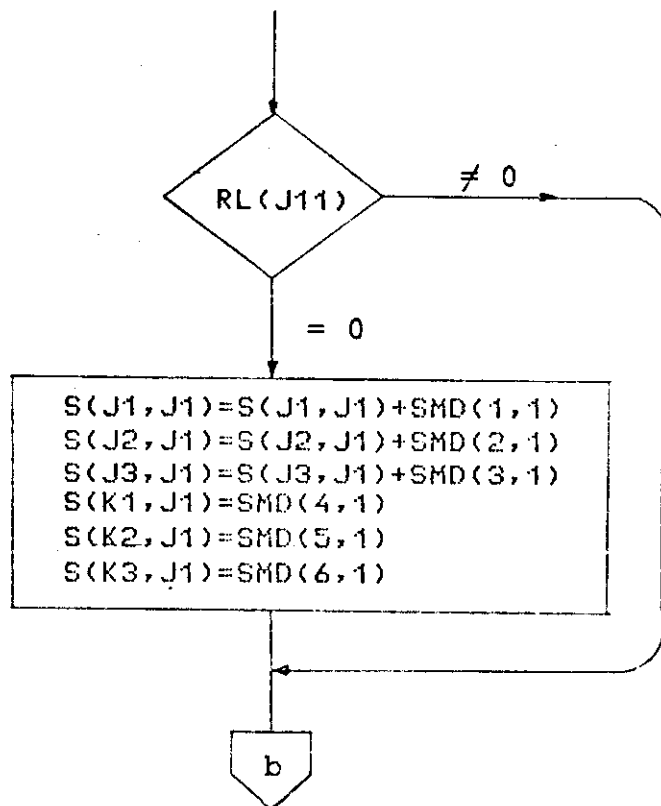
SMD = matriz de rigidez da barra que irá contribuir na matriz S.

S = matriz de rigidez da estrutura.

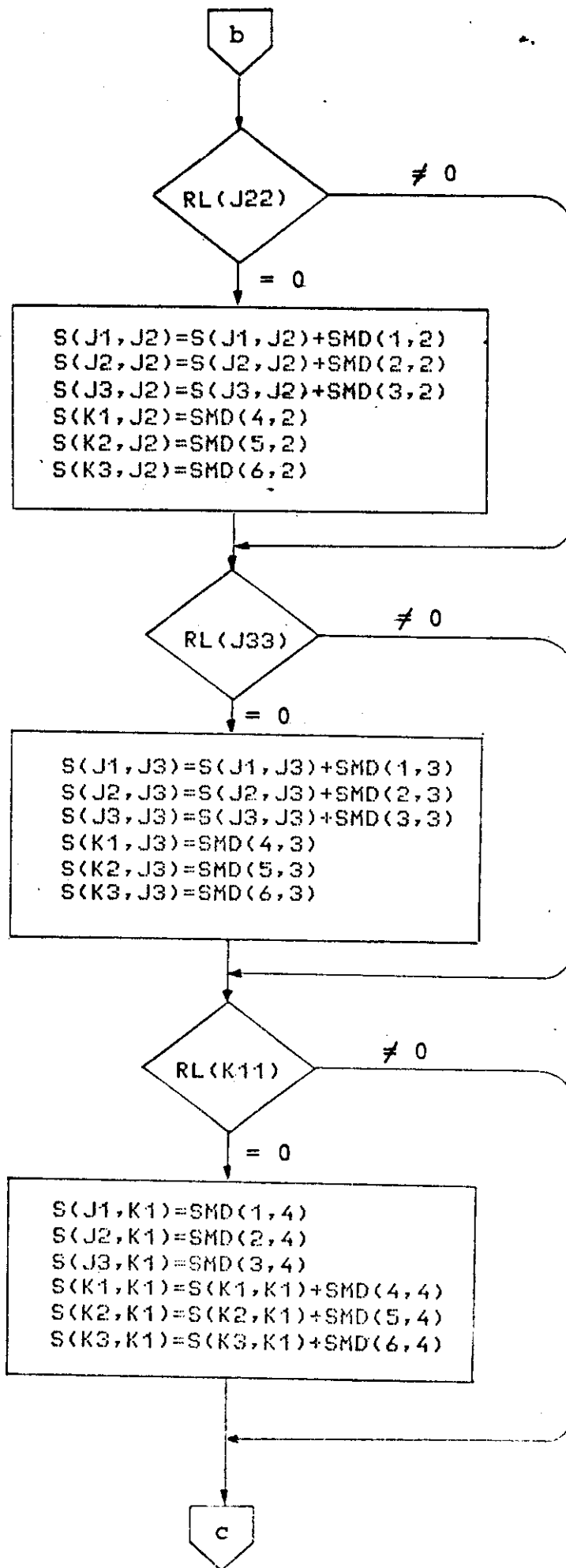


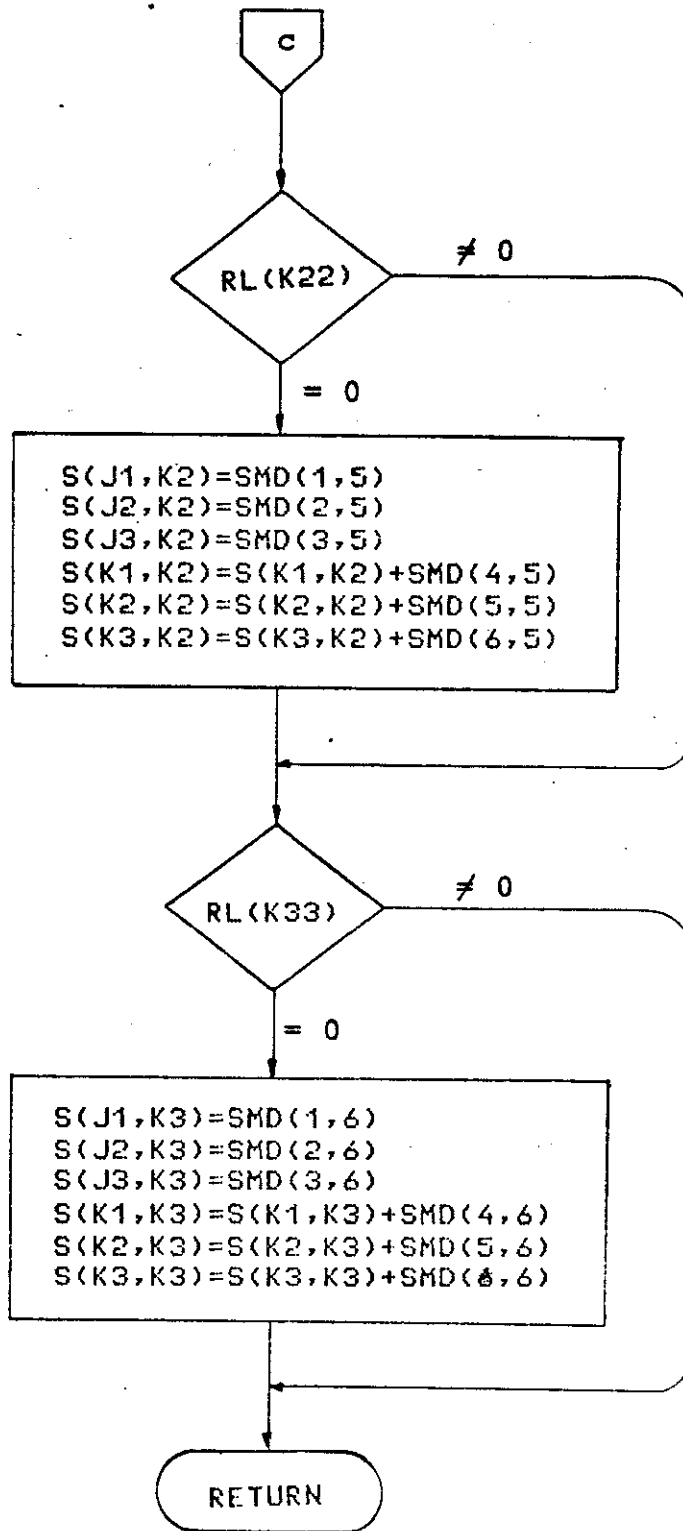


CONSTRUCAO DA MATRIZ S DA ESTRUTURA









### 7.5.5 - Fluxograma de subrotina AEPC

Esta subrotina tem a finalidade de calcular as Ações de Engastamento Perfeito para as Barras Curvas. Os valores destas ações foram obtidas a partir das expressões de deslocamentos apresentadas no livro "CURVED CONTINUOUS BEAMS FOR HIGHWAY BRIDGES" do autor WERNER VREDEN (Vide bibliografia).

Os argumentos tem o seguinte significado:

RHO = raio da viga curva

LAMBD = valor  $\lambda$  da barra (eq. 13)

FI = ângulo de abertura da viga curva

E = módulo de elasticidade

IY = momento de inércia da seção (J da seção)

