

EEEC
24

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

DIFERENÇAS FINITAS NO
CÁLCULO VARIACIONAL DE
CASCAS CILINDRICAS
CIRCULARES

ENG.º DURVAL MAKOTO AKAMATU

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1978

**DIFERENÇAS FINITAS NO CÁLCULO VARIACIONAL
DE CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES**

ENG. DURVAL MAKOTO AKAMATU

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

ORIENTADOR

Prof. Dr. Dante A. O. Martinelli



BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dante A. O. Martinelli

Prof. Dr. Dante Guelpa

Prof. Dr. Ilio Montanari

SUPLENTES

Prof. Dr. Odelar L. Linhares

Prof. Dr. Roberto L. A. Barbato

DEDALUS - Acervo - EESC



31100013432

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, esposa e filhas, pela compreensão e apoio de meus afastamentos espirituais, de seu agradável convívio, para estudos.

Ao Prof. Dr. Dante A.O. Martinelli, pela orientação, entusiasmo e dedicação especial para comigo, que contribuíram diretamente para a composição desta dissertação.

Aos Professores Arthur João Catto e Cláudio Kirner, respectivamente ex-chefe e atual chefe do Departamento de Computação e Estatística da UFSCar, pelas facilidades concedidas para o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Artur Darezzo Filho, pela assessoria na parte de cálculo numérico.

A Srta. Maria José Gualtieri e à Sra. Fátima Aparecida Góes Costa, pelo excelente trabalho de datilografia.

Aos Srs. Antonio Alves Pereira, Willian Cordeballo, Rodolfo Alves Scanavini e Dormélia Pereira Casela, pelos serviços de processamento de dados.

À Universidade Federal de São Carlos que propiciou o desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Computação e Estatística, Divisão de Computação da UFSCar, do Departamento de Estruturas da EESCUSP, que de uma forma ou de outra contribuíram para a elaboração da dissertação.

SUMÁRIO

Apresenta-se uma aplicação de diferenças finitas, obtidas por meio de polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos de segundo e de quarto grau, ao cálculo variacional de cascas cilíndricas circulares.

No capítulo 1, apresenta-se a formulação variacional de cascas cilíndricas circulares, onde se recordam também as noções mais importantes da teoria linear da elasticidade e dos princípios variacionais, que interessam ao desenvolvimento dessa formulação.

No capítulo 2, apresentam-se o resumo da teoria das diferenças finitas e a correspondente obtenção das *expressões de derivadas* utilizadas no trabalho.

No capítulo 3, apresentam-se os ensaios de aferição, onde se procura averiguar a qualidade de algumas possíveis aproximações de cálculo de cascas cilíndricas circulares, com diferenças finitas tomando como o padrão, o clássico reservatório cilíndrico circular. Inclusive, fornecer alguns subsídios para elaboração desses tipos de ensaios.

No capítulo 4, apresenta-se a aplicação propriamente dita das diferenças finitas ao cálculo de cascas cilíndricas circulares, particularizando-a para o caso de casca de bordas verticais e horizontais, livre na borda superior e engastada nas outras três.

No capítulo 5, apresentam-se as conclusões.

Finalmente, no capítulo 6, apresenta-se a documentação resumida dos programas utilizados para todas as experimentações numéricas feitas neste trabalho.

ABSTRACT

This work presents an application of the finite difference method to the variational calculus of circular cylindrical shells, obtained through Lagrangean and Hermitian interpolating polynomials of second and fourth degrees.

Chapter 1 contains the variational formulation of circular cylindrical shells, and a review of the most important notions of the linear theory of elasticity and variational principles. Both are important to the understanding of the present formulation.

Chapter 2 contains a brief review of the theory of finite difference and the corresponding procedures for the derivative expressions used in this work.

Chapter 3 contains the results of tests of the efficiency cylindrical shells computation. Tests were performed comparing finite differences and analytical results for the classical cylindrical reservoir. It includes also hints for the implementation of those tests.

Chapter 4 shows first the general application of the finite difference method to the calculation of circular cylindrical shells, then, a through application is shown, up to numerical results, to the case of a circular cylindrical shells with parallel edges, one free and three built-in.

Conclusions are given in chapter 5.

Finally, in chapter 6, a short documentation of computer programs used for the numerical calculations is given.

APRESENTAÇÃO

Sabe-se que os problemas de engenharia de estruturas laminares podem ser descritos por meio da Teoria da Elasticidade. Isto porque, praticamente todos os materiais empregados nas estruturas têm a propriedade da elasticidade, linear ou não. Além disso, sabe-se também que a solução de problemas descritos por meio dessa teoria, geralmente, envolve complicadas manipulações matemáticas. Por isso, têm-se desenvolvido teorias que visam a simplificação de descrição de problemas desse tipo, mediante as formas geométricas e de carregamento da estrutura, por meio de hipóteses. Por exemplo, a Teoria das Placas Delgadas, a Teoria das Cascas Delgadas, etc. Porém, ainda por meio dessas teorias, a solução analítica é razoavelmente complicada. Por isso, têm-se desenvolvido, métodos numéricos para a solução de problemas, cuja solução analítica é bastante complicada, ou até impossível. Todavia, esses métodos requerem, geralmente, grande quantidade de cálculo numérico, que com o advento do computador digital, se tornou secundário.

Dentre, os vários métodos numéricos existentes, interessa ao presente trabalho o método que substitue as derivadas da equação ou equações diferenciais, que rege o problema, por expressões em diferenças finitas obtidas por meio de polinômios interpoladores Lagrangeanos ou Hermitianos do segundo e do quarto grau.

Para o equacionamento do problema escolheu-se o método da energia, mais especificamente o processo da formulação variacional baseado no princípio da mínima energia potencial total, por motivos que serão posteriormente justificados. Neste, em vez de estabelecer as equações de equilíbrio, as condições de contorno e as equações de compatibilidade (caso as equações de equilíbrio não sejam expressas em função dos deslocamentos), para depois resolver o siste

ma formado por essas equações e condições (é o que se faria por meio daqueles métodos, diga-se clássicos da Teoria da Elasticidade), estabelece-se, primeiramente, o funcional dos deslocamentos — forma auto adjunta de expressar as equações de equilíbrio do problema e as condições de contorno. Em seguida, minimiza-se esse funcional em relação aos deslocamentos o que, pelo princípio da mínima energia potencial total, permite determiná-los.

Com esse processo, desenvolvem-se duas discretizações de cálculo dos deslocamentos de cascas cilíndricas circulares engastadas segundo duas geratrizes e uma diretriz, e livre segundo outra diretriz. Nas discretizações empregam-se expressões em diferenças finitas obtidas por meio de polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do segundo grau, para expressar as derivadas que aparecem tanto no funcional que rege o problema como também para aquelas que aparecem nas expressões das condições de contorno. Posteriormente, desenvolvem-se discretizações do cálculo dos esforços (os mais importantes) e das rotações, também mediante emprego de diferenças finitas obtidas por meio de polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos, agora, de segundo ou de quarto grau, conforme as conclusões obtidas dos Ensaios de Aferição que serão feitas, naturalmente, antes dessas discretizações.

Escolheu-se o processo da formulação variacional, por apresentar a grande vantagem de se necessitar satisfazer somente as condições de contorno essenciais, quando impostas, diretamente, nas expressões em diferenças finitas que substituirão as derivadas do funcional. Além disso, de obter sistema de equações lineares simétrico positivo definido, ao se discretizar o funcional que rege o problema.

As condições de contorno essenciais, que são as necessárias à boa convergência do processo utilizado, são somente aquelas referentes aos engastamentos, por o processo ser o dos deslocamentos.

Feita essa introdução, define-se a seguir o que es

pecificamente se pretende com o presente trabalho:

- a) Aplicar as duas discretizações, anteriormente citadas, para o cálculo dos deslocamentos do clássico reservatório cilíndrico circular com parede de espessura constante, perfeitamente engastada em sua base, para aferição da qualidade dos resultados que se obtém. Ensaiar, ainda por meio desse padrão adotado, algumas possibilidades de discretizações de cálculo de esforços e rotações, ainda com o emprego de expressões em diferenças finitas de derivadas, obtidas por meio de polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do segundo e do quarto grau.
- b) Apresentar, para a casca com três bordas engastadas e uma livre, duas discretizações do cálculo dos esforços mais importantes e das rotações, consideradas as melhores em função dos Ensaios de Aferição do item (a).
- c) Apresentar os programas para o computador HP2100A, utilizados nos cálculos numéricos dos itens (a) e (b).

Para tanto, desenvolve-se no capítulo 1 a formulação variacional de problemas de cascas cilíndricas circulares e recordam-se as noções mais importantes para essa formulação: o/resumo da teoria linear da elasticidade, pois neste trabalho admite-se que essas cascas sejam feitas com materiais elásticos de acordo com a lei de Hooke, e os princípios variacionais (princípio dos deslocamentos virtuais e princípio da mínima energia potencial total).

Em seguida, no capítulo 2, apresentam-se a teoria das diferenças finitas (resumidamente) e a correspondente obtenção das expressões de derivadas necessárias aos capítulos 3 e 4.

No capítulo 3, apresentam-se os ensaios de aferição, já indicadas no item (a). Neste capítulo os resultados vão sendo analisados à medida que são apresentados.

No capítulo 4, apresenta-se a aplicação já indica
da em (b), cujos resultados são analisados no capítulo se
guinte.

No capítulo 5, resumem-se as principais conclusões
das experimentações numéricas feitas nos capítulos 3 e 4, e
citam-se pontos que parecem merecer alguma consideração.

Finalmente, no capítulo 6, apresenta-se a documen
tação resumida dos programas utilizados para os cálculos nu
méricos envolvidos no trabalho.

Para os cálculos numéricos foi utilizado o computa
dor HP2100A, com 32k palavras de 16 bits de memória princi
pal e memória auxiliar de disco magnético. A precisão pa
drão deste computador é de aproximadamente 7 dígitos signi
ficativos, na representação em ponto flutuante de números.

BIBLIOGRAFIA

No texto, as referências bibliográficas serão sempre indicadas pelo sobrenome do autor ou autores, seguido pelo ano da publicação da primeira edição.

As referências indicadas com asterisco são as que foram consultadas para o desenvolvimento do trabalho, porém que não foram explicitamente citadas no texto.

- 1 - BELLUZZI, O. (1957) - *Ciencia de La Construccion*. Madrid, Aguilar, c1970. Vol.3.
- 2 - BILLINGTON, D.P. (1967) - *Thin Shell Concrete Structures*. New York, McGraw-Hill, c1967. (*).
- 3 - BREBBIA, C. & CONNOR, J.J. (1973) - *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineer*. London, Butterworth & Co.ltd., c1973.
- 4 - DEBS, M.K.E. (1976) - *Contribuição ao Cálculo das Cascas de Revolução mediante Diferenças Finitas*. Dissertação de mestrado. Publicação EESCUSP.
- 5 - FORSYTHE, G.E. & WASOW, W.R. (1960) - *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. New York, John Wiley & Sons, Inc., c1960. (*).
- 6 - FLÜGGE, W. (1960) - *Stresses in Shells*. 2ª edição. New York, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, c1973.
- 7 - GIBSON, J.E. (1960) - *Linear Elastic Theory of Thin Shells*. Pergamon Press, c1960. (*).

- 8 - KETTER, R.L. & PRAWELL Jr., S.P. (1969) - *Modern Methods of Engineering Computation*. New York, McGraw-Hill, c1969. (*).
- 9 - MARTINELLI, D.A.O. (1970) - *Relatório do Estágio na Escola Politécnica Federal de Zurique*. Laboratório de Estruturas, EESCUSP.
- 10 - PRZEMIENIECKI, J.S. (1968) - *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York, McGraw-Hill, c1968. (*).
- 11 - RAMASWAMY, G.S. (1968) - *Design and Construction of Concrete Shells Roofs*. New York, McGraw-Hill, c1968. (*).
- 12 - SALVADORI, M.G. & BARON, M.L. (1952) - *Métodos Numéricos en Ingenieria*. Mexico, Continental, c1961.
- 13 - STIEFEL, E.L. (1963) - *An Introduction to Numerical Mathematics*. New York, Academic Press, c1963. (*).
- 14 - TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. (1934) - *Theory of Elasticity*. 2.^a edição. New York, McGraw-Hill, c1970.
- 15 - TIMOSHENKO, S. & KRIEGER, S.W. (1940) - *Theory of Plates and Shells*. 2.^a edição. New York, McGraw-Hill, c1957. (*).
- 16 - TOTTENHAN, H. & BREBBIA, C. (1970) - *Finite Elements Techniques in Structural Mechanics*. London, Hoobs the Printers ltd., c1970. (*).
- 17 - YOUNG, D.M. & GREGORY, R.T. (1972) - *A Survey of Numerical Mathematics*. New York, Addison-Wesley Publishing Co., c1972.

NOTAÇÃO

Em princípio, as variáveis, matrizes e outras grandezas a utilizar serão definidas ou identificadas à medida que aparecerem no desenvolvimento do texto. Não serão representadas aqui no início, as notações comumente empregadas para certas grandezas em textos clássicos conhecidos.

Resta definir alguns símbolos tais como:

[] matriz quadrada

{ } matriz linha ou coluna. Quando não explicitada todos os elementos da matriz, indicará sempre matriz linha.

T como expoente indicará transposta da matriz.

ÍNDICE

	Pág.
1.0 - Formulação Variacional de Cascas Cilíndricas Circulares	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Resumo da Teoria Linear da Elasticidade	3
1.2.1 - Estado de Tensões	3
1.2.2 - Condições de Contorno de Tensões	4
1.2.3 - Estado de Deformação	4
1.2.4 - Condições de Compatibilidade	5
1.2.5 - Condições de Contorno dos Deslocamentos	6
1.2.6 - Relações entre Tensão e Deformação	6
1.3 - Princípios Variacionais	10
1.3.1 - Princípio dos Deslocamentos Virtuais	10
1.3.2 - Princípio da Mínima Energia Potencial	12
1.4 - Teoria das Cascas	17
1.4.1 - Definições	17
1.4.1.1 - Definição de Casca	17
1.4.1.2 - Esforços Solicitantes	17
1.4.2 - Deformações em Cascas Cilíndricas Circulares	23
1.4.2.1 - Relações entre Deslocamentos e Deformações	24
1.4.2.2 - Expressões dos Esforços Solicitantes como função dos Deslocamentos e suas Derivadas	30
1.5 - Energia de Deformação de Cascas Cilíndricas Circulares com Espessura Constante	34
1.5.1 - Energia de Deformação em Função das Deformações num Ponto Genérico	34
1.5.2 - Energia de Deformação em Função dos Deslocamentos da Superfície Média	35
1.6 - Formulação pelo Princípio da Mínima Energia Potencial Total	39

2.0 - Diferenças Finitas	40
2.1 - Introdução	40
2.2 - Interpolação e Derivação	42
2.2.1 - Interpolação de Lagrange	42
2.2.1.1 - Fórmula de Interpolação de Lagrange	42
2.2.1.2 - Método dos Coeficientes Indeterminados	43
2.2.1.3 - Convergência e Precisão da Interpolação Lagrangeana	45
2.2.2 - Interpolação Hermitiana	48
2.2.3 - Fórmulas de Derivação	50
2.3 - Deduções de Expressões em Diferenças Finitas de Derivadas	55
2.3.1 - Expressões de Derivadas obtidas por Polinômios Interpoladores do Segundo Grau	56
2.3.1.1 - Expressões sem Condições de Contorno	56
2.3.1.2 - Expressões com as Condições de Contorno Usuais de Engastamento	56
2.3.1.3 - Expressões com as Condições de Contorno de Stiefengaste	57
2.3.2 - Expressões de Derivadas obtidas por Polinômios Interpoladores do Quarto Grau	59
2.3.2.1 - Expressões sem Condições de Contorno	59
2.3.2.2 - Expressões com as Condições de Contorno Usuais de Engastamento	61
2.3.2.3 - Expressões com as Condições de Contorno de Stiefengaste	62
2.3.3 - Resumo das Expressões em Diferenças Finitas obtidas com o Emprego de Polinômios Interpoladores do Segundo e do Quarto Grau	65
2.3.3.1 - Expressões obtidas com o Emprego de Polinômio Interpolador do Segundo	

gundo Grau	66
2.3.3.2 - Expressões obtidas com o Emprego de Polinômio Interpolador do Quar to Grau	69
3.0 - Ensaio de Aferição: Discretizações do Cálcu lo Variacional de Reservatório Cilíndrico Cir cular	72
3.1 - Introdução	72
3.2 - Padrão: Solução Analítica do Reservatório Ci lindrico de Espessura Constante	76
3.2.1 - Expressões Fundamentais	77
3.3 - Aproximação Variacional com Polinômios In terpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do Segundo e do Quarto Grau, sobre Nodulação Habitual	87
3.3.1 - Formulação Variacional do Problema	88
3.3.2 - Discretização do Problema	90
3.3.2.1 - Condições de Contorno	90
3.3.2.2 - Aproximação do Cálculo da Energia	91
3.3.2.3 - Sistema de Equações Minimizantes	92
3.3.3 - Expressões e Cálculos das Rotações, Mo mentos e Forças Normais	95
3.3.3.1 - Formulação com PI-2, sem Condicio namento algum Explícito à Rotação no Engastamento	95
3.3.3.2 - Formulação com PI-4, sem Condicio namento algum Explícito à Rotação no Engastamento	98
3.3.3.3 - Formulação com PI-2, impondo Rota ção Nula no Engastamento	99
3.3.3.4 - Formulação com PI-4, impondo Rota ção Nula no Engastamento	101
3.4 - Aproximação Variacional com Polinômios In terpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do Segundo e do Quarto Grau, sobre Nodulação "Dual",	103

3.4.1 - Formulação Variacional e Discretização do Problema	104
3.4.1.1 - Condições de Contorno	105
3.4.1.2 - Aproximação do Cálculo da Energia	105
3.4.1.3 - Sistema de Equações Minimizantes	107
3.4.2 - Expressões e Cálculos das Rotações, Momentos e Forças Normais	109
3.4.2.1 - Formulação com PI-2, sem Condicionamento algum Explícito à Rotação no Engastamento	110
3.4.2.2 - Formulação com PI-4, sem Condicionamento algum Explícito à Rotação no Engastamento	111
3.4.2.3 - Formulação com PI-2, impondo a condição de Stiefengaste	111
3.4.2.4 - Formulação com PI-4, impondo a condição de Stiefengaste	113
3.5 - Apresentação e Análise dos Resultados	115
3.5.1 - Momentos M_x Aproximados com Rede Habitual	117
3.5.2 - Rotações ψ Aproximadas com Rede Habitual	133
3.5.3 - Momentos M_x Aproximados com Rede "Dual"	146
3.5.4 - Rotações ψ Aproximadas com Rede "Dual"	156
3.5.5 - Deslocamentos w Aproximados com Rede Habitual e Dual	168
3.6 - Conclusões dos Ensaios	195
3.6.1 - Conclusões a Respeito das Discretizações do Cálculo dos Deslocamentos	196
3.6.2 - Conclusões a Respeito das Aproximações do Cálculo dos Esforços M_x e Rotações ψ com Rede Habitual	196
3.6.3 - Conclusões a Respeito das Aproximações do Cálculo dos Esforços M_x e Rotações ψ com Rede Dual	197
3.6.4 - Comparação entre Aproximações com Rede Habitual e Dual	198

3.6.5 - Algumas Sugestões	199
3.6.5.1 - Correção de Valores de M_x	199
3.6.5.2 - Extrapolações de Richardson	204
3.6.5.3 - Obtenção da Força Cortante	207
3.6.5.4 - Ensaio Suplementares	211
4.0 - Aplicação das Diferenças Finitas ao Cálculo Variacional das Cascas Cilíndricas Circulares	231
4.1 - Introdução	231
4.2 - Casc Particular Considerado	233
4.3 - Discretização do Problema com Redes v e w superpostas	235
4.3.1 - Condições de Contorno	238
4.3.2 - Aproximação do Cálculo da Energia	239
4.3.3 - Sistema de Equações Minimizantes	243
4.3.4 - Expressões das Rotações e Esforços, e Cálculo com PI-2, impondo Rotação Nula no Engastamento	271
4.4 - Discretização do Problema com Redes Duais	277
4.4.1 - Condições de Contorno	279
4.4.2 - Aproximação do Cálculo da Energia	281
4.4.3 - Sistema de Equações Minimizantes	282
4.4.4 - Expressões das Rotações e Esforços, e Cálculo com PI-4, sem a imposição de Rotação Nula no Engastamento	300
5.0 - Considerações Finais	329
6.0 - Documentação dos Programas para o HP2100A	333
6.1 - Introdução	333
6.2 - Documentação dos Programas CANAL, EARH e EARD	337
6.2.1 - Programa CANAL	337
6.2.2 - Programa EARH	341
6.2.3 - Programa EARD	354

6.3 - Documentação dos Programas	
CALW, EARHW, EARDW, IMPW, CWLHA,	
CMXHA, CWLDU e CMXDU	361
6.3.1 - Programa CALW	361
6.3.2 - Programa EARHW	363
6.3.3 - Programa EARDW	364
6.3.4 - Programa IMPW	365
6.3.5 - Programa CWLHA	366
6.3.6 - Programa CMXHA	368
6.3.7 - Programa CWLDU	370
6.3.8 - Programa CMXDU	372
6.4 - Documentação dos Programas	
GERA, CALWV, LISTE, ESFRO	374
6.4.1 - Programa GERA	374
6.4.2 - Programa CALWV	391
6.4.3 - Programa LISTE	395
6.4.4 - Programa ESFRO	396

1.0 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

1.1 - INTRODUÇÃO

A formulação variacional se aplica a diversos tipos de problemas, porém a preocupação é aqui de desenvolvê-la apenas para estruturas elásticas. Mais especificamente para cascas cilíndricas circulares, para as quais se admitem relações lineares entre tensões e deformações (lei de Hooke).

Essa formulação, como diz o próprio nome, se baseia em certos princípios variacionais. Por isso citam-se, primeiramente, os princípios variacionais (segundo BREBBIA e CONNORS, 1973) a serem utilizados no presente trabalho, iniciando-se pelo resumo da teoria linear da elasticidade (ainda seguindo aqueles autores, bem como TIMOSHENKO e GOODIER, 1934), a fim de fornecer uma rápida referência dessa teoria para o desenvolvimento desta formulação. A seguir ci

ta-se também resumidamente a teoria das cascas (seguindo FLÜGGE, 1960), onde se apresentam somente as definições de cascas, forças e momentos (esforços solicitantes) que atuam num elemento genérico de casca e, o estudo das deformações de cascas cilíndricas circulares. Finalmente, desenvolve-se a formulação variacional para o caso específico já dito, até à determinação do funcional que rege o problema.

Cabe ainda uma observação sobre o resumo da teoria linear da elasticidade e as descrições dos princípios variacionais. Apesar de se ter entrado em detalhes em alguns pontos destes assuntos, por achá-los relevantes, seguiu-se a notação tensorial e de matrizes com o intuito de apresentá-los numa forma compacta, uma vez que eles têm apenas a pretensão de servir de base de informações, para o objetivo principal deste capítulo. Porém, preferiu-se daí por diante, seguir a nomenclatura mais comum, visando beneficiar a clareza das exposições dos assuntos que as seguem.

1.2 - RESUMO DA TEORIA LINEAR DA ELASTICIDADE

A teoria linear da elasticidade é baseada nas seguintes hipóteses:

- (1) Os deslocamentos e deformações são pequenos
- (2) O material é elástico de acordo com a lei de Hooke.

1.2.1 - Estado de Tensões

O estado de tensões em um ponto do corpo é definido pelo tensor de tensões (veja figura 1.1).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

onde $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. (1.2)

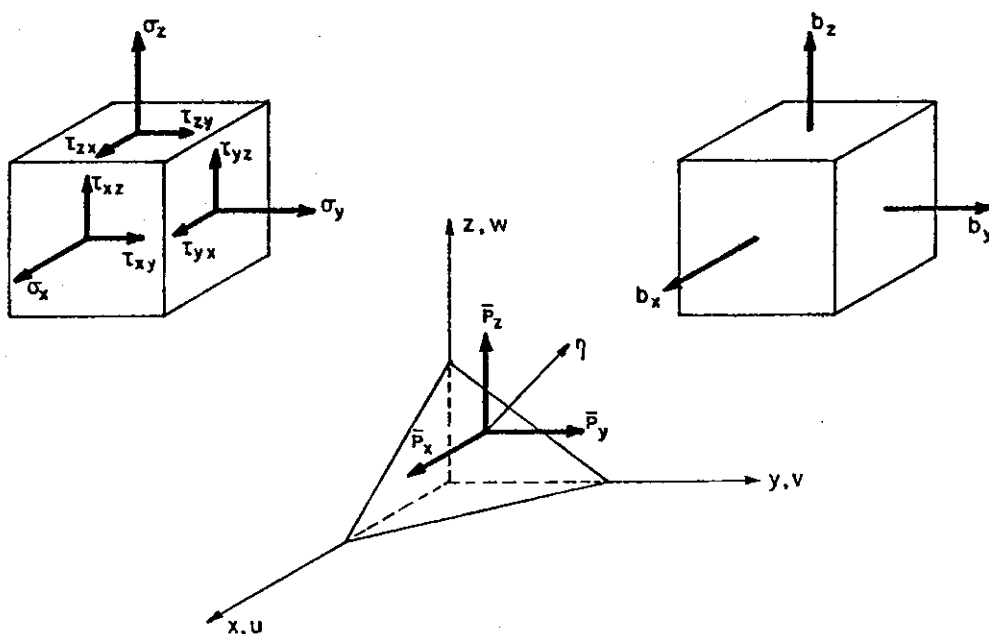


Figura 1.1 - Notação de força, tensão e deformação

As componentes das tensões devem satisfazer as seguintes equações de equilíbrio em qualquer ponto do interior do corpo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0\end{aligned}\quad (1.3a-c)$$

onde b_x , b_y e b_z são as forças de massa por unidade de volume.

1.2.2 - Condições de Contorno de Tensões

As componentes da força de superfície por unidade de área que atuam sobre a superfície S_σ são denotadas por \bar{p}_x , \bar{p}_y , \bar{p}_z . As forças de equilíbrio no contorno necessitam que

$$\begin{aligned}p_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \bar{p}_x \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = \bar{p}_y \\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \bar{p}_z\end{aligned}\quad (1.4a-c)$$

onde l , m e n são os cossenos diretores dados por:

$$l = \cos(\eta, x), \quad m = \cos(\eta, y), \quad n = \cos(\eta, z) \quad (1.5a-c)$$

1.2.3 - Estado de Deformação

O estado de deformação em um ponto é definido pelo tensor de deformação

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

As relações entre deslocamentos e deformações pela hipótese (1) (que leva a relações lineares e também permite que as equações de equilíbrio se apliquem a corpos indeformados) são:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad (1.7a-f) \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad . \end{aligned}$$

1.2.4 - Condições de Compatibilidade

Note-se que as 6 (seis) componentes de deformação para cada ponto são completamente determinadas pelas 3 (três) funções u , v , w , que representam as componentes de deslocamentos. Consequentemente, as componentes de deformação não podem ser tomadas arbitrariamente como funções de x , y e z , pois elas estão sujeitas às relações (1.7a-f). Assim, obtém-se 6 (seis) novas relações denominadas de condições de compatibilidade

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (1.8a-b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

(1.8c-f)

1.2.5 - Condições de Contorno (continuidade) dos Deslocamentos

As restrições quanto aos deslocamentos, admitindo que S_u denote o contorno (superfície) onde eles têm valores fixos, são:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} \quad \text{sobre } S_u \quad (1.9a-c)$$

onde \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} são os valores fixos. Note-se que a superfície total S do corpo é igual a soma de S_u e S_σ ($S = S_u + S_\sigma$).

1.2.6 - Relações entre Tensão e Deformação

As relações entre tensão e deformação para materiais que seguem a lei de Hooke (hipótese 2) são:

$$\{\epsilon\}^T = [C] \{\sigma\}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & \text{simétrico} & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

onde c_i , são as constantes elásticas do material.

Pode-se também expressar a forma inversa de (1.10)

como:

$$\{\sigma\}^T = [D]\{\epsilon\}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ & & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ & & & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ & & & & d_{55} & d_{56} \\ & \text{simétrico} & & & & d_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

e a matriz $[D]$ é denominada de matriz de rigidez do material.

Portanto, existem 21 constantes de material para material elástico. Esta quantidade de constantes independentes se reduz quando a estrutura do material tem um ou mais planos de simetria. Por exemplo, se o material é ortotrópico, isto é, tem três planos ortogonais de simetria, a equação (1.10) se reduz a:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & \text{simétrico} & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

onde os planos de simetria do material são $x-y$, $x-z$ e $y-z$. As relações inversas são semelhantes a esta forma.

Um material isotrópico tem apenas duas constantes independentes. Por definição, a forma das relações entre tensão e deformação é invariante, isto é, independe da escolha do sistema de referência. A forma de (1.11), é:

$$\{\sigma\}^T = [D]\{\epsilon\}^T \quad (1.13)$$

$$[D] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simétrico} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

onde E e ν são respectivamente o módulo de Young e a constante de Poisson.

As relações inversas são geralmente escritas como:

$$\{\epsilon\}^T = [C]\{\sigma\}^T \quad (1.14)$$

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \text{simétrico} & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

As relações (1.13) e (1.14), podem também ser expressas em termos das constantes de Lamé (λ , μ) as quais relacionam E e ν da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (1.15a-b)$$

O conjunto completo das equações para corpos elásticos consiste de três equações de equilíbrio, seis relações entre deslocamento e deformação, seis relações entre tensão e deformação e as condições de contorno de tensões e de continuidade dos deslocamentos. As incógnitas são os três deslocamentos, as seis tensões e as seis deformações. As deformações podem ser eliminadas combinando as relações entre deslocamento-deformação e entre deformação-tensão.

A seguir passa-se à descrição dos princípios variacionais relevantes à formulação variacional desenvolvida neste item.

1.3 - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

1.3.1 - Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Considere-se um corpo em equilíbrio sob os carregamentos b_x, \dots, \bar{p}_z e tensões $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$. Agora imagine-se o corpo deslocado da posição de equilíbrio e admita que $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, definem os deslocamentos virtuais nas direções x, y e z , respectivamente (veja figura 1.1).

Se a posição inicial é uma posição de equilíbrio, o trabalho de primeira ordem δW_E realizado pelas forças externas é igual ao trabalho de primeira ordem δW_D realizado pelas tensões durante os deslocamentos virtuais:

$$\delta W_E = \delta W_D \quad \text{para quaisquer } \Delta u, \Delta v, \Delta w. \quad (1.16)$$

Esta equação exprime o *Princípio dos Deslocamentos Virtuais*. É outra maneira de expressar as condições de equilíbrio. Independe do comportamento do material e da magnitude dos deslocamentos, isto é, vale para deformação não linear e materiais com qualquer comportamento.

A forma tridimensional da (1.16) é:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\text{volume}} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ & \quad + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\text{volume}} (b_x \Delta u + b_y \Delta v + b_z \Delta w) dx dy dz + \\ & + \iiint_{S_\sigma} (\bar{p}_x \Delta u + \bar{p}_y \Delta v + \bar{p}_z \Delta w) dS \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde $\delta \epsilon$ e $\delta \gamma$ são os incrementos de primeira ordem das deformações provocados pelos deslocamentos virtuais. Para o caso linear (elasticidade linear), se reduzem a:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} \Delta u, \quad \delta \epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} \Delta v, \quad \delta \epsilon_z = \frac{\partial}{\partial z} \Delta w \\ \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \Delta u + \frac{\partial}{\partial x} \Delta v, \quad \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial}{\partial z} \Delta v + \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \end{aligned} \quad (1.18a-e)$$

$$\delta\gamma_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \Delta u + \frac{\partial}{\partial x} \Delta w. \quad (1.18f)$$

Embora o contorno total S consista de duas zonas, S_σ onde são prescritas as tensões e S_u onde são prescritos os deslocamentos, o termo do trabalho no contorno envolve somente as forças prescritas em S_σ , uma vez que Δu , Δv e Δw se anulam em S_u .

Utilizando-se da notação matricial, o princípio toma a seguinte forma compacta:

$$\begin{aligned} \delta W_E &= \iiint \{b\} \{\Delta u\}^T d(\text{volume}) + \iint_{S_\sigma} \{p\} \{\Delta u\}^T dS \\ \delta W_D &= \iiint \{\sigma\} \{\delta \epsilon\}^T d(\text{volume}) \end{aligned} \quad (1.19a-b)$$

onde

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \\ \{\delta \epsilon\} &= \{\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{zx}\} \\ \{\Delta u\} &= \{\Delta u, \Delta v, \Delta w\} \\ \{p\} &= \{p_x, p_y, p_z\}, \quad \{b\} = \{b_x, b_y, b_z\} \end{aligned} \quad (1.20a-d)$$

Para mostrar que o Princípio dos Deslocamentos Virtuais é equivalente às equações de equilíbrio, integra-se o termo da esquerda da (1.17) utilizando o teorema de Gauss. Os termos típicos são:

$$\begin{aligned} \iiint \sigma_y \delta \epsilon_y dx dy dz &= \iint \sigma_y \Delta v \Big|_{y_1}^{y_2} dx dz - \iiint \Delta v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy dz \\ &= \oint \sigma_y \Delta v \cos(\eta, y) dS - \iiint \Delta v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx dy dz \\ \iiint \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy dz &= \oint \tau_{xy} (\Delta v \cos(\eta, x) + \Delta u \cos(\eta, y)) dS \\ &\quad - \iiint \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \Delta v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \Delta u \right) dx dy dz \end{aligned}$$

Repetindo isto para os outros termos, obtém-se que

$$\iiint (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz$$

vem a ser

$$\begin{aligned} & \iint ((\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{yz} n) \Delta u + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n) \Delta v + \\ & + (\tau_{zx} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n) \Delta w) dS - \iiint \left(\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta u \right. \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \Delta v + \\ & \left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \Delta w \right) dx dy dz \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo-se aqui as expressões (1.3) e (1.4) tem-se

$$\iint (p_x \Delta u + p_y \Delta v + p_z \Delta w) dS + \iiint (b_x \Delta u + b_y \Delta v + b_z \Delta w) dx dy dz$$

e pelas condições de contorno

$$p_x = \bar{p}_x \quad p_y = \bar{p}_y \quad p_z = \bar{p}_z \quad \text{sobre } S_\sigma \quad \text{e}$$

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0 \quad \text{sobre } S_u$$

ve-se que os membros da esquerda e da direita da equação (1.17) são idênticos. Nesta prova é necessário que os deslocamentos e tensões sejam contínuos e que as tensões no interior e na superfície do corpo estejam em equilíbrio.

Quando são especificadas as relações entre os deslocamentos e deformações e as condições de contorno geométricas (continuidade dos deslocamentos), as equações de equilíbrio e as condições de contorno mecânicas podem ser deduzidas de (1.17).

1.3.2 - Princípio da Mínima Energia Potencial

Restringe-se agora o princípio dos deslocamentos virtuais a materiais com comportamentos elástico e carregamento estático.

O objetivo é expressar a relação

$$\delta W_D - \delta W_E = 0$$

como requisito de extremo para algum funcional dos deslocamentos.

Quando o material é elástico, e o processo de deformação é isotérmico ou adiabático, o trabalho realizado pelas forças estáticas externas é igual à troca de energia interna — a qual é denominada de energia de deformação E_v — de que ela é um funcional de deformações. Admitindo-se que E_v seja a energia de deformação por unidade de volume, isto é, a densidade de energia de deformação, por definição δE_v é igual ao trabalho de primeira ordem por unidade de volume, realizado pelas tensões durante o deslocamento incremental $\{\Delta u\}$ da posição de equilíbrio. Pode-se mostrar que

$$\delta E_v = \{\sigma\}\{\delta\epsilon\}^T \quad (1.21)$$

Expandindo δE_v

$$\delta E_v = \frac{\partial E_v}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \dots + \frac{\partial E_v}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} + \dots$$

obtém-se outra forma das relações entre tensão e deformação, que são:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial E_v}{\partial \epsilon_x} & \sigma_y &= \frac{\partial E_v}{\partial \epsilon_y} & \sigma_z &= \frac{\partial E_v}{\partial \epsilon_z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial E_v}{\partial \gamma_{xy}} & \tau_{zx} &= \frac{\partial E_v}{\partial \gamma_{zx}} & \tau_{yz} &= \frac{\partial E_v}{\partial \gamma_{yz}} \end{aligned} \quad (1.22a-f)$$

Quando o material é linearmente elástico

$$E_v = \frac{1}{2} \{\sigma\}\{\epsilon\}^T, \quad (1.23a)$$

e pela expressão (1.13) tem-se que E_v é uma função quadrática de $\{\epsilon\}$

$$E_v = \frac{1}{2} \{\epsilon\}[D]\{\epsilon\}^T \quad (1.23b)$$

Finalmente, pode-se interpretar E_v como a área que fica sob a curva $\sigma - \epsilon$ para tensão unidimensional (veja figura 1.2). A energia de deformação do corpo todo é

$$U = \iiint E_v d(\text{volume}) \quad (1.24)$$

com esta definição, $\delta W_D = \delta U$.

Se as forças de superfície e de massa independem do tempo, pode-se expressar o trabalho externo em função da energia potencial Ω definida como:

$$\delta \Omega = - \iiint_V \{b\} \{\Delta u\}^T dx dy dz - \iint_{S_\sigma} \{p\} \{\Delta u\}^T dS \equiv -\delta W_E \quad (1.25)$$

O potencial Ω é obtida integrando-se a (1.25) em relação aos componentes deslocamentos.

$$\begin{aligned} \Omega = & - \iiint_V \left(\int_u b_x du + \int_v b_y dv + \int_w b_z dw \right) dx dy dz \\ & - \iint_{S_\sigma} \left(\int_u p_x du + \int_v p_y dv + \int_w p_z dw \right) dS \end{aligned} \quad (1.26)$$

Note-se que a integral de linha envolve somente S_σ , pois $\{\Delta u\} = 0$ em S_u .

Finalmente, faz-se

$$\pi_p = U + \Omega \quad (1.27)$$

e chama-se π_p de "Energia Potencial Total". O equilíbrio exigido pode ser estabelecido como

$$\delta \pi_p = \delta U + \delta \Omega = 0 \quad (1.28)$$

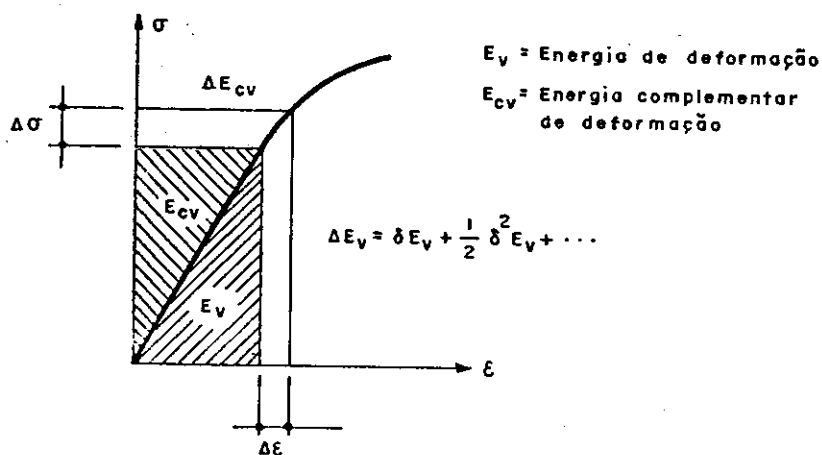


Figura 1.2 - Energia de deformação e energia complementar de deformação.

para qualquer $\{\Delta u\}$, que satisfaça as condições de deslocamento no contorno. Isto resulta que os deslocamentos que definem a posição de equilíbrio correspondem a um extremo da energia potencial total.

Quando as forças de superfície independem dos deslocamentos e a deformação é linear, a segunda variação de $\delta\pi_p$ se reduz a

$$\delta^2\pi_p = \delta^2u \quad (1.29)$$

$$\delta^2u = \iiint \{\delta\sigma\}\{\delta\epsilon\}^T dx dy dz = \iiint \{\delta\epsilon\}[D_t]\{\delta\epsilon\}^T dx dy dz$$

onde $[D_t]$ é a tangente da matriz de rigidez do material.

Desde que $[D_t]$ deve ser positiva definida para um material estável, vêem-se que os deslocamentos reais correspondem ao valor mínimo de π_p . Então, a energia potencial para um deslocamento aproximado $\{u\}^{(a)}$ que satisfaz as condições de contorno de deslocamentos é maior do que o valor real.

$$\pi_p \text{ aproximado} \geq \pi_p \text{ real} \quad (1.30)$$

Usa-se esse resultado para estabelecer os limites das soluções aproximadas de deslocamentos.

As equações governantes para sistema discreto linear têm a seguinte forma geral:

$$\{P\}^T = [K]\{U\}^T \quad (1.31)$$

onde $\{P\}$ contém as cargas prescritas, $\{U\}$ os deslocamentos discretos desconhecidos e $[K]$ é a matriz de rigidez do sistema. Note-se que essas equações resultam da (1.28), e portanto pode-se escrever

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{U\}[K]\{U\}^T - \{U\}\{P\}^T \quad (1.32)$$

O valor de π_p na posição de equilíbrio é obtida substituindo-se $[K]\{U\}^T$ por $\{P\}^T$ (veja equação 1.31).

$$\pi_p \Big|_{\text{equilíbrio}} = \frac{1}{2} \{U\}\{P\}^T - \{U\}\{P\}^T = -\frac{1}{2} \{U\}\{P\}^T \quad (1.33)$$

Supondo-se, agora, que existe somente uma carga P_c , que age no sistema, e admitindo-se que u_c e $u_c^{(a)}$ sejam respectivamente o valor exato e uma aproximação do deslocamento na direção de P_c , as energias exata e aproximada são:

$$2\pi_p = -u_c P_c$$

$$2\pi_p \text{ approx} = -u_c^{(a)} P_c .$$

Pela (1.30) obtém-se um limite para u_c que é:

$$u_c^{(a)} \leq u_c .$$

Este resultado mostra que um deslocamento aproximado compatível, corresponde a uma estrutura que é mais rígida do que a estrutura real, e portanto fornecerá um limite inferior dos deslocamentos.

Feito isto, passa-se a seguir ao desenvolvimento da formulação variacional das cascas cilíndricas circulares, baseada neste último princípio. Antes, porém, faz-se um resumo sobre a teoria das cascas. Objetiva-se com isso, expor as expressões que serão utilizadas tanto no cálculo da energia como nas discretizações feitas nos itens 3 e 4.

1.4 - TEORIA DAS CASCAS

1.4.1 - Definições

1.4.1.1 - Definição de casca

De modo geral denominam-se de *folhas* todos os elementos estruturais definidos por uma *superfície média plana*, a partir da qual se determinam duas superfícies limites equidistantes dela, com a condição de que sua espessura (distância entre essas superfícies limites) seja pequena comparada com as outras duas dimensões. Quando a *superfície-média-folheto médio-é curva ou poliédrica* esses elementos estruturais recebem a denominação específica de *casca*. E se a espessura é muito pequena a casca é geralmente denominada de *casca delgada*, que dependendo da espessura, do carregamento e dos vínculos pode ser tratada em "regime de membrana" ou em "regime de flexão", sendo este último que interessa ao presente trabalho.

As superfícies limites acima mencionadas são geralmente denominadas de *faces ou parâmetros da casca*.

Tem-se aí então, ainda que resumido, uma definição geral de casca.

1.4.1.2 - Esforços solicitantes

Antes de definir os esforços solicitantes das cascas, define-se um sistema de coordenadas, por meio do qual se explicitarão tais esforços.

Sabe-se que para descrever um ponto qualquer da superfície média bastam apenas duas coordenadas. Por isso, admite-se que um sistema de coordenadas x, y seja definido sobre esse folheto, de modo que suas linhas coordenadas formem um ângulo reto entre si (coordenadas gaussianas). Tal sistema está ilustrado na figura 1.3 para um elemento de casca, cujas quatro seções

são perpendiculares ao folheto médio e paralelas às linhas coordenadas x , y respectivamente duas a duas. Considerar-se-ã também uma terceira coordenada z , medida a partir da superfície média sobre a normal a ela.

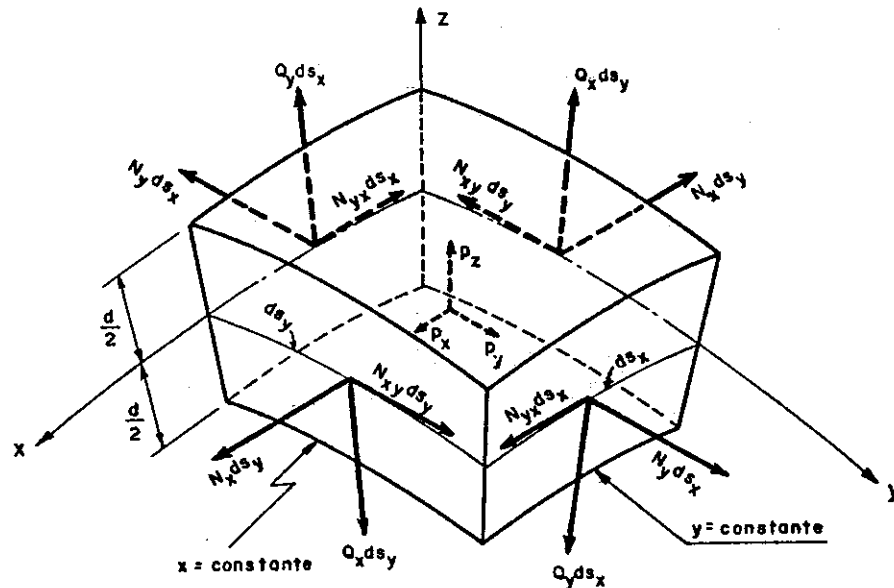


Figura 1.3 - Esforços solicitantes e cargas que atuam num elemento de casca.

A resultante das cargas externas atuantes sobre o elemento, por unidade de área do elemento, pode ser definida por suas três componentes p_x , p_y , p_z segundo os três eixos coordenados.

Na seção frontal, $x = \text{constante}$, do elemento da figura 1.3, que tem área $ds_y \cdot d$ agem forças, convenientemente definidas como forças por unidade de comprimento da seção, cuja resultante depende, naturalmente, do comprimento ds_y .

A força resultante que atua em cada seção do elemento, pode ser determinada em função de suas componentes segundo x , y , z , que são os esforços solicitantes.

Definem-se, agora, as forças componentes nessas direções que atuam sobre cada seção do elemento, estabelecendo-se, inclusive, os seus sentidos positivos (figura 1.3). Na

turalmente, uma vez definidos os sentidos positivos dessas forças nas seções $x = \text{constante}$ e $y = \text{constante}$, têm-se por equilíbrio, os sentidos positivos das forças nas seções opostas a estas.

Na seção $x = \text{constante}$ define-se como força normal N_x , a força por unidade de comprimento de seção que atua na direção x . É positiva se for de tração.

Ainda nessa seção, define-se como força cisalhante N_{xy} , a força por unidade de comprimento de seção, que atua nessa seção, cuja direção é tangente a ds_y . O seu sentido positivo é sempre (como regra usual), determinado em função do sentido da força normal positiva que atua na mesma seção. Isto é, numa seção, se o sentido da força normal positiva concorda com o de um eixo coordenada, o sentido da força cisalhante positiva deve concordar com o do outro eixo coordenada e, se o sentido daquela força discorda, esta também deve discordar. Portanto, N_{xy} é positiva se o seu sentido concorda com o do eixo dos y , pois o sentido de N_x positiva concorda com o do eixo dos x . Finalmente, define-se como força cortante Q_x , a força por unidade de comprimento de seção que atua normalmente à superfície média. O seu sentido positivo será definido posteriormente na expressão 1.34c.

Analogamente como se definiram as forças N_x , N_{xy} e Q_x que atuam na seção $x = \text{constante}$, definem-se as forças N_y , N_{yx} e Q_y que atuam na seção $y = \text{constante}$.

Essas forças podem também ser expressas como integrais das tensões que atuam nas seções do elemento, como se mostra a seguir. Alguns autores consideram essas integrais como as definições dos esforços solicitantes.

Na seção $x = \text{constante}$ (figura 1.4), a força normal total que age é $N_x \cdot ds_y$, que é a resultante das tensões normais σ_x que atuam na respectiva seção. Como o comprimento ds_y é um diferencial, a única variação significativa de σ_x é ao longo da espessura da casca. Diante disso, toma-se um elemento diferencial nessa seção conforme está representado na figura 1.4 por meio de hachuras. Devido às curvaturas

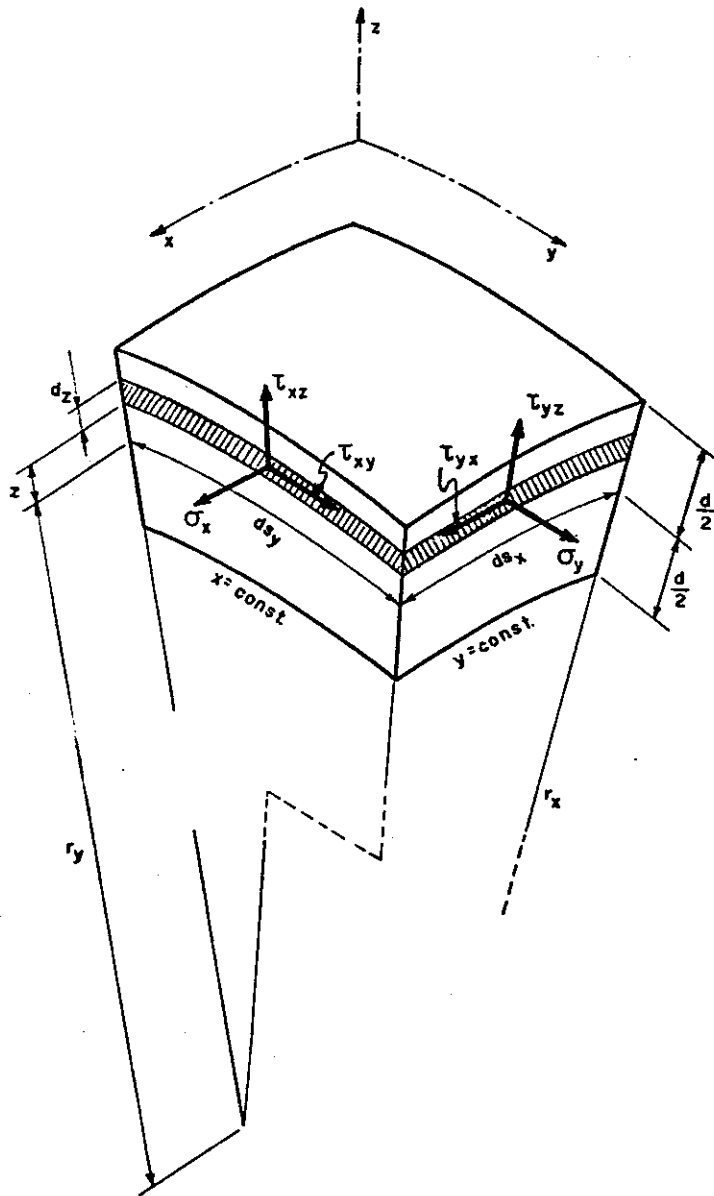


Figura 1.4 - Tensões que agem num elemento de casca.

da casca, o comprimento desse elemento não vale simplesmente ds_y e sim $ds_y(r_y+z)/r_y$, e a força transmitida por esse elemento é

$$\sigma_x ds_y \frac{r_y+z}{r_y} dz.$$

Integrando-se essa expressão entre os limites $-d/2$ e $+d/2$, obtêm-se a força normal total que atua na seção $x = \text{constante}$

$$N_x ds_y = \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_x ds_y \frac{r_y+z}{r_y} dz.$$

Analogamente obtêm-se as forças totais N_{xy} e Q_x , que atuam também nessa seção $x = \text{constante}$, ao integrar as tensões τ_{xy} e τ_{xz} respectivamente. Têm-se, então, que as forças totais que agem na seção $x = \text{constante}$ expressas como integrais das tensões que atuam nessa seção são

$$N_x = \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_x \frac{r_y+z}{r_y} dz, \quad N_{xy} = \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{xy} \frac{r_y+z}{r_y} dz$$

(1.34a-c)

$$Q_x = - \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{xz} \frac{r_y+z}{r_y} dz$$

O sinal menos na expressão de Q_x , indica que a força cortante positiva terá o sentido indicado na figura 1.3, que é o oposto ao sentido de τ_{xz} na figura 1.4.

Utilizando-se do mesmo raciocínio para a seção $y = \text{constante}$, obtêm-se:

$$N_y = \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_y \frac{r_x+z}{r_x} dz, \quad N_{xy} = \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{yx} \frac{r_x+z}{r_x} dz$$

(1.34d-f)

$$Q_y = - \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{yz} \frac{r_x+z}{r_x} dz$$

Dentre essas seis equações, comparando-se as (1.34b) e (1.34e), ve-se que a igualdade das tensões τ_{xy} e τ_{yx} , não implica na igualdade das forças N_{xy} e N_{yx} . A diferença existente entre essas forças desaparece somente se $r_x = r_y$, ou se τ_{xy} não depende de z . Nas cascas delgadas essa diferença é muito pequena podendo desprezá-la.

Quando as tensões não são uniformemente distribuídas ao longo da espessura d , provocam momentos em relação ao centro da seção. O momento oriundo das tensões σ_x , na seção $x = \text{constante}$, é em relação a uma tangente da linha ds_y . É de magnitude diferencial e proporcional a ds_y . Designando-o por $M_x \cdot ds_y$, a quantidade M_x é finita e representa o momento por unidade de comprimento de seção. Consequentemente pode-se medi-la em unidades tais como $kgf.m/m$, ou $tf.m/m$, etc.... Geralmente M_x é denominado de momento fletor.

Quando as tensões τ_{xy} não estão uniformemente distribuídas ao longo da espessura da casca, sua resultante pode estar em qualquer ponto da seção do elemento e provocar um momento em relação a um eixo, que é normal à seção e que passa pelo centro da linha ds_y . Este momento é também proporcional a ds_y e é denotado por $M_{xy} \cdot ds_y$. A quantidade finita M_{xy} geralmente é denominada de momento volvente (ou momento de torção).

Da figura 1.4, a seguir, pode-se facilmente entender as seguintes expressões:

$$M_x = - \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_x \frac{r_y + z}{r_y} z dz$$

(1.34g-h)

$$M_{xy} = - \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{xy} \frac{r_y + z}{r_y} z dz$$

que podem ser consideradas as definições dos momentos fletor e volvente. Os sinais são arbitrários e fixam a convenção de sinal utilizado neste trabalho.

Os outros momentos fletor e volvente, que agem na seção $y = \text{constante}$, são obtidos de modo análogo ao feito acima.

$$M_y = - \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_y \frac{r_x + z}{r_x} z dz$$
$$M_{yx} = - \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{yx} \frac{r_x + z}{r_x} z dz$$

(1.34i-j)

Novamente, como no caso das forças cisalhantes, apesar das tensões τ_{xy} e τ_{yx} serem iguais, os momentos resultantes podem ser diferentes. Diferença esta, geralmente, desprezível.

Note-se que devido aos fatores $(r_x + z)/r_x$ e $(r_y + z)/r_y$, os momentos não são nulos mesmo quando as tensões independem de z . Eles representam o fato de que as seções do elemento de casca não são retangulares e portanto seus baricentros não se localizam exatamente sobre a superfície média. Note-se, também, que as equações (1.34g-j) independem de qualquer lei particular de distribuição de tensões ao longo da espessura da casca. Elas são sempre válidas como definições de momentos quer a distribuição de tensões seja linear ou não.

As dez quantidades

$$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$$

forças e momentos que atuam nas seções de um elemento de casca, são os esforços solicitantes.

1.4.2 - Deformações em Cascas Cilíndricas Circulares

Passa-se agora ao estudo das deformações das cas

cas cilíndricas circulares. Procura-se aqui determinar as relações entre deslocamentos e deformações. Procura-se ainda expressar os esforços solicitantes em função dos deslocamentos da superfície média.

Tratando-se de cascas cilíndricas circulares, no sistema de coordenadas do item anterior faz-se $r_x \rightarrow \infty$, $r_y = R$ e, para maior clareza do desenvolvimento, passar-se-á a utilizar sistema de coordenadas cilíndricas x e $\phi = y/R$ (figura 1.5).

O ponto genérico A da superfície média terá coordenadas cilíndricas x e ϕ ; o ponto genérico A_z sobre a normal por A à superfície média, terá coordenadas x , ϕ e z , medindo-se z a partir da superfície média, de maneira que $R + z$ seja a distância do ponto A_z ao eixo do cilindro.

As derivadas em relação às coordenadas x e ϕ serão indicadas por apóstrofo (') e ponto (.), respectivamente

$$\frac{\partial ()}{\partial x} = ()', \quad \frac{\partial ()}{\partial \phi} = ()\cdot$$

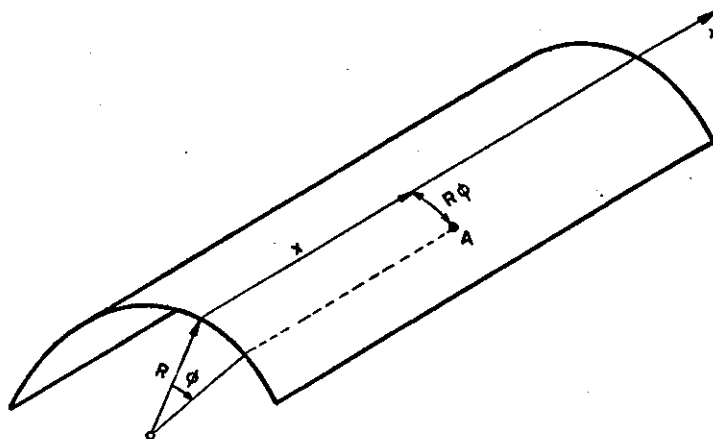


Figura 1.5 - Coordenadas cilíndricas (x, ϕ) .

1.4.2.1 - Relações entre deslocamentos e deformações

A deformação da casca pode ser descrita pelas três componentes do deslocamento do ponto genérico A_z , a saber,

u_z = deslocamento ao longo da geratriz,

v_z = deslocamento ao longo da diretriz,

w_z = deslocamento radial.

As componentes do deslocamento do ponto A do folheto médio, serão indicadas simplesmente por u , v e w . No que segue, deslocamentos de outros pontos terão como índice o símbolo do ponto considerado.

Os deslocamentos serão considerados positivos quando concordarem com as coordenadas.

Para a determinação de u_z , v_z e w_z procura-se estabelecer relações entre esses deslocamentos e os de um ponto da superfície média, e outras relações, que permitam que es

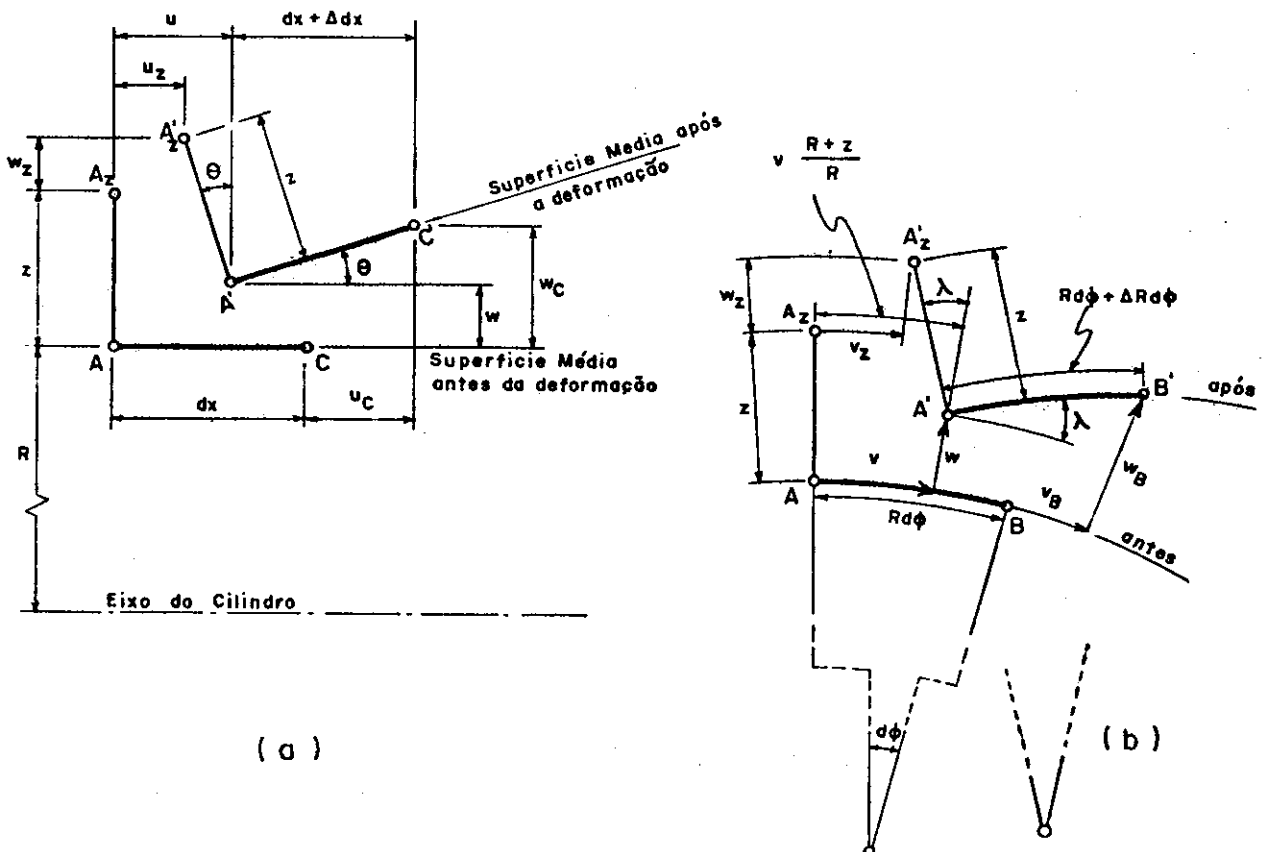


Figura 1.6

tes deslocamentos possam ser determinados em função de outras grandezas, como adiante se mostrarão.

Admite-se para determinação de tais relações as seguintes hipóteses, que são as da teoria de primeira ordem das cascas delgadas

- (1) Os segmentos normais à superfície média permanecem normais e não sofrem nenhuma alteração em sua extensão após a deformação, isto é, as tensões τ_{xz} , τ_{yz} e as deformações ϵ_z , γ_{xz} e γ_{yz} são desprezíveis.
- (2) A tensão σ_z é desprezível.
- (3) Os deslocamentos são pequenos.

Primeiramente, estabelecem-se relações simples entre os deslocamentos u_z , v_z e w_z e os deslocamentos u , v e w de um ponto da superfície média, que tem as mesmas coordenadas x , ϕ que o ponto arbitrário A_z .

A figura 1.6a mostra uma seção ao longo de uma geratriz. A linha grossa cheia representa a superfície média antes da deformação. Posteriormente ela sofre uma rotação θ , devido a variação dos w ao longo das geratrizes (flexão destas). Do ponto A tem-se a normal AA_z à superfície média, antes da deformação, cujo comprimento z é menor que $d/2$ ($z < d/2$). Da hipótese (1) segue que esta normal gira durante a deformação do mesmo ângulo θ . O deslocamento u_z do ponto A_z é portanto igual ao deslocamento u do ponto A , menos a distância que A_z é deslocado pela rotação de AA_z . Isto é:

$$u_z = u - z\theta$$

mas, pela hipótese (3) tem-se que

$$\theta = \frac{w_C - w}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} = w'$$

portanto

$$u_z = u - zw' \quad (1.35a)$$

Da figura 1.6b, onde se ilustra uma seção transversal da casca, pode-se achar expressão semelhante a (1.35a) para o deslocamento v_z . O ponto A é deslocado de v ao longo da superfície média. Desde que a normal AA_z permanece normal a esta superfície, o ponto A_z é deslocado de $v(R+z)/R$. A variação de w ao longo das diretrizes (flexão destas), acarreta a rotação λ dessa normal que produz o deslocamento adicional $-z\lambda$. Portanto

$$v_z = \frac{R+z}{R} \cdot v - z \cdot \lambda$$

mas pela hipótese (3) tem-se que

$$\lambda = \frac{w_B - w}{R d\phi} = \frac{\partial w}{R \partial \phi} = \frac{1}{R} w'$$

logo

$$v_z = \frac{R+z}{R} v - \frac{z}{R} w' \quad (1.35b)$$

Por causa da hipótese (1), o comprimento de AA_z não se altera. Portanto a diferença entre os deslocamentos radiais w e w_z é devida somente às rotações θ e λ . Isto é

$$w - w_z = 2z - z(\cos\theta + \cos\lambda),$$

mas pela hipótese (3), esta diferença é desprezível e portanto tem-se que

$$w_z = w. \quad (1.35c)$$

O próximo passo é achar as deformações no ponto A_z em função de seus deslocamentos.

As deformações de um elemento de cascas cilíndricas circulares, consistem dos alongamentos dos elementos linha $ds_\phi = R d\phi$, sobre a diretriz, e dx sobre a geratriz, e pela distorção do ângulo reto formado por esses dois elementos linha (figura 1.7). Definem-se e indicam-se como:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad \text{a deformação das geratrizes,}$$

$$\epsilon_\phi = \frac{\Delta ds_\phi}{ds_\phi} \quad \text{a deformação das diretrizes e}$$

$$\gamma_{x\phi} = \widehat{OMN} - \widehat{O'M'N'} \quad \text{a distorção.}$$

Consideram-se positivos os alongamentos e a diminuição do ângulo reto.

Da figura 1.7 tem-se que: $\Delta dx = (\partial u / \partial x) dx$, a distorção igual a soma de γ_1 e γ_2 , e que Δds_ϕ é igual a $(\partial v / R \partial \phi) R d\phi$ mais o alongamento adicional provocado pelo deslocamento w dos pontos M e N . Desde que o raio R aumenta para $R + w$, a deformação adicional é

$$\frac{(R+w)d\phi - R d\phi}{R d\phi} = \frac{w}{R}.$$

Portanto ϵ_x , ϵ_ϕ e $\gamma_{x\phi}$ expressas em função dos deslocamentos e suas derivadas são:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_\phi = \frac{\Delta ds_\phi}{ds_\phi} = \frac{1}{R d\phi} \left(\frac{\partial v}{R \partial \phi} R d\phi \right) + \frac{w}{R} =$$

(1.36a-c)

$$= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right)$$

$$\gamma_{x\phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Expressões que podem ser obtidas do estado plano de tensões, já que a deformação na direção x e a distorção são as mesmas, e a deformação na direção ϕ se deve

(a) à deformação correspondente ao estado plano
 $= (1/R) (\partial v / \partial \phi)$ e

(b) à deformação anular provocada pelo deslocamento w dos pontos M e $N = w/R$.

Substituindo-se R por $(R+z)$, têm-se as expressões das deformações do elemento da superfície cilíndrica que pas

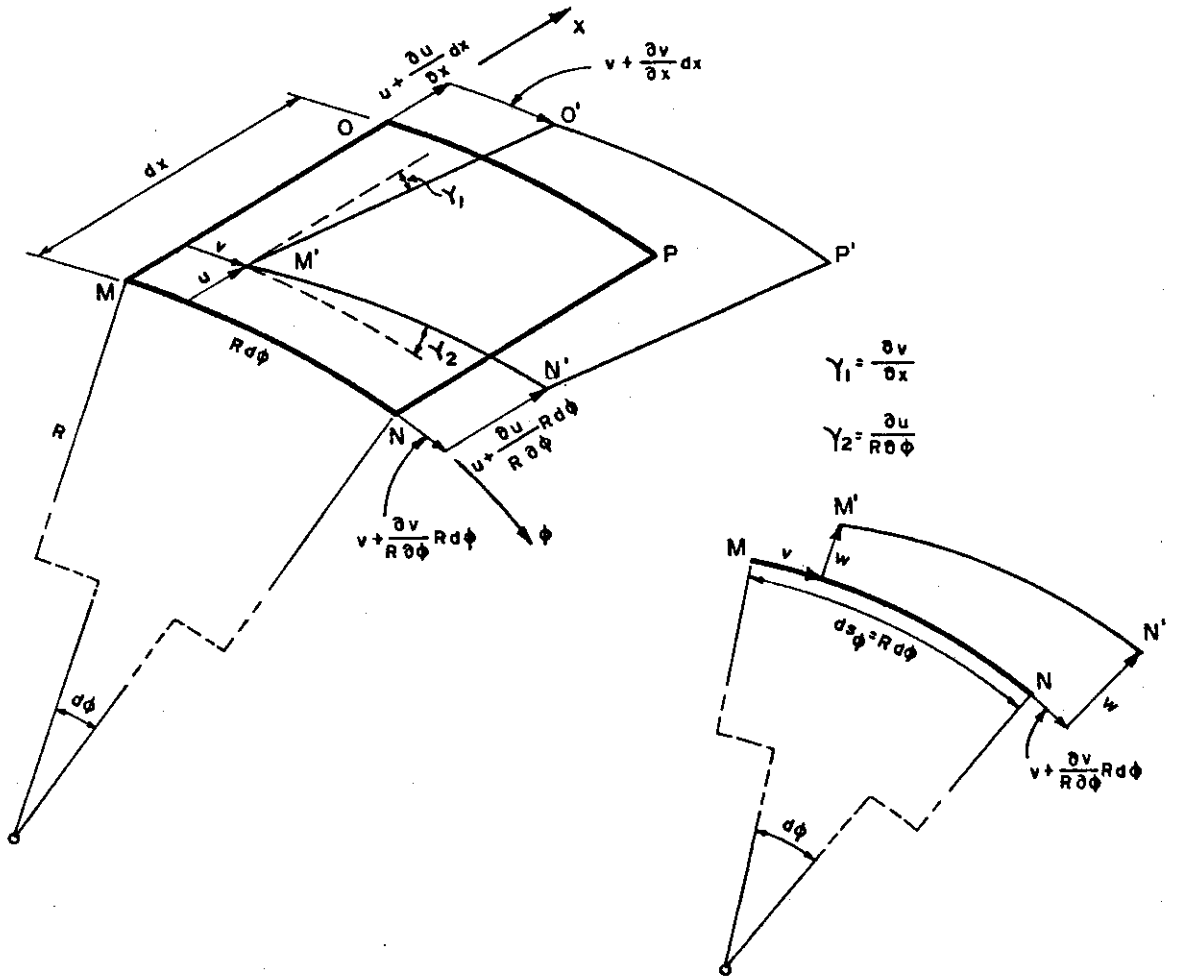


Figura 1.7 - Deslocamentos e deformações em um elemento de cascas cilíndricas circulares.

sa pelo ponto A_z

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} = u'_z$$

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + w_z \right) = \frac{v'_z + w_z}{R+z} \quad (1.37a-c)$$

$$\gamma_{x\phi} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} = v'_z + \frac{u'_z}{R+z}$$

Introduzindo-se as expressões (1.35a-c) nestas u timas, obtêm-se as deformações em A_z em função dos desloca

mentos em A:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= u' - zw'' , \\ \epsilon_\phi &= \frac{v'}{R} - \frac{z}{R} \frac{w''}{R+z} + \frac{w}{R+z} \quad e \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{u'}{R+z} + \frac{R+z}{R} v' - w'' \left(\frac{z}{R} + \frac{z}{R+z} \right)\end{aligned} \quad (1.38a-c)$$

Como último passo, expressam-se as tensões em função das deformações. Pela hipótese (3) têm-se as seguintes expressões (estado plano de tensões):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_\phi) \\ \sigma_\phi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\phi + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{x\phi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\phi}\end{aligned} \quad (1.39a-c)$$

Expressões que serão utilizadas na formulação que segue.

1.4.2.2 - Expressões dos esforços solicitantes como função dos deslocamentos e suas derivadas

Nas expressões (1.34a-j), dos esforços N e M solicitantes, substituindo-se o índice y por ϕ e fazendo-se $r_x = \infty$ e $r_y = R$, obtêm-se as seguintes expressões, desses esforços, para as cascas cilíndricas circulares:

$$\begin{aligned}N_x &= \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz , & N_\phi &= \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_\phi dz , \\ N_{x\phi} &= \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{x\phi} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz , & N_{\phi x} &= \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{\phi x} dz , \\ M_x &= - \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz , & M_\phi &= - \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_\phi z dz ,\end{aligned} \quad (1.40a-f)$$

$$M_{x\phi} = - \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{x\phi} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz, \quad M_{\phi x} = - \int_{-d/2}^{+d/2} \tau_{\phi x} z dz \quad (1.40g-h)$$

Quando as tensões (1.39a-c) expressas pelas deformações da (1.38a-c) são introduzidas nas (1.40a-h), estas podem ser integradas com respeito a z . Para N_x tem-se

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-d/2}^{+d/2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\phi) \frac{R+z}{R} dz = \\ &= \frac{E}{R(1-\nu^2)} \left[(Ru' + \nu v' + \nu w) d - w'' \frac{d^3}{12} \right] \end{aligned}$$

que pode ser expressa como

$$N_x = \frac{Ed}{1-\nu^2} \left(u' + \nu \frac{v'}{R} + \nu \frac{w'}{R} \right) - \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{w''}{R}$$

ou

$$N_x = D \left(u' + \nu \frac{v'}{R} + \nu \frac{w'}{R} \right) - K \frac{w''}{R}$$

onde os fatores D e K valem

$$D = \frac{Ed}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$$

que são denominados de coeficientes de rigidez axial e de rigidez à flexão, respectivamente.

As outras podem ser tratadas exatamente do mesmo modo; algumas necessitam, porém, de mais detalhes elucidativos. Por exemplo, para a outra força normal

$$\begin{aligned} N_\phi &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-d/2}^{+d/2} (\epsilon_\phi + \nu \epsilon_x) dz = \\ &= \frac{E}{R(1-\nu^2)} \left[(\nu' + \nu Ru') d - w'' \left(d - R \ln \frac{2R+d}{2R-d} \right) + R w' \ln \frac{2R+d}{2R-d} \right], \end{aligned}$$

a fim de usar nela também as rigidezas D e K , desenvolvem-

se os logaritmos segundo a série de potências

$$\ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots + \frac{(x-1)^{2n+1}}{2(n+1)(x+1)^{2n+1}} + \dots \right]$$

válida para $x > 0$. Donde vem que

$$\ln \frac{2R+d}{2R-d} = \frac{d}{R} + \frac{d^3}{12R^3} + \frac{d^5}{80R^5} + \dots$$

Com isso obtém-se a seguinte expressão de N_ϕ , ao se considerar apenas os dois primeiros termos da série, cometendo assim um erro da ordem de $d^5/80R^5$, que é muito pequeno pois $d \ll R$ - casca delgada.

$$N_\phi = \frac{E}{R(1-\nu^2)} \left[(\nu' + w + \nu Ru')d + (w'' + w) \frac{d^3}{12R^2} \right],$$

que facilmente pode ser transformada na forma apresentada em 1.41a.

Finalmente, escreve-se o conjunto das expressões dos esforços solicitantes para as cascas cilíndricas circulares, como função dos deslocamentos da superfície média e suas derivadas.

$$N_\phi = \frac{D}{R} (\nu' + w + \nu Ru') + \frac{K}{R^3} (w + w''),$$

$$N_x = \frac{D}{R} (Ru' + \nu \nu' + \nu w) - \frac{K}{R} w'',$$

$$N_{\phi x} = \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} (u' + Rv') - \frac{K}{R^3} \frac{1-\nu}{2} (u' - Rw''),$$

(1.41a-f)

$$N_{x\phi} = \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} (u' + Rv') + \frac{K}{R^2} \frac{1-\nu}{2} (v' - w''),$$

$$M_\phi = \frac{K}{R^2} (w + w'' + \nu R^2 w''),$$

$$M_x = \frac{K}{R^2} (R^2 w'' + \nu w'' - Ru' - \nu \nu'),$$

$$M_{\phi x} = \frac{K}{R^2} (1-\nu) \left(R w'' + \frac{1}{2} u' - \frac{R}{2} v' \right) ,$$

(1.41g-h)

$$M_{x\phi} = \frac{K}{R} (1-\nu) (w'' - v')$$

Procura-se a seguir, determinar a energia de deformação de cascas cilíndricas circulares com espessura constante, em função dos deslocamentos da superfície média.

1.5 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DE CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES COM ESPESSURA CONSTANTE

Considere-se, agora, que a casca cilíndrica circular de raio R , tenha espessura d constante e, sobre sua superfície média, um sistema de coordenadas gaussianas x, y (em vez de coordenadas cilíndricas x, ϕ como utilizadas anteriormente, apenas para simplicidade de notação), de modo que o eixo x seja paralelo às geratrizes e o eixo y paralelo às diretrizes. Analogamente ao item 1.4.2.1, define-se a posição de um ponto qualquer da casca por x, y e z , com a terceira coordenada medida a partir da superfície média. Considerem-se, como no mesmo item citado acima, z positivo do centro de curvatura para fora, e os deslocamentos positivos quando concordes com as coordenadas. E as derivadas em relação a x e y indicadas também por apóstrofo e ponto respectivamente

$$\frac{\partial ()}{\partial x} = ()' \quad \text{e} \quad \frac{\partial ()}{\partial y} = ()\cdot$$

1.5.1 - Energia de Deformação em Função das Deformações num Ponto Genérico

Do item 1.3.2 tem-se que a energia de deformação por unidade de volume (expressão 1.23a) é

$$E_v = \frac{1}{2} \{\sigma\}\{\epsilon\}^T,$$

que pelas hipóteses (1) e (2) escreve-se

$$E_v = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

ou, pela expressão (1.23b) da energia em função das deformações

$$E_v = \frac{1}{2} \{\epsilon\}[D]\{\epsilon\}^T$$

como

$$E_v = \frac{E}{2(1-\nu^2)} [(\epsilon_x + \epsilon_y)^2 - 2(1-\nu) \epsilon_x \epsilon_y + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}^2] \quad (1.42)$$

que pode ser escrita

$$E_v = \frac{E}{2(1-\nu^2)} [(\epsilon_x + \epsilon_y)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \epsilon_x \epsilon_y \right)]$$

ou ainda

$$E_v = G \left(\frac{t^2}{m-1} + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 \right)$$

onde

$$m = \frac{1}{\nu}, \quad t = \epsilon_x + \epsilon_y \quad \text{e} \quad G = m \frac{E}{2(m+1)} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

que confirma que $E_v > 0$.

E a energia de deformação E_s por unidade de área da superfície média é:

$$E_s = \int_{-d/2}^{+d/2} E_v \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz \quad (1.43)$$

onde $(1+z/R)$ leva em consideração a diferença de comprimento da fibra genérica, à distância z , em relação à fibra correspondente da superfície média.

1.5.2 - Energia de Deformação em Função dos Deslocamentos da Superfície Média

Substituindo-se E_v da expressão (1.43) pela (1.42), a qual corresponde a E_v a uma distância z da superfície média, tem-se

$$E_s = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-d/2}^{+d/2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz \quad (1.44)$$

Para obter a energia de deformação em função dos deslocamentos da superfície média, basta introduzir as (1.38a-c), onde naturalmente se substituem todas as deriva

das em relação a ϕ por y . Note-se que

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\phi} = (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial\phi} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \cdot \frac{\partial R\phi}{\partial\phi} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \cdot R$$

e portanto

$$\frac{\partial(\cdot)^2}{\partial\phi^2} = (\cdot)'' = \frac{\partial(\cdot)^2}{\partial y^2} \cdot R^2.$$

Tal introdução, originará as integrais a seguir relacionadas, calculadas com a aproximação

$$\frac{R}{R+z} = (1 + \frac{z}{R})^{-1} \cong 1 - \frac{z}{R}$$

$$\int_{-d/2}^{+d/2} (1 + \frac{z}{R}) dz = d \quad ; \quad \int_{-d/2}^{+d/2} z^2 (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{d^3}{12} \quad ;$$

$$\int_{-d/2}^{+d/2} (\frac{Rz}{R+z})^2 (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{d^3}{12} \quad ; \quad \int_{-d/2}^{+d/2} z (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{d^3}{12R} \quad ;$$

$$\int_{-d/2}^{+d/2} \frac{Rz}{R+z} (1 + \frac{z}{R}) dz = 0 \quad ; \quad \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{1}{R+z} (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{d}{R} \quad ;$$

$$\int_{-d/2}^{+d/2} \frac{z}{R+z} (1 + \frac{z}{R}) dz = 0 \quad ; \quad \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{Rz^2}{R+z} (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{d^3}{12} \quad ;$$

$$\int_{-d/2}^{+d/2} (\frac{R}{R+z})^2 (1 + \frac{z}{R}) dz = d \quad ; \quad \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{R}{R+z} (1 + \frac{z}{R}) dz = d \quad ;$$

$$\int_{-d/2}^{+d/2} \frac{z^2}{R+z} (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{d^3}{12R} \quad ; \quad \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{R^2 z}{(R+z)^2} (1 + \frac{z}{R}) dz = -\frac{d^3}{12R} \quad ;$$

$$\int_{-d/2}^{+d/2} \frac{1}{(R+z)^2} (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{d}{R^2} \quad ; \quad \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{Rz}{(R+z)^2} (1 + \frac{z}{R}) dz = -\frac{d^3}{12R^2} \quad ;$$

Portanto, as quatro integrais da (1.44) valem

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-d/2}^{+d/2} \epsilon_z^2 (1 + \frac{z}{R}) dz = (u')^2 d + ((w'')^2 - \frac{2}{R} u' w'') \frac{d^3}{12} \\
 I_2 &= \int_{-d/2}^{+d/2} \epsilon_y^2 (1 + \frac{z}{R}) dz = d (v' + \frac{w}{R})^2 + ((w'')^2 + 2 \frac{w}{R^2} w'') \frac{d^3}{12} \\
 I_3 &= \int_{-d/2}^{+d/2} 2\nu \epsilon_x \epsilon_y (1 + \frac{z}{R}) dz = 2\nu \{ (u' v' + \frac{w}{R} u') d + w'' (w'' - \frac{1}{R} v') \frac{d^3}{12} \} \\
 I_4 &= \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 (1 + \frac{z}{R}) dz = \frac{1-\nu}{2} \{ d (v' + u')^2 + \frac{d^3}{12} [3(\frac{1}{R} v' - \\
 &\quad - w'')^2 + w'' (w'' + \frac{2}{R} u')] \}
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 E_s &= \frac{E d}{2(1-\nu^2)} \{ (u')^2 + (v' + \frac{w}{R})^2 + \frac{1}{2} (1-\nu) (v' + u')^2 + \\
 &\quad + 2\nu u' (v' + \frac{w}{R}) \} + \frac{E d^3}{24(1-\nu^2)} \{ (w'')^2 + (w'')^2 + \\
 &\quad + 2(1-\nu) (w'')^2 - \frac{2\nu}{R} v' w'' + 2\nu w'' w'' - \quad (1.45) \\
 &\quad - \frac{2}{R} u' w'' + \frac{1-\nu}{R} u' w'' - \frac{3(1-\nu)}{R} v' w'' + \\
 &\quad + \frac{3(1-\nu)}{2R^2} (v')^2 + \frac{2}{R^2} w w'' \}
 \end{aligned}$$

No caso particular em que se consideram desprezíveis os deslocamentos axiais ($u = 0$), bem como o efeito de Poisson ($\nu = 0$), a energia de deformação armazenada na

casca de espessura constante d , por unidade de área da superfície média, é dada por

$$E_s = \frac{Ed}{2} \left\{ \left(v' + \frac{w}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} (v'')^2 \right\} + \\ + \frac{Ed^3}{24} \left\{ (w'')^2 + (w''')^2 + 2(w'')^2 - \frac{3}{R} v' w'' + \frac{3}{2R^2} (v'')^2 + \frac{2}{R^2} w w'' \right\}$$

ou

$$E_s = \frac{Ed}{2} \left(v' + \frac{w}{R} \right)^2 + \frac{Ed}{4} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right) (v'')^2 + \\ + \frac{Ed^3}{24} \left\{ (w'')^2 + (w''')^2 + 2(w'')^2 - \frac{3}{R} v' w'' + \frac{2}{R^2} w w'' \right\}. \quad (1.46)$$

E no caso ainda mais particular, onde se consideram também desprezíveis os deslocamentos tangenciais ($v = 0$), ou realmente não existam, por exemplo o caso de reservatórios cilíndricos circulares sujeito somente à pressão d'água, a energia de deformação por unidade de superfície média é dada por

$$E_s = \frac{Ed}{2} \left(\frac{w}{R} \right)^2 + \frac{Ed^3}{24} (w'')^2 \quad (1.47)$$

1.6 - FORMULAÇÃO PELO PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Segundo o Princípio da Mínima Energia Potencial Total (item 1.3.2), dentre todas as distribuições de deslocamentos compatíveis com os vínculos, aquela que corresponde à configuração de equilíbrio é que torna mínima a energia potencial do sistema. Esta pode ser decomposta em duas parcelas

a) a energia de deformação total

$$U = \iint E_s dx dy \quad (1.48)$$

b) a energia potencial das cargas que, quando estas forem distribuídas com continuidade e expressas por suas componentes p_x , p_y e p_z (supostas positivas quando concordam com u , v e w), é dada por

$$\Omega = - \iint (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy \quad (1.49)$$

As integrais são obviamente estendidas a toda a casca. Frequentemente, os deslocamentos no contorno são pré-fixados pelas condições de vínculo, não sendo, porém, raro o caso de trechos do contorno em que todas ou algumas das componentes u , v , w sejam incógnitas (apoios recalçáveis e especialmente, bordas livres).

A aplicação do princípio leva pois à condição $U + \Omega =$ mínimo que, em princípio permite determinar os deslocamentos u , v , w .

2.0 DIFERENÇAS FINITAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Seguir-se-ão, na exposição dos métodos e demonstrações deste capítulo os seguintes autores: SALVADORI (1952) e YOUNG (1972).

É de conhecimento geral que, quando a resolução de um problema leva à resolução de uma equação diferencial que para ser integrada exatamente exige complicadas manipulações matemáticas, é conveniente empregar métodos aproximados de solução. Dentre os vários métodos existentes, restringe-se o presente capítulo àqueles puramente numéricos.

Esses métodos de solução de equações diferenciais, consistem essencialmente em obter valores da integral desconhecida f em alguns pontos pré determinados, distribuídos ao longo dos eixos dos x para as equações diferenciais ordinárias, e num plano x, y para as equações diferenciais par

ciais bidimensionais. Para isso pode-se aproximar as derivadas da expressão diferencial da integral f pelas derivadas de um polinômio de grau n , determinado de modo que nos pontos pré-estabelecidos os valores deste polinômio sejam iguais aos da função f , ou pelo desenvolvimento de Taylor desta função f .

O objetivo deste capítulo é obter expressões aproximadas de derivadas por meio de polinômios interpoladores Lagrangeanos (utilizando para as aproximações apenas valores da função incógnita) e Hermitianos (utilizando para as aproximações, além dos valores da função incógnita, valores de algumas de suas derivadas). Além disso, expor o desenvolvimento das expressões conseguidas por tais processos, com polinômios interpoladores do segundo e do quarto grau, utilizadas nos capítulos 3 e 4.

Visando, entretanto, a formalização dos processos a serem expostos, apresentam-se primeiramente os tipos de interpolações a serem utilizados (Lagrangeanos ou Hermitianos), e o método para a determinação destes polinômios com sua respectiva justificativa de precisão e convergência.

2.2 - INTERPOLAÇÃO E DERIVAÇÃO

2.2.1 - Interpolação de Lagrange

Conhecidos os valores da função $f(x)$ em $n + 1$ pontos distintos, por exemplo em x_0, x_1, \dots, x_n (pontos pré-determinados), procura-se determinar um polinômio $F(x)$ de grau menor ou igual a n tal que

$$F(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Para mostrar que o polinômio $F(x)$ existe e é único, bastaria descrever apenas um método para determinar tal polinômio e demonstrar sua unicidade. Porém, descrevem-se dois (2.2.1.1 e 2.2.1.2), pelos seguintes motivos:

- a) o primeiro porque exprime $F(x)$ da forma que facilita a demonstração da convergência e precisão da interpolação de Lagrange (item 2.2.1.3) e
- b) o segundo por se ter achado ser o método que melhor ilustra a obtenção das expressões aproximadas de derivadas descritas no item 2.2.3.

2.2.1.1 - Fórmula de interpolação de Lagrange

Expresse-se o polinômio $F(x)$ da forma

$$\begin{aligned} F(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n) = \\ &= \sum_{k=0}^n L_k(x)f(x_k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $L_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) é um polinômio de grau não superior a n . Para que a $F(x)$ satisfaça as condições (2.1), é necessário que os $L_k(x)$ gozem da propriedade

$$\begin{aligned} L_k(x_i) &= 1 \quad \text{se } k = i, \quad \text{e} \\ L_k(x_i) &= 0 \quad \text{se } k \neq i. \end{aligned} \quad (2.3)$$

É fácil verificar que as funções definidas por

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \quad (2.4)$$

possuem essa propriedade. Observe-se que o numerador de $L_k(x)$ é um produto de todos os fatores da forma $x - x_i$, exceto $x - x_k$. Uma vez que cada $L_k(x)$ é um polinômio de grau n , $F(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n que satisfaz as condições (2.1). A equação (2.4) pode ser escrita de maneira compacta como

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \quad (2.5)$$

onde o símbolo Π indica produtório.

A equação (2.2), quando $L_k(x)$ é expressa como a (2.4), é conhecida como fórmula de interpolação de Lagrange.

Para provar a unicidade, considere-se qualquer polinômio $G(x)$ de grau menor ou igual a n que também satisfaz as condições (2.1). Então $H(x) = F(x) - G(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n que se anula para $n + 1$ valores distintos de x . Consequentemente pelo corolário que diz: "Seja $P(x)$ um polinômio de grau menor ou igual a n que tem zeros de multiplicidades no mínimo de v_1, v_2, \dots, v_s em $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ pontos distintos, respectivamente. Se

$$\sum_{i=1}^s v_i > n,$$

então

$$P(x) \equiv 0''.$$

Segue que $H(x) \equiv 0$ e portanto $G(x) \equiv F(x)$.

2.2.1.2 - Método dos coeficientes indeterminados

Um outro método para a determinação de um polinômio $F(x)$ é o método dos coeficientes indeterminados. Por es

se método, primeiramente expressa-se o polinômio interpolador $F(x)$ da forma

$$F(x) = a_0(x-\alpha)^n + a_1(x-\alpha)^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.6)$$

onde α é uma constante qualquer. A seguir procura-se determinar os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n de modo que as condições (2.1) se verifiquem. Evidentemente esses coeficientes devem satisfazer o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0(x_0 - \alpha)^n + a_1(x_0 - \alpha)^{n-1} + \dots + a_n \\ f(x_1) &= a_0(x_1 - \alpha)^n + a_1(x_1 - \alpha)^{n-1} + \dots + a_n \\ &\vdots \\ f(x_n) &= a_0(x_n - \alpha)^n + a_1(x_n - \alpha)^{n-1} + \dots + a_n \end{aligned} \quad (2.7)$$

O sistema acima de $n+1$ equações a $n+1$ incógnitas tem uma única solução se o determinante do sistema é diferente de zero. Para o caso particular de $\alpha = 0$, o determinante é:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

cujo valor é dado por

$$\Delta = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n (x_i - x_j) \quad (2.8)$$

pois é um determinante de *Vandermonde*. Por essa expressão, verifica-se de imediato que $\Delta \neq 0$, pois, por hipótese, os pontos x_i são todos distintos. Consequentemente os coeficientes a_k são unicamente determinados.

2.2.1.3 - Convergência e precisão da interpolação Lagrangeana

Supondo-se, agora, que $f(x)$ seja uma função contínua num intervalo $I = [a, b]$ gera-se uma sequência de funções por meio da interpolação Lagrangeana e estuda-se sua convergência. Primeiramente divide-se o intervalo I em M sub-intervalos de comprimento h por meio dos seguintes pontos de interpolação

$$x_l = a + lh, \quad l = 0, 1, \dots, M$$

onde

$$h = \frac{b-a}{M}.$$

Em seguida, escolhe-se um inteiro n e para cada $M \geq n$ determinam-se os $(n + 1)$ pontos para a interpolação Lagrangeana do seguinte modo. Em qualquer intervalo

$$I_l = [x_{l-1}, x_l], \quad l = 1, 2, \dots, M$$

os $(n + 1)$ pontos de interpolação são fixados como sendo formados pelos pontos x_{l-1}, x_l e $(n - 1)$ pontos adicionais também determinados quanto possível de x . Assim se $n = 3$ os pontos são $x_{l-2}, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}$ se $x \in I_l$, e x_0, x_1, x_2, x_3 se $x \in I_1$. E finalmente se $x \in I_M$ os pontos são $x_{M-3}, x_{M-2}, x_{M-1}, x_M$.

Dado x , e denominando os $(n + 1)$ pontos de interpolação de t_0, t_1, \dots, t_n com $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, evidentemente, pode-se construir, pela fórmula de interpolação de Lagrange, as funções

$$F_M(x) = \sum_{j=0}^n w_j(x) f(t_j)$$

onde

$$w_j(x) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^n \frac{x-t_s}{t_j-t_s}.$$

Desde que

$$\sum_{j=0}^n w_j(x) = 1$$

tem-se

$$f(x) - F_M(x) = \sum_{j=0}^n w_j(x) (f(x) - f(t_j))$$

e

$$|f(x) - F_M(x)| \leq K(n) \max_{0 \leq j \leq n} |f(x) - f(t_j)|$$

onde $K(n)$ é uma constante que depende de n e que é o limite para

$$\sum_{j=0}^n |w_j(x)|.$$

Supondo-se para o momento que $K(n)$ existe, pela continuidade de uniforme de $f(x)$ segue que

$$\max_{0 \leq j \leq n} |f(x) - f(t_j)| \rightarrow 0$$

quando $M \rightarrow \infty$, monotonicamente em $[a, b]$, consequentemente

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |f(x) - F_M(x)| = 0$$

neste intervalo $[a, b]$. Portanto no limite tem-se que

$$F_M = f(x).$$

E com isso fica demonstrado a convergência da interpolação Lagrangeana.

Mostra-se em seguida que realmente a constante $K(n)$ existe. Cada fator do denominador é no mínimo igual a h ; consequentemente o denominador é no mínimo igual a h^n . Cada fator do numerador quanto muito é igual a nh . Disto, o numerador é quanto muito igual a $(nh)^n$ de modo que se tem $|w_j(x)| \leq n^n$ para cada j . Portanto,

$$K(n) = \sum_{j=0}^n |w_j(x)| \leq (n+1)n^n.$$

Estuda-se agora a precisão da interpolação de Lagrange. Para tal menciona-se o seguinte teorema da análise numérica: "Seja a função $f(x)$ pertencente ao conjunto das

funções contínuas com derivadas contínuas até à ordem n no intervalo fechado $[a, b]$, e que tenha derivada da ordem de $n + 1$ no intervalo aberto (a, b) . Sejam x_0, x_1, \dots, x_n números distintos tais que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e seja $F(x)$ o único polinômio de grau menor ou igual a n tal que

$$F(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Para qualquer $x \in [x_0, x_n]$ tem-se que

$$f(x) - F(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (2.9)$$

para algum $c \in (a, b)$.

Para cada $k = 0, 1, 2, \dots$ pode-se definir o valor

$$M_k = \max_{x \in I} |f^{(k)}(x)| \quad (2.10)$$

onde $I = [x_0, x_n]$. E tem-se pelo corolário que diz: "Sob a hipótese do teorema anterior, se $f^{(n+1)}(x)$ é contínua em I e se $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$, então

$$|f(x) - F(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}." \quad (2.11)$$

É fácil mostrar que o maior valor de $|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$ está em um dos intervalos $x_0 \leq x \leq x_1$ e $x_{n-1} \leq x \leq x_n$. Além disto, este valor máximo não excede

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |(x-x_0)(x-x_1)| & \quad \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |(x-x_2)(x-x_3) \dots \\ & \quad \dots (x-x_n)| \leq \frac{n!}{4} h^{n+1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo a (2.12) e a (2.10) na (2.9), obtém-se a prova da expressão (2.11). Naturalmente a (2.11) é uma expressão que permite, uma vez que se conheça um limite para M_{n+1} e considerando-se todo o intervalo, obter um limitante para o erro do polinômio interpolador.

2.2.2 - Interpolação Hermitiana

Finalmente descreve-se a interpolação Hermitiana, o suficiente para ser utilizada posteriormente no item 2.2.3.

A interpolação Hermitiana não requer somente que $F(x)$ tenha os mesmos valores que $f(x)$ nos pontos de interpolação x_0, x_1, \dots, x_n , mas também exige que certas derivadas de $F(x)$ coincidam com aquelas de $f(x)$ em alguns destes pontos. Mais precisamente, escolhem-se os inteiros não negativos g_1, g_2, \dots, g_n como representantes de ordens de derivadas e, exige-se que para cada $k = 0, 1, \dots, n$, $F(x)$ e todas suas derivadas até a ordem g_k , inclusive, coincidam com $f(x)$ e suas correspondentes derivadas respectivamente. Assim têm-se

$$F(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.13)$$

e para cada k , tal que $g_k \geq 1$, têm-se também que

$$F^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k), \quad j = 1, 2, \dots, g_k \quad (2.14)$$

Agora demonstra-se que existe um único polinômio $F(x)$ de grau menor ou igual a m , onde

$$m = n + \sum_{j=0}^n g_j$$

e que satisfaz as condições (2.13) e (2.14).

Considere-se o problema de achar os $m + 1$ coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m tal que as $m + 1$ condições (2.13) e (2.14) sejam verdadeiras para

$$F(x) = \sum_{j=0}^m a_j (x-\alpha)^{m-j} \quad (2.15)$$

onde α é uma constante qualquer. Tem-se, então, um sistema de $m + 1$ equações lineares com $m + 1$ incógnitas. Considere-se o sistema homogêneo formado pelas (2.13) e (2.14) ao se substituir todos os seus membros à direita do sinal de igualdade por zeros. Qualquer solução a_0, a_1, \dots, a_m do sistema homogêneo permite que $F(x)$ seja dada pela (2.15). Evidente

mente $F(x)$ tem um zero de multiplicidade $g_k + 1$ para cada x_k . Consequentemente $F(x)$, que é um polinômio de grau menor ou igual a m , tem $m + 1$ zeros, logo $F(x) \equiv 0$. Portanto $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$. Pelo teorema: "Um polinômio de grau $n \geq 0$ tem exatamente n zeros, contando que um zero de multiplicidade m seja contado como m zeros", o fato que o sistema homogêneo tem a solução trivial, $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, implica que existe uma única solução para o sistema não homogêneo. Isto pelo seguinte teorema: "Um sistema de equações lineares tem uma única solução se e somente se o correspondente sistema homogêneo não tem outra solução exceto a trivial".

A expressão explícita para o caso em que cada g_k é zero ou um, é (expressando-se $F(x)$ pela fórmula de interpolação de Lagrange)

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{Q_k(x)}{Q_k(x_k)} \left[(1 - g_k(x-x_k)) \frac{Q_k'(x)}{Q_k'(x_k)} f(x_k) + g_k(x-x_k) f'(x_k) \right] \quad (2.16)$$

onde

$$Q_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x-x_j)^{g_j+1}. \quad (2.17)$$

Evidentemente $Q_k(x)$ é um polinômio de grau

$$\sum_{j=0}^n g_j + n + 1 - (g_k + 1) = n + \sum_{j=0}^n g_j - g_k.$$

Consequentemente $F(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a m , com

$$m = n + \sum_{j=0}^n g_j.$$

Além disso

$$F(x_s) = f(x_s), \quad s = 0, 1, 2, \dots, n$$

e

$$F'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{Q_k'(x)}{Q_k'(x_k)} \left[(1 - g_k(x-x_k)) \frac{Q_k'(x)}{Q_k'(x_k)} f(x_k) + g_k(x-x_k) f'(x_k) \right] + \sum_{k=0}^n \frac{Q_k(x)}{Q_k'(x_k)} \left[-g_k \frac{Q_k'(x)}{Q_k'(x_k)} f(x_k) + g_k f'(x_k) \right].$$

Portanto, se $g_s = 1$ tem-se que $Q_k'(x_s) = 0$ se $s \neq k$, e

$$F'(x_s) = f'(x_s), \quad s = 0, 1, 2, \dots, n$$

Feito isto, passa-se agora aos objetivos deste capítulo, isto é, à descrição dos processos mediante os quais, são obtidas as expressões aproximadas de derivadas a serem utilizadas nos capítulos 3 e 4.

2.2.3 Fórmulas de Derivação

Descrevem-se agora dois processos para a obtenção de expressões aproximadas para as derivadas de uma função $f(x)$, da qual se conhecem ou se admitem conhecidos os seus valores em alguns pontos bem definidos e algumas (ou nenhuma) derivadas em alguns destes pontos. Ambos os processos consistem em substituir a função $f(x)$ por um polinômio interpolador $P(x)$, determinado de acordo com a ordem de derivação que se deseja obter e com a quantidade de dados disponíveis para sua determinação. E tomar suas derivadas como valores aproximados das derivadas daquela função. A diferença existente entre esses processos é somente quanto ao tipo de interpolação exigida perante os dados disponíveis, uma vez que para sua determinação se utiliza, tanto para um como para outro, o método dos coeficientes indeterminados. Por isso chamar-se-ão esses processos de *processo de derivação Lagrangeana* e de *processo de derivação Hermitiana*, quando o polinômio interpolador é Lagran

geano ou Hermitiano, respectivamente. Para melhor esclarecê-los, desenvolvem-se dois exemplos, o primeiro quando é necessário a utilização do processo de derivação Lagrangeana e o segundo quando se necessita do outro processo.

Primeiro exemplo: Supõe-se que se deseje calcular as primeiras e segundas derivadas de uma função $f(x)$, da qual se conhecem apenas três valores, f_1, f_2, f_3 , em três pontos consecutivos, 1, 2, 3, igualmente espaçados de h (para facilitar) sobre os eixo dos x de um sistema de coordenadas $(x, (f(x), F(x)))$ (figura 2.1).

O primeiro passo, é determinar um polinômio que substitua $f(x)$ no intervalo fechado $[1,3]$. Pelos dados vê-se que esse deve ser do segundo grau. E que seus coeficientes podem ser determinados pelo método de interpolação de Lagrange. Isto é, escrevendo-se o polinômio da seguinte forma

$$F(x) = ax^2 + bx + c ,$$

e admitindo-se, sem perda de generalidade e para simplificar os cálculos, a origem do sistema de coordenadas no ponto 2 (figura 2.1), tem-se

$$F(-h) = f_1 = ah^2 - bh + c ,$$

$$F(0) = f_2 = c ,$$

$$F(h) = f_3 = ah^2 + bh + c ,$$

donde vem que

$$a = \frac{1}{2h^2} (f_1 - 2f_2 + f_3) ,$$

$$b = \frac{1}{2h} (-f_1 + f_3) ,$$

$$c = f_2 .$$

Portanto

$$F(x) = \frac{1}{2h^2} (f_1 - 2f_2 + f_3)x^2 + \frac{1}{2h} (-f_1 + f_3)x + f_2 \quad (2.18)$$

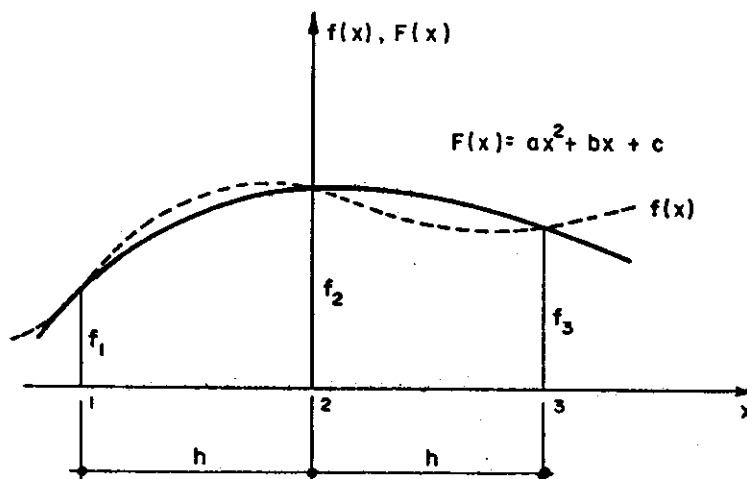


Figura 2.1

O próximo passo é o cálculo de suas primeiras e segundas derivadas. As primeiras derivadas valem

$$\begin{aligned}
 F'(-h) &= f'_1 = -2ah + b = \frac{1}{2h} (-3f_1 + 4f_2 - f_3) \\
 F'(0) &= f'_2 = b = \frac{1}{2h} (-f_1 + f_3) \quad (2.19a-c) \\
 F'(h) &= f'_3 = 2ah + b = \frac{1}{2h} (f_1 - 4f_2 + 3f_3).
 \end{aligned}$$

E as segundas, no caso por independermos de x , são todas iguais e valem

$$F''(x) = f''_1 = f''_2 = f''_3 = \frac{1}{h^2} (f_1 - 2f_2 + f_3). \quad (2.20)$$

As expressões de derivadas no ponto médio da sequência de pontos pré-determinados, são comumente denominadas de *diferenças finitas centrais ou simétricas*. E as nos demais pontos de *diferenças finitas assimétricas*, que recebem as denominações mais específicas de *diferenças finitas assimétricas progressivas* quando o ponto é o do extremo oposto ao sentido positivo do eixo dos x , e de *diferenças finitas assimétricas regressivas* quando o ponto é o do extremo oposto daquele.

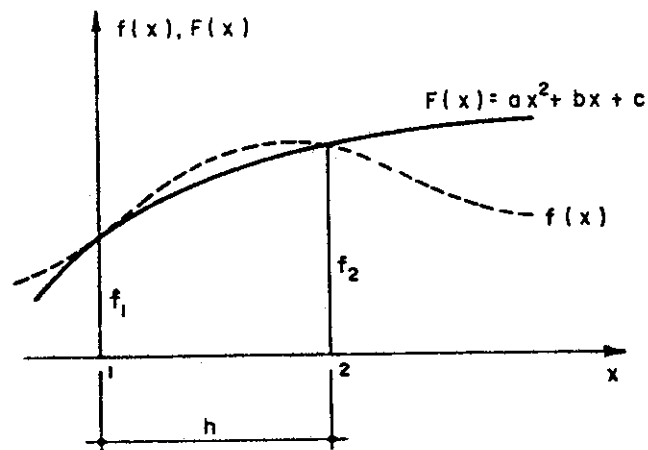


Figura 2.2

Segundo exemplo: Supõe-se o mesmo problema anterior, só que agora se conhecem apenas dois valores da $f(x)$ em dois pontos distintos 1,2, distanciados de h , e o valor de sua primeira derivada, por exemplo no ponto 1.

Analogamente ao primeiro exemplo, o polinômio é do segundo grau e é determinado da seguinte forma, pelo método de interpolação Hermitiana:

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

e fixando a origem, por exemplo, em 1, tem-se que

$$F(0) = f_1 = c,$$

$$F(h) = f_2 = ah^2 + bh + c,$$

$$F'(0) = f'_1 = b,$$

donde obtém-se

$$a = \frac{1}{h^2} (f_2 - f'_1 h - f_1),$$

$$b = f'_1,$$

$$c = f_1.$$

Portanto

$$F(x) = \frac{1}{h^2} (f_2 - f_1' h - f_1) x^2 + f_1' x + f_1. \quad (2.21)$$

Com isso as expressões de suas primeiras derivadas são:

$$\begin{aligned} F'(0) &= f_1' \\ F'(h) &= f_2' = 2ah + b = \frac{2}{h} (f_2 - f_1' h - f_1) + f_1', \end{aligned} \quad (2.22a-b)$$

e as segundas são todas iguais, por independermos de x , e valem

$$F''(x) = 2a = \frac{2}{h^2} (f_2 - f_1' h - f_1). \quad (2.23)$$

É óbvio que, devido à utilização de expressões aproximadas, existem erros que são inerentes às próprias formulações. Porém esses erros podem ser minimizados uma vez que geralmente dependem dos parâmetros utilizados nas formulações. No caso específico das expressões (2.19a-c) e (2.20) os erros são da ordem de h^2 . Vê-se, de imediato, que esses erros são menores quanto menor for o h adotado. Como também vê-se que as diferenças finitas centrais são mais precisas do que as assimétricas, e que as diferenças finitas Hermitianas parecem ser mais precisas ainda por levarem em consideração, também, valores de algumas derivadas da função incógnita.

2.3 - DEDUÇÕES DE EXPRESSÕES EM DIFERENÇAS FINITAS DE DERIVADAS

A seguir, deduzem-se todas as expressões em diferenças finitas que são utilizadas como expressões aproximadas de derivadas, nas discretizações do cálculo de cascas cilíndricas circulares, pelos processos descritos no item 2.2.3.

Essas expressões, são as obtidas por polinômios interpoladores do segundo e do quarto grau. Para a determinação desses polinômios, adota-se um sistema de coordenadas cartesianas $(x, F(x))$, cuja origem se fixa sempre no ponto mais adequado da sequência de pontos pré-determinados, para maior simplificação dos cálculos. Naturalmente, admitem-se também que os pontos da sequência estão igualmente espaçados sobre o eixo dos x , como elas realmente aparecem nas tais discretizações acima mencionadas.

A fim de simplificar a utilização dessas expressões, apresentam-se no item 2.3.3 todas elas na forma de "moléculas computacionais de diferenças finitas".

Uma observação. Como já visto, a utilização do processo de derivação Hermitiana é necessário quando se requer que derivadas cujos valores são conhecidos, ou são supostos conhecidos, sejam consideradas na determinação dos polinômios interpoladores. Mas por essas derivadas serem, no presente trabalho, todas nulas, não se expressarão os polinômios interpoladores e suas derivadas como ilustradas no segundo exemplo do item 2.2.3 (expressões 2.22a-b e 2.23). Já na própria determinação dos polinômios interpoladores se explicitam os valores dessas derivadas conhecidas. Com isso, o desenvolvimento da determinação desses polinômios interpoladores é feito analogamente ao método de interpolação Lagrangeana. Não se faz nenhuma referência quanto ao tipo de interpolação que será utilizado, pois isto fica patente no próprio desenvolvimento. Isto é, se os dados são só valores da função incógnita então a interpolação é Lagrangeana e, se entram também valores de derivadas a inter

polação é Hermitiana.

2.3.1 - Expressões de Derivadas obtidas por Polinômios Interpoladores do Segundo Grau

A primeira e segunda derivadas do polinômio do segundo grau

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

são

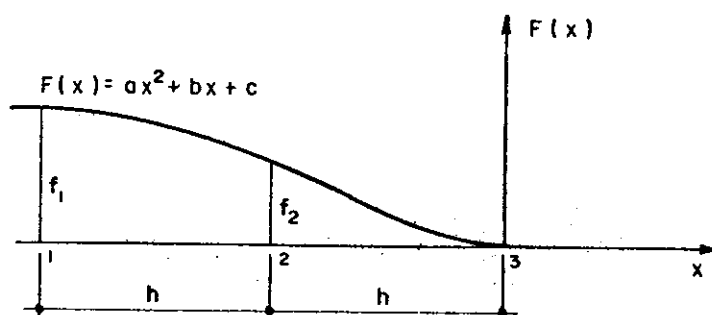
$$F'(x) = 2ax + b \quad \text{e} \quad F''(x) = 2a$$

Pe los objetivos já explicitados, cada polinômio interpolador é determinado visando atender objetivos mais específicos que os comumente encontrados em textos que tratam deste assunto. Melhor dizendo, procura-se obter expressões de derivadas já com as condições de contorno que a $f(x)$ tem que obedecer. Para isso impõem-se diretamente no polinômio interpolador tais condições de contorno.

2.3.1.1 - Expressões sem condições de contorno

Estas expressões são aquelas já desenvolvidas no primeiro exemplo do item 2.2.3 (expressões (2.19a-c) e (2.20)).

2.3.1.2 - Expressões com as condições de contorno usuais de Engastamento



As condições de contorno usuais de engastamento são

$$f_3 = 0, \quad f'_3 = 0.$$

Lembre-se que, no presente trabalho, $f_3 = 0$ e $f'_3 = 0$ implicam, respectivamente, em dizer que o deslocamento e a rotação neste ponto são nulos.

a) *Determinação dos Coeficientes de $F(x)$*

Pelas condições de contorno têm-se

$$f_3 = c = 0 \quad f'_3 = b = 0,$$

portanto

$$F(x) = ax^2.$$

Com isso, o coeficiente a pode ser determinado em função de f_2 . Portanto:

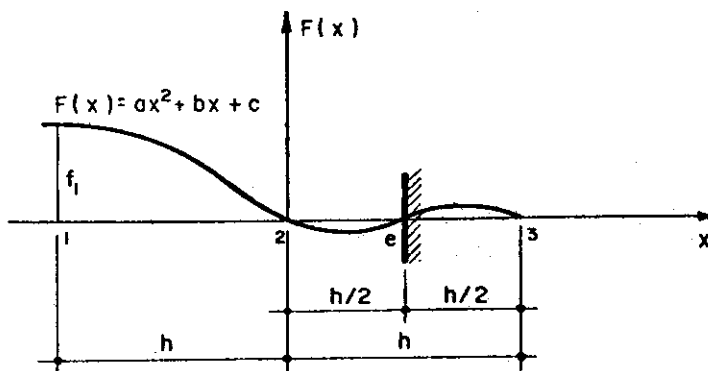
$$a = \frac{1}{h^2} (f_2)$$

a.1) *Expressões das derivadas no ponto 3*

$$F'(0) = f'_3 = 0$$

$$F''(0) = f''_3 = \frac{1}{h^2} (2f_2)$$

2.3.1.3 - Expressões com as condições de contorno de Stiefengaste



As condições de contorno de Stiefengaste são:

$$f_e = f_2 = f_3 = 0.$$

Aqui, lembre-se que $f_e = f_2 = f_3 = 0$ implicam em dizer que os deslocamentos nestes pontos (e, 2 e 3) são nulos.

Essas condições foram assim denominadas, por simplicidade nos capítulos seguintes, a fim de lembrar o nome do idealizador, E. Stiefel, deste tipo de engastamento.

a) *Determinação dos Coeficientes de $F(x)$*

Determina-se o polinômio $F(x)$ de modo que ele satisfaça as condições de contorno $f_e = f_2 = 0$ e que no ponto 1 valha f_1 , isto é

$$F\left(\frac{h}{2}\right) = f_e = 0 = a\left(\frac{h}{2}\right)^2 + b\frac{h}{2} + c$$

$$F(0) = f_2 = 0 = c$$

$$F(-h) = f_1 = ah^2 - bh + c.$$

Portanto

$$a = \frac{1}{3h^2} (2f_1)$$

$$b = \frac{1}{3h} (-f_1)$$

$$c = 0$$

Aqui não se utilizou a condição $f_3 = 0$ pelos seguintes motivos:

. Se fosse utilizada junto com as outras duas condições, obter-se-ia $F(x) \equiv 0$.

. Se fosse utilizada no lugar de $f_e = 0$ (então teria para a determinação de $F(x)$ as condições $F(-h) = f_1$, $F(0) = f_2 = 0$ e $F(h) = f_3 = 0$), isto implicaria em permitir que houvesse deslocamento dos pontos do engastamento, o que não é interessante, uma vez que, no caso, não se pretende estudar engastamento deslocável por menor que ele seja.

. E se fosse utilizada no lugar de $f_2 = 0$, ter-se-ia que o ponto 1 estaria distante do ponto e de $3h/2$, o que implicaria em cometer erro maior nas expressões de derivadas nestes pontos (veja item 2.2.3 Fórmulas de Derivação). Note-se que isso não é interessante, pois sempre se deseja minimizar o erro; além disso se estaria impondo um tipo de engastamento mais fraco que o usual.

a.1) Expressões das Derivadas no ponto 2

$$F'(0) = f'_2 = \frac{1}{12h} (-4f_1)$$
$$F''(0) = f''_2 = \frac{1}{12h^2} (16f_1).$$

2.3.2 - Expressões de Derivadas obtidas por Polinômios Interpoladores do Quarto Grau

As primeiras e segundas derivadas do polinômio do quarto grau

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

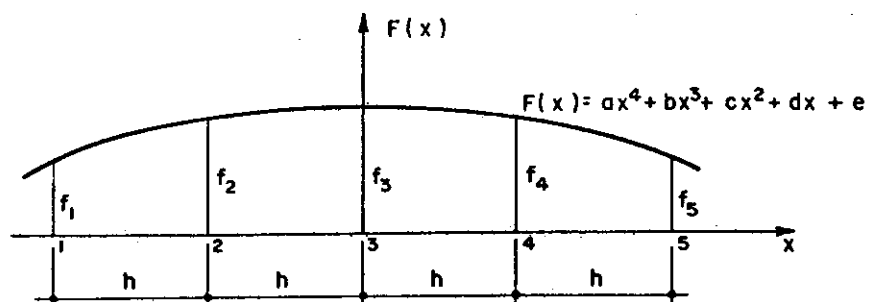
são:

$$F'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$F''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c.$$

Os objetivos aqui são os mesmos que os do caso com polinômios interpoladores do segundo grau.

2.3.2.1 - Expressões sem condições de contorno



a) Determinação dos Coeficientes de $F(x)$

Tem-se que

$$f_1 = 16h^4 a - 8h^3 b + 4h^2 c + 2hd + e$$

$$f_2 = h^4 a - h^3 b + h^2 c - hd + e$$

$$f_3 = e$$

$$f_4 = h^4 a + h^3 b + h^2 c + hd + e$$

$$f_5 = 16h^4 a + 8h^3 b + 4h^2 c + 2hd + e.$$

Donde, resolvendo esse sistema de equações, obtêm-se

$$a = \frac{1}{24h^4} (f_1 - 4f_2 + 6f_3 - 4f_4 + f_5)$$

$$b = \frac{1}{12h^3} (-f_1 + 2f_2 - 2f_4 + f_5)$$

$$c = \frac{1}{24h^2} (-f_1 + 16f_2 - 30f_3 + 16f_4 - f_5)$$

$$d = \frac{1}{12h} (f_1 - 8f_2 + 8f_4 - f_5)$$

$$e = f_3$$

a.1) Expressões das Derivadas - Diferenças Finitas

a.1.1) No ponto 1 (assimétrica progressiva)

$$F'(-2h) = f'_1 = \frac{1}{12h} (-25f_1 + 48f_2 - 36f_3 + 16f_4 - 3f_5)$$

$$F''(-2h) = f''_2 = \frac{1}{12h^2} (35f_1 - 104f_2 + 114f_3 - 56f_4 + 11f_5)$$

a.1.2) No ponto 2 (assimétrica)

$$F'(-h) = f'_2 = \frac{1}{12h} (-3f_1 - 10f_2 + 18f_3 - 6f_4 + f_5)$$

$$F''(-h) = f''_2 = \frac{1}{12h^2} (11f_1 - 20f_2 + 6f_3 + 4f_4 - f_5)$$

a.1.3) No ponto 3 (simétrica - central)

$$F'(0) = f'_3 = \frac{1}{12h} (f_1 - 8f_2 + 8f_4 - f_5)$$

$$F''(0) = f''_3 = \frac{1}{12h^2} (-f_1 + 16f_2 - 30f_3 + 16f_4 - f_5)$$

a.1.4) No ponto 4 (assimétrica)

$$F'(h) = f'_4 = \frac{1}{12h} (-f_1 + 6f_2 - 18f_3 + 10f_4 + 3f_5)$$

$$F''(h) = f''_4 = \frac{1}{12h^2} (-f_1 + 4f_2 + 6f_3 - 20f_4 + 11f_5)$$

a.1.5) No ponto 5 (assimétrica regressiva)

$$F'(2h) = f'_5 = \frac{1}{12h} (3f_1 - 16f_2 + 36f_3 - 48f_4 + 25f_5)$$

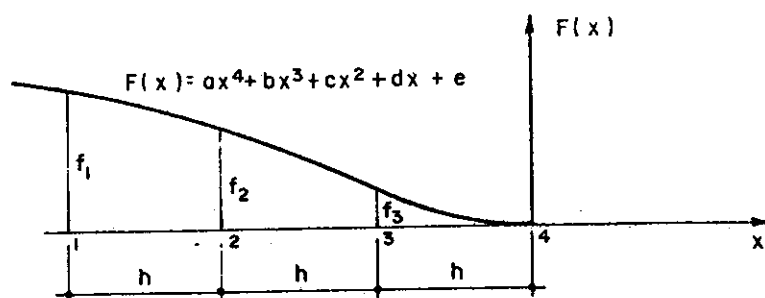
$$F''(2h) = f''_5 = \frac{1}{12h^2} (11f_1 - 56f_2 + 114f_3 - 104f_4 + 35f_5)$$

2.3.2.2 - Expressões com as condições de contorno usuais de engastamento

As condições de contorno usuais de engastamento são:

$$f_4 = 0, \quad f'_4 = 0,$$

onde, como já se frisou anteriormente, $f_4 = 0$ e $f'_4 = 0$ correspondem respectivamente à imposição de deslocamento e rotação nulos nesse ponto.



a) Determinação dos Coeficientes de $F(x)$

Pelas condições de contorno têm-se que

$$f_4 = 0 = F(0) \Rightarrow e = 0$$

$$f'_4 = 0 = F'(0) \Rightarrow d = 0.$$

Portanto

$$f_1 = 81h^4 a - 27h^3 b + 9h^2 c$$

$$f_2 = 16h^4 a - 8h^3 b + 4h^2 c$$

$$f_3 = h^4 a - h^3 b + h^2 c.$$

Donde obtêm-se

$$a = \frac{1}{36h^4} (2f_1 - 9f_2 + 18f_3)$$

$$b = \frac{1}{36h^3} (6f_1 - 36f_2 + 90f_3)$$

$$c = \frac{1}{36h^2} (4f_1 - 27f_2 + 108f_3)$$

a.1) Expressões das Derivadas - Diferenças Finitas

a.1.1) No ponto 3

$$F'(-h) = f'_3 = \frac{1}{18h} (f_1 - 9f_2 - 9f_3)$$

$$F''(-h) = f''_3 = \frac{1}{18h^2} (-2f_1 + 27f_2 - 54f_3)$$

a.1.2) No ponto 4

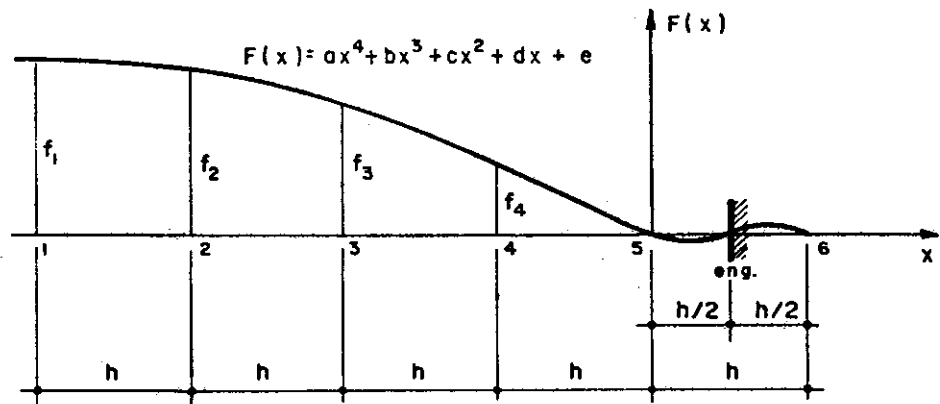
$$F'(0) = f'_4 = 0$$

$$F''(0) = f''_4 = \frac{1}{18h^2} (4f_1 - 27f_2 + 108f_3)$$

2.3.2.3 - Expressões com as condições de contorno de Stiefengaste

As condições de contorno de Stiefengaste são:

$$f_5 = f_e = f_6 = 0 .$$



onde elas têm o mesmo significado observado no item 2.3.1.3.

a) Determinação dos coeficientes de $F(x)$ pelos valores da $f(x)$ nos pontos 3, 4, 5, eng., 6.

Analogamente ao caso anterior, e fixando-se a origem no ponto 5, tem-se pelas condições de contorno e pela Interpolação de Lagrange, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}0 &= e \\0 &= \frac{h^4}{16} a + \frac{h^3}{8} b + \frac{h^2}{4} c + \frac{h}{2} d \\0 &= h^4 a + h^3 b + h^2 c + h d \\f_4 &= h^4 a - h^3 b + h^2 c - h d \\f_3 &= 16h^4 a - 8h^3 b + 4h^2 c - 2hd\end{aligned}$$

que resolvendo obtêm-se

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{15h^2} (f_3 - 5f_4) \\b &= \frac{1}{30h^3} (-f_3 - 5f_4) \\c &= \frac{1}{90h^2} (-6f_3 + 75f_4) \\d &= \frac{1}{30h} (f_3 - 10f_4)\end{aligned}$$

a.1) Expressões das Derivadas no ponto 5

$$F'(0) = f'_5 = \frac{1}{30h} (f_3 - 10f_4)$$

$$F''(0) = f''_5 = \frac{1}{45h^2} (-6f_3 + 75f_4)$$

b) Determinação dos Coeficientes de $F(x)$ pelos valores de $f(x)$ nos pontos 2, 3, 4, 5, eng.

Para este caso, admitindo e fixando-se a origem do eixo x no ponto 5, as seguintes condições para a determinação do polinômio do quarto grau $F(x)$ são:

$$\begin{aligned} F(-3h) = f_2 ; \quad F(-2h) = f_3 ; \quad F(-h) = f_4 ; \\ ; \quad F(0) = f_5 = 0 ; \quad F\left(\frac{h}{2}\right) = f_{eng} = 0. \end{aligned}$$

Donde obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$f_2 = 81h^4 a - 27h^3 b + 9h^2 c - 3hd + e$$

$$f_3 = 16h^4 a - 8h^3 b + 4h^2 c - 2hd + e$$

$$f_4 = h^4 a - h^3 b + h^2 c - hd + e$$

$$0 = e$$

$$0 = \frac{h^4}{16} a + \frac{h^3}{8} b + \frac{h^2}{4} c + \frac{h}{2} d + e ,$$

cuja solução é:

$$a = \frac{1}{420h^4} (20f_2 - 84f_3 + 140f_4)$$

$$b = \frac{1}{420h^3} (50f_2 - 294f_3 + 630f_4)$$

$$c = \frac{1}{420h^2} (10f_2 - 84f_3 + 450f_4)$$

$$d = \frac{1}{420h} (-20f_2 + 126f_3 - 420f_4)$$

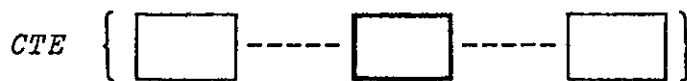
b.1) Expressões das Derivadas no ponto 4

$$F'(-h) = f'_4 = \frac{1}{420h} (30f_2 - 252f_3 - 70f_4)$$

$$F''(-h) = f_4'' = \frac{1}{420h^2} (-40f_2 + 588f_3 - 1120f_4)$$

2.3.3 - Resumo das Expressões em Diferenças Finitas de Derivadas Obtidas com o Emprego de Polinômios Interpoladores Lagrangeanos do Segundo Grau e do Quarto Grau (item 2.3)

A nomenclatura a ser seguida neste resumo é, além daquelas já impostas neste capítulo 2:



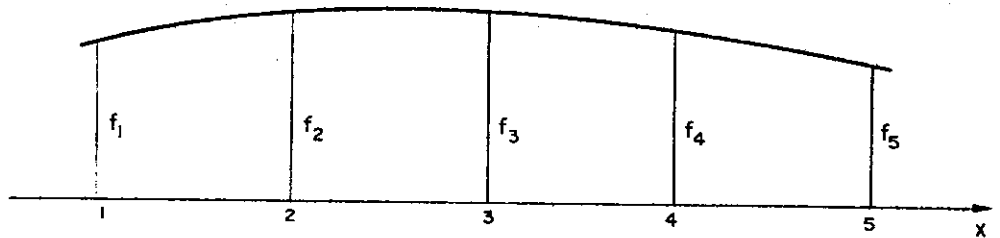
Molécula computacional unidimensional de derivada no ponto representado pelo retângulo em negrito. Os retângulos representam os elementos da molécula. Cada retângulo contém um valor que é o fator que deve ser multiplicado pelo valor da função $f(x)$ neste ponto.

CTE

constante de multiplicação.

2.3.3.1 - Expressões obtidas com o emprego de polinômio interpolador do segundo grau (item 2.3.1)

a) Sem condições de contorno (com erro da ordem de h^2)



$$f'_3 = \frac{1}{2h} \left\{ \boxed{+1} \text{---} \boxed{-4} \text{---} \boxed{+3} \right\}$$

$$f'_2 = \frac{1}{2h} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{+1} \right\}$$

$$f'_3 = \frac{1}{2h} \left\{ \boxed{-3} \text{---} \boxed{+4} \text{---} \boxed{-1} \right\}$$

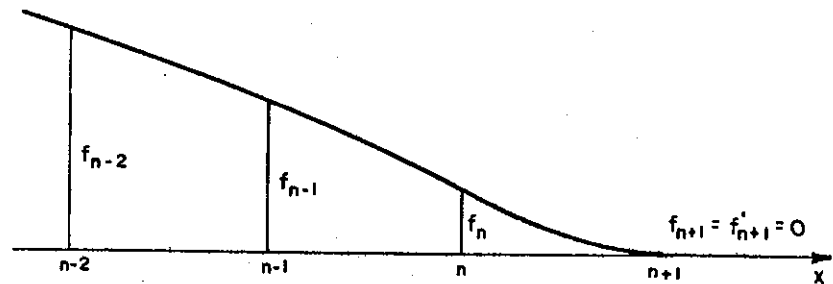
$$f'_4 = \frac{1}{2h} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{+1} \right\}$$

$$f''_3 = \frac{1}{h^2} \left\{ \boxed{+1} \text{---} \boxed{-2} \text{---} \boxed{+1} \right\}$$

$$f''_2 = \frac{1}{h^2} \left\{ \boxed{+1} \text{---} \boxed{-2} \text{---} \boxed{+1} \right\}$$

$$f''_4 = \frac{1}{h^2} \left\{ \boxed{+1} \text{---} \boxed{-2} \text{---} \boxed{+1} \right\}$$

b) Com as Condições de Contorno Usuais de Engastamento (com erro da ordem de h^2)



$$f'_{n+1} = \frac{1}{2h} \left\{ \boxed{0} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

$$f'_n = \frac{1}{2h} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

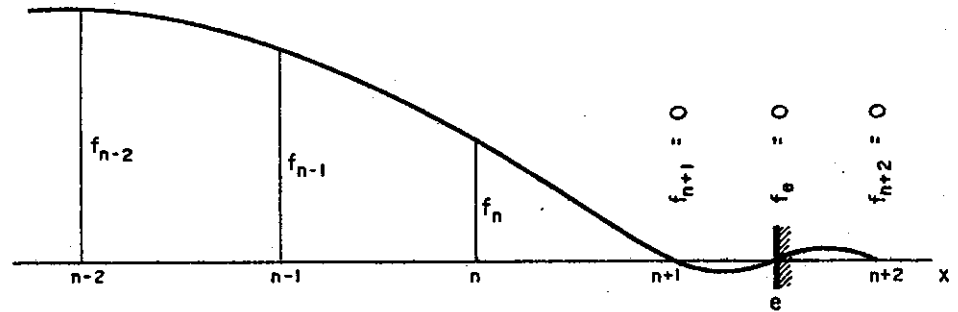
$$f'_{n-1} = \frac{1}{2h} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{+1} \right\}$$

$$f''_{n+1} = \frac{1}{h^2} \left\{ \boxed{0} \text{---} \boxed{+2} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

$$f''_n = \frac{1}{h^2} \left\{ \boxed{+1} \text{---} \boxed{-2} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

$$f''_{n-1} = \frac{1}{h^2} \left\{ \boxed{+1} \text{---} \boxed{-2} \text{---} \boxed{+1} \right\}$$

c) Com as Condições de Contorno de Stiefengaste (com erro da ordem de h^2)



$$f'_{n+1} = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{-4} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

$$f'_n = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{-6} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

$$f'_{n-1} = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{-6} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{+6} \right\}$$

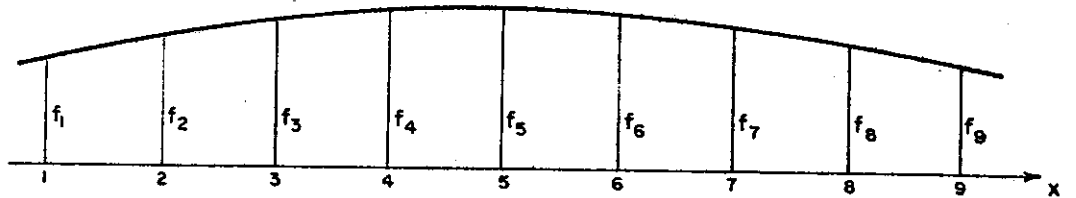
$$f''_{n+1} = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{+16} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

$$f''_n = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{+12} \text{---} \boxed{-24} \text{---} \boxed{0} \right\}$$

$$f''_{n-1} = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{+12} \text{---} \boxed{-24} \text{---} \boxed{+12} \right\}$$

2.3.3.2 - Expressões obtidas com o emprego de Polinômio In-
terpolador do quarto grau (item 2.3.2)

a) Sem Condições de Contorno (com erro da ordem de h^4)



$$f'_5 = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{+3} \text{---} \boxed{-16} \text{---} \boxed{+36} \text{---} \boxed{-48} \text{---} \boxed{+25} \right\}$$

$$f'_4 = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{+6} \text{---} \boxed{-18} \text{---} \boxed{+10} \text{---} \boxed{+3} \right\}$$

$$f'_3 = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{1} \text{---} \boxed{-8} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{+8} \text{---} \boxed{-1} \right\}$$

$$f'_5 = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{-25} \text{---} \boxed{+48} \text{---} \boxed{-36} \text{---} \boxed{+16} \text{---} \boxed{-3} \right\}$$

$$f'_6 = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{-3} \text{---} \boxed{-10} \text{---} \boxed{+18} \text{---} \boxed{-6} \text{---} \boxed{1} \right\}$$

$$f'_7 = \frac{1}{12h} \left\{ \boxed{1} \text{---} \boxed{-8} \text{---} \boxed{0} \text{---} \boxed{+8} \text{---} \boxed{-1} \right\}$$

$$f''_5 = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{+11} \text{---} \boxed{-56} \text{---} \boxed{+114} \text{---} \boxed{-104} \text{---} \boxed{+35} \right\}$$

$$f''_4 = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{+4} \text{---} \boxed{+6} \text{---} \boxed{-20} \text{---} \boxed{+11} \right\}$$

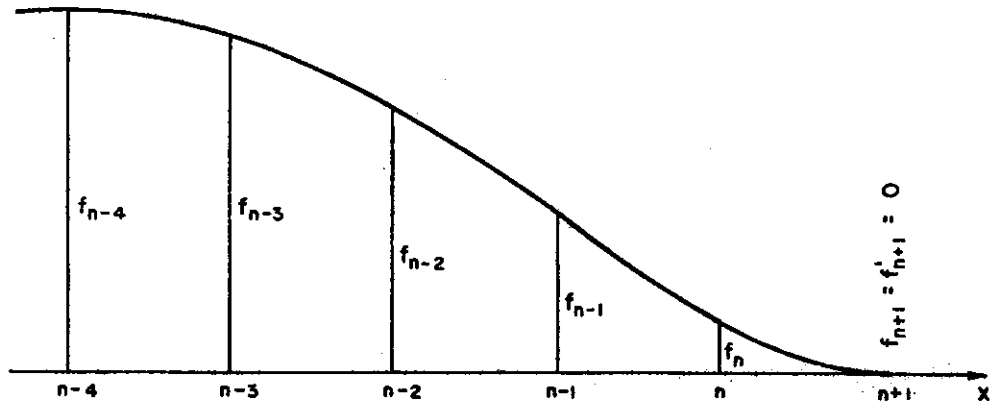
$$f''_3 = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{+16} \text{---} \boxed{-30} \text{---} \boxed{+16} \text{---} \boxed{-1} \right\}$$

$$f''_5 = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{+35} \text{---} \boxed{-104} \text{---} \boxed{+114} \text{---} \boxed{-56} \text{---} \boxed{+11} \right\}$$

$$f''_7 = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{+11} \text{---} \boxed{-20} \text{---} \boxed{+6} \text{---} \boxed{+4} \text{---} \boxed{-1} \right\}$$

$$f''_8 = \frac{1}{12h^2} \left\{ \boxed{-1} \text{---} \boxed{+16} \text{---} \boxed{-30} \text{---} \boxed{+16} \text{---} \boxed{-1} \right\}$$

b) Com as Condições de Contorno Usuais de Engastamento (com erro da ordem de h^4)



$$f'_{n+1} = \frac{1}{36h} \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$f'_n = \frac{1}{36h} \left\{ \begin{array}{cccc} +2 & -18 & -18 & 0 \end{array} \right\}$$

$$f'_{n-1} = \frac{1}{36h} \left\{ \begin{array}{cccc} +3 & -24 & 0 & +24 & 0 \end{array} \right\}$$

$$f'_{n-2} = \frac{1}{36h} \left\{ \begin{array}{ccccc} +3 & -24 & 0 & +24 & -3 \end{array} \right\}$$

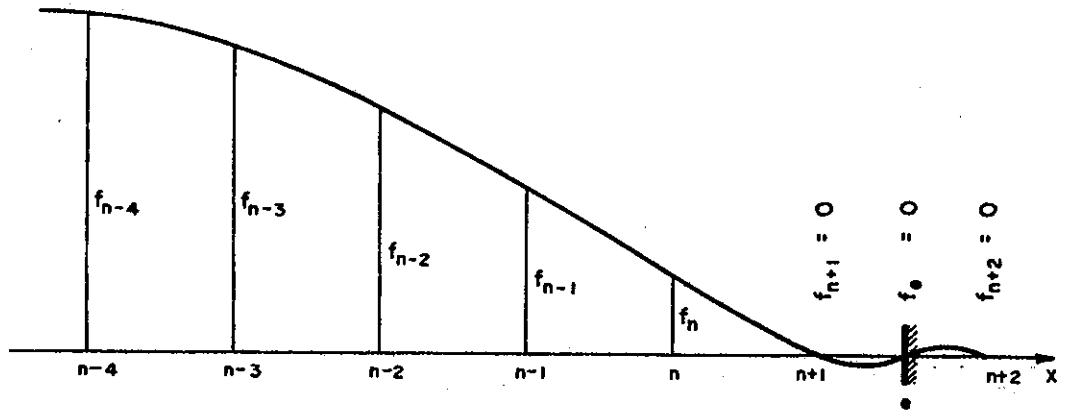
$$f''_{n+1} = \frac{1}{36h^2} \left\{ \begin{array}{cccc} +8 & -54 & +216 & 0 \end{array} \right\}$$

$$f''_n = \frac{1}{36h^2} \left\{ \begin{array}{cccc} -4 & +54 & -108 & 0 \end{array} \right\}$$

$$f''_{n-1} = \frac{1}{36h^2} \left\{ \begin{array}{ccccc} -1,5 & +24 & -45 & +24 & 0 \end{array} \right\}$$

$$f''_{n-2} = \frac{1}{36h^2} \left\{ \begin{array}{ccccc} -3 & +48 & -60 & +48 & -3 \end{array} \right\}$$

- c) Com as Condições de Contorno de Stiefengaste (com erro da ordem de h^4)



$$f'_{n+1} = \frac{1}{420h} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +14 & -140 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$f'_n = \frac{1}{420h} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +30 & -252 & -70 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$f'_{n-1} = \frac{1}{420h} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +35 & -280 & 0 & +280 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$f'_{n-2} = \frac{1}{420h} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline +35 & -280 & 0 & +280 & -35 \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$f''_{n+1} = \frac{1}{420h^2} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -56 & +700 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$f''_n = \frac{1}{420h^2} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -40 & +588 & -1120 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$f''_{n-1} = \frac{1}{420h^2} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -35 & +560 & -1050 & +560 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$f''_{n-2} = \frac{1}{420h^2} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -35 & +560 & -1050 & +560 & -35 \\ \hline \end{array} \right\}$$

3.0 ENSAIOS DE AFERIÇÃO: DISCRETIZAÇÕES DO CÁLCULO VARIACIONAL DE RESERVATÓRIO CILÍNDRICO CIRCULAR

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, como diz o próprio título, procura-se avaliar quantitativamente as discretizações quanto ao emprego de diferenças finitas obtidas por meio de polinômios interpoladores, Lagrangeanos e Hermitianos de segundo grau no cálculo variacional de cascas utilizadas no capítulo seguinte. Utilizou-se esse grau de polinômio para a obtenção de expressões aproximadas de derivadas que definem a energia de deformação, por se tratar, aparentemente, de derivadas de primeira ou de segunda ordem, não havendo então maior interesse em utilizar, no momento, polinômio de interpolação de grau mais elevado. Todavia a minimização do funcional leva, afinal, a expressões que correspondem às expressões, em diferenças finitas, de derivadas até de quarta ordem (o que é natural, pois essa minimização leva, afinal,

a equações diferenciais de equilíbrio); assim, a conveniência de se utilizarem polinômios de terceiro e quarto grau parece merecer alguma reflexão. Procura-se também avaliar quantitativamente as possibilidades de algumas aproximações quanto ao emprego desses polinômios e de quarto grau para o cálculo das rotações e esforços. Visa-se com isso poder utilizar as melhores aproximações para o cálculo dessas grandezas da estrutura analisada no capítulo 4.

Para tanto os resultados das aproximações são confrontados com os oriundos da *solução exata* de uma estrutura tomada como padrão de referência, o *clássico reservatório cilíndrico circular com parede de espessura constante, perfeitamente engastada em sua base*.

As expressões exatas relativas a esse reservatório (que podem ser encontradas em BELLUZZI(1957), ou em outros textos dedicados às cascas) são apresentadas no item 3.2, no qual se indicam também os valores adotados para posteriores confrontos numéricos. Os dados são admitidos de modo a permitir imediato confronto, também, com os resultados numéricos oriundos da aplicação das mesmas aproximações à estrutura analisada no capítulo seguinte.

A energia é aproximada sempre mediante polinômios interpoladores Lagrangeanos ou Hermitianos do segundo grau, como também as condições de contorno; todavia ao passo que numa primeira série de ensaios são expressas como usualmente, isto é, com *malhas habituais* (resultando, para o engastamento, $w_e = 0, w_{e-1} = w_{e+1}$), na segunda série empregam-se *malhas duais* (assim denominadas a fim de compatibilizá-las com aquelas dadas no capítulo 4), exprimindo o que, por simplicidade, já se denominou "Stienfengaste" ($w_e = w_{e-1} = w_{e+1} = 0$).

Note-se que esse último tipo de engastamento é muito mais forte que o anterior, pois para que ele implique praticamente nos mesmos efeitos que o usual, há a necessidade de que os dois pontos, $(e-1)$ e $(e+1)$, estejam bem próximos ao do engastamento (e) . Com o emprego de rede de malhas quadradas e iguais (que é o caso), isto é conseguido

somente com o refinamento da malha. Por isso emprega-se rede dual a fim de permitir que esses dois pontos se aproximem mais rapidamente ao do engastamento, ao se ir refinando a malha, do que se conseguiria com rede habitual, uma vez que, com aquela rede, os pontos $(e-1)$ e $(e+1)$ ficam distantes do ponto (e) de apenas $h/2$ e não de h se se empregasse a outra.

Feitas essas aproximações, passa-se à minimização da energia potencial total, resultando dois sistemas de equações lineares, correspondendo um à condição *usual* de engastamento perfeito e o outro à condição de *Stiefengaste*.