TIPOC = tipo da carga: 1 = carga distribuída

2 = carga concentrada

3 = momento torçor distribuído

4 = momento torçor concentrado

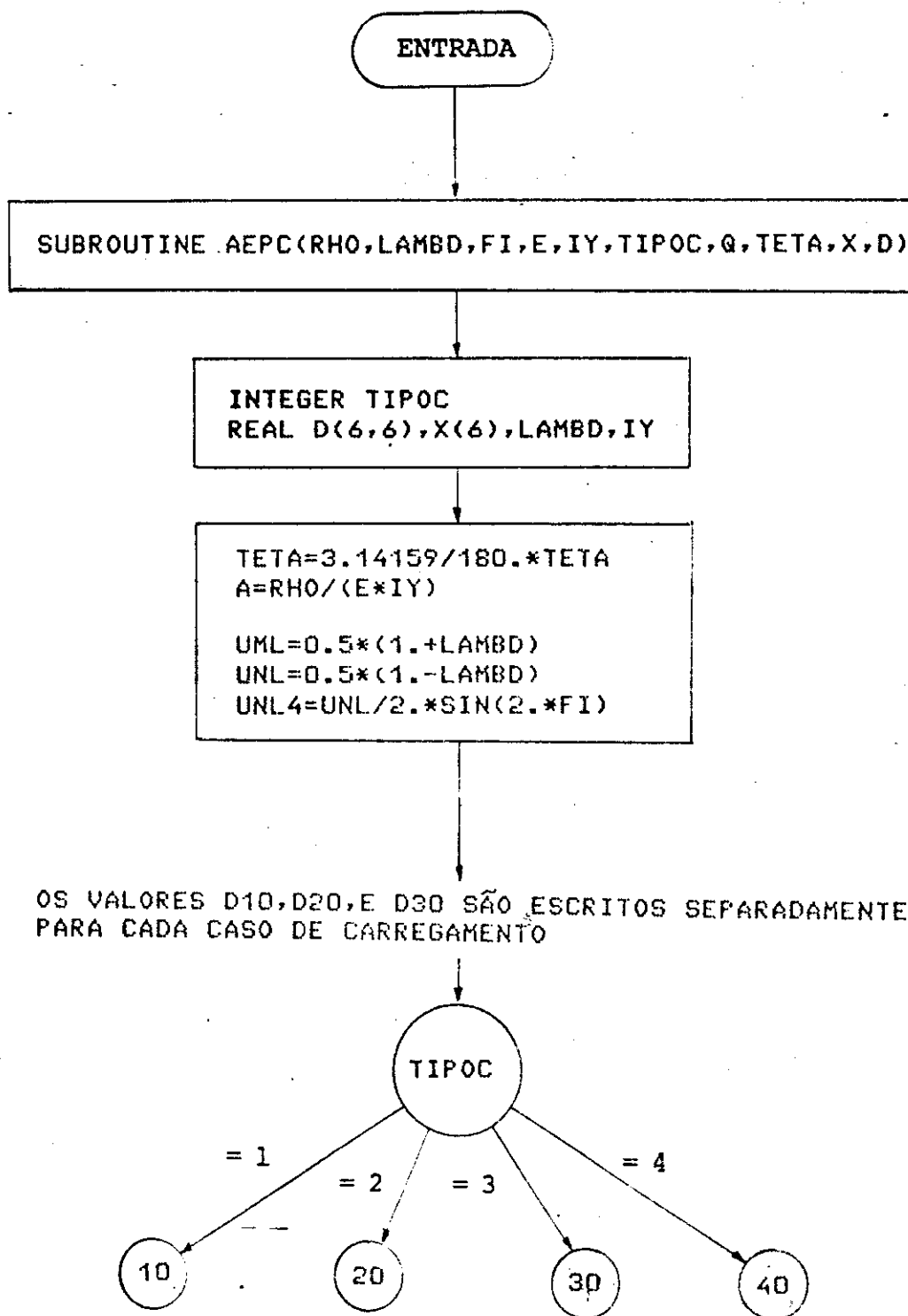
Q = valor da carga

TETA = posição, a partir da extremidade da viga curva , onde se encontram cargas do tipo (2) e (4)

Nos outros casos é igual a zero.

X = vetor que conterà as Ações de Engastamento Perfeito, da barra curva, nas 6 direções que cada barra tem (3 em cada extremidade).

D = matriz (6 x 6) que conterà a matriz SMD da barra considerada. (não confundir com o vetor deslocamento D do programa principal)



10

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

$$B = Q * A * RHO ** 2$$

$$\begin{aligned} D10 &= B * (UNL * SIN(FI) ** 2 + 2. * UML * (COS(FI) - 1.) + LAMBDA * FI * SIN(FI)) \\ D20 &= B * (2. * UML * (0.5 * FI - SIN(FI)) + UNL^4 + LAMBDA * FI * COS(FI)) \\ D30 &= B * RHO * (UNL * SIN(FI) ** 2 + LAMBDA * (FI * SIN(FI) - 0.5 * FI ** 2) + COS(FI) - 1.) \end{aligned}$$

50

20

CARGA CONCENTRADA

$$B = -Q * A * RHO$$

$$\begin{aligned} FIL &= FI - TETA \\ UNLT &= -UNL * SIN(TETA) \\ UMLT &= UML * TETA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D10 &= B * (UNLT * COS(FI) - LAMBDA * (SIN(FI) - SIN(FIL)) + UMLT * COS(FIL)) \\ D20 &= B * (UNLT * SIN(FI) + LAMBDA * (COS(FIL) - COS(FI)) - UMLT * SIN(FIL)) \\ D30 &= B * RHO * (UNLT * COS(FI) - LAMBDA * (SIN(FI) - SIN(FIL)) + \\ &\quad SIN(TETA) - TETA) + UMLT * COS(FIL) \end{aligned}$$

50

30

MOMENTO TORÇOR UNIFORME

$$B = -Q * A * RHO$$

$$\begin{aligned} D10 &= B * (UNL * SIN(FI) ** 2 + COS(FI) - 1.) \\ D20 &= B * (UNL4 + UML * FI - SIN(FI)) \\ D30 &= B * RHO * (1. - LAMBDA) * (0.5 * SIN(FI) ** 2 + COS(FI) - 1.) \end{aligned}$$

50

40

MOMENTO TORÇOR CONCENTRADO

$$B = Q * A$$

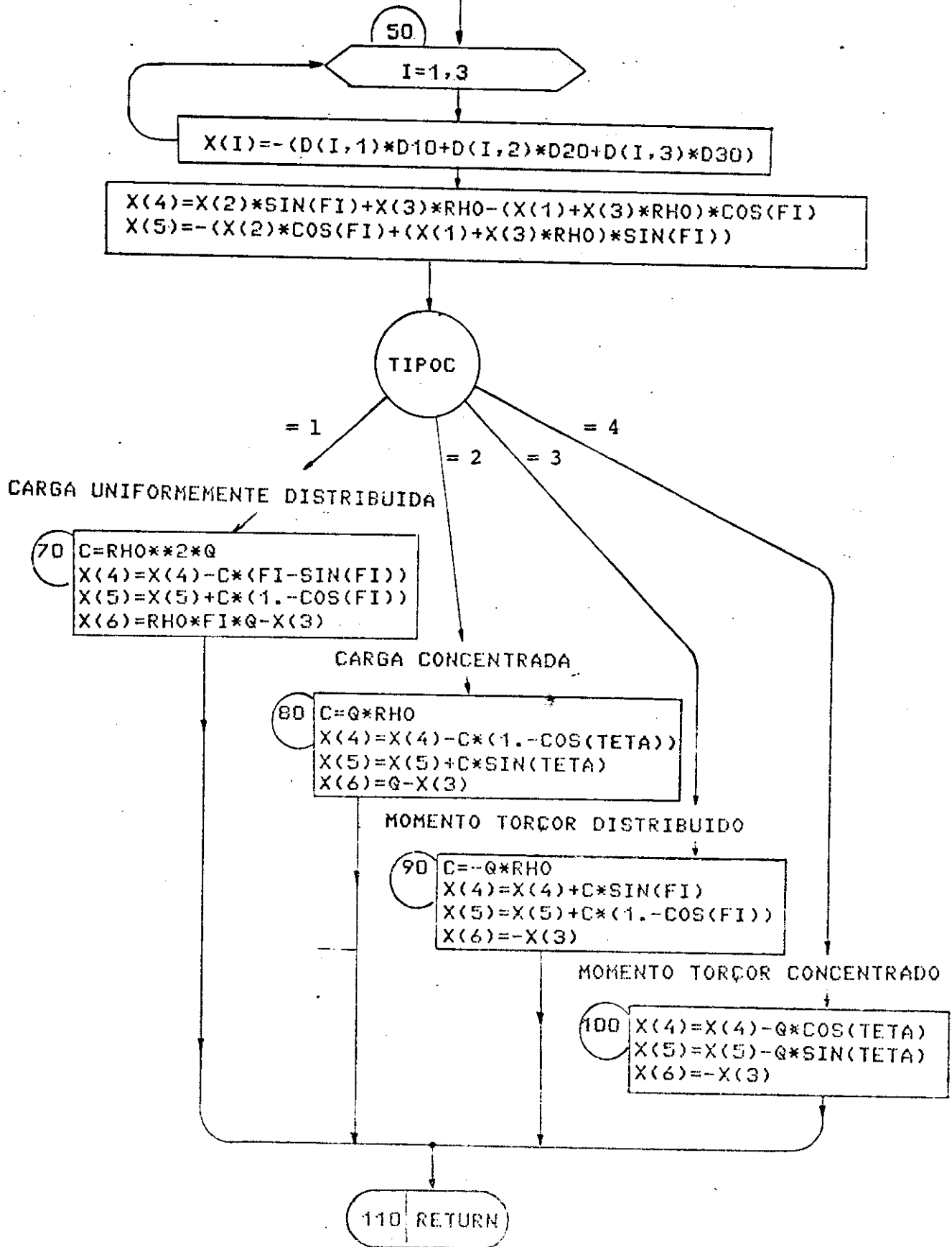
$$\begin{aligned} FIL &= FI - TETA \\ UNLT &= -UNL * SIN(TETA) \\ UMLT &= UML * TETA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D10 &= B * (UNLT * COS(FI) + UMLT * COS(FIL)) \\ D20 &= B * (-UNLT * SIN(FI) - UMLT * SIN(FIL)) \\ D30 &= B * RHO * (UNLT * COS(FI) + UMLT * COS(FIL) - LAMBDA * SIN(TETA)) \end{aligned}$$

a

a

AÇÕES DE ENGASTAMENTO PERFEITO



### 7.5.6 - Fluxograma da subrotina AEPR

Esta subrotina tem a finalidade de calcular as Ações de Engastamento Perfeito para as Barras Retas.

Os argumentos tem o seguinte significado:

L = comprimento da barra reta

TIPOC = tipo de carga: 1 = carga distribuída

2 = carga concentrada

3 = momento torçor distribuído

4 = momento torçor concentrado

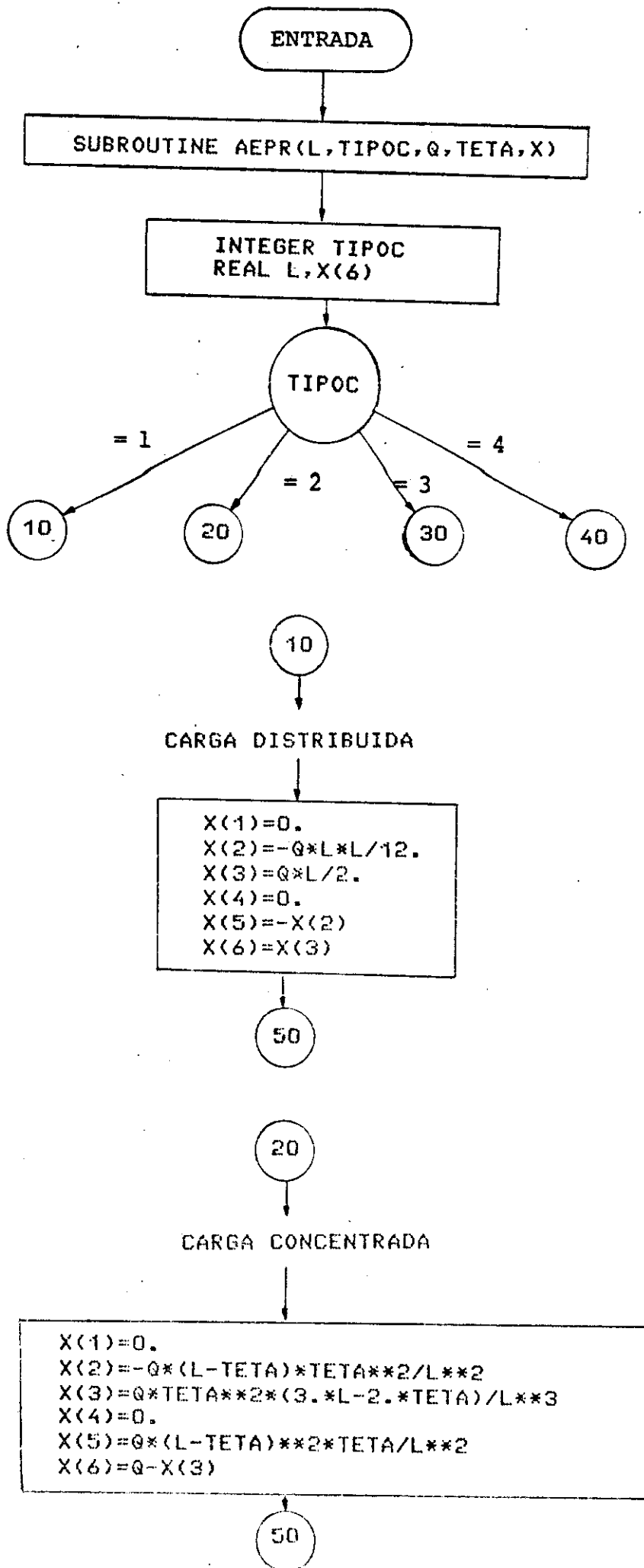
Q = valor da carga

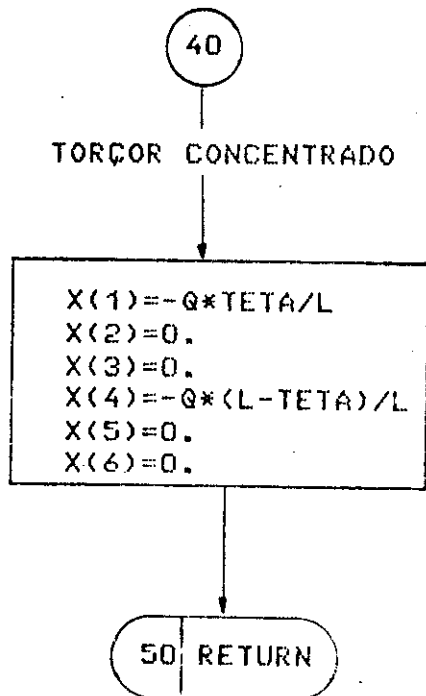
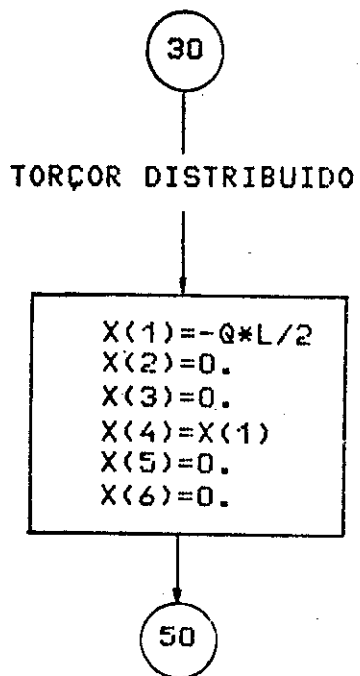
TETA = posição, a partir da extremidade-fim da viga reta, onde se encontram cargas do tipo (2) e (4).

Nos outros casos é igual a zero.

X = vetor que conterà as Ações de Engastamento Perfeito, das barras retas nas 6 direções que cada barra tem. (3 em cada extremidade)







### 7.5.7 - Fluxograma da subrotina AMJ

Esta subrotina tem a finalidade de calcular os esforços finais nas extremidades das barras da estrutura. Há a preocupação de se definir o tipo de barra para que as contribuições dos deslocamentos  $D$ , que seguem o sistema de coordenada global, contribuam corretamente nos AM (ações nas extremidades das barras).

Os argumentos tem o seguinte significado:

SMD = matriz de rigidez da barra.

D = vetor dos deslocamentos, no sistema global.

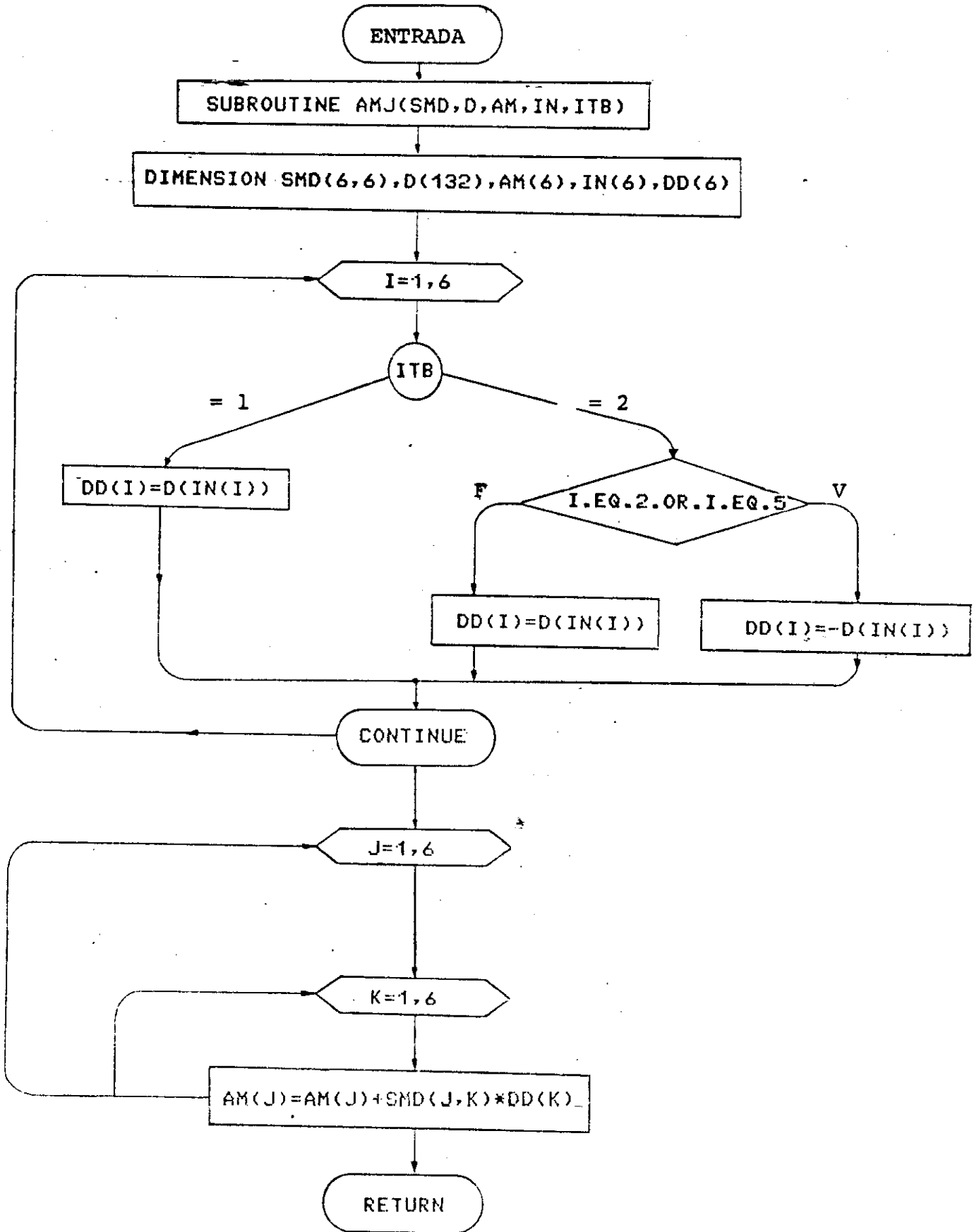
AM = vetor dos esforços nas extremidades da barra.

IN = vetor que contém os índices corretos dos deslocamentos

ITB = indicador do tipo de barra:

ITB = 1 significa barra curva

ITB = 2 significa barra reta



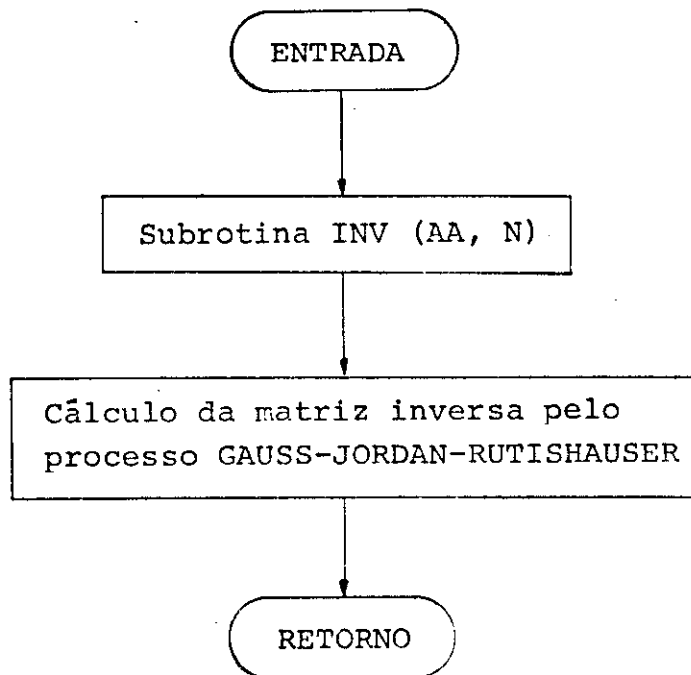
7.5.8 - Fluxograma da subrotina INV

Esta subrotina tem a finalidade de inverter uma matriz. Como a inversão é feita sobre si mesma, a matriz original é perdida.

Os argumentos tem o seguinte significado:

AA = matriz onde originalmente ficará armazenada a matriz a ser invertida; após a execução da subrotina, conterá a matriz inversa.

N = número de graus de liberdade.



#### 7.6 - PROGRAMA DE CÁLCULO EM LINGUAGEM FORTRAN IV

A listagem do programa principal e suas sub-rotinas é dada nas páginas seguintes.

Para facilitar o entendimento do programa, "cartões-comentários" foram inseridos no mesmo, explanando assim, resumidamente, o que faz cada trecho específico.

Nas colunas de 73 a 80 aparece o nome do programa (ou sub-programa) seguido do número de ordem.