Os dois sistemas são resolvidos para diversas subdivisões da altura total H do reservatório, adotado como padrão dos ensaios. Obtidos os deslocamentos, passa-se ao cálculo, apenas, das rotações ψ e dos momentos M_x ao longo da geratriz genérica. Não se calcula N_θ por ele poder ser obtido simplesmente multiplicando-se os deslocamentos por um fator e, M_ϕ por admitir-se coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e, Q_x por não ser calculado para a estrutura analisada no capítulo seguinte, por motivos lá mencionados; consequentemente face ao objetivo deste capítulo 3 não há nenhum interesse também, no momento, em discretizar tal cálculo. Esses efeitos são novamente aproximados mediante polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos de segundo e de quarto grau (aqui denominados também de *PI-2* e *PI-4* respectivamente), sobre *malhas habituais* e sobre as *malhas duais*. Resultam com isso, quatro diferentes aproximações desses efeitos: com *PI-2* (ou com *PI-4*) sobre as malhas habituais e com *PI-2* (ou *PI-4*) sobre as malhas duais (*Stiefengaste*). Nos quatro casos as funções interpoladoras são definidas nos pontos próximos às bordas engastadas, impondo-se explicitamente as correspondentes condições de contorno: com *PI-2* ou com *PI-4*, admitem-se $w_{e+1} = w_{e-1}$ (além de $w_e = 0$, já imposto ao se resolver o sistema minimizante) sobre as malhas habituais, ou se tem $w_{e+1} = w_e = w_{e-1} = 0$ (*Stiefengaste*) no caso das malhas duais (com *PI-2* e com *PI-4*).

Além disso, resolveu-se também calcular as rotações e momentos sem essa nova imposição das condições de engastamento às funções interpoladoras. Naturalmente, ficam com isso afetados apenas os valores dos efeitos em pontos próximos às bordas. A discrepância entre os valores assim calculados das rotações e seu valor limite-nulo-já fornece uma medida da eficácia com que as condições de contorno foram impostas ao se calcular a energia. E por surpreendente que isto possa parecer, os efeitos (rotação e momento) calculados com essas interpolações podem ser mais aproximados que os calculados anteriormente quando rotações e momentos foram obtidos reimpondo-se explicitamente, às funções interpoladoras dos deslocamentos, as condições de contorno.

As duas aproximações dos deslocamentos e as oito aproximações das rotações e dos momentos são finalmente confrontadas com os respectivos valores obtidos com a *solução analítica*, mediante tabelas e gráficos que permitem uma boa visualização, inclusive quantitativa da convergência das diversas aproximações, que estão apresentadas no item 3.5.

3.2 - PADRÃO: SOLUÇÃO ANALÍTICA DO RESERVATÓRIO CILÍNDRICO DE ESPESSURA CONSTANTE

Adota-se um reservatório cilíndrico com parede de espessura constante, perfeitamente engastada na base. Nos cálculos admite-se que o líquido contido atinge o coroamento do reservatório. As dimensões destes são tais que a casca cilíndrica incompleta analisada no item 4 pode ser considerada como obtida deste reservatório cortando-o com um ângulo diedro de 120° de abertura e de aresta coincidente com o eixo do reservatório, e engastando perfeitamente nas duas bordas verticais resultantes a porção de parede compreendida neste ângulo diedro, cuja base já está perfeitamente engastada. O coroamento é suposto livre de qualquer vínculo.

No tratamento analítico, cujas expressões fundamentais são dadas a seguir, a parede é suposta baixa: em outras palavras, as constantes de integração da equação diferencial são quatro, duas correspondentes ao engastamento inferior e duas resultantes da condição de não haver vínculo no coroamento. Os dados numéricos admitidos permitiriam adotar a solução aproximada, também clássica, na qual a observação do rápido amortecimento dos efeitos autoriza o abandono de dois termos da solução geral da equação diferencial homogênia, tornando portanto desnecessárias as duas constantes de integração intérpretes do vínculo do coroamento. No caso particular aqui tomado como referência, os erros oriundos dessa simplificação seriam da ordem de 1%, perfeitamente aceitáveis para fins práticos, mas inconvenientes em resultados numéricos estabelecidos como padrão de referência. Daí a utilização da solução obtida sem desprezar os dois termos crescentes a partir do engastamento.

A solução a seguir apresentada, pode ser encontrada em qualquer texto dedicado às cascas, em particular, em BELLUZZI(1957), Vol. II pg. 312 de onde foi extraída.

3.2.1 - Expressões Fundamentais

Considere-se um tubo cilíndrico, de módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν , de raio médio R e de espessura d , sujeito à pressão p normal à parede (positiva para fora). A espessura e a pressão podem ser constantes ou variáveis ao longo das geratrizes, mas são supostas constantes ao longo das diretrizes. Sendo w o deslocamento radial do ponto genérico (positivo para fora), a equação diferencial que define o comportamento estático do tubo é, como se sabe, quando a espessura d é constante

$$\frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^4 w}{dx^4} + \beta w = p \quad (3.1)$$

que pode ser escrita como

$$Kw^{IV} + \beta w = p. \quad (3.2)$$

Nestas equações, x é a abcissa medida ao longo da geratriz genérica, K é a rigidez $Ed^3/12(1-\nu^2)$, já definida no item 1.4.2.2 e $\beta = Ed/R^2$.

Integrada a equação diferencial, os esforços e a rotação da tangente à geratriz deformada em relação à geratriz antes da deformação, são dadas por (aqui também os ápi

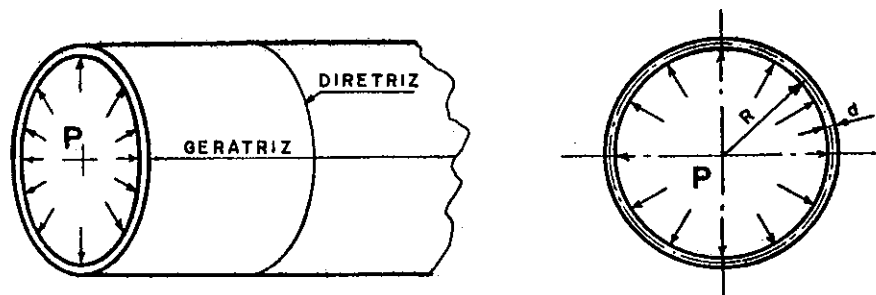


Figura 3.1 - Tubo cilíndrico de raio médio R e de espessura d , sujeito a pressão p .

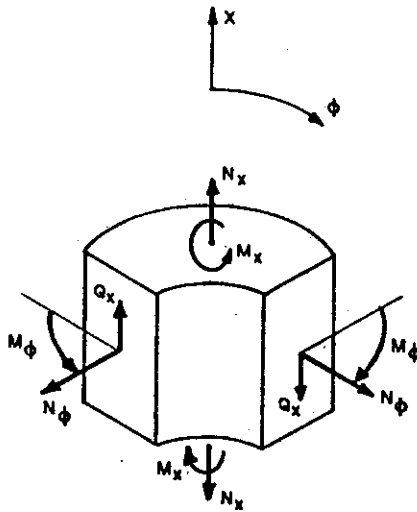


Figura 3.2 - Esforços solicitantes.

ces indicam derivadas em relação a x):

$$N_{\phi} = \frac{Ed}{R} w$$

$$\psi = -w'$$

$$M_x = Kw''$$

(3.3a-e)

$$Q_x = Kw'''$$

$$M_{\phi} = \nu M_x$$

Com

$$\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\beta/4K} = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} / \sqrt{Rd}$$

a equação (3.2), pode ser escrita como

$$w^{IV} + 4\bar{\alpha}^4 w = p/K \tag{3.4}$$

e a integral geral da equação homogênea associada é dada por

$$w = C_1 e^{\bar{\alpha}x} \text{sen} \bar{\alpha}x + C_2 e^{\bar{\alpha}x} \text{cos} \bar{\alpha}x + C_3 e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen} \bar{\alpha}x + C_4 e^{-\bar{\alpha}x} \text{cos} \bar{\alpha}x \tag{3.5}$$

ou

$$w = D_1 \operatorname{sen} \bar{\alpha} x \operatorname{Sh} \bar{\alpha} x + D_2 \operatorname{sen} \bar{\alpha} x \operatorname{Ch} \bar{\alpha} x + \\ + D_3 \operatorname{cos} \bar{\alpha} x \operatorname{Sh} \bar{\alpha} x + D_4 \operatorname{cos} \bar{\alpha} x \operatorname{Ch} \bar{\alpha} x \quad (3.6)$$

Em se tratando de tubos de comprimento infinito (e na prática mesmo no caso de tubos não muito curtos, como adiante melhor se dirá), vinculados segundo uma das diretrizes extremas, pode-se estabelecer a origem das abscissas nessa diretriz, com o que se tem, imediatamente,

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Com isso a equação (3.5) reduz-se a

$$w = C_3 e^{\bar{\alpha} x} \operatorname{sen} \bar{\alpha} x + C_4 e^{-\bar{\alpha} x} \operatorname{cos} \bar{\alpha} x. \quad (3.7)$$

Pondo

$$C_3 = C \operatorname{cos} \psi, \quad C_4 = C \operatorname{sen} \psi,$$

onde C é uma nova constante e ψ é um ângulo de fase dados por:

$$C = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{C_4}{C_3},$$

a anterior assume então a forma

$$w = C e^{-\bar{\alpha} x} \operatorname{sen}(\bar{\alpha} x + \psi)$$

ficando assim evidenciada a variação senoidal amortecida dos w , com o fator de amortecimento $e^{-\bar{\alpha} x}$. O comprimento de onda é definido por

$$\bar{\alpha} \lambda = 2\pi,$$

obtendo-se portanto,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\bar{\alpha}} = \frac{2\pi}{\frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\nu^2}} \sqrt{Rd} \cong 4.83 \sqrt{Rd}.$$

E a derivada w' é

$$w' = -C \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha} x} \{\operatorname{sen}(\bar{\alpha} x + \psi) - \operatorname{cos}(\bar{\alpha} x + \psi)\} = \\ = -C \sqrt{2} \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha} x} \{\operatorname{sen}(\bar{\alpha} x + \psi) \operatorname{cos} 45^\circ - \operatorname{cos}(\bar{\alpha} x + \psi) \operatorname{sen} 45^\circ\} = \\ = -C \sqrt{2} \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha} x} \operatorname{sen}(\bar{\alpha} x + \psi - \pi/4) = \\ = C \sqrt{2} \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha} x} \operatorname{sen}(\bar{\alpha} x + \psi + 3\pi/4)$$

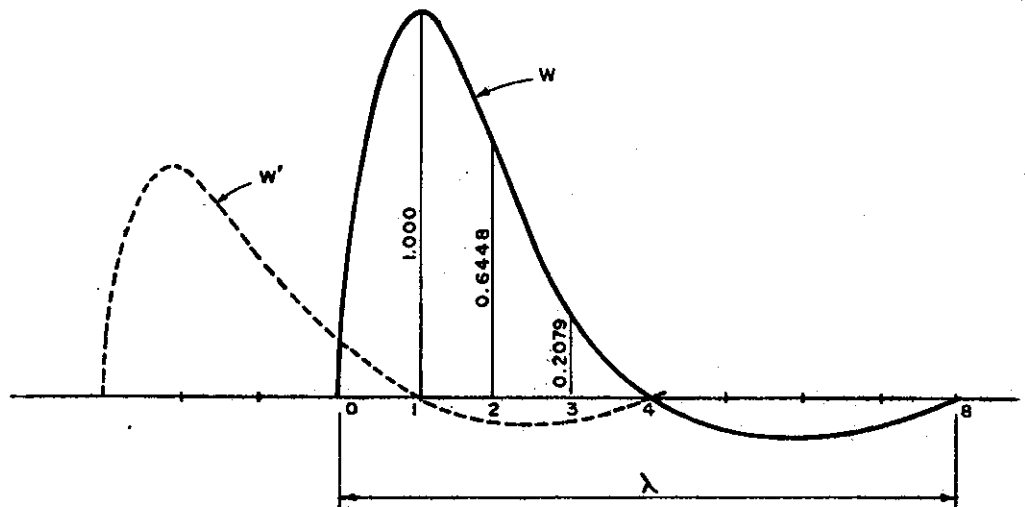


Figura 3.3 - Variação de w e w' devido o fator de amortecimento, admitindo-se $\psi = 0$.

A derivação de $w(x)$ efetua-se portanto multiplicando a função por $-\sqrt{2} \bar{\alpha}$ e diminuindo o ângulo de fase ψ de $\pi/4$, ou multiplicando-o por $\sqrt{2} \bar{\alpha}$ e aumentando ψ de $3\pi/4$. Portanto, w' varia de maneira semelhante à de w , mas com um adiantamento de fase de $3\lambda/8$. Logo, os pontos onde w é máximo seguem de $\lambda/8$ àqueles onde w é nulo, como mostra a figura 3.3, na qual se supôs $\psi = 0$ (note-se que, não fora o fator de amortecimento $e^{-\bar{\alpha}x}$, os pontos onde w é máximo seguiriam de $\lambda/4$ àqueles onde w é nulo, como na senoide).

Para as derivadas w'' e w''' , e portanto também para M_x e Q_x , pode-se repetir o que se disse para w' . Cada derivação leva a multiplicar a função por $-\sqrt{2} \bar{\alpha}$ e a diminuir o argumento de $\pi/4$, obtendo-se, portanto:

$$\begin{aligned}
 w &= C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi) \\
 w' &= -\sqrt{2} \bar{\alpha} C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - \pi/4) \\
 w'' &= 2 \bar{\alpha}^2 C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - \pi/2) \\
 w''' &= -2\sqrt{2} \bar{\alpha}^3 C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - 3\pi/4)
 \end{aligned}
 \tag{3.8a-d}$$

isto é:

$$\begin{aligned} w &= C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi) \\ \psi &= \sqrt{2} \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - \pi/4) \\ M_x &= 2 \bar{\alpha}^2 K C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - \pi/2) \\ Q_x &= -2\sqrt{2} \bar{\alpha}^3 K C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - 3\pi/4) \end{aligned} \quad (3.9a-d)$$

ou ainda, fazendo ($4\bar{\alpha}^4 K = \beta$):

$$\begin{aligned} M_x &= (\beta/2 \bar{\alpha}^2) C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - \pi/2) \\ Q_x &= \sqrt{2} (\beta/2 \bar{\alpha}) C e^{-\bar{\alpha}x} \text{sen}(\bar{\alpha}x + \psi - 3\pi/4) \end{aligned} \quad (3.10a-b)$$

Como será observado, esta solução pode ser empregada da mesmo quando o comprimento do tubo é finito, desde que não muito inferior ao comprimento de onda λ .

Até aqui, indicaram-se as soluções para tubo curto (4 constantes de integração) e para tubo de comprimento infinito ou bastante grande (2 constantes de integração), *sem definir vínculos*, num ou noutro caso.

Examina-se agora o caso do reservatório cilíndrico de espessura constante, engastado numa das bordas. (Figura 3.4).

Se a altura H da parede for suficientemente grande (por exemplo, $H > \lambda$), pode-se utilizar a solução aproximada (com duas constantes), correspondente ao tubo de comprimento infinito. Então, se o líquido de densidade γ_l , atinge o coroamento, e medindo x a partir da borda inferior, engastada tem-se:

$$w = \frac{\gamma_l R^2}{Ed} (H-x) + e^{-\bar{\alpha}x} (C_3 \text{sen} \bar{\alpha}x + C_4 \text{cos} \bar{\alpha}x) \quad (3.11)$$

As constantes C_3 e C_4 determinam-se mediante as condições de vinculação da borda inferior (pois as da borda superior não têm influência apreciável sobre os valores de C_3 e C_4 e sobre o regime estático na proximidade do fundo). A borda inferior sendo engastada, as condições

$$w_{x=0} = w'_{x=0} = 0$$

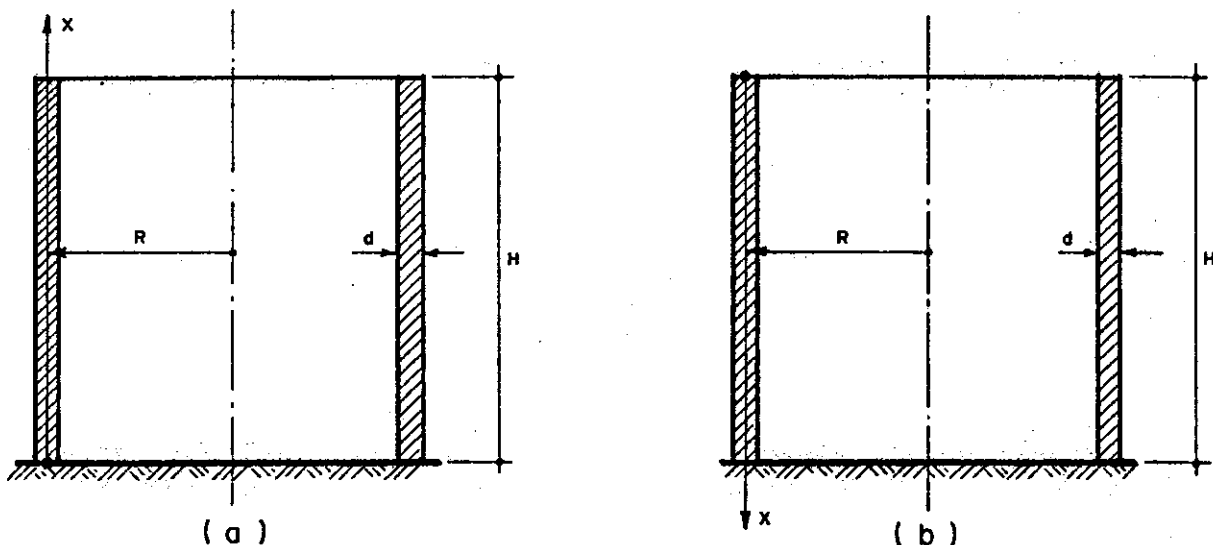


Figura 3.4 - Esquema do reservatório padrão:
 a) $H > \lambda$, x com origem na borda inferior.
 b) $H < \lambda$, x com origem na borda superior.

escrevem-se

$$\frac{\gamma_L R^2}{Ed} H + C_4 = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\gamma_L R^2}{Ed} + \bar{\alpha} (C_3 - C_4) = 0,$$

que fornecem

$$C_3 = -\frac{\gamma_L R^2}{Ed} \frac{\bar{\alpha} H - 1}{\bar{\alpha}} = -\gamma_L \frac{\bar{\alpha} H - 1}{\bar{\alpha} \beta}$$

$$C_4 = -\frac{\gamma_L R^2}{Ed} H = -\gamma_L \frac{H}{\beta}$$

(3.12a-b)

Se, ao contrário, H é relativamente pequena, é preciso utilizar a solução com quatro constantes. Admitindo que o líquido atinge o coroamento, e medindo x a partir da borda superior (o que simplifica a determinação das quatro constantes), tem-se:

$$w = \frac{\gamma_L R^2}{Ed} x + e^{\bar{\alpha} x} (C_1 \text{sen} \bar{\alpha} x + C_2 \text{cos} \bar{\alpha} x) + e^{-\bar{\alpha} x} (C_3 \text{sen} \bar{\alpha} x + C_4 \text{cos} \bar{\alpha} x)$$

(3.13)

As quatro constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 são obtidas a partir das condições de vinculação das duas bordas. Sendo livre o coroamento e perfeitamente engastada a borda inferior, as quatro condições são:

$$w_{x=H} = w'_{x=H} = 0 \quad (\text{borda inferior: deslocamento e rotação nulos})$$

$$w''_{x=0} = w'''_{x=0} = 0 \quad (\text{borda superior: momento e força cortante nulos})$$

Da equação acima têm-se:

$$w' = \frac{\gamma_l R^2}{Ed} + \bar{\alpha} e^{\bar{\alpha}x} \{(C_1 + C_2) \cos \bar{\alpha}x + (C_1 - C_2) \sin \bar{\alpha}x\} + \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha}x} \{(C_3 - C_4) \cos \bar{\alpha}x - (C_3 + C_4) \sin \bar{\alpha}x\}$$

$$w'' = 2 \bar{\alpha}^2 e^{\bar{\alpha}x} (C_1 \cos \bar{\alpha}x - C_2 \sin \bar{\alpha}x) - 2 \bar{\alpha}^2 e^{-\bar{\alpha}x} (C_3 \cos \bar{\alpha}x - C_4 \sin \bar{\alpha}x)$$

$$w''' = 2 \bar{\alpha}^3 e^{\bar{\alpha}x} \{(C_1 - C_2) \cos \bar{\alpha}x - (C_1 + C_2) \sin \bar{\alpha}x\} + 2 \bar{\alpha}^3 e^{-\bar{\alpha}x} \{(C_3 + C_4) \cos \bar{\alpha}x + (C_3 - C_4) \sin \bar{\alpha}x\}$$

Impondo a terceira e a quarta condições têm-se que:

$$C_3 = C_1 \quad C_4 = C_2 - 2C_1$$

Com isso, as duas primeiras escrevem-se:

$$\frac{\gamma_l R^2}{Ed} H + e^{\bar{\alpha}H} (C_1 \sin \bar{\alpha}H + C_2 \cos \bar{\alpha}H) + e^{-\bar{\alpha}H} (C_1 \sin \bar{\alpha}H + (C_2 - 2C_1) \cos \bar{\alpha}H) = 0$$

$$\frac{\gamma_l R^2}{Ed} + \bar{\alpha} e^{\bar{\alpha}H} \{(C_1 + C_2) \cos \bar{\alpha}H + (C_1 - C_2) \sin \bar{\alpha}H\} + \bar{\alpha} e^{-\bar{\alpha}H} \{(3C_1 - C_2) \cos \bar{\alpha}H - (-C_1 + C_2) \sin \bar{\alpha}H\} = 0$$

isto é

$$C_1(e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{sen} \bar{\alpha}H + e^{-\bar{\alpha}H} \operatorname{sen} \bar{\alpha}H - 2e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{cos} \bar{\alpha}H) +$$

$$+ C_2(e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{cos} \bar{\alpha}H + e^{-\bar{\alpha}H} \operatorname{cos} \bar{\alpha}H) = - \frac{\gamma_L R^2}{Ed} H$$

$$C_1 \bar{\alpha} (e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{cos} \bar{\alpha}H + e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{sen} \bar{\alpha}H + 3e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{cos} \bar{\alpha}H + e^{-\bar{\alpha}H} \operatorname{sen} \bar{\alpha}H) +$$

$$+ C_2 \bar{\alpha} (e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{cos} \bar{\alpha}H - e^{\bar{\alpha}H} \operatorname{sen} \bar{\alpha}H - e^{-\bar{\alpha}H} \operatorname{cos} \bar{\alpha}H - e^{-\bar{\alpha}H} \operatorname{sen} \bar{\alpha}H) = - \frac{\gamma_L R^2}{Ed}$$

e resolvendo esse sistema têm-se:

$$C_1 = \frac{g - i\bar{\alpha}H}{2\bar{\alpha}(fi - gh)} \cdot \frac{\gamma_L R^2}{Ed} = \frac{B}{2\bar{\alpha}A} \cdot \frac{\gamma_L R^2}{Ed}$$

$$C_2 = \frac{h\bar{\alpha}H - f}{2\bar{\alpha}(fi - gh)} \cdot \frac{\gamma_L R^2}{Ed} = \frac{C}{2\bar{\alpha}A} \cdot \frac{\gamma_L R^2}{Ed} \quad (3.14a-b)$$

com

$$f = \operatorname{sen} \bar{\alpha}H \operatorname{Ch} \bar{\alpha}H + \operatorname{cos} \bar{\alpha}H \operatorname{Sh} \bar{\alpha}H - \operatorname{cos} \bar{\alpha}H \operatorname{Ch} \bar{\alpha}H$$

$$g = \operatorname{cos} \bar{\alpha}H \operatorname{Ch} \bar{\alpha}H$$

$$h = \operatorname{sen} \bar{\alpha}H \operatorname{Ch} \bar{\alpha}H + 2\operatorname{cos} \bar{\alpha}H \operatorname{Ch} \bar{\alpha}H - \operatorname{cos} \bar{\alpha}H \operatorname{Sh} \bar{\alpha}H$$

$$i = \operatorname{cos} \bar{\alpha}H \operatorname{Sh} \bar{\alpha}H - \operatorname{sen} \bar{\alpha}H \operatorname{Ch} \bar{\alpha}H$$

$$A = fi - gh$$

$$B = g - i\bar{\alpha}H$$

$$C = h\bar{\alpha}H - f$$

Expressando w somente com duas constantes, pois

$$C_3 = C_1 \quad \text{e} \quad C_4 = C_2 - 2C_1,$$

obtem-se, com $P = \gamma_L R^2 / Ed$:

$$w = \frac{\gamma_L R^2}{Ed} x + C_1 \operatorname{sen} \bar{\alpha}x (e^{\bar{\alpha}x} + e^{-\bar{\alpha}x}) + e^{\bar{\alpha}x} C_2 \operatorname{cos} \bar{\alpha}x +$$

$$+ e^{-\bar{\alpha}x} C_4 \operatorname{cos} \bar{\alpha}x =$$

$$= Px + C_1 \operatorname{sen} \bar{\alpha}x (e^{\bar{\alpha}x} + e^{-\bar{\alpha}x}) + C_2 \operatorname{cos} \bar{\alpha}x (e^{\bar{\alpha}x} + e^{-\bar{\alpha}x}) +$$

$$- 2C_1 e^{-\bar{\alpha}x} \operatorname{cos} \bar{\alpha}x =$$

$$\begin{aligned}
 &= Px + (e^{\bar{\alpha}x} + e^{-\bar{\alpha}x})(C_1 \text{sen}\bar{\alpha}x + C_2 \text{cos}\bar{\alpha}x) - \\
 &- 2C_1 e^{-\bar{\alpha}x} \text{cos}\bar{\alpha}x = \\
 &= Px + (e^{\bar{\alpha}x} + e^{-\bar{\alpha}x})\left(\frac{B}{2\bar{\alpha}A} P \text{sen}\bar{\alpha}x + \frac{C}{2\bar{\alpha}A} P \text{cos}\bar{\alpha}x\right) - \\
 &- 2\frac{B}{2\bar{\alpha}A} P e^{-\bar{\alpha}x} \text{cos}\bar{\alpha}x = \\
 &= P\left(x + \frac{1}{2\bar{\alpha}A} [(e^{\bar{\alpha}x} + e^{-\bar{\alpha}x})(B \text{sen}\bar{\alpha}x + C \text{cos}\bar{\alpha}x) - \right. \\
 &- \left. 2 e^{-\bar{\alpha}x} B \text{cos}\bar{\alpha}x]\right) \\
 \\
 w' &= P\left(1 + \frac{1}{2A} [(e^{\bar{\alpha}x} + e^{-\bar{\alpha}x}) [(B-C) \text{sen}\bar{\alpha}x + (B+C) \text{cos}\bar{\alpha}x] + \right. \\
 &+ \left. 2e^{-\bar{\alpha}x} (B-C) \text{cos}\bar{\alpha}x]\right) \\
 \\
 w'' &= \frac{P\bar{\alpha}}{A} ((e^{\bar{\alpha}x} - e^{-\bar{\alpha}x})(B \text{cos}\bar{\alpha}x - C \text{sen}\bar{\alpha}x) - \\
 &- 2 e^{-\bar{\alpha}x} B \text{sen}\bar{\alpha}x) \quad (3.15a-c)
 \end{aligned}$$

e finalmente

$$M = Kw'' \quad \text{agora com } K = \frac{Ed^3}{12} \quad (\text{pois se admitiu } \nu = 0),$$

e onde d é a espessura da casca.

3.2.2 - Caso Particular Utilizado como Padrão de Comparação

Estabelecem-se agora os dados do reservatório padrão. Esses são admitidos de modo a permitir que os resultados obtidos destes ensaios sirvam também como padrão de comparação para as discretizações do cálculo da estrutura do capítulo seguinte. Para tanto, fixam-se primeiramente valores numéricos para os parâmetros básicos de tal estrutura (figura 4.1), como sendo, em toneladas e milímetros:

$$R = \text{raio de curvatura da superfície média} = (12/\pi) \cdot 10^4 \text{ mm}$$

$$E = \text{módulo de elasticidade do material} = 2,5 \text{ tf/mm}^2$$

$$\alpha = \text{ângulo de abertura} = 2\pi/3$$

c = constante para que a espessura da casca fique em função do raio de curvatura $R = 0,1 \cdot \frac{\pi}{3}$

γ_a = densidade específica da água (carga externa) = 10^{-9} tf/mm^3

Com isso, admitem-se, para o reservatório padrão:

$$\nu = 0$$

$$R = \frac{12}{\pi} \cdot 10^4 = 3,81972 \times 10^4 \text{ mm}$$

$$H = 4 \cdot 10^4 \text{ mm}$$

$$c = 0,1 \cdot \frac{\pi}{3} = 0,10471976$$

$$d = cR$$

$$\lambda \cong 4,83 \sqrt{R \cdot cR} \cong 5,98 \cdot 10^4$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rd}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{R\sqrt{c}} = 1,064721 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_L = \gamma_a = 10^{-9} \text{ tf/mm}^3$$

$$E = 2,5 \text{ tf/mm}^2$$

Com esses dados, tem-se que

$$H = 40 \text{ m} \cong \frac{4}{5,98} \lambda \cong 0,67 \lambda ,$$

portanto, o reservatório é de parede baixa, o que implica na utilização, para o cálculo dos deslocamentos w , da solução com quatro constantes. Note-se que essas dimensões não são comuns para reservatório d'água. Portanto seria mais adequado denominar tal estrutura de casca cilíndrica circular fechada, perfeitamente engastada em uma diretriz e livre a outra. Porém, continuar-se-á chamando de reservatório por simplicidade.

Naturalmente, como não poderia deixar de ser, os deslocamentos w , as rotações w' e os momentos Kw'' são calculados nos pontos correspondentes às das discretizações com malhas habituais e malhas duais, cujos resultados numéricos, obtidos por meio da programação para o computador, estão apresentados em forma de tabelas e gráficos no item 3.5.

3.3 - APROXIMAÇÃO VARIACIONAL COM POLINÔMIOS INTERPOLADORES LAGRANGEANOS E HERMITIANOS DE SEGUNDO E DE QUARTO GRAU SOBRE NODULAÇÃO HABITUAL

Discretiza-se a seguir o cálculo dos deslocamentos do reservatório padrão adotado, pelo processo da aproximação variacional com polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do segundo grau, sobre nodulação habitual. No dulação esta estabelecida pelos nós de uma rede com malhas quadradas, a fim de simplificar os cálculos, de forma a obter uma linha de nós sobre o coroamento e uma sobre o engastamento, conforme ilustra a figura 3.5. Posteriormente discretiza-se o cálculo das rotações e esforços (mais precisamente as rotações ψ e os esforços M_x) desse reservatório, com emprego desses polinômios de segundo ($PI-2$) e também de quarto grau ($PI-4$).

Naturalmente, por a estrutura analisada apresentar simetria axial, basta discretizar tais cálculos apenas para uma geratriz.

A discretização do cálculo dos deslocamentos, por esse processo, se resume em aproximar as derivadas e as integrais do funcional que rege o problema, por diferenças finitas e por somatórias respectivamente, minimizando em seguida esse funcional com respeito aos deslocamentos, o que pelo princípio da mínima energia potencial total permite determiná-los.

As diferenças finitas a serem empregadas no cálculo dos deslocamentos são as provenientes de polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do segundo grau, como já se disse acima. E a condição de contorno a ser imposta é aquela usual de engastamento perfeito.

Quanto às discretizações do cálculo das rotações e esforços, fazem-se somente quatro. Duas com a imposição de rotação nula no engastamento (uma com $PI-2$ e outra com $PI-4$), e duas sem essa nova imposição aos polinômios interpoladores (também, uma com $PI-2$ e outra com $PI-4$).

Objetivando fazer distinção entre as quatro expressões das rotações e esforços obtidas por essas aproximações e, inclusive, com as outras quatro obtidas pelas aproximações sobre malhas duais, acrescentam-se nessas os seguintes índices:

α, β para as aproximações com $PI-2$ e $PI-4$, respectivamente. Ambas sem nenhuma imposição explícita quanto à rotação no engastamento.

γ, δ para as aproximações com $PI-2$ e $PI-4$, respectivamente. Ambas com a imposição de rotação nula no engastamento.

Os resultados numéricos obtidos por essas discretizações estão apresentadas no item 3.5, para diversas aberturas da malha, bem como as análises de seus comportamentos quanto à influência da abertura da malha nas suas convergências aos valores exatos e, também quanto à influência dos tipos de engastamentos admitidos (isto é, com ou sem a reimposição de rotação nula) nos pontos próximo a ele.

3.3.1 - Formulação Variacional do Problema

A expressão da energia de deformação (E_s) armazenada na casca de espessura constante d por unidade de área de superfície média para a (1.48), para este caso, é aquela dada por (1.47). E a (1.49) se reduz a

$$\Omega = - \iint p_z w dx dy$$

que pode ser escrita como

$$\Omega = - \iint Z w dx dy$$

com

$$Z = p_z = \gamma_a x.$$

Portanto a expressão da energia potencial total do sistema

$$\pi_p = U + \Omega$$

é escrita como

$$\pi_p = \frac{Ed}{2R^2} \iint w^2 dx dy + \frac{Ed^3}{24} \iint (w'')^2 dx dy - \iint zw dx dy \quad (3.16)$$

onde, naturalmente, definiram-se

$$d = cR$$

$$R = \frac{L}{\alpha} \Rightarrow L = R\alpha \quad e$$

$$H = \frac{L}{2} \Rightarrow H = \frac{R\alpha}{2} .$$

Essa expressão pode ainda ser escrita como

$$\pi_p(w) = \sum_{k=1}^3 I_k(w) \quad (3.17)$$

onde as grandezas I_k são dadas por

$$I_1 = \frac{Ed}{2R^2} \iint w^2 dx dy$$

$$I_2 = \frac{Ed^3}{24} \iint (w'')^2 dx dy \quad (3.18a-c)$$

$$I_3 = - \iint zw dx dy$$

Com isso, a condição de mínimo

$$\delta\pi_p = \delta U + \delta\Omega = 0$$

é escrita como

$$\frac{\partial}{\partial w} \pi_p(w) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial w} I_k(w) = 0$$

ou ainda como

$$\frac{\partial I_1}{\partial w} + \frac{\partial I_2}{\partial w} = - \frac{\partial I_3}{\partial w} \quad (3.19)$$

3.3.2 - Discretização do Problema

Naturalmente, como já se observou, devido a simetria axial que a estrutura em casca aqui analisada apresenta, basta discretizar o cálculo da (3.17) apenas para uma geratriz qualquer.

Para a discretização estabelece-se uma rede de malhas quadradas (nodulação habitual) de abertura h definida como

$$h = \frac{H}{n} \quad (3.20)$$

onde n é o número de subdivisões da altura H do reservatório. Sobre essa nodulação aproximam-se as derivadas das (3.18a-c) por meio de expressões em diferenças finitas provenientes de emprego de $PI-2$, com as quais aproximam-se também as derivadas exigidas pelas condições de contorno usuais de engastamento perfeito, aqui impostas. Feito isto, passa-se finalmente à minimização do funcional dos deslocamentos (condição 3.19). Todos esses passos da discretização do problema são descritos a seguir.

3.3.2.1 - Condições de contorno

As condições de contorno a serem impostas nesta discretização são as usuais de engastamento perfeito. Nada se diz quanto à borda livre devido a utilização de formulação variacional, que apresenta a vantagem de apenas necessitar satisfazer as condições de contorno essenciais. Essas condições são:

$$w_{n+1} = 0 \quad \text{e} \quad w'_{n+1} = 0 \quad (3.21a-b)$$

A derivada w' é aproximada mediante emprego de $PI-2$, a fim de manter o mesmo polinômio interpolador usado na discretização do cálculo da energia potencial total do sistema.

Para a condição de rotação nula no engaste utiliza-se um nó fictício $n+2$, h abaixo do pé. Com isso a

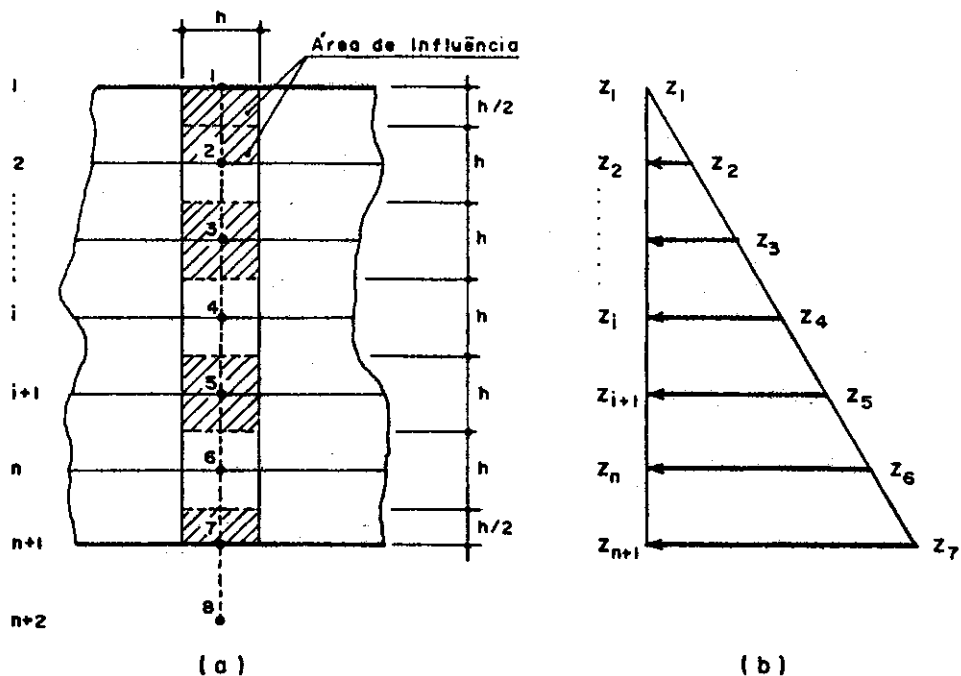


Figura 3.5 - a) Esquema da Nodulação Habitual.
 b) Carga externa, onde Z_z = a carga até àquela linha.

(3.21b) escreve-se

$$\frac{1}{2h} (w_{n+2} - w_n) = 0 \quad (\text{veja expressão 2.19b})$$

que leva à condição

$$w_{n+2} = w_n \quad (3.22)$$

3.3.2.2 - Aproximação do cálculo de energia

As grandezas I_k expressas pelas (3.18a-c) são, agora, aproximadas calculando-se a energia armazenada nos diversos "elementos" (totais ou metades, conforme ilustrados na figura 3.5), resultando as seguintes formas aproximadas:

$$I_1 = \frac{Ed}{2R^2} \sum_{m=1}^{n+1} w_m s_m \quad (3.23a-b)$$

$$I_2 = \frac{Ed^3}{24} \sum_{m=1}^{n+1} (w'')^2 s_m$$

$$I_3 = - \sum_{m=1}^{n+1} Z_m w_m s_m \quad (3.23c)$$

onde s_m representa a área do "elemento" m . Pela figura 3.5 vê-se de imediato que s_m vale sempre h^2 com exceção dos "elementos" $m=1$ e $m=n+1$ que vale $h^2/2$.

As aproximações das derivadas w'' para os pontos $i=1,2,\dots,n+1$ são aquelas obtidas por PI-2, que se encontram tabeladas no item 2.3.3.1b inclusive aquelas afetadas pelas condições de contorno (3.21a e 3.22).

Com isso, as I_k são escritas como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Ed}{4R^2} h^2 (w_1^2 + 2 \sum_{m=2}^n w_m) \\ I_2 &= \frac{Ed^3}{24h^2} \left(\frac{3}{2} (w_1 - 2w_2 + w_3)^2 + \sum_{m=3}^{n-1} (w_{m-1} - 2w_m + w_{m+1})^2 + \right. \\ &\quad \left. + (w_{n-1} - 2w_n)^2 + 2w_n^2 \right) \\ I_3 &= -h^2 \sum_{m=2}^n Z_m w_m \end{aligned} \quad (3.24a-c)$$

3.3.2.3 - Sistema de equações minimizantes

A condição de mínimo (3.19) é, então, escrita para esta discretização como

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_i} + \frac{\partial I_2}{\partial w_i} = - \frac{\partial I_3}{\partial w_i} \quad (3.25)$$

para $i=1,2,\dots,n$.

Desenvolvendo essa minimização parcela por parcela tem-se:

a) Minimização da I_1

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_1} = 2 A w_1$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_i} = 4 A w_i, \quad i=2, 3, \dots, n$$

onde $A = \frac{Edh^2}{4P^2}$.

b) Minimização da I_2

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_1} = B(3w_1 - 6w_2 + 3w_3)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_2} = B(-6w_1 + 14w_2 - 10w_3 + 2w_4)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_3} = B(3w_1 - 10w_2 + 13w_3 - 8w_4 + 2w_5)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_i} = B(2w_{i-2} - 8w_{i-1} + 12w_i - 8w_{i+1} + 2w_{i+2}),$$

$i = 4, 5, \dots, n-2$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_{n-1}} = B(2w_{n-3} - 8w_{n-2} + 12w_{n-1} - 8w_n)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_n} = B(2w_{n-2} - 8w_{n-1} + 14w_n)$$

onde $B = \frac{Ed^3}{24h^2}$.

c) Minimização da I_3

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_1} = 0$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_i} = -h^2 Z_i, \quad i=2, 3, \dots, n$$

Agrupando as I_k minimizadas conforme a expressão (3.25) obtém-se o sistema de equações minimizantes, cuja solução fornecem os n deslocamentos w incógnitas.

Como dito na introdução, esta discretização é feita para diversas subdivisões da altura H (o que implica em diversas aberturas da malha) do reservatório padrão. Naturalmente, para cada subdivisão há a necessidade de se montar o sistema de equações minimizantes correspondente. Porém, como se percebe na minimização feita logo atrás, os sistemas de equações lineares oriundos da discretização para cada subdivisão da altura do reservatório, podem ser gerados de um modo automático a partir de um bem determinado, aqui denominado de básico. Portanto, apresenta-se no texto somente este, que no caso é para 6 subdivisões ($n=6$). Representando-o na forma matricial o sistema é:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{2A+}{3B} & -6B & 3B & 0 & 0 & 0 \\
 -6B & \frac{4A+}{14B} & -10B & 2B & 0 & 0 \\
 3B & -10B & \frac{4A+}{13B} & -8B & 2B & 0 \\
 0 & 2B & -8B & \frac{4A+}{12B} & -8B & 2B \\
 0 & 0 & 2B & -8B & \frac{4A+}{12B} & -8B \\
 0 & 0 & 0 & 2B & -8B & \frac{4A+}{14B}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 w_4 \\
 w_5 \\
 w_6
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1 \\
 F_2 \\
 F_3 \\
 F_4 \\
 F_5 \\
 F_6
 \end{Bmatrix}
 \quad (3.26)$$

onde

$$F_1 = - \frac{\partial I_3}{\partial w_1} = 0$$

$$F_i = - \frac{\partial I_3}{\partial w_i} = -(-h^2 Z_i) = h^2 Z_i$$

ou (veja figura 3.5b), lembrando que $Z_i = \gamma_a^x$

$$F_i = (i-1) \gamma_a h^3. \quad (3.27)$$

A seguir discretiza-se o cálculo das rotações, momentos e forças normais.

3.3.3 - Expressões e Cálculos das Rotações, Momentos e Forças Normais

Das expressões [3.3] têm-se as expressões do momento, da força normal e rotação

$$M_x = Kw'' , \quad N_\phi = \frac{Ed}{R} w \quad \text{e} \quad \psi = -w'.$$

Dessas vê-se que a força normal é obtida simplesmente multiplicando-se o deslocamento pela constante Ed/R . Por isso expressam e calculam-se aqui somente os momentos e as rotações.

Para esses cálculos utilizam-se novamente o processo aproximado, isto é, substituem-se as derivadas por expressões em diferenças finitas. Assim, obtêm-se em vez de expressões em função de x (como no cálculo analítico), valores dos momentos e rotações em pontos bem determinados em função dos deslocamentos nestes pontos. Embora esses cálculos possam ser feitos manualmente sem muito esforço, por serem bastante simples, eles se tornam cansativos e maçantes quando a quantidade destes é grande. Por isso, utiliza-se do computador para este fim. Para tanto formulam-se as expressões do momento M_x e da rotação ψ na forma matricial que, geralmente é a forma mais adequada quando utiliza-se o computador como meio auxiliar de cálculo.

Analogamente ao que foi justificado no item 3.3.2.3, preocupa-se aqui somente com o caso para $n=6$. Para esse desenvolvem-se as formulações matriciais para os cálculos de M_x e ψ para os casos de aproximações com $PI-2$ e $PI-4$ sem condicionamento algum explícito à rotação no engastamento, e de aproximações com $PI-2$ e $PI-4$ com a imposição de rotação nula no engastamento.

3.3.3.1 - Formulação com $PI-2$, sem condicionamento algum explícito à rotação no engastamento

Nesta formulação, o único condicionamento é o que

já foi imposto ao se escrever as condições de contorno no cálculo da energia.

Usando *PI-2* têm-se (pelo item 2.3.3.1a) que as expressões das primeiras derivadas para os pontos desejados, utilizando-se de expressões assimétricas para os pontos 1 e 7 evitando-se com isso pontos fictícios, pois, não se deseja impor nenhuma condição de contorno, podem ser escritas como:

$$(w')_1 = \frac{1}{2h} (-3w_1 + 4w_2 - 1w_3 + 0w_4 + 0w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w')_2 = \frac{1}{2h} (-1w_1 + 0w_2 + 1w_3 + 0w_4 + 0w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w')_3 = \frac{1}{2h} (0w_1 - 1w_2 + 0w_3 + 1w_4 + 0w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w')_4 = \frac{1}{2h} (0w_1 + 0w_2 - 1w_3 + 0w_4 + 1w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w')_5 = \frac{1}{2h} (0w_1 + 0w_2 + 0w_3 - 1w_4 + 0w_5 + 1w_6 + 0w_7)$$

$$(w')_6 = \frac{1}{2h} (0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4 - 1w_5 + 0w_6 + 1w_7)$$

$$(w')_7 = \frac{1}{2h} (0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4 + 1w_5 - 4w_6 + 3w_7)$$

que mostra nitidamente que podem ser expressas na forma matricial, como

$$\{w'\}_\alpha = \frac{1}{2h} \{w\} \cdot [P_x]_\alpha = - \{\psi\} \quad (3.28)$$

com

$$\{w\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\} \quad (3.29)$$

onde $w_7 = 0$, condição imposta no cálculo da energia, e

$$[P_x]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Analogamente as expressões das segundas derivadas para es ses pontos podem ser escritas como, veja item 2.3.3.1a:

$$(w'')_1 = \frac{1}{h^2} (1w_1 - 2w_2 + 1w_3 + 0w_4 + 0w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w'')_2 = \frac{1}{h^2} (1w_1 - 2w_2 + 1w_3 + 0w_4 + 0w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w'')_3 = \frac{1}{h^2} (0w_1 + 1w_2 - 2w_3 + 1w_4 + 0w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w'')_4 = \frac{1}{h^2} (0w_1 + 0w_2 + 1w_3 - 2w_4 + 1w_5 + 0w_6 + 0w_7)$$

$$(w'')_5 = \frac{1}{h^2} (0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 1w_4 - 2w_5 + 1w_6 + 0w_7)$$

$$(w'')_6 = \frac{1}{h^2} (0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4 + 1w_5 - 2w_6 + 1w_7)$$

$$(w'')_7 = \frac{1}{h^2} (0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4 + 1w_5 - 2w_6 + 1w_7)$$

ou na forma matricial como

$$\{w''\}_\alpha = \frac{1}{h^2} \{w\} \cdot [P_{xx}]_\alpha$$

Com isso, a expressão de M_x é

$$\{M_x\}_\alpha = K \cdot \frac{1}{h^2} \{w\} \cdot [P_{xx}]_\alpha \quad (3.31)$$

com

$\{w\}$ a mesma (3.29), e

$$[P_{xx}]_\alpha = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -2 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.3.3.2 - Formulação com PI-4, sem condicionamento algum explícito quanto à rotação no engastamento

Também nesta formulação a única condição de contorno é a que já foi imposta no cálculo da energia.

Seguindo a mesma linha de desenvolvimento que a formulação anterior, agora utilizando-se de expressões em diferenças finitas provenientes de PI-4 (item 2.3.3.2a), vê-se que as expressões de w' para todos os pontos desejados podem ser escritas matricialmente como:

$$\{w'\}_\beta = \frac{1}{12h} \{w\} \cdot [P_x]_\beta \quad (3.33)$$

com

$\{w\}$ a mesma (3.29), e

$$[P_x]_\beta = \begin{bmatrix} -25 & -3 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +48 & -10 & -8 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & +18 & 0 & -8 & +1 & -1 & +3 \\ +16 & -6 & +8 & 0 & +6 & -16 & -16 \\ -3 & +1 & -1 & +8 & 0 & -18 & +36 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +8 & +10 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +3 & +25 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

E a expressão matricial para os w'' como

$$\{w''\}_\beta = \frac{1}{12h^2} \{w\} \cdot [P_{xx}]_\beta$$

e conseqüentemente, a expressão de M_x como

$$\{M_x\}_\beta = K \cdot \frac{1}{12h} \{w\} \cdot [P_{xx}]_\beta \quad (3.35)$$

com

$\{w\}$ a mesma (3.29), e

$$[P_{xx}]_{\beta} = \begin{bmatrix} +35 & +11 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +104 & -20 & +16 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +114 & +6 & -30 & +16 & -1 & -1 & +11 \\ -56 & +4 & +16 & -30 & +16 & +4 & -56 \\ +11 & -1 & -1 & +16 & -30 & +6 & +114 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +16 & -20 & -104 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +11 & +35 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.3.3.3 - Formulação com PI-2, impondo rotação nula no engastamento

Nesta formulação as expressões em diferenças finitas a serem utilizadas, para exprimir as primeiras e segundas derivadas necessárias aos cálculos da rotação e momento, são aquelas já utilizadas no item 3.3.3.1, a menos das derivadas no ponto que pertence ao engastamento, onde agora deve-se levar em consideração a imposição de rotação nula.

Da imposição de rotação nula

$$(w')_{e=n+1} = 0$$

e usando expressão simétrica de diferença finita (e portanto um ponto fictício) tem-se

$$w_{e+1} = w_{e-1}$$

Com isso, as expressões das derivadas no ponto que pertence ao engastamento serão agora

$$(w')_7 = 0$$

$$(w'')_7 = \frac{1}{h^2} (2w_6)$$

(expressões estas já definidas no item 2.3.3.1b).

Portanto, a expressão da rotação na notação matricial é

$$\{w'\}_\gamma = \frac{1}{2h} \{w\} \cdot [P_x]_\gamma \quad (3.37)$$

com

$\{w\}$ a mesma (3.29), e

$$[P_x]_\gamma = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

E a expressão de M_x

$$\{M_x\}_\gamma = K \cdot \frac{1}{12h^2} \{w\} \cdot [P_{xx}]_\gamma \quad (3.39)$$

com

$\{w\}$ a mesma (3.29), e

$$[P_{xx}]_\gamma = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -2 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -2 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$



3.3.3.4 - Formulação com PI-4, impondo rotação nula no engastamento

Analogamente ao caso anterior, as únicas expressões em diferenças finitas de derivadas que diferem das da formulação com o mesmo polinômio interpolador expressas em 3.3.3.2, são aquelas afetadas pela imposição de rotação nula no engastamento. Essas são as já definidas no item 2.3.3.2b, onde evitaram-se pontos fictícios.

Com isso, a expressão da rotação na notação matricial é:

$$\{w'\}_\delta = \frac{1}{36} \{w\} \cdot [P_x]_\delta \quad (3.41)$$

com

$\{w\}$ a mesma (3.29), e

$$[P_x]_\delta = \begin{bmatrix} -75 & -9 & +3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +144 & -30 & -24 & +3 & 0 & 0 & 0 \\ -108 & +54 & 0 & -24 & +3 & 0 & 0 \\ +48 & -18 & +24 & 0 & -24 & +2 & 0 \\ -9 & +3 & -3 & +24 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & +24 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

E a expressão de M_x

$$\{M_x\}_\delta = K \frac{1}{36h^2} \{w\} \cdot [P_{xx}]_\delta \quad (3.43)$$

com

$\{w\}$ a mesma (3.29), e

$$[P_{xx}]_{\delta} = \begin{bmatrix} +105 & +33 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -312 & -60 & +48 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ +342 & +18 & -90 & +48 & -3 & 0 & 0 \\ -168 & +12 & +48 & -90 & +48 & -4 & +8 \\ +33 & -3 & -3 & +48 & -90 & +54 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & +48 & -108 & +216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.4 - APROXIMAÇÃO VARIACIONAL COM POLINÔMIOS INTERPOLADORES LAGRANGEANOS E HERMITIANOS DO SEGUNDO E DO QUARTO GRAU, SOBRE NODULAÇÃO "DUAL"

Dando prosseguimento aos ensaios pretendidos neste capítulo, discretizam-se agora os mesmos cálculos do reservatório padrão que os do item anterior, inclusive com o mesmo processo. Estas diferindo daquelas quanto à nodulação e tipos de engastamento impostos, tanto na discretização do cálculo do funcional como também na reimposição de rotação nula nas aproximações do cálculo dos esforços e rotações. Nestas impõem-se a condição de que os deslocamentos dos pontos que pertencem ao engastamento e dos pontos adjacentes a eles sejam nulos (isto é, $w_{e-1} = w_e = w_{e+1} = 0$), a qual já foi denominada de condição de Stiefengaste.

A nodulação aqui admitida, a fim de compatibilizar com a que se pretende utilizar no capítulo seguinte, é aquela estabelecida pelos nós de uma rede de malhas quadradas, locada na estrutura de modo a obter uma linha de nós $h/2$ acima do coroamento e, conseqüentemente (devido $h = H/n$) uma linha de nós $h/2$ abaixo do engastamento. A figura 3.6 ilustra bem essa nodulação.

Naturalmente, aqui não tem sentido chamar essa nodulação de dual, uma vez que não se utiliza aqui tal conceito. Porém, denominou-se assim para compatibilizá-la com o nome dado à nodulação utilizada na discretização desenvolvida no item 4.4 pois, essa discretização é utilizada como avaliadora, quanto à precisão, da desenvolvida naquele capítulo.

Analogamente ao item anterior, adotam-se como nomenclatura os seguintes índices, para as expressões das rotações e momentos obtidas pelas aproximações aqui desenvolvidas.

α, β para as aproximações com $PI-2$ e $PI-4$, respectivamente. Ambas sem condicionamento algum explícito quanto à rotação no engastamento.

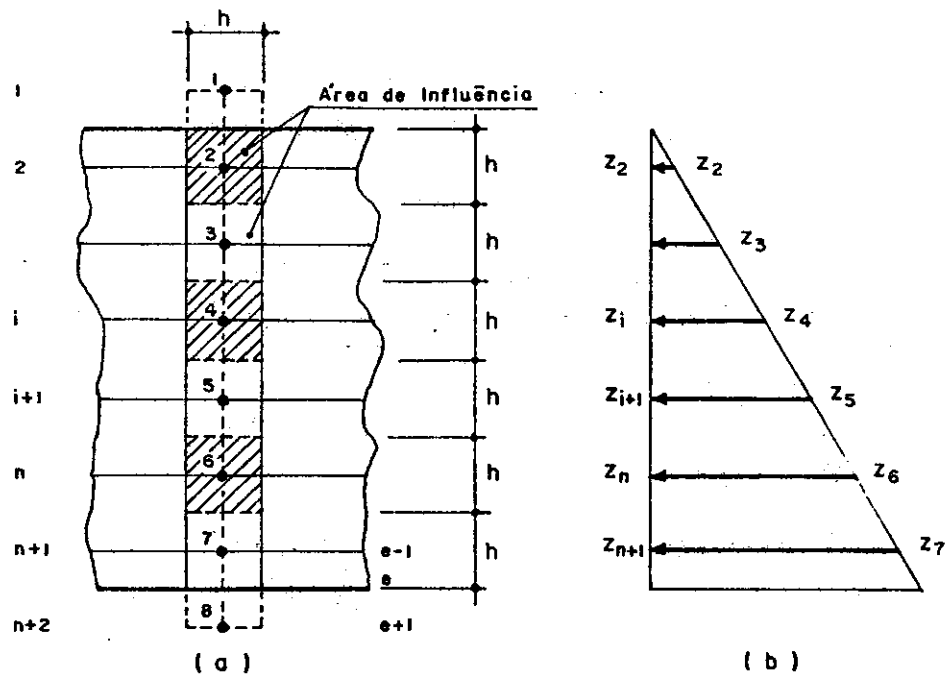


Figura 3.6 - a) Esquema da Nodulação "Dual".
 b) Carga externa, onde Z_i = a carga até àquela linha.

c, d para as aproximações com $PI-2$ e $PI-4$, respectivamente. Ambas com a imposição de rotação nula no engastamento.

3.4.1 - Formulação Variacional e Discretização do Problema

A formulação variacional do problema é a mesma da do item 3.3.1, pois a estrutura e a carga que atua sobre ela são as mesmas. Quanto à discretização, esta evidentemente é diferente da do item 3.3.2, pois a nodulação e o tipo de engastamento aqui admitidos são diferentes daqueles. Diante da simetria axial, basta desenvolver a discretização da expressão 3.17 para uma geratriz qualquer. Estabelece-se uma rede de malhas quadradas (nodulação "dual") de abertura h definida como a (3.20). Analogamente ao item 3.3.2, as derivadas das (3.18a-c) são aproximadas mediante expressões em diferenças finitas de derivadas provenientes do emprego

de $PI-2$, entre os nós dessa rede. E as condições de contorno a serem impostas são, nesta, as de Stiefengaste.

A seguir descrevem-se todos os passos dessa discretização.

3.4.1.1 - Condição de contorno

As condições de contorno a serem admitidas são as de Stiefengaste. Isto é, admitem-se

$$w_e = 0, \quad w_e = \frac{1}{2} (w_{e+1} + w_{e-1}) \quad \text{e} \quad w'_e = 0 \quad (3.45a-c)$$

onde os pontos e , $e-1$ e $e+1$ são respectivamente, os pontos sobre o engastamento, o ponto $n+1$ e o ponto fictício $n+2$ localizado $h/2$ abaixo do engastamento, a fim de manter a distância h entre os nós da rede (figura 3.6). Nada se impõe na borda livre por motivos já justificados no item 3.3.2.1. Analogamente a esse item, aproxima-se a derivada w' mediante emprego de $PI-2$, a fim de manter o mesmo polinômio utilizado na discretização do cálculo da energia.

Com isso, a condição (3.45c) escreve-se, utilizando a expressão simétrica (veja expressão 2.19b)

$$w'_e = \frac{1}{2(h/2)} (w_{e+1} - w_{e-1}) = 0$$

que combinado com as condições (3.45a-b), tem-se

$$w_{e+1} = w_{e-1} = 0. \quad (3.46)$$

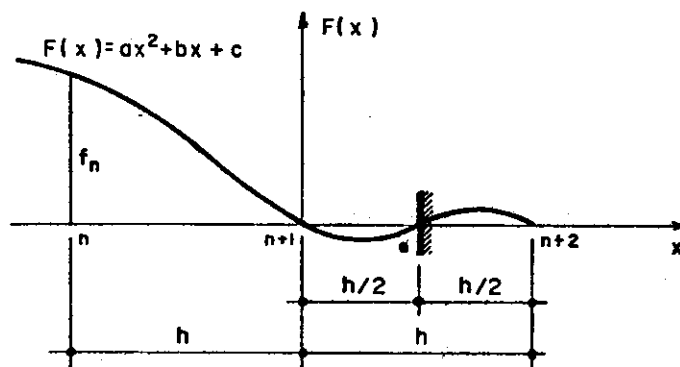
Note-se que, devido à peculiar colocação dos nós, w'_e foi aproximada com malha $h/2$.

3.4.1.2 - Aproximação do cálculo da energia

As grandezas I_k (3.18a-c) são agora aproximadas como se fizeram no item 3.3.2.2, calculando-se a energia nos diversos "elementos" ilustrados na figura 3.6, resultando, evidentemente, as mesmas expressões aproximadas (3.23a-c).

Só que com essas aproximações s_m sempre vale h^2 .

As expressões aproximadas para as derivadas w'' nos pontos $i=2,3,\dots,n$ são as provenientes do emprego de $PI-2$, que se encontram tabeladas no item 2.3.3.1c onde também estão expressas aquelas afetadas pelas condições de contorno (3.45c e 3.46). A expressão aproximada para a derivada w'' no ponto $i=n+1$ é também proveniente do emprego de $PI-2$, porém não aquela expressa naquele item (2.3.3.1c) e sim esta que se deduz a seguir:



As condições de contorno são:

$$f_{n+1} = f_e = f_{n+2} = 0.$$

Com isso, tem-se que, utilizando os pontos n , $n+1$ e $n+2$:

$$a = \frac{1}{2h^2} f_n, \quad b = \frac{1}{2h} (-f_n) \quad \text{e} \quad c = 0.$$

Portanto

$$f''(x) = 2a = w'' = \frac{1}{h^2} (f_n).$$

O motivo de se utilizar essa expressão de w'' é o de amenizar um pouco a forte imposição de engastamento, conseguida pelas condições de contorno de Stiefengaste.

Com isso, utilizando o ponto fictício 1 e portanto empregando-se apenas expressões simétricas de derivadas,

as I_k são escritas como:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{Ed}{2R^2} h \sum_{m=2}^n w_m \\
 I_2 &= \frac{Ed^3}{24h^2} \left(\sum_{m=2}^{n-1} (w_m - 2w_{m+1} - w_{m+2})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (w_{n-1} - 2w_n)^2 + w_n^2 \right) \\
 I_3 &= -h^2 \sum_{m=2}^n Z_m w_m
 \end{aligned} \tag{3.47a-c}$$

3.4.1.3 - Sistema de equações minimizantes

A condição (3.19) para este caso escreve-se como a (3.25):

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_i} + \frac{\partial I_2}{\partial w_i} = - \frac{\partial I_3}{\partial w_i} ,$$

agora, para $i=2, 3, \dots, n$.

Desenvolvendo parceladamente as minimizações das I_k têm-se:

a) Minimização da I_1

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_1} = 0$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_i} = 4 A w_i , \quad i=2, 3, \dots, n$$

b) Minimização da I_2

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_1} = B(2w_1 - 4w_2 + 2w_3)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_2} = B(-4w_1 + 10w_2 - 8w_3 + 2w_4)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_i} = B(2w_{i-2} - 8w_{i-1} + 12w_i - 8w_{i+1} + 2w_{i+2}),$$

$$i=3, 4, \dots, n-2$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_{n-1}} = B(2w_{n-3} - 8w_{n-2} + 12w_{n-1} - 8w_n)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_n} = B(2w_{n-2} - 8w_{n-1} + 12w_n)$$

c) Minimização da I_3

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_1} = 0$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_i} = -h^2 Z_i, \quad i=2, 3, \dots, n$$

onde as constantes A e B introduzidas valem

$$A = \frac{Edh^2}{4R^2} \quad B = \frac{Ed^3}{24h^2}$$

(as mesmas do item 3.3.2.3).

Como na discretização anterior, agrupando essas I_k minimizadas obtêm-se o sistema de equações minimizantes que, resolvendo-o fornecem os n w incógnitos. Pelas mesmas justificativas expressas nessa outra discretização, apresenta-se aqui somente o sistema de equações básico, que neste caso é para 5 subdivisões da altura H do reservatório.

$$\begin{bmatrix} 2B & -4B & 2B & 0 & 0 \\ -4B & 4A+10B & -8B & 2B & 0 \\ 2B & -8B & 4A+12B & -8B & 2B \\ 0 & 2B & -8B & 4A+12B & -8B \\ 0 & 0 & 2B & -8B & 4A+12B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

onde

$$F_i = - \frac{\partial I_3}{\partial w_i} = -(-h^2 z_i) = h^2 z_i .$$

mas para este caso

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \gamma_a h$$

$$z_3 = \frac{3}{2} \gamma_a h$$

$$z_4 = \frac{5}{2} \gamma_a h$$

$$z_5 = \frac{7}{2} \gamma_a h$$

que podem ser escritas genericamente como

$$z_1 = 0$$

$$z_i = \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a h .$$

Portanto as F_i podem ser escritas como:

$$F_1 = 0$$

(3.49a-b)

$$F_i = \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a h^3 , \quad i=2,3,\dots,n .$$

A seguir discretiza-se o cálculo das rotações e momentos com essa nova nodulação.

3.4.2 - Expressões e Cálculo das Rotações, Momentos e Forças Normais

Os cálculos dos esforços e rotações a serem discretizados com essa nova nodulação são os mesmos do item 3.3.3 (rotações ψ e momentos M_x). Desenvolvem-se, aqui, também as mesmas quatro aproximações para ψ e M_x (com PI-2 e PI-4 sem condicionamento algum explícito à rotação no engastamento e com PI-2 e PI-4 com a imposição de rotação nula no engastamento). As únicas diferenças existentes entre essas

aproximações são: a nodulação e a imposição de rotação nula. Por isso escrevem-se matricialmente as expressões de ψ e M_x com essas aproximações, de uma forma bem resumida.

3.4.2.1 - Formulação com PI-2, sem condicionamento algum explícito à rotação no engastamento

Rotações:

$$\{w'\}_\alpha = \frac{1}{2h} \{w\} \cdot [p_x]_\alpha$$

onde

$$\{w\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7 = 0\}$$

$$[p_x]_\alpha = [p_x]_\alpha \text{ do item 3.3.3.1}$$

Observação: Note-se que por mais que não se condicione a rotação no engastamento esta é forçosamente nula, pois se admitiu $w_7 = w_e = 0 (= w_g)$.

Momentos:

$$\{M_x\}_\alpha = K \{w''\}_\alpha$$

onde

$$\{w''\}_\alpha = \frac{1}{h^2} \{w\} \cdot [p_{xx}]_\alpha$$

$$[p_{xx}]_\alpha = [p_{xx}]_\alpha \text{ do item 3.3.3.1}$$

Observação: Note-se que, para as derivadas $\{w''\}_\alpha$ as condições essenciais $w_e = w_g = 0$ não foram consideradas, por não se ter querido considerar o engastamento. Em consequência disto e de se estar utilizando PI-2, com expressões assimétricas nas bordas, resulta

$$(m_x)_1 = (m_x)_2, (m_x)_6 = (m_x)_7$$

Ambos resultados são evidentemente mäs aproximações

mações, com graves consequências quanto a $(m_x)_7$, fortemente sub-estimado (acresce que o nó 7 está afastado da borda, onde nada se calcula).

3.4.2.2 - Formulação com PI-4, sem condicionamento algum explícito à rotação no engastamento

Rotações:

$$\{w'\}_b = \frac{1}{12h} \{w\} \cdot [p_x]_b$$

onde

$\{w\}$ igual do item 3.4.2.1

$$[p_x]_b = [p_x]_\beta \text{ do item 3.3.3.2}$$

Momentos:

$$\{M_x\}_b = K \{w''\}_b$$

onde

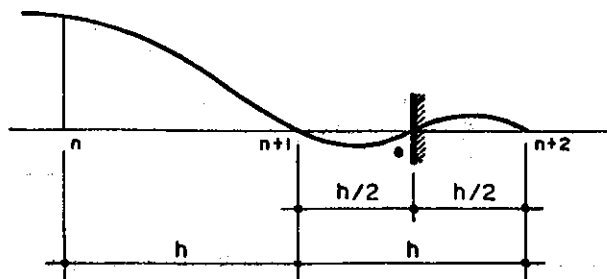
$$\{w''\}_b = \frac{1}{12h^2} \{w\} \cdot [p_{xx}]_b$$

$$[p_{xx}]_b = [p_{xx}]_\beta \text{ do item 3.3.3.2}$$

Valem aqui observações análogas à do item 3.4.2.1.

3.4.2.3 - Formulação com PI-2, imposto a condição de Stiefengaste

Nesta formulação, as diferenças finitas a serem utilizadas são as mesmas do item 3.3.3.3 a menos, para os pontos próximos ao engastamento que são (veja item 2.3.3.1c).



$$(w')_{n+1} = \left. \frac{1}{12h} \right| (-4w_n)$$

$$(w'')_{n+1} = \left. \frac{1}{12h^2} \right| (+16w_n) .$$

Com isso, as expressões matriciais das rotações e dos momentos são:

Rotações:

$$\{w'\}_c = \frac{1}{12h} \{w\} \cdot [p_x]_c$$

onde

$\{w\}$ a mesma do item 3.4.2.1

$$[p_x]_c = \begin{bmatrix} -18 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +24 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & +6 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +6 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +6 & 0 \end{bmatrix}$$

Momentos:

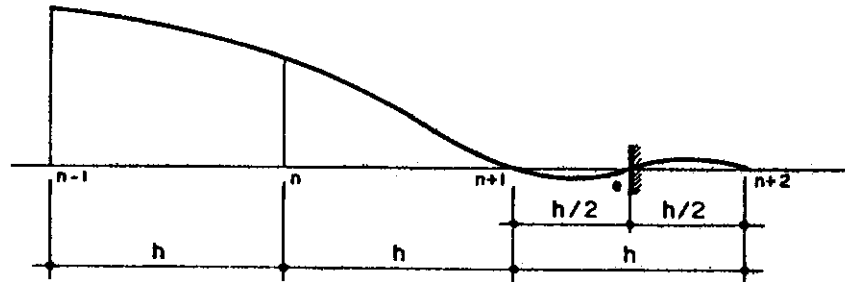
$$\{M_x\}_c = K \{w_{xx}\}_c$$

$$\{w''\}_c = \frac{1}{12h^2} \{w\} \cdot [p_{xx}]_c$$

$$[p_{xx}]_c = \begin{bmatrix} +12 & +12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -24 & +12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +12 & +12 & -24 & +12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +12 & -24 & +12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +12 & -24 & +12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +12 & -24 & +16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +12 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.2.4 - Formulação com PI-4, impondo a condição de Stiefengaste

As diferenças finitas a serem utilizadas são as mesmas do item 3.3.2.4, salvo aquelas para os pontos próximos ao engastamento que são (veja item 2.3.3.2c).



$$(w')_{n+1} = \frac{1}{420h} (14w_{n-1} - 140w_n)$$

$$(w')_n = \frac{1}{420h} (30w_{n-2} - 252w_{n-1} - 70w_n)$$

$$(w')_{n-1} = \frac{1}{420h} (35w_{n-3} - 280w_{n-2} + 280w_n)$$

$$(w'')_{n+1} = \frac{1}{420h^2} (-56w_{n-1} + 700w_n)$$

$$(w'')_n = \frac{1}{420h^2} (-40w_{n-2} + 588w_{n-1} - 1080w_n)$$

$$(w'')_{n-1} = \frac{1}{420h^2} (-35w_{n-3} + 560w_{n-2} - 1050w_{n-1} + 560w_n)$$

Com isto, as expressões das rotações e dos momentos na notação matricial são:

Rotação:

$$\{w'\}_d = \frac{1}{420h} \{w\} \cdot [p_x]_d$$

onde

$\{w\}$ a mesma do item 3.4.2.1

$$[P_x]_d = \begin{bmatrix} -875 & -105 & +35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1680 & -350 & -280 & +35 & 0 & 0 & 0 \\ -1260 & +630 & 0 & -280 & +35 & 0 & 0 \\ +560 & -210 & +280 & 0 & -280 & +30 & 0 \\ -105 & +35 & -35 & +280 & 0 & -252 & +14 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & +280 & -70 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Momentos:

$$\{M_x\}_d = K\{w''\}_d$$

$$\{w''\}_d = \frac{1}{420h^2} \{w\} \cdot [p_{xx}]_d$$

onde

$\{w\}$ a mesma do item 3.4.2.1

$$[p_{xx}]_d = \begin{bmatrix} +1225 & +385 & -35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3640 & -700 & +560 & -35 & 0 & 0 & 0 \\ +3990 & +210 & -1050 & +560 & -35 & 0 & 0 \\ -1960 & +140 & +560 & -1050 & +560 & -40 & 0 \\ +385 & -35 & -35 & +560 & -1050 & +588 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & +560 & -1050 & -700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados numéricos obtidos por meio das duas discretizações do cálculo dos deslocamentos w , das oito aproximações dos momentos M_x e das rotações ψ , como também os resultados exatos destas três grandezas w , M_x e ψ são tabelados, de forma a permitir fácil comparação daqueles resultados -os aproximados- com estes últimos -os exatos. Todos os resultados de cada ensaio (isto é, para cada subdivisão da altura H do reservatório) são apresentados em cinco tabelas a saber:

- a) *Deslocamentos*: contém três resultados. Os exatos, os aproximados com rede habitual e os aproximados com rede dual.
- b) *Momentos*: contém os resultados exatos e os resultados das quatro aproximações com rede habitual.
- c) *Rotações*: contém os resultados exatos e os resultados das quatro aproximações com rede habitual.
- d) *Momentos*: contém os resultados exatos e os resultados das quatro aproximações com rede dual.
- e) *Rotações*: contém os resultados exatos e os resultados das quatro aproximações com rede dual.