7.6.1 - Listagem do Programa Principal

C	PROGRAMA PRINCIPAL	MAIN0001
C		MAIN0002
	REAL IX(72),IY(72),RHO(72),FIA(72),FI(72),L(72),	MAIN0003
	1 LAMBDA(72),CX(72),CY(72),OMEGA(72),SHDG(432,6),	MAIN0004
	2 N1(72),N2(72),RAIO(44),ANG(44),	MAIN0005
	3 S(132,132),SMD(6,6),A(132),D(132),AR(132),AM(6),AC(132),X(6)	MAIN0006
	DIMENSION AML(72,6),AE(132)	MAIN0007
	INTEGER RL(132),CRL(132),R,W,JJ(72),JK(72),TIPOC,IN(6),IB(72)	MAIN0008
C		MAIN0009
	R=2	MAIN0010
	W=3	MAIN0011
C		MAIN0012
C	1. ENTRADA E IMPRESSAO DOS DADOS	MAIN0013
C		MAIN0014
C	1A) PARAMETROS DA ESTRUTURA E MODULOS DE ELASTICIDADE	MAIN0015
C		MAIN0016
	READ(R,10)MC,MR,NJ,NR,NRJ,E,G	MAIN0017
	10 FORMAT(SI,2F)	MAIN0018
	IF(MR)40,20,40	MAIN0019
	20 WRITE(W,30)	MAIN0020
	30 FORMAT('1',///,1X,'ANALISE DE VIGAS CONTINUAS CURVAS',	MAIN0021
	1' CIRCULARES',/,1X,44('='))	MAIN0022
	GO TO 60	MAIN0023
	40 WRITE(W,50)	MAIN0024
	50 FORMAT(///,1X,'ANALISE DE GRELHAS COM BARRAS CIRCULARES',	MAIN0025
	1' E RETAS RADIAIS',/,1X,56('='))	MAIN0026
	60 WRITE(W,70)	MAIN0027
	70 FORMAT(/,1X'DADOS DA ESTRUTURA',	MAIN0028
	1//,4X'M',4X'MC'3X'MR'3X'N'4X'NJ NR NRJ'12X'E'15X'G')	MAIN0029
	M=MC+MR	MAIN0030
	N=3*NJ-NR	MAIN0031
	WRITE(W,80)M,MC,MR,N,NJ,NR,NRJ,E,G	MAIN0032
	80 FORMAT(/7I5,3X,2(2X,E14.7))	MAIN0033
C		MAIN0034
C	1B) COORDENADAS DOS NOS	MAIN0035
C		MAIN0036
	WRITE(W,90)	MAIN0037
	90 FORMAT(//,1X,'COORDENADAS DOS NOS',/,3X,'NO''11X'RAIO'9X'ANGUL	MAIN0038
	10')	MAIN0039
	DO 110 K=1,NJ	MAIN0040
	READ(R,100)J,RAIO(J),ANG(J)	MAIN0041
	100 FORMAT(I,2F)	MAIN0042
	110 WRITE(W,120)J,RAIO(J),ANG(J)	MAIN0043
	120 FORMAT(/,1X,I5,2(5X,F10.2))	MAIN0044
C		MAIN0045
C	1C) DESIGNACOES DAS BARRAS E PROPRIEDADES	MAIN0046
C		MAIN0047
C	1C.1) BARRAS CURVAS	MAIN0048
C		MAIN0049
	WRITE(W,130)	MAIN0050
	130 FORMAT(//' DESIGNACOES DAS BARRAS E PROPRIEDADES'/// A) BARRAS CUR	MAIN0051
	1 VAS'/// BARRA JJ JK'5X'IX'8X'IY'7X'RAIO COMPRIMENTO ANGULO DE	MAIN0052
	2 LAMBDA'58X'ABERTURA')	MAIN0053
	IF(MC.EQ.0) GO TO 3001	MAIN0054
	DO 170 K=1,MC	MAIN0055
	READ(R,140)I,JJ(I),JK(I),IX(I),IY(I)	MAIN0056
	140 FORMAT(SI,2F)	MAIN0057
	IB(K)=I	MAIN0058
C		MAIN0059
	PI=3.141593	MAIN0060
	DIF=ABS(ANG(JK(I))-ANG(JJ(I)))	MAIN0061
	IF(DIF-180.)160,160,150	MAIN0062
	150 DIF=360.-DIF	MAIN0063
	160 FIA(I)=DIF	MAIN0064
	FI(I)=PI*FIA(I)/180.	MAIN0065
	RHO(I)=RAIO(JJ(I))	MAIN0066
	L(I)=RHO(I)*FI(I)	MAIN0067
C		MAIN0068
	LAMBDA(I)=E*IY(I)/(G*IX(I))	MAIN0069
	CX(I)=COS(FI(I)/2.)	MAIN0070
	CY(I)=SIN(FI(I)/2.)	MAIN0071
	OMEGA(I)=4.*LAMBDA(I)*CY(I)/(FI(I)*(1.+LAMBDA(I))-	MAIN0072
	1(1.-LAMBDA(I))*SIN(FI(I)))	MAIN0073
	ACE=RHO(I)*(OMEGA(I)-CX(I))	MAIN0074
	BCE=RHO(I)*CY(I)	MAIN0075
C		MAIN0076
	N1(I)=ACE*CX(I)-BCE*CY(I)	MAIN0077
	N2(I)=BCE*CX(I)+ACE*CY(I)	MAIN0078
C		MAIN0079
	170 WRITE(W,180)I,JJ(I),JK(I),IX(I),IY(I),RHO(I),L(I),FIA(I),LAMBDA(I)	MAIN0080
	180 FORMAT(/,1X,I5,2(5X,F10.2),	MAIN0081
	3001 CONTINUE	MAIN0082

```
IF(MR)190,250,190 MAIN0083
C MAIN0084
C 1C.2) BARRAS RETAS MAIN0085
C 190 WRITE(W,200) MAIN0086
200 FORMAT(//,' B) BARRAS RETAS'//,' BARRA JJ JK'5X'IX'8X'IY'3X, MAIN0087
1'COMPRIMENTO') MAIN0088
C MAIN0089
MC1=MC+1 MAIN0090
DO 230 K=MC1,M MAIN0091
READ(R,140)I,JJ(I),JK(I),IX(I),IY(I) MAIN0092
IB(K)=I MAIN0093
C MAIN0094
L(I)=ABS(RAIO(JK(I))-RAIO(JJ(I))) MAIN0095
IF(RAIO(JK(I))-RAIO(JJ(I)))210,210,220 MAIN0096
210 CX(I)=-1. MAIN0097
CY(I)=1. MAIN0098
GO TO 230 MAIN0099
220 CX(I)=1. MAIN0100
CY(I)=-1. MAIN0101
C MAIN0102
230 WRITE(W,240)I,JJ(I),JK(I),IX(I),IY(I),L(I) MAIN0103
240 FORMAT(/,1X,3I5,2E10.3,F10.2) MAIN0104
C MAIN0105
1D) LISTAS DAS RESTRICOES DOS NOS, E DAS ACUMULADAS MAIN0106
C MAIN0107
250 WRITE(W,260) MAIN0108
260 FORMAT(//,' RESTRICOES DOS NO'S NO SISTEMA GLOBAL',//,3X'NO''', MAIN0109
1' RESTR.1 RESTR.2 RESTR.3') MAIN0110
C MAIN0111
1D.1) ZERAR MATRIZES RL,CRL,S MAIN0112
C MAIN0113
NJ3=3*NJ MAIN0114
DO 270 I=1,NJ3 MAIN0115
RL(I)=0 MAIN0116
CRL(I)=0 MAIN0117
DO 270 J=1,NJ3 MAIN0118
270 S(I,J)=0. MAIN0119
C MAIN0120
C MAIN0121
1D.2) LEITURA E IMPRESSAO DA LISTA DE RESTRICOES MAIN0122
C MAIN0123
DO 290 J=1,NRJ MAIN0124
READ(R,280)K,RL(3*K-2),RL(3*K-1),RL(3*K) MAIN0125
280 FORMAT(4I) MAIN0126
290 WRITE(W,300)K,RL(3*K-2),RL(3*K-1),RL(3*K) MAIN0127
300 FORMAT(//,2X,I3,5X,I1,2(8X,I1)) MAIN0128
C MAIN0129
C MAIN0130
1D.3) CRIACAO DA LISTA DAS RESTRICOES ACUMULADAS MAIN0131
C MAIN0132
CRL(1)=RL(1) MAIN0133
DO 310 K=2,NJ3 MAIN0134
310 CRL(K)=CRL(K-1)+RL(K) MAIN0135
C MAIN0136
C MAIN0137
C MAIN0138
C MAIN0139
2. MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA MAIN0140
C MAIN0141
C MAIN0142
C MAIN0143
2A) GERACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA BARRA MAIN0144
C MAIN0145
C MAIN0146
2A.1) BARRAS CURVAS MAIN0147
C MAIN0148
IF(MC.EQ.0) GO TO 3002 MAIN0149
DO 320 K=1,MC MAIN0150
I=IB(K) MAIN0151
C MAIN0152
CALL CSMD(E,G,IX(I),IY(I),L(I),LAMBDA(I),OMEGA(I),FI(I),N1(I), MAIN0153
1N2(I),CX(I),CY(I),SMD) MAIN0154
DO 1990 JS=1,6 MAIN0155
DO 1990 II=1,6 MAIN0156
IS=6*(I-1)+II MAIN0157
1990 SHDG(IS,JS)=SMD(II,JS) MAIN0158
C MAIN0159
CALL CRIA(N,JJ(I),JK(I),RL,CRL,SMD,S) MAIN0160
C MAIN0161
320 CONTINUE MAIN0162
C MAIN0163
```



```
C
C
C      2A.2) BARRAS RETAS
C
3002 CONTINUE
      IF(HR)330,350,330
      330 MC1=MC+1
          DO 340 K=MC1,M
              I=IB(K)
C
          CALL RSMD(E,G,IX(I),IY(I),L(I),CX(I),CY(I),SMD,1)
C
          CALL CRIA(N,JJ(I),JK(I),RL,CRL,SMD,S)
C
      340 CONTINUE
C
C-----
C      2B) INVERSAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C
      350 CALL INV(S,N)
C
C-----
C      3. ENTRADA E IMPRESSAO DOS DADOS REFERENTES AO CARREGAMENTO
C
C-----
C      3A) QUANTIDADE DE NOS E BARRAS CARREGADAS.
C
19985 WRITE(W,280)
380 FORMAT('1',10(A),38X'DADOS DO CARREGAMENTO',38X,21(' ')/24X,
1'NUMERO DE NOS CARREGADOS = NLJ = ')
      READ(R,280)NLJ,NLMC,NLMR
      WRITE(W,390)NLJ,NLMC,NLMR
      390 FORMAT('+',57X,I3
1,/24X,'BARRAS CURVAS CARREGADAS = NLMC = ',I3,
2 /24X,'BARRAS RETAS CARREGADAS = NLMR = ',I3)
C
C-----
C      ZERAR MATRIZ 'A'
C
      DO 420 J=1,NJ3
      420 A(J)=0.
C
C-----
C      3B) ACOES APLICADAS NOS NO'S
C
      IF(NLJ)      430,480,430
      430 WRITE(W,440)
      440 FORMAT(6(/),23X'ACOES APLICADAS NOS NO'S'//,12X'NO''9X'ACAO 1'14
1X'ACAO 2'14X'ACAO 3'//)
          DO 460 J=1,NLJ
              READ(R,450) K,A(3*K-2),A(3*K-1),A(3*K)
      450 FORMAT(I,3F)
      460 WRITE(W,470)K,A(3*K-2),A(3*K-1),A(3*K)
      470 FORMAT(9X,I5,3(6X,E14.7)//)
C
C-----
C      3C) ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO
C
C      3C1) BARRAS CURVAS
C
      480 IF(NLMC+NLMR)490,740,490
      490 WRITE(W,500)
      500 FORMAT(/////17X,'ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO DEVIDAS'
1,' AS CARGAS',/)
C
```

MAIN0164  
MAIN0165  
MAIN0166  
MAIN0167  
MAIN0168  
MAIN0169  
MAIN0170  
MAIN0171  
MAIN0172  
MAIN0173  
MAIN0174  
MAIN0175  
MAIN0176  
MAIN0177  
MAIN0178  
MAIN0179  
MAIN0180  
-----  
MAIN0181  
MAIN0182  
MAIN0183  
MAIN0184  
-----  
MAIN0185  
MAIN0186  
MAIN0187  
MAIN0188  
-----  
MAIN0189  
MAIN0190  
MAIN0191  
MAIN0192  
-----  
MAIN0193  
MAIN0194  
MAIN0195  
MAIN0196  
MAIN0197  
MAIN0198  
-----  
MAIN0199  
MAIN0200  
MAIN0201  
MAIN0202  
MAIN0203  
MAIN0204  
MAIN0205  
-----  
MAIN0206  
MAIN0207  
MAIN0208  
MAIN0209  
MAIN0210  
-----  
MAIN0211  
MAIN0212  
MAIN0213  
MAIN0214  
-----  
MAIN0215  
MAIN0216  
MAIN0217  
MAIN0218  
MAIN0219  
-----  
MAIN0220  
MAIN0221  
MAIN0222  
MAIN0223  
MAIN0224  
MAIN0225  
MAIN0226  
MAIN0227  
MAIN0228  
MAIN0229  
MAIN0230  
-----  
MAIN0231  
MAIN0232  
MAIN0233  
MAIN0234  
MAIN0235  
-----  
MAIN0236  
MAIN0237  
MAIN0238  
MAIN0239  
-----  
MAIN0240  
MAIN0241  
MAIN0242  
MAIN0243  
MAIN0244

```
IF(NLMC)510,600,510
510 WRITE(W,520)
520 FORMAT(//,2X,'BARRA',/2X,'CURVA',3X,'AML1',8X,'AML2',8X,'AML3',
1,8X,'AML4',8X,'AML5',8X,'AML6'/)
530 READ(R,540)I,TIPOC,Q,TETA
540 FORMAT(2I,2F)
IF(I)550,570,550
550 DO 2001 JS=1,3
DO 2001 II=1,3
IS=6*(I-1)+II
2001 SMD(II,JS)=SMDG(IS,JS)
CALL AEPC(RHO(I),LAMBDA(I),FI(I),E,IY(I),TIPOC,Q,TETA,X,SMD)
DO 560 K=1,6
560 AML(I,K)=AML(I,K)+X(K)
GO TO 530
570 DO 580 K=1,MC
I=IB(K)
580 WRITE(W,590)I,(AML(I,J),J=1,6)
590 FORMAT(/,2X,I3,6E12.4)
C
C -----3C2) BARRAS RETAS-----
C
600 IF(NLMR)610,680,610
610 WRITE(W,620)
620 FORMAT(//,2X,'BARRA',/2X,'RETA',4X,'AML1',8X,'AML2',8X,'AML3',
1,8X,'AML4',8X,'AML5',8X,'AML6'/)
630 READ(R,540)I,TIPOC,Q,TETA
IF(I)640,660,640
640 CALL AEPR(L(I),TIPOC,Q,TETA,X)
DO 650 K=1,6
650 AML(I,K)=AML(I,K)+X(K)
GO TO 630
660 DO 670 K=MC1,M
I=IB(K)
670 WRITE(W,590)I,(AML(I,J),J=1,6)
C
C 4. CONSTRUCAO DOS VETORES ASSOCIADOS COM AS CARGAS
C
C 4A. CARGAS EQUIVALENTES NOS NOS
C 4A1. BARRAS CURVAS
C
680 IF(NLMC)690,710,690
690 DO 700 K=1,MC
I=IB(K)
AE(3*JJ(I)-2)=AE(3*JJ(I)-2)-AML(I,1)
AE(3*JJ(I)-1)=AE(3*JJ(I)-1)-AML(I,2)
AE(3*JJ(I))=AE(3*JJ(I))-AML(I,3)
AE(3*JK(I)-2)=AE(3*JK(I)-2)-AML(I,4)
AE(3*JK(I)-1)=AE(3*JK(I)-1)-AML(I,5)
700 AE(3*JK(I))=AE(3*JK(I))-AML(I,6)
C
C 4A2. BARRAS RETAS
C
710 IF(NLMR)720,740,720
720 DO 730 K=MC1,M
I=IB(K)
AE(3*JJ(I)-2)=AE(3*JJ(I)-2)+AML(I,2)
AE(3*JJ(I)-1)=AE(3*JJ(I)-1)-AML(I,1)
AE(3*JJ(I))=AE(3*JJ(I))-AML(I,3)
AE(3*JK(I)-2)=AE(3*JK(I)-2)+AML(I,5)
AE(3*JK(I)-1)=AE(3*JK(I)-1)-AML(I,4)
730 AE(3*JK(I))=AE(3*JK(I))-AML(I,6)
C
C 4B. ACOES COMBINADAS NOS NOS
C
C -----
740 DO 770 J = 1,NJ3
IF(RL(J)) 760,750,760
750 K=J-CRL(J)
GO TO 770
760 K=N+CRL(J)
770 AC(K)=A(J)+AE(J)
```

MAIN0245  
MAIN0246  
MAIN0247  
MAIN0248  
MAIN0249  
MAIN0250  
MAIN0251  
MAIN0252  
MAIN0253  
MAIN0254  
MAIN0255  
MAIN0256  
MAIN0257  
MAIN0258  
MAIN0259  
MAIN0260  
MAIN0261  
MAIN0262  
MAIN0263  
MAIN0264  
MAIN0265  
MAIN0266  
MAIN0267  
MAIN0268  
MAIN0269  
MAIN0270  
MAIN0271  
MAIN0272  
MAIN0273  
MAIN0274  
MAIN0275  
MAIN0276  
MAIN0277  
MAIN0278  
MAIN0279  
MAIN0280  
MAIN0281  
MAIN0282  
MAIN0283  
MAIN0284  
MAIN0285  
MAIN0286  
MAIN0287  
MAIN0288  
MAIN0289  
MAIN0290  
MAIN0291  
MAIN0292  
MAIN0293  
MAIN0294  
MAIN0295  
MAIN0296  
MAIN0297  
MAIN0298  
MAIN0299  
MAIN0300  
MAIN0301  
MAIN0302  
MAIN0303  
MAIN0304  
MAIN0305  
MAIN0306  
MAIN0307  
MAIN0308  
MAIN0309  
MAIN0310  
MAIN0311  
MAIN0312  
MAIN0313  
MAIN0314  
MAIN0315  
MAIN0316  
MAIN0317  
MAIN0318  
MAIN0319

```
C-----MAIN0320
C                                     MAIN0321
C                                     MAIN0322
C                                     MAIN0323
C                                     MAIN0324
C                                     MAIN0325
C                                     MAIN0326
C-----MAIN0327
C                                     MAIN0328
C                                     MAIN0329
C                                     MAIN0330
C                                     MAIN0331
C                                     MAIN0332
C                                     MAIN0333
C                                     MAIN0334
C                                     MAIN0335
C-----MAIN0336
C                                     MAIN0337
C                                     MAIN0338
C                                     MAIN0339
C                                     MAIN0340
C                                     MAIN0341
C                                     MAIN0342
C                                     MAIN0343
C                                     MAIN0344
C-----MAIN0345
C                                     MAIN0346
C                                     MAIN0347
C                                     MAIN0348
C                                     MAIN0349
C                                     MAIN0350
C                                     MAIN0351
C                                     MAIN0352
C                                     MAIN0353
C                                     MAIN0354
C                                     MAIN0355
C-----MAIN0356
C                                     MAIN0357
C                                     MAIN0358
C                                     MAIN0359
C                                     MAIN0360
C                                     MAIN0361
C-----MAIN0362
C                                     MAIN0363
C                                     MAIN0364
C                                     MAIN0365
C                                     MAIN0366
C-----MAIN0367
C                                     MAIN0368
C-----MAIN0369
C                                     MAIN0370
C                                     MAIN0371
C                                     MAIN0372
C                                     MAIN0373
C                                     MAIN0374
C                                     MAIN0375
C-----MAIN0376
C                                     MAIN0377
C                                     MAIN0378
C                                     MAIN0379
C-----MAIN0380
C                                     MAIN0381
C                                     MAIN0382
C-----MAIN0383
C                                     MAIN0384
C-----MAIN0385
C                                     MAIN0386
C-----MAIN0387
C                                     MAIN0388
C-----MAIN0389
C                                     MAIN0390
C-----MAIN0391
C                                     MAIN0392
C-----MAIN0393
C                                     MAIN0394
C-----MAIN0395
C                                     MAIN0396
C-----MAIN0397
C                                     MAIN0398
C-----MAIN0399
C-----MAIN0320
C                                     MAIN0321
C                                     MAIN0322
C                                     MAIN0323
C                                     MAIN0324
C                                     MAIN0325
C                                     MAIN0326
C-----MAIN0327
C                                     MAIN0328
C                                     MAIN0329
C                                     MAIN0330
C                                     MAIN0331
C-----MAIN0332
C                                     MAIN0333
C                                     MAIN0334
C-----MAIN0335
C                                     MAIN0336
C-----MAIN0337
C                                     MAIN0338
C-----MAIN0339
C                                     MAIN0340
C-----MAIN0341
C                                     MAIN0342
C-----MAIN0343
C                                     MAIN0344
C-----MAIN0345
C                                     MAIN0346
C-----MAIN0347
C                                     MAIN0348
C-----MAIN0349
C                                     MAIN0350
C-----MAIN0351
C                                     MAIN0352
C-----MAIN0353
C                                     MAIN0354
C-----MAIN0355
C                                     MAIN0356
C-----MAIN0357
C                                     MAIN0358
C-----MAIN0359
C                                     MAIN0360
C-----MAIN0361
C                                     MAIN0362
C-----MAIN0363
C                                     MAIN0364
C-----MAIN0365
C                                     MAIN0366
C-----MAIN0367
C                                     MAIN0368
C-----MAIN0369
C                                     MAIN0370
C-----MAIN0371
C                                     MAIN0372
C-----MAIN0373
C                                     MAIN0374
C-----MAIN0375
C                                     MAIN0376
C-----MAIN0377
C                                     MAIN0378
C-----MAIN0379
C                                     MAIN0380
C-----MAIN0381
C                                     MAIN0382
C-----MAIN0383
C                                     MAIN0384
C-----MAIN0385
C                                     MAIN0386
C-----MAIN0387
C                                     MAIN0388
C-----MAIN0389
C                                     MAIN0390
C-----MAIN0391
C                                     MAIN0392
C-----MAIN0393
C                                     MAIN0394
C-----MAIN0395
C                                     MAIN0396
C-----MAIN0397
C                                     MAIN0398
C-----MAIN0399
```