Os resultados são tabelados para as seguintes subdivisões da altura H do reservatório: $n=6, 12, 24, 40, 48$, tanto para aproximações com rede habitual como para rede dual, estabelecidas a priori. Obedece-se a uma sistemática de subdivisão da altura do reservatório, a fim de se poder tirar conclusões mais precisas quanto à convergência dos resultados aproximados aos exatos.

Naturalmente, devido à utilização do computador como meio auxiliar de cálculo numérico, resolveu-se calcular os deslocamentos, os momentos e as rotações também para outras subdivisões da altura do reservatório, para melhor analisar as aproximações utilizadas. Por exemplo, a verifica

ção de até que ponto a diminuição da abertura da malha (habitual ou dual) melhora os resultados obtidos por essas discretizações, levando-se em consideração a precisão do computador utilizado (o HP2100). O ensaio com $n=40$ ($h=H/n=1000\text{mm}$) foi feito por achá-lo interessante, uma vez que se obtêm os valores das grandezas estudadas, em pontos equidistantes de um metro.

De todos esses resultados, apresentam-se somente aqueles obtidos pela sistemática de subdivisão acima citada até àquela subdivisão em que se obtêm bons resultados, e de alguns outros necessários para melhor esclarecer as análises no que tange à definição da menor abertura da malha, para cada discretização. O esquema de numeração utilizado para o tabelamento dos resultados está ilustrado pela figura 3.7.

Ainda quanto à apresentação dos resultados, evitou-se a representação gráfica por não ser expressiva pela proximidade dos valores a serem comparados, frustrando a visualização da convergência dos resultados aproximados aos exatos, principalmente para aquela subdivisão da altura do reservatório em que se obtêm bons resultados por esses processos aproximados. Por isso, mostram-se pelas figuras 3.8a-c, apenas as formas das funções deslocamento, momento e rotação do reservatório padrão adotado, sob a carga admitida nos referidos ensaios (isto é, o reservatório completamente cheio de água), a fim de ilustrar os seus comportamentos.

Para o desenvolvimento das análises das discretizações dessas três grandezas estudadas, resolveu-se analisar primeiramente os resultados oriundos das aproximações do cálculo do esforço M_x . Em seguida, analisar os resultados obtidos com as aproximações do cálculo da rotação ψ . Isto tudo primeiramente para as aproximações com rede habitual e posteriormente para as aproximações com rede dual. E finalmente analisar os deslocamentos obtidos com as duas discretizações, uma com rede habitual e outra com rede dual.

Analisaram-se por último as discretizações do cál

culo dos deslocamentos pois, para o dimensionamento de uma estrutura, o conhecimento preciso dessa grandeza (na maioria das vezes) é secundária.

Por outro lado, a análise das discretizações da expressão do deslocamento é ponto importante deste capítulo, pois ela servirá de base para se poder tirar algumas conclusões a respeito das discretizações dessa grandeza, desenvolvidas no capítulo 4.

3.5.1 - Momentos M_x Aproximados com Rede Habitual

Com o objetivo de melhor explicitar as análises dos valores de M_x , obtidos por meio das quatro aproximações (α , β , γ e δ) com vários tamanhos de malhas, resolveu-se desenvolver e escrever essas análises para cada ensaio feito. Isto é, para cada apresentação dos resultados obtidos com um tamanho de malha, escreveram-se a seguir as análises e algumas conclusões desses resultados.

Essas análises foram feitas baseadas em erros relativos, calculados pelas seguintes expressões (veja DEBS, 1976).

$$Er = \frac{|V_e| - |V_a|}{|\text{m}ax V_e|} \quad \text{se } V_e \text{ e } V_a \text{ tiverem o mesmo sinal ou,}$$

$$Er = \frac{|V_e - V_a|}{|\text{m}ax V_e|} \quad \text{se } V_e \text{ e } V_a \text{ tiverem sinais diferentes,}$$

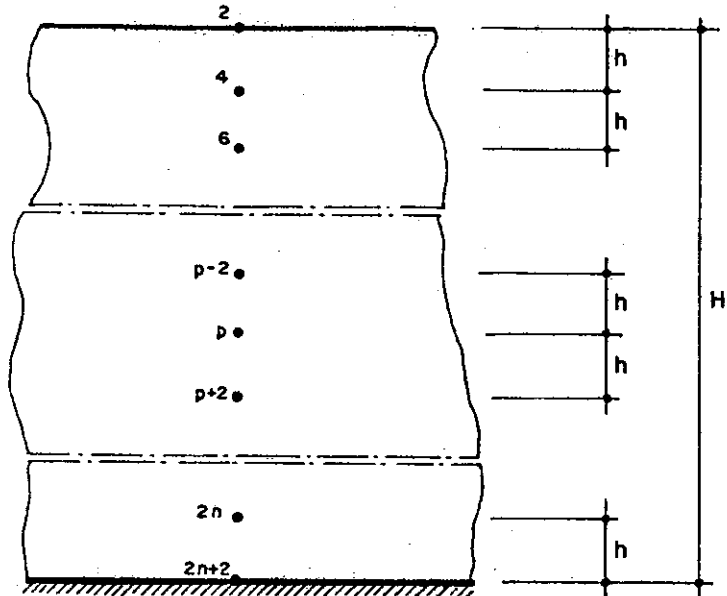
onde

V_e é o valor exato (o calculado analiticamente),

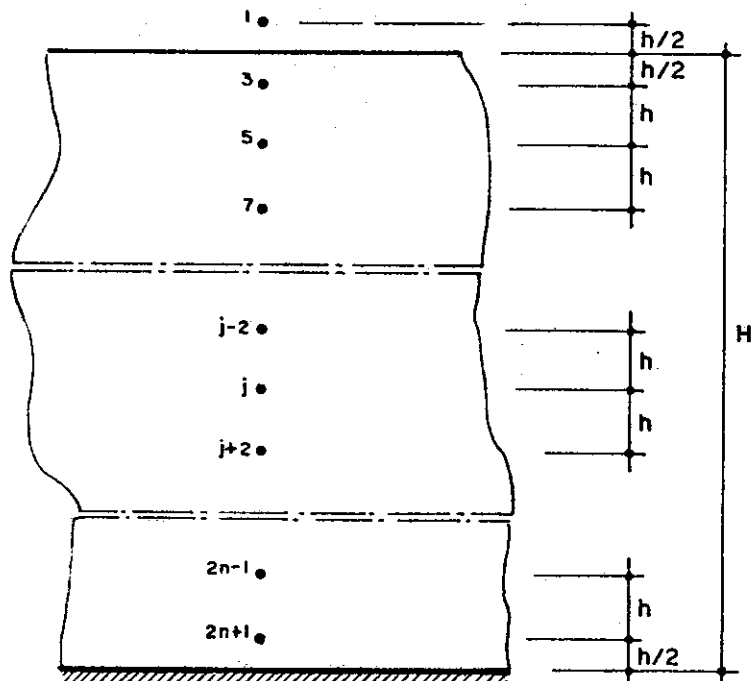
V_a é o valor aproximado e,

$\text{m}ax V_e$ é o máximo valor exato que aparece tabelado.

Com isso, para valores V_a com $Er > 0$ tem-se erros por falta,



(a) Nodulação Habitual



(b) Nodulação Dual

Figura 3.7 - Esquema de numeração utilizado para o tabela mento dos resultados dos ensaios

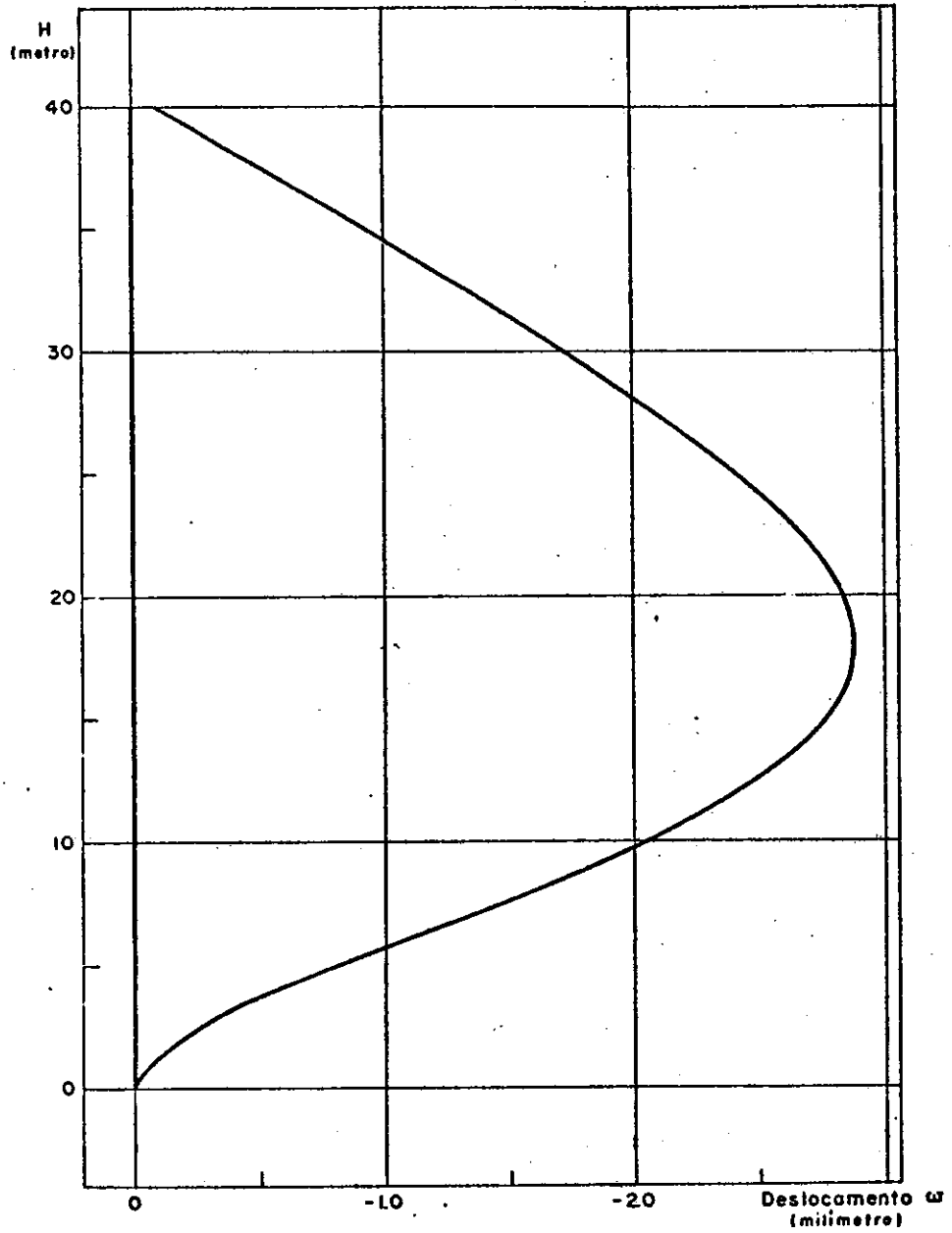


Figura 3.8a - Diagrama de w

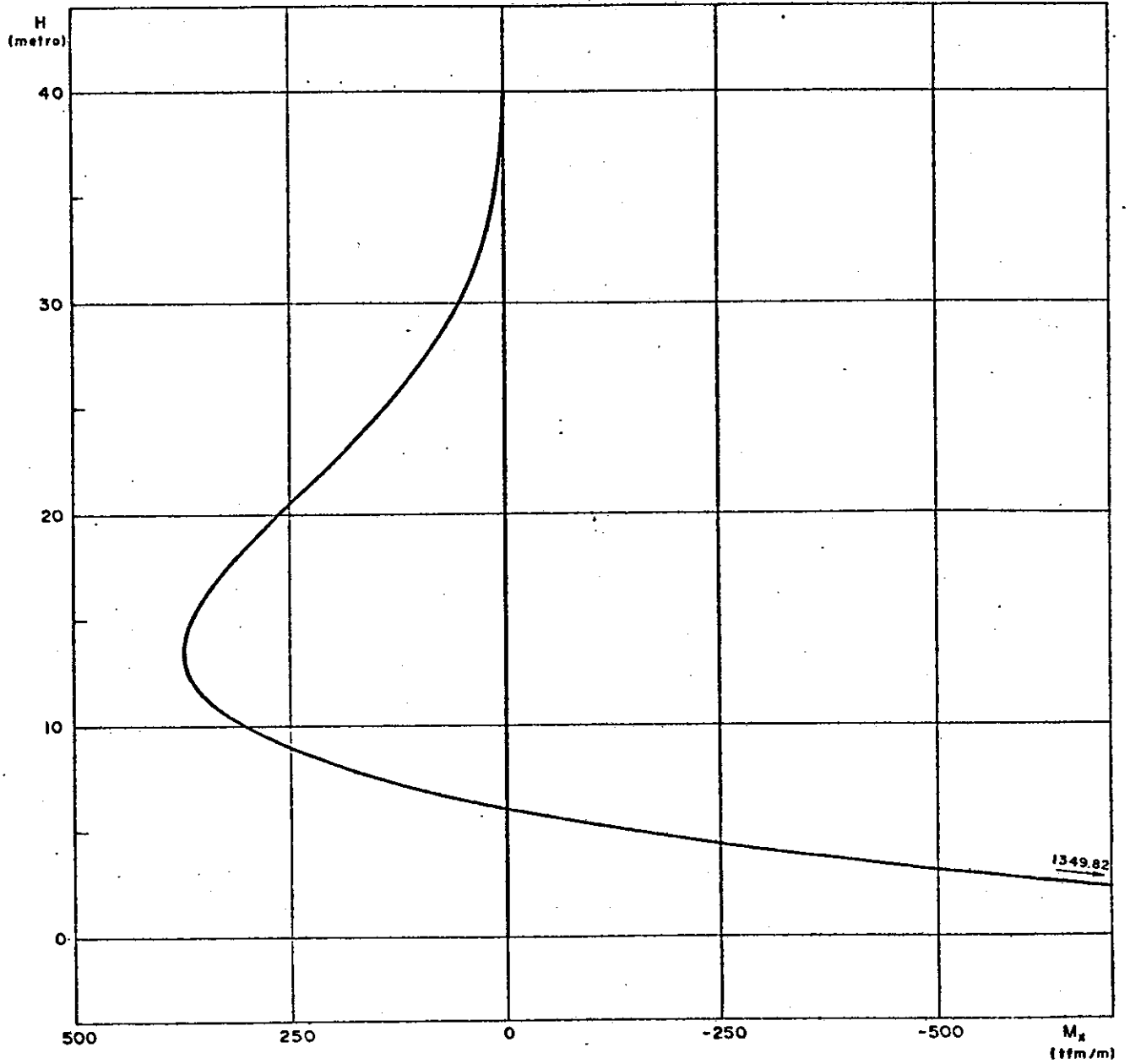


Figura 3.8b - Diagrama de M_x

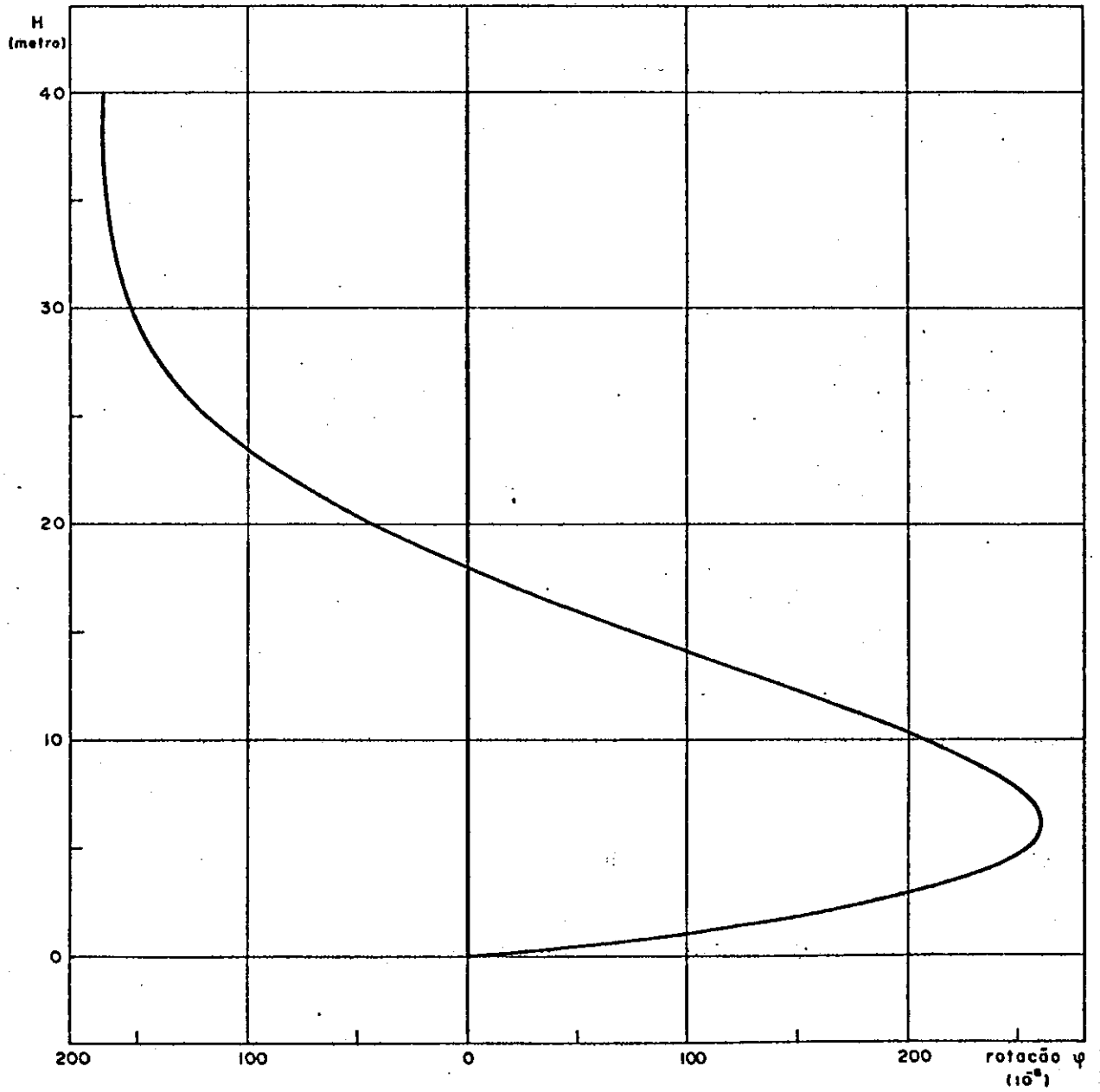


Figura 3.8c - Diagrama de ψ .

e para valores V_a com $Er < 0$ erros por excesso. E procedeu -se por partes, isto é, analisou-se os M_x positivos independentemente dos M_x negativos.

O objetivo de se ter adotado erros calculados por essas expressões, é o de evitar que se dê muita importância a porcentagens de erros grandes, quando estas afetam valores pequenos das grandezas consideradas. E o do procedimento por partes é o de ponderar esses erros, isto porque, no caso, o $máx V_e$ negativo é muito maior que o $máx V_e$ positivo.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 6 - REDE HABITUAL

PCNTC	ANALITIC	M O M E N T O		AP.GAMA	AP.DELTA
		AP.ALFA	AP.BETA		
2	.000	10.845	-10.529	10.845	-10.529
4	20.786	10.845	5.885	10.845	5.885
6	106.572	86.781	81.821	86.781	81.821
8	262.050	222.239	223.279	222.239	223.279
10	371.763	345.220	371.516	345.220	371.516
12	61.530	152.647	178.943	152.647	324.874
14	-1345.817	152.647	-329.185	-1009.095	-1934.419

Com essa subdivisão da altura H do reservatório (a menor adotada: $h=40000/6 \approx 6666.666$ mm) note que se obtém péssimos valores de M_x com qualquer uma das quatro aproximações.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE HABITUAL

PCNTC	ANALITIC	M O M E N T O		AP.GAMA	AP.DELTA
		AP.ALFA	AP.BETA		
2	.000	2.420	-.623	2.420	-.617
4	4.370	2.420	1.197	2.420	1.197
6	20.786	18.904	17.682	18.904	17.682
8	53.825	50.056	48.481	50.056	48.480
10	106.572	100.120	98.557	100.120	98.555
12	178.483	168.953	167.930	168.953	167.931
14	262.050	250.058	250.470	250.058	250.470
16	338.315	326.213	329.383	326.213	329.381
18	371.763	364.336	371.989	364.336	371.988
20	305.860	310.629	324.691	310.629	324.690
22	61.530	88.182	110.295	88.182	110.295
24	-457.830	-359.627	-377.513	-399.627	-311.262
26	-1345.817	-359.627	-1130.686	-1255.020	-1859.445

Com essa nova subdivisão da altura H do reservatório ($h=40000/12 \approx 3333.333$ mm) percebe-se que os valores de M_x

obtidos já não são tão ruins. Notam-se os seguintes máximos Er por falta e por excesso, para cada aproximação:

APROXIMAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
α	14 ou 16 22	+3.2% -7.2%	26 —	+70.4% —
β	12 22	+2.8% -13.1%	26 —	+16.0% —
γ	14 ou 16 22	3.2% -7.2%	26 —	+7.0% —
δ	12 22	+2.8% -13.1%	24 26	+10.9% -37.8%

Além disso, observe-se que se obtêm p \acute{e} ssimos valores de M_x nos pontos 2 e 4, por qualquer uma das quatro aproximações. Isto, naturalmente, verificando-os por meio de erros absolutos

$$(Ea = \frac{V_e - V_a}{V_e}).$$

Disto, conclue-se, de maneira geral e baseado somente nesses resultados, que a aproximação γ é a que apresenta melhores valores de M_x . Em seguida vem a aproximação β , posteriormente a δ e por último a aproximação α (isto, evitando-se qualquer tipo de correção, principalmente nos valores de M_x no engastamento).

Com a nova subdivisão da altura H do reservatório ($h=40000/24 \approx 1666.666$ mm), percebe-se que os resultados melhoraram sensivelmente em todas as aproximações em todos os pontos. Verificam-se, analogamente à análise anterior, os seguintes máximos Er por falta e por excesso, para cada aproximação:

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE HABITUAL

PONTC	ANALITICC	M G M E N T O M X			
		AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	.595	-.496	.595	-.496
4	.988	.595	.370	.595	.370
6	4.370	4.161	3.937	4.161	3.936
8	10.768	10.428	10.130	10.428	10.129
10	20.786	20.265	19.919	20.265	19.919
12	34.980	34.246	33.865	34.246	33.866
14	53.825	52.805	52.395	52.805	52.394
16	77.651	76.302	75.882	76.302	75.880
18	106.572	104.848	104.443	104.848	104.441
20	140.390	138.268	137.913	138.268	137.911
22	178.483	175.948	175.684	175.948	175.687
24	219.667	216.779	216.673	216.779	216.670
26	262.050	258.897	259.017	258.897	259.019
28	302.868	299.597	300.026	299.597	300.024
30	338.315	335.172	336.010	335.172	336.006
32	362.352	360.663	362.022	360.663	362.018
34	371.763	369.857	371.856	369.857	371.854
36	355.660	355.055	357.816	355.055	357.812
38	305.859	307.139	310.780	307.139	310.781
40	211.748	215.529	220.152	215.529	220.148
42	61.529	68.463	74.136	68.463	74.137
44	-157.398	-146.683	-139.935	-146.683	-139.936
46	-457.831	-442.804	-435.030	-442.804	-435.030
48	-851.892	-832.220	-824.446	-832.220	-793.277
50	-1349.817	-832.220	-1307.155	-1325.490	-1650.010

APROXI MAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
α	28	+0.9%	50	+38%
	42	-1.9%	—	—
β	24	+0.8%	50	+3.2%
	42	-3.4%	—	—
γ	28	+0.9%	50	+1.8%
	42	-1.9%	—	—
δ	24	+0.8%	48	+4.3%
	42	-3.4%	50	-22.2%

Note-se que os valores de M_x obtidos, por qualquer uma das aproximações, nos pontos 2 e 4 analisados por meio de erros absolutos, continuam péssimos. Donde conclue-se que a aproximação γ é a que continua apresentando os melhores valores de M_x e, posteriormente a aproximação β , vindo em seguida a aproximação δ e finalmente a aproximação α . Isto, naturalmente, como já dito, sem se preocupar em corrigir o valor de M_x no engastamento, principalmente nas aproximações α e δ .

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 40 - REDE HABITUAL

PONTC	ANALITICC	M O M E N T O			AP.GAMA	AP.DELTA
		AP.ALFA	AP.BETA	MX		
2	.000	.197	-.343	.197	-.333	
4	.341	.197	.135	.197	.134	
6	1.453	1.426	1.365	1.426	1.364	
8	3.472	3.408	3.321	3.408	3.317	
10	6.533	6.468	6.372	6.468	6.374	
12	10.768	10.665	10.555	10.665	10.550	
14	16.307	16.203	16.087	16.203	16.092	
16	23.274	23.088	22.957	23.088	22.953	
18	31.783	31.563	31.434	31.563	31.430	
20	41.938	41.653	41.514	41.653	41.519	
22	53.825	53.444	53.292	53.444	53.289	
24	67.510	67.056	66.904	67.056	66.902	
26	83.029	82.461	82.306	82.461	82.301	
28	100.384	99.684	99.537	99.684	99.531	
30	119.535	118.745	118.616	118.745	118.602	
32	140.390	139.453	139.308	139.453	139.317	
34	162.794	161.819	161.725	161.819	161.717	
36	186.522	185.394	185.306	185.394	185.295	
38	211.262	210.139	210.087	210.139	210.090	
40	236.610	235.430	235.404	235.430	235.415	
42	262.050	260.843	260.884	260.843	260.879	
44	286.947	285.740	285.856	285.740	285.854	
46	310.528	309.283	309.463	309.283	309.446	
48	331.877	330.715	330.995	330.715	331.009	
50	349.914	348.791	349.158	348.791	349.161	
52	363.292	362.384	362.876	362.384	362.876	
54	370.883	370.013	370.646	370.013	370.641	
56	370.774	370.146	370.924	370.146	370.919	
58	361.261	360.896	361.836	360.896	361.839	
60	340.348	340.360	341.487	340.360	341.479	
62	305.860	306.339	307.661	306.339	307.661	
64	255.442	256.421	257.945	256.421	257.947	
66	186.588	188.198	189.953	188.198	189.936	
68	96.659	98.963	100.939	98.963	100.942	
70	-17.076	-13.954	-11.789	-13.994	-11.783	
72	-157.397	-153.464	-151.023	-153.464	-151.025	
74	-327.073	-322.213	-319.547	-322.213	-319.549	
76	-526.789	-522.950	-520.076	-522.950	-520.075	
78	-765.058	-758.191	-755.125	-758.191	-755.125	
80	-1038.122	-1030.225	-1027.158	-1030.225	-1008.670	
82	-1349.817	-1030.225	-1335.983	-1340.907	-1539.356	

Com esse tamanho de malha ($h=40000/40=1000$ mm) ob-
têm-se os seguintes máximos E_r por falta e por excesso, pa-
ra cada aproximação:

APROXIMAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
α	36 a 52 68	+0.3% -0.6%	82 —	+23.6 —
β	36 a 42 68	0.3% 1.2%	82 —	1.0% —
γ	36 a 52 68	+0.3% -0.6%	82 —	+0.6 —
δ	36 a 42 68	0.3% 1.2%	80 82	+2.2% -14.0%

Da tabela de resultados vê-se que os piores valores de M_x , analisados por meio de erros absolutos são os nos pontos 68 e 70 (excluindo-se os valores no engastamento e nos pontos 2 e 3). Note-se que esses pontos são aqueles que se situam onde ocorre a mudança de sinal de M_x .

Mediante essas análises, conclue-se que os valores de M_x obtidos por esse ensaio são bem melhores que os obtidos pelo ensaio anterior, e que a melhor aproximação continua sendo a γ vindo em seguida a β , a δ e a α , nessa ordem (a mesma observada nos ensaios anteriores).

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - REDE HABITUAL

PONTO	M O M E N T O				
	ANALITICO	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	.160	-.040	.160	-.043
4	.234	.160	.109	.160	.109
6	.588	.922	.872	.922	.869
8	2.340	2.298	2.248	2.298	2.248
10	4.370	4.282	4.219	4.282	4.220
12	7.153	7.036	6.968	7.036	6.963
14	10.768	10.643	10.569	10.643	10.575
16	15.288	15.106	15.018	15.106	15.012
18	20.786	20.613	20.531	20.613	20.534
20	27.329	27.086	26.987	27.086	26.993
22	34.980	34.689	34.596	34.689	34.594
24	43.797	43.428	43.332	43.428	43.318
26	53.825	53.421	53.324	53.421	53.314
28	65.102	64.618	64.516	64.618	64.512
30	77.651	77.078	76.958	77.078	76.973
32	91.478	90.903	90.808	90.903	90.800
34	106.572	105.872	105.762	105.872	105.758
36	122.896	122.177	122.085	122.177	122.089
38	140.350	139.572	139.478	139.572	139.479
40	158.961	158.102	158.037	158.102	158.021
42	178.483	177.475	177.393	177.475	177.369
44	198.789	197.845	197.813	197.845	197.789
46	219.667	218.683	218.657	218.683	218.633
48	240.859	239.841	239.827	239.841	239.840
50	262.050	261.072	261.115	261.072	261.040
52	282.866	281.891	281.950	281.891	281.954
54	302.867	301.913	302.029	301.913	302.025
56	321.545	320.636	320.807	320.636	320.815
58	338.315	337.454	337.668	337.454	337.672
60	352.513	351.709	351.992	351.709	351.975
62	363.392	362.668	363.008	362.668	363.024
64	370.117	369.434	369.846	369.434	369.854
66	371.763	371.237	371.743	371.237	371.759
68	367.313	366.898	367.482	366.898	367.482
70	355.661	355.444	356.148	355.444	356.140
72	335.605	335.660	336.475	335.660	336.471
74	305.860	306.166	307.082	306.166	307.088
76	265.057	265.695	266.734	265.695	266.730
78	211.750	212.755	213.918	212.755	213.906
80	144.429	145.871	147.163	145.871	147.175
82	61.532	63.423	64.853	63.423	64.841
84	-38.539	-36.150	-34.583	-36.150	-34.589
86	-157.395	-154.463	-152.762	-154.463	-152.765
88	-256.637	-293.172	-291.352	-293.172	-291.353
90	-457.828	-453.763	-451.811	-453.763	-451.807
92	-642.454	-637.750	-635.724	-637.750	-635.724
94	-851.890	-846.608	-844.440	-846.608	-844.439
96	-1087.345	-1081.448	-1079.272	-1081.448	-1063.889
98	-1349.817	-1081.440	-1340.119	-1343.305	-1509.341

Observe-se que os resultados oriundos das quatro aproximações de M_x , com essa nova subdivisão da altura H do reservatório ($h=40000/48 \approx 833.333$ mm) são, de modo geral, bastante precisos. Os máximos Er por falta e por excesso que elas apresentam são:

APROXIMAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
α	38 a 60 82	+0.2% / -0.5%	98 —	+19.9% —
β	34 a 54 82	+0.2% -0.9%	98 —	+0.7% —
γ	38 a 60 82	+0.2% -0.5%	98 —	+0.5% —
δ	34 a 54 82	+0.2% -0.9%	96 98	+1.7% -11.8%

Continua - se observando, como já era esperado mediante os resultados dos ensaios anteriores, que os piores valores de M_x obtidos por qualquer uma das quatro aproximações, são nos pontos que se situam no coroamento e próximos a ele. Como também a aproximação α continua dando péssimo valor de M_x no engastamento.

A partir desta subdivisão da altura H do reservatório, verificou-se que os resultados obtidos por essas quatro aproximações melhoraram muito pouco, principalmente com as aproximações γ e β (as duas melhores). Percebe - se também que os resultados oriundos dessas quatro aproximações começaram a oscilar fornecendo resultados entre ótimos e bons, a partir de um certo tamanho de malha. Constatou-se que os resultados provenientes das aproximações γ e β começaram a oscilar a partir da subdivisão $n=52$, enquanto que com a aproximação δ os resultados começaram a oscilar a partir da subdivisão $n=64$ e com a aproximação α a partir da subdivisão $n=68$. Isto, analisando sempre o valor de M_x no engastamento por ser, no caso, o mais significativo.

Desta análise conclue-se que:

. Os erros oriundos das expressões em diferenças finitas aqui empregadas, são mínimos ao se atingir um tamanho ideal de malha.

. A partir desse tamanho de malha, as oscilações

se devem mais aos erros cometidos no processamento dos cálculos pelo computador, principalmente com valores que são dízimas (veja, por exemplo, os valores de h). Note-se também que à medida que se refina a malha, aumenta-se a quantidade de cálculos o que acarreta para o processo erros de truncamento. A aproximação γ , obtida com o emprego de $PI-2$ com imposição de rotação nula no engastamento, é a que apresenta resultados mais precisos para M_x .

A fim de esclarecer melhor o que se disse acima, quanto às oscilações, apresentam-se a seguir os resultados de mais três ensaios (para $n=52$, 54 e 56). Note-se que no ensaio para $n=54$, os resultados apresentados pela aproximação γ são melhores que os correspondentes do ensaio com $n=48$.

ENSAIO DE AFERICAO PARA N= 52 - REDE HABITUAL

PCNTC	ANALITICO	M O M E N T O			
		AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	.121	-.127	.121	-.127
4	.198	.121	.084	.121	.084
6	.835	.778	.740	.778	.740
8	1.971	1.891	1.848	1.891	1.846
10	3.669	3.538	3.489	3.538	3.484
12	5.989	5.818	5.769	5.818	5.765
14	8.992	8.703	8.628	8.703	8.630
16	12.737	12.480	12.425	12.480	12.428
18	17.283	16.891	16.816	16.891	16.814
20	22.684	22.274	22.202	22.274	22.204
22	28.994	28.468	28.374	28.468	28.389
24	36.260	35.683	35.618	35.683	35.599
26	44.525	43.785	43.697	43.785	43.695
28	53.825	52.988	52.903	52.988	52.891
30	64.190	63.243	63.165	63.243	63.167
32	75.637	74.493	74.397	74.493	74.380
34	88.174	86.871	86.762	86.871	86.762
36	101.794	100.463	100.401	100.463	100.387
38	116.475	114.936	114.835	114.936	114.840
40	132.176	130.581	130.504	130.581	130.509
42	148.834	147.128	147.040	147.128	147.035
44	166.365	164.599	164.542	164.599	164.523
46	184.656	182.843	182.787	182.843	182.787
48	203.564	201.689	201.656	201.689	201.661
50	222.914	220.976	220.952	220.976	220.948
52	242.494	240.553	240.553	240.553	240.548
54	262.050	260.055	260.072	260.055	260.091
56	281.288	279.320	279.386	279.320	279.382
58	299.863	297.801	297.895	297.801	297.857
60	317.382	315.336	315.440	315.336	315.469
62	333.397	331.497	331.655	331.497	331.679
64	347.402	345.529	345.754	345.529	345.739
66	358.835	357.015	357.282	357.015	357.277
68	367.066	365.396	365.727	365.396	365.723
70	371.404	369.823	370.196	369.823	370.206
72	371.092	369.716	370.178	369.716	370.169
74	365.306	364.150	364.682	364.150	364.668
76	353.152	352.320	352.926	352.320	352.921
78	333.678	333.173	333.872	333.173	333.853
80	305.860	305.731	306.502	305.731	306.507
82	266.621	268.962	269.835	268.962	269.828
84	220.824	221.664	222.638	221.664	222.643
86	161.289	162.643	163.718	162.643	163.714
88	88.792	90.729	91.910	90.729	91.908
90	2.083	4.663	5.949	4.663	5.957
92	-100.104	-96.891	-95.499	-96.891	-95.504
94	-215.034	-215.142	-213.647	-215.142	-213.651
96	-355.957	-351.326	-349.723	-351.326	-349.725
98	-512.078	-506.746	-505.055	-506.746	-505.056
100	-688.541	-682.438	-680.654	-682.438	-680.654
102	-886.396	-879.536	-877.676	-879.536	-877.677
104	-1106.571	-1098.948	-1097.089	-1098.948	-1082.911
106	-1349.827	-1098.948	-1338.815	-1341.452	-1494.779

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 54 - REDE HABITUAL

PONTO	ANALITICO	M O M E N T O			
		AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	.104	-.295	.104	-.281
4	.184	.104	.077	.104	.078
6	.771	.791	.766	.791	.763
8	1.818	1.796	1.747	1.796	1.741
10	3.379	3.407	3.365	3.407	3.363
12	5.509	5.530	5.474	5.530	5.471
14	8.262	8.328	8.276	8.328	8.271
16	11.692	11.773	11.714	11.773	11.703
18	15.849	15.950	15.885	15.950	15.883
20	20.786	20.950	20.892	20.950	20.876
22	26.548	26.697	26.628	26.697	26.625
24	33.181	33.325	33.245	33.325	33.235
26	40.725	40.966	40.897	40.966	40.907
28	49.216	49.413	49.317	49.413	49.314
30	58.681	58.915	58.839	58.915	58.831
32	69.143	69.372	69.290	69.372	69.280
34	80.613	80.890	80.807	80.890	80.817
36	93.093	93.358	93.276	93.358	93.266
38	106.572	106.857	106.791	106.857	106.760
40	121.023	121.294	121.235	121.294	121.210
42	136.406	136.612	136.524	136.612	136.524
44	152.658	153.020	152.973	153.020	152.968
46	169.699	169.972	169.896	169.972	169.901
48	187.422	187.700	187.659	187.700	187.633
50	205.696	206.077	206.055	206.077	206.055
52	224.360	224.698	224.652	224.698	224.663
54	243.221	243.608	243.626	243.608	243.616
56	262.051	262.449	262.476	262.449	262.476
58	280.585	281.069	281.139	281.069	281.129
60	298.518	298.867	298.932	298.867	298.932
62	315.501	315.970	316.107	315.970	316.118
64	331.138	331.485	331.620	331.485	331.636
66	344.985	345.308	345.491	345.308	345.522
68	356.548	356.757	356.978	356.757	356.968
70	365.277	365.470	365.754	365.470	365.764
72	370.568	370.684	371.018	370.684	371.003
74	371.763	371.959	372.391	371.959	372.380
76	368.142	368.181	368.619	368.181	368.614
78	358.932	359.097	359.635	359.097	359.640
80	343.301	343.420	344.000	343.420	344.010
82	320.361	320.645	321.358	320.645	321.350
84	289.173	289.401	290.152	289.401	290.154
86	248.748	249.141	249.997	249.141	250.000
88	198.052	198.592	199.540	198.592	199.535
90	136.012	136.705	137.740	136.705	137.740
92	61.527	62.420	63.554	62.420	63.544
94	-26.527	-25.451	-24.229	-25.451	-24.226
96	-129.283	-127.997	-126.684	-127.997	-126.676
98	-247.868	-246.366	-244.960	-246.366	-244.963
100	-382.389	-381.611	-380.105	-381.611	-380.111
102	-536.916	-534.894	-533.314	-534.894	-533.316
104	-709.456	-707.145	-705.481	-707.145	-705.480
106	-901.935	-899.355	-897.626	-899.355	-897.625
108	-1115.169	-1112.310	-1110.581	-1112.310	-1099.906
110	-1345.831	-1112.310	-1344.279	-1346.706	-1494.713

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 56 - REDE HABITUAL

PCNTC	M O M E N T O				
	ANALITICO	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	.112	-.044	.112	-.055
4	.170	.112	.079	.112	.078
6	.715	.664	.631	.664	.629
8	1.682	1.632	1.597	1.632	1.596
10	3.123	3.037	2.995	3.037	2.993
12	5.085	4.978	4.930	4.978	4.935
14	7.617	7.455	7.400	7.455	7.403
16	10.768	10.573	10.514	10.573	10.518
18	14.584	14.355	14.305	14.355	14.294
20	19.111	18.798	18.737	18.798	18.729
22	24.392	24.057	23.996	24.057	24.004
24	30.469	30.057	29.989	30.057	29.989
26	37.378	36.948	36.885	36.948	36.879
28	45.154	44.686	44.611	44.686	44.616
30	53.825	53.254	53.162	53.254	53.161
32	63.414	62.867	62.796	62.867	62.807
34	73.935	73.335	73.255	73.335	73.239
36	85.396	84.812	84.731	84.812	84.723
38	97.793	97.161	97.083	97.161	97.078
40	111.112	110.507	110.432	110.507	110.416
42	125.325	124.713	124.650	124.713	124.639
44	140.390	139.717	139.667	139.717	139.650
46	156.247	155.493	155.431	155.493	155.421
48	172.817	172.066	172.010	172.066	172.016
50	190.002	189.213	189.165	189.213	189.155
52	207.680	206.821	206.768	206.821	206.768
54	225.703	224.915	224.922	224.915	224.888
56	243.895	243.009	242.996	243.009	243.002
58	262.050	261.152	261.180	261.152	261.180
60	279.931	279.009	279.055	279.009	279.083
62	297.264	296.406	296.505	296.406	296.511
64	313.738	312.742	312.825	312.742	312.798
66	329.003	328.182	328.337	328.182	328.354
68	342.665	341.877	342.038	341.877	342.032
70	354.289	353.491	353.688	353.491	353.683
72	363.392	362.762	363.036	362.762	363.014
74	369.444	368.769	369.057	368.769	369.063
76	371.868	371.298	371.654	371.298	371.638
78	370.035	369.466	369.870	369.466	369.854
80	363.269	362.812	363.300	362.812	363.272
82	350.842	350.525	351.066	350.525	351.055
84	331.980	331.746	332.318	331.746	332.324
86	305.860	305.864	306.539	305.864	306.550
88	271.617	271.754	272.530	271.754	272.538
90	228.343	228.853	229.690	228.853	229.687
92	175.096	175.854	176.757	175.854	176.768
94	110.900	112.040	113.045	112.040	113.037
96	34.761	36.238	37.303	36.238	37.309
98	-54.232	-52.425	-51.262	-52.425	-51.262
100	-157.397	-155.069	-153.819	-155.069	-153.817
102	-275.441	-272.679	-271.352	-272.679	-271.347
104	-409.450	-406.221	-404.816	-406.221	-404.813
106	-560.372	-556.654	-555.169	-556.654	-555.172
108	-725.105	-724.900	-723.349	-724.900	-723.351
110	-916.463	-911.746	-910.134	-911.746	-910.133
112	-1123.172	-1117.956	-1116.343	-1117.956	-1103.176
114	-1349.827	-1117.956	-1341.917	-1344.111	-1486.749

3.5.2 - Rotações ψ Aproximadas com Rede Habitual

As análises dos resultados obtidos pelas quatro aproximações (α , β , γ e δ) da rotação ψ , foram feitas de maneira sucinta e global. Isto porque essa grandeza, geralmente num dimensionamento, não é tão importante comparada com os esforços, no caso com o momento M_x . Melhor explicitando, apresentou-se primeiramente todas as análises e posteriormente os resultados dos ensaios analisados.

Essas análises foram feitas segundo o mesmo esquema de ensaios adotado para análise das aproximações de M_x , a fim de verificar os comportamentos dessas aproximações dentro desse esquema. Naturalmente não seria necessário obedecê-lo, pois as aproximações do cálculo da grandeza ψ independem das aproximações feitas para o cálculo da grandeza M_x . Porém, note-se que o momento M_x pode ser obtida por meio da rotação ψ , derivando-a uma vez e multiplicando-a pela constante K .

O critério seguido para análise desses resultados foi o mesmo utilizado na análise de M_x , porém num mesmo ensaio evitou-se a análise por partes uma vez que, para este caso, deixa de ser interessante. Os máximos Er por falta e por excesso foram apresentados da seguinte forma:

$$(max Er = + \% , - \%) \quad e$$

$$(max Er = + \%) \quad \text{quando existe} \\ \text{somente máximo} \\ Er \text{ por falta.}$$

Feita essa pequena introdução, apresentam-se a seguir as análises das aproximações do cálculo da rotação ψ .

Mediante os resultados obtidos com a subdivisão mais grosseira da altura H do reservatório ($n=6$), observa-se que já se obtém resultados não tão imprecisos para valores de ψ , como se obteve para o momento M_x , principalmente com a aproximação γ ($max Er = + 17.6\%$) e δ ($max Er = + 21.6\%$). Note-se que a aproximação γ é a mais precisa. Com as

Outras duas aproximações se obtêm também razoáveis valores de ψ , a menos no ponto do engastamento que pode, naturalmente ser corrigido para ser nulo (o que faz com que a aproximação α seja a própria aproximação γ).

Já com o tamanho de malha $h=40000/12$, percebe-se melhor que todas as aproximações mais ou menos se equivalem (salvo o valor de ψ no engastamento obtidos pelas aproximações α e β). Pois, enquanto que umas apresentam melhores resultados em uma faixa de pontos em relação às outras aproximações, essas outras apresentam melhores resultados que estas em outra faixa de pontos. Porém, ainda dá para afirmar que a aproximação γ ($\max Er = + 5,5\%$) é a que apresenta melhores resultados (que é igual à aproximação α , ao se fazer nesta $\psi=0$ no ponto 26), vindo em seguida a aproximação β ($\max Er = + 3,8\%$, $- 5,9\%$), ao se fazer $\psi=0$ no ponto 26. E por último a aproximação δ ($\max Er = + 3,8\%$, $- 12,3\%$) também ao se fazer $\psi=0$ no ponto 26.

No ensaio seguinte ($h=40000/24$), de maneira geral, verifica-se sensível melhora dos resultados apresentados pelas quatro aproximações. Principalmente na faixa de pontos entre a troca de sinal de ψ até ao engastamento. Por esses resultados verifica-se que a melhor aproximação continua sendo a γ ($=\alpha$ com $\psi=0$ no engastamento) ($\max Er = + 1,5\%$), vindo em seguida respectivamente β ($\max Er = + 1\%$, $- 2,8\%$) e δ ($\max Er = + 1\%$, $- 5,1\%$), ao se admitir nestas, $\psi=0$ no engastamento.

A partir dessa subdivisão da altura H do reservatório ($n=24$), notou-se que o seu aumento gradativo (consequentemente a diminuição gradativa do tamanho da malha), em $n=26, 28, 30, etc.$, pouco foi melhorando os valores de ψ obtidos por essas quatro aproximações. Inclusive verificou-se que, após atingir um certo tamanho de malha ($n=28$) os resultados que se obtêm por essas aproximações, nos pontos próximos ao corcamento, oscilam em torno dos exatos, enquanto que nos pontos próximos ao engastamento continuam convergindo monotonicamente para valores exatos de ψ (veja os valores de ψ obtidos com $n=26, 28$ e 30). Continuando-se com o

refinamento gradativo, verificou-se que ao atingir o tamanho de malha $h=40000/64$ obteve-se, com a aproximação γ -a melhor de todas-, no ponto mais próximo do engastamento um valor de ψ com erro maior do que se obteve com abertura da malha $h=40000/62$; quebrando assim a convergência monotônica que se via nos valores aproximados de ψ neste ponto (que é o ponto onde se verificava sempre o máximo erro em valor absoluto).

Apresentam-se a seguir, além dos resultados obtidos com aquelas subdivisões da altura H do reservatório para as quais se analisaram as aproximações de M_x , os resultados dos ensaios com $n=26, 28, 30, 60, 62$ e 64 , a fim de melhor esclarecer a análise desenvolvida.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 6 - REDE HABITUAL

PUNTO	R O T A C O E S				W'
	ANALITICO	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	
2	-.1657091E-03	-.1593042E-03	-.1540885E-03	-.1593042E-03	-.1540884E-03
4	-.1625195E-03	-.1538815E-03	-.1577294E-03	-.1538815E-03	-.1577295E-03
6	-.1339550E-03	-.1294749E-03	-.1382829E-03	-.1294749E-03	-.1382830E-03
8	-.4371077E-04	-.5221971E-04	-.6298798E-04	-.5221971E-04	-.6298798E-04
10	.1219320E-03	.8964511E-04	.9254481E-04	.8964511E-04	.9254483E-04
12	.2600516E-03	.2141119E-03	.2433077E-03	.2141119E-03	.3162729E-03
14	.0000000E+00	.2904354E-03	.2188957E-03	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE HABITUAL

PUNTO	R O T A C O E S				W'
	ANALITICO	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	
2	-.1657091E-03	-.1634856E-03	-.1630287E-03	-.1634856E-03	-.1630287E-03
4	-.1653624E-03	-.1628808E-03	-.1632621E-03	-.1628808E-03	-.1632620E-03
6	-.1625195E-03	-.1602154E-03	-.1612079E-03	-.1602154E-03	-.1612079E-03
8	-.1535805E-03	-.1515954E-03	-.1532874E-03	-.1515954E-03	-.1532874E-03
10	-.1339550E-03	-.1328233E-03	-.1353003E-03	-.1328233E-03	-.1353003E-03
12	-.5867866E-04	-.9918914E-04	-.1023129E-03	-.9918914E-04	-.1023128E-03
14	-.4371077E-04	-.4681277E-04	-.500897E-04	-.4681277E-04	-.5008904E-04
16	.3178406E-04	.2522106E-04	.2284031E-04	.2522106E-04	.2284028E-04
18	.1219320E-03	.1115396E-03	.1118643E-03	.1115396E-03	.1118643E-03
20	.2094510E-03	.1959102E-03	.2016633E-03	.1959102E-03	.2016634E-03
22	.2600515E-03	.2457615E-03	.2605585E-03	.2457615E-03	.2605585E-03
24	.2173051E-03	.2068308E-03	.2326845E-03	.2068308E-03	.2492474E-03
26	.0000000E+00	.1069241E-03	.4968843E-04	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE HABITUAL

PONTO	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1651077E-03	-.1650435E-03	-.1651077E-03	-.1650438E-03
4	-.1656640E-03	-.1650334E-03	-.1650795E-03	-.1650334E-03	-.1650795E-03
6	-.1653224E-03	-.1647361E-03	-.1648386E-03	-.1647361E-03	-.1648386E-03
8	-.1644509E-03	-.1638243E-03	-.1639921E-03	-.1638243E-03	-.1639921E-03
10	-.1625195E-03	-.1619060E-03	-.1621541E-03	-.1619060E-03	-.1621541E-03
12	-.1596804E-03	-.1584990E-03	-.1588380E-03	-.1584990E-03	-.1588379E-03
14	-.1535805E-03	-.1530583E-03	-.1534963E-03	-.1530583E-03	-.1534963E-03
16	-.1454162E-03	-.1445891E-03	-.1455312E-03	-.1445891E-03	-.1455314E-03
18	-.1339596E-03	-.1336673E-03	-.1343126E-03	-.1336673E-03	-.1343129E-03
20	-.1185647E-03	-.1184727E-03	-.1192133E-03	-.1184727E-03	-.1192133E-03
22	-.9867649E-04	-.9883416E-04	-.9965207E-04	-.9883416E-04	-.9965194E-04
24	-.736181E-04	-.7428874E-04	-.7515264E-04	-.7428874E-04	-.7515284E-04
26	-.4371077E-04	-.4455900E-04	-.4542177E-04	-.4455900E-04	-.4542175E-04
28	-.2365236E-05	-.2385280E-05	-.2410142E-05	-.2385280E-05	-.2410143E-05
30	.3178421E-04	.3001999E-04	.2938392E-04	.3001999E-04	.2938386E-04
32	.7577921E-04	.7350968E-04	.7314832E-04	.7350968E-04	.7314835E-04
34	.1219322E-03	.1191672E-03	.1192256E-03	.1191672E-03	.1192256E-03
36	.1677023E-03	.1644742E-03	.1651275E-03	.1644742E-03	.1651275E-03
38	.2054912E-03	.2058613E-03	.2073148E-03	.2058613E-03	.2073148E-03
40	.2423225E-03	.2385280E-03	.2410142E-03	.2385280E-03	.2410143E-03
42	.2600815E-03	.2562775E-03	.2600506E-03	.2562775E-03	.2600506E-03
44	.2544425E-03	.2513888E-03	.2567145E-03	.2513888E-03	.2567145E-03
46	.2173046E-03	.2145459E-03	.2216869E-03	.2145459E-03	.2216868E-03
48	.1364806E-03	.1348568E-03	.1439415E-03	.1348568E-03	.1439376E-03
50	.0000000E+00	.3082934E-04	.1168818E-04	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 26 - REDE HABITUAL

PONTO	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1651889E-03	-.1651380E-03	-.1651889E-03	-.1651379E-03
4	-.1654778E-03	-.1651302E-03	-.1651663E-03	-.1651302E-03	-.1651664E-03
6	-.1647355E-03	-.1648988E-03	-.1649777E-03	-.1648988E-03	-.1649777E-03
8	-.1632250E-03	-.1641939E-03	-.1643225E-03	-.1641939E-03	-.1643225E-03
10	-.1606159E-03	-.1627169E-03	-.1629064E-03	-.1627169E-03	-.1629065E-03
12	-.1564125E-03	-.1601028E-03	-.1603612E-03	-.1601028E-03	-.1603613E-03
14	-.1501814E-03	-.1559380E-03	-.1562721E-03	-.1559380E-03	-.1562720E-03
16	-.1414231E-03	-.1497687E-03	-.1501835E-03	-.1497687E-03	-.1501835E-03
18	-.1294672E-03	-.1411109E-03	-.1416080E-03	-.1411108E-03	-.1416080E-03
20	-.1143977E-03	-.1294694E-03	-.1300466E-03	-.1294694E-03	-.1300466E-03
22	-.9518713E-04	-.1143644E-03	-.1150140E-03	-.1143644E-03	-.1150139E-03
24	-.7169039E-04	-.9536224E-04	-.9606892E-04	-.9536224E-04	-.9606878E-04
26	-.4371077E-04	-.7212014E-04	-.7285968E-04	-.7212014E-04	-.7285988E-04
28	-.2365236E-05	-.4444011E-04	-.4517710E-04	-.4444011E-04	-.4517715E-04
30	.3178421E-04	-.1233841E-04	-.1302414E-04	-.1233841E-04	-.1302427E-04
32	.7577921E-04	.2387410E-04	.2330754E-04	.2387410E-04	.2330763E-04
34	.1219322E-03	.6351748E-04	.6314386E-04	.6351748E-04	.6314393E-04
36	.1677023E-03	.1053981E-03	.1053219E-03	.1053981E-03	.1053219E-03
38	.2054912E-03	.1477355E-03	.1480773E-03	.1477355E-03	.1480775E-03
40	.2423225E-03	.1880216E-03	.1889223E-03	.1880216E-03	.1889224E-03
42	.2600815E-03	.2225030E-03	.2245230E-03	.2225030E-03	.2245230E-03
44	.2544425E-03	.2480641E-03	.2505804E-03	.2480641E-03	.2505803E-03
46	.2173046E-03	.2581274E-03	.2617291E-03	.2581274E-03	.2617290E-03
48	.1364806E-03	.2465810E-03	.2514618E-03	.2465810E-03	.2514618E-03
50	.0000000E+00	.2057501E-03	.2120984E-03	.2057501E-03	.2120984E-03
52	.1261250E-03	.1268292E-03	.1347366E-03	.1268292E-03	.1348046E-03
54	.1643576E-03	.2652485E-04	.9930611E-05	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 28 - REDE HABITUAL

PONTO	R O T A C C E S				
	ANALITICO	APPROX. ALFA	APPROX. BETA	APPROX. GAMA	APPROX. DELTA
2	-.1457091E-03	-.1652769E-03	-.1652347E-03	-.1652769E-03	-.1652348E-03
4	-.1656442E-03	-.1652305E-03	-.1652598E-03	-.1652305E-03	-.1652599E-03
6	-.1654955E-03	-.1650467E-03	-.1651090E-03	-.1650467E-03	-.1651090E-03
8	-.1649405E-03	-.1644893E-03	-.1645900E-03	-.1644893E-03	-.1645900E-03
10	-.1637749E-03	-.1633276E-03	-.1634755E-03	-.1633276E-03	-.1634756E-03
12	-.1617134E-03	-.1612792E-03	-.1614804E-03	-.1612792E-03	-.1614805E-03
14	-.1584345E-03	-.1580234E-03	-.1582832E-03	-.1580234E-03	-.1582832E-03
16	-.1535805E-03	-.1532080E-03	-.1535309E-03	-.1532080E-03	-.1535309E-03
18	-.1467694E-03	-.1464551E-03	-.1468438E-03	-.1464551E-03	-.1468439E-03
20	-.1376032E-03	-.1373697E-03	-.1378243E-03	-.1373697E-03	-.1378244E-03
22	-.1256823E-03	-.1255566E-03	-.1260742E-03	-.1255566E-03	-.1260741E-03
24	-.1106263E-03	-.1106382E-03	-.1112113E-03	-.1106382E-03	-.1112112E-03
26	-.9209522E-04	-.9228115E-04	-.9289591E-04	-.9228115E-04	-.9289704E-04
28	-.6584157E-04	-.7022891E-04	-.7086882E-04	-.7022891E-04	-.7086887E-04
30	-.4371064E-04	-.4433763E-04	-.4497424E-04	-.4433763E-04	-.4497446E-04
32	-.1372781E-04	-.1462600E-04	-.1522356E-04	-.1462600E-04	-.1522320E-04
34	-.1586545E-04	-.1867049E-04	-.1815901E-04	-.1867049E-04	-.1815933E-04
36	-.5654319E-04	-.5503547E-04	-.5466911E-04	-.5503547E-04	-.5466889E-04
38	-.9542352E-04	-.9359827E-04	-.9344881E-04	-.9359827E-04	-.9344859E-04
40	-.1351906E-03	-.1330583E-03	-.1332109E-03	-.1330583E-03	-.1332110E-03
42	-.1740112E-03	-.1716022E-03	-.1721565E-03	-.1716022E-03	-.1721566E-03
44	-.2094510E-03	-.2068203E-03	-.2078896E-03	-.2068203E-03	-.2078895E-03
46	-.2383514E-03	-.2356230E-03	-.2373330E-03	-.2356230E-03	-.2373329E-03
48	-.2569561E-03	-.2541657E-03	-.2566527E-03	-.2541657E-03	-.2566526E-03
50	-.2604491E-03	-.2577865E-03	-.2611931E-03	-.2577865E-03	-.2611933E-03
52	-.2433176E-03	-.2409674E-03	-.2454377E-03	-.2409674E-03	-.2454377E-03
54	-.1951464E-03	-.1973261E-03	-.2029982E-03	-.1973261E-03	-.2029981E-03
56	-.1206558E-03	-.1196520E-03	-.1265923E-03	-.1196520E-03	-.1294406E-03
58	-.1043576E-06	-.2305935E-04	-.8544586E-05	-.0000000E+00	-.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 30 - REDE HABITUAL

PONTO	R O T A C C E S				
	ANALITICO	APPROX. ALFA	APPROX. BETA	APPROX. GAMA	APPROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1652713E-03	-.1652372E-03	-.1652713E-03	-.1652375E-03
4	-.1656890E-03	-.1652334E-03	-.1652569E-03	-.1652334E-03	-.1652570E-03
6	-.1655370E-03	-.1650856E-03	-.1651354E-03	-.1650856E-03	-.1651355E-03
8	-.1650919E-03	-.1646390E-03	-.1647193E-03	-.1646390E-03	-.1647193E-03
10	-.1641609E-03	-.1637105E-03	-.1638277E-03	-.1637105E-03	-.1638277E-03
12	-.1625195E-03	-.1620784E-03	-.1622376E-03	-.1620784E-03	-.1622376E-03
14	-.1599145E-03	-.1594912E-03	-.1596967E-03	-.1594912E-03	-.1596968E-03
16	-.1560654E-03	-.1556707E-03	-.1559261E-03	-.1556707E-03	-.1559261E-03
18	-.1506698E-03	-.1503172E-03	-.1506253E-03	-.1503172E-03	-.1506255E-03
20	-.1434081E-03	-.1431144E-03	-.1434762E-03	-.1431144E-03	-.1434762E-03
22	-.1339550E-03	-.1337403E-03	-.1341554E-03	-.1337403E-03	-.1341553E-03
24	-.1219889E-03	-.1218760E-03	-.1223410E-03	-.1218760E-03	-.1223409E-03
26	-.1072083E-03	-.1072226E-03	-.1077302E-03	-.1072226E-03	-.1077301E-03
28	-.8925161E-04	-.8951873E-04	-.9006009E-04	-.8951873E-04	-.9006007E-04
30	-.6822085E-04	-.6856781E-04	-.6912672E-04	-.6856781E-04	-.6912697E-04
32	-.4371077E-04	-.4426271E-04	-.4481798E-04	-.4426271E-04	-.4481788E-04
34	-.1584309E-04	-.1662558E-04	-.1715034E-04	-.1662558E-04	-.1715032E-04
36	-.1519325E-04	-.1415956E-04	-.1370036E-04	-.1415956E-04	-.1370029E-04
38	-.4899733E-04	-.4765933E-04	-.4734984E-04	-.4765933E-04	-.4734985E-04
40	-.8450568E-04	-.8333677E-04	-.8314835E-04	-.8333677E-04	-.8314852E-04
42	-.1219374E-03	-.1201043E-03	-.1201399E-03	-.1201043E-03	-.1201399E-03
44	-.1587376E-03	-.1566589E-03	-.1569903E-03	-.1566589E-03	-.1569901E-03
46	-.1925146E-03	-.1912258E-03	-.1919345E-03	-.1912258E-03	-.1919348E-03
48	-.2239824E-03	-.2215403E-03	-.2227181E-03	-.2215403E-03	-.2227182E-03
50	-.2473064E-03	-.2447878E-03	-.2465339E-03	-.2447878E-03	-.2465338E-03
52	-.2600513E-03	-.2575585E-03	-.2599789E-03	-.2575585E-03	-.2599796E-03
54	-.2581470E-03	-.2558070E-03	-.2590110E-03	-.2558070E-03	-.2590109E-03
56	-.2358668E-03	-.2348313E-03	-.2389277E-03	-.2348313E-03	-.2389277E-03
58	-.1943368E-03	-.1927777E-03	-.1943655E-03	-.1927777E-03	-.1943696E-03
60	-.1140551E-03	-.1131732E-03	-.1143100E-03	-.1131732E-03	-.1147865E-03
62	-.0000000E+00	-.2022567E-04	-.7429539E-05	-.0000000E+00	-.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N° 40 - REDE MARITUAL

PONTC	R O T A C E S				
	ANALITICO	APRCX.-ALFA	APRCX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1654493E-03	-.1654327E-03	-.1654493E-03	-.1654328E-03
4	-.1657007E-03	-.1654345E-03	-.1654451E-03	-.1654345E-03	-.1654451E-03
6	-.1656387E-03	-.1653736E-03	-.1653937E-03	-.1653736E-03	-.1653937E-03
8	-.1654602E-03	-.1651924E-03	-.1652239E-03	-.1651924E-03	-.1652239E-03
10	-.1648919E-03	-.1648220E-03	-.1648674E-03	-.1648220E-03	-.1648673E-03
12	-.1644899E-03	-.1641795E-03	-.1642404E-03	-.1641795E-03	-.1642404E-03
14	-.1634441E-03	-.1631721E-03	-.1632497E-03	-.1631721E-03	-.1632497E-03
16	-.1619492E-03	-.1616987E-03	-.1617947E-03	-.1616987E-03	-.1617947E-03
18	-.1599145E-03	-.1596492E-03	-.1597653E-03	-.1596492E-03	-.1597653E-03
20	-.1571604E-03	-.1569036E-03	-.1570403E-03	-.1569036E-03	-.1570403E-03
22	-.1535805E-03	-.1533375E-03	-.1534962E-03	-.1533375E-03	-.1534963E-03
24	-.1490418E-03	-.1488188E-03	-.1490002E-03	-.1488188E-03	-.1490003E-03
26	-.1434081E-03	-.1432122E-03	-.1434161E-03	-.1432122E-03	-.1434161E-03
28	-.1365416E-03	-.1363819E-03	-.1366087E-03	-.1363819E-03	-.1366084E-03
30	-.1283054E-03	-.1281908E-03	-.1284393E-03	-.1281908E-03	-.1284395E-03
32	-.1185687E-03	-.1185083E-03	-.1187776E-03	-.1185083E-03	-.1187775E-03
34	-.1072033E-03	-.1072106E-03	-.1074976E-03	-.1072106E-03	-.1074978E-03
36	-.9411639E-04	-.9419011E-04	-.9449224E-04	-.9419011E-04	-.9449222E-04
38	-.7920456E-04	-.7935762E-04	-.7967035E-04	-.7935762E-04	-.7967021E-04
40	-.6241172E-04	-.6264877E-04	-.6296572E-04	-.6264877E-04	-.6296560E-04
42	-.4371077E-04	-.4403853E-04	-.4435304E-04	-.4403853E-04	-.4435295E-04
44	-.2311763E-04	-.2354169E-04	-.2384440E-04	-.2354169E-04	-.2384419E-04
46	-.7015094E-06	-.1228332E-05	-.1509507E-05	-.1228332E-05	-.1509507E-05
48	.2340552E-04	.2277159E-04	.2252467E-04	.2277159E-04	.2252457E-04
50	.4899747E-04	.4825306E-04	.4805525E-04	.4825306E-04	.4805528E-04
52	.7577911E-04	.7492208E-04	.7478944E-04	.7492208E-04	.7478923E-04
54	.1033567E-03	.1023869E-03	.1023386E-03	.1023869E-03	.1023385E-03
56	.1312218E-03	.1301429E-03	.1302001E-03	.1301429E-03	.1302001E-03
58	.1587380E-03	.1575570E-03	.1577431E-03	.1575570E-03	.1577432E-03
60	.1851261E-03	.1838541E-03	.1841951E-03	.1838541E-03	.1841951E-03
62	.2094509E-03	.2081053E-03	.2086299E-03	.2081053E-03	.2086297E-03
64	.2308071E-03	.2292088E-03	.229472E-03	.2292088E-03	.229474E-03
66	.2473765E-03	.2458820E-03	.2468661E-03	.2458820E-03	.2468661E-03
68	.2580663E-03	.2566506E-03	.2579142E-03	.2566506E-03	.2579142E-03
70	.2612102E-03	.2598369E-03	.2614146E-03	.2598369E-03	.2614147E-03
72	.2548423E-03	.2535572E-03	.2554837E-03	.2535572E-03	.2554836E-03
74	.2356689E-03	.2357194E-03	.2380267E-03	.2357194E-03	.2380286E-03
76	.2049803E-03	.2040258E-03	.2067506E-03	.2040258E-03	.2067506E-03
78	.1566842E-03	.1559830E-03	.1591535E-03	.1559830E-03	.1591535E-03
80	.8920099E-04	.8891741E-04	.9254775E-04	.8891741E-04	.9393443E-04
82	.0000000E-00	.1165056E-04	.4159888E-05	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - REDE HABITUAL

PONTO	R O T A C O E S				
	ANALITIC	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1654259E-03	-.1654196E-03	-.1654259E-03	-.1654197E-03
4	-.1657043E-03	-.1654159E-03	-.1654207E-03	-.1654159E-03	-.1654206E-03
6	-.1656640E-03	-.1653821E-03	-.1653932E-03	-.1653821E-03	-.1653933E-03
8	-.1655623E-03	-.1652814E-03	-.1652985E-03	-.1652814E-03	-.1652989E-03
10	-.1652624E-03	-.1650758E-03	-.1651004E-03	-.1650758E-03	-.1651004E-03
12	-.1650665E-03	-.1647221E-03	-.1647552E-03	-.1647221E-03	-.1647553E-03
14	-.1644509E-03	-.1641696E-03	-.1642116E-03	-.1641696E-03	-.1642117E-03
16	-.1635416E-03	-.1633650E-03	-.1634169E-03	-.1633650E-03	-.1634169E-03
18	-.1625199E-03	-.1622487E-03	-.1623111E-03	-.1622487E-03	-.1623111E-03
20	-.1610216E-03	-.1607582E-03	-.1608314E-03	-.1607582E-03	-.1608315E-03
22	-.1596804E-03	-.1588277E-03	-.1589128E-03	-.1588277E-03	-.1589128E-03
24	-.1566248E-03	-.1563865E-03	-.1564840E-03	-.1563865E-03	-.1564839E-03
26	-.1535805E-03	-.1533600E-03	-.1534704E-03	-.1533600E-03	-.1534703E-03
28	-.1496706E-03	-.1496713E-03	-.1497945E-03	-.1496713E-03	-.1497947E-03
30	-.1454142E-03	-.1452432E-03	-.1453801E-03	-.1452432E-03	-.1453802E-03
32	-.1401376E-03	-.1399940E-03	-.1401440E-03	-.1399940E-03	-.1401441E-03
34	-.1335500E-03	-.1338449E-03	-.1340078E-03	-.1338449E-03	-.1340078E-03
36	-.1267904E-03	-.1267184E-03	-.1268938E-03	-.1267184E-03	-.1268937E-03
38	-.1185886E-03	-.1185387E-03	-.1187259E-03	-.1185387E-03	-.1187260E-03
40	-.1092192E-03	-.1092364E-03	-.1094338E-03	-.1092364E-03	-.1094339E-03
42	-.9867860E-04	-.9874962E-04	-.9895662E-04	-.9874962E-04	-.9895673E-04
44	-.8669245E-04	-.8702086E-04	-.8723534E-04	-.8702086E-04	-.8723557E-04
46	-.7321811E-04	-.7400435E-04	-.7422203E-04	-.7400435E-04	-.7422300E-04
48	-.5942753E-04	-.5967549E-04	-.5989637E-04	-.5967549E-04	-.5989634E-04
50	-.4437107E-04	-.4402198E-04	-.4424095E-04	-.4402198E-04	-.4424095E-04
52	-.2667508E-04	-.2705440E-04	-.2726722E-04	-.2705440E-04	-.2726695E-04
54	-.8349412E-05	-.8810519E-05	-.9012412E-05	-.8810519E-05	-.9012158E-05
56	.1115176E-04	.1064415E-04	.1045914E-04	.1064415E-04	.1045901E-04
58	.3178392E-04	.3120946E-04	.3104762E-04	.3120946E-04	.3104788E-04
60	.5338766E-04	.5274581E-04	.5261435E-04	.5274581E-04	.5261446E-04
62	.7577881E-04	.7507009E-04	.7497756E-04	.7507009E-04	.7497784E-04
64	.9872502E-04	.9794826E-04	.9790363E-04	.9794826E-04	.9790376E-04
66	.1215377E-03	.1210442E-03	.1211076E-03	.1210442E-03	.1211074E-03
68	.1450663E-03	.1441609E-03	.1442433E-03	.1441609E-03	.1442432E-03
70	.1677019E-03	.1667341E-03	.1668969E-03	.1667341E-03	.1668968E-03
72	.1893508E-03	.1883311E-03	.1885880E-03	.1883311E-03	.1885880E-03
74	.2094506E-03	.2083881E-03	.2087525E-03	.2083881E-03	.2087524E-03
76	.2273538E-03	.2262588E-03	.2267454E-03	.2262588E-03	.2267455E-03
78	.2423223E-03	.2412104E-03	.2418346E-03	.2412104E-03	.2418344E-03
80	.2535247E-03	.2524174E-03	.2531952E-03	.2524174E-03	.2531952E-03
82	.2600514E-03	.2589579E-03	.2599061E-03	.2589579E-03	.2599059E-03
84	.2608634E-03	.2598102E-03	.2609451E-03	.2598102E-03	.2609449E-03
86	.2548425E-03	.2538535E-03	.2551923E-03	.2538535E-03	.2551923E-03
88	.2407640E-03	.2398649E-03	.2414238E-03	.2398649E-03	.2414238E-03
90	.2173055E-03	.2165232E-03	.2183181E-03	.2165232E-03	.2183181E-03
92	.1830472E-03	.1824122E-03	.1844583E-03	.1824122E-03	.1844583E-03
94	.1364811E-03	.1360248E-03	.1383355E-03	.1360248E-03	.1383355E-03
96	.7601800E-04	.7577329E-04	.7825496E-04	.7577329E-04	.7931645E-04
98	.0000000E+00	.8183275E-05	.2884435E-05	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 52 - REDE HABITUAL