5. CALCULO E SAIDA DOS RESULTADOS

5A) DESLOCAMENTOS DOS NO'S

```
DO 780 J=1,N
D(J)=0.
DO 780 K=1,N
780 D(J)=D(J)+S(J,K)*AC(K)
```

5B) REACOES DE APOIO

```
19987 NM1=N+1
DO 790 K=NM1,NJ3
AR(K)=-AC(K)
DO 790 J=1,N
790 AR(K)=AR(K)+S(K,J)*D(J)
```

5C) EXPANSÃO DO VETOR DESLOCAMENTO

```
J=NM1
DO 820 JE=NJ3,1,-1
IF(RL(JE)) 810,800,810
800 J=J-1
D(JE)=D(J)
GO TO 820
810 D(JE)=0.
820 CONTINUE
K=N
DO 850 KE=1,NJ3
IF(RL(KE)-1) 840,830,840
830 K=K+1
AR(KE)=AR(K)
GO TO 850
840 AR(KE)=0.
850 CONTINUE
```

5D) IMPRESSAO DOS RESULTADOS

```
WRITE(W,860)
860 FORMAT('1',10(/),36X'RESULTADOS',/36X,10('*'))
WRITE(W,870)
870 FORMAT(6(/),30X,'DESLOCAMENTOS DOS NO'S',/,/,
114X'NO''6X'DESL. 1'12X'DESL. 2'12X'DESL. 3',/)
DO 880 JE=3,NJ3,3
JE3=JE/3
880 WRITE(W,890) JE3,D(JE-2),D(JE-1),D(JE)
890 FORMAT(11X,I5,3X,E14.7,2(5X,E14.7)/)
WRITE(W,900)
900 FORMAT(6(/),32X,'REACOES DE APOIO',/
1/,14X'NO''5X'REACAO 1'11X'REACAO 2'11X'REACAO 3'/)
DO 910 JE=3,NJ3,3
JE3=JE/3
910 WRITE(W,890)JE3,AR(JE-2),AR(JE-1),AR(JE)
IF(MC.EQ.0) GO TO 3003
WRITE(W,920)
920 FORMAT(/,' ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS CURVAS')
WRITE(W,930)
930 FORMAT(/,/,6X'BARRA'4X'AM1'6X'AM2'6X'AM3'6X'AM4'6X'AM5'6X'AM5',/)
```

```
DO 940 K=1,MC
I=IB(K)
IN(1)=3*JJ(I)-2
IN(2)=3*JJ(I)-1
IN(3)=3*JJ(I)
IN(4)=3*JK(I)-2
IN(5)=3*JK(I)-1
IN(6)=3*JK(I)
```

DO 2002 JS=1,6	MAIN0400
DO 2002 II=1,6	MAIN0401
IS=6*(I-1)+II	MAIN0402
2002 SMD(II,JS)=SMDG(IS,JS)	MAIN0403
C	MAIN0404
DO 4052 KT=1,6	MAIN0405
4052 AM(KT)=AML(I,KT)	MAIN0406
CALL AMJ(SMD,D,AM,IN,1)	MAIN0407
C	MAIN0408
940 WRITE(W,950)I,(AM(J),J=1,6)	MAIN0409
950 FORMAT( 4X,15,2X,6(E10.3,1X))	MAIN0410
C	MAIN0411
3003 CONTINUE	MAIN0412
IF(MR)960,990,960	MAIN0413
960 WRITE(W,970)	MAIN0414
970 FORMAT(//,' ESFORCOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS RETAS')	MAIN0415
WRITE(W,930)	MAIN0416
DO 980 K=MC1,M	MAIN0417
I=IB(K)	MAIN0418
C	MAIN0419
CALL RSMD(E,G,IX(I),IY(I),L(I),CX(I),CY(I),SMD,D)	MAIN0420
IN(1)=3*JJ(I)-1	MAIN0421
IN(2)=3*JJ(I)-2	MAIN0422
IN(3)=3*JJ(I)	MAIN0423
IN(4)=3*JK(I)-1	MAIN0424
IN(5)=3*JK(I)-2	MAIN0425
IN(6)=3*JK(I)	MAIN0426
C	MAIN0427
DO 4053 KT=1,6	MAIN0428
4053 AM(KT)=AML(I,KT)	MAIN0429
CALL AMJ(SMD,D,AM,IN,2)	MAIN0430
980 WRITE(W,950)I,(AM(J),J=1,6)	MAIN0431
990 CALL EXIT	MAIN0432
END	MAIN0433

7.6.2 - Listagem da sub-rotina CSMD

SUBROUTINE CSMD(E,G,IX,IY,L,LAMBD,OMEGA,FI,N1,N2,CX,CY,SMD)	CSMD0001
C	CSMD0002
REAL IX,IY,L,LAMBD,N1,N2,SMD(6,6)	CSMD0003
C	CSMD0004
SCH1=G*IX/L	CSMD0005
SCH2=E*IY/L	CSMD0006
SCH3=SCH2/L**2	CSMD0007
C	CSMD0008
S11=SCH1*2.*LAMBD/((LAMBD+1.)+(LAMBD-1.)*SIN(FI)/FI)	CSMD0009
S22=SCH2*2./((1.+LAMBD)+(1.-LAMBD)*SIN(FI)/FI)	CSMD0010
S33=SCH3*FI**2	CSMD0011
AUX1=((-(1.+LAMBD)+(1.-LAMBD)*SIN(FI)/FI)*OMEGA**2/2.+LAMBD)	CSMD0012
S33=S33/AUX1	CSMD0013
SMD(1,1)=CX**2*S11+CY**2*S22+N1**2*S33	CSMD0014
SMD(2,1)=CX*CY*(S22-S11)-N1*N2*S33	CSMD0015
SMD(2,2)=CY**2*S11+CX**2*S22+N2**2*S33	CSMD0016
SMD(3,1)=N1*S33	CSMD0017
SMD(3,2)=-N2*S33	CSMD0018
SMD(3,3)=S33	CSMD0019
SMD(4,1)=-CX**2*S11+CY**2*S22-N1**2*S33	CSMD0020
SMD(4,2)=CX*CY*(S11+S22)+N1*N2*S33	CSMD0021
SMD(4,3)=-SMD(3,1)	CSMD0022
SMD(4,4)=SMD(1,1)	CSMD0023
SMD(5,1)=-SMD(4,2)	CSMD0024
SMD(5,2)=CY**2*S11-CX**2*S22+N2**2*S33	CSMD0025
SMD(5,3)=SMD(3,2)	CSMD0026
SMD(5,4)=-SMD(2,1)	CSMD0027
SMD(5,5)=SMD(2,2)	CSMD0028
SMD(6,1)=-SMD(3,1)	CSMD0029
SMD(6,2)=-SMD(3,2)	CSMD0030
SMD(6,3)=-SMD(3,3)	CSMD0031
SMD(6,4)=SMD(3,1)	CSMD0032
SMD(6,5)=-SMD(3,2)	CSMD0033
SMD(6,6)=SMD(3,3)	CSMD0034
DO 10 M1=1,5	CSMD0035
M2=M1+1	CSMD0036
DO 10 M3=M2,6	CSMD0037
10 SMD(M1,M3)=SMD(M3,M1)	CSMD0038
RETURN	CSMD0039
END	CSMD0040

7.6.3 - Listagem da sub-rotina RSMO

```

SUBROUTINE RSMO(E,G,IX,IY,L,CX,CY,SMD,II)
C
REAL IX,IY,L,SMD(6,6),R(6,6),AUX(6,6)
SCM1=G*IX/L
SCM2=4.*E*IY/L
SCM3=1.5*SCM2/L
SCM4=2.0*SCM3/L
C
SMD(1,1)=SCM1
SMD(1,2)=0.
SMD(1,3)=0.
SMD(1,4)=-SCM1
SMD(1,5)=0.
SMD(1,6)=-SMD(1,3)
C
SMD(2,2)=SCM2
SMD(2,3)=-SCM3
SMD(2,4)=SMD(1,5)
SMD(2,5)=SCM2/2.
SMD(2,6)=-SMD(2,3)
C
SMD(3,3)=SCM4
SMD(3,4)=SMD(1,3)
SMD(3,5)=SMD(2,3)
SMD(3,6)=-SCM4
C
SMD(4,4)=SMD(1,1)
SMD(4,5)=SMD(1,2)
SMD(4,6)=SMD(1,6)
SMD(5,5)=SMD(2,2)
SMD(5,6)=SMD(2,6)
SMD(6,6)=SMD(3,3)
C
DO 10 M1=1,5
M2=M1+1
DO 10 M3=M2,6
10 SMD(M3,M1)=SMD(M1,M3)
IF(II)20,50,20
20 R(2,1)=-1.
R(1,2)=1.
R(3,3)=1.
R(5,4)=-1.
R(4,5)=1.
R(6,6)=1.
C
DO 30 I=1,6
DO 30 J=1,6
AUX(I,J)=0.
DO 30 K=1,6
30 AUX(I,J)=AUX(I,J)+R(K,I)*SMD(K,J)
C
DO 40 I=1,6
DO 40 J=1,6
SMD(I,J)=0.
DO 40 K=1,6
40 SMD(I,J)=SMD(I,J)+AUX(I,K)*R(K,J)
50 RETURN
END
RSMO0001
RSMO0002
RSMO0003
RSMO0004
RSMO0005
RSMO0006
RSMO0007
RSMO0008
RSMO0009
RSMO0010
RSMO0011
RSMO0012
RSMO0013
RSMO0014
RSMO0015
RSMO0016
RSMO0017
RSMO0018
RSMO0019
RSMO0020
RSMO0021
RSMO0022
RSMO0023
RSMO0024
RSMO0025
RSMO0026
RSMO0027
RSMO0028
RSMO0029
RSMO0030
RSMO0031
RSMO0032
RSMO0033
RSMO0034
RSMO0035
RSMO0036
RSMO0037
RSMO0038
RSMO0039
RSMO0040
RSMO0041
RSMO0042
RSMO0043
RSMO0044
RSMO0045
RSMO0046
RSMO0047
RSMO0048
RSMO0049
RSMO0050
RSMO0051
RSMO0052
RSMO0053
RSMO0054
RSMO0055
RSMO0056
RSMO0057
RSMO0058
```

7.6.4 - Listagem da sub-rotina CRIA

```

SUBROUTINE CRIA(N,JJ,JK,RL,CRL,SMD,S)
C
REAL SMD(6,6),S(132,132)
INTEGER RL(132),CRL(132)
C
J1=3*JJ-2
J11=J1
J2=3*JJ-1
J22=J2
J3=3*JJ
J33=J3
K1=3*JK-2
K11=K1
K2=3*JK-1
K22=K2
K3=3*JK
K33=K3
CRIA0001
CRIA0002
CRIA0003
CRIA0004
CRIA0005
CRIA0006
CRIA0007
CRIA0008
CRIA0009
CRIA0010
CRIA0011
CRIA0012
CRIA0013
CRIA0014
CRIA0015
CRIA0016
CRIA0017
```