PCNTC	R O T A C O E S			
	ANALITICO	APRXX. ALFA	APRXX. BETA	APRXX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1647467E-03	-.1647407E-03	-.1647467E-03
4	-.1657053E-03	-.1647398E-03	-.1647438E-03	-.1647398E-03
6	-.1656778E-03	-.1647138E-03	-.1647224E-03	-.1647138E-03
8	-.1655994E-03	-.1646368E-03	-.1646501E-03	-.1646368E-03
10	-.1654346E-03	-.1644803E-03	-.1644992E-03	-.1644803E-03
12	-.1651642E-03	-.1642104E-03	-.1642352E-03	-.1642104E-03
14	-.1647355E-03	-.1637916E-03	-.1638236E-03	-.1637916E-03
16	-.1641123E-03	-.1631805E-03	-.1632198E-03	-.1631805E-03
18	-.1632504E-03	-.1623333E-03	-.1623803E-03	-.1623333E-03
20	-.1621017E-03	-.1612035E-03	-.1612591E-03	-.1612035E-03
22	-.1606155E-03	-.1597398E-03	-.1598043E-03	-.1597398E-03
24	-.1587379E-03	-.1578893E-03	-.1579628E-03	-.1578893E-03
26	-.1564125E-03	-.1555969E-03	-.1556801E-03	-.1555969E-03
28	-.1535205E-03	-.1528054E-03	-.1528990E-03	-.1528054E-03
30	-.1501814E-03	-.1494526E-03	-.1495559E-03	-.1494526E-03
32	-.1461532E-03	-.1454796E-03	-.1455932E-03	-.1454796E-03
34	-.1414331E-03	-.1408251E-03	-.1409501E-03	-.1408251E-03
36	-.1359584E-03	-.1354214E-03	-.1355564E-03	-.1354214E-03
38	-.1296672E-03	-.1292080E-03	-.1293528E-03	-.1292080E-03
40	-.1224954E-03	-.1221258E-03	-.1222805E-03	-.1221258E-03
42	-.1143977E-03	-.1141149E-03	-.1142784E-03	-.1141149E-03
44	-.1053094E-03	-.1051228E-03	-.1052944E-03	-.1051228E-03
46	-.9518713E-04	-.9510048E-04	-.9527864E-04	-.9510048E-04
48	-.8399104E-04	-.8400821E-04	-.8419163E-04	-.8400821E-04
50	-.7169039E-04	-.7181593E-04	-.7200266E-04	-.7181593E-04
52	-.5826568E-04	-.5850258E-04	-.5869061E-04	-.5850258E-04
54	-.4371083E-04	-.4406198E-04	-.4424450E-04	-.4406198E-04
56	-.2803524E-04	-.2850309E-04	-.2868461E-04	-.2850309E-04
58	-.1126722E-04	-.1185537E-04	-.1202867E-04	-.1185537E-04
60	.6543954E-05	.5831290E-05	.5669292E-05	.5831290E-05
62	.2332488E-04	.2448993E-04	.2434472E-04	.2448993E-04
64	.4497421E-04	.4401951E-04	.4389693E-04	.4401951E-04
66	.6536033E-04	.6428521E-04	.6418975E-04	.6428521E-04
68	.8831666E-04	.8512400E-04	.8506262E-04	.8512400E-04
70	.1076392E-03	.1063322E-03	.1063115E-03	.1063322E-03
72	.1290817E-03	.1276651E-03	.1276925E-03	.1276651E-03
74	.1503523E-03	.1488343E-03	.1489178E-03	.1488343E-03
76	.1711096E-03	.1695016E-03	.1696505E-03	.1695016E-03
78	.1909601E-03	.1892755E-03	.1894993E-03	.1892755E-03
80	.2054507E-03	.2077054E-03	.2080141E-03	.2077054E-03
82	.2260705E-03	.2242831E-03	.2246871E-03	.2242831E-03
84	.2402422E-03	.2384357E-03	.2389469E-03	.2384357E-03
86	.2513243E-03	.2495215E-03	.2501510E-03	.2495215E-03
88	.2586034E-03	.2568303E-03	.2575899E-03	.2568303E-03
90	.2612961E-03	.2595820E-03	.2604439E-03	.2595820E-03
92	.2585460E-03	.2569216E-03	.2579783E-03	.2569216E-03
94	.2494234E-03	.2479206E-03	.2491439E-03	.2479206E-03
96	.2329266E-03	.2315802E-03	.2329821E-03	.2315802E-03
98	.2079825E-03	.2068241E-03	.2084201E-03	.2068241E-03
100	.1734453E-03	.1725248E-03	.1743170E-03	.1725248E-03
102	.1281235E-03	.1274678E-03	.1294703E-03	.1274678E-03
104	.7074261E-04	.7039616E-04	.7261315E-04	.7039616E-04
106	-.2400225E-08	.6995285E-05	.2453983E-05	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 54 - REDE HABITUAL

PONTO	R O T A C C E S				
	ANALITICO	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1661440E-03	-.1661356E-03	-.1661440E-03	-.1661357E-03
4	-.1657097E-03	-.1661382E-03	-.1661431E-03	-.1661382E-03	-.1661432E-03
6	-.1656812E-03	-.1661134E-03	-.1661212E-03	-.1661134E-03	-.1661212E-03
8	-.1656116E-03	-.1660415E-03	-.1660536E-03	-.1660415E-03	-.1660537E-03
10	-.1654697E-03	-.1658970E-03	-.1659143E-03	-.1658970E-03	-.1659142E-03
12	-.1652256E-03	-.1656488E-03	-.1656715E-03	-.1656488E-03	-.1656716E-03
14	-.1648460E-03	-.1652638E-03	-.1652927E-03	-.1652638E-03	-.1652928E-03
16	-.1642950E-03	-.1647054E-03	-.1647407E-03	-.1647054E-03	-.1647407E-03
18	-.1635335E-03	-.1639354E-03	-.1639778E-03	-.1639354E-03	-.1639778E-03
20	-.1625195E-03	-.1629104E-03	-.1629602E-03	-.1629104E-03	-.1629602E-03
22	-.1612087E-03	-.1615869E-03	-.1616443E-03	-.1615869E-03	-.1616442E-03
24	-.1595536E-03	-.1599196E-03	-.1599857E-03	-.1599196E-03	-.1599857E-03
26	-.1575050E-03	-.1578560E-03	-.1579305E-03	-.1578560E-03	-.1579304E-03
28	-.1550110E-03	-.1553454E-03	-.1554285E-03	-.1553454E-03	-.1554285E-03
30	-.1520195E-03	-.1523363E-03	-.1524287E-03	-.1523363E-03	-.1524288E-03
32	-.1484722E-03	-.1487728E-03	-.1488744E-03	-.1487728E-03	-.1488745E-03
34	-.1443173E-03	-.1445989E-03	-.1447098E-03	-.1445989E-03	-.1447099E-03
36	-.1394967E-03	-.1397587E-03	-.1398787E-03	-.1397587E-03	-.1398787E-03
38	-.1339550E-03	-.1341972E-03	-.1343265E-03	-.1341972E-03	-.1343265E-03
40	-.1276374E-03	-.1278596E-03	-.1279974E-03	-.1278596E-03	-.1279974E-03
42	-.1204905E-03	-.1206955E-03	-.1208425E-03	-.1206955E-03	-.1208424E-03
44	-.1124651E-03	-.1126502E-03	-.1128047E-03	-.1126502E-03	-.1128046E-03
46	-.1035142E-03	-.1036782E-03	-.1038386E-03	-.1036782E-03	-.1038387E-03
48	-.9359703E-04	-.9374288E-04	-.9390988E-04	-.9374288E-04	-.9391029E-04
50	-.8267922E-04	-.8280462E-04	-.8297569E-04	-.8280462E-04	-.8297597E-04
52	-.7073465E-04	-.7083865E-04	-.7101240E-04	-.7083865E-04	-.7101224E-04
54	-.5774667E-04	-.5783015E-04	-.5800508E-04	-.5783015E-04	-.5800481E-04
56	-.4371064E-04	-.4377301E-04	-.4394638E-04	-.4377301E-04	-.4394625E-04
58	-.2883532E-04	-.2887528E-04	-.2884405E-04	-.2887528E-04	-.2884376E-04
60	-.1254554E-04	-.1256594E-04	-.1272746E-04	-.1256594E-04	-.1272762E-04
62	.4515833E-05	.4512871E-05	.4362023E-05	.4512871E-05	.4362202E-05
64	.2248531E-04	.2249773E-04	.2236211E-04	.2249773E-04	.2236154E-04
66	.4127587E-04	.4129754E-04	.4118076E-04	.4129754E-04	.4118035E-04
68	.6077475E-04	.6079935E-04	.6070596E-04	.6079935E-04	.6070612E-04
70	.8084011E-04	.8086119E-04	.8079682E-04	.8086119E-04	.8079654E-04
72	.1012976E-03	.1013099E-03	.1012801E-03	.1013099E-03	.1012801E-03
74	.1219384E-03	.1219389E-03	.1219506E-03	.1219389E-03	.1219506E-03
76	.1425153E-03	.1424924E-03	.1425580E-03	.1424924E-03	.1425578E-03
78	.1627399E-03	.1627005E-03	.1628153E-03	.1627005E-03	.1628152E-03
80	.1822779E-03	.1822149E-03	.1823928E-03	.1822149E-03	.1823928E-03
82	.2007489E-03	.2006612E-03	.2009112E-03	.2006612E-03	.2009113E-03
84	.2172099E-03	.2176069E-03	.2179380E-03	.2176069E-03	.2179380E-03
86	.2327063E-03	.2325664E-03	.2329868E-03	.2325664E-03	.2329869E-03
88	.2451696E-03	.2450034E-03	.2455239E-03	.2450034E-03	.2455238E-03
90	.2545041E-03	.2543172E-03	.2549476E-03	.2543172E-03	.2549476E-03
92	.2600516E-03	.2598484E-03	.2605993E-03	.2598484E-03	.2605993E-03
94	.2610885E-03	.2608754E-03	.2617570E-03	.2608754E-03	.2617569E-03
96	.2568316E-03	.2566129E-03	.2576357E-03	.2566129E-03	.2576355E-03
98	.2464312E-03	.2462139E-03	.2473881E-03	.2462139E-03	.2473881E-03
100	.2289770E-03	.2287701E-03	.2301059E-03	.2287701E-03	.2301060E-03
102	.2034987E-03	.2033116E-03	.2048186E-03	.2033116E-03	.2048187E-03
104	.1689675E-03	.1688105E-03	.1704979E-03	.1688105E-03	.1704979E-03
106	.1243009E-03	.1241856E-03	.1260613E-03	.1241856E-03	.1260613E-03
108	.6836798E-04	.6830601E-04	.7037386E-04	.6830601E-04	.7113363E-04
110	-.4156912E-08	.6511009E-05	.2279261E-05	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 56 - REDE HABITUAL

PCNTO	R O T A C C E S W1				
	ANALITICO	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1653459E-03	-.1653415E-03	-.1653459E-03	-.1653417E-03
4	-.1657061E-03	-.1653399E-03	-.1653430E-03	-.1653399E-03	-.1653429E-03
6	-.1656842E-03	-.1653191E-03	-.1653259E-03	-.1653191E-03	-.1653259E-03
8	-.1656220E-03	-.1652576E-03	-.1652482E-03	-.1652576E-03	-.1652683E-03
10	-.1654955E-03	-.1651325E-03	-.1651475E-03	-.1651325E-03	-.1651475E-03
12	-.1652781E-03	-.1649178E-03	-.1649375E-03	-.1649178E-03	-.1649374E-03
14	-.1649405E-03	-.1645842E-03	-.1646098E-03	-.1645842E-03	-.1646097E-03
16	-.1644509E-03	-.1641020E-03	-.1641327E-03	-.1641020E-03	-.1641327E-03
18	-.1637749E-03	-.1634343E-03	-.1634710E-03	-.1634343E-03	-.1634710E-03
20	-.1626757E-03	-.1625463E-03	-.1625895E-03	-.1625463E-03	-.1625896E-03
22	-.1617132E-03	-.1613984E-03	-.1614485E-03	-.1613984E-03	-.1614485E-03
24	-.1602480E-03	-.1599489E-03	-.1600064E-03	-.1599489E-03	-.1600062E-03
26	-.1584344E-03	-.1581541E-03	-.1582195E-03	-.1581541E-03	-.1582196E-03
28	-.1562277E-03	-.1559675E-03	-.1560403E-03	-.1559675E-03	-.1560402E-03
30	-.1535805E-03	-.1533441E-03	-.1534253E-03	-.1533441E-03	-.1534253E-03
32	-.1504443E-03	-.1502337E-03	-.1503235E-03	-.1502337E-03	-.1503234E-03
34	-.1467655E-03	-.1465855E-03	-.1466834E-03	-.1465855E-03	-.1466834E-03
36	-.1425059E-03	-.1423495E-03	-.1424559E-03	-.1423495E-03	-.1424562E-03
38	-.1376032E-03	-.1374754E-03	-.1375901E-03	-.1374754E-03	-.1375900E-03
40	-.1328114E-03	-.1315129E-03	-.1320354E-03	-.1315129E-03	-.1320358E-03
42	-.1256824E-03	-.1256123E-03	-.1257428E-03	-.1256123E-03	-.1257428E-03
44	-.1185687E-03	-.1185254E-03	-.1186667E-03	-.1185254E-03	-.1186667E-03
46	-.1106264E-03	-.1106220E-03	-.1107664E-03	-.1106220E-03	-.1107663E-03
48	-.1018152E-03	-.1018481E-03	-.1019987E-03	-.1018481E-03	-.1019988E-03
50	-.9209930E-04	-.9217100E-04	-.9232598E-04	-.9217100E-04	-.9232653E-04
52	-.8144900E-04	-.8156295E-04	-.8172232E-04	-.8156295E-04	-.8172245E-04
54	-.6984167E-04	-.6999806E-04	-.7016031E-04	-.6999806E-04	-.7015988E-04
56	-.5726353E-04	-.5746493E-04	-.5762659E-04	-.5746493E-04	-.5762629E-04
58	-.4371082E-04	-.4396062E-04	-.4412122E-04	-.4396062E-04	-.4412109E-04
60	-.2919166E-04	-.2949200E-04	-.2964932E-04	-.2949200E-04	-.2964946E-04
62	-.1372797E-04	-.1407909E-04	-.1422952E-04	-.1407909E-04	-.1422952E-04
64	-.2642623E-05	-.2237367E-05	-.2095504E-05	-.2237367E-05	-.2095360E-05
66	-.1986521E-04	-.1940448E-04	-.1927486E-04	-.1940448E-04	-.1927503E-04
68	-.3786439E-04	-.3735299E-04	-.3724072E-04	-.3735299E-04	-.3723976E-04
70	-.5542942E-04	-.5547892E-04	-.5588567E-04	-.5547892E-04	-.5588600E-04
72	-.7577811E-04	-.7516427E-04	-.7509628E-04	-.7516427E-04	-.7509597E-04
74	-.9542330E-04	-.9475884E-04	-.9472056E-04	-.9475884E-04	-.9472056E-04
76	-.1152574E-03	-.1145821E-03	-.1145789E-03	-.1145821E-03	-.1145792E-03
78	-.1351903E-03	-.1344240E-03	-.1344619E-03	-.1344240E-03	-.1344618E-03
80	-.1548561E-03	-.1540386E-03	-.1541233E-03	-.1540386E-03	-.1541230E-03
82	-.1740182E-03	-.1731458E-03	-.1732446E-03	-.1731458E-03	-.1732448E-03
84	-.1923314E-03	-.1914204E-03	-.1916202E-03	-.1914204E-03	-.1916204E-03
86	-.2094506E-03	-.2084998E-03	-.2087474E-03	-.2084998E-03	-.2087673E-03
88	-.2249578E-03	-.2239727E-03	-.2243166E-03	-.2239727E-03	-.2243166E-03
90	-.2383912E-03	-.2373829E-03	-.2378113E-03	-.2373829E-03	-.2378113E-03
92	-.2492440E-03	-.2482233E-03	-.2487447E-03	-.2482233E-03	-.2487447E-03
94	-.2564561E-03	-.2559348E-03	-.2565581E-03	-.2559348E-03	-.2565580E-03
96	-.2609132E-03	-.2599065E-03	-.2606406E-03	-.2599065E-03	-.2606406E-03
98	-.2604491E-03	-.2594725E-03	-.2603270E-03	-.2594725E-03	-.2603268E-03
100	-.2548423E-03	-.2539150E-03	-.2548983E-03	-.2539150E-03	-.2548982E-03
102	-.2433174E-03	-.2424575E-03	-.2435787E-03	-.2424575E-03	-.2435787E-03
104	-.2250453E-03	-.2242727E-03	-.2255404E-03	-.2242727E-03	-.2255404E-03
106	-.1991457E-03	-.1984813E-03	-.1995040E-03	-.1984813E-03	-.1995040E-03
108	-.1646973E-03	-.1641540E-03	-.1657392E-03	-.1641540E-03	-.1657392E-03
110	-.1206944E-03	-.1203153E-03	-.1220700E-03	-.1203153E-03	-.1220700E-03
112	-.6514264E-04	-.6594823E-04	-.6787584E-04	-.6594823E-04	-.6858118E-04
114	-.2400225E-06	-.6057715E-05	-.2116064E-05	-.0000000E+00	-.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 60 - REDE HABITUAL

PONTO	R O T A C C E S				
	ANALITICO	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1662172E-03	-.1662139E-03	-.1662172E-03	-.1662143E-03
4	-.1657067E-03	-.1667111E-03	-.1662135E-03	-.1662111E-03	-.1662135E-03
6	-.1656290E-03	-.1661934E-03	-.1661988E-03	-.1661934E-03	-.1661988E-03
8	-.1656227E-03	-.1661431E-03	-.1661518E-03	-.1661431E-03	-.1661519E-03
10	-.1655376E-03	-.1660404E-03	-.1660526E-03	-.1660404E-03	-.1660526E-03
12	-.1653224E-03	-.1658646E-03	-.1658804E-03	-.1658646E-03	-.1658804E-03
14	-.1650919E-03	-.1655940E-03	-.1656142E-03	-.1655940E-03	-.1656142E-03
16	-.1647004E-03	-.1652025E-03	-.1652272E-03	-.1652025E-03	-.1652273E-03
18	-.1641609E-03	-.1646623E-03	-.1646919E-03	-.1646623E-03	-.1646919E-03
20	-.1634441E-03	-.1639445E-03	-.1639790E-03	-.1639445E-03	-.1639789E-03
22	-.1629195E-03	-.1630197E-03	-.1630601E-03	-.1630197E-03	-.1630601E-03
24	-.1613544E-03	-.1618524E-03	-.1618985E-03	-.1618524E-03	-.1618984E-03
26	-.1599145E-03	-.1604086E-03	-.1604604E-03	-.1604086E-03	-.1604602E-03
28	-.1581639E-03	-.1586543E-03	-.1587130E-03	-.1586543E-03	-.1587128E-03
30	-.1560654E-03	-.1565482E-03	-.1566129E-03	-.1565482E-03	-.1566131E-03
32	-.1535805E-03	-.1540538E-03	-.1541250E-03	-.1540538E-03	-.1541254E-03
34	-.1506554E-03	-.1511312E-03	-.1512091E-03	-.1511312E-03	-.1512090E-03
36	-.1472924E-03	-.1477407E-03	-.1478252E-03	-.1477407E-03	-.1478251E-03
38	-.1434087E-03	-.1438428E-03	-.1439349E-03	-.1438428E-03	-.1439352E-03
40	-.1389754E-03	-.1393919E-03	-.1394905E-03	-.1393919E-03	-.1394903E-03
42	-.1339551E-03	-.1343457E-03	-.1344543E-03	-.1343457E-03	-.1344540E-03
44	-.1283057E-03	-.1286799E-03	-.1287914E-03	-.1286799E-03	-.1287915E-03
46	-.1215829E-03	-.1223402E-03	-.1224579E-03	-.1223402E-03	-.1224579E-03
48	-.1145690E-03	-.1152946E-03	-.1154173E-03	-.1152946E-03	-.1154171E-03
50	-.1072084E-03	-.1075119E-03	-.1076410E-03	-.1075119E-03	-.1076411E-03
52	-.9867872E-04	-.9895457E-04	-.9908812E-04	-.9895457E-04	-.9908811E-04
54	-.8935171E-04	-.8959508E-04	-.8973156E-04	-.8959508E-04	-.8973169E-04
56	-.7920465E-04	-.7941591E-04	-.7955586E-04	-.7941591E-04	-.7955647E-04
58	-.6822094E-04	-.6839597E-04	-.6853729E-04	-.6839597E-04	-.6853747E-04
60	-.5635024E-04	-.5652702E-04	-.5666858E-04	-.5652702E-04	-.5666828E-04
62	-.4371077E-04	-.4380834E-04	-.4394853E-04	-.4380834E-04	-.4394801E-04
64	-.3018915E-04	-.3024781E-04	-.3038490E-04	-.3024781E-04	-.3038549E-04
66	-.1584293E-04	-.1586401E-04	-.1592607E-04	-.1586401E-04	-.1592733E-04
68	-.7014224E-06	-.6834268E-06	-.6866562E-06	-.6834268E-06	-.6866363E-06
70	-.1515344E-04	-.1524961E-04	-.1513404E-04	-.1524961E-04	-.1513418E-04
72	-.3178424E-04	-.3187680E-04	-.3177368E-04	-.3187680E-04	-.3177404E-04
74	-.4859756E-04	-.4912341E-04	-.4903584E-04	-.4912341E-04	-.4903555E-04
76	-.6674205E-04	-.6689572E-04	-.6682657E-04	-.6689572E-04	-.6682627E-04
78	-.8490631E-04	-.8508324E-04	-.8503650E-04	-.8508324E-04	-.8503668E-04
80	-.1033569E-03	-.1035522E-03	-.1035317E-03	-.1035522E-03	-.1035319E-03
82	-.1215323E-03	-.1221449E-03	-.1221541E-03	-.1221449E-03	-.1221544E-03
84	-.1404684E-03	-.1406815E-03	-.1407261E-03	-.1406815E-03	-.1407260E-03
86	-.1587383E-03	-.1589516E-03	-.1590362E-03	-.1589516E-03	-.1590359E-03
88	-.1765102E-03	-.1767157E-03	-.1768440E-03	-.1767157E-03	-.1768440E-03
90	-.1935152E-03	-.1937095E-03	-.1938880E-03	-.1937095E-03	-.1938881E-03
92	-.2094513E-03	-.2096316E-03	-.2098665E-03	-.2096316E-03	-.2098664E-03
94	-.2235831E-03	-.2241447E-03	-.2244409E-03	-.2241447E-03	-.2244408E-03
96	-.2367379E-03	-.2368807E-03	-.2372453E-03	-.2368807E-03	-.2372453E-03
98	-.2473069E-03	-.2474302E-03	-.2478693E-03	-.2474302E-03	-.2478692E-03
100	-.2552407E-03	-.2553453E-03	-.2558656E-03	-.2553453E-03	-.2558655E-03
102	-.2600516E-03	-.2601381E-03	-.2607469E-03	-.2601381E-03	-.2607470E-03
104	-.2612102E-03	-.2612793E-03	-.2619829E-03	-.2612793E-03	-.2619830E-03
106	-.2581467E-03	-.2581988E-03	-.2590042E-03	-.2581988E-03	-.2590042E-03
108	-.2502493E-03	-.2502857E-03	-.2511996E-03	-.2502857E-03	-.2511998E-03
110	-.2366664E-03	-.2368888E-03	-.2379182E-03	-.2368888E-03	-.2379181E-03
112	-.2173044E-03	-.2173157E-03	-.2184669E-03	-.2173157E-03	-.2184669E-03
114	-.1908334E-03	-.1908354E-03	-.1921147E-03	-.1908354E-03	-.1921146E-03
116	-.1566838E-03	-.1566798E-03	-.1580924E-03	-.1566798E-03	-.1580925E-03
118	-.1140544E-03	-.1140483E-03	-.1155997E-03	-.1140483E-03	-.1155997E-03
120	-.6211321E-04	-.6210749E-04	-.6380057E-04	-.6210749E-04	-.6441568E-04
122	-.0000000E+00	-.5301296E-05	-.1845360E-05	-.0000000E+00	-.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 62 - REDE HABITUAL

PONTO	R O T A C O E S W ^o				
	ANALITICO	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1654383E-03	-.1654342E-03	-.1654383E-03	-.1654344E-03
4	-.1657069E-03	-.1654339E-03	-.1654365E-03	-.1654339E-03	-.1654365E-03
6	-.1656905E-03	-.1654182E-03	-.1654231E-03	-.1654182E-03	-.1654231E-03
8	-.1656455E-03	-.1653732E-03	-.1653809E-03	-.1653732E-03	-.1653809E-03
10	-.1655537E-03	-.1652820E-03	-.1652928E-03	-.1652820E-03	-.1652928E-03
12	-.1653964E-03	-.1651261E-03	-.1651403E-03	-.1651261E-03	-.1651402E-03
14	-.1651524E-03	-.1648847E-03	-.1649027E-03	-.1648847E-03	-.1649027E-03
16	-.1648008E-03	-.1645349E-03	-.1645568E-03	-.1645349E-03	-.1645569E-03
18	-.1643159E-03	-.1640536E-03	-.1640799E-03	-.1640536E-03	-.1640799E-03
20	-.1636722E-03	-.1634143E-03	-.1634452E-03	-.1634143E-03	-.1634450E-03
22	-.1628425E-03	-.1625900E-03	-.1626256E-03	-.1625900E-03	-.1626256E-03
24	-.1617975E-03	-.1615522E-03	-.1615931E-03	-.1615522E-03	-.1615931E-03
26	-.1605068E-03	-.1602685E-03	-.1603148E-03	-.1602685E-03	-.1603151E-03
28	-.1589382E-03	-.1587063E-03	-.1587578E-03	-.1587063E-03	-.1587579E-03
30	-.1570587E-03	-.1568339E-03	-.1568913E-03	-.1568339E-03	-.1568911E-03
32	-.1548336E-03	-.1546178E-03	-.1546809E-03	-.1546178E-03	-.1546810E-03
34	-.1522276E-03	-.1520222E-03	-.1520166E-03	-.1520222E-03	-.1520199E-03
36	-.1492046E-03	-.1490099E-03	-.1490851E-03	-.1490099E-03	-.1490852E-03
38	-.1457276E-03	-.1455451E-03	-.1456265E-03	-.1455451E-03	-.1456266E-03
40	-.1417597E-03	-.1415915E-03	-.1416796E-03	-.1415915E-03	-.1416794E-03
42	-.1372637E-03	-.1371100E-03	-.1372044E-03	-.1371100E-03	-.1372044E-03
44	-.1322032E-03	-.1320624E-03	-.1321619E-03	-.1320624E-03	-.1321621E-03
46	-.1265421E-03	-.1264171E-03	-.1265219E-03	-.1264171E-03	-.1265222E-03
48	-.1202458E-03	-.1201422E-03	-.1202536E-03	-.1201422E-03	-.1202534E-03
50	-.1132814E-03	-.1131987E-03	-.1133148E-03	-.1131987E-03	-.1133149E-03
52	-.1056183E-03	-.1055576E-03	-.1056780E-03	-.1055576E-03	-.1056779E-03
54	-.9722877E-04	-.9719504E-04	-.9719508E-04	-.9719504E-04	-.9731919E-04
56	-.8808875E-04	-.8808677E-04	-.8821432E-04	-.8808677E-04	-.8821450E-04
58	-.7817835E-04	-.7821279E-04	-.7834268E-04	-.7821279E-04	-.7834269E-04
60	-.6748215E-04	-.6755833E-04	-.6769069E-04	-.6755833E-04	-.6769049E-04
62	-.5599435E-04	-.5610860E-04	-.5624090E-04	-.5610860E-04	-.5624122E-04
64	-.4371064E-04	-.4386582E-04	-.4399700E-04	-.4386582E-04	-.4399716E-04
66	-.3063830E-04	-.3083627E-04	-.3096498E-04	-.3083627E-04	-.3096498E-04
68	-.1679290E-04	-.1703325E-04	-.1715723E-04	-.1703325E-04	-.1715708E-04
70	-.2200398E-05	-.2487433E-05	-.2605258E-05	-.2487433E-05	-.2604908E-05
72	.1310186E-04	.1276533E-04	.1265526E-04	.1276533E-04	.1265524E-04
74	.2909384E-04	.2867847E-04	.2857967E-04	.2867847E-04	.2857934E-04
76	.4562126E-04	.4518584E-04	.4510023E-04	.4518584E-04	.4510039E-04
78	.6269396E-04	.6220800E-04	.6213759E-04	.6220800E-04	.6213757E-04
80	.8018513E-04	.7965145E-04	.7960014E-04	.7965145E-04	.7960032E-04
82	.9797898E-04	.9740236E-04	.9737426E-04	.9740236E-04	.9737376E-04
84	.1159402E-03	.1153233E-03	.1153211E-03	.1153233E-03	.1153210E-03
86	.1339109E-03	.1332567E-03	.1332842E-03	.1332567E-03	.1332843E-03
88	.1517108E-03	.1510265E-03	.1510884E-03	.1510265E-03	.1510888E-03
90	.1691338E-03	.1684234E-03	.1685243E-03	.1684234E-03	.1685243E-03
92	.1859481E-03	.1852153E-03	.1853596E-03	.1852153E-03	.1853593E-03
94	.2018934E-03	.2011425E-03	.2013347E-03	.2011425E-03	.2013348E-03
96	.2168794E-03	.2159163E-03	.2161620E-03	.2159163E-03	.2161620E-03
98	.2299864E-03	.2292167E-03	.2295211E-03	.2292167E-03	.2295208E-03
100	.2414606E-03	.2406905E-03	.2410593E-03	.2406905E-03	.2410593E-03
102	.2507158E-03	.2499517E-03	.2503906E-03	.2499517E-03	.2503905E-03
104	.2573314E-03	.2565804E-03	.2570954E-03	.2565804E-03	.2570954E-03
106	.2608509E-03	.2601188E-03	.2607158E-03	.2601188E-03	.2607160E-03
108	.2667821E-03	.2660074E-03	.2667591E-03	.2660074E-03	.2667591E-03
110	.2585971E-03	.2559244E-03	.2567029E-03	.2559244E-03	.2567028E-03
112	.2477315E-03	.2471031E-03	.2479817E-03	.2471031E-03	.2479816E-03
114	.2335849E-03	.2330102E-03	.2339943E-03	.2330102E-03	.2339943E-03
116	.2135225E-03	.2130120E-03	.2141074E-03	.2130120E-03	.2141074E-03
118	.1868749E-03	.1864415E-03	.1876536E-03	.1864415E-03	.1876536E-03
120	.1529426E-03	.1525978E-03	.1539317E-03	.1525978E-03	.1539317E-03
122	.1189931E-03	.1107509E-03	.1122107E-03	.1107509E-03	.1122107E-03
124	.6027144E-04	.6014463E-04	.6173244E-04	.6014463E-04	.6230819E-04
126	-.1808866E-08	.4966875E-05	.1727271E-05	.0000000E+00	.0000000E+00

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 64 - MEDE HABITUAL

PUNTO	R O T A C C E S				
	ANALITICO	APROX. ALFA	APROX. BETA	APROX. GAMA	APROX. DELTA
2	-.1657091E-03	-.1645005E-03	-.1644955E-03	-.1645005E-03	-.1644955E-03
4	-.1657071E-03	-.1644969E-03	-.1644977E-03	-.1644969E-03	-.1644998E-03
6	-.1656924E-03	-.1644827E-03	-.1644865E-03	-.1644827E-03	-.1644869E-03
8	-.1656515E-03	-.1644430E-03	-.1644497E-03	-.1644430E-03	-.1644498E-03
10	-.1655683E-03	-.1643631E-03	-.1643726E-03	-.1643631E-03	-.1643725E-03
12	-.1654241E-03	-.1642259E-03	-.1642386E-03	-.1642259E-03	-.1642385E-03
14	-.1652061E-03	-.1640125E-03	-.1640283E-03	-.1640125E-03	-.1640285E-03
16	-.1648883E-03	-.1637033E-03	-.1637225E-03	-.1637033E-03	-.1637225E-03
18	-.1644509E-03	-.1632787E-03	-.1633021E-03	-.1632787E-03	-.1633023E-03
20	-.1638705E-03	-.1627130E-03	-.1627402E-03	-.1627130E-03	-.1627403E-03
22	-.1631235E-03	-.1619835E-03	-.1620151E-03	-.1619835E-03	-.1620151E-03
24	-.1621824E-03	-.1610644E-03	-.1611007E-03	-.1610644E-03	-.1611006E-03
26	-.1610216E-03	-.1599270E-03	-.1599676E-03	-.1599270E-03	-.1599677E-03
28	-.1596111E-03	-.1585453E-03	-.1585911E-03	-.1585453E-03	-.1585915E-03
30	-.1579214E-03	-.1568882E-03	-.1569390E-03	-.1568882E-03	-.1569390E-03
32	-.1559219E-03	-.1549254E-03	-.1549817E-03	-.1549254E-03	-.1549816E-03
34	-.1535805E-03	-.1526241E-03	-.1526861E-03	-.1526241E-03	-.1526863E-03
36	-.1508648E-03	-.1499515E-03	-.1500185E-03	-.1499515E-03	-.1500186E-03
38	-.1477415E-03	-.1468764E-03	-.1469496E-03	-.1468764E-03	-.1469492E-03
40	-.1441769E-03	-.1433622E-03	-.1434409E-03	-.1433622E-03	-.1434413E-03
42	-.1401376E-03	-.1393761E-03	-.1394604E-03	-.1393761E-03	-.1394605E-03
44	-.1355897E-03	-.1348839E-03	-.1349733E-03	-.1348839E-03	-.1349732E-03
46	-.1305003E-03	-.1298554E-03	-.1299501E-03	-.1298554E-03	-.1299500E-03
48	-.1248370E-03	-.1242584E-03	-.1242584E-03	-.1242584E-03	-.1243581E-03
50	-.1185687E-03	-.1180626E-03	-.1181669E-03	-.1180626E-03	-.1181669E-03
52	-.1116659E-03	-.1112404E-03	-.1113497E-03	-.1112404E-03	-.1113499E-03
54	-.1041015E-03	-.1037613E-03	-.1038749E-03	-.1037613E-03	-.1038750E-03
56	-.9585082E-04	-.9560013E-04	-.9571717E-04	-.9560013E-04	-.9571720E-04
58	-.8669254E-04	-.8673668E-04	-.8685639E-04	-.8673668E-04	-.8685658E-04
60	-.7720935E-04	-.7715379E-04	-.7727533E-04	-.7715379E-04	-.7727552E-04
62	-.6678845E-04	-.6683884E-04	-.6696249E-04	-.6683884E-04	-.6696269E-04
64	-.5562262E-04	-.5578309E-04	-.5590661E-04	-.5578309E-04	-.5590660E-04
66	-.4371077E-04	-.4398499E-04	-.4410737E-04	-.4398499E-04	-.4410739E-04
68	-.3105265E-04	-.3145142E-04	-.3157215E-04	-.3145142E-04	-.3157213E-04
70	-.1768053E-04	-.1819306E-04	-.1831016E-04	-.1819306E-04	-.1831029E-04
72	-.3599260E-05	-.4230881E-05	-.432270E-05	-.4230881E-05	-.4322905E-05
74	.1115182E-04	.1040001E-04	.1029612E-04	.1040001E-04	.1029578E-04
76	.2652875E-04	.2565536E-04	.2555974E-04	.2565536E-04	.2556025E-04
78	.4247495E-04	.4148331E-04	.4139944E-04	.4148331E-04	.4139981E-04
80	.5891997E-04	.5781365E-04	.5774358E-04	.5781365E-04	.5774358E-04
82	.7577911E-04	.7456361E-04	.7451032E-04	.7456361E-04	.7451058E-04
84	.9295151E-04	.9163284E-04	.9159990E-04	.9163284E-04	.9159974E-04
86	.1103186E-03	.1089012E-03	.1088910E-03	.1089012E-03	.1088912E-03
88	.1277434E-03	.1262295E-03	.1262454E-03	.1262295E-03	.1262453E-03
90	.1450686E-03	.1434635E-03	.1435091E-03	.1434635E-03	.1435086E-03
92	.1621157E-03	.1604252E-03	.1605042E-03	.1604252E-03	.1605041E-03
94	.1786833E-03	.1769119E-03	.1770276E-03	.1769119E-03	.1770275E-03
96	.1945453E-03	.1927059E-03	.1928634E-03	.1927059E-03	.1928637E-03
98	.2094509E-03	.2075554E-03	.2077587E-03	.2075554E-03	.2077588E-03
100	.2231223E-03	.2211845E-03	.2214383E-03	.2211845E-03	.2214382E-03
102	.2352542E-03	.2332912E-03	.2336013E-03	.2332912E-03	.2336015E-03
104	.2455115E-03	.2435375E-03	.2439076E-03	.2435375E-03	.2439076E-03
106	.2525300E-03	.2515625E-03	.2519981E-03	.2515625E-03	.2519979E-03
108	.2589146E-03	.2569744E-03	.2574811E-03	.2569744E-03	.2574814E-03
110	.2612390E-03	.2593460E-03	.2595286E-03	.2593460E-03	.2599288E-03
112	.2600446E-03	.2582215E-03	.2588854E-03	.2582215E-03	.2588856E-03
114	.2548423E-03	.2531128E-03	.2538636E-03	.2531128E-03	.2538636E-03
116	.2451056E-03	.2434992E-03	.2443422E-03	.2434992E-03	.2443422E-03
118	.2302936E-03	.2288275E-03	.2297673E-03	.2288275E-03	.2297673E-03
120	.2098102E-03	.2085164E-03	.2095584E-03	.2085164E-03	.2095583E-03
122	.1839470E-03	.1815535E-03	.1831023E-03	.1815535E-03	.1831023E-03
124	.1493621E-03	.1484978E-03	.1497576E-03	.1484978E-03	.1497576E-03
126	.1080885E-03	.1074836E-03	.1088543E-03	.1074836E-03	.1088583E-03
128	.5853809E-04	.5822072E-04	.5971218E-04	.5822072E-04	.6025130E-04
130	.0000000E+00	.4658604E-05	.1617368E-05	.0000000E+00	.0000000E+00

3.5.3 - Momentos M_x Aproximados com Rede Dual

Para análise desses resultados, admitiu-se os mesmos critérios adotados em 3.5.1, M_x aproximados com rede habitual, visando os mesmos objetivos com o mesmo procedimento.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 6 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	M O M E N T O		APROX.C	APROX.D
		APROX.A	APROX.B		
1		-0.000	7.121	-0.000	7.121
3	4.370	-0.000	-5.801	-0.000	-5.801
5	53.825	56.692	50.891	56.692	50.891
7	178.483	182.999	180.918	182.999	180.918
9	328.315	334.277	351.402	334.278	351.401
11	305.860	280.069	297.193	280.069	338.315
13	-457.831	280.069	37.498	-732.676	-806.652

Nas aproximações do cálculo de M_x com este tipo de rede, já com o maior tamanho de malha $h=40000/6$, se obtêm valores não tão ruins como os obtidos com rede habitual das aproximações desse esforço. Note-se que os valores de M_x do ponto 5 ao ponto 11, para todas as aproximações, não são tão imprecisos ($max Er = + 7,6\%$), o que não é verdade para os valores no engastamento e no ponto 3, $h/2$ abaixo do coroamento. Lembre-se que o ponto 1 é fictício, $h/2$ acima do coroamento, e portanto pode-se ignorar o seu respectivo valor de M_x , uma vez que $M_x=0$ no coroamento. Considerando-se o tamanho da malha, não é possível afirmar qual das aproximações estudadas é mais precisa, naturalmente, comparadas com a solução analítica.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	M O M E N T O		APROX.C	APROX.D
		APROX.A	APROX.B		
1		.000	3.045	.000	3.045
3	.988	.000	-1.220	.000	-1.220
5	10.768	10.376	9.156	10.376	9.156
7	34.980	35.394	33.873	35.395	33.874
9	77.651	78.664	77.029	78.664	77.030
11	140.390	141.550	140.219	141.550	140.218
13	219.667	220.418	220.138	220.419	220.138
15	302.868	302.658	304.593	302.658	304.593
17	363.392	361.671	367.424	361.671	367.425
19	355.660	351.645	363.129	351.645	363.128
21	211.749	203.819	222.891	203.819	222.891
23	-157.397	-172.880	-153.807	-172.880	-178.087
25	-851.892	-172.880	-759.375	-1176.622	-1212.402

Com essa subdivisão da altura H do reservatório, $h=40000/12$, observa-se além da melhora dos resultados aproximados, a possibilidade de selecionar a melhor aproximação dentre as ensaiadas. Note na tabela que segue os máximos E_r por falta e por excesso, de cada aproximação.

APROXIMAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
A	21	+2.2%	25	+79.7%
	19	-1.1%	23	-1.8%
B	5	+0.44%	25	+10.9%
	21	-3.1%	—	—
C	21	+2.2%	—	—
	19	-1.1%	25	-38.1%
D	5	+0.44%	—	—
	21	-3.1%	25	-42.3%

Assim, pode-se concluir que, ignorando os valores de M_x nos pontos 1 e 3, a aproximação B é a que apresenta melhores resultados. Posteriormente vem a aproximação C, em seguida a D e por último a A. Isto, naturalmente, sem fazer correção de qualquer espécie para valores de M_x em qualquer ponto.

ENSAIO DE APERIACAO PARA N= 24 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	MOMENTO			APROX.C	APROX.D
		APROX.A	APROX.B	APROX.E		
1		.001	.368	.001	.370	
3	.234	.001	-.228	.001	-.228	
5	2.340	2.142	1.914	2.142	1.914	
7	7.153	7.026	6.747	7.027	6.747	
9	15.288	15.253	14.527	15.252	14.927	
11	27.329	27.390	27.020	27.391	27.022	
13	43.797	43.952	43.550	43.953	43.552	
15	65.102	65.318	64.898	65.318	64.898	
17	91.478	91.736	91.318	91.734	91.317	
19	122.896	123.166	122.783	123.166	122.784	
21	158.961	159.215	158.506	159.213	158.906	
23	198.788	198.972	198.787	198.975	198.784	
25	240.859	240.962	240.973	240.964	240.971	
27	282.866	282.848	283.128	282.846	283.127	
29	321.545	321.389	322.034	321.390	322.035	
31	352.513	352.174	353.291	352.173	353.289	
33	370.117	369.569	371.276	369.568	371.274	
35	367.313	366.495	368.905	366.495	368.908	
37	335.604	334.451	337.695	334.453	337.699	
39	265.055	263.442	267.631	263.441	267.630	
41	144.426	142.164	147.380	142.163	147.380	
43	-38.543	-41.709	-35.414	-41.708	-35.415	
45	-296.641	-301.127	-293.772	-301.127	-293.772	
47	-642.455	-648.795	-641.441	-648.795	-643.409	
49	-1087.345	-648.795	-1077.357	-1461.721	-1448.301	

Neste ensaio os máximos E_r por falta e por excesso de cada aproximação são:

APROXIMAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
A	41	+0.6%	49	+40.3%
	19	-0.08%	47	-0.6%
B	5	+0.1%	49	+0.9%
	41	-0.8%	—	—
C	41	+0.6%	—	—
	19	-0.08%	49	-34.4%
D	5	+0.1%	43	+0.3%
	41	-0.8%	49	-33.2%

Excluindo os valores de M_x nos pontos 1 e 3 em todas as aproximações, e mediante os resultados e a tabela de E_r , conclue-se que a aproximação B continua sendo a melhor de todas. Porém, note-se que as aproximações A e C, a menos do valor no ponto 49, apresentam resultados até melhores que a B. Em vista disso, torna-se pertinente pesquisar meios de corrigir o valor de M_x no ponto 49, obtido por meio de A e C, uma vez que essas aproximações são as mais simples (veja sugestões no item 3.6).

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 40. - REDE DUAL

PONTC	ANALITIC	M O M E N T O		APRCX.C	APRCX.D
		APRCX.A	APRCX.B		
1		-.008	.032	-.007	.031
3	.082	-.008	-.077	-.007	-.078
5	.792	.717	.649	.717	.647
7	2.340	2.276	2.194	2.276	2.194
9	4.864	4.838	4.749	4.838	4.747
11	8.495	8.481	8.378	8.481	8.379
13	13.367	13.374	13.256	13.373	13.262
15	19.604	19.658	19.537	19.661	19.542
17	27.329	27.367	27.234	27.368	27.231
19	36.649	36.710	36.575	36.710	36.574
21	47.660	47.716	47.569	47.713	47.571
23	60.440	60.476	60.324	60.480	60.318
25	75.039	75.061	74.906	75.056	74.917
27	91.478	91.483	91.335	91.485	91.323
29	109.740	109.685	109.530	109.685	109.537
31	129.758	129.712	129.591	129.712	129.579
33	151.411	151.253	151.113	151.253	151.120
35	174.510	174.427	174.339	174.433	174.336
37	198.788	198.663	198.594	198.661	198.590
39	223.890	223.764	223.728	223.770	223.720
41	249.355	249.246	249.268	249.244	249.263
43	274.611	274.474	274.550	274.472	274.550
45	298.956	298.812	298.956	298.818	298.964
47	321.545	321.388	321.618	321.384	321.610
49	341.383	341.250	341.589	341.246	341.586
51	357.308	357.107	357.529	357.115	357.535
53	367.982	367.794	368.375	367.788	368.366
55	371.827	371.590	372.290	371.594	372.284
57	367.313	366.987	367.854	366.982	367.853
59	352.361	351.969	353.012	351.974	353.015
61	324.944	324.472	325.694	324.470	325.683
63	282.795	282.262	283.694	282.262	283.698
65	223.483	222.867	224.516	222.867	224.512
67	144.427	143.671	145.541	143.670	145.546
69	42.941	42.009	44.113	42.010	44.107
71	-83.739	-84.875	-82.538	-84.875	-82.537
73	-238.395	-239.805	-237.242	-239.806	-237.243
75	-423.764	-425.501	-422.718	-425.501	-422.720
77	-642.455	-644.601	-641.617	-644.601	-641.616
79	-896.865	-899.516	-896.532	-899.516	-896.463
81	-1189.042	-899.516	-1187.265	-1589.753	-1549.306

Com esse tamanho de malha ($h=40000/40$) neste tipo de rede, as quatro aproximações apresentam os seguintes máximos E_r por falta e por excesso:

APROXIMAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
A	69	+0.25%	81	+24.4%
	15	-0.01%	79	-0.2%
B	39	+0.05%	81	+0.15%
	69	-0.3%	—	—
C	69	+0.25%	—	—
	15	-0.01%	81	-33.7%
D	39	+0.05%	77	+0.07%
	69	-0.3%	81	-30.3%

Disto pode-se concluir que a aproximação B continua apresentando melhores resultados, inclusive já muito precisos. Note-se, porém, que a menos do valor de M_x no ponto mais próximo ao engastamento, todas as aproximações fornecem bons resultados para valores de M_x .

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - REDE DUAL

PCNTC	ANALITIC	M C M E N T O		APRXX.C	APRXX.D
		APRXX.A	APRXX.P		
1		.007	.063	.007	.052
3	.057	.007	-.041	.007	-.041
5	.541	.483	.434	.484	.436
7	1.584	1.531	1.476	1.529	1.474
9	3.266	3.232	3.173	3.232	3.170
11	5.662	5.633	5.564	5.634	5.563
13	8.852	8.844	8.771	8.844	8.769
15	12.910	12.914	12.837	12.912	12.833
17	17.910	17.921	17.841	17.920	17.838
19	23.922	23.941	23.856	23.938	23.858
21	31.012	31.009	30.910	31.012	30.916
23	39.240	39.249	39.146	39.252	39.159
25	48.657	48.651	48.552	48.645	48.557
27	59.306	59.271	59.164	59.277	59.156
29	71.217	71.155	71.043	71.149	71.061
31	84.405	84.320	84.223	84.326	84.196
33	98.868	98.730	98.644	98.724	98.638
35	114.583	114.377	114.257	114.380	114.268
37	131.502	131.305	131.214	131.305	131.223
39	149.542	149.249	149.161	149.249	149.152
41	168.613	168.301	168.235	168.304	168.242
43	188.550	188.177	188.120	188.171	188.099
45	209.171	208.832	208.795	208.838	208.811
47	230.243	229.861	229.833	229.858	229.847
49	251.477	251.120	251.152	251.123	251.138
51	272.531	272.168	272.219	272.156	272.217
53	292.959	292.621	292.708	292.639	292.716
55	312.406	312.067	312.206	312.048	312.206
57	330.208	329.901	330.077	329.919	330.096
59	345.780	345.445	345.700	345.447	345.717
61	358.418	358.163	358.486	358.179	358.477
63	367.329	367.007	367.380	366.998	367.381
65	371.636	371.320	371.793	371.326	371.788
67	370.367	370.029	370.579	370.026	370.573
69	362.460	362.100	362.753	362.097	362.748
71	346.761	346.390	347.142	346.393	347.137
73	322.028	321.634	322.487	321.637	322.495
75	286.930	286.510	287.487	286.505	287.486
77	240.059	239.644	240.754	239.648	240.751
79	179.937	179.480	180.713	179.474	180.713
81	105.027	104.530	105.895	104.535	105.898
83	13.744	13.195	14.696	13.193	14.686
85	-95.518	-96.146	-94.515	-96.146	-94.508
87	-224.369	-225.098	-223.333	-225.098	-223.335
89	-374.395	-375.264	-373.367	-375.266	-373.370
91	-547.124	-548.165	-546.149	-548.164	-546.149
93	-743.992	-745.248	-743.124	-745.249	-743.124
95	-966.297	-967.823	-965.698	-967.823	-965.698
97	-1215.151	-967.823	-1213.770	-1622.671	-1574.761

Com essa subdivisão da altura H do reservatório, $h=40000/48$, percebe-se que os resultados apresentados pelas quatro aproximações, pouco melhoraram em relação ao dos ensaio anterior, a menos do valor no ponto mais próximo ao engastamento obtido pela aproximação A, como já se esperava. Os máximos E_r por falta e por excesso, para cada aproximação, neste ensaio são:

APROXIMAÇÃO	PONTO	M_x POSITIVO	PONTO	M_x NEGATIVO
A	75	+0.11%	97	+20.4%
	—	≈0.%	95	-0.13%
B	45	+0.11%	97	+0.11%
	81	-0.23%	83	-0.08%
C	75	+0.11%	83	+0.05%
	—	≈0.%	97	-33.5%
D	45	+0.11%	93	+0.07%
	81	-0.23%	97	-29.6%

Note-se, pelos resultados e por esta tabela de erros, que a aproximação B continua apresentando melhores valores de M_x do que as outras aproximações.

A partir desse tamanho de malha, verifica-se que o seu refinamento praticamente não leva à obtenção de melhores resultados, para os valores de M_x , como se pode notar ao se comparar os resultados deste ensaio com o anterior. Inclusive, após se ter atingido o tamanho de malha $n=62$, os resultados começaram a oscilar entre resultados ótimos e bons. Fato este esperado face as análises feitas nos itens anteriores (3.5.2 e 3.5.3).

Com esse tipo de rede, preocupou-se em verificar a partir de qual tamanho de malha os resultados começam a oscilar, somente para a aproximação B. O critério utilizado para isto foi o de verificar quando o valor aproximado de M_x no ponto mais próximo ao engastamento decresce, pois sabe-se que à medida que se refina a malha deve-se obter sempre um valor mais próximo ao de engastamento. Para melhor esclarecer este fato, apresentam-se a seguir os resultados obtidos com $n=60$, 62 e 64. Note-se que todos esses resultados são bastantes precisos, a menos naturalmente dos valores de M_x no ponto fictício 1 e no ponto 3, o mais próximo a da borda livre.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 60 - REDE DUAL

PONTO	M O M E N T O				
	ANALITICO	APROX.A	APROX.B	APROX.C	APROX.D
1		.011	.129	.011	.129
3	.036	.011	-.024	.011	-.026
5	.341	.283	.248	.284	.249
7	.988	.582	.953	.982	.951
9	2.018	2.013	1.988	2.015	1.979
11	3.472	3.401	3.356	3.400	3.349
13	5.388	5.350	5.308	5.355	5.307
15	7.807	7.814	7.774	7.811	7.771
17	10.768	10.715	10.657	10.719	10.658
19	14.308	14.334	14.293	14.329	14.293
21	18.465	18.489	18.451	18.492	18.440
23	23.274	23.260	23.155	23.270	23.196
25	28.768	28.782	28.711	28.782	28.713
27	34.980	35.033	34.984	35.028	34.979
29	41.938	41.957	41.879	41.962	41.888
31	49.666	49.746	49.692	49.744	49.688
33	58.185	58.236	58.172	58.241	58.175
35	67.510	67.627	67.555	67.625	67.576
37	77.651	77.763	77.685	77.753	77.717
39	88.611	88.649	88.574	88.644	88.540
41	100.384	100.422	100.378	100.422	100.361
43	112.956	112.953	112.871	112.953	112.852
45	126.304	126.314	126.233	126.314	126.232
47	140.390	140.405	140.334	140.409	140.331
49	155.166	155.239	155.205	155.230	155.186
51	170.570	170.674	170.624	170.679	170.641
53	186.522	186.582	186.539	186.577	186.546
55	202.926	203.033	203.005	203.056	203.007
57	219.667	219.741	219.724	219.727	219.719
59	236.610	236.607	236.616	236.607	236.591
61	253.597	253.587	253.598	253.601	253.584
63	270.445	270.381	270.419	270.367	270.404
65	286.647	286.875	286.920	286.884	286.913
67	302.868	302.768	302.824	302.753	302.858
69	317.943	317.760	317.848	317.783	317.842
71	331.877	331.678	331.787	331.650	331.783
73	344.343	344.210	344.385	344.238	344.369
75	354.980	354.838	355.045	354.824	355.031
77	363.352	363.150	363.337	363.140	363.369
79	369.147	368.986	369.222	368.996	369.240
81	371.777	371.747	372.094	371.752	372.064
83	370.774	370.560	370.879	370.550	370.893
85	365.596	365.582	366.002	365.591	365.997
87	355.660	355.682	356.135	355.673	356.148
89	340.348	340.262	340.751	340.271	340.772
91	319.006	318.897	319.473	318.890	319.441
93	290.944	290.794	291.415	290.794	291.415
95	255.441	255.253	255.536	255.261	255.942
97	211.747	211.487	212.239	211.477	212.216
99	159.885	158.773	159.587	158.777	159.598
101	96.657	96.245	97.113	96.250	97.129
103	23.649	23.210	24.165	23.203	24.169
105	-60.761	-61.297	-60.277	-61.293	-60.272
107	-157.399	-158.021	-156.932	-158.024	-156.932
109	-267.087	-267.828	-266.675	-267.828	-266.671
111	-398.625	-391.470	-390.248	-391.471	-390.247
113	-528.790	-529.783	-528.501	-529.781	-528.503
115	-682.319	-683.454	-682.114	-683.455	-682.117
117	-851.892	-853.186	-851.755	-853.186	-851.796
119	-1038.122	-1039.605	-1038.214	-1039.605	-1105.130
121	-1241.531	-1039.605	-1241.319	-1657.634	-1601.902

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 62 - REDE DUAL

PONTC	M O M E N T O				
	ANALITICO	APRCX.A	APRCX.B	APRCX.C	APRCX.D
1		.019	.076	.019	.072
3	.034	.019	-.009	.019	-.009
5	.318	.275	.249	.275	.249
7	.922	.867	.838	.866	.833
9	1.881	1.829	1.796	1.830	1.802
11	3.233	3.150	3.103	3.152	3.101
13	5.013	4.980	4.955	4.980	4.950
15	7.257	7.087	7.035	7.082	7.021
17	10.000	9.906	9.870	9.913	9.864
19	13.278	13.182	13.140	13.177	13.147
21	17.123	16.901	16.835	16.899	16.834
23	21.570	21.423	21.388	21.420	21.385
25	26.648	26.479	26.423	26.486	26.428
27	32.387	32.214	32.163	32.219	32.164
29	38.815	38.599	38.523	38.604	38.531
31	45.954	45.832	45.790	45.824	45.791
33	53.825	53.629	53.559	53.635	53.568
35	62.445	62.250	62.224	62.280	62.239
37	71.826	71.623	71.525	71.628	71.530
39	81.972	81.733	81.904	81.923	81.898
41	92.884	92.763	92.684	92.768	92.697
43	104.554	104.555	104.500	104.560	104.501
45	116.566	116.851	116.762	116.841	116.789
47	130.095	130.049	130.002	130.059	129.987
49	143.904	143.949	143.916	143.938	143.899
51	158.347	158.237	158.288	158.348	158.275
53	173.363	173.398	173.375	173.388	173.371
55	188.878	188.887	188.854	188.897	188.853
57	204.802	204.757	204.715	204.762	204.745
59	221.028	220.979	220.957	220.994	220.983
61	237.433	237.384	237.369	237.369	237.370
63	253.870	253.850	253.874	253.845	253.868
65	270.175	270.148	270.194	270.158	270.202
67	286.160	285.973	286.008	285.962	285.986
69	301.611	301.538	301.614	301.543	301.631
71	316.292	316.064	316.134	316.064	316.126
73	329.937	329.765	329.914	329.770	329.866
75	342.254	341.985	342.126	341.970	342.111
77	352.920	352.662	352.827	352.682	352.834
79	361.583	361.262	361.424	361.236	361.428
81	367.860	367.646	367.905	367.672	367.894
83	371.333	370.976	371.256	370.961	371.251
85	371.553	371.144	371.459	371.154	371.448
87	368.040	367.723	368.080	367.713	368.090
89	360.278	359.948	360.341	359.953	360.351
91	347.719	347.316	347.755	347.316	347.744
93	329.783	329.444	329.956	329.444	329.940
95	305.860	305.478	306.021	305.484	306.013
97	275.211	275.021	275.641	275.016	275.627
99	237.467	237.170	237.831	237.165	237.816
101	191.639	191.315	192.035	191.321	192.024
103	137.113	136.892	137.699	136.897	137.689
105	73.158	72.906	73.749	72.901	73.754
107	-.964	-1.207	-.290	-1.207	-.297
109	-86.003	-86.302	-85.331	-86.302	-85.335
111	-182.704	-182.998	-181.962	-182.998	-181.960
113	-291.813	-292.159	-291.071	-292.159	-291.073
115	-414.047	-414.448	-413.296	-414.448	-413.297
117	-550.105	-550.561	-549.352	-550.561	-549.355
119	-700.648	-701.173	-699.913	-701.173	-699.912
121	-866.284	-866.910	-865.606	-866.910	-865.607
123	-1047.566	-1048.292	-1046.988	-1048.292	-1114.182
125	-1244.959	-1048.292	-1244.016	-1661.095	-1604.378

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 64 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	COMENTO		APROX.C	APROX.D
		APROX.A	APROX.B		
1		.008	.122	.008	.131
3	.032	.008	-.023	.008	-.022
5	.298	.236	.207	.236	.206
7	.862	.842	.828	.846	.823
9	1.758	1.656	1.621	1.655	1.615
11	3.018	2.954	2.936	2.954	2.940
13	4.675	4.500	4.447	4.503	4.450
15	6.762	6.645	6.625	6.646	6.620
17	9.310	9.049	8.992	9.044	8.990
19	12.353	12.126	12.095	12.126	12.096
21	15.920	15.511	15.444	15.511	15.445
23	20.043	19.775	19.760	19.775	19.772
25	24.748	24.194	24.122	24.197	24.120
27	30.065	29.533	29.487	29.536	29.477
29	36.018	35.498	35.464	35.503	35.472
31	42.629	41.862	41.784	41.851	41.776
33	49.920	49.276	49.250	49.284	49.236
35	57.906	57.080	56.994	57.075	57.006
37	66.601	65.804	65.748	65.809	65.769
39	76.012	75.114	75.042	75.109	75.061
41	86.143	85.205	85.140	85.200	85.146
43	96.991	96.077	96.033	96.083	96.033
45	108.546	107.520	107.444	107.509	107.442
47	120.790	119.694	119.644	119.705	119.637
49	133.698	132.454	132.388	132.444	132.359
51	147.234	146.077	146.065	146.083	146.060
53	161.352	159.896	159.833	159.896	159.828
55	175.996	174.691	174.676	174.696	174.712
57	191.094	189.453	189.385	189.453	189.400
59	206.564	204.920	204.990	204.991	204.997
61	222.305	220.508	220.473	220.530	220.502
63	238.203	236.361	236.342	236.328	236.363
65	254.126	252.293	252.456	252.409	252.459
67	269.922	267.887	267.859	267.904	267.862
69	285.421	283.545	283.598	283.529	283.604
71	300.429	298.568	298.641	298.568	298.638
73	314.731	312.777	312.838	312.760	312.848
75	328.091	326.302	326.435	326.324	326.416
77	340.245	338.444	338.554	338.433	338.579
79	350.904	348.991	349.118	349.002	349.105
81	359.753	357.975	358.153	357.964	358.147
83	366.448	364.714	364.941	364.735	364.901
85	370.620	368.880	369.115	368.859	369.121
87	371.868	370.182	370.473	370.182	370.438
89	369.764	368.164	368.477	368.175	368.481
91	363.850	362.370	362.737	362.359	362.748
93	353.638	352.230	352.641	352.235	352.625
95	338.614	337.435	337.878	337.435	337.876
97	318.235	317.187	317.673	317.187	317.679
99	291.931	291.097	291.634	291.102	291.610
101	259.107	258.545	259.139	258.539	259.137
103	219.147	218.750	219.394	218.750	219.379
105	171.413	171.240	171.941	171.235	171.927
107	115.252	115.413	116.192	115.424	116.173
109	46.993	50.342	51.143	50.336	51.129
111	-25.038	-24.349	-23.477	-24.349	-23.477
113	-110.522	-109.489	-108.558	-109.489	-108.552
115	-207.140	-205.851	-204.877	-205.851	-204.874
117	-315.557	-313.973	-312.941	-313.973	-312.935
119	-438.430	-434.513	-433.414	-434.513	-433.415
121	-570.384	-568.209	-567.072	-568.209	-567.070
123	-718.018	-715.523	-714.334	-715.523	-714.333
125	-879.876	-877.110	-875.880	-877.110	-875.880
127	-1056.452	-1053.442	-1052.214	-1053.442	-1119.490
129	-1248.172	-1053.442	-1243.290	-1659.893	-1602.429

3.5.4 - Rotações ψ Aproximados com Rede Dual

Analisou-se os resultados obtidos por meio das quatro aproximações (A, B, C e D) do cálculo da rotação ψ do reservatório padrão, segundo o mesmo procedimento de análise e o mesmo esquema de ensaios, como no item 3.5.2. Naturalmente, cabe aqui também observações análogas às feitas naquele item, quanto à não necessidade de se seguir o mesmo esquema de subdivisão da altura H do reservatório tanto para análise de M_x como para análise de ψ . Porém, considera-se para a rotação ψ o mesmo esquema de ensaios de M_x , tendo-se em vista o exposto no item 3.5.2.

Feita essa introdução, passa-se às análises dessas aproximações.

Com esse tipo de rede, os resultados obtidos pelas quatro aproximações da rotação ψ com o tamanho de malha $h=40000/6$, ($\max Er=+9\%$ com as aproximações A e C e $\max Er = +5,2\%$ com as aproximações B e D), são melhores que os obtidos com rede habitual. No ensaio seguinte, com $n=12$, os resultados apresentados já podem ser considerados razoáveis, a menos do valor de ψ no ponto 25. Neste vê-se que a melhor aproximação é a B ($\max Er = +5,0\%$, $- 6,6\%$).

Com o tamanho de malha $h=40000/24$, percebe-se que os resultados das quatro aproximações são bastante precisos; a menos dos valores mais próximos ao engastamento, com a aproximação D ($Er = + 16.2\%$ e $Er = - 3.5\%$) nos pontos 49 e 47 e com aproximações A ($Er = - 7.8\%$) e C ($Er = + 11.7\%$) no ponto 49. Com esse tamanho de malha, a aproximação B se destaca como a que melhor resultados apresenta para valores de ψ ($\max Er = + 0.25\%$, $- 1.2\%$) nos pontos 49 e 47. A partir dessa subdivisão da altura H do reservatório, nota-se que à medida que se refina a malha, os valores de ψ nos pontos mais próximos ao engastamento, se aproximam mais rapidamente aos valores exatos que nos demais pontos. Isto se deve ao fato de que os valores de ψ obtidos por essas aproximações, nos pontos onde a convergência é mais lenta, já se

rem bastante refinados. Nota-se inclusive que com $n=28$, nos pontos onde os valores aproximados de ψ , já eram bons, começam a oscilar, apesar de continuarem dentro de uma precisão aceitável (veja valores de ψ nos pontos próximos ao coroa-mento dos ensaios com $n=26, 28$ e 30).

A fim de melhor esclarecer o que se disse acima, quanto à convergência, note-se que com o tamanho de malha $h=4000/40$ obtêm-se com as aproximações A, B, C e D os seguintes Er , no ponto mais próximo do engastamento: $- 3.1\%$, $- 0.4\%$, $+ 6.8$ e $+ 10.0\%$.

No ensaio seguinte, com o tamanho de malha $h=40000/48$, as aproximações que se obtêm para valores de ψ ao longo da altura do reservatório, comparadas com as do ensaio anterior ($n=40$), são praticamente as mesmas, principalmente para a aproximação B , a melhor de todas, que apresenta $Er = - 0.3\%$ no ponto mais próximo ao engastamento (ponto 97). Porém, continua-se observando que à medida que se refina a malha, melhores resultados se obtêm dessas aproximações, embora numa convergência cada vez mais lenta. Inclusive chega-se a um limite de refinamento tal que os resultados começam a oscilar, quebrando a convergência monotônica das aproximações. Veja, por exemplo, o valor de ψ no ponto mais próximo do engastamento obtido com a aproximação B com $n=52, 54$ e 56 .

Apresentam-se a seguir, além dos resultados analisados, os provenientes com $n=60, 62$ e 64 a fim de mostrar os valores das rotações obtidas com aquelas subdivisões da altura H do reservatório, para as quais se analisaram os M_x .

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 6 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1522655E-03	-.1515186E-03	-.1522655E-03	-.1515186E-03
3	-.1653624E-03	-.1522655E-03	-.1540893E-03	-.1522655E-03	-.1540893E-03
5	-.1535805E-03	-.1380925E-03	-.1457175E-03	-.1380925E-03	-.1457175E-03
7	-.5867866E-04	-.7816963E-04	-.8973569E-04	-.7816963E-04	-.8973569E-04
9	.3178421E-04	.5114954E-04	.4710497E-04	.5114953E-04	.4710492E-04
11	.2094510E-03	.2047362E-03	.2178156E-03	.2047362E-03	.2645434E-03
13	.2173048E-03	.3447708E-03	.3100504E-03	.9158450E-04	.7793543E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1627126E-03	-.1627631E-03	-.1627126E-03	-.1627631E-03
3	-.1656690E-03	-.1627125E-03	-.1628398E-03	-.1627126E-03	-.1628398E-03
5	-.1644509E-03	-.1614156E-03	-.1621530E-03	-.1614156E-03	-.1621530E-03
7	-.1550804E-03	-.1556943E-03	-.1571170E-03	-.1556943E-03	-.1571170E-03
9	-.1454162E-03	-.1414369E-03	-.1436485E-03	-.1414369E-03	-.1436485E-03
11	-.1185686E-03	-.1139101E-03	-.1168633E-03	-.1139101E-03	-.1168634E-03
13	-.7381411E-04	-.6866404E-04	-.7202048E-04	-.6866403E-04	-.7202047E-04
15	-.8369238E-05	-.3279519E-05	-.6222295E-05	-.3279495E-05	-.6222261E-05
17	.7577511E-04	.7976159E-04	.7874102E-04	.7976159E-04	.7874110E-04
19	.1677023E-03	.1689261E-03	.1722147E-03	.1689261E-03	.1722147E-03
21	.2423225E-03	.2383591E-03	.2492867E-03	.2383591E-03	.2492866E-03
23	.2548423E-03	.2422265E-03	.2626905E-03	.2422265E-03	.2776317E-03
25	.1364806E-03	.1950066E-03	.1533106E-03	.7353886E-04	.5739043E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1649676E-03	-.1649640E-03	-.1649676E-03	-.1649639E-03
3	-.1657043E-03	-.1649675E-03	-.1649835E-03	-.1649675E-03	-.1649836E-03
5	-.1655683E-03	-.1648335E-03	-.1649067E-03	-.1648336E-03	-.1649067E-03
7	-.1650065E-03	-.1642605E-03	-.1643971E-03	-.1642605E-03	-.1643971E-03
9	-.1636416E-03	-.1628681E-03	-.1630803E-03	-.1628681E-03	-.1630803E-03
11	-.1610216E-03	-.1602030E-03	-.1605019E-03	-.1602030E-03	-.1605019E-03
13	-.1566248E-03	-.1557441E-03	-.1561391E-03	-.1557441E-03	-.1561392E-03
15	-.1498706E-03	-.1489146E-03	-.1494124E-03	-.1489146E-03	-.1494125E-03
17	-.1401376E-03	-.1350988E-03	-.1397014E-03	-.1390988E-03	-.1397014E-03
19	-.1267905E-03	-.1256675E-03	-.1263705E-03	-.1256675E-03	-.1263703E-03
21	-.1092193E-03	-.1080188E-03	-.1088084E-03	-.1080189E-03	-.1088084E-03
23	-.8689254E-04	-.8563213E-04	-.8648356E-04	-.8563221E-04	-.8648376E-04
25	-.5942752E-04	-.5813626E-04	-.5900993E-04	-.5813617E-04	-.5900987E-04
27	-.2667892E-04	-.2539816E-04	-.2623598E-04	-.2539806E-04	-.2623598E-04
29	.1115197E-04	.1236663E-04	.1164443E-04	.1236666E-04	.1164435E-04
31	.5338790E-04	.5446428E-04	.5396242E-04	.5446433E-04	.5396255E-04
33	.9872545E-04	.9957317E-04	.9942400E-04	.9957312E-04	.9942408E-04
35	.1450690E-03	.1455771E-03	.1459429E-03	.1455770E-03	.1459429E-03
37	.1893513E-03	.1893862E-03	.1904598E-03	.1893862E-03	.1904597E-03
39	.2273524E-03	.2267545E-03	.2287576E-03	.2267546E-03	.2287576E-03
41	.2535300E-03	.2521049E-03	.2552836E-03	.2521049E-03	.2552836E-03
43	.2608635E-03	.2583834E-03	.2630010E-03	.2583834E-03	.2630010E-03
45	.2407638E-03	.2369561E-03	.2432800E-03	.2369562E-03	.2432800E-03
47	.1830464E-03	.1775860E-03	.1857484E-03	.1775860E-03	.1923034E-03
49	.7601800E-04	.9648666E-04	.7924279E-04	.4567878E-04	.3383971E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 26 - REDE DUAL

PONTC	ANALITIC	R O T A C O E S W'			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1651388E-03	-.1651354E-03	-.1651388E-03	-.1651357E-03
3	-.1657053E-03	-.1651387E-03	-.1651513E-03	-.1651387E-03	-.1651513E-03
5	-.165594E-03	-.1650349E-03	-.1650914E-03	-.1650349E-03	-.1650914E-03
7	-.1651642E-03	-.1645922E-03	-.1646970E-03	-.1645922E-03	-.1646970E-03
9	-.1641123E-03	-.1635205E-03	-.1636825E-03	-.1635205E-03	-.1636825E-03
11	-.1621017E-03	-.1614769E-03	-.1617047E-03	-.1614769E-03	-.1617047E-03
13	-.1587279E-03	-.1580663E-03	-.1583673E-03	-.1580663E-03	-.1583673E-03
15	-.1535805E-03	-.1528501E-03	-.1532299E-03	-.1528500E-03	-.1532300E-03
17	-.1461532E-03	-.1453544E-03	-.1458167E-03	-.1453544E-03	-.1458167E-03
19	-.1359584E-03	-.1350851E-03	-.1356291E-03	-.1350851E-03	-.1356291E-03
21	-.1224593E-03	-.1215514E-03	-.1221721E-03	-.1215514E-03	-.1221721E-03
23	-.1053094E-03	-.1042931E-03	-.1049790E-03	-.1042930E-03	-.1049790E-03
25	-.8359104E-04	-.8291952E-04	-.8365043E-04	-.8291946E-04	-.8365040E-04
27	-.5826586E-04	-.5716053E-04	-.5790633E-04	-.5716052E-04	-.5790631E-04
29	-.2803524E-04	-.2692687E-04	-.2764490E-04	-.2692691E-04	-.2764490E-04
31	.6543954E-05	.7615484E-05	.6982318E-05	.7615328E-05	.6982163E-05
33	.4497421E-04	.4595744E-04	.4548270E-04	.4595749E-04	.4548275E-04
35	.8631666E-04	.8714762E-04	.8692342E-04	.8714772E-04	.8692355E-04
37	.1250817E-03	.1296825E-03	.1298209E-03	.1296825E-03	.1298209E-03
39	.1711094E-03	.1713874E-03	.1720205E-03	.1713873E-03	.1720203E-03
41	.2094507E-03	.2092941E-03	.2105740E-03	.2092940E-03	.2105740E-03
43	.2402422E-03	.2395212E-03	.2416186E-03	.2395212E-03	.2416187E-03
45	.2586034E-03	.2571642E-03	.2602640E-03	.2571642E-03	.2602640E-03
47	.2585459E-03	.2562088E-03	.2605043E-03	.2562088E-03	.2605043E-03
49	.2329271E-03	.2294806E-03	.2351648E-03	.2294807E-03	.2351649E-03
51	.1734500E-03	.1686474E-03	.1758154E-03	.1686474E-03	.1818408E-03
53	.7074546E-04	.8853586E-04	.7345791E-04	.4286387E-04	.3162072E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 28 - REDE DUAL

PONTO	ANALITIC	R O T A C O E S W'			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1651989E-03	-.1651964E-03	-.1651989E-03	-.1651963E-03
3	-.1657061E-03	-.1651987E-03	-.1652085E-03	-.1651987E-03	-.1652086E-03
5	-.1656220E-03	-.1651170E-03	-.1651614E-03	-.1651169E-03	-.1651614E-03
7	-.1652781E-03	-.1647687E-03	-.1648508E-03	-.1647687E-03	-.1648508E-03
9	-.1644509E-03	-.1639283E-03	-.1640545E-03	-.1639283E-03	-.1640545E-03
11	-.1628757E-03	-.1623306E-03	-.1625076E-03	-.1623306E-03	-.1625076E-03
13	-.1602480E-03	-.1596709E-03	-.1599045E-03	-.1596710E-03	-.1599045E-03
15	-.1562277E-03	-.1556098E-03	-.1559048E-03	-.1556098E-03	-.1559047E-03
17	-.1504443E-03	-.1497783E-03	-.1501383E-03	-.1497782E-03	-.1501384E-03
19	-.1425059E-03	-.1417868E-03	-.1422132E-03	-.1417867E-03	-.1422132E-03
21	-.1320116E-03	-.1312370E-03	-.1317282E-03	-.1312370E-03	-.1317282E-03
23	-.1185685E-03	-.1177393E-03	-.1182902E-03	-.1177393E-03	-.1182904E-03
25	-.1018151E-03	-.1009362E-03	-.1015364E-03	-.1009362E-03	-.1015367E-03
27	-.8144893E-04	-.8053104E-04	-.8116481E-04	-.8053108E-04	-.8116470E-04
29	-.5726348E-04	-.5632322E-04	-.5696725E-04	-.5632327E-04	-.5696739E-04
31	-.2919157E-04	-.2825081E-04	-.2887310E-04	-.2825075E-04	-.2887326E-04
33	.2642857E-05	.3555989E-05	.2997454E-05	.3555933E-05	.2997589E-05
35	.3786483E-04	.3871350E-04	.3827234E-04	.3871338E-04	.3827253E-04
37	.7577501E-04	.7651743E-04	.7625921E-04	.7651754E-04	.7625905E-04
39	.1152976E-03	.1158706E-03	.1158747E-03	.1158707E-03	.1158747E-03
41	.1548562E-03	.1551995E-03	.1555595E-03	.1551995E-03	.1555595E-03
43	.1923314E-03	.1923684E-03	.1931916E-03	.1923684E-03	.1931918E-03
45	.2249575E-03	.2245978E-03	.2260050E-03	.2245978E-03	.2260051E-03
47	.2492442E-03	.2483844E-03	.2505077E-03	.2483844E-03	.2505077E-03
49	.2609132E-03	.2594313E-03	.2624113E-03	.2594313E-03	.2624114E-03
51	.2548425E-03	.2525981E-03	.2565794E-03	.2525981E-03	.2565794E-03
53	.2250462E-03	.2218768E-03	.2270017E-03	.2218767E-03	.2270017E-03
55	.1646882E-03	.1604058E-03	.1667439E-03	.1604058E-03	.1723210E-03
57	.6615095E-04	.8174015E-04	.6845716E-04	.4035765E-04	.2966393E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 30 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1651660E-03	-.1651623E-03	-.1651660E-03	-.1651623E-03
3	-.1657067E-03	-.1651662E-03	-.1651747E-03	-.1651662E-03	-.1651746E-03
5	-.1656387E-02	-.1651005E-03	-.1651359E-03	-.1651005E-03	-.1651359E-03
7	-.1653624E-02	-.1648222E-03	-.1648874E-03	-.1648222E-03	-.1648874E-03
9	-.1647004E-03	-.1641526E-03	-.1642527E-03	-.1641526E-03	-.1642528E-03
11	-.1634441E-03	-.1628825E-03	-.1630225E-03	-.1628825E-03	-.1630225E-03
13	-.1613545E-03	-.1607726E-03	-.1609570E-03	-.1607726E-03	-.1609570E-03
15	-.1581639E-03	-.1575560E-03	-.1577889E-03	-.1575560E-03	-.1577889E-03
17	-.1535805E-03	-.1529419E-03	-.1532265E-03	-.1529419E-03	-.1532265E-03
19	-.1472924E-03	-.1466196E-03	-.1469578E-03	-.1466195E-03	-.1469578E-03
21	-.1389759E-03	-.1382676E-03	-.1386597E-03	-.1382676E-03	-.1386598E-03
23	-.1283054E-03	-.1275628E-03	-.1280066E-03	-.1275629E-03	-.1280067E-03
25	-.1149679E-03	-.1141950E-03	-.1146859E-03	-.1141950E-03	-.1146860E-03
27	-.9867866E-04	-.9788186E-04	-.9841102E-04	-.9788178E-04	-.9841091E-04
29	-.7520468E-04	-.7839347E-04	-.7894781E-04	-.7839357E-04	-.7894757E-04
31	-.5639024E-04	-.5557877E-04	-.5614015E-04	-.5557870E-04	-.5614005E-04
33	-.3018922E-04	-.2939540E-04	-.2993944E-04	-.2939534E-04	-.2993973E-04
35	-.7015094E-06	-.5292893E-07	-.4422366E-06	-.5292892E-07	-.4422324E-06
37	.3178392E-04	.3247261E-04	.3206595E-04	.3247261E-04	.3206607E-04
39	.6674172E-04	.6733203E-04	.6706214E-04	.6733203E-04	.6706211E-04
41	.1033565E-03	.1038110E-03	.1037356E-03	.1038110E-03	.1037357E-03
43	.1404677E-03	.1407418E-03	.1409285E-03	.1407417E-03	.1409285E-03
45	.1765094E-03	.1765523E-03	.1770719E-03	.1765523E-03	.1770789E-03
47	.2094506E-03	.2092026E-03	.2101566E-03	.2092025E-03	.2101566E-03
49	.2367377E-03	.2361285E-03	.2376059E-03	.2361285E-03	.2376059E-03
51	.2552404E-03	.2541905E-03	.2562946E-03	.2541904E-03	.2562946E-03
53	.2612103E-03	.2596276E-03	.2624669E-03	.2596276E-03	.2624668E-03
55	.2502499E-03	.2480289E-03	.2517133E-03	.2480288E-03	.2517133E-03
57	.2173055E-03	.2143234E-03	.2189596E-03	.2143234E-03	.2189596E-03
59	.1566846E-03	.1528013E-03	.1584409E-03	.1528013E-03	.1636328E-03
61	.6211321E-04	.7586541E-04	.6408435E-04	.3811111E-04	.2792436E-04

ENSAIO DE AFERICAO PARA N= 40 - REDE DUAL

PONTO	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1653699E-03	-.1653675E-03	-.1653699E-03	-.1653674E-03
3	-.1657081E-03	-.1653705E-03	-.1653744E-03	-.1653705E-03	-.1653744E-03
5	-.1656802E-03	-.1653439E-03	-.1653582E-03	-.1653439E-03	-.1653582E-03
7	-.1655683E-03	-.1652317E-03	-.1652575E-03	-.1652317E-03	-.1652574E-03
9	-.1653048E-03	-.1649649E-03	-.1650037E-03	-.1649649E-03	-.1650036E-03
11	-.1648111E-03	-.1644654E-03	-.1645188E-03	-.1644654E-03	-.1645188E-03
13	-.1639994E-03	-.1636459E-03	-.1637157E-03	-.1636459E-03	-.1637157E-03
15	-.1627720E-03	-.1624071E-03	-.1624946E-03	-.1624071E-03	-.1624946E-03
17	-.1610216E-03	-.1606437E-03	-.1607503E-03	-.1606437E-03	-.1607502E-03
19	-.1586327E-03	-.1582408E-03	-.1583679E-03	-.1582408E-03	-.1583679E-03
21	-.1554820E-03	-.1550748E-03	-.1552234E-03	-.1550749E-03	-.1552233E-03
23	-.1514395E-03	-.1510177E-03	-.1511885E-03	-.1510177E-03	-.1511886E-03
25	-.1463705E-03	-.1459350E-03	-.1461288E-03	-.1459350E-03	-.1461289E-03
27	-.1401376E-03	-.1396897E-03	-.1399600E-03	-.1396898E-03	-.1399600E-03
29	-.1326032E-03	-.1321459E-03	-.1323848E-03	-.1321459E-03	-.1323847E-03
31	-.1236327E-03	-.1231685E-03	-.1234282E-03	-.1231685E-03	-.1234283E-03
33	-.1130985E-03	-.1126323E-03	-.1129119E-03	-.1126323E-03	-.1129118E-03
35	-.1088488E-03	-.1084193E-03	-.1087157E-03	-.1084192E-03	-.1087156E-03
37	-.8689254E-04	-.8642839E-04	-.8673663E-04	-.8642848E-04	-.8673679E-04
39	-.7104594E-04	-.7058740E-04	-.7090342E-04	-.7058747E-04	-.7090336E-04
41	-.5329987E-04	-.5284953E-04	-.5316647E-04	-.5284949E-04	-.5316630E-04
43	-.3364775E-04	-.3321004E-04	-.3351990E-04	-.3321012E-04	-.3351992E-04
45	-.1213077E-04	-.1171183E-04	-.1200501E-04	-.1171176E-04	-.1200500E-04
47	.1115183E-04	.1154566E-04	.1128046E-04	.1154582E-04	.1128042E-04
49	.3603232E-04	.3639459E-04	.3617127E-04	.3639443E-04	.3617132E-04
51	.6226164E-04	.6258297E-04	.6241722E-04	.6258297E-04	.6241720E-04
53	.8949732E-04	.8976673E-04	.8967638E-04	.8976682E-04	.8967603E-04
55	.1172500E-03	.1174936E-03	.1174988E-03	.1174936E-03	.1174986E-03
57	.1450686E-03	.1451902E-03	.1453129E-03	.1451902E-03	.1453130E-03
59	.1721276E-03	.1721511E-03	.1724167E-03	.1721511E-03	.1724169E-03
61	.1976113E-03	.1975176E-03	.1979535E-03	.1975177E-03	.1979533E-03
63	.2205011E-03	.2202701E-03	.2209052E-03	.2202702E-03	.2209052E-03
65	.2396019E-03	.2392125E-03	.2400789E-03	.2392125E-03	.2400788E-03
67	.2535300E-03	.2529577E-03	.2540881E-03	.2529576E-03	.2540881E-03
69	.2607051E-03	.2599207E-03	.2613492E-03	.2599207E-03	.2613491E-03
71	.2593414E-03	.2583132E-03	.2600747E-03	.2583133E-03	.2600746E-03
73	.2474446E-03	.2461377E-03	.2482667E-03	.2461377E-03	.2482667E-03
75	.2228143E-03	.2211887E-03	.2237187E-03	.2211887E-03	.2237187E-03
77	.1830470E-03	.1810599E-03	.1840225E-03	.1810599E-03	.1840224E-03
79	.1255521E-03	.1231555E-03	.1265657E-03	.1231555E-03	.1304374E-03
81	.4757299E-04	.5569176E-04	.4864740E-04	.2980787E-04	.2159751E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - REDE DUAL

PONTIC	R O T A C O E S				
	ANALITICO	APRCX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1653493E-03	-.1653484E-03	-.1653493E-03	-.1653484E-03
3	-.1657085E-03	-.1653488E-03	-.1653508E-03	-.1653488E-03	-.1653509E-03
5	-.1656926E-03	-.1653336E-03	-.1653415E-03	-.1653335E-03	-.1653415E-03
7	-.1656293E-03	-.1652706E-03	-.1652850E-03	-.1652707E-03	-.1652850E-03
9	-.1654812E-03	-.1651219E-03	-.1651432E-03	-.1651219E-03	-.1651433E-03
11	-.1652061E-03	-.1648449E-03	-.1648741E-03	-.1648449E-03	-.1648741E-03
13	-.1647569E-03	-.1643925E-03	-.1644304E-03	-.1643925E-03	-.1644305E-03
15	-.1640816E-03	-.1637126E-03	-.1637599E-03	-.1637126E-03	-.1637598E-03
17	-.1631235E-03	-.1627491E-03	-.1628064E-03	-.1627491E-03	-.1628063E-03
19	-.1618217E-03	-.1614409E-03	-.1615091E-03	-.1614410E-03	-.1615091E-03
21	-.1601108E-03	-.1597237E-03	-.1598035E-03	-.1597238E-03	-.1598036E-03
23	-.1579214E-03	-.1575282E-03	-.1576200E-03	-.1575281E-03	-.1576201E-03
25	-.1551810E-03	-.1547813E-03	-.1548856E-03	-.1547813E-03	-.1548855E-03
27	-.1518136E-03	-.1514087E-03	-.1515259E-03	-.1514087E-03	-.1515261E-03
29	-.1477414E-03	-.1473329E-03	-.1474633E-03	-.1473329E-03	-.1474633E-03
31	-.1428849E-03	-.1424743E-03	-.1426179E-03	-.1424743E-03	-.1426179E-03
33	-.1371642E-03	-.1367540E-03	-.1369105E-03	-.1367540E-03	-.1369108E-03
35	-.1305003E-03	-.1300944E-03	-.1302641E-03	-.1300945E-03	-.1302641E-03
37	-.1228162E-03	-.1224169E-03	-.1225984E-03	-.1224169E-03	-.1225983E-03
39	-.1140390E-03	-.1136495E-03	-.1138422E-03	-.1136496E-03	-.1138424E-03
41	-.1041014E-03	-.1037261E-03	-.1039289E-03	-.1037260E-03	-.1039289E-03
43	-.9254417E-04	-.9258612E-04	-.9279727E-04	-.9258612E-04	-.9279701E-04
45	-.8051841E-04	-.8017958E-04	-.8035664E-04	-.8017558E-04	-.8039690E-04
47	-.6678837E-04	-.6647043E-04	-.6669048E-04	-.6647033E-04	-.6669063E-04
49	-.5173472E-04	-.5143975E-04	-.5166024E-04	-.5143566E-04	-.5165980E-04
51	-.3525755E-04	-.3508701E-04	-.3530297E-04	-.3508720E-04	-.3530330E-04
53	-.1768053E-04	-.1743736E-04	-.1764516E-04	-.1743736E-04	-.1764522E-04
55	-.1245160E-05	-.1459121E-05	-.1264906E-05	-.1459121E-05	-.1265128E-05
57	-.2123662E-04	-.2152061E-04	-.2134657E-04	-.2152061E-04	-.2134670E-04
59	-.4247473E-04	-.4262580E-04	-.4247875E-04	-.4262580E-04	-.4247855E-04
61	-.6449826E-04	-.6461419E-04	-.6450209E-04	-.6461410E-04	-.6450160E-04
63	-.8719938E-04	-.8727578E-04	-.8720721E-04	-.8727588E-04	-.8720759E-04
65	-.1103183E-03	-.1103485E-03	-.1103327E-03	-.1103485E-03	-.1103329E-03
67	-.1335777E-03	-.1335156E-03	-.1335639E-03	-.1335157E-03	-.1335636E-03
69	-.1564758E-03	-.1563946E-03	-.1565179E-03	-.1563946E-03	-.1565180E-03
71	-.1786830E-03	-.1785349E-03	-.1787459E-03	-.1785349E-03	-.1787455E-03
73	-.1994107E-03	-.1994107E-03	-.1997226E-03	-.1994108E-03	-.1997227E-03
75	-.2187203E-03	-.2184152E-03	-.2188423E-03	-.2184152E-03	-.2188424E-03
77	-.2352535E-03	-.2348575E-03	-.2354149E-03	-.2348575E-03	-.2354149E-03
79	-.2484518E-03	-.2479551E-03	-.2486549E-03	-.2479551E-03	-.2486587E-03
81	-.2574375E-03	-.2568304E-03	-.2576964E-03	-.2568304E-03	-.2576965E-03
83	-.2612391E-03	-.2605093E-03	-.2615545E-03	-.2605094E-03	-.2615546E-03
85	-.2587812E-03	-.2579171E-03	-.2591583E-03	-.2579171E-03	-.2591583E-03
87	-.2488910E-03	-.2478782E-03	-.2493320E-03	-.2478783E-03	-.2493320E-03
89	-.2302938E-03	-.2291169E-03	-.2307595E-03	-.2291169E-03	-.2307596E-03
91	-.2016161E-03	-.2002597E-03	-.2021868E-03	-.2002598E-03	-.2021867E-03
93	-.1613998E-03	-.1598406E-03	-.1620263E-03	-.1598406E-03	-.1620263E-03
95	-.1080885E-02	-.1063071E-03	-.1097584E-03	-.1063071E-03	-.1119783E-03
97	-.4005945E-04	-.4581822E-04	-.4078292E-04	-.2535423E-04	-.1826709E-04

ENSAIO DE AFERICAÇÃO PARA N= 52 - REDE DUAL

PONTC	ANALITICO	R O T A C O E S			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1655701E-03	-.1655704E-03	-.1655701E-03	-.1655703E-03
3	-.1657027E-03	-.1655687E-03	-.1655698E-03	-.1655687E-03	-.1655698E-03
5	-.1656561E-03	-.1655565E-03	+.1655626E-03	-.1655565E-03	-.1655626E-03
7	-.1656462E-03	-.1655079E-03	+.1655190E-03	-.1655079E-03	-.1655190E-03
9	-.1655317E-03	-.1653925E-03	-.1654091E-03	-.1653925E-03	-.1654092E-03
11	-.1653186E-03	-.1651772E-03	-.1651996E-03	-.1651772E-03	-.1651996E-03
13	-.1649715E-03	-.1648272E-03	-.1648561E-03	-.1648272E-03	-.1648562E-03
15	-.1644509E-03	-.1643039E-03	-.1643402E-03	-.1643039E-03	-.1643402E-03
17	-.1637142E-03	-.1635626E-03	-.1636062E-03	-.1635626E-03	-.1636061E-03
19	-.1627150E-03	-.1625594E-03	-.1626115E-03	-.1625593E-03	-.1626114E-03
21	-.1614941E-03	-.1612435E-03	-.1613047E-03	-.1612434E-03	-.1613046E-03
23	-.1597291E-03	-.1595608E-03	-.1596307E-03	-.1595609E-03	-.1596308E-03
25	-.1576348E-03	-.1574585E-03	-.1575382E-03	-.1574584E-03	-.1575382E-03
27	-.1550636E-03	-.1548771E-03	-.1549669E-03	-.1548770E-03	-.1549667E-03
29	-.1519557E-03	-.1517570E-03	-.1518566E-03	-.1517571E-03	-.1518567E-03
31	-.1482492E-03	-.1480397E-03	-.1481497E-03	-.1480397E-03	-.1481497E-03
33	-.1428835E-03	-.1436618E-03	-.1437821E-03	-.1436618E-03	-.1437819E-03
35	-.1387940E-03	-.1385615E-03	-.1386922E-03	-.1385616E-03	-.1386925E-03
37	-.1329187E-03	-.1326769E-03	-.1328174E-03	-.1326768E-03	-.1328175E-03
39	-.1261965E-03	-.1259483E-03	-.1259985E-03	-.1259483E-03	-.1259987E-03
41	-.1185687E-03	-.1183181E-03	-.1184779E-03	-.1183181E-03	-.1184779E-03
43	-.1099800E-03	-.1097283E-03	-.1098965E-03	-.1097283E-03	-.1098963E-03
45	-.1003802E-03	-.1001293E-03	-.1003052E-03	-.1001293E-03	-.1003054E-03
47	-.8972549E-04	-.8947500E-04	-.8965615E-04	-.8947488E-04	-.8965583E-04
49	-.7758034E-04	-.7713245E-04	-.7791779E-04	-.7713234E-04	-.7791795E-04
51	-.6511930E-04	-.6487689E-04	-.6506467E-04	-.6487709E-04	-.6506490E-04
53	-.5112939E-04	-.5089345E-04	-.5108086E-04	-.5089366E-04	-.5108106E-04
55	-.3601187E-04	-.3578429E-04	-.3596928E-04	-.3578408E-04	-.3596939E-04
57	-.1978536E-04	-.1956554E-04	-.1974406E-04	-.1956533E-04	-.1974424E-04
59	-.2488025E-05	-.2274990E-05	-.2442980E-05	-.2274990E-05	-.2442903E-05
61	.1581824E-04	.1602381E-04	.1587054E-04	.1602370E-04	.1587080E-04
63	.3504840E-04	.3524221E-04	.3510779E-04	.3524230E-04	.3510778E-04
65	.5508465E-04	.5526677E-04	.5515756E-04	.5526676E-04	.5515746E-04
67	.7577881E-04	.7594780E-04	.7586963E-04	.7594748E-04	.7586951E-04
69	.9654653E-04	.9709901E-04	.9705839E-04	.9709889E-04	.9705841E-04
71	.1183624E-03	.1184948E-03	.1184991E-03	.1184950E-03	.1184990E-03
73	.1397584E-03	.1398657E-03	.1399225E-03	.1398658E-03	.1399225E-03
75	.1608185E-03	.1608951E-03	.1610134E-03	.1608951E-03	.1610133E-03
77	.1811750E-03	.1812135E-03	.1814024E-03	.1812134E-03	.1814027E-03
79	.2004058E-03	.2003984E-03	.2006679E-03	.2003983E-03	.2006682E-03
81	.2182028E-03	.2179665E-03	.2183267E-03	.2179666E-03	.2183267E-03
83	.2335009E-03	.2333742E-03	.2338356E-03	.2333743E-03	.2338355E-03
85	.2462125E-03	.2460131E-03	.2465877E-03	.2460130E-03	.2465877E-03
87	.2594667E-03	.2592037E-03	.2599032E-03	.2592036E-03	.2599033E-03
89	.2605748E-03	.2601970E-03	.2610335E-03	.2601971E-03	.2610334E-03
91	.2606579E-03	.2601715E-03	.2611572E-03	.2601715E-03	.2611572E-03
93	.2548423E-03	.2542325E-03	.2553791E-03	.2542325E-03	.2553791E-03
95	.2421624E-03	.2414137E-03	.2427335E-03	.2414137E-03	.2427334E-03
97	.2215203E-03	.2206763E-03	.2221808E-03	.2206763E-03	.2221809E-03
99	.1919882E-03	.1909112E-03	.1926114E-03	.1909112E-03	.1926115E-03
101	.1522129E-03	.1509443E-03	.1528505E-03	.1509443E-03	.1528505E-03
103	.1010205E-03	.9954035E-04	.1016573E-03	.9954035E-04	.1046298E-03
105	.3712401E-04	.4210165E-04	.3776231E-04	.2360700E-04	.1697098E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 54 - REDE DUAL

PONTO	R O T A C Q E S W°				
	ANALITICC	APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1661102E-03	-.1661061E-03	-.1661102E-03	-.1661063E-03
3	-.1657087E-03	-.1661128E-03	-.1661157E-03	-.1661128E-03	-.1661156E-03
5	-.1656974E-03	-.1661026E-03	-.1661083E-03	-.1651026E-03	-.1661084E-03
7	-.1656534E-03	-.1660579E-03	-.1660677E-03	-.1660579E-03	-.1660677E-03
9	-.1655514E-03	-.1659547E-03	-.1659692E-03	-.1659547E-03	-.1659693E-03
11	-.1653624E-03	-.1657639E-03	-.1657839E-03	-.1657639E-03	-.1657839E-03
13	-.1650549E-03	-.1654534E-03	-.1654793E-03	-.1654534E-03	-.1654793E-03
15	-.1645943E-03	-.1649875E-03	-.1650196E-03	-.1645876E-03	-.1650196E-03
17	-.1639431E-03	-.1643295E-03	-.1643685E-03	-.1643295E-03	-.1643685E-03
19	-.1630602E-03	-.1634376E-03	-.1634838E-03	-.1634376E-03	-.1634838E-03
21	-.1619041E-03	-.1622684E-03	-.1623225E-03	-.1622685E-03	-.1623226E-03
23	-.1604272E-03	-.1607747E-03	-.1608368E-03	-.1607747E-03	-.1608368E-03
25	-.1585817E-03	-.1589080E-03	-.1589784E-03	-.1589080E-03	-.1589785E-03
27	-.1563176E-03	-.1566192E-03	-.1566987E-03	-.1566191E-03	-.1566984E-03
29	-.1535805E-03	-.1538543E-03	-.1539425E-03	-.1538543E-03	-.1539426E-03
31	-.1503121E-03	-.1505591E-03	-.1506567E-03	-.1505593E-03	-.1506567E-03
33	-.1464745E-03	-.1466784E-03	-.1467846E-03	-.1466784E-03	-.1467846E-03
35	-.1419937E-03	-.1421604E-03	-.1422762E-03	-.1421603E-03	-.1422762E-03
37	-.1368195E-03	-.1369475E-03	-.1370733E-03	-.1369474E-03	-.1370733E-03
39	-.1308966E-03	-.1309801E-03	-.1311140E-03	-.1309802E-03	-.1311141E-03
41	-.1241705E-03	-.1242094E-03	-.1243521E-03	-.1242094E-03	-.1243519E-03
43	-.1165902E-03	-.1165821E-03	-.1167332E-03	-.1165821E-03	-.1167334E-03
45	-.1081020E-03	-.1080469E-03	-.1082046E-03	-.1080469E-03	-.1082045E-03
47	-.9867869E-04	-.9856507E-04	-.9872943E-04	-.9856495E-04	-.9872932E-04
49	-.8826508E-04	-.8809802E-04	-.8826790E-04	-.8809812E-04	-.8826818E-04
51	-.7682657E-04	-.7661129E-04	-.7678397E-04	-.7661118E-04	-.7678413E-04
53	-.6437172E-04	-.6408882E-04	-.6426283E-04	-.6408848E-04	-.6426251E-04
55	-.5085944E-04	-.5052220E-04	-.5069595E-04	-.5052252E-04	-.5069592E-04
57	-.3630174E-04	-.3591370E-04	-.3608446E-04	-.3591370E-04	-.3608425E-04
59	-.2071506E-04	-.2028104E-04	-.2044589E-04	-.2028093E-04	-.2044585E-04
61	-.4132204E-05	-.3658319E-05	-.3814745E-05	-.3658533E-05	-.3814757E-05
63	.1339190E-04	.1390232E-04	.1375850E-04	.1390243E-04	.1375851E-04
65	.3178445E-04	.3232555E-04	.3219836E-04	.3232555E-04	.3219843E-04
67	.5094500E-04	.5151225E-04	.5140582E-04	.5151214E-04	.5140645E-04
69	.7074678E-04	.7133657E-04	.7125696E-04	.7133646E-04	.7125668E-04
71	.9103189E-04	.9163853E-04	.9159095E-04	.9163863E-04	.9159096E-04
73	.1116096E-03	.1122250E-03	.1122151E-03	.1122251E-03	.1122152E-03
75	.1322521E-03	.1328698E-03	.1329053E-03	.1328698E-03	.1329050E-03
77	.1526915E-03	.1533021E-03	.1533893E-03	.1533022E-03	.1533893E-03
79	.1726173E-03	.1732107E-03	.1733574E-03	.1732106E-03	.1733575E-03
81	.1916725E-03	.1922400E-03	.1924550E-03	.1922359E-03	.1924550E-03
83	.2094914E-03	.2099804E-03	.2102717E-03	.2099805E-03	.2102712E-03
85	.2254954E-03	.2259739E-03	.2263508E-03	.2259740E-03	.2263509E-03
87	.2392911E-03	.2397061E-03	.2401782E-03	.2397062E-03	.2401785E-03
89	.2502677E-03	.2506064E-03	.2511839E-03	.2506065E-03	.2511837E-03
91	.2577949E-03	.2580420E-03	.2587351E-03	.2580419E-03	.2587351E-03
93	.2611816E-03	.2613189E-03	.2621377E-03	.2613188E-03	.2621379E-03
95	.2596738E-03	.2596827E-03	.2606380E-03	.2596827E-03	.2606380E-03
97	.2524547E-03	.2523142E-03	.2534165E-03	.2523142E-03	.2534164E-03
99	.2386445E-03	.2383326E-03	.2395916E-03	.2383325E-03	.2395917E-03
101	.2173038E-03	.2167964E-03	.2182224E-03	.2167964E-03	.2182224E-03
103	.1874312E-03	.1867044E-03	.1883066E-03	.1867044E-03	.1883067E-03
105	.1479702E-03	.1469989E-03	.1487859E-03	.1469989E-03	.1487859E-03
107	.9781504E-04	.9657147E-04	.9854743E-04	.9657147E-04	.1014131E-03
109	.3581066E-04	.4049956E-04	.3645320E-04	.2284517E-04	.1640707E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 56 - REDE DUAL

PONTG	ANALITICO	R O T A C O E S M'			
		APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1653864E-03	-.1653855E-03	-.1653864E-03	-.1653855E-03
3	-.1657027E-03	-.1653868E-03	-.1653882E-03	-.1653868E-03	-.1653881E-03
5	-.1656982E-03	-.1653776E-03	-.1653825E-03	-.1653776E-03	-.1653826E-03
7	-.1656596E-03	-.1653387E-03	-.1653474E-03	-.1653387E-03	-.1653473E-03
9	-.1655683E-03	-.1652479E-03	-.1652608E-03	-.1652479E-03	-.1652608E-03
11	-.1653995E-03	-.1650800E-03	-.1650975E-03	-.1650800E-03	-.1650976E-03
13	-.1651263E-03	-.1648073E-03	-.1648300E-03	-.1648073E-03	-.1648300E-03
15	-.1647168E-03	-.1643987E-03	-.1644268E-03	-.1643987E-03	-.1644269E-03
17	-.1641325E-03	-.1638213E-03	-.1638553E-03	-.1638214E-03	-.1638552E-03
19	-.1633556E-03	-.1630399E-03	-.1630800E-03	-.1630399E-03	-.1630801E-03
21	-.1623301E-03	-.1620172E-03	-.1620642E-03	-.1620172E-03	-.1620641E-03
23	-.1610216E-03	-.1607126E-03	-.1607670E-03	-.1607125E-03	-.1607669E-03
25	-.1593875E-03	-.1590812E-03	-.1591428E-03	-.1590812E-03	-.1591429E-03
27	-.1573831E-03	-.1570804E-03	-.1571496E-03	-.1570803E-03	-.1571497E-03
29	-.1549622E-03	-.1546636E-03	-.1547412E-03	-.1546637E-03	-.1547413E-03
31	-.1520766E-03	-.1517812E-03	-.1518667E-03	-.1517812E-03	-.1518668E-03
33	-.1486774E-03	-.1483849E-03	-.1484788E-03	-.1483848E-03	-.1484787E-03
35	-.1447145E-03	-.1444247E-03	-.1445271E-03	-.1444247E-03	-.1445272E-03
37	-.1401376E-03	-.1398500E-03	-.1399605E-03	-.1398501E-03	-.1399608E-03
39	-.1348966E-03	-.1346122E-03	-.1347311E-03	-.1346123E-03	-.1347311E-03
41	-.1289422E-03	-.1286605E-03	-.1287877E-03	-.1286605E-03	-.1287878E-03
43	-.1222264E-03	-.1219450E-03	-.1220793E-03	-.1219449E-03	-.1220792E-03
45	-.1147038E-03	-.1144245E-03	-.1145657E-03	-.1144245E-03	-.1145654E-03
47	-.1063318E-03	-.1060568E-03	-.1062043E-03	-.1060569E-03	-.1062045E-03
49	-.9707239E-04	-.9680362E-04	-.9695586E-04	-.9680372E-04	-.9695592E-04
51	-.8689260E-04	-.8663617E-04	-.8679392E-04	-.8663615E-04	-.8679382E-04
53	-.7576609E-04	-.7552175E-04	-.7568234E-04	-.7552152E-04	-.7568231E-04
55	-.6367445E-04	-.6344471E-04	-.6360652E-04	-.6344471E-04	-.6360692E-04
57	-.5060877E-04	-.5039601E-04	-.5055756E-04	-.5039589E-04	-.5055730E-04
59	-.3657095E-04	-.3637767E-04	-.3653660E-04	-.3637777E-04	-.3653650E-04
61	-.2157592E-04	-.2140436E-04	-.2155907E-04	-.2140458E-04	-.2155894E-04
63	-.5652948E-05	-.5503797E-05	-.5649595E-05	-.5503462E-05	-.5650380E-05
65	-.1115176E-04	-.1127496E-04	-.1113916E-04	-.1127484E-04	-.1113953E-04
67	-.2877328E-04	-.2886782E-04	-.2874676E-04	-.2886759E-04	-.2874664E-04
69	-.4712582E-04	-.4718733E-04	-.4708407E-04	-.4718755E-04	-.4708384E-04
71	-.6609978E-04	-.6612601E-04	-.6604540E-04	-.6612611E-04	-.6604548E-04
73	-.8556042E-04	-.8554768E-04	-.8549410E-04	-.8554757E-04	-.8549438E-04
75	-.1053440E-03	-.1052911E-03	-.1052706E-03	-.1052910E-03	-.1052703E-03
77	-.1252560E-03	-.1251587E-03	-.1251766E-03	-.1251588E-03	-.1251765E-03
79	-.1450683E-03	-.1449202E-03	-.1449809E-03	-.1449203E-03	-.1449811E-03
81	-.1645165E-03	-.1643162E-03	-.1644281E-03	-.1643162E-03	-.1644280E-03
83	-.1832971E-03	-.1830402E-03	-.1832099E-03	-.1830402E-03	-.1832104E-03
85	-.2010658E-03	-.2007457E-03	-.2009793E-03	-.2007458E-03	-.2009794E-03
87	-.2174329E-03	-.2170497E-03	-.2173563E-03	-.2170496E-03	-.2173562E-03
89	-.2319636E-03	-.2315148E-03	-.2319021E-03	-.2315146E-03	-.2319021E-03
91	-.2441741E-03	-.2436558E-03	-.2441319E-03	-.2436557E-03	-.2441320E-03
93	-.2535297E-03	-.2529403E-03	-.2535144E-03	-.2529405E-03	-.2535142E-03
95	-.2594446E-03	-.2587814E-03	-.2594621E-03	-.2587814E-03	-.2594622E-03
97	-.2612778E-03	-.2605382E-03	-.2613347E-03	-.2605381E-03	-.2613346E-03
99	-.2583357E-03	-.2575162E-03	-.2584375E-03	-.2575162E-03	-.2584375E-03
101	-.2498703E-03	-.2489668E-03	-.2500219E-03	-.2489669E-03	-.2500219E-03
103	-.2350785E-03	-.2340868E-03	-.2352844E-03	-.2340869E-03	-.2352844E-03
105	-.2131061E-03	-.2120214E-03	-.2133702E-03	-.2120213E-03	-.2133701E-03
107	-.1830464E-03	-.1818631E-03	-.1833710E-03	-.1818630E-03	-.1833710E-03
109	-.1439454E-03	-.1426572E-03	-.1443315E-03	-.1426572E-03	-.1443315E-03
111	-.9480584E-04	-.9340543E-04	-.9524972E-04	-.9340541E-04	-.9800601E-04
113	-.3459055E-04	-.3887576E-04	-.3510221E-04	-.2204686E-04	-.1581983E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 60 - REDE DUAL

PONTO	R O T A C O E S				
	ANALITICO	APRXX. A	APRXX. B	APRXX. C	APRXX. D
1		-.1655628E-03	-.1655637E-03	-.1655628E-03	-.1655637E-03
3	-.1657028E-03	-.1655623E-03	-.1655627E-03	-.1655623E-03	-.1655629E-03
5	-.1657007E-03	-.1655550E-03	-.1655590E-03	-.1655550E-03	-.1655590E-03
7	-.1656690E-03	-.1655234E-03	-.1655305E-03	-.1655234E-03	-.1655306E-03
9	-.1655956E-03	-.1654485E-03	-.1654585E-03	-.1654485E-03	-.1654586E-03
11	-.1654602E-03	-.1653132E-03	-.1653271E-03	-.1653132E-03	-.1653271E-03
13	-.1652407E-03	-.1650944E-03	-.1651128E-03	-.1650944E-03	-.1651128E-03
15	-.1649130E-03	-.1647653E-03	-.1647877E-03	-.1647653E-03	-.1647876E-03
17	-.1644909E-03	-.1643021E-03	-.1643293E-03	-.1643021E-03	-.1643292E-03
19	-.1638265E-03	-.1636759E-03	-.1637082E-03	-.1636759E-03	-.1637082E-03
21	-.1630099E-03	-.1628553E-03	-.1628925E-03	-.1628554E-03	-.1628927E-03
23	-.1619692E-03	-.1618116E-03	-.1618544E-03	-.1618114E-03	-.1618544E-03
25	-.1606710E-03	-.1605105E-03	-.1605596E-03	-.1605104E-03	-.1605595E-03
27	-.1590904E-03	-.1589152E-03	-.1589700E-03	-.1589153E-03	-.1589699E-03
29	-.1571606E-03	-.1569904E-03	-.1570516E-03	-.1569905E-03	-.1570517E-03
31	-.1548737E-03	-.1546978E-03	-.1547656E-03	-.1546979E-03	-.1547659E-03
33	-.1521806E-03	-.1519983E-03	-.1520728E-03	-.1519983E-03	-.1520728E-03
35	-.1490418E-03	-.1488517E-03	-.1489331E-03	-.1488516E-03	-.1489329E-03
37	-.1454162E-03	-.1452171E-03	-.1453047E-03	-.1452172E-03	-.1453045E-03
39	-.1412631E-03	-.1410572E-03	-.1411516E-03	-.1410572E-03	-.1411516E-03
41	-.1369416E-03	-.1363306E-03	-.1364320E-03	-.1363306E-03	-.1364322E-03
43	-.1312114E-03	-.1309962E-03	-.1311041E-03	-.1309962E-03	-.1311041E-03
45	-.1252331E-03	-.1250145E-03	-.1251290E-03	-.1250145E-03	-.1251289E-03
47	-.1186667E-03	-.1183466E-03	-.1184673E-03	-.1183464E-03	-.1184665E-03
49	-.1111826E-03	-.1109555E-03	-.1110814E-03	-.1109555E-03	-.1110814E-03
51	-.1030417E-03	-.1028076E-03	-.1029381E-03	-.1028078E-03	-.1029386E-03
53	-.9411648E-04	-.9387624E-04	-.9401083E-04	-.9387636E-04	-.9401086E-04
55	-.8438194E-04	-.8413589E-04	-.8427398E-04	-.8413577E-04	-.8427407E-04
57	-.7381821E-04	-.7356655E-04	-.7370627E-04	-.7356644E-04	-.7370643E-04
59	-.6241120E-04	-.6215787E-04	-.6229877E-04	-.6215810E-04	-.6229852E-04
61	-.5015641E-04	-.4990304E-04	-.5004376E-04	-.4990291E-04	-.5004403E-04
63	-.3705439E-04	-.3680385E-04	-.3694272E-04	-.3680372E-04	-.3694234E-04
65	-.2311763E-04	-.2287245E-04	-.2300751E-04	-.2287245E-04	-.2300742E-04
67	-.8369238E-05	-.8131385E-05	-.8260071E-05	-.8131503E-05	-.8259745E-05
69	-.7155107E-05	-.7381797E-05	-.7381156E-05	-.7381916E-05	-.7261276E-05
71	-.2340609E-04	-.2361774E-04	-.2350777E-04	-.2361774E-04	-.2350747E-04
73	-.4021839E-04	-.4051495E-04	-.4041832E-04	-.4051494E-04	-.4041879E-04
75	-.5780588E-04	-.5799115E-04	-.5791240E-04	-.5799150E-04	-.5791222E-04
77	-.7577939E-04	-.7594084E-04	-.7568178E-04	-.7594061E-04	-.7568195E-04
79	-.9410501E-04	-.9424424E-04	-.9420859E-04	-.9424399E-04	-.9420879E-04
81	-.1126420E-03	-.1127626E-03	-.1127562E-03	-.1127627E-03	-.1127560E-03
83	-.1312221E-03	-.1313202E-03	-.1313460E-03	-.1313202E-03	-.1313455E-03
85	-.1495600E-03	-.1497238E-03	-.1497856E-03	-.1497238E-03	-.1497857E-03
87	-.1677025E-03	-.1677554E-03	-.1678607E-03	-.1677554E-03	-.1678610E-03
89	-.1851266E-03	-.1851540E-03	-.1853072E-03	-.1851539E-03	-.1853073E-03
91	-.2016371E-03	-.2016329E-03	-.2018390E-03	-.2016330E-03	-.2018393E-03
93	-.2169150E-03	-.2168752E-03	-.2171404E-03	-.2168751E-03	-.2171403E-03
95	-.2306072E-03	-.2305264E-03	-.2308568E-03	-.2305264E-03	-.2308567E-03
97	-.2423228E-03	-.2421949E-03	-.2425968E-03	-.2421949E-03	-.2425971E-03
99	-.2516328E-03	-.2514514E-03	-.2519316E-03	-.2514512E-03	-.2519315E-03
101	-.2580686E-03	-.2578268E-03	-.2583917E-03	-.2578269E-03	-.2583914E-03
103	-.2611218E-03	-.2608132E-03	-.2614695E-03	-.2608132E-03	-.2614695E-03
105	-.2602434E-03	-.2598610E-03	-.2606162E-03	-.2598610E-03	-.2606162E-03
107	-.2548421E-03	-.2543780E-03	-.2552386E-03	-.2543781E-03	-.2552385E-03
109	-.2442861E-03	-.2437318E-03	-.2447045E-03	-.2437318E-03	-.2447046E-03
111	-.2279024E-03	-.2272493E-03	-.2283409E-03	-.2272493E-03	-.2283409E-03
113	-.2049799E-03	-.2042180E-03	-.2054346E-03	-.2042180E-03	-.2054346E-03
115	-.1747677E-03	-.1738971E-03	-.1752347E-03	-.1738972E-03	-.1752347E-03
117	-.1364806E-03	-.1354711E-03	-.1369551E-03	-.1354711E-03	-.1369551E-03
119	-.8930099E-04	-.8915138E-04	-.8977439E-04	-.8915137E-04	-.8977439E-04
121	-.3238297E-04	-.3617115E-04	-.3285563E-04	-.3617115E-04	-.3285563E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 62 - REDE DUAL

PONTC	R O T A C O E S				
	ANALITICC	APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1655072E-03	-.1655071E-03	-.1655072E-03	-.1655072E-03
3	-.1657089E-03	-.1655062E-03	-.1655070E-03	-.1655062E-03	-.1655069E-03
5	-.1657016E-03	-.1654991E-03	-.1655025E-03	-.1654991E-03	-.1655025E-03
7	-.1656729E-03	-.1654715E-03	-.1654778E-03	-.1654715E-03	-.1654778E-03
9	-.1656064E-03	-.1654063E-03	-.1654155E-03	-.1654063E-03	-.1654155E-03
11	-.1654845E-03	-.1652858E-03	-.1652985E-03	-.1652857E-03	-.1652985E-03
13	-.1652866E-03	-.1650891E-03	-.1651050E-03	-.1650890E-03	-.1651051E-03
15	-.1649919E-03	-.1647972E-03	-.1648170E-03	-.1647972E-03	-.1648170E-03
17	-.1645745E-03	-.1643860E-03	-.1644105E-03	-.1643860E-03	-.1644106E-03
19	-.1640155E-03	-.1638275E-03	-.1638557E-03	-.1638274E-03	-.1638555E-03
21	-.1632824E-03	-.1630997E-03	-.1631329E-03	-.1630998E-03	-.1631329E-03
23	-.1623488E-03	-.1621726E-03	-.1622112E-03	-.1621727E-03	-.1622114E-03
25	-.1611848E-03	-.1610137E-03	-.1610571E-03	-.1610138E-03	-.1610571E-03
27	-.1597593E-03	-.1595937E-03	-.1596427E-03	-.1595937E-03	-.1596425E-03
29	-.1580395E-03	-.1578805E-03	-.1579353E-03	-.1578804E-03	-.1579355E-03
31	-.1559515E-03	-.1558378E-03	-.1558985E-03	-.1558377E-03	-.1558984E-03
33	-.1535805E-03	-.1534315E-03	-.1534979E-03	-.1534315E-03	-.1534980E-03
35	-.1507705E-03	-.1506270E-03	-.1506595E-03	-.1506271E-03	-.1506993E-03
37	-.1475252E-03	-.1473274E-03	-.1474665E-03	-.1473274E-03	-.1474666E-03
39	-.1438073E-03	-.1436725E-03	-.1437576E-03	-.1436725E-03	-.1437578E-03
41	-.1395800E-03	-.1394454E-03	-.1395371E-03	-.1394460E-03	-.1395367E-03
43	-.1348063E-03	-.1346721E-03	-.1347692E-03	-.1346720E-03	-.1347694E-03
45	-.1294459E-03	-.1293155E-03	-.1294183E-03	-.1293155E-03	-.1294184E-03
47	-.1234754E-03	-.1233421E-03	-.1234513E-03	-.1233421E-03	-.1234509E-03
49	-.1168491E-03	-.1167131E-03	-.1168273E-03	-.1167131E-03	-.1168271E-03
51	-.1095390E-03	-.1093998E-03	-.1095184E-03	-.1093998E-03	-.1095187E-03
53	-.1015160E-03	-.1013739E-03	-.1014969E-03	-.1013739E-03	-.1014969E-03
55	-.9275395E-04	-.9260894E-04	-.9273519E-04	-.9260917E-04	-.9273521E-04
57	-.8323092E-04	-.8308530E-04	-.8321482E-04	-.8308541E-04	-.8321489E-04
59	-.7292960E-04	-.7278523E-04	-.7291672E-04	-.7278485E-04	-.7291693E-04
61	-.6183828E-04	-.6169581E-04	-.6182847E-04	-.6169543E-04	-.6182787E-04
63	-.4995170E-04	-.4981112E-04	-.4994335E-04	-.4981123E-04	-.4994329E-04
65	-.3727234E-04	-.3713374E-04	-.3726308E-04	-.3713374E-04	-.3726342E-04
67	-.2321058E-04	-.2307921E-04	-.2308559E-04	-.2307921E-04	-.2308553E-04
69	-.9588153E-05	-.9465255E-05	-.9586589E-05	-.9465377E-05	-.9586307E-05
71	-.5244852E-05	-.5476713E-05	-.5362831E-05	-.5476713E-05	-.5363399E-05
73	-.2100406E-04	-.2110161E-04	-.2099733E-04	-.2110173E-04	-.2099690E-04
75	-.3727269E-04	-.3735362E-04	-.3726155E-04	-.3735350E-04	-.3726133E-04
77	-.5409868E-04	-.5415960E-04	-.5408187E-04	-.5415959E-04	-.5408189E-04
79	-.7135386E-04	-.7143195E-04	-.7137145E-04	-.7143182E-04	-.7137154E-04
81	-.8905226E-04	-.8906682E-04	-.8902770E-04	-.8906669E-04	-.8902767E-04
83	-.1069479E-03	-.1069367E-03	-.1069228E-03	-.1069368E-03	-.1069231E-03
85	-.1249349E-03	-.1248913E-03	-.1249045E-03	-.1248912E-03	-.1249043E-03
87	-.1428446E-03	-.1427671E-03	-.1428124E-03	-.1427671E-03	-.1428122E-03
89	-.1604822E-03	-.1603720E-03	-.1604542E-03	-.1603719E-03	-.1604545E-03
91	-.1776328E-03	-.1774832E-03	-.1776062E-03	-.1774832E-03	-.1776062E-03
93	-.1940466E-03	-.1938565E-03	-.1940251E-03	-.1938564E-03	-.1940254E-03
95	-.2094506E-03	-.2092175E-03	-.2094370E-03	-.2092176E-03	-.2094369E-03
97	-.2235392E-03	-.2232618E-03	-.2235373E-03	-.2232619E-03	-.2235372E-03
99	-.2359757E-03	-.2356535E-03	-.2359911E-03	-.2356534E-03	-.2359911E-03
101	-.2463910E-03	-.2460201E-03	-.2464246E-03	-.2460200E-03	-.2464246E-03
103	-.2543813E-03	-.2539606E-03	-.2544382E-03	-.2539607E-03	-.2544381E-03
105	-.2595081E-03	-.2590364E-03	-.2595931E-03	-.2590365E-03	-.2595932E-03
107	-.2612970E-03	-.2607710E-03	-.2614129E-03	-.2607710E-03	-.2614130E-03
109	-.2592385E-03	-.2586539E-03	-.2593870E-03	-.2586539E-03	-.2593867E-03
111	-.2527860E-03	-.2521385E-03	-.2529686E-03	-.2521385E-03	-.2529685E-03
113	-.2413572E-03	-.2406428E-03	-.2415761E-03	-.2406428E-03	-.2415761E-03
115	-.2243344E-03	-.2235475E-03	-.2245894E-03	-.2235475E-03	-.2245894E-03
117	-.2010652E-03	-.2002005E-03	-.2013567E-03	-.2002005E-03	-.2013566E-03
119	-.1708645E-03	-.1699166E-03	-.1711922E-03	-.1699166E-03	-.1711922E-03
121	-.1320165E-03	-.1319791E-03	-.1333788E-03	-.1319791E-03	-.1333788E-03
123	-.8677744E-04	-.8564359E-04	-.8716944E-04	-.8564358E-04	-.8965924E-04
125	-.3137926E-04	-.3491978E-04	-.3180504E-04	-.2009389E-04	-.1438432E-04

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 64 - REDE DUAL

PUNTO	R O T A C O E S W°				
	ANALITICO	APROX. A	APROX. B	APROX. C	APROX. D
1		-.1645605E-03	-.1645615E-03	-.1645605E-03	-.1645615E-03
3	-.1657089E-03	-.1645601E-03	-.1645603E-03	-.1645601E-03	-.1645604E-03
5	-.1657023E-03	-.1645544E-03	-.1645576E-03	-.1645544E-03	-.1645577E-03
7	-.1656763E-03	-.1645291E-03	-.1645347E-03	-.1645291E-03	-.1645346E-03
9	-.1656162E-03	-.1644706E-03	-.1644788E-03	-.1644705E-03	-.1644789E-03
11	-.1655058E-03	-.1643625E-03	-.1643736E-03	-.1643625E-03	-.1643736E-03
13	-.1653271E-03	-.1641878E-03	-.1642022E-03	-.1641878E-03	-.1642022E-03
15	-.1650608E-03	-.1639266E-03	-.1639443E-03	-.1639266E-03	-.1639445E-03
17	-.1646840E-03	-.1635588E-03	-.1635801E-03	-.1635588E-03	-.1635802E-03
19	-.1641802E-03	-.1630626E-03	-.1630877E-03	-.1630627E-03	-.1630877E-03
21	-.1635197E-03	-.1624149E-03	-.1624448E-03	-.1624149E-03	-.1624447E-03
23	-.1626790E-03	-.1615879E-03	-.1616218E-03	-.1615879E-03	-.1616220E-03
25	-.1616316E-03	-.1605574E-03	-.1605954E-03	-.1605574E-03	-.1605953E-03
27	-.1602493E-03	-.1592981E-03	-.1593422E-03	-.1592982E-03	-.1593423E-03
29	-.1528030E-03	-.1577740E-03	-.1578222E-03	-.1577738E-03	-.1578222E-03
31	-.1569624E-03	-.1559608E-03	-.1560146E-03	-.1559608E-03	-.1560147E-03
33	-.1547959E-03	-.1538248E-03	-.1538842E-03	-.1538249E-03	-.1538841E-03
35	-.1522715E-03	-.1513321E-03	-.1513966E-03	-.1513321E-03	-.1513964E-03
37	-.1453561E-03	-.1484520E-03	-.1485225E-03	-.1484520E-03	-.1485223E-03
39	-.1450164E-03	-.1451492E-03	-.1452251E-03	-.1451492E-03	-.1452250E-03
41	-.1422187E-03	-.1413919E-03	-.1414739E-03	-.1413920E-03	-.1414738E-03
43	-.1379293E-03	-.1371433E-03	-.1372305E-03	-.1371432E-03	-.1372307E-03
45	-.1331148E-03	-.1323715E-03	-.1324638E-03	-.1323715E-03	-.1324637E-03
47	-.1277424E-03	-.1270462E-03	-.1271437E-03	-.1270462E-03	-.1271436E-03
49	-.1217603E-03	-.1211365E-03	-.1212393E-03	-.1211365E-03	-.1212394E-03
51	-.1151983E-03	-.1146084E-03	-.1147154E-03	-.1146085E-03	-.1147155E-03
53	-.1075680E-03	-.1074371E-03	-.1075489E-03	-.1074371E-03	-.1075490E-03
55	-.1000633E-03	-.9959527E-04	-.9971052E-04	-.9959513E-04	-.9971028E-04
57	-.9146133E-04	-.9106065E-04	-.9117901E-04	-.9106063E-04	-.9117908E-04
59	-.8214246E-04	-.8181611E-04	-.8193721E-04	-.8181635E-04	-.8193743E-04
61	-.7269172E-04	-.7184372E-04	-.7196616E-04	-.7184346E-04	-.7196632E-04
63	-.6129891E-04	-.6113587E-04	-.6126035E-04	-.6113586E-04	-.6126052E-04
65	-.4975975E-04	-.4968071E-04	-.4980398E-04	-.4968109E-04	-.4980381E-04
67	-.3747646E-04	-.3748665E-04	-.3760840E-04	-.3748626E-04	-.3760858E-04
69	-.2445917E-04	-.2456245E-04	-.2468242E-04	-.2456207E-04	-.2468227E-04
71	-.1072554E-04	-.1091919E-04	-.1103325E-04	-.1091919E-04	-.1103295E-04
73	.3595065E-05	.3409195E-05	.3301048E-05	.3408813E-05	.3300374E-05
75	.1876535E-04	.1838760E-04	.1828728E-04	.1838735E-04	.1828764E-04
77	.3443471E-04	.3396759E-04	.3387515E-04	.3396759E-04	.3387916E-04
79	.5064010E-04	.5007935E-04	.5000292E-04	.5007934E-04	.5000267E-04
81	.6730371E-04	.6664886E-04	.6658751E-04	.6664886E-04	.6658773E-04
83	.8432324E-04	.8358689E-04	.8354441E-04	.8358713E-04	.8354399E-04
85	.1016169E-03	.1007805E-03	.1007592E-03	.1007807E-03	.1007591E-03
87	.1190320E-03	.1181023E-03	.1181049E-03	.1181020E-03	.1181051E-03
89	.1364292E-03	.1354073E-03	.1354380E-03	.1354072E-03	.1354375E-03
91	.1536385E-03	.1525292E-03	.1525914E-03	.1525291E-03	.1525516E-03
93	.1704731E-03	.1692776E-03	.1693748E-03	.1692774E-03	.1693753E-03
95	.1867174E-03	.1854416E-03	.1855783E-03	.1854416E-03	.1855784E-03
97	.2021348E-03	.2007843E-03	.2009652E-03	.2007843E-03	.2009654E-03
99	.2164594E-03	.2150410E-03	.2152699E-03	.2150411E-03	.2152696E-03
101	.2294008E-03	.2279232E-03	.2282057E-03	.2279233E-03	.2282057E-03
103	.2406389E-03	.2391098E-03	.2394507E-03	.2391098E-03	.2394510E-03
105	.2498247E-03	.2482502E-03	.2486539E-03	.2482500E-03	.2486538E-03
107	.2565775E-03	.2549686E-03	.2544096E-03	.2549686E-03	.2544096E-03
109	.2604869E-03	.2588535E-03	.2593996E-03	.2588537E-03	.2593995E-03
111	.2611115E-03	.2594627E-03	.2600870E-03	.2594627E-03	.2600871E-03
113	.2575765E-03	.2563259E-03	.2570350E-03	.2563259E-03	.2570350E-03
115	.2505761E-03	.2485351E-03	.2497339E-03	.2485351E-03	.2497339E-03
117	.2383728E-03	.2367517E-03	.2376450E-03	.2367517E-03	.2376450E-03
119	.2207978E-03	.2192091E-03	.2202022E-03	.2192091E-03	.2202023E-03
121	.1972533E-03	.1957078E-03	.1968055E-03	.1957078E-03	.1968055E-03
123	.1671104E-03	.1656203E-03	.1668270E-03	.1656203E-03	.1668269E-03
125	.1257167E-03	.1242930E-03	.1254130E-03	.1242930E-03	.1254130E-03
127	.8439241E-04	.8304567E-04	.8448087E-04	.8304567E-04	.8448490E-04
129	.3043733E-04	.3366556E-04	.3073756E-04	.1945187E-04	.1391549E-04

3.5.5 - Deslocamentos w Aproximados com Rede Habitual e Dual

A análise dos resultados provenientes destas discretizações para deslocamentos w , será desenvolvida segundo o esquema estabelecido no início do item 3.5 (apresentação dos resultados), isto é, para $n=6,12,24,40,48$, e outros.

Naturalmente não haveria interesse em analisar os resultados obtidos com aquelas subdivisões da altura H do reservatório, com as quais não se obtiverem bons resultados de M_x e ψ . Apesar disso, este fato será ignorado, pois procura-se agora verificar os seus comportamentos para o cálculo da grandeza w .

Para análise serão utilizados os seguintes critérios:

- a) Critério do erro relativo percentual, igual ao utilizado na análise dos M_x , isto é,

$$Er = \frac{|V_e| - |V_a|}{|\max V_e|}$$

- b) Critério do desvio

$$\Delta Er = |V_e| - |V_a|.$$

Aqui também, se $\Delta Er > 0$ o desvio é por falta e se $\Delta Er < 0$ é por excesso.

A análise desses resultados é desenvolvida, segundo o mesmo esquema utilizado para análise dos M_x . Isto é, para cada ensaio apresenta-se em seguida sua respectiva análise. Faz-se isto para fornecer melhores detalhes dessas discretizações, a fim de que sirvam de base de informação para as discretizações dessa grandeza feitas no capítulo 4.0.

ENSAIO DE AFERICAC PARA $n = 6$

PUNTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS w		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			.3426526
2	-.0927699	-.1068085	
3	-.6448535		-.6724509
4	-1.1924579	-1.1507611	
5	-1.7215819		-1.6875546
6	-2.2044711	-2.1585627	
7	-2.5571961		-2.5136843
8	-2.8403363	-2.8770928	
9	-2.8655505		-2.7298164
10	-2.6117349	-2.8548255	
11	-2.0549345		-1.8316903
12	-1.2555773	-1.6818244	
13	-.4240350		.0000000
14	.0000011	.0000000	

Com essa subdivisão da altura H do reservatório, ve rificam-se que os resultados obtidos, de maneira geral, por essas duas discretizações não são tão imprecisos. Inclusive já se percebe bem a fraca imposição de engastamento, conse guida com a discretização com rede habitual, considerando os valores de w obtidos nos pontos próximos ao engastamento. E a forte imposição de engastamento conseguida com a outra discretização (com rede dual), ao se impor deslocamento nulo também no ponto mais próximo ao engastamento (condição de Stiefengaste). Porém, ainda não dá para afirmar nada a res peito de qual das duas discretizações é a melhor, baseados somente nestes resultados.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12

PUNTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS w		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			.1629589
2	-.0927699	-.0953118	
3	-.3689353		-.3794163
4	-.6448535	-.6392559	
5	-.9198087		-.9217916
6	-1.1924579	-1.1811838	
7	-1.4607043		-1.4555202
8	-1.7215819	-1.7073586	
9	-1.9711595		-1.9597535
10	-2.2044706	-2.1918197	
11	-2.4154544		-2.3984332
12	-2.5971956	-2.5928473	
13	-2.7416587		-2.7191544
14	-2.8403363	-2.8530807	
15	-2.8844452		-2.8561935
16	-2.8655505	-2.9049325	
17	-2.7763515		-2.7410178
18	-2.6117339	-2.6849403	
19	-2.3700891		-2.3244495
20	-2.0549321	-2.1613350	
21	-1.6768253		-1.6148436
22	-1.2555745	-1.3788724	
23	-.8226982		-.7353886
24	-.4240338	-.5229250	
25	-.1223723		.0000000
26	.0000011	.0000000	

Com essa nova subdivisão da altura H do reservatório vê-se nitidamente que as aproximações obtidas para valores de w , são precisas, com os respectivos valores exatos. Os erros provenientes das discretizações não chegam a ser de 0.15 mm, verificando-se os maiores erros justamente nos pontos próximos ao engastamento, isto naturalmente devido aos tipos de imposições de engastamento perfeito.

Baseado nestes resultados vê-se que ambas discretizações já descrevem bem o comportamento da função dos deslocamentos do reservatório padrão (naturalmente sob aquele tipo de carga admitido). Note-se que, com a discretização com rede habitual obtêm-se w maiores no ponto 2 ($Er = -0,9\%$) e ($máx Er = -4,3\%$) entre os pontos 14 e o do engastamento, e w menores ($máx Er = +0,2\%$) entre o ponto 4 e o ponto 12. Enquanto que com a outra obtêm-se w maiores ($máx Er = -0,4\%$) entre os pontos 3 e 5 e, w menores ($máx Er = +3\%$) entre os pontos 7 e 23. Observe que não se considerou os w nos pontos 1 e 25, por o primeiro ser um ponto fictício e o seguno

do por ser afetado diretamente pela condição de contorno de Stiefengaste.

A fim de mostrar melhor a precisão que se obtém com esse tamanho de malha, observe-se que os desvios não são maiores que 0.2 mm, com ambas as discretizações.

ENSAIO DE AFERICAC PARA N=24

PONTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			.0409268
2	-.0927699	-.0933242	
3	-.2308598		-.2340190
4	-.3689353	-.3684418	
5	-.5069567		-.5089648
6	-.6448535	-.6434355	
7	-.7825192		-.7834642
8	-.9158087	-.9175622	
9	-1.0545336		-1.0565000
10	-1.1924577	-1.1895165	
11	-1.3272951		-1.3263581
12	-1.4607038	-1.4572489	
13	-1.5922863		-1.5905099
14	-1.7215819	-1.7178466	
15	-1.8480687		-1.8455050
16	-1.9711597	-1.9674432	
17	-2.0902004		-2.0868921
18	-2.2044716	-2.2011437	
19	-2.3131862		-2.3091679
20	-2.4154949	-2.4130011	
21	-2.5104876		-2.5057840
22	-2.5971561	-2.5960526	
23	-2.6746054		-2.6692305
24	-2.7416592	-2.7424483	
25	-2.7972698		-2.7912245
26	-2.8403363	-2.8436818	
27	-2.8697553		-2.8630180
28	-2.8844457	-2.8909783	
29	-2.8833675		-2.8758850
30	-2.8655510	-2.8758588	
31	-2.8301234		-2.8217959
32	-2.7763524	-2.7909117	
33	-2.7036710		-2.6943374
34	-2.6117353	-2.6308265	
35	-2.5004644		-2.4898853
36	-2.3700929	-2.3936877	
37	-2.2212343		-2.2090802
38	-2.0549374	-2.0825791	
39	-1.8727601		-1.8585978
40	-1.6768293	-1.7074833	
41	-1.4659345		-1.4532316
42	-1.2555838	-1.2874856	
43	-1.0380983		-1.0182478
44	-.8227074	-.8532248	
45	-.6156005		-.5919535
46	-.4240338	-.4495229	
47	-.2564203		-.2283939
48	-.1223712	-.1380718	
49	-.0328087		.0000000
50	.0000011	.0000000	

Com esse tamanho de malha ($h=40000/24$) vê-se que os erros E_r diminuíram sensivelmente. A discretização com rede habitual fornece valores de w com os seguintes máximos E_r por falta e por excesso: $+ 0,13\%$ e $- 1,1\%$. E a discretização com rede dual dão valores de w com os seguintes máximos E_r por falta e por excesso: $- 0,1\%$ e $+ 0,1\%$, sem considerar os valores de w nos pontos 1 e 49, pelos mesmos motivos citados anteriormente.

Por esses resultados nota-se que a discretização com rede dual apresenta melhores valores de w que a outra discretização. Porém, não se deve esquecer que se está impondo, nessa discretização, um forte tipo de engastamento, enquanto que na outra a imposição de engastamento é a usual; que mediante os resultados observa-se que é fraca, pois os w próximos ao engastamento são maiores que os reais.

Neste ensaio verificam-se que os w obtidos por essas duas discretizações apresentam valores com desvios não maiores que 0,03 mm. Precisão suficientemente boa em termos de deslocamento, porém insuficiente se se pensar em obter desses deslocamentos os esforços por meio de aproximações com diferenças finitas (pelo menos com as apresentadas neste trabalho).

A partir desse tamanho de malha, verificou-se que o seu refinamento em pouco foi melhorando os valores de w obtidos por essas discretizações. Como nos ensaios das outras grandezas, notou-se aqui também, que os resultados começaram a oscilar em torno dos exatos, após se ter atingido um certo tamanho de malha.

Com a discretização com rede habitual, os valores de w obtidos começam a oscilar a partir do tamanho de malha $h=40000/32$, verificado ao se comparar o valor de w no ponto 2 deste ensaio, com o obtido pelo ensaio seguinte com abertura de malha $h=40000/34$ neste mesmo ponto. Já com a discretização com rede dual, isto se torna mais difícil de verificar, uma vez que os pontos onde se calculam os w nunca coincidem; isto é, para cada ensaio calculam-se os w

sempre em novos pontos. Por isso, tentou-se como se fez na análise dos M_x aproximados com rede dual, verificar o valor de w no ponto mais próximo ao engastamento. Porém tal tentativa de nada adiantou, pois o valor de w nesse ponto foi sempre decrescendo à medida que se foi refinando a malha. O que já era esperado, visto que a diminuição do tamanho da malha, implica em se calcular o w num ponto cada vez mais próximo ao engastamento (no caso $3h/2$ acima da linha de engastamento). Com isso, adotou-se um outro critério, que foi o de verificar quando o valor de w no ponto $3(h/2)$ abaixo do coroamento) começa a oscilar em torno do exato. Com esse constatou-se a oscilação do valor de w a partir do tamanho de malha $h=40000/42$.

Como já se fez anteriormente, apresentam-se a seguir os resultados dos ensaios para $n=30, 32, 34, 40, 42$ e 44 , para mostrar os fatos acima observados. E para $n=48, 52, 54, 56, 26, 28, 60, 62, 64$ a fim de mostrar aqueles deslocamentos para os quais se analisaram os M_x e ψ , aproximados com rede habitual e dual.

Para esses ensaios os máximos desvios verificados são menores que os seguintes, (excluindo os valores de w nos pontos 1 e no mais próximo do engastamento, obtidos com rede dual).

n	REDE HABITUAL	REDE DUAL
26	-0.027	+0.025
28	-0.025	+0.022
30	-0.021	+0.020
32	-0.018	+0.017
34	-0.017	+0.015
40	-0.012	+0.011
42	-0.010	+0.010
44	-0.009	+0.010
48	-0.008	+0.008
52	-0.005	+0.007
54	-0.009	+0.007
56	-0.005	+0.006
60	-0.012	+0.006
62	-0.005	+0.005
64	-0.020	+0.020

Por esta tabela, observa-se que o refinamento da malha, nem sempre leva à obtenção de melhores valores de w com essas aproximações, fato este, que matematicamente deveria ocorrer, em vista da diminuição da ordem de grandeza do erro nas expressões em diferenças finitas.