	IF(RL(J1))10,20,10		CRIA0018
10	J1=N+CRL(J1)		CRIA0019
	GO TO 30		CRIA0020
20	J1=J1-CRL(J1)		CRIA0021
30	IF(RL(J2))40,50,40		CRIA0022
40	J2=N+CRL(J2)		CRIA0023
	GO TO 60		CRIA0024
50	J2=J2-CRL(J2)		CRIA0025
60	IF(RL(J3))70,80,70		CRIA0026
70	J3=N+CRL(J3)		CRIA0027
	GO TO 90		CRIA0028
80	J3=J3-CRL(J3)		CRIA0029
90	IF(RL(K1))100,110,100		CRIA0030
100	K1=N+CRL(K1)		CRIA0031
	GO TO 120		CRIA0032
110	K1=K1-CRL(K1)		CRIA0033
120	IF(RL(K2))	130,140,130	CRIA0034
130	K2=N+CRL(K2)		CRIA0035
	GO TO 150		CRIA0036
140	K2=K2-CRL(K2)		CRIA0037
150	IF(RL(K3))	160,170,160	CRIA0038
160	K3=N+CRL(K3)		CRIA0039
	GO TO 180		CRIA0040
170	K3=K3-CRL(K3)		CRIA0041
C			CRIA0042
C			CRIA0043
C	-----		CRIA0044
C			CRIA0045
C	CONSTRUCAO DA MATRIZ S DA ESTRUTURA		CRIA0046
C	*****		CRIA0047
C	-----		CRIA0048
C			CRIA0049
C			CRIA0050
	180	IF(RL(J11))200,190,200	CRIA0051
	190	S(J1,J1)=S(J1,J1)+SMD(1,1)	CRIA0052
		S(J2,J1)=S(J2,J1)+SMD(2,1)	CRIA0053
		S(J3,J1)=S(J3,J1)+SMD(3,1)	CRIA0054
		S(K1,J1)=SMD(4,1)	CRIA0055
		S(K2,J1)=SMD(5,1)	CRIA0056
		S(K3,J1)=SMD(6,1)	CRIA0057
C			CRIA0058
	200	IF(RL(J22))	220,210,220
	210	S(J1,J2)=S(J1,J2)+SMD(1,2)	CRIA0059
		S(J2,J2)=S(J2,J2)+SMD(2,2)	CRIA0060
		S(J3,J2)=S(J3,J2)+SMD(3,2)	CRIA0061
		S(K1,J2)=SMD(4,2)	CRIA0062
		S(K2,J2)=SMD(5,2)	CRIA0063
		S(K3,J2)=SMD(6,2)	CRIA0064
C			CRIA0065
	220	IF(RL(J33))240,230,240	CRIA0066
	230	S(J1,J3)=S(J1,J3)+SMD(1,3)	CRIA0067
		S(J2,J3)=S(J2,J3)+SMD(2,3)	CRIA0068
		S(J3,J3)=S(J3,J3)+SMD(3,3)	CRIA0069
		S(K1,J3)=SMD(4,3)	CRIA0070
		S(K2,J3)=SMD(5,3)	CRIA0071
		S(K3,J3)=SMD(6,3)	CRIA0072
C			CRIA0073
	240	IF(RL(K11))	260,250,260
	250	S(J1,K1)=SMD(1,4)	CRIA0074
		S(J2,K1)=SMD(2,4)	CRIA0075
		S(J3,K1)=SMD(3,4)	CRIA0076
		S(K1,K1)=S(K1,K1)+SMD(4,4)	CRIA0077
		S(K2,K1)=S(K2,K1)+SMD(5,4)	CRIA0078
		S(K3,K1)=S(K3,K1)+SMD(6,4)	CRIA0079
C			CRIA0080
	260	IF(RL(K22))280,270,280	CRIA0081
	270	S(J1,K2)=SMD(1,5)	CRIA0082
		S(J2,K2)=SMD(2,5)	CRIA0083
		S(J3,K2)=SMD(3,5)	CRIA0084
		S(K1,K2)=S(K1,K2)+SMD(4,5)	CRIA0085
		S(K2,K2)=S(K2,K2)+SMD(5,5)	CRIA0086
		S(K3,K2)=S(K3,K2)+SMD(6,5)	CRIA0087
C			CRIA0088
	280	IF(RL(K33))	300,290,300
	290	S(J1,K3)=SMD(1,6)	CRIA0089
		S(J2,K3)=SMD(2,6)	CRIA0090
		S(J3,K3)=SMD(3,6)	CRIA0091
		S(K1,K3)=S(K1,K3)+SMD(4,6)	CRIA0092
		S(K2,K3)=S(K2,K3)+SMD(5,6)	CRIA0093
		S(K3,K3)=S(K3,K3)+SMD(6,6)	CRIA0094
C			CRIA0095
	300	RETURN	CRIA0096
		END	CRIA0097
			CRIA0098
			CRIA0099
			CRIA0100

7.6.5 - Listagem da sub-rotina AEPC

```

SUBROUTINE AEPC(RHO,LAMBDA,FI,E,IY,TIPOC,Q,TETA,X,D)
C
C   INTEGER TIPOC
C   REAL D(6,6),X(6),LAMBDA,IY
C   TETA=3.14159/180.*TETA
C   A=RHO/(E*IY)
C
C   UML=0.5*(1.+LAMBDA)
C   UNL=0.5*(1.-LAMBDA)
C   UNL4=UNL/2.*SIN(2.*FI)
C
C
C***** OS VALORES D10,D20,E D30 SAO ESCRITOS SEPARADAMENTE
C   PARA CADA CASO DE CARREGAMENTO
C
C   GO TO (10,20,30,40),TIPOC
C----- CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA
C
C   10 B=Q*A*RHO**2
C   D10=B*(UNL*SIN(FI)**2+2.*UML*(COS(FI)-1.)+LAMBDA*FI*SIN(FI))
C   D20=B*(2.*UML*(0.5*FI-SIN(FI))+UNL4+LAMBDA*FI*COS(FI))
C   D30=B*RHO*(UNL*SIN(FI)**2+LAMBDA*(FI*SIN(FI)-0.5*FI**2)+
C   1COS(FI)-1.)
C   GO TO 50
C----- CARGA CONCENTRADA
C
C   20 B=-Q*A*RHO
C   FIL=FI-TETA
C   UNLT=-UNL*SIN(TETA)
C   UMLT= UML*TETA
C
C   D10=B*(UNLT*COS(FI)-LAMBDA*(SIN(FI)-SIN(FIL))+
C   1UMLT*COS(FIL))
C   D20=B*(-UNLT*SIN(FI)+LAMBDA*(COS(FIL)-COS(FI))-
C   1UMLT*SIN(FIL))
C   D30=B*RHO*(UNLT*COS(FI)-LAMBDA*(SIN(FI)-SIN(FIL))+
C   1SIN(TETA)-TETA)+UMLT*COS(FIL))
C   GO TO 50
C----- MOMENTO TORCOR UNIFORME
C
C   30 B=-Q*A*RHO
C   D10=B*(UNL*SIN(FI)**2+COS(FI)-1.)
C   D20=B*(UNL4+UML*FI-SIN(FI))
C   D30=B*RHO*(1.-LAMBDA)*(0.5*SIN(FI)**2+COS(FI)-1.)
C   GO TO 50
C----- MOMENTO TORCOR CONCENTRADO
C
C   40 B=Q*A
C   FIL=FI-TETA
C
C   UNLT=-UNL*SIN(TETA)
C   UMLT= UML*TETA
C-----
C
C   D10=B*(UNLT*COS(FI)+UMLT*COS(FIL))
C   D20=B*(-UNLT*SIN(FI)-UMLT*SIN(FIL))
C   D30=B*RHO*(UNLT*COS(FI)+UMLT*COS(FIL)-LAMBDA*SIN(TETA))
C***** ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO
C
C   50 DO 60 I=1,3
C   60 X(I)=- (D(I,1)*D10+D(I,2)*D20+D(I,3)*D30)
C   X(4)=X(2)*SIN(FI)+X(3)*RHO-(X(1)+X(3)*RHO)*COS(FI)
C   X(5)=- (X(2)*COS(FI)+(X(1)+X(3)*RHO)*SIN(FI))

```

AEPC0001  
 AEPC0002  
 AEPC0003  
 AEPC0004  
 AEPC0005  
 AEPC0006  
 AEPC0007  
 AEPC0008  
 AEPC0009  
 AEPC0010  
 AEPC0011  
 AEPC0012  
 AEPC0013  
 AEPC0014  
 AEPC0015  
 AEPC0016  
 AEPC0017  
 AEPC0018  
 AEPC0019  
 AEPC0020  
 AEPC0021  
 AEPC0022  
 AEPC0023  
 AEPC0024  
 AEPC0025  
 AEPC0026  
 AEPC0027  
 AEPC0028  
 AEPC0029  
 AEPC0030  
 AEPC0031  
 AEPC0032  
 AEPC0033  
 AEPC0034  
 AEPC0035  
 AEPC0036  
 AEPC0037  
 AEPC0038  
 AEPC0039  
 AEPC0040  
 AEPC0041  
 AEPC0042  
 AEPC0043  
 AEPC0044  
 AEPC0045  
 AEPC0046  
 AEPC0047  
 AEPC0048  
 AEPC0049  
 AEPC0050  
 AEPC0051  
 AEPC0052  
 AEPC0053  
 AEPC0054  
 AEPC0055  
 AEPC0056  
 AEPC0057  
 AEPC0058  
 AEPC0059  
 AEPC0060  
 AEPC0061  
 AEPC0062  
 AEPC0063  
 AEPC0064  
 AEPC0065  
 AEPC0066  
 AEPC0067  
 AEPC0068  
 AEPC0069

C	GO TO (70,80,90,100),TIPOC	AEPC0070
C		AEPC0071
C	----- CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA	AEPC0072
C		AEPC0073
	70 C=RHO**2*Q	AEPC0074
	X(4)=X(4)-C*(FI-SIN(FI))	AEPC0075
	X(5)=X(5)+C*(1.-COS(FI))	AEPC0076
	X(6)=RHO*FI*Q-X(3)	AEPC0077
	GO TO 110	AEPC0078
C		AEPC0079
C	----- CARGA CONCENTRADA	AEPC0080
C		AEPC0081
	80 C=Q*RHO	AEPC0082
	X(4)=X(4)-C*(1.-COS(TETA))	AEPC0083
	X(5)=X(5)+C*SIN(TETA)	AEPC0084
	X(6)=Q-X(3)	AEPC0085
	GO TO 110	AEPC0086
C		AEPC0087
C	----- MOMENTO TORCOR DISTRIBUIDO	AEPC0088
C		AEPC0089
	90 C=-Q*RHO	AEPC0090
	X(4)=X(4)+C*SIN(FI)	AEPC0091
	X(5)=X(5)+C*(1.-COS(FI))	AEPC0092
	X(6)=-X(3)	AEPC0093
	GO TO 110	AEPC0094
C		AEPC0095
C	----- MOMENTO TORCOR CONCENTRADO	AEPC0096
C		AEPC0097
	100 X(4)=X(4)-Q*COS(TETA)	AEPC0098
	X(5)=X(5)-Q*SIN(TETA)	AEPC0099
	X(6)=-X(3)	AEPC0100
C		AEPC0101
	110 RETURN	AEPC0102
	END	AEPC0103
		AEPC0104

7.6.6 - Listagem da sub-rotina AEPR

	SUBROUTINE AEPR(L,TIPOC,Q,TETA,X)	AEPR0001
	INTEGER TIPOC	AEPR0002
	REAL L,X(6)	AEPR0003
	GO TO (10,20,30,40),TIPOC	AEPR0004
C		AEPR0005
C	----- CARGA DISTRIBUIDA	AEPR0006
C		AEPR0007
	10 X(1)=0.	AEPR0008
	X(2)=-Q*L*L/12.	AEPR0009
	X(3)=Q*L/2.	AEPR0010
	X(4)=0.	AEPR0011
	X(5)=-X(2)	AEPR0012
	X(6)=X(3)	AEPR0013
	GO TO 50	AEPR0014
C		AEPR0015
C	----- CARGA CONCENTRADA	AEPR0016
C		AEPR0017
	20 X(1)=0.	AEPR0018
	X(2)=-Q*(L-TETA)*TETA**2/L**2	AEPR0019
	X(3)=Q*TETA**2*(3.*L-2.*TETA)/L**3	AEPR0020
	X(4)=0.	AEPR0021
	X(5)=Q*(L-TETA)**2*TETA/L**2	AEPR0022
	X(6)=Q-X(3)	AEPR0023
	GO TO 50	AEPR0024
C		AEPR0025
C	----- TORCOR DISTRIBUIDO	AEPR0026
C		AEPR0027
	30 X(1)=-Q*L/2	AEPR0028
	X(2)=0.	AEPR0029
	X(3)=0.	AEPR0030
	X(4)=X(1)	AEPR0031
	X(5)=0.	AEPR0032
	X(6)=0.	AEPR0033
	GO TO 50	AEPR0034
C		AEPR0035
C	----- TORCOR CONCENTRADO	AEPR0036
C		AEPR0037
	40 X(1)=-Q*TETA/L	AEPR0038
	X(2)=0.	AEPR0039
	X(3)=0.	AEPR0040
	X(4)=-Q*(L-TETA)/L	AEPR0041
	X(5)=0.	AEPR0042
	X(6)=0.	AEPR0043
	50 RETURN	AEPR0044
	END	AEPR0045



7.6.7 - Listagem da sub-rotina AMJ

```

SUBROUTINE AMJ(SMD,D,AM,IN,ITB)
DIMENSION SMD(6,6),D(132),AM(6),IN(6),DD(6)
C
C
DO 40 I=1,6
GO TO (10,20),ITB
10 DD(I)=D(IN(I))
GO TO 40
20 IF(I.EQ.2.OR.I.EQ.5) GO TO 30
DD(I)=D(IN(I))
GO TO 40
30 DD(I)=-D(IN(I))
40 CONTINUE
C
DO 50 J=1,6
DO 50 K=1,6
50 AM(J)=AM(J)+SMD(J,K)*DD(K)
RETURN
END

```

AMJ0001  
AMJ0002  
AMJ0003  
AMJ0004  
AMJ0005  
AMJ0006  
AMJ0007  
AMJ0008  
AMJ0009  
AMJ0010  
AMJ0011  
AMJ0012  
AMJ0013  
AMJ0014  
AMJ0015  
AMJ0016  
AMJ0017  
AMJ0018  
AMJ0019

7.6.8 - Listagem da sub-rotina INV

```

SUBROUTINE INV(AA,N)
DIMENSION AA(132,132),BB(132),C(132),IP(132),IQ(132)
DO 170 K=1,N
T=0.
DO 50 I=K,N
S=0.
DO 10 J=K,N
10 S=S+ABS(AA(I,J))
IF(S)20,240,20
20 DO 40 J=K,N
IF(ABS(AA(I,J))-S*T)40,40,30
30 IP(K)=I
IQ(K)=J
PIVO=AA(I,J)
T=ABS(PIVO/S)
40 CONTINUE
50 CONTINUE
IF(T)60,240,60
60 IF(IP(K)-K)70,90,70
70 DO 80 J=1,N
IPK=IP(K)
Z=AA(IPK,J)
AA(IPK,J)=AA(K,J)
80 AA(K,J)=Z
90 IF(IQ(K)-K)100,120,100
100 IQK=IQ(K)
DO 110 I=1,N
Z=AA(I,IQK)
AA(I,IQK)=AA(I,K)
110 AA(I,K)=Z
120 DO 160 J=1,N
IF(J-K)140,130,140
130 BB(J)=1/PIVO
C(J)=1.
GO TO 150
140 BB(J)=-AA(K,J)/PIVO
C(J)=AA(J,K)
150 AA(K,J)=0.
160 AA(J,K)=0.
DO 170 I=1,N
DO 170 J=1,N
AA(I,J)=AA(I,J)+C(I)*BB(J)
170 CONTINUE
DO 230 KAUX=1,N
K=N-KAUX+1
IF(IP(K)-K)180,200,180
180 DO 190 I=1,N
IPK=IP(K)
Z=AA(I,IPK)
AA(I,IPK)=AA(I,K)
AA(I,K)=Z
190 CONTINUE
200 IF(IQ(K)-K)210,230,210
210 DO 220 J=1,N
IQK=IQ(K)
Z=AA(IQK,J)
AA(IQK,J)=AA(K,J)
AA(K,J)=Z
220 CONTINUE
230 CONTINUE
GO TO 240
240 WRITE(1,250)
250 FORMAT(///5X'PROGRAMA NAO EXECUTADO--MATRIZ SINGULAR'//)
260 RETURN
END

```

INV0001  
INV0002  
INV0003  
INV0004  
INV0005  
INV0006  
INV0007  
INV0008  
INV0009  
INV0010  
INV0011  
INV0012  
INV0013  
INV0014  
INV0015  
INV0016  
INV0017  
INV0018  
INV0019  
INV0020  
INV0021  
INV0022  
INV0023  
INV0024  
INV0025  
INV0026  
INV0027  
INV0028  
INV0029  
INV0030  
INV0031  
INV0032  
INV0033  
INV0034  
INV0035  
INV0036  
INV0037  
INV0038  
INV0039  
INV0040  
INV0041  
INV0042  
INV0043  
INV0044  
INV0045  
INV0046  
INV0047  
INV0048  
INV0049  
INV0050  
INV0051  
INV0052  
INV0053  
INV0054  
INV0055  
INV0056  
INV0057  
INV0058  
INV0059  
INV0060  
INV0061  
INV0062  
INV0063  
INV0064  
INV0065

## CAPÍTULO VIII

### CONCLUSÕES

A utilização de programas de cálculo como o STRESS e o STRUDL para análise eletrônica das vigas contínuas curvas, através da substituição do eixo curvo por um eixo poligonal inscrito sempre se apresentou viável.

Quando se tenta realizar um cálculo aproximado substituindo os tramos por segmentos retos deve-se tomar cuidado na interpretação dos resultados em cada nó, pois o pequeno ângulo formado, embora influa pouco nos momentos fletores, afetam enormemente os momentos torçores mesmo que ocorram pequenas variações do eixo.

Segundo FRANCO<sup>10</sup>, para ângulos centrais pequenos os momentos fletores da estrutura curva são aproximadamente iguais aos que se obtêm calculando, para o mesmo carregamento, uma estrutura de mesma geometria e igualmente vinculada, porém retificada. Para ângulos da ordem de 30°, comenta o autor, o erro cometido é da ordem de 3%, porém este erro salta para ~ 10% quando atingimos ângulos de 60°.

O trabalho ora apresentado, desenvolvendo um processo exato de cálculo, atinge, sem restrições a todos os casos que se apresentam.

Observando-se os resultados dos exemplos do capítulo VI nota-se que o equilíbrio dos nós é atingido, com grande precisão.

O programa apresentado é eficiente, principalmente pela facilidade de fornecimento de dados e interpretação dos resultados, baseada principalmente no sistema de coordenadas polares adotado.

O exemplo 1 comparado com os resultados obtidos pelos autores REDDY & TUMA<sup>2</sup>, que também calculam, embora manualmente, a estrutura em Anel sobre 3 apoios, mostra que o programa chega, com exatidão, aos mesmos valores para os hiperestáticos.

Pode-se perceber, claramente, que a viabilidade de se usar o PROGRAMA FORTRAN, ora apresentado, dependerá do equipamento utilizado. Admitindo-se que o Calculista tenha acesso a um computador que permita o armazenamento de todos os parâmetros envolvidos, não haverá maiores problemas a não ser o adequamento de dimensões às variáveis indexadas.

Quanto à precisão dos resultados encontrados, voltamos à frisar, pelas comparações feitas ao longo do trabalho, concluimos que

são excelentes.

A utilidade do programa é grande uma vez que se aplica a to das as grelhas de simetria polar, a coberturas de projeção circular com eixos curvos, vigas contínuas curvas, etc.

Espera-se ter contribuído para a resolução de estruturas desses tipos, e temos fé que este trabalho servirá como primeiro passo para outros.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - TUNEU, H.F. e LICHTENSTEIN - "Cálculo de Vigas Circulares Cargas Normalmente a su Plano". XV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Porto Alegre, 1971, Vol.II, pp 911-952.
- 2 - REDDY, M.N. e TUMA, J.J. - "Analysis of Laterally Loaded Continuous Curved Beams". Jnl. Structural Div., ASCE, Vol.93, nº ST1, Fev.1967 pp 495-513.
- 3 - VELUTINI, B. - "Analysis of Continuous Circular Beams", Jnl. A.C.I. Vol. 22, nº 47, Nov. 1950, pp 217 - 228.
- 4 - SHORE, S.; ALI, S.A. e WILSON, J.L. - "Preliminary Design of Horizontally Curved Highway Bridges", IV Pan American Symposium of Structures, Buenos Aires, 1970, Vol. VIII, pp 193 - 233.
- 5 - TUNEU, H.F. - "Resolución Analógica de Estructuras Planas Cargas Transversalmente a su Plano" - XV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Porto Alegre, 1971, Vol.II, pp 883 - 907.
- 6 - WEAVER, W.Jr. e GERE, J.M. - "Analysis of Framed Structures" Van Nostrand Company Inc, Princeton - New Jersey, 1967.
- 7 - RUBINSTEIN, M.F. - "Matrix Computer Analysis of Structures". Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1966
- 8 - VREDEN, WERNER - "Curved Continuous Beams For Highway Bridges" , Frederick Ungar Publishing Co. - New York, 1969.
- 9 - ENGEL, SAMUEL - "Structural Analysis of Circular Beams", Journal of the Structural Division, Fev. 1967, pag 221.
- 10 - FRANCO, MARIO - "Análise Estática das Pontes Curvas", Resumo das aulas ministradas pelo Autor em 1975 na disciplina de pós-graduação "Atualização do Cálculo das Estruturas de Concreto Armado" , EESC-USP, 1975.
- 11 - BLASZKOWIAK, S. & KACZKOWSKI, Z. - " Iterative Methods in Structural Analysis", Pergamon Press Ltda - Londres, 1966.
- 12 - O'CONNOR, COLIN - "Pontes - Superestruturas", Vol. 2 - Editora da USP / Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1976.
- 13 - FICKEL, H.H. - "Analysis of Curved Girders" - Jnl of Structural Division - A.S.C.E. - ST 7 - Setembro, 1959.