ENSAIO DE AFERIÇÃO PARA $N = 26$

PONTA	DESLOCAMENTOS RADIAIS w		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			.0309802
2	-.0927699	-.0932455	
3	-.2202377		-.2230793
4	-.3476950	-.3473371	
5	-.4751136		-.4771387
6	-.6024426	-.6013384	
7	-.7296064		-.7308789
8	-.8565018	-.8547180	
9	-.9829956		-.9835761
10	-1.1089213	-1.1065502	
11	-1.2340765		-1.2340190
12	-1.3582218	-1.3553853	
13	-1.4810765		-1.4804280
14	-1.6023190	-1.5991740	
15	-1.7215812		-1.7203770
16	-1.8384511	-1.8351946	
17	-1.9524682		-1.9507358
18	-2.0631247	-2.0600009	
19	-2.1698637		-2.1676211
20	-2.2720819	-2.2693815	
21	-2.3691268		-2.3663821
22	-2.4603028	-2.4583683	
23	-2.5448704		-2.5416255
24	-2.6220522	-2.6212721	
25	-2.6910367		-2.6872840
26	-2.7509261	-2.7517905	
27	-2.8010416		-2.7967625
28	-2.8403354	-2.8431802	
29	-2.8680015		-2.8631625
30	-2.8831863	-2.8885293	
31	-2.8850675		-2.8796144
32	-2.8728700	-2.8811445	
33	-2.8458838		-2.8397303
34	-2.8034897	-2.8150582	
35	-2.7451830		-2.7382069
36	-2.6706018	-2.6857061	
37	-2.5795541		-2.5715837
38	-2.4720569	-2.4907565	
39	-2.3483734		-2.3391838
40	-2.2090440	-2.2311354	
41	-2.0549378		-2.0442381
42	-1.8872917	-1.9122286	
43	-1.7077656		-1.6952021
44	-1.5184803	-1.5452800	
45	-1.3220866		-1.3072498
46	-1.1218040	-1.1489546	
47	-.9214854		-.9039276
48	-.7256712	-.7510419	
49	-.5356472		-.5189151
50	-.3694844	-.3902438	
51	-.2221297		-.1978333
52	-.1054100	-.1179647	
53	-.0281056		.0000000
54	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAO PARA N° 28

PCNTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	LABITUAL	DUAL
1			.0224999
2	-.0927699	-.0932264	
3	-.2111730		-.2134984
4	-.3294884	-.3293031	
5	-.4478151		-.4494963
6	-.5660759	-.5653136	
7	-.6842155		-.6852611
8	-.8021588	-.8008652	
9	-.9198087		-.9202641
10	-1.0370445	-1.0352831	
11	-1.1537199		-1.1536276
12	-1.2696617	-1.2675159	
13	-1.3846676		-1.3840659
14	-1.4985046	-1.4960809	
15	-1.6109065		-1.6098304
16	-1.7215817	-1.7190113	
17	-1.8301926		-1.8286653
18	-1.9363739	-1.9338181	
19	-2.0397229		-2.0377684
20	-2.1398015	-2.1374545	
21	-2.2361350		-2.2337704
22	-2.3282137	-2.3263030	
23	-2.4154940		-2.4127312
24	-2.4974003	-2.4961877	
25	-2.5733252		-2.5701685
26	-2.6426349	-2.6424122	
27	-2.7046728		-2.7011204
28	-2.7587628	-2.7598481	
29	-2.8042154		-2.8002572
30	-2.8403354	-2.8430662	
31	-2.8664293		-2.8620439
32	-2.8818126	-2.8865271	
33	-2.8858247		-2.8809738
34	-2.8778348	-2.8848548	
35	-2.8572607		-2.8518839
36	-2.8235807	-2.8331828	
37	-2.7763519		-2.7703638
38	-2.7152276	-2.7276106	
39	-2.6399784		-2.6332626
40	-2.5505133	-2.5657592	
41	-2.4469023		-2.4393048
42	-2.3294110	-2.3474441	
43	-2.1985135		-2.1898355
44	-2.0549402	-2.0754671	
45	-1.8996837		-1.8896809
46	-1.7340655	-1.7565289	
47	-1.5597410		-1.5481274
48	-1.3787479	-1.4022584	
49	-1.1935527		-1.1800110
50	-1.0070670	-1.0303411	
51	-.8227049		-.8068950
52	-.6444110	-.6657255	
53	-.4767137		-.4583023
54	-.3247334	-.3418630	
55	-.1942509		-.1729614
56	-.0917328	-.1019367	
57	-.0243441		.0000000
58	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAO PARA N= 30

PONTIC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			.0152533
2	-.0927699	-.0929741	
3	-.2032422		-.2049681
4	-.3137087	-.3133105	
5	-.4241536		-.4251898
6	-.5345488	-.5335965	
7	-.6448532		-.6452360
8	-.7550106	-.7535388	
9	-.8649489		-.8647156
10	-.9745783	-.9726338	
11	-1.0837908		-1.0829763
12	-1.1924577	-1.1901002	
13	-1.3004298		-1.2990689
14	-1.4075360	-1.4048429	
15	-1.5135803		-1.5117033
16	-1.6183438	-1.6154101	
17	-1.7215815		-1.7192183
18	-1.8230231	-1.8199646	
19	-1.9223707		-1.9195483
20	-2.0193000	-2.0162559	
21	-2.1134596		-2.1102037
22	-2.2044702	-2.2016029	
23	-2.2919264		-2.2882619
24	-2.3753958	-2.3728967	
25	-2.4544215		-2.4503713
26	-2.5285225	-2.5266056	
27	-2.5971947		-2.5927820
28	-2.6599169	-2.6588221	
29	-2.7161484		-2.7113895
30	-2.7653270	-2.7653222	
31	-2.8069215		-2.8018312
32	-2.8403358	-2.8416696	
33	-2.8650155		-2.8595996
34	-2.8804049	-2.8833561	
35	-2.8859625		-2.8802190
36	-2.8811727	-2.8860044	
37	-2.8655505		-2.8594584
38	-2.8386545	-2.8455973	
39	-2.8001018		-2.7936254
40	-2.7495723	-2.7588062	
41	-2.6868296		-2.6799064
42	-2.6117330	-2.6233659	
43	-2.5242553		-2.5167961
44	-2.4244990	-2.4385281	
45	-2.3127155		-2.3045950
46	-2.1893215	-2.2056088	
47	-2.0549331		-2.0459900
48	-1.9103642	-1.9285924	
49	-1.7566810		-1.7467215
50	-1.5951989	-1.6148348	
51	-1.4275239		-1.4163139
52	-1.2555714	-1.2758250	
53	-1.0816021		-1.0688803
54	-.9082328	-.9280120	
55	-.7364821		-.7239736
56	-.5757849	-.5936731	
57	-.4240314		-.4074700
58	-.2875795	-.3017951	
59	-.1712964		-.1524445
60	-.0805530	-.0889326	
61	-.0212915		.0000000
62	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERIÇÃO PARA N=32

PCNTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			.0088006
2	-.0927699	-.0928558	
3	-.1963377		-.1977938
4	-.2999011	-.2994769	
5	-.4034479		-.4043884
6	-.5069567	-.5060600	
7	-.6103959		-.6108491
8	-.7137232	-.7123784	
9	-.8168833		-.8168766
10	-.9198086	-.9180516	
11	-1.0224173		-1.0219786
12	-1.1246123	-1.1224880	
13	-1.2262812		-1.2254376
14	-1.3272948	-1.3248591	
15	-1.4275064		-1.4262810
16	-1.5267503	-1.5240734	
17	-1.6248436		-1.6232600
18	-1.7215815	-1.7187464	
19	-1.8167410		-1.8148184
20	-1.9100776	-1.9071853	
21	-2.0013261		-1.9990816
22	-2.0901999	-2.0873694	
23	-2.1763916		-2.1738400
24	-2.2595744	-2.2569427	
25	-2.3393979		-2.3365488
26	-2.4154940	-2.4132161	
27	-2.4874763		-2.4843392
28	-2.5549388	-2.5531850	
29	-2.6174603		-2.6140375
30	-2.6746049	-2.6735659	
31	-2.7259250		-2.7222185
32	-2.7709627	-2.7708383	
33	-2.8092951		-2.8052635
34	-2.8403358	-2.8413363	
35	-2.8637395		-2.8594556
36	-2.8790083	-2.8813467	
37	-2.8896936		-2.8811040
38	-2.8833671	-2.8872485	
39	-2.8716240		-2.8667059
40	-2.8500881	-2.8556952	
41	-2.8184257		-2.8131480
42	-2.7763519	-2.7838368	
43	-2.7236266		-2.7179513
44	-2.6601214	-2.6695824	
45	-2.5857258		-2.5795689
46	-2.5004630	-2.5119271	
47	-2.4044495		-2.3977365
48	-2.2979178	-2.3113208	
49	-2.1812415		-2.1738672
50	-2.0549350	-2.0700941	
51	-1.9196886		-1.9115164
52	-1.7763934	-1.7929423	
53	-1.6260071		-1.6168888
54	-1.4699278	-1.4874535	
55	-1.3096430		-1.2993934
56	-1.1469254	-1.1646874	
57	-.9838281		-.9722468
58	-.8227049	-.8397878	
59	-.6662205		-.6531000
60	-.5173759	-.5326147	
61	-.3795312		-.3646763
62	-.2564214	-.2683818	
63	-.1521649		-.1354027
64	-.0712973	-.0782729	
65	-.0187792		.0000000
66	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFRICAC PARA N= 34

PONTIC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			.0026416
2	-.0927699	-.0931274	
3	-.1902455		-.1919353
4	-.2877178	-.2877614	
5	-.3851770		-.3865122
6	-.4826066	-.4823657	
7	-.5799823		-.5809850
8	-.6772708	-.6767631	
9	-.7744298		-.7751217
10	-.8714073	-.8706580	
11	-.9681401		-.9685411
12	-1.0645537	-1.0635939	
13	-1.1605618		-1.1606905
14	-1.2560656	-1.2549329	
15	-1.3509521		-1.3508255
16	-1.4450953	-1.4438357	
17	-1.5383546		-1.5379872
18	-1.6305740	-1.6292434	
19	-1.7215822		-1.7209859
20	-1.8111520	-1.8098569	
21	-1.8992009		-1.8983850
22	-1.9853885	-1.9841251	
23	-2.0695190		-2.0684905
24	-2.1513400	-2.1502366	
25	-2.2305822		-2.2293444
26	-2.3069606	-2.3061194	
27	-2.3801742		-2.3787303
28	-2.4499063	-2.4494405	
29	-2.5158277		-2.5141745
30	-2.5775928	-2.5776248	
31	-2.6348467		-2.6329803
32	-2.6872220	-2.6878886	
33	-2.7343431		-2.7322569
34	-2.7758279	-2.7772713	
35	-2.8112884		-2.8089700
36	-2.8403363	-2.8427062	
37	-2.8625836		-2.8600159
38	-2.8776488	-2.8810940	
39	-2.8851566		-2.8823161
40	-2.8847475	-2.8894143	
41	-2.8760781		-2.8729348
42	-2.8588281	-2.8648453	
43	-2.8327093		-2.8292251
44	-2.7974639	-2.8049407	
45	-2.7528815		-2.7490096
46	-2.6987972	-2.7078094	
47	-2.6351089		-2.6307893
48	-2.5617752	-2.5723495	
49	-2.4788318		-2.4739952
50	-2.3864059	-2.3985138	
51	-2.2847104		-2.2792678
52	-2.1740732	-2.1876082	
53	-2.0549378		-2.0487857
54	-1.9278753	-1.9426346	
55	-1.7936034		-1.7866228
56	-1.6529980	-1.6686637	
57	-1.5070982		-1.4991481
58	-1.3571277	-1.3732531	
59	-1.2045119		-1.1954513
60	-1.0508919	-1.0668783	
61	-.8981228		-.8877933
62	-.7483128	-.7633959	
63	-.6038266		-.5920756
64	-.4672893	-.4805140	
65	-.3416182		-.3283128
66	-.2300358	-.2402622	
67	-.1360632		-.1210917
68	-.0635497	-.0694348	
69	-.0166865		.0000000
70	.0000023	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 40

PONTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0117010
2	-.0927699	-.0931044	
3	-.1756243		-.1770712
4	-.2584770	-.2585462	
5	-.3413228		-.3424420
6	-.4241536	-.4239733	
7	-.5069567		-.5077591
8	-.5897156	-.5892935	
9	-.6724089		-.6729054
10	-.7550107	-.7543581	
11	-.8374895		-.8376889
12	-.9198086	-.9189376	
13	-1.0019252		-1.0018363
14	-1.0837908	-1.0827172	
15	-1.1653500		-1.1649806
16	-1.2465408	-1.2452817	
17	-1.3272948		-1.3266506
18	-1.4075358	-1.4061146	
19	-1.4871802		-1.4862680
20	-1.5661368	-1.5645802	
21	-1.6443064		-1.6431322
22	-1.7215815	-1.7199218	
23	-1.7978468		-1.7964177
24	-1.8729784	-1.8712552	
25	-1.9468429		-1.9451675
26	-2.0193000	-2.0175595	
27	-2.0901999		-2.0882878
28	-2.1593838	-2.1576796	
29	-2.2266841		-2.2245469
30	-2.2919269	-2.2903233	
31	-2.3545275		-2.3525796
32	-2.4154540	-2.4140611	
33	-2.4734282		-2.4708838
34	-2.5285230	-2.5273399	
35	-2.5805645		-2.5778441
36	-2.6293335	-2.6284823	
37	-2.6746049		-2.6717224
38	-2.7161489	-2.7157202	
39	-2.7537308		-2.7507010
40	-2.7871151	-2.7871976	
41	-2.8160629		-2.8128972
42	-2.8403358	-2.8410177	
43	-2.8596950		-2.8564000
44	-2.8739061	-2.8752747	
45	-2.8827367		-2.8793173
46	-2.8859625	-2.8881011	
47	-2.8833671		-2.8798237
48	-2.8747444	-2.8777313	
49	-2.8598995		-2.8562260
50	-2.8386555	-2.8425579	
51	-2.8108516		-2.8070345
52	-2.7763519	-2.7812252	
53	-2.7350402		-2.7310600
54	-2.6868305	-2.6927137	
55	-2.6316705		-2.6275010
56	-2.5695410	-2.5764513	
57	-2.5004630		-2.4960728
58	-2.4245019	-2.4324279	
59	-2.3417716		-2.3371205
60	-2.2524390	-2.2613373	
61	-2.1567321		-2.1517706
62	-2.0549350	-2.0647197	
63	-1.9474108		-1.9420853
64	-1.8345907	-1.8451266	
65	-1.7165898		-1.7112303
66	-1.5952067	-1.6063020	
67	-1.4659278		-1.4636602
68	-1.3419542	-1.3533626	
69	-1.2121804		-1.2053149
70	-1.0816078	-1.0930009	
71	-.9513648		-.9438188
72	-.8227049	-.8336887	
73	-.6970042		-.6886884
74	-.5757911	-.5858864	
75	-.4607191		-.4515434
76	-.3336050	-.3622500	
77	-.2564214		-.2463110
78	-.1712987	-.1778348	
79	-.1005303		-.0894236
80	-.0465988	-.0502840	
81	-.0121430		.0000000
82	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAO PARA N= 42

PCNTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0150558
2	-.0927699	-.0927918	
3	-.1716788		-.1726286
4	-.2505863	-.2503085	
5	-.3294284		-.3302015
6	-.4083780	-.4078128	
7	-.4872450		-.4877316
8	-.5660759	-.5652297	
9	-.6448534		-.6451221
10	-.7235560	-.7224401	
11	-.8021588		-.8022192
12	-.8806314	-.8792576	
13	-.9589399		-.9588026
14	-1.0370443	-1.0354278	
15	-1.1149001		-1.1145732
16	-1.1924577	-1.1906178	
17	-1.2696612		-1.2691526
18	-1.3464494	-1.3444078	
19	-1.4227550		-1.4220726
20	-1.4985042	-1.4962850	
21	-1.5736175		-1.5727675
22	-1.6480079	-1.6456394	
23	-1.7215822		-1.7205706
24	-1.7942407	-1.7917566	
25	-1.8658762		-1.8647082
26	-1.9363747	-1.9338100	
27	-2.0056152		-2.0042934
28	-2.0734696	-2.0708671	
29	-2.1398029		-2.1383290
30	-2.2044721	-2.2018781	
31	-2.2673283		-2.2657042
32	-2.3282151	-2.3256850	
33	-2.3869705		-2.3851972
34	-2.4434242	-2.4410167	
35	-2.4974017		-2.4954801
36	-2.5487218	-2.5465026	
37	-2.5971971		-2.5951304
38	-2.6426363	-2.6406789	
39	-2.6848445		-2.6826339
40	-2.7236214	-2.7220020	
41	-2.7587647		-2.7564149
42	-2.7900686	-2.7888651	
43	-2.8173285		-2.8148456
44	-2.8403363	-2.8396330	
45	-2.8588891		-2.8562737
46	-2.8727813	-2.8726559	
47	-2.8818135		-2.8790674
48	-2.8857908	-2.8863254	
49	-2.8845243		-2.8816447
50	-2.8778334	-2.8791046	
51	-2.8655496		-2.8625321
52	-2.8475118	-2.8495893	
53	-2.8235788		-2.8204136
54	-2.7936211	-2.7965679	
55	-2.7575316		-2.7542067
56	-2.7152238	-2.7190881	
57	-2.6666350		-2.6631289
58	-2.6117311	-2.6165438	
59	-2.5505061		-2.5467949
60	-2.4829922	-2.4887643	
61	-2.4092550		-2.4053059
62	-2.3294029	-2.3361173	
63	-2.2435875		-2.2393622
64	-2.1520119	-2.1596198	
65	-2.0549259		-2.0503821
66	-1.9526463	-1.9610655	
67	-1.8455408		-1.8406277
68	-1.7340503	-1.7431538	
69	-1.6186841		-1.6133444
70	-1.5000191	-1.5096362	
71	-1.3787344		-1.3729084
72	-1.2555680	-1.2654636	
73	-1.1313634		-1.1249833
74	-1.0070555	-1.0169466	
75	-.8836813		-.8766776

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 42

PONTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
76	-.7623817	-.7719165	
77	-.6444081		-.6367112
78	-.5311284	-.5398881	
79	-.4240303		-.4155765
80	-.3247300	-.3322261	
81	-.2379749		-.2256999
82	-.1566366	-.1622980	
83	-.0917316		-.0815948
84	-.0424280	-.0456222	
85	-.0110339		.0000000
86	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 44

PONTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0174352
2	-.0927699	-.0926383	
3	-.1680921		-.1675296
4	-.2434131	-.2429876	
5	-.3187295		-.3176246
6	-.3940357	-.3933266	
7	-.4693233		-.4676840
8	-.5445811	-.5435940	
9	-.6197947		-.6176300
10	-.6949470	-.6936896	
11	-.7700170		-.7673380
12	-.8449804	-.8434628	
13	-.9198087		-.9166262
14	-.9944698	-.9927022	
15	-1.0689275		-1.0652547
16	-1.1431408	-1.1411364	
17	-1.2170639		-1.2129164
18	-1.2906480	-1.2884233	
19	-1.3638370		-1.3592300
20	-1.4365718	-1.4341466	
21	-1.5087867		-1.5037384
22	-1.5804117	-1.5778098	
23	-1.6513705		-1.6459026
24	-1.7215817	-1.7188306	
25	-1.7909586		-1.7850916
26	-1.8594084	-1.8565383	
27	-1.9268317		-1.9205883
28	-1.9931242	-1.9901736	
29	-2.0581756		-2.0515814
30	-2.1218691	-2.1188812	
31	-2.1840835		-2.1771622
32	-2.2446895	-2.2417135	
33	-2.3039536		-2.2963343
34	-2.3605366	-2.3576279	
35	-2.4154940		-2.4080057
36	-2.4682755	-2.4654956	
37	-2.5187259		-2.5110002
38	-2.5666857	-2.5640965	
39	-2.6119909		-2.6040621
40	-2.6544752	-2.6521420	
41	-2.6939645		-2.6858630
42	-2.7302856	-2.7282748	
43	-2.7632623		-2.7550235
44	-2.7927160	-2.7910943	
45	-2.8184667		-2.8101239
46	-2.8403358	-2.8391728	
47	-2.8581448		-2.8497338
48	-2.8717151	-2.8710799	
49	-2.8808746		-2.8724318
50	-2.8854523	-2.8854113	
51	-2.8852820		-2.8768411
52	-2.8802061	-2.8802265	
53	-2.8700752		-2.8616724
54	-2.8547468	-2.8560853	
55	-2.8340926		-2.8257585

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 44

PONTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS		
	ANALITICO	HABITUAL	CUAL
56	-2.8079934	-2.8101044	
57	-2.7763495		-2.7681193
58	-2.7390776	-2.7420058	
59	-2.6961098		-2.6880054
60	-2.6474023	-2.6511803	
61	-2.5929365		-2.5849791
62	-2.5327163	-2.5373611	
63	-2.4667783		-2.4589796
64	-2.3951902	-2.4007001	
65	-2.3180485		-2.3104091
66	-2.2354970	-2.2418499	
67	-2.1477175		-2.1402225
68	-2.0549283	-2.0620646	
69	-1.9574029		-1.9500310
70	-1.8554685	-1.8633003	
71	-1.7454948		-1.7422054
72	-1.6399236	-1.6483252	
73	-1.5272481		-1.5199890
74	-1.4120319	-1.4208381	
75	-1.2949126		-1.2876203
76	-1.1765914	-1.1855879	
77	-1.0578566		-1.0504558
78	-.9395705	-.9485004	
79	-.8226907		-.8150983
80	-.7082576	-.7168102	
81	-.5974103		-.5895274
82	-.4913814	-.4991850	
83	-.3915020		-.3832287
84	-.2992198	-.3058596	
85	-.2160919		-.2073188
86	-.1437675	-.1487542	
87	-.0840353		-.0746666
88	-.0387964	-.0415921	
89	-.0100718		.0000000
90	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48

PONTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS		
	ANALITICO	HABITUAL	CUAL
1			-.0246989
2	-.0927699	-.0917788	
3	-.1618153		-.1624897
4	-.2308598	-.2296295	
5	-.2999011		-.3002803
6	-.3689353	-.3674719	
7	-.4379564		-.4380457
8	-.5069567	-.5052663	
9	-.5759263		-.5757314
10	-.6448532	-.6429410	
11	-.7137231		-.7132488
12	-.7825189	-.7803926	
13	-.8512216		-.8504729
14	-.9198086	-.9174778	
15	-.9882553		-.9872364
16	-1.0569336	-1.0540087	
17	-1.1246123		-1.1233273
18	-1.1924577	-1.1897528	
19	-1.2600322		-1.2584848
20	-1.3272951	-1.3244233	
21	-1.3942020		-1.3923955
22	-1.4607041	-1.4576831	
23	-1.5267508		-1.5246911
24	-1.5922861	-1.5891361	
25	-1.6572506		-1.6549425
26	-1.7215815	-1.7183273	
27	-1.7852113		-1.7826600
28	-1.8480682	-1.8447361	
29	-1.9100773		-1.9072905
30	-1.9711587	-1.9677794	
31	-2.0312290		-2.0282149
32	-2.0901995	-2.0868082	
33	-2.1479783		-2.1447477
34	-2.2044697	-2.2011027	

ENSAIO DE AFERICAO PARA N= 48

PCNTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
35	-2.2595735		-2.2561383
36	-2.2131847	-2.3098831	
37	-2.3651953		-2.3615718
38	-2.4154935	-2.4123001	
39	-2.4639635		-2.4601665
40	-2.5104856	-2.5074477	
41	-2.5549374		-2.5509877
42	-2.5971947	-2.5943608	
43	-2.6371269		-2.6330433
44	-2.6746044	-2.6720304	
45	-2.7094927		-2.7052979
46	-2.7416582	-2.7393956	
47	-2.7709627		-2.7666759
48	-2.7972689	-2.7953711	
49	-2.8204398		-2.8160820
50	-2.8403358	-2.8388548	
51	-2.8568201		-2.8524089
52	-2.8697553	-2.8687410	
53	-2.8790083		-2.8745604
54	-2.8844452	-2.8839455	
55	-2.8859396		-2.8814712
56	-2.8833671	-2.8834252	
57	-2.8766084		-2.8721285
58	-2.8655496	-2.8662052	
59	-2.8500872		-2.8456035
60	-2.8301234	-2.8314095	
61	-2.8055696		-2.8010855
62	-2.7763505	-2.7782955	
63	-2.7424006		-2.7379131
64	-2.7036691	-2.7062926	
65	-2.6601195		-2.6556258
66	-2.6117320	-2.6150484	
67	-2.5585065		-2.5539989
68	-2.5004606	-2.5044689	
69	-2.4376326		-2.4330997
70	-2.3700871	-2.3747802	
71	-2.2979136		-2.2933412
72	-2.2212272	-2.2265787	
73	-2.1401734		-2.1355414
74	-2.0549283	-2.0608950	
75	-1.9657040		-1.9609900
76	-1.8727477	-1.8792651	
77	-1.7763453		-1.7715161
78	-1.6768193	-1.6837969	
79	-1.5745389		-1.5695608
80	-1.4699204	-1.4772477	
81	-1.3634260		-1.3582575
82	-1.2555709	-1.2631011	
83	-1.1469181		-1.1415100
84	-1.0380912	-1.0456512	
85	-.9297689		-.9240752
86	-.8226975	-.8300841	
87	-.7176813		-.7116481
88	-.6155912	-.6225619	
89	-.5173714		-.5109448
90	-.4240314	-.4303092	
91	-.3366598		-.3297866
92	-.2564191	-.2616899	
93	-.1845519		-.1771786
94	-.1223723	-.1262888	
95	-.0712973		-.0633856
96	-.0328098	-.0349819	
97	-.0084863		.0000000
98	.0000046	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 52

PONTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0297678
2	-.0927699	-.0903175	
3	-.1565041		-.1571288
4	-.2202377	-.2170430	
5	-.2835690		-.2844889
6	-.3476950	-.3437632	
7	-.4114118		-.4118311
8	-.4751136	-.4704489	
9	-.5387933		-.5391164
10	-.6024424	-.5970507	
11	-.6660508		-.6662811
12	-.7296063	-.7234955	
13	-.7930951		-.7932351
14	-.8565017	-.8496821	
15	-.9198025		-.9198614
16	-.9829955	-.9754825	
17	-1.0460410		-1.0460103
18	-1.1089208	-1.1007290	
19	-1.1716089		-1.1714962
20	-1.2340763	-1.2252259	
21	-1.2962916		-1.2961016
22	-1.3582215	-1.3487344	
23	-1.4198294		-1.4195631
24	-1.4810765	-1.4709795	
25	-1.5419214		-1.5415797
26	-1.6023190	-1.5916409	
27	-1.6622221		-1.6618068
28	-1.7215812	-1.7103593	
29	-1.7803428		-1.7798522
30	-1.8384511	-1.8267262	
31	-1.8958466		-1.8952792
32	-1.9524682	-1.9402864	
33	-2.0082498		-2.0076056
34	-2.0631247	-2.0505409	
35	-2.1170206		-2.1162972
36	-2.1698637	-2.1569405	
37	-2.2215776		-2.2207770
38	-2.2720219	-2.2588816	
39	-2.3212934		-2.3204155
40	-2.3691268	-2.3557220	
41	-2.4154540		-2.4145436
42	-2.4603028	-2.4467673	
43	-2.5034604		-2.5024433
44	-2.5448704	-2.5312834	
45	-2.5844345		-2.5833564
46	-2.6220522	-2.6084948	
47	-2.6576209		-2.6564884
48	-2.6910372	-2.6775918	
49	-2.7221947		-2.7210102
50	-2.7509866	-2.7377381	
51	-2.7773051		-2.7760768
52	-2.8010421	-2.7880778	
53	-2.8220827		-2.8208208
54	-2.8403363	-2.8277421	
55	-2.8556762		-2.8543744
56	-2.8680015	-2.8558655	
57	-2.8772068		-2.8758736
58	-2.8831868	-2.8715930	
59	-2.8858404		-2.8844752
60	-2.8850675	-2.8741045	
61	-2.8807745		-2.8793736
62	-2.8728695	-2.8626218	
63	-2.8612652		-2.8598232
64	-2.8458819	-2.8364277	
65	-2.8266459		-2.8251548
66	-2.8034878	-2.7948995	
67	-2.7763486		-2.7747974
68	-2.7451801	-2.7375274	
69	-2.7099380		-2.7083120
70	-2.6705956	-2.6639395	
71	-2.6271338		-2.6254144
72	-2.5795474	-2.5739393	
73	-2.5278440		-2.5260124
74	-2.4720502	-2.4675317	
75	-2.4122038		-2.4102364

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 52

PCNTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
76	-2.3483639	-2.3449636	
77	-2.2806072		-2.2784815
78	-2.2090311	-2.2067599	
79	-2.1337971		-2.1314464
80	-2.0549235	-2.0537705	
81	-1.9726999		-1.9701762
82	-1.8872764	-1.8872132	
83	-1.7988737		-1.7961133
84	-1.7077460	-1.7087197	
85	-1.6141713		-1.6111391
86	-1.5184586	-1.5202891	
87	-1.4209628		-1.4176316
88	-1.3220670	-1.3248405	
89	-1.2221861		-1.2185180
90	-1.1217811	-1.1252656	
91	-1.0213609		-1.0173285
92	-.9214667	-.9254837	
93	-.8226844		-.8182541
94	-.7256535	-.7300017	
95	-.6310545		-.6262016
96	-.5356267	-.5440674	
97	-.4521496		-.4468485
98	-.3694719	-.3737245	
99	-.2924775		-.2866997
100	-.2221149	-.2258703	
101	-.1593996		-.1531390
102	-.1053929	-.1083018	
103	-.0612346		-.0544777
104	-.0281010	-.0297659	
105	-.0072484		.0000000
106	.0000023	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 54

PCNTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0327973
2	-.0927699	-.0942332	
3	-.1541436		-.1558429
4	-.2155167	-.2173007	
5	-.2768879		-.2788904
6	-.3382546	-.3403639	
7	-.3996134		-.4019208
8	-.4609593	-.4633945	
9	-.5222863		-.5249021
10	-.5835873	-.5863513	
11	-.6448535		-.6477796
12	-.7060744	-.7091678	
13	-.7672386		-.7704782
14	-.8283325	-.8317568	
15	-.8893414		-.8928957
16	-.9502482	-.9540031	
17	-1.0110347		-1.0149043
18	-1.0716803	-1.0757649	
19	-1.1321628		-1.1363468
20	-1.1924574	-1.1968703	
21	-1.2525382		-1.2570341
22	-1.3123765	-1.3171136	
23	-1.3719416		-1.3767445
24	-1.4311998	-1.4362583	
25	-1.4901171		-1.4952188
26	-1.5486550	-1.5540316	
27	-1.6067741		-1.6121638
28	-1.6644313	-1.6701190	
29	-1.7215617		-1.7272472
30	-1.7781785	-1.7841730	
31	-1.8341715		-1.8400960
32	-1.8895075	-1.8958025	
33	-1.9441323		-1.9502978
34	-1.9979877	-2.0045772	
35	-2.0510135		-2.0573974

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 54

PONTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
36	-2.1031470	-2.1100230	
37	-2.1543221		-2.1609050
38	-2.2044716	-2.2116270	
39	-2.2535243		-2.2602825
40	-2.3014073	-2.3088336	
41	-2.3480453		-2.3549504
42	-2.3933597	-2.4010487	
43	-2.4372706		-2.4442964
44	-2.4796953	-2.4876418	
45	-2.5205498		-2.5276647
46	-2.5597467	-2.5679379	
47	-2.5971971		-2.6043658
48	-2.6328106	-2.6412392	
49	-2.6664972		-2.6736870
50	-2.6981616	-2.7068162	
51	-2.7277088		-2.7348814
52	-2.7550449	-2.7639127	
53	-2.7800732		-2.7871852
54	-2.8026953	-2.8117623	
55	-2.8228159		-2.8298278
56	-2.8403363	-2.8495870	
57	-2.8551617		-2.8620329
58	-2.8671947	-2.8766112	
59	-2.8763413		-2.8830333
60	-2.8825083	-2.8920689	
61	-2.8856044		-2.8920789
62	-2.8855400	-2.8952274	
63	-2.8822312		-2.8884530
64	-2.8755932	-2.8853831	
65	-2.8655496		-2.8714828
66	-2.8520255	-2.8618975	
67	-2.8349524		-2.8405633
68	-2.8142686	-2.8242016	
69	-2.7899165		-2.7951684
70	-2.7618480	-2.7718244	
71	-2.7300224		-2.7348795
72	-2.6944075	-2.7044072	
73	-2.6549807		-2.6594076
74	-2.6117306	-2.6217356	
75	-2.5646572		-2.5686202
76	-2.5137720	-2.5237570	
77	-2.4591017		-2.4625635
78	-2.4006815	-2.4106269	
79	-2.3385735		-2.3415060
80	-2.2728448	-2.2827191	
81	-2.2035851		-2.2059550
82	-2.1309037	-2.1406789	
83	-2.0549264		-2.0567060
84	-1.9758072	-1.9854434	
85	-1.8937130		-1.8948729
86	-1.8088417	-1.8182983	
87	-1.7214115		-1.7219298
88	-1.6316774	-1.6409006	
89	-1.5399041		-1.5397527
90	-1.4463959	-1.4553304	
91	-1.3514972		-1.3506610
92	-1.2555680	-1.2641344	
93	-1.1590068		-1.1574683
94	-1.0622518	-1.0703697	
95	-.9657737		-.9635220
96	-.8700776	-.8776524	
97	-.7757181		-.7727532
98	-.6832808	-.6902025	
99	-.5933981		-.5897231
100	-.5067433	-.5128911	
101	-.4240314		-.4196680
102	-.3460397	-.3512838	
103	-.2735741		-.2685432
104	-.2074984	-.2116886	
105	-.1487260		-.1430689
106	-.0982197	-.1011941	
107	-.0569966		-.0507670
108	-.0261268	-.0277100	
109	-.0067332		.0000000
110	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAÇÃO PARA N= 56

PCNTG	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0325491
2	-.0927699	-.0910214	
3	-.1519516		-.1506824
4	-.2111330	-.2091235	
5	-.2703126		-.2688160
6	-.3254884	-.3272213	
7	-.3886572		-.3869362
8	-.4478151	-.4452937	
9	-.5069567		-.5050142
10	-.5660759	-.5633036	
11	-.6251652		-.6230047
12	-.6842158	-.6811973	
13	-.7432176		-.7408428
14	-.8021591	-.7989005	
15	-.8610274		-.8584437
16	-.9192087	-.9163184	
17	-.9784869		-.9756981
18	-1.0370443	-1.0333319	
19	-1.0954621		-1.0924742
20	-1.1537194	-1.1497960	
21	-1.2117939		-1.2086122
22	-1.2696609	-1.2655408	
23	-1.3272548		-1.3239274
24	-1.3846667	-1.3803651	
25	-1.4417474		-1.4382017
26	-1.4985039	-1.4940393	
27	-1.5549030		-1.5511863
28	-1.6109078	-1.6062996	
29	-1.6664808		-1.6626022
30	-1.7215812	-1.7168500	
31	-1.7761667		-1.7721343
32	-1.8301923	-1.8253627	
33	-1.8836107		-1.8794324
34	-1.9363732	-1.9314697	
35	-1.9884286		-1.9841127
36	-2.0397224	-2.0347705	
37	-2.0901595		-2.0857534
38	-2.1398005	-2.1348262	
39	-2.1884665		-2.1838984
40	-2.2361345	-2.2311640	
41	-2.2827387		-2.2780566
42	-2.3282132	-2.3232732	
43	-2.3724885		-2.3676991
44	-2.4154935	-2.4106102	
45	-2.4571557		-2.4522638
46	-2.4973993	-2.4926009	
47	-2.5361485		-2.5311627
48	-2.5733247	-2.5686417	
49	-2.6088476		-2.6037736
50	-2.6426349	-2.6380982	
51	-2.6745049		-2.6694536
52	-2.7046728	-2.7003145	
53	-2.7327547		-2.7275395
54	-2.7587633	-2.7546167	
55	-2.7826128		-2.7773418

ENSAIO DE AFERICAÇÃO PARA $\lambda = 56$

PONTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS λ		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
56	-2.8042164	-2.8003125	
57	-2.8234863		-2.8181748
58	-2.8403363	-2.8367095	
59	-2.8546796		-2.8493361
60	-2.8664298	-2.8631134	
61	-2.8755026		-2.8701429
62	-2.8818135	-2.8788409	
63	-2.8952806		-2.8799138
64	-2.8858247	-2.8832264	
65	-2.8833671		-2.8780055
66	-2.8778338	-2.8756447	
67	-2.8691535		-2.8638067
68	-2.8572588	-2.8555050	
69	-2.8420868		-2.8367658
70	-2.8235788	-2.8222833	
71	-2.8016820		-2.7963963
72	-2.7763486	-2.7755351	
73	-2.7475410		-2.7423000
74	-2.7152233	-2.7149057	
75	-2.6793733		-2.6741853
76	-2.6399727	-2.6401653	
77	-2.5970159		-2.5918841
78	-2.5505052	-2.5512171	
79	-2.5004554		-2.4953871
80	-2.4468946	-2.4481311	
81	-2.3898573		-2.3848553
82	-2.3294010	-2.3311620	
83	-2.2658992		-2.2606497
84	-2.1985025	-2.2007799	
85	-2.1282434		-2.1233692
86	-2.0549235	-2.0577035	
87	-1.9786808		-1.9738700
88	-1.8996673	-1.9029231	
89	-1.8180563		-1.8132982
90	-1.7340450	-1.7377424	
91	-1.6478515		-1.6431346
92	-1.5597172	-1.5638046	
93	-1.4699137		-1.4652185
94	-1.3787258	-1.3831377	
95	-1.2864840		-1.2817912
96	-1.1935332	-1.1981835	
97	-1.1002531		-1.0955307
98	-1.0076498	-1.0118427	
99	-.9142710		-.9095938
100	-.8226907	-.8275080	
101	-.7325183		-.7276504
102	-.6443995	-.6491070	
103	-.5589212		-.5539269
104	-.4767011	-.4811401	
105	-.3984061		-.3932407
106	-.3247300	-.3287175	
107	-.2564157		-.2510393
108	-.1942487	-.1975954	
109	-.1390633		-.1334363
110	-.0917316	-.0942118	
111	-.0531701		-.0472433
112	-.0243452	-.0257164	
113	-.0062681		.0000000
114	.0000011	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 60 .

PCATC	DESLOCAMENTOS RADIAIS *		
	ANALITICO	HABILTAL	CUAL
1			-.0392873
2	-.0927699	-.0938480	
3	-.1480062		-.1496624
4	-.2032422	-.2046574	
5	-.2584770		-.2600371
6	-.3137087	-.3154628	
7	-.3689352		-.3704023
8	-.4241536	-.4262485	
9	-.4793596		-.4807349
10	-.5345488	-.5369869	
11	-.5897156		-.5910003
12	-.6448534	-.6476358	
13	-.6999546		-.7011524
14	-.7550108	-.7581397	
15	-.8100126		-.8111262
16	-.8649490	-.8684279	
17	-.9198086		-.9208395
18	-.9745783	-.9784098	
19	-1.0292442		-1.0301957
20	-1.0837905	-1.0879776	
21	-1.1382010		-1.1390741
22	-1.1924574	-1.1970024	
23	-1.2465405		-1.2473361
24	-1.3004296	-1.3053372	
25	-1.3541024		-1.3548229
26	-1.4075356	-1.4128056	
27	-1.4607031		-1.4613502
28	-1.5135798	-1.5192153	
29	-1.5661364		-1.5667098
30	-1.6183436	-1.6243446	
31	-1.6701698		-1.6706707
32	-1.7215815	-1.7279453	
33	-1.7725451		-1.7729735
34	-1.8230233	-1.8297496	
35	-1.8725784		-1.8733351
36	-1.9223709	-1.9294546	
37	-1.9711597		-1.9714425
38	-2.0193009	-2.0267372	
39	-2.0667500		-2.0669580
40	-2.1134605	-2.1212449	
41	-2.1593843		-2.1595187
42	-2.2044716	-2.2125931	
43	-2.2486706		-2.2487321
44	-2.2919278	-2.3003778	
45	-2.3341889		-2.3341804
46	-2.3753972	-2.3841662	
47	-2.4154954		-2.4154181
48	-2.4544234	-2.4634981	
49	-2.4921203		-2.4919758
50	-2.5285239	-2.5378923	
51	-2.5635710		-2.5633588
52	-2.5971971	-2.6068473	
53	-2.6293349		-2.6290526
54	-2.6599183	-2.6698318	
55	-2.6888795		-2.6885271

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 60

PCATO	DESLOCAMENTOS RADIAIS h		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
56	-2.7161498	-2.7263074	
57	-2.7416587		-2.7412338
58	-2.7653375	-2.7757196	
59	-2.7871156		-2.7866158
60	-2.8069215	-2.8175020	
61	-2.8246651		-2.8241110
62	-2.8403358	-2.8510890	
63	-2.8538017		-2.8531532
64	-2.8650150	-2.8759131	
65	-2.8735057		-2.8731828
66	-2.8804049	-2.8914194	
67	-2.8844452		-2.8836498
68	-2.8859630	-2.8970652	
69	-2.8848920		-2.8840246
70	-2.8811727	-2.8923306	
71	-2.8747444		-2.8738074
72	-2.8655505	-2.8767323	
73	-2.8535385		-2.8525343
74	-2.8386564	-2.8498282	
75	-2.8208590		-2.8197875
76	-2.8001041	-2.8112345	
77	-2.7763534		-2.7752128
78	-2.7495742	-2.7606339	
79	-2.7197418		-2.7185330
80	-2.6868324	-2.6977901	
81	-2.6508336		-2.6495538
82	-2.6117387	-2.6225643	
83	-2.5695453		-2.5681829
84	-2.5242629	-2.5349302	
85	-2.4759073		-2.4744601
86	-2.4245071	-2.4349890	
87	-2.3700967		-2.3685513
88	-2.3127236	-2.3229947	
89	-2.2524457		-2.2507863
90	-2.1893330	-2.1993680	
91	-2.1234674		-2.1216793
92	-2.0549455	-2.0647154	
93	-1.9838734		-1.9819424
94	-1.9103808	-1.9198592	
95	-1.8346021		-1.8325124
96	-1.7566969	-1.7658558	
97	-1.6768382		-1.6745739
98	-1.5952165	-1.6040182	
99	-1.5120430		-1.5095859
100	-1.4275439	-1.4359488	
101	-1.3415681		-1.3393054
102	-1.2555881	-1.2635579	
103	-1.1687002		-1.1658168
104	-1.0816169	-1.0890980	
105	-.9946755		-.9915545
106	-.9082471	-.9151855	
107	-.8227135		-.8193355
108	-.7384930	-.7448330	
109	-.6560313		-.6523838
110	-.5757962	-.5814712	
111	-.4982879		-.4943597
112	-.4240406	-.4289813	
113	-.3536107		-.3493847
114	-.2875864	-.2917169	
115	-.2266003		-.2220690
116	-.1712598	-.1745341	
117	-.1223769		-.1175352
118	-.0805541	-.0828105	
119	-.0465988		-.0414408
120	-.0212915	-.0224697	
121	-.0054691		.0000000
122	.0000046	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 62

PCNTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0376877
2	-.0927699	-.0924141	
3	-.1462244		-.1444662
4	-.1956786	-.1991471	
5	-.2531317		-.2512441
6	-.3065822	-.3058772	
7	-.3600282		-.3580134
8	-.4134669	-.4125899	
9	-.4668951		-.4647557
10	-.5203083	-.5192620	
11	-.5737021		-.5714408
12	-.6270704	-.6258570	
13	-.6804070		-.6780276
14	-.7337046	-.7323278	
15	-.7869544		-.7844590
16	-.8401477	-.8386114	
17	-.8932739		-.8906691
18	-.9463222	-.9446309	
19	-.9992901		-.9965700
20	-1.0521343	-1.0502934	
21	-1.1048701		-1.1020594
22	-1.1574724	-1.1554880	
23	-1.2099242		-1.2070212
24	-1.2622075	-1.2600870	
25	-1.3143032		-1.3113143
26	-1.3661909	-1.3639424	
27	-1.4178486		-1.4147809
28	-1.4692535	-1.4668851	
29	-1.5203810		-1.5172417
30	-1.5712056	-1.5687246	
31	-1.6216996		-1.6184976
32	-1.6718352	-1.6692514	
33	-1.7215817		-1.7183228
34	-1.7709086	-1.7682314	
35	-1.8197818		-1.8164737
36	-1.8681679	-1.8654091	
37	-1.9160304		-1.9126801
38	-1.9633327	-1.9605021	
39	-2.0100350		-2.0066509
40	-2.0560975	-2.0532093	
41	-2.1014786		-2.0980639
42	-2.1461344	-2.1432009	
43	-2.1900201		-2.1865811
44	-2.2330904	-2.2301254	
45	-2.2752967		-2.2718344
46	-2.3165894	-2.3136039	
47	-2.3569193		-2.3534398
48	-2.3962240	-2.3932443	
49	-2.4344792		-2.4309855
50	-2.4716015	-2.4686260	
51	-2.5075455		-2.5040374
52	-2.5422530	-2.5393071	
53	-2.5756669		-2.5721464
54	-2.6077275	-2.6048293	
55	-2.6383758		-2.6348424

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 62.

PUNTO	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
56	-2.6675487	-2.6647201	
57	-2.6951861		-2.6916418
58	-2.7212253	-2.7184896	
59	-2.7456031		-2.7420492
60	-2.7682562	-2.7656398	
61	-2.7891197		-2.7855582
62	-2.8081303	-2.8056617	
63	-2.8252234		-2.8216567
64	-2.8403363	-2.8380380	
65	-2.8534026		-2.8498306
66	-2.8643613	-2.8622627	
67	-2.8731484		-2.8695712
68	-2.8797030	-2.8778267	
69	-2.8839631		-2.8803844
70	-2.8858690	-2.8842411	
71	-2.8853636		-2.8817844
72	-2.8823891	-2.8810363	
73	-2.8768926		-2.8733177
74	-2.8688207	-2.8677697	
75	-2.8581252		-2.8545566
76	-2.8447585	-2.8440318	
77	-2.8266777		-2.8251195
78	-2.8098431	-2.8094654	
79	-2.7882180		-2.7846732
80	-2.7637720	-2.7637634	
81	-2.7364769		-2.7329493
82	-2.7063112	-2.7066894	
83	-2.6732583		-2.6697483
84	-2.6373100	-2.6380830	
85	-2.5984573		-2.5949664
86	-2.5567060	-2.5578852	
87	-2.5120668		-2.5085983
88	-2.4645538	-2.4661388	
89	-2.4141974		-2.4107509
90	-2.3610287	-2.3630123	
91	-2.3050942		-2.3016667
92	-2.2464461	-2.2488184	
93	-2.1851501		-2.1817403
94	-2.1212802	-2.1240249	
95	-2.0549245		-2.0515294
96	-1.9861851	-1.9892797	
97	-1.9151700		-1.9117823
98	-1.8420072	-1.8454232	
99	-1.7668383		-1.7634497
100	-1.6898189	-1.6935163	
101	-1.6111143		-1.6077132
102	-1.5309215	-1.5348549	
103	-1.4494338		-1.4460044
104	-1.3668802	-1.3709979	
105	-1.2834976		-1.2800221
106	-1.1995437	-1.2037835	
107	-1.1153049		-1.1117640
108	-1.0310726	-1.0353608	
109	-.9471660		-.9435434
110	-.8639400	-.8682032	
111	-.7817514		-.7780170
112	-.7009897	-.7051358	
113	-.6220667		-.6182034
114	-.5454274	-.5493605	
115	-.4715295		-.4675102
116	-.4008660	-.4044776	
117	-.3339503		-.3297551
118	-.2713319	-.2745063	
119	-.2135808		-.2091870
120	-.1613021	-.1639080	
121	-.1151285		-.1105078
122	-.0757131	-.0776060	
123	-.0437559		-.0388914
124	-.0199784	-.0210037	
125	-.0051271		.0000000
126	.0000046	.0000000	

ENSAIO DE AFERICAÇÃO PARA N° 64

PCNTC	DESLOCAMENTOS RADIAIS %		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
1			-.0374988
2	-.0527699	-.0888522	
3	-.1445539		-.1403490
4	-.1963377	-.1916639	
5	-.2481205		-.2431990
6	-.2959011	-.2944733	
7	-.3516777		-.3460420
8	-.4034479	-.3972672	
9	-.4552088		-.4488604
10	-.5069567	-.5000271	
11	-.5586874		-.5516303
12	-.6103959	-.6027210	
13	-.6620767		-.6543136
14	-.7137232	-.7053094	
15	-.7653280		-.7568650
16	-.8168233	-.8077365	
17	-.8683801		-.8592218
18	-.9198086	-.9099385	
19	-.9711581		-.9613135
20	-1.0224173	-1.0118349	
21	-1.0735731		-1.0630500
22	-1.1246123	-1.1133296	
23	-1.1755202		-1.1643322
24	-1.2262812	-1.2143142	
25	-1.2768786		-1.2650349
26	-1.3272948	-1.3146601	
27	-1.3775105		-1.3650289
28	-1.4275064	-1.4142230	
29	-1.4772604		-1.4641576
30	-1.5267503	-1.5128417	
31	-1.5759530		-1.5622463
32	-1.6248436	-1.6103332	
33	-1.6733954		-1.6591086
34	-1.7215215	-1.7064984	
35	-1.7693734		-1.7545273
36	-1.8167410	-1.8011134	
37	-1.8636532		-1.8482738
38	-1.9100776	-1.8939378	
39	-1.9559801		-1.9400923
40	-2.0013261	-1.9847088	
41	-2.0460782		-2.0297103
42	-2.0901999	-2.0731406	
43	-2.1336513		-2.1168323
44	-2.1763916	-2.1589289	
45	-2.2183805		-2.2011395
46	-2.2595744	-2.2417455	
47	-2.2999282		-2.2822967
48	-2.3393979	-2.3212481	
49	-2.3779754		-2.3599472
50	-2.4154940	-2.3970685	
51	-2.4520245		-2.4337173
52	-2.4874763	-2.4688263	
53	-2.5217981		-2.5032077
54	-2.5549388	-2.5361190	
55	-2.5868440		-2.5680137

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 64

PONTG	DESLOCAMENTOS RADIAIS W		
	ANALITICO	HABITUAL	DUAL
56	-2.6174603	-2.5985279	
57	-2.6467323		-2.6277018
58	-2.6746049	-2.6556191	
59	-2.7010212		-2.6818395
60	-2.7259250	-2.7069488	
61	-2.7492580		-2.7299719
62	-2.7709627	-2.7520614	
63	-2.7905808		-2.7716441
64	-2.8092551	-2.7904973	
65	-2.8257265		-2.8063917
66	-2.8403358	-2.8217902	
67	-2.8530259		-2.8337450
68	-2.8637395	-2.8454785	
69	-2.8724184		-2.8532500
70	-2.8790083	-2.8611045	
71	-2.8834500		-2.8644481
72	-2.8856936	-2.8682199	
73	-2.8856831		-2.8668990
74	-2.8833671	-2.8663931	
75	-2.8786569		-2.8601866
76	-2.8716240	-2.8552198	
77	-2.8621011		-2.8439145
78	-2.8500881	-2.8343239	
79	-2.8355417		-2.8177271
80	-2.8184257	-2.8033657	
81	-2.7987061		-2.7813153
82	-2.7763519	-2.7620568	
83	-2.7513356		-2.7344160
84	-2.7226306	-2.7101612	
85	-2.6932368		-2.6768317
86	-2.6601214	-2.6475158	
87	-2.6242857		-2.6084404
88	-2.5857258	-2.5740347	
89	-2.5444479		-2.5292039
90	-2.5004630	-2.4897289	
91	-2.4537878		-2.4391813
92	-2.4044495	-2.3947053	
93	-2.3524780		-2.3385425
94	-2.2979178	-2.2891974	
95	-2.2408199		-2.2275844
96	-2.1812415	-2.1735654	
97	-2.1192527		-2.1067405
98	-2.0549350	-2.0483150	
99	-1.9883811		-1.9766040
100	-1.9196866	-1.9141212	
101	-1.8489683		-1.8379393
102	-1.7763534	-1.7718344	
103	-1.7019835		-1.6917000
104	-1.6260071	-1.6225071	
105	-1.5485945		-1.5390520
106	-1.4655278	-1.4674125	
107	-1.3902087		-1.3813872
108	-1.3096430	-1.3080540	
109	-1.2284656		-1.2203412
110	-1.1469254	-1.1461945	
111	-1.0652838		-1.0578203
112	-.9828281	-.9828715	
113	-.9028624		-.8960128
114	-.8227049	-.8234177	
115	-.7437022		-.7374129
116	-.6662205	-.6674805	
117	-.5906402		-.5848439
118	-.5173759	-.5190437	
119	-.4468525		-.4414732
120	-.3795312	-.3814461	
121	-.3158869		-.3108325
122	-.2564214	-.2583982	
123	-.2016635		-.1968385
124	-.1521649	-.1540042	
125	-.1085082		-.1038071
126	-.0712973	-.0727759	
127	-.0411684		-.0364723
128	-.0187792	-.0196498	
129	-.0048182		.0000000
130	.0000011	.0000000	

3.6 - CONCLUSÕES DOS ENSAIOS

As conclusões dos ensaios serão feitas em quatro partes, a saber:

- a) Conclusões a respeito das discretizações do cálculo dos deslocamentos.
- b) Conclusões a respeito das aproximações do cálculo dos esforços M_x e rotações ψ com rede habitual.
- c) Conclusões a respeito das aproximações do cálculo dos esforços M_x e rotações ψ com rede dual.
- d) Comparação entre as aproximações.

Em seguida, apresentar-se-ão algumas sugestões quanto a:

- 1) Correções de valores de M_x obtidos pelas aproximações estudadas neste capítulo, como também um complemento para análise desse esforço.
- 2) Utilização da Extrapolção de Richardson para obtenção de melhores aproximações dos valores de w , M_x e ψ calculados.
- 3) Obtenção da força cortante.

Posteriormente, mostrar-se-ão os resultados de alguns ensaios suplementares, feitos a fim de tirar conclusões mais precisas a respeito dessas aproximações. Estes foram feitos com as seguintes espessuras \bar{d} do reservatório padrão adotado:

- . $\bar{d} = 180 \text{ cm} \Rightarrow \lambda \cong H$
- . $\bar{d} = 45 \text{ cm} \Rightarrow \lambda \cong H/2$
- . $\bar{d} = 20 \text{ cm} \Rightarrow \lambda \cong H/3$
- . $\bar{d} = 11 \text{ cm} \Rightarrow \lambda \cong H/4$

Espessuras estas, mais reais do que a adotada para aqueles ensaios (pelos motivos já citados), apesar da altura ainda ser exagerada.

3.6.1 - Conclusões a Respeito das Discretizações do Cálculo dos Deslocamentos

Mediante a análise dos resultados provenientes das duas discretizações do cálculo dos deslocamentos w , uma com rede habitual e outra com rede dual, pode-se afirmar que ambas as discretizações são bastante boas, apesar de terem sido utilizadas expressões de diferenças finitas com erros da ordem de h^2 . Disto se pode concluir, que o comportamento dessa grandeza não foge muito a dos polinômios do segundo grau. Não se pode porém, afirmar que essas aproximações sejam as melhores. Pois, com a aproximação com rede habitual, foi verificado que nos pontos próximos ao engastamento, se obtiveram sempre valores de w maiores que os exatos, mostrando assim a fraca imposição de engastamento usual conseguida com essa aproximação. E com a aproximação com rede dual, foi constatado que nesses pontos se obtiveram sempre valores de w menores que os exatos, mostrando assim a forte imposição de engastamento (condição de Stiefengastel) conseguida com essa aproximação. Assim, a conveniência de se utilizar polinômios de grau mais elevado que dois, para a obtenção de expressões em diferenças finitas de derivadas nessas discretizações, parece merecer alguma reflexão. Observação esta, já feita na introdução do capítulo.

3.6.2 - Conclusões a Respeito das Aproximações do Cálculo dos Esforços M_x e Rotações ψ com Rede Habitual.

Mediante as análises (itens 3.5.1 e 3.5.2), pode-se concluir que com rede habitual a melhor aproximação, dentre as quatro estudadas, para o cálculo dos esforços M_x e rotações ψ é a γ . Isto observando os valores dessas grandezas, no ponto do engastamento e próximos a ele. Pois nos pontos suficientemente afastados do engastamento, os valores obtidos pelas quatro aproximações (α , β , γ e δ) dessas gran

dezas, se equivalem. Note-se que a aproximação γ é aquela que utiliza expressões de derivadas provenientes de $PI-2$, porém, com a imposição de rotação nula no engastamento. Aparentemente por se utilizarem expressões de diferenças finitas com erros da ordem de h^2 , esperava-se que ela não fornecesse resultados melhores que as aproximações com $PI-4$ (aproximação β ou δ).

Disto se pode deduzir que o comportamento das grandezas M_x e ψ (do reservatório), se aproxima mais a polinômios de segundo grau do que de quarto, pelo menos nos pontos próximos ao engastamento, com a condição de que tanto seus valores como também suas derivadas no engastamento sejam nulos. Não se pode afirmar, porém, se o comportamento dessas grandezas é melhor aproximado com polinômios de grau mais elevado que quatro. É ponto a ser analisado.

3.6.3 - Conclusões a Respeito das Aproximações do Cálculo dos Esforços M_x e Rotações ψ com Rede Dual

Das análises feitas nos itens 3.5.3 e 3.5.4, pode-se concluir que das quatro aproximações do cálculo dos esforços M_x e rotações ψ estudadas, a melhor é a B , ao se observar os valores dessas grandezas nos pontos próximos ao engastamento. Pois, como nas aproximações com rede habitual, nos pontos suficientemente afastados, a diferença existente entre os resultados obtidos por uma ou por outra aproximação é desprezível. Note-se que essa aproximação é aquela que utiliza expressões de derivadas provenientes de $PI-4$, sem nada se impor quanto à rotação no engastamento. Contrariamente ao dito no item anterior, esta era a aproximação que se esperava que fosse a melhor das quatro pesquisadas. Isto se deve provavelmente à forte condição de engastamento imposta no cálculo dos deslocamentos.

Por isso, pode-se provavelmente conseguir melhor aproximação do cálculo dessas grandezas, ou pelo menos

de M_x , se se utilizar polinômios interpoladores de grau mais elevado do que quatro. É outro ponto a ser analisado.

Note-se que, nessas aproximações não se calcularam M_x e ψ no ponto do engastamento, não por ser impossível, e sim apenas por, no momento, não ter tido esse interesse. Pois o objetivo aqui era de apenas verificar a influência no comportamento dessas grandezas nos pontos próximos ao do engastamento, ao se reimpôr ou se deixar de reimpôr as condições de contorno de Stiefengaste.

3.6.4 - Comparação entre Aproximações com Rede Habitual e Dual

Fazem-se agora algumas considerações finais a respeito de todos os ensaios realizados neste capítulo, salvo aquelas que serão feitas posteriormente com outras espessuras do reservatório tomado como padrão.

As considerações finais a serem aqui feitas serão baseadas somente nas análises dos valores de M_x , obtidos por meio das aproximações com rede habitual e dual. Escolheu-se essa grandeza por ser a mais importante de todas analisadas nesses ensaios.

Note-se que, a menos dos valores de M_x da última linha de cada tabela apresentada no item 3.5, as aproximações com $PI-2$ são melhores que as com $PI-4$. Isto com rede habitual. Com rede dual as aproximações com $PI-2$ são melhores somente para os M_x positivos. Porém, com $PI-4$ somente com a aproximação B é que se obtêm valores de M_x negativos melhores que com aproximações com $PI-2$. Naturalmente, isto se deve ao fato de se ter conseguido impor uma condição de engastamento, muito mais forte do que ocorre na realidade (condição de Stiefengaste no cálculo dos deslocamentos e condição de rotação nula no cálculo de M_x).

Além disso, observe-se que, ao se ir refinando a malha, aparentemente com rede dual se obtêm valores de M_x

bons, mais rapidamente que com rede habitual. Fato este aparente pela simples razão, de os pontos onde se obtêm os valores dessa grandeza com rede dual, serem distintos daqueles estabelecidos com rede habitual. Pois, os polinômios interpoladores utilizados são os mesmos tanto nas aproximações com rede dual como habitual. As únicas diferenças que poderiam surgir entre elas, seriam nos valores próximos à borda livre e ao engastamento, devido se ter utilizado expressões de derivadas diferentes nos pontos próximos à borda livre, e de se ter admitido diferentes tipos de engastamento nas discretizações do cálculo de seus respectivos deslocamentos.

Diante disto, e lembrando que com as aproximações com rede dual não se obtém valor de M_x no engastamento, pode-se concluir que as aproximações com rede habitual são melhores. Principalmente por se ter concluído no item 3.6.2, que a melhor aproximação é a que utiliza $PI-2$, a mais simples de todas, levando-se em consideração a ordem de derivada que se deseja utilizar.

3.6.5 - Algumas Sugestões

3.6.5.1 - Correção de valores de M_x

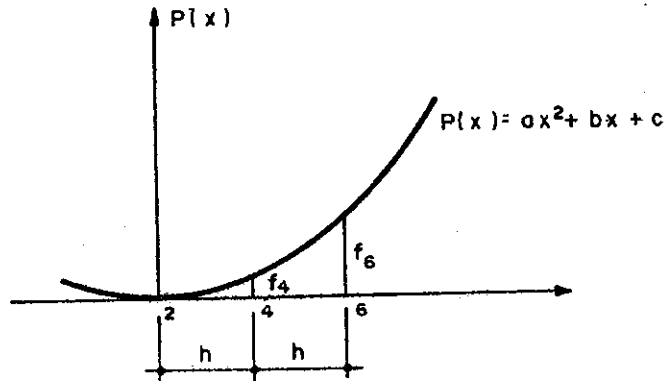
A correção de valores de M_x é aqui sugerida apenas para as duas melhores aproximações, isto é, para a aproximação γ e para a aproximação B . Nada impede, porém, que se ja aplicada para as outras aproximações.

Para a aproximação γ é sugerida correção dos valores de M_x apenas nos pontos 2 e 4 (os piores obtidos). Em 2 admite-se

$$M_x = 0 ,$$

pois é um ponto que pertence à borda livre. Em 4, sugere-se que o valor de M_x seja substituído pelo

valor obtido por meio de interpolação polinomial de segundo grau, da seguinte forma:



$$P(x=0) = f_2 = M_x \text{ no ponto } 2=0=c$$

$$\frac{dP(x=0)}{dx} = 0 = b$$

Logo

$$P(x) = ax^2$$

Assim,

$$P(x=2h) = f_6 = M_x \text{ no ponto } 6 = a(2h)^2$$

Portanto

$$a = \frac{f_6}{4h^2}$$

Consequentemente,

$$M_x \text{ no ponto } 4 = \frac{1}{4} M_x \text{ no ponto } 6.$$

Por exemplo: Para $n = 48$, tem-se que o valor de M_x no ponto 4 é 0.109. Por essa expressão tem-se

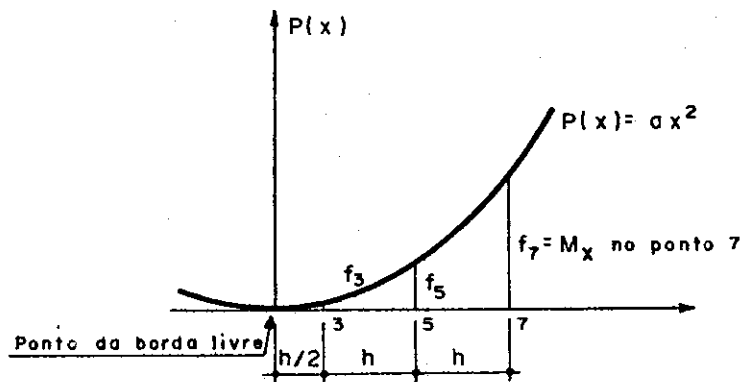
$$M_x = \frac{1}{4} 0.922 \cong 0.231$$

que é um valor muito mais próximo ao exato ($=0.234$).

Já para a aproximação B são sugeridas a correção dos valores de M_x no ponto 3 e 5, e o cálculo estimativo do valor de M_x no engastamento; pois por essa (como também pelas outras A, C e D) aproximação não se obtém nenhum valor neste ponto (veja item 3.4).



Para a correção dos valores de M_x nos pontos 3 e 5, sugere-se que sejam determinados por meio de interpolação polinomial de segunda ordem, analogamente ao feito para a correção de M_x no ponto 4, que é a seguinte:



Para $x = 5h/2$ tem-se

$$P(x=5h/2) = f_7 = M_x \text{ no ponto } 7 = a\left(\frac{5h}{2}\right)^2.$$

Logo

$$a = \frac{4f_7}{25h^2}$$

Portanto

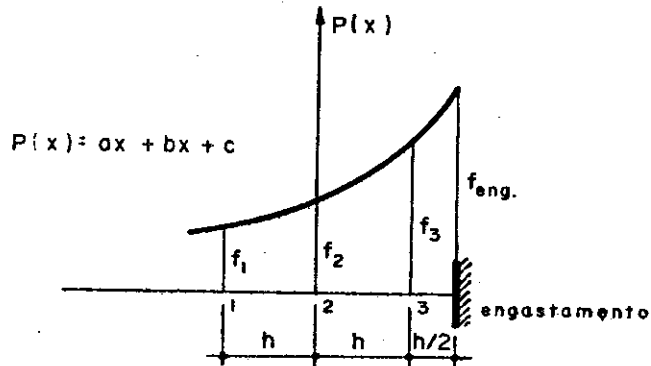
$$M_x \text{ no ponto } 3 = \frac{1}{25} M_x \text{ no ponto } 7 \text{ e}$$

$$M_x \text{ no ponto } 5 = \frac{9}{25} M_x \text{ no ponto } 7.$$

Por exemplo: Para $n = 48$, têm-se que os valores de M_x nos pontos 3 e 5 são respectivamente: -0.041 e $+0.434$, e os exatos: $+0.057$ e $+0.541$. Calculando por essas expressões corretivas, obtêm-se os seguintes valores de M_x nesses pontos: $+0.059$ e $+0.531$, que como se nota, são bem melhores que aqueles.

Para o cálculo estimativo do valor de M_x no engastamento, sugere-se que seja feito por meio de extrapolação polinomial de segunda ordem, como se descreve a se

guir:



Primeiramente, determinam-se os coeficientes (a, b, c) do polinômio $P(x)$, por meio dos três valores de M_x mais próximos ao engastamento. Pelo item 2.3.1.1, tem-se:

$$a = \frac{1}{2h^2} (f_1 - 2f_2 + f_3), \quad b = \frac{1}{2h} (f_3 - f_1) \quad \text{e} \quad c = f_2.$$

onde f_1, f_2 e f_3 representam aqui os valores de M_x mais próximos ao engastamento. Em seguida, calcula-se o valor desse polinômio para $x = 3h/2$ (ponto do engastamento). Fazendo is so, obtêm-se

$$\begin{aligned} P(x=3h/2) &= M_x \text{ no engastamento} = \\ &= \frac{9}{8} (f_1 - 2f_2 + f_3) + \frac{3}{4} (f_3 - f_1) + f_2 \end{aligned}$$

Exemplificando para $n=48$, tem-se que o valor de M_x no engastamento, por essa extrapolação, é

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{9}{8} (-743.124 + 2 \times 965.698 - 1213.770) + \\ &+ \frac{3}{4} (-1213.770 + 743.124) - 965.698 = \\ &\cong - 1347.367 \text{ tfmm/mm} \end{aligned}$$

que, como se nota, uma ótima aproximação, pois o valor exato de M_x neste ponto é

$$M_x = -1349.817 \text{ tfmm/mm.}$$

É claro, que essas correções sugeridas, tem sentido se se considerar que os valores de M_x , nestes pontos, são significativos para o dimensionamento da estrutura. Isto é, se é sabido que na região da borda livre o esforço M_x é pequeno, provavelmente não haverá necessidade de armadura para combatê-lo, a menos, naturalmente, da armadura mínima estabelecida por norma. Tal verificação pode ser feita da seguinte maneira, dentre outras que possam existir:

$$M_{\text{mínimo}} = z \cdot S_{f\text{mínimo}} \cdot \bar{\sigma}_f$$

Por exemplo: Para o caso tem-se, adotando aço CA 50A, h^* (altura útil) = $d - 20 \text{ cm}$ e $z = 0.85 h^*$

$$\begin{aligned} S_{f\text{mínimo}} &= 0.0015 bd = 0.0015 \times 100 \times 400 = \\ &= 60 \text{ cm}^2/\text{m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto } M_{\text{mínimo}} &= 0.85 \times 380 \times 60 \times 3.0 = 58140 \text{ tfcm/m} = \\ &= 581.40 \text{ tfm/m} \end{aligned}$$

que mostra a não necessidade de armadura para combater o esforço, em toda região, onde M_x é positivo. Naturalmente, isto ocorre devido se ter adotado aquelas dimensões (irreais para reservatório), porém, lembre-se do motivo de se ter admitido tais dimensões. Por isso, posteriormente fazem-se alguns ensaios suplementares, onde se adotam espessuras mais coerentes com aquela altura de reservatório e, inclusive, até fina demais, a fim de melhor observar essas aproximações de cálculo de cascas.

3.6.5.2 - Extrapolações de Richardson

Descreve-se a seguir, resumidamente, um método que permite obter melhores aproximações com uma quantidade mínima de trabalho adicional, dos valores das grandezas (M_x , ψ e w), calculados mediante emprego de diferenças finitas, que é o método das Extrapolações de Richardson. Observe-se, porém, que esse método pode ser aplicado desde que as aproximações sucessivas tendam ao valor verdadeiro. Para maiores detalhes veja SALVADORI(1967), de onde foi extraído.

O erro cometido, quando se utilizam diferenças finitas é função do espaçamento h entre os pontos, e pode ser expresso como:

$$\text{com PI-2} \quad e(x) = f_1(x)h^2 + f_2(x)h^4 + f_3(x)h^6 + \dots$$

$$\text{com PI-4} \quad e(x) = \bar{f}_1(x)h^4 + \bar{f}_2(x)h^6 + \bar{f}_3(x)h^8 + \dots$$

E quando se calcula com vários valores de espaçamento, tem-se para o mesmo ponto x :

$$\text{com PI-2} \quad e = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots$$

$$\text{com PI-4} \quad e = \bar{c}_1h^4 + \bar{c}_2h^6 + \bar{c}_3h^8 + \dots$$

Com isso, pode-se calcular uma melhor aproximação, nos pontos comuns, para os valores obtidos com diferentes aberturas da malha, porém com a mesma ordem de erro, usando extrapolações de Richardson apresentadas a seguir:

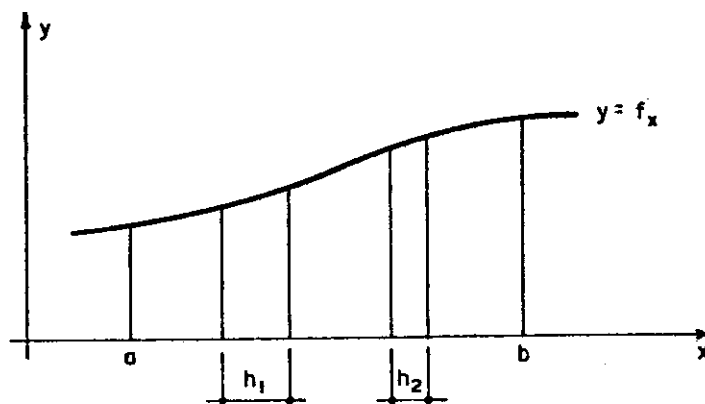


Figura 3.9

Denominando V_1 o valor correspondente ao cálculo com espaçamento h_1 (obtido com número de subdivisões n_1) e V_2 o valor correspondente ao cálculo com espaçamento h_2 (obtido com número de subdivisões n_2), obtêm-se, a partir da figura 3.9.

$$h_1 = \frac{(b-a)}{n_1} \quad \text{e} \quad h_2 = \frac{(b-a)}{n_2} .$$

Para as diferenças finitas provenientes de emprego de $PI-2$, desprezando-se o erro da ordem superior a h^2 e chamando de e_1 e e_2 os erros correspondentes aos valores V_1 e V_2 , respectivamente, resultam:

$$e_1 = V - V_1 = c_1 \left(\frac{b-a}{n_1} \right)^2$$

$$e_2 = V - V_2 = c_1 \left(\frac{b-a}{n_2} \right)^2$$

onde c_1 é desconhecida e V é o valor extrapolado.

Resolvendo o sistema, obtêm-se que

$$V = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} V_2 - \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} V_1$$

ou, expressando-o de forma mais compacta vem que

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 .$$

Analogamente, para as diferenças finitas provenientes de emprego de $PI-4$, desprezando-se o erro da ordem superior a h^4 , obtêm-se

$$V = \frac{n_2^4}{n_2^4 - n_1^4} V_2 - \frac{n_1^4}{n_2^4 - n_1^4} V_1$$

ou

$$V = \gamma_1 V_2 - \gamma_2 V_1 .$$

Várias aplicações das extrapolações de Richardson para a obtenção de melhores aproximações, podem ser encontradas, por exemplo, em SALVADORI(1967), em DEBS(1976).

A seguir utiliza-se as extrapolações de Richardson para melhor aproximar os valores de M_x obtidos, por exemplo, pela aproximação γ . Naturalmente isso é possível pois é observado a convergência monotônica desses valores aos exatos. As extrapolações a serem utilizadas são do tipo h^2 , uma vez que a aproximação γ emprega expressões de diferenças finitas provenientes de PI-2.

Utilizando então, os valores de M_x obtidos com $n=12$ e 24 , desprezando o valor no ponto 2 (borda livre) por ser, como já visto, muito impreciso, obtêm-se os seguintes valores extrapolados:

EXATO	n = 12	n = 24	VALOR EXTRAPOLADO
4.370	2.420	4.161	4.741
20.786	18.904	20.265	20.719
53.825	50.056	52.805	53.721
106.572	100.120	104.848	106.424
178.483	168.953	175.948	178.280
262.050	250.058	258.897	261.843
338.315	326.213	335.172	338.158
371.763	364.336	369.857	371.697
305.860	310.629	307.139	305.973
61.531	88.182	68.463	61.890
-457.828	-399.627	-442.804	-457.196
-1349.817	-1255.020	-1325.490	-1348.980

Note-se que, a menos do primeiro, os valores extrapolados são até melhores que os obtidos pela aproximação γ com $n=48$. Note-se também que as extrapolações de Richardson não se aplicam aos valores provenientes das aproximações com rede dual. Pois com esse tipo de rede, as nodulações obtidas mediante variação da abertura da malha são sempre distintas, não ocorrendo coincidência sequer de um nó.

3.6.5.3 - Obtenção da força cortante

Sugere-se neste item, uma possibilidade de aproximação do cálculo da força cortante Q_x a partir dos valores de M_x , obtidos por meio de uma daquelas aproximações, estudadas anteriormente. Essa se baseia, também, na utilização de expressões em diferenças finitas de derivadas. Como sugestão, as provenientes de *PI-2*.

Observando as aproximações para o cálculo das rotações e momentos, descritas no item 3.3.3.1, vê-se que Q_x pode ser expressa como

$$\{Q_x\} = \{M_x\} \cdot [P_x].$$

Para melhor esclarecê-la, apresentam-se a seguir os valores dessa grandeza, em tf/m , obtidos por essa aproximação, empregando-se os valores de M_x provenientes da aproximação γ e a matriz derivada $[P_x]_\alpha$, para $n = 6, 12, 24, 48$ e 64. Isto é:

$$\begin{aligned} \{M_x\} &= \{M_x\}_\gamma \\ [P_x] &= [P_x]_\alpha \end{aligned}$$

Para a verificação da precisão dos valores de Q_x obtidos, por essas aproximações, necessitar-se-ia dos valores exatos dessa grandeza nesses pontos. Porém, como a preocupação deste item não é o estudo de aproximação de cálculo de Q_x , pelo menos no momento, não se faz aqui tal verificação. Apresenta-se apenas o valor exato de Q_x no ponto do engastamento, devido ao pouco trabalho adicional exigido para isso, pois, a expressão dessa grandeza para este ponto é, simplesmente (veja BELLUZZI 1957, vol.III, p. 342):

$$(Q_x)_{eng} = -\gamma_\alpha \frac{2\sqrt{\alpha}H-1}{2\alpha^2} \quad (\text{líquido até à borda livre})$$

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 6 - REDE HABITUAL

PCNTG	PX	CX
2	10.845	-5.695
4	10.845	5.695
6	86.781	15.055
8	222.239	19.383
10	345.220	-5.219
12	152.647	-101.574
14	-1009.095	+246.949

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE HABITUAL

PCNTG	PX	CX
2	2.420	-2.473
4	2.420	2.473
6	18.904	7.146
8	50.056	12.182
10	100.120	17.834
12	168.953	22.491
14	290.058	23.589
16	326.213	17.142
18	364.336	-2.338
20	310.629	-41.423
22	88.182	-106.538
24	-399.627	-201.480
26	-1255.020	-311.756

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE HABITUAL

PCNTG	PX	CX
2	.595	-1.070
4	.595	1.070
6	4.161	2.950
8	10.428	4.831
10	20.265	7.146
12	34.246	9.762
14	52.805	12.617
16	76.302	15.613
18	104.848	18.590
20	138.268	21.330
22	175.948	23.553
24	216.779	24.885
26	258.897	24.846
28	299.597	22.882
30	335.172	18.320
32	360.663	10.405
34	369.857	-1.682
36	355.055	-18.815
38	307.139	-41.858
40	215.529	-71.603
42	68.463	-108.664
44	-146.683	-153.380
46	-442.804	-205.661
48	-832.220	-264.806
50	-1325.490	-327.118

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - REDE HABITUAL

PCNTC	PX	CX
2	.160	-.457
4	.160	.457
6	.922	1.283
8	2.298	2.016
10	4.282	2.843
12	7.036	3.816
14	10.643	4.842
16	15.106	5.682
18	20.613	7.188
20	27.086	8.446
22	34.689	9.805
24	43.428	11.239
26	53.421	12.714
28	64.618	14.194
30	77.078	15.771
32	90.903	17.276
34	105.872	18.765
36	122.177	20.220
38	139.572	21.555
40	158.102	22.742
42	177.475	23.846
44	197.845	24.725
46	218.663	25.197
48	239.841	25.433
50	261.072	25.230
52	281.891	24.505
54	301.913	23.247
56	320.636	21.324
58	337.454	18.644
60	351.709	15.128
62	362.668	10.635
64	369.434	5.142
66	371.237	-1.522
68	366.898	-9.476
70	355.444	-18.743
72	335.660	-29.567
74	306.166	-41.979
76	265.695	-56.047
78	212.755	-71.895
80	145.871	-89.599
82	63.423	-109.212
84	-36.150	-130.732
86	-154.463	-154.214
88	-293.172	-179.580
90	-453.763	-206.770
92	-637.790	-235.707
94	-846.608	-266.190
96	-1081.440	-298.019
98	-1343.305	-330.457

ENSAIO DE APLICAC PANA N° 64 - REDE FAMILIAL

PCATC	PX	CX
2	.077	-.363
4	.077	.363
6	.531	.866
8	1.160	1.379
10	2.254	1.953
12	3.601	2.601
14	5.505	3.268
16	7.686	3.542
18	10.433	4.821
20	13.713	5.586
22	17.415	6.471
24	21.802	7.448
26	26.725	8.340
28	32.227	9.401
30	38.477	10.436
32	45.272	11.549
34	52.913	12.676
36	61.117	13.743
38	70.093	14.987
40	79.850	16.113
42	90.234	17.266
44	101.432	18.307
46	113.118	19.401
48	125.684	20.443
50	138.672	21.380
52	152.409	22.422
54	166.699	23.281
56	181.510	23.971
58	196.663	24.557
60	212.207	24.987
62	227.897	25.286
64	243.815	25.339
66	259.570	25.104
68	275.195	24.740
70	290.495	24.023
72	305.225	22.826
74	319.027	21.315
76	331.869	19.544
78	343.457	17.148
80	353.304	14.323
82	361.361	10.698
84	366.927	6.797
86	369.857	2.044
88	369.482	-3.216
90	365.837	-9.297
92	357.861	-16.211
94	345.573	-23.646
96	328.304	-32.240
98	305.273	-41.654
100	276.237	-51.966
102	240.316	-63.503
104	196.859	-75.820
106	145.540	-89.193
108	85.368	-103.776
110	15.820	-119.336
112	-63.802	-135.990
114	-154.167	-153.770
116	-256.014	-172.650
118	-369.979	-192.490
120	-496.627	-213.395
122	-636.723	-235.275
124	-790.721	-257.999
126	-959.222	-281.550
128	-1142.659	-305.763
130	-1341.426	-330.291

que vale, para as dimensões do reservatório ensaiado (veja item 3.2.2)

$$(Q_x)_{eng} = -10^9 \frac{2 \times 1.064721 \times 10^4 \times 4 \times 10^4 - 1}{2 \times (1.064721 \times 10^4)^2}$$

$$\approx - 332.4 \text{ tf/m}$$

Disso, vê-se que, pelo menos, os valores de $(Q_x)_{eng}$ obtidos pela aproximação sugerida não são imprecisos.

3.6.5.4 - Ensaio suplementares

Esses ensaios foram feitos visando a verificação do comportamento das oito aproximações do cálculo de M_x , estudadas neste capítulo (quatro aproximações com rede habitual e quatro com rede dual), à medida que se diminui a espessura da parede do reservatório. Isto por essa grandeza ser a mais importante das três (w , ψ e M_x), como já se frisou anteriormente.

Para isso, fizeram-se os ensaios com as seguintes espessuras da parede do reservatório

$$(1) \ d = 180 \text{ cm,}$$

$$(2) \ d = 45 \text{ cm,}$$

$$(3) \ d = 20 \text{ cm,}$$

$$(4) \ d = 11 \text{ cm,}$$

determinadas em função do comprimento de onda λ (veja item 3.2), de modo que essas espessuras correspondam respectivamente às seguintes relações entre λ e H : $\lambda = H$, $\lambda = 1/2 H$, $\lambda = 1/3 H$ e $\lambda = 1/4 H$.

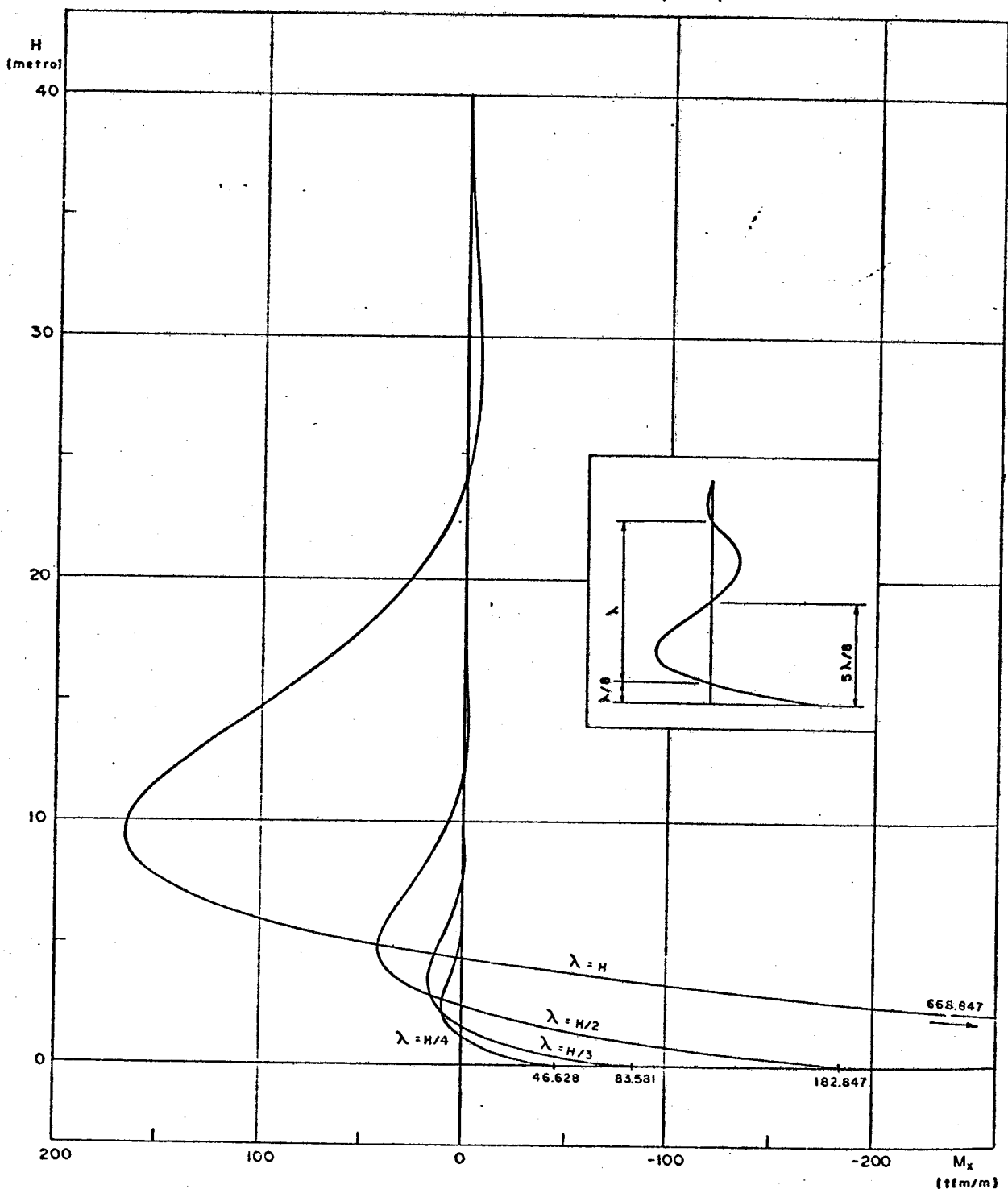
Para cada espessura aproximou-se o cálculo da grandeza M_x , com as seguintes subdivisões da altura H do reservatório: $n=12$, 24 e 48 .

As análises dos resultados do cálculo do esforço M_x , foram feitas visando apenas a verificação do comportamento das aproximações desse cálculo. Por isso, não se procurou aqui desenvolver análises detalhadas como se fizeram

no item 3.5.

a) Análise das Aproximações do Cálculo do Esforço M_x

Para melhor analisar o comportamento das aproximações do cálculo do esforço M_x , verifica-se primeiramente o comportamento desse esforço ao longo da altura H do reservatório, para as quatro espessuras de sua parede, correspondentes às quatro relações entre λ e H pesquisadas.



Do diagrama de M_x da página anterior tem-se que:

- (1) $M_x = 0$ nos pontos $x = \frac{\lambda}{8}$ e $x = \frac{5\lambda}{8}$ medindo x a partir do engastamento.
- (2) Os valores de M_x mais significativos estão compreendidos na região da linha de engastamento até a altura $5\lambda/8$.
- (3) Na região acima dessa altura, os valores de M_x em valor absoluto, correspondem aproximadamente a 5% do máximo M_x positivo. Consequentemente desprezíveis, pois o máximo M_x positivo não ultrapassa os 25% do máximo M_x negativo (engastamento). Isto, naturalmente para as espessuras de parede cuja relação λ/H é menor ou igual à unidade ($\lambda/H \leq 1$).

Agora, analisando-se os resultados provenientes das aproximações, com rede habitual e dual, vêem-se que as melhores aproximações são a γ (para com rede habitual) e a B (para com rede dual), e que há a necessidade de se ir refinando cada vez mais a malha, à medida que se diminua a espessura, para se obter bons resultados. Isto, naturalmente, se deve ao fato de que o erro cometido ao se aproximar as derivadas por meio de expressões em diferenças finitas é da ordem de, no caso, h^2 ou h^4 . Lembre-se que h é a abertura da malha, logo independe da espessura do reservatório. Note-se também que, à medida que se diminua a espessura diminui-se a magnitude de M_x , e conseqüentemente aumenta-se a magnitude de N_θ , pois a estrutura tende a se comportar em regime de membrana. Portanto, para uma mesma abertura de malha (logo cometendo um erro da ordem, de h^2 ou h^4), obtêm-se valores de M_x , por meio dessas aproximações, cada vez mais imprecisos à medida que se adotam espessuras menores, mantendo-se constantes os outros parâmetros geométricos. Além disso, devido ao fato de que a diminuição da espessura, implica na diminuição do comprimento de onda, e conseqüentemente, a diminuição da região onde se verificam esforços M_x

mais significativos, os resultados obtidos por essas aproximações, ao se fixar uma abertura de malha para espessuras cada vez menores da parede do reservatório, são equivalentes aos obtidos ao se fixar a espessura e ir aumentando o tamanho da malha da rede utilizada. Nota-se bem isso, pelos diagramas de M_x .

Lembre-se porém, que o refinamento da malha aumenta o sistema de equações minimizantes, e que as incógnitas são os deslocamentos w . Considerando que utilizar-se-á do computador para sua resolução, provavelmente obter-se-ão valores de w cada vez menos precisos, quanto maior for a ordem do sistema.

Diante disto, sugere-se que se adote, na região compreendida da linha de engastamento até à altura $5\lambda/8$, malhas apertadas, cuja abertura pode ser determinada de maneira análoga ao item 3.5. Acima dessa região, pode-se adotar malhas bem mais largas a fim de evitar o aumento excessivo do sistema de equações.

Possivelmente, com isto poderão se obter melhores resultados de M_x , com menos exigência de trabalho do computador. É ponto a ser analisado.

A seguir apresentam-se os resultados dos ensaios suplementares.

Ensaïos com espessura de parede d=180cm

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REUE HABITUAL

PONTC	M O M E N T O M X				
	ANALITICC	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	-.758	2.500	-.758	2.500
4	-1.207	-.758	-.817	-.758	-.817
6	-3.915	-3.365	-3.425	-3.365	-3.425
8	-5.327	-5.263	-5.497	-5.263	-5.497
10	-5.435	-4.354	-4.931	-4.354	-4.932
12	3.580	3.489	2.454	3.489	2.454
14	26.818	23.753	22.351	23.753	22.351
16	68.513	60.837	59.689	60.837	59.689
18	123.526	111.691	112.386	111.691	112.385
20	164.543	154.205	159.660	154.205	159.660
22	124.253	131.261	145.502	131.261	145.502
24	-104.106	-62.583	-48.341	-62.583	1.100
26	-659.847	-52.583	-413.043	-573.906	-956.932

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REUE HABITUAL

PONTC	M O M E N T O M X				
	ANALITICC	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	-.223	.512	-.223	.512
4	-.329	-.223	-.203	-.223	-.203
6	-1.207	-1.181	-1.161	-1.181	-1.161
8	-2.467	-2.382	-2.368	-2.382	-2.368
10	-3.915	-3.757	-3.761	-3.757	-3.762
12	-3.308	-5.073	-5.103	-5.073	-5.103
14	-6.327	-6.031	-6.094	-6.031	-6.094
16	-6.551	-6.239	-6.337	-6.239	-6.337
18	-5.435	-5.147	-5.306	-5.147	-5.307
20	-2.314	-2.143	-2.365	-2.143	-2.365
22	3.580	3.526	3.234	3.526	3.238
24	13.050	12.646	12.299	12.646	12.299
26	26.418	25.933	25.547	25.933	25.547
28	45.335	43.852	43.469	43.852	43.469
30	68.513	66.359	66.050	66.359	66.050
32	95.359	92.566	92.442	92.566	92.440
34	123.526	120.266	120.475	120.266	120.475
36	148.797	145.453	146.194	145.453	146.193
38	164.544	161.757	163.265	161.757	163.264
40	161.253	159.963	162.504	159.963	162.503
42	126.252	127.683	131.517	127.683	131.517
44	43.814	49.401	54.736	49.401	54.735
46	-104.107	-92.905	-85.988	-92.905	-85.988
48	-336.202	-318.222	-311.305	-318.222	-289.009
50	-659.847	-318.222	-619.632	-643.716	-864.890

ENSAIO DE APLICACAO PARA N= 48 - REDE FACILCAL

PCNTC	M O D E L O				
	ANALITICO	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	-.058	.114	-.058	.114
4	-.085	-.058	-.045	-.058	-.049
6	-.329	-.329	-.320	-.329	-.320
8	-.705	-.709	-.700	-.709	-.699
10	-1.207	-1.201	-1.193	-1.201	-1.194
12	-1.801	-1.787	-1.781	-1.787	-1.782
14	-2.467	-2.448	-2.444	-2.448	-2.444
16	-3.181	-3.153	-3.151	-3.153	-3.151
18	-3.915	-3.880	-3.881	-3.880	-3.883
20	-4.636	-4.589	-4.591	-4.589	-4.592
22	-5.308	-5.256	-5.265	-5.256	-5.263
24	-5.888	-5.822	-5.832	-5.822	-5.835
26	-6.327	-6.255	-6.271	-6.255	-6.271
28	-6.569	-6.497	-6.520	-6.497	-6.522
30	-6.551	-6.466	-6.491	-6.466	-6.492
32	-6.199	-6.122	-6.156	-6.122	-6.156
34	-5.435	-5.364	-5.403	-5.364	-5.405
36	-4.171	-4.113	-4.162	-4.113	-4.163
38	-2.314	-2.281	-2.338	-2.281	-2.339
40	.236	.240	.176	.240	.174
42	3.580	3.546	3.472	3.546	3.473
44	7.819	7.735	7.652	7.735	7.652
46	13.050	12.923	12.833	12.923	12.830
48	19.360	19.168	19.072	19.168	19.072
50	26.818	26.567	26.470	26.567	26.472
52	35.472	35.150	35.051	35.150	35.051
54	45.235	44.939	44.841	44.939	44.842
56	56.277	55.896	55.804	55.896	55.804
58	68.513	67.940	67.860	67.940	67.856
60	81.866	80.915	80.853	80.915	80.853
62	96.358	94.803	94.876	94.803	94.870
64	111.990	108.646	108.650	108.646	108.648
66	128.766	122.635	122.692	122.635	122.690
68	136.875	135.647	136.064	135.647	136.057
70	148.757	147.877	148.066	147.877	148.064
72	158.383	157.508	157.785	157.508	157.783
74	164.543	163.781	164.172	163.781	164.169
76	165.595	165.395	165.906	165.395	165.906
78	161.253	160.503	161.554	160.503	161.555
80	148.632	148.589	149.356	148.589	149.396
82	126.253	126.611	127.589	126.611	127.586
84	92.052	92.511	94.074	92.511	94.075
86	43.816	45.259	46.614	45.259	46.612
88	-20.778	-18.643	-17.088	-18.643	-17.050
90	-104.105	-101.196	-99.446	-101.196	-99.447
92	-202.508	-204.743	-202.806	-204.743	-202.807
94	-336.201	-331.525	-329.424	-331.525	-329.424
96	-469.135	-483.525	-481.424	-483.525	-470.615
98	-666.847	-483.525	-658.641	-662.317	-777.533

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE DUAL

PCNTC	M O M E N T O				
	ANALITICO	APRCX.A	APRCX.E	APRCX.C	APRCX.L
1		.000	1.674	.000	1.674
3	-.329	.000	.036	.000	.036
5	-2.467	-2.069	-2.033	-2.069	-2.033
7	-5.308	-4.568	-4.723	-4.568	-4.723
9	-6.551	-5.213	-5.677	-5.213	-5.676
11	-2.314	-.285	-1.195	-.285	-1.195
13	13.050	15.567	14.203	15.567	14.203
15	45.235	47.785	46.374	47.785	46.375
17	55.359	56.928	56.715	56.928	56.719
19	142.797	148.588	152.111	148.588	152.111
21	161.293	157.971	169.107	157.971	169.107
23	43.815	33.723	44.855	33.723	46.602
25	-336.202	33.723	-213.021	-486.693	-515.524

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE DUAL

PCNTC	M O M E N T O				
	ANALITICO	APRCX.A	APRCX.E	APRCX.C	APRCX.U
1		.000	.212	.000	.212
3	-.085	.000	.038	.000	.038
5	-.709	-.627	-.589	-.627	-.589
7	-1.801	-1.710	-1.687	-1.710	-1.687
9	-3.181	-3.066	-3.062	-3.066	-3.062
11	-4.636	-4.478	-4.496	-4.478	-4.496
13	-5.888	-5.670	-5.719	-5.670	-5.719
15	-6.569	-6.277	-6.365	-6.277	-6.365
17	-8.159	-5.824	-5.962	-5.824	-5.963
19	-4.171	-3.712	-3.509	-3.712	-3.510
21	.236	.769	.505	.769	.506
23	7.819	8.409	8.083	8.409	8.082
25	19.360	19.975	19.597	19.975	19.597
27	35.472	36.074	35.676	36.073	35.679
29	56.278	56.921	56.566	56.921	56.566
31	81.526	82.018	81.798	82.019	81.797
33	109.490	109.768	109.815	109.768	109.815
35	136.876	136.947	137.441	136.947	137.440
37	158.283	158.197	159.362	158.196	159.363
39	165.999	165.467	167.560	165.468	167.560
41	148.633	147.616	150.908	147.616	150.909
43	92.051	90.258	94.991	90.258	94.990
45	-20.781	-23.882	-17.563	-23.882	-17.563
47	-208.511	-213.854	-207.535	-213.854	-227.917
49	-485.137	-213.854	-473.336	-664.311	-669.013

ENSAIO DE APERICAC PARA N = 48 - REDE LOCAL

PCNTQ	M E N T O				
	ANALITICO	APROX.A	APROX.B	APROX.C	APROX.D
1		.002	.045	.002	.045
3	-.022	.002	.014	.002	.014
5	-.185	-.170	-.158	-.170	-.158
7	-.503	-.482	-.471	-.482	-.472
9	-.945	-.925	-.916	-.925	-.916
11	-1.494	-1.471	-1.464	-1.471	-1.463
13	-2.127	-2.103	-2.092	-2.103	-2.092
15	-2.820	-2.790	-2.787	-2.790	-2.786
17	-3.548	-3.513	-3.514	-3.513	-3.512
19	-4.279	-4.244	-4.247	-4.244	-4.248
21	-4.981	-4.936	-4.940	-4.936	-4.940
23	-5.612	-5.560	-5.571	-5.561	-5.570
25	-6.125	-6.062	-6.076	-6.062	-6.074
27	-6.477	-6.409	-6.430	-6.408	-6.431
29	-6.597	-6.507	-6.532	-6.506	-6.531
31	-6.421	-6.320	-6.352	-6.326	-6.352
33	-5.874	-5.770	-5.808	-5.771	-5.809
35	-4.871	-4.747	-4.792	-4.746	-4.791
37	-3.323	-3.190	-3.246	-3.188	-3.244
39	-1.132	-.994	-1.052	-.997	-1.057
41	1.803	1.954	1.825	1.956	1.820
43	5.582	5.741	5.666	5.740	5.664
45	10.305	10.462	10.377	10.463	10.376
47	16.065	16.215	16.120	16.216	16.122
49	22.942	23.086	22.991	23.084	22.986
51	30.994	31.113	31.011	31.115	31.013
53	40.253	40.364	40.266	40.363	40.267
55	50.713	50.797	50.732	50.797	50.694
57	62.316	62.394	62.308	62.393	62.316
59	74.945	74.991	74.918	74.989	74.922
61	88.404	88.450	88.409	88.449	88.412
63	102.405	102.402	102.308	102.404	102.392
65	116.554	116.518	116.548	116.516	116.547
67	130.325	130.274	130.360	130.276	130.358
69	143.067	142.978	143.135	142.977	143.126
71	153.946	153.825	154.052	153.825	154.060
73	161.967	161.833	162.171	161.834	162.171
75	165.946	165.770	166.223	165.769	166.222
77	164.495	164.304	164.688	164.305	164.691
79	156.041	155.794	156.526	155.791	156.527
81	138.789	138.493	139.395	138.495	139.395
83	110.766	110.383	111.462	110.382	111.458
85	69.832	69.345	70.613	69.345	70.613
87	13.711	13.091	14.552	13.091	14.555
89	-59.952	-60.765	-59.101	-60.765	-59.101
91	-153.529	-154.597	-152.740	-154.597	-152.741
93	-269.315	-270.713	-268.679	-270.713	-268.679
95	-409.406	-411.244	-409.210	-411.244	-409.210
97	-575.570	-411.244	-574.154	-770.636	-754.325

Ensaïos com espessura de parede d=45cm

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE HABITUAL

PONTC	M C M E N T O				
	ANALITICC	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	-.000	.004	-.000	.004
4	-.002	-.000	-.001	-.000	-.001
6	-.003	.001	.001	.001	.001
8	.012	.009	.008	.009	.008
10	.056	.019	.023	.019	.023
12	.061	-.013	.002	-.013	.002
14	-.296	-.231	-.209	-.231	-.209
16	-1.341	-.711	-.779	-.711	-.779
18	-1.330	-.373	-.828	-.373	-.828
20	7.371	5.424	4.426	5.424	4.426
22	31.872	23.196	23.921	23.196	23.921
24	28.905	32.258	32.983	32.258	56.338
26	-182.847	32.258	33.336	-104.384	-220.265

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE HABITUAL

PONTC	M C M E N T O				
	ANALITICC	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	-.000	.001	-.000	.001
4	-.001	-.000	-.000	-.000	-.000
6	-.002	-.001	-.001	-.001	-.001
8	-.002	-.002	-.002	-.002	-.002
10	-.003	-.001	-.001	-.001	-.001
12	.001	.002	.002	.002	.002
14	.012	.011	.010	.011	.010
16	.031	.025	.025	.025	.025
18	.056	.043	.043	.043	.043
20	.076	.054	.057	.054	.057
22	.061	.035	.041	.035	.041
24	-.042	-.055	-.045	-.055	-.045
26	-.296	-.267	-.254	-.267	-.254
28	-.749	-.636	-.627	-.636	-.627
30	-1.341	-1.111	-1.123	-1.111	-1.123
32	-1.772	-1.444	-1.505	-1.444	-1.505
34	-1.330	-1.038	-1.187	-1.038	-1.187
36	1.207	1.157	.894	1.157	.894
38	7.371	6.515	6.167	6.515	6.167
40	18.122	16.048	15.786	16.048	15.786
42	31.873	28.727	28.970	28.727	28.970
44	41.156	38.491	39.689	38.491	39.689
46	28.905	30.280	34.039	30.280	34.039
48	-23.978	-23.031	-19.273	-23.031	-6.450
50	-182.847	-23.031	-117.684	-158.057	-258.732

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - REDE HABITUAL

PCNTC	ANALITICO	M O M E N T O			
		AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	-.000	.000	-.000	.000
4	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
6	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
8	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
10	-.002	-.002	-.002	-.002	-.002
12	-.002	-.002	-.002	-.002	-.002
14	-.003	-.003	-.003	-.003	-.003
16	-.003	-.003	-.003	-.003	-.003
18	-.003	-.002	-.002	-.002	-.002
20	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
22	.001	.001	.001	.001	.001
24	.006	.006	.005	.006	.005
26	.012	.011	.011	.011	.011
28	.020	.019	.019	.019	.019
30	.031	.029	.029	.029	.029
32	.043	.041	.041	.041	.041
34	.056	.053	.053	.053	.053
36	.068	.064	.064	.064	.064
38	.076	.071	.071	.071	.071
40	.075	.069	.070	.069	.070
42	.061	.054	.055	.054	.055
44	.024	.019	.021	.019	.021
46	-.042	-.045	-.042	-.045	-.042
48	-.146	-.145	-.142	-.145	-.142
50	-.296	-.288	-.283	-.288	-.284
52	-.498	-.479	-.476	-.479	-.476
54	-.745	-.717	-.714	-.717	-.714
56	-1.039	-.992	-.991	-.992	-.991
58	-1.341	-1.277	-1.280	-1.277	-1.280
60	-1.610	-1.530	-1.539	-1.530	-1.538
62	-1.772	-1.683	-1.699	-1.683	-1.700
64	-1.725	-1.634	-1.661	-1.634	-1.661
66	-1.330	-1.252	-1.293	-1.252	-1.293
68	-.418	-.376	-.433	-.376	-.433
70	1.207	1.188	1.114	1.188	1.114
72	3.745	3.630	3.542	3.630	3.542
74	7.370	7.126	7.029	7.126	7.030
76	12.180	11.776	11.683	11.776	11.683
78	18.122	17.542	17.472	17.542	17.472
80	24.903	24.157	24.138	24.157	24.138
82	31.872	31.007	31.077	31.007	31.078
84	37.890	37.010	37.222	37.010	37.222
86	41.156	40.468	40.821	40.468	40.821
88	39.256	38.968	39.649	38.968	39.649
90	28.905	29.295	30.307	29.295	30.307
92	5.958	7.479	8.871	7.479	8.870
94	-32.977	-31.030	-29.248	-31.030	-29.248
96	-95.633	-90.925	-89.143	-90.925	-83.352
98	-182.847	-90.925	-170.423	-176.292	-234.122

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - PEDE DUAL

PCNTC	ANALITIC	M O M E N T O		APRCX.C	APROX.D
		APRCX.A	APRCX.B		
1		.000	.004	.000	.004
3	-.001	.000	-.000	.000	-.000
5	-.003	.001	.000	.001	.000
7	.001	.007	.007	.007	.007
9	.031	.020	.022	.020	.022
11	.076	.003	.017	.003	.017
13	-.042	-.179	-.152	-.179	-.152
15	-.749	-.679	-.715	-.679	-.715
17	-1.772	-.756	-1.137	-.756	-1.137
19	1.207	3.740	2.697	3.740	2.697
21	18.122	20.752	20.610	20.752	20.610
23	41.196	39.465	39.324	39.465	48.000
25	-33.978	39.465	59.735	-73.317	-82.244

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE DUAL

PCNTC	ANALITIC	M O M E N T O		APROX.C	APRCX.D
		APRCX.A	APRCX.B		
1		-.000	.001	-.000	.001
3	-.000	-.000	.000	-.000	.000
5	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
7	-.002	-.002	-.002	-.002	-.002
9	-.003	-.002	-.002	-.002	-.002
11	-.001	.001	.001	.001	.001
13	.006	.008	.007	.008	.007
15	.020	.020	.020	.020	.020
17	.043	.038	.039	.038	.039
19	.068	.055	.056	.055	.056
21	.075	.050	.054	.050	.054
23	.024	-.012	-.003	-.012	-.003
25	-.146	-.184	-.171	-.184	-.171
27	-.492	-.512	-.500	-.512	-.500
29	-1.035	-.988	-.990	-.988	-.990
31	-1.610	-1.441	-1.423	-1.441	-1.483
33	-1.725	-1.391	-1.511	-1.391	-1.511
35	-.418	.093	-.141	.093	-.141
37	3.745	4.376	4.033	4.378	4.033
39	12.180	12.802	12.460	12.802	12.459
41	24.903	25.331	25.326	25.331	25.326
43	37.890	37.920	38.914	37.920	38.914
45	39.296	38.584	41.567	38.584	41.567
47	5.957	3.455	6.438	3.455	6.414
49	-55.634	3.455	-64.425	-137.903	-145.259

ENSAIO DE AFERICAC PARA N° 48 - REDE CUAL

PCNTC	M E N T O				
	ANALITICO	APRCX.A	APRCX.F	APRCX.C	APRCX.U
1		.000	.000	.000	.000
3	-.000	.000	.000	.000	.000
5	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
7	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
9	-.001	-.001	-.002	-.001	-.002
11	-.002	-.002	-.002	-.002	-.002
13	-.003	-.003	-.003	-.003	-.003
15	-.003	-.002	-.002	-.002	-.002
17	-.003	-.003	-.003	-.003	-.003
19	-.002	-.001	-.001	-.001	-.001
21	-.000	.001	.000	.001	.001
23	.003	.004	.004	.004	.004
25	.008	.009	.009	.009	.009
27	.016	.016	.016	.016	.016
29	.025	.025	.025	.025	.025
31	.037	.036	.035	.036	.035
33	.050	.049	.049	.049	.049
35	.063	.059	.060	.059	.060
37	.073	.068	.069	.068	.068
39	.077	.072	.073	.072	.073
41	.070	.063	.064	.063	.064
43	.046	.037	.039	.037	.039
45	-.074	-.014	-.012	-.014	-.012
47	-.088	-.099	-.096	-.099	-.096
49	-.215	-.224	-.220	-.224	-.220
51	-.351	-.397	-.393	-.397	-.393
53	-.618	-.618	-.615	-.618	-.615
55	-.890	-.882	-.880	-.882	-.880
57	-1.151	-1.172	-1.173	-1.172	-1.173
59	-1.483	-1.449	-1.455	-1.449	-1.455
61	-1.710	-1.658	-1.671	-1.658	-1.671
63	-1.753	-1.711	-1.734	-1.711	-1.734
65	-1.581	-1.488	-1.523	-1.488	-1.524
67	-.951	-.835	-.886	-.835	-.886
69	.253	.427	.360	.427	.360
71	2.350	2.497	2.414	2.497	2.414
73	5.413	5.568	5.473	5.568	5.473
75	9.626	9.777	9.680	9.777	9.679
77	15.020	15.159	15.074	15.159	15.074
79	21.438	21.552	21.506	21.553	21.506
81	28.422	28.502	28.522	28.502	28.522
83	35.054	35.129	35.275	35.129	35.275
85	40.020	39.996	40.320	39.996	40.320
87	41.023	40.580	41.548	40.580	41.548
89	35.397	35.171	36.046	35.171	36.046
91	19.292	18.857	20.099	18.857	20.099
93	-11.562	-12.359	-10.720	-12.359	-10.719
95	-61.824	-63.248	-61.608	-63.248	-61.417
97	-135.263	-63.248	-132.169	-184.449	-185.239

Ensaio com espessura de parede d=20cm

ENSAIO DE APERIAC PARA N= 12 - REDE HABITUAL

PCNTC	M C M E N T O				
	ANALITICO	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	.000	-.000	.000	.000
4	-.000	.000	.000	.000	.000
6	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
8	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
10	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
12	-.001	.001	.000	.001	.000
14	.005	.002	.003	.002	.003
16	.034	-.005	-.002	-.009	-.002
18	-.136	-.056	-.102	-.096	-.102
20	-.789	-.104	-.327	-.104	-.327
22	3.373	2.555	1.896	2.555	1.896
24	18.317	13.122	12.463	13.122	21.154
26	-83.581	13.122	30.938	-28.024	-64.661

ENSAIO DE APERIAC PARA N= 24 - REDE HABITUAL

PCNTC	M C M E N T O				
	ANALITICO	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.DELTA
2	.000	.000	.000	.000	-.000
4	-.000	.000	-.000	.000	-.000
6	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
8	-.000	.000	.000	.000	.000
10	.000	.000	.000	.000	.000
12	.000	.000	.000	.000	.000
14	.000	.000	.000	.000	.000
16	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
18	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
20	-.001	-.000	-.000	-.000	-.000
22	-.001	-.000	-.001	-.000	-.001
24	-.001	.001	.000	.001	.000
26	.005	.004	.004	.004	.004
28	.020	.011	.012	.011	.012
30	.034	.015	.017	.015	.017
32	.010	-.010	-.004	-.010	-.004
34	-.136	-.112	-.102	-.112	-.102
36	-.468	-.323	-.326	-.323	-.326
38	-.789	-.501	-.558	-.501	-.558
40	-.156	.014	-.165	.014	-.165
42	3.373	2.670	2.373	2.670	2.373
44	11.223	8.859	8.835	8.899	8.835
46	18.317	15.893	17.239	15.893	17.239
48	1.921	6.727	8.073	6.727	16.553
50	-83.581	6.727	-17.252	-60.738	-114.523

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - NECE PARITUAL

PONTC	ANALITICO	M O M E N T U			
		AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.CELTA
2	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
4	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
6	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
8	-.000	.000	.000	.000	-.000
10	-.000	-.000	-.000	-.000	.000
12	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
14	-.000	.000	.000	.000	.000
16	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
18	.000	.000	.000	.000	.000
20	.000	.000	.000	.000	.000
22	.000	.000	.000	.000	.000
24	.000	.000	.000	.000	.000
26	.000	.000	.000	.000	.000
28	.000	.000	-.000	.000	-.000
30	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
32	-.000	-.000	.000	-.000	-.000
34	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
36	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
38	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
40	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
42	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
44	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
46	-.001	-.000	-.000	-.000	-.000
48	.002	.002	.002	.002	.002
50	.005	.005	.005	.005	.005
52	.012	.010	.010	.010	.010
54	.020	.017	.017	.017	.017
56	.028	.024	.024	.024	.024
58	.034	.028	.028	.028	.028
60	.031	.024	.024	.024	.024
62	.010	.003	.003	.003	.003
64	-.042	-.043	-.040	-.043	-.040
66	-.136	-.127	-.124	-.127	-.124
68	-.280	-.256	-.253	-.256	-.253
70	-.468	-.422	-.421	-.422	-.421
72	-.665	-.595	-.600	-.595	-.600
74	-.789	-.701	-.717	-.701	-.717
76	-.693	-.608	-.641	-.608	-.641
78	-.156	-.114	-.170	-.114	-.170
80	1.104	1.041	.963	1.041	.963
82	3.373	3.134	3.042	3.134	3.042
84	6.810	6.331	6.250	6.331	6.250
86	11.223	10.495	10.478	10.495	10.478
88	15.725	14.854	14.988	14.854	14.988
90	18.317	17.602	18.010	17.602	18.010
92	15.471	15.455	16.282	15.455	16.282
94	1.931	3.387	4.761	3.387	4.761
96	-28.514	-25.162	-23.789	-25.162	-19.680
98	-83.581	-25.162	-68.820	-77.088	-114.016

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE DUAL

PCNTC	ANALITICO	M C M E N T O		MX	APRCX.C	APRCX.D
		APRCX.A	APRCX.E			
1		.000		-.000	.000	-.000
3	-.000	.000		.000	.000	.000
5	-.000	-.000		-.000	-.000	-.000
7	.000	-.000		-.000	-.000	-.000
9	.000	-.000		-.000	-.000	-.000
11	-.001	.000		.000	.000	.000
13	-.001	.002		.003	.002	.003
15	.020	-.006		.000	-.006	.000
17	.010	-.090		-.091	-.090	-.091
19	-.462	-.167		-.364	-.167	-.364
21	-.156	2.129		1.381	2.129	1.381
23	11.223	13.395		12.647	13.395	16.787
25	1.931	13.395		32.884	-18.406	-21.112

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE DUAL

PCNTC	ANALITICO	M C M E N T O		MX	APRCX.C	APRCX.U
		APRCX.A	APRCX.B			
1		.000		.000	.000	.000
3	-.000	.000		.000	.000	.000
5	-.000	.000		-.000	.000	.000
7	-.000	.000		.000	.000	.000
9	.000	.000		.000	.000	.000
11	.000	.000		.000	.000	.000
13	.000	.000		.000	.000	.000
15	.000	-.000		-.000	-.000	-.000
17	-.000	-.000		-.000	-.000	-.000
19	-.000	-.000		-.000	-.000	-.000
21	-.001	-.001		-.001	-.001	-.001
23	-.001	.000		.000	.000	.000
25	.002	.003		.003	.003	.003
27	.012	.010		.010	.010	.010
29	.028	.017		.019	.017	.019
31	.031	.003		.009	.003	.009
33	-.042	-.079		-.069	-.079	-.069
35	-.280	-.280		-.276	-.280	-.276
37	-.665	-.528		-.567	-.528	-.567
39	-.653	-.304		-.456	-.304	-.456
41	1.104	1.748		1.442	1.748	1.442
43	6.810	7.464		7.237	7.464	7.237
45	15.725	15.911		16.749	15.911	16.749
47	15.471	14.311		15.142	14.311	17.815
49	-28.914	14.311		3.501	-47.144	-51.410

ENSAIO DE AFERICAO PARA N= 48 - REDE DUAL

PCNTC	ANALITICO	M O M E N T O		APRXX.C	APRXX.D
		APRXX.A	APRXX.E		
1		.000	.000	.000	.000
3	-.000	.000	.000	.000	.000
5	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
7	-.000	-.000	-.000	.000	.000
9	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
11	-.000	.000	.000	.000	.000
13	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
15	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
17	.000	.000	.000	.000	.000
19	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
21	.000	.000	.000	.000	.000
23	.000	.000	-.000	-.000	.000
25	.000	.000	.000	.000	.000
27	.000	.000	-.000	.000	.000
29	.000	.000	-.000	.000	.000
31	-.000	.000	.000	.000	.000
33	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
35	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
37	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
39	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
41	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
43	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
45	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
47	.000	.001	.001	.001	.001
49	.003	.004	.004	.004	.004
51	.002	.008	.008	.008	.008
53	.015	.015	.015	.015	.015
55	.024	.022	.022	.022	.022
57	.032	.028	.028	.028	.028
59	.034	.028	.029	.028	.029
61	.023	.015	.017	.015	.017
63	-.011	-.021	-.019	-.021	-.019
65	-.083	-.092	-.088	-.092	-.088
67	-.202	-.206	-.202	-.206	-.202
69	-.370	-.365	-.363	-.365	-.363
71	-.569	-.547	-.549	-.547	-.549
73	-.743	-.696	-.708	-.696	-.708
75	-.780	-.702	-.729	-.702	-.729
77	-.496	-.385	-.433	-.385	-.433
79	.365	.504	.432	.504	.432
81	2.097	2.253	2.162	2.253	2.162
83	4.946	5.099	5.007	5.099	5.006
85	8.929	9.056	9.005	9.056	9.005
87	13.557	13.633	13.698	13.633	13.698
89	17.441	17.440	17.733	17.440	17.733
91	17.862	17.736	18.401	17.736	18.401
93	11.429	10.049	11.233	10.049	11.233
95	-11.291	-11.850	-10.665	-11.850	-12.136
97	-52.939	-11.850	-46.775	-73.581	-75.680

Ensaïos com espessura de parede d=11cm

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE HABITUAL

PCNTC	M O M E N T O M X				
	ANALITICO	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.CELTA
2	.000	.000	.000	.000	.000
4	-.000	.000	.000	.000	-.000
6	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
8	-.000	.000	.000	.000	.000
10	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
12	.000	.000	-.000	.000	-.000
14	-.000	.000	.000	.000	.000
16	-.001	.000	.001	.000	.001
18	.013	-.005	-.002	-.005	-.003
20	-.064	-.040	-.072	-.040	-.072
22	-.339	.315	-.029	.315	-.029
24	7.764	4.805	4.460	4.805	7.649
26	-46.628	4.805	13.064	-9.267	-21.992

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE HABITUAL

PONTC	M O M E N T O M X				
	ANALITICO	AP.ALFA	AP.BETA	AP.GAMA	AP.CELTA
2	.000	.000	-.000	.000	.000
4	-.000	.000	-.000	.000	.000
6	-.000	.000	.000	.000	.000
8	.000	.000	.000	.000	-.000
10	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
12	.000	.000	.000	.000	.000
14	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
16	-.000	.000	.000	.000	.000
18	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
20	.000	.000	.000	.000	.000
22	.000	.000	.000	.000	-.000
24	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
26	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
28	-.001	-.000	-.000	-.000	-.000
30	-.001	.000	.000	.000	.000
32	.002	.002	.002	.002	.002
34	.013	.004	.005	.004	.005
36	.016	-.002	.001	-.002	.001
38	-.064	-.052	-.046	-.052	-.046
40	-.317	-.166	-.181	-.166	-.181
42	-.339	-.095	-.203	-.095	-.203
44	1.743	1.279	1.034	1.279	1.036
46	7.764	5.571	5.752	5.571	5.752
48	6.520	7.685	7.867	7.685	13.650
50	-46.628	7.685	7.804	-26.690	-55.806

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - REDE HABITUAL

PCATO	M O M E N T O				
	ANALITICO	AP. ALFA	AP. BETA	AP. GAMA	AP. DELTA
2	.000	.000	-.000	.000	-.000
4	-.000	.000	.000	.000	.000
6	-.000	.000	.000	.000	.000
8	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
10	-.000	.000	.000	.000	.000
12	-.000	.000	.000	.000	.000
14	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
16	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
18	.000	.000	.000	.000	.000
20	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
22	.000	.000	.000	.000	.000
24	.000	.000	.000	.000	.000
26	-.000	.000	.000	.000	.000
28	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
30	-.000	.000	.000	.000	.000
32	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
34	-.000	.000	.000	.000	.000
36	-.000	.000	.000	.000	.000
38	.000	.000	.000	.000	.000
40	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
42	.000	.000	.000	.000	.000
44	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
46	.000	.000	.000	.000	.000
48	.000	.000	.000	.000	.000
50	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
52	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
54	-.001	-.000	-.000	-.000	-.000
56	-.001	-.001	-.001	-.001	-.001
58	-.001	-.000	-.000	-.000	-.000
60	.000	.000	.000	.000	.000
62	.002	.002	.002	.002	.002
64	.007	.006	.005	.006	.005
66	.013	.010	.010	.010	.010
68	.018	.013	.013	.013	.013
70	.016	.010	.011	.010	.011
72	-.006	-.010	-.008	-.010	-.008
74	-.064	-.059	-.055	-.059	-.055
76	-.172	-.145	-.143	-.145	-.143
78	-.317	-.261	-.263	-.261	-.263
80	-.430	-.348	-.352	-.348	-.352
82	-.340	-.263	-.298	-.263	-.298
84	.256	.251	.187	.251	.187
86	1.743	1.537	1.451	1.537	1.451
88	4.372	3.856	3.790	3.856	3.790
90	7.764	6.564	7.024	6.564	7.024
92	10.061	9.355	9.731	9.355	9.731
94	6.920	7.241	8.187	7.241	8.187
96	-9.004	-6.237	-5.250	-6.237	-2.056
98	-46.628	-6.237	-30.131	-40.308	-65.705

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 12 - REDE CLAL

PONTG	ANALITICO	M O M E N T O		APRCX.C	APRCX.D
		APRCX.A	APRCX.E		
1		.000	.000	.000	.000
3	-.000	.000	.000	.000	.000
5	.000	.000	-.000	-.000	.000
7	.000	.000	.000	.000	.000
9	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
11	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
13	.000	.000	.000	.000	.000
15	-.001	.000	.001	.000	.001
17	.002	-.005	-.002	-.005	-.002
19	.016	-.041	-.069	-.041	-.069
21	-.317	.257	-.088	.257	-.088
23	1.743	4.702	4.356	4.702	5.918
25	6.920	4.702	12.947	-5.963	-6.888

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 24 - REDE CLAL

PONTG	ANALITICO	M O M E N T O		APROX.C	APROX.D
		APRCX.A	APRCX.E		
1		.000	.000	.000	.000
3	-.000	.000	-.000	.000	-.000
5	-.000	-.000	-.000	.000	-.000
7	-.000	.000	-.000	.000	.000
9	.000	.000	-.000	-.000	.000
11	.000	.000	.000	.000	-.000
13	.000	.000	.000	-.000	.000
15	-.000	.000	-.000	.000	.000
17	-.000	.000	.000	.000	.000
19	-.000	.000	.000	.000	-.000
21	.000	.000	.000	.000	.000
23	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
25	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
27	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
29	-.001	.000	.000	.000	.000
31	.000	.002	.001	.002	.001
33	.007	.005	.005	.005	.005
35	.018	.002	.005	.002	.005
37	-.006	-.040	-.034	-.040	-.034
39	-.172	-.160	-.158	-.160	-.168
41	-.430	-.189	-.281	-.189	-.281
43	.256	.885	.626	.885	.626
45	4.372	5.062	5.023	5.062	5.023
47	10.061	9.702	9.663	9.702	12.074
49	-5.004	9.702	14.766	-19.179	-21.431

ENSAIO DE AFERICAC PARA N= 48 - RECE DUAL

PONTG	M O M E N T O				
	ANALITICO	APRCX.A	APROX.P	APRCX.C	APRCX.D
1		.000	.000	.000	-.000
3	-.000	.000	-.000	.000	.000
5	-.000	.000	-.000	.000	-.000
7	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
9	-.000	.000	.000	.000	-.000
11	-.000	-.000	.000	-.000	-.000
13	.000	-.000	-.000	.000	-.000
15	.000	.000	.000	.000	.000
17	.000	.000	.000	-.000	-.000
19	.000	.000	.000	.000	.000
21	.000	.000	.000	.000	-.000
23	.000	.000	.000	-.000	-.000
25	-.000	-.000	-.000	.000	-.000
27	-.000	.000	.000	.000	.000
29	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
31	-.000	.000	.000	.000	.000
33	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
35	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
37	.000	.000	.000	.000	.000
39	.000	.000	.000	.000	.000
41	.000	-.000	-.000	-.000	-.000
43	.000	.000	.000	.000	.000
45	.000	.000	.000	.000	.000
47	.000	.000	.000	.000	.000
49	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
51	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
53	-.000	-.000	-.000	-.000	-.000
55	-.001	-.000	-.001	-.001	-.001
57	-.001	-.000	-.001	-.000	-.001
59	-.000	.000	-.000	.000	-.000
61	.001	.002	.001	.002	.001
63	.004	.004	.004	.004	.004
65	.010	.009	.009	.009	.009
67	.016	.013	.013	.013	.013
69	.019	.013	.014	.013	.014
71	.009	-.000	.002	-.000	.002
73	-.030	-.039	-.036	-.039	-.036
75	-.112	-.116	-.113	-.116	-.113
77	-.242	-.231	-.231	-.231	-.231
79	-.385	-.346	-.356	-.346	-.356
81	-.426	-.346	-.375	-.346	-.375
83	-.128	-.004	-.060	-.004	-.060
85	.865	1.022	.937	1.022	.937
87	2.915	3.073	2.987	3.073	2.987
89	6.042	6.158	6.158	6.158	6.158
91	9.251	9.274	9.523	9.274	9.523
93	9.562	9.404	10.158	9.404	10.158
95	1.116	.490	1.243	.490	1.217
97	-24.599	.490	-16.717	-35.482	-37.321

4.0 APLICAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO CÁLCULO VARIACIONAL DAS CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentam-se duas possíveis discretizações de cálculo do funcional dos deslocamentos que rege o problema de cascas cilíndricas circulares, oriundo de formulação variacional, com a técnica das diferenças finitas. Essas discretizações se aplicam a quaisquer cascas cilíndricas circulares, distintas do tipo discretizado, no capítulo anterior. Para maior clareza, objetividade e aplicação, particularizam-se para o caso de cascas cilíndricas circulares engastadas segundo duas geratrizes (afastadas de L), uma diretriz, e livre segundo outra diretriz (afastada daquela de $E = L/2$), para as quais ainda se admitem espessura constante, coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e deslocamento $u = 0$.

As discretizações são feitas com redes de $n \times n$ ma

lhas quadradas; facilmente se aproveitam os resultados para rede com $n \times m$ malhas quadradas, o que já dá outras relações entre os lados L e H da superfície média desenvolvida. Será porém útil verificar a conveniência de utilização de rede de malhas retangulares, apesar da maior complexidade de cálculo.

Para a primeira discretização (item 4.3), utilizam-se duas redes iguais superpostas, de malhas quadradas, uma para os deslocamentos v e outra para os deslocamentos w . Com isso as duas redes transformam-se numa única, aqui denominada de *rede habitual* ou *nodulação habitual*. Já na segunda discretização (item 4.4) essas redes são deslocadas uma em relação à outra de meia abertura da malha na direção y , conforme mostra a figura 4.5. Denominaram-se essas redes de *redes duais* ou simplesmente de *nodulação dual*.

Após cada discretização do cálculo dos deslocamentos, acima citada, aproximam-se também os cálculos dos esforços (os mais importantes) e as rotações, ainda mediante a técnica das diferenças finitas. Como se frisou na introdução do capítulo anterior, esses cálculos são aproximados apenas segundo as duas melhores aproximações resultantes dos Ensaios de Aferição; a aproximação γ , para rede habitual, e a aproximação B , para rede dual.

Quanto a resultados numéricos, apresentam-se os obtidos das experimentações com rede habitual de malhas quadradas. Essas experimentações numéricas foram feitas para redes com 6×6 , 8×8 , 12×12 e 16×16 malhas. Limitou-se a 16×16 malhas por questão de capacidade de memória do sistema de computação utilizado e, principalmente, do tempo excessivo de processamento.

4.2 - CASO PARTICULAR CONSIDERADO

Considera-se casca cilíndrica circular de espessura constante d , para a qual desprezam-se os deslocamentos u e o efeito de Poisson ν . Supõe-se a casca perfeitamente engastada segundo duas geratrizes (afastadas de L) e segundo uma diretriz; admite-se que a quarta borda corresponde a outra diretriz, suposta livre, e distante $H = L/2$ da primeira.

Admite-se que as geratrizes são verticais, e que a carga externa é definida por $p_x = p_y = 0$ e $p_z = Z = \gamma_a x$. Toma-se a origem do sistema de eixos x, y no ponto médio da borda livre.

Com essas considerações, a expressão de E_s para a (1.48) é dada por (1.46), e a (1.49) reduz a:

$$\Omega = - \iint z w dx dy \quad (4.1)$$

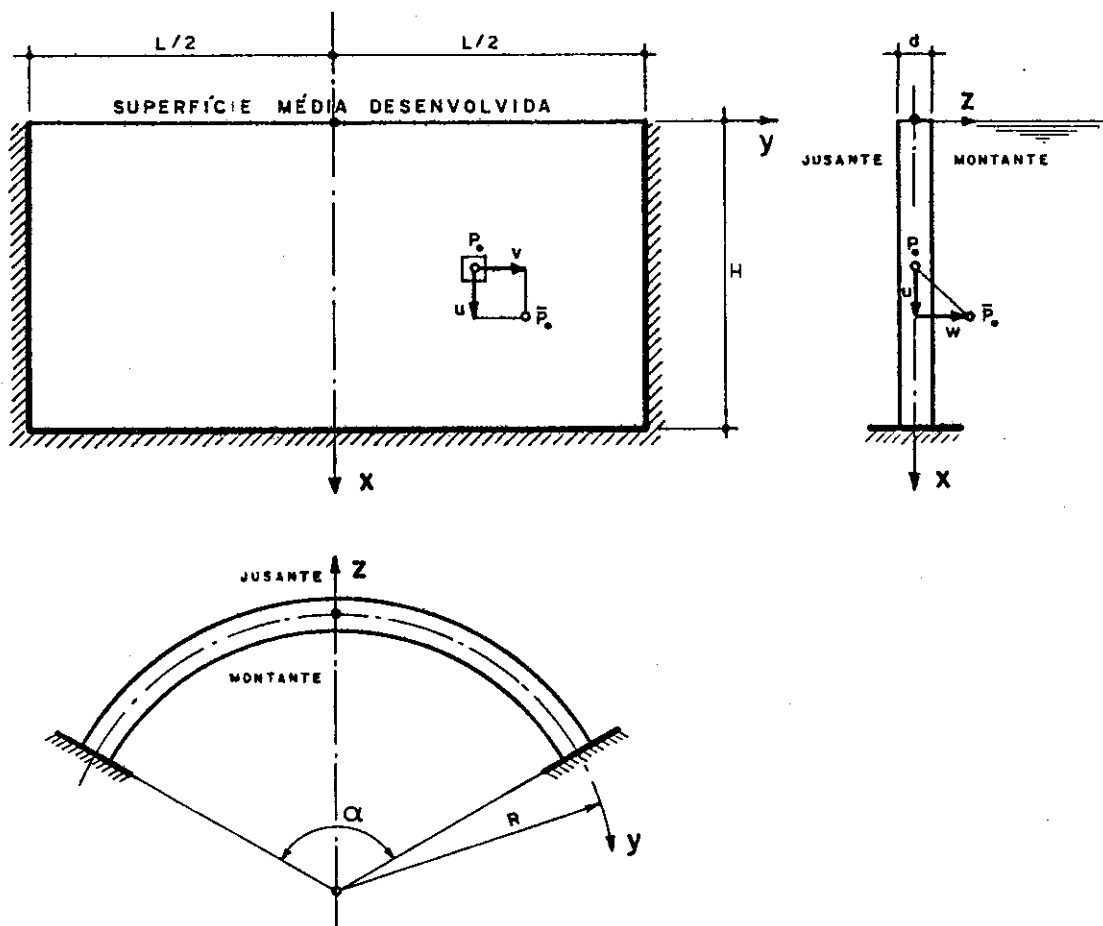


Figura 4.1 - Deslocamentos positivos de um ponto P_0 qualquer da Superfície Média.

A condição $v + \Omega = \text{mínimo}$ escreve-se, então

$$\pi_p(v, w) = \sum_{K=1}^8 I_k(v, w) = \text{mínimo} \quad (4.2)$$

onde π_p representa a energia potencial total do sistema, e as grandezas I_k são dadas por:

$$I_1 = \frac{Ed}{2} \iint (v' + \frac{w}{R})^2 dx dy$$

$$I_2 = \frac{Ed}{4} (1 + \frac{d^2}{4R^2}) \iint (v'')^2 dx dy$$

$$I_3 = \frac{Ed^3}{24} \iint (w'')^2 dx dy$$

$$I_4 = \frac{Ed^3}{24} \iint (w''')^2 dx dy$$

$$I_5 = \frac{Ed^3}{12} \iint (w''')^2 dx dy$$

$$I_6 = -\frac{Ed^3}{8R} \iint v' w'' dx dy$$

$$I_7 = \frac{Ed^3}{12R^2} \iint w w'' dx dy$$

$$I_8 = - \iint z w dx dy$$

(4.3a-h)

4.3 - DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA COM REDES v E w SUPERPOSTAS (REDE ÚNICA - HABITUAL)

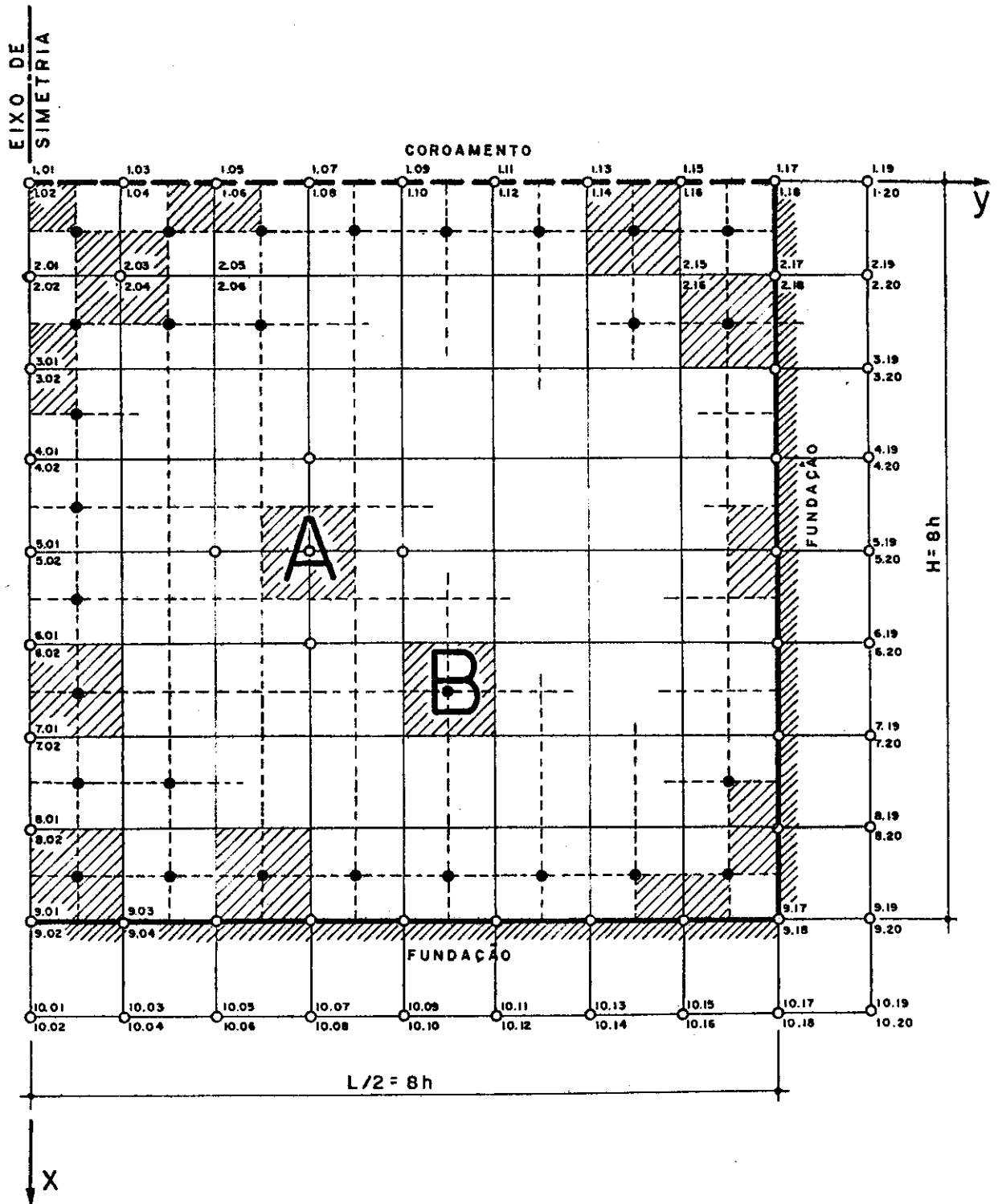


Figura 4.2 - Redes v e w superpostas.

Diante da simetria basta considerar metade da casca. Estabelecem-se duas redes iguais de malhas quadradas, uma para os deslocamentos v e outra para os deslocamentos w . Os deslocamentos são calculados nos nós de suas respectivas redes. Nesta discretização, a fim de obter em cada ponto da estrutura os dois deslocamentos, superpuseram-se as redes. Cada nó dessa rede única é assinalado por dois pares de números. Um par para cada tipo de deslocamento. Cada par tem a função de distinguir um nó da rede. O primeiro número do par sempre indica a linha horizontal da rede e o segundo a linha vertical. Se o segundo número é par este se refere sempre a um ponto para o deslocamento v , caso contrário se refere sempre a um ponto para o deslocamento w . Adotam-se ainda como nomenclatura as letras A e B , a primeira para distinguir pontos da estrutura estabelecida pelos nós da rede e, a segunda para distinguir pontos que se localizam no centro de cada malha (veja figura 4.2).

Utiliza-se no desenvolvimento a seguinte nomenclatura:

$v_{i,p}$ deslocamento v no ponto determinado pela linha horizontal i e vertical p da rede; p sempre representa um número par.

$w_{i,j}$ análogo ao $v_{i,p}$, só que agora j sempre representa um número impar.

v_A, w_A
 v_B, w_B deslocamentos nos pontos do tipo A ou B .

$()_{i,p}, ()_{i,j}$ derivada no ponto i,p ou i,j .

$()_A, ()_B$ derivada no ponto tipo A ou B .

Σ_A, Σ_B somatória sobre "elementos" do tipo A ou B .

As derivadas de (4.3a-h) são discretizadas com diferenças finitas usuais, provenientes do polinômio de interpolação do 2º grau (PI-2), entre nós da rede convenientemen

te escolhidos (do tipo A ou B) de maneira a utilizar a menor malha, como a figura 4.3 e as expressões que seguem esclarecem para nós internos, suficientemente afastados do contorno da meia casca estudada.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_A = \frac{1}{2h} (v_{Ad} - v_{Ae})$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_A = \frac{1}{h^2} (w_{Ab} - 2w_A + w_{Ac})$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_A = \frac{1}{h^2} (w_{Ad} - 2w_A + w_{Ae}) \quad (4.4a-e)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_B = \frac{1}{2h} (v_{be} + v_{bd} - v_{ae} - v_{ad})$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_B = \frac{1}{h^2} (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be})$$

Estas expressões são obtidas das desenvolvidas no item 2.

As duas últimas aproximações equivalem à utilização de malhas de meia abertura. A $(\partial v/\partial y)$ poderia ser obti

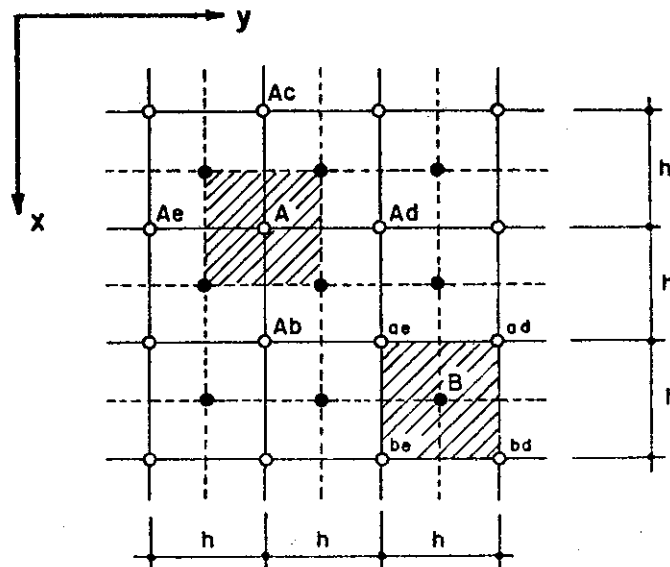


Figura 4.3

da de maneira análoga à de $(\partial v / \partial x)$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_B = \frac{1}{2h} (v_{ad} + v_{bd} - v_{ae} - v_{be}).$$

Como também poderia ser calculado, sem mediar, por exemplo em pontos 0.5 (ae + ad). Seria então preciso calcular a energia em quadrados centrados nestes pontos. Mas haveria problema na I_1 que, por conter w , requer "elemento A" (principalmente por causa das bordas). Problema análogo ocorre na equação (4.4d) onde poderia ser calculado em outros pontos, por exemplo em 0.5 (ae + be), em que seria então preciso utilizar outros quadrados (ou meios ou quartos). Porém o principal motivo dessa aproximação prende-se à I_6 , onde $\partial v / \partial x$ deve ser calculada no mesmo ponto da $\partial^2 w / \partial x \partial y$, e esta, necessariamente, é calculada nos pontos tipo B.

4.3.1 - Condições de Contorno

As condições de contorno a serem impostas são as concernentes somente ao eixo de simetria e às bordas engastadas. As condições relativas à borda livre são automaticamente satisfeitas ao se minimizar o funcional π_p . As condições de contorno são:

a) No eixo de simetria para $i = 1, 2, \dots, n+1$

$$v_{i,2} = 0$$

(4.5a-b)

$$w_{-i,3} = w_{i,3}$$

onde o sinal (-) indica o ponto simétrico em relação ao eixo de simetria.

b) Na borda engastada lateral ($y = L/2$) para $i = 1, 2, \dots, n+1$

$$v_{i,2n+2} = 0 \quad \text{e} \quad v_{i,2n+4} = 0 \quad (4.6a)$$

$$w_{i,2n+1} = 0 \quad (4.6b)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,2n+1} = 0 = \frac{1}{2h} (w_{i,2n+3} - w_{i,2n-1}).$$

e portanto

$$w_{i,2n+3} = w_{i,2n-1} \quad (4.6c)$$

Aqui poderia ser utilizada expressão assimétrica, sem pontos fictícios. Todavia, a ordem do erro das assimétricas é maior, convindo evitá-las sempre que possível, (veja capítulo 2).

c) Na borda engastada inferior ($x = H$)

$$v_{n+1,p} = 0 \quad \text{para } p = 02, 04, \dots, 2n+2 \quad (4.7a)$$

$$w_{n+1,j} = 0 \quad \text{para } j = 01, 03, \dots, 2n+1 \quad (4.7b)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{n+1,j} = 0 = \frac{1}{2h} (w_{n+2,j} - w_{n,j})$$

e portanto

$$w_{n+2,j} = w_{n,j} \quad \text{para } j = 01, 03, \dots, 2n+1 \quad (4.7c)$$

As condições de contorno são assim impostas de maneira mais habitual, vinculando o mínimo de nós. Quanto à influência dessas condições nos deslocamentos de nós mais centrais, depende muito do tamanho das malhas, e por isso é bom fazer o estudo também com malhas bem apertadas para esta verificação (veja conclusões do capítulo 3). Já na discretização com redes duais, as rotações nos engastamentos são impostas de maneira mais forte, com o que a inflexão já se faz notar mesmo na rede de malhas bem largas; no caso rede de 6×6 malhas (veja ainda conclusões do capítulo 3).

4.3.2 - Aproximação do Cálculo da Energia

As grandezas I_k expressas pelas (4.3a-h) são aproximadas calculando a energia armazenada nos diversos "elementos A" (totais, ou metade ou quartos) e B (sempre totais). Com isso e com as derivadas dadas pelas expressões (4.4a-e),

resultam as seguintes aproximações dessas grandezas:

$$I_1 = \frac{Edh^2}{2} \sum_A \left(\frac{1}{2h}(v_{Ad} - v_{Ae}) + \frac{w_A}{R} \right)^2 \quad (4.8a)$$

Note-se nesta expressão que, por conter diretamente w , ela deve ter centro em um nó, no qual também deve ser calculada $\partial v / \partial y$. Essa, portanto, deve ser aproximada com malhas h , não se podendo empregar o artifício de que adiante se lança mão para $\partial v / \partial x$. As redes duais, como esquematizadas na figura 4.5, permitem, ao contrário, aproximar $\partial v / \partial y$ com malhas $h/2$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{Ed}{4} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right) \iint (v')^2 dx dy \cong \\ &\cong \frac{Ed}{4} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right) \sum_B \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_B^2 \cdot h^2 = \\ &= \frac{Edh^2}{4} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right) \sum_B \left(\frac{1}{2h}(v_{be} + v_{bd} - v_{ae} - v_{ad}) \right)^2 = \\ &= \frac{Ed}{16} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right) \sum_B (v_{be} + v_{bd} - v_{ae} - v_{ad})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{Ed^3}{24} \iint (w'')^2 dx dy \cong \frac{Ed^3}{24} \sum_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_A^2 \cdot h^2 = \\ &= \frac{Ed^3 h^2}{24} \sum_A \left(\frac{1}{h^2}(w_{Ab} - 2w_A + w_{Ac}) \right)^2 = \\ &= \frac{Ed^3}{24h^2} \sum_A (w_{Ab} - 2w_A + w_{Ac})^2 \quad (4.8b-c) \end{aligned}$$

A expressão I_3 é válida mesmo para os pontos da borda, aí bastando a adaptação

$$I_3 = \frac{Ed^3}{24h^2} \sum_A (w_A - 2w_{Ac} + w_{Acc})^2,$$

onde $w_{Acc} = w_{x=2h}$. Isto é, utiliza-se expressão assimétrica de derivada. Evita-se, com isso, a introdução de nós fictícios, acima da borda livre.

A contribuição da curvatura segundo y é análoga

a I_3

$$I_4 \cong \frac{Ed^3}{24h^2} \sum_A (w_{Ad} - 2w_A + w_{Ae})^2 \quad (4.8d)$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{Ed^3}{12} \iint (w''')^2 dx dy \cong \frac{Ed^3}{12} \sum_B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B^2 \cdot h^2 = \\ &= \frac{Ed^3 h^2}{12} \sum_B \left(\frac{1}{h^2} (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be}) \right)^2 = \\ &= \frac{Ed^3}{12h^2} \sum_B (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be})^2 \quad (4.8e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= - \frac{Ed^3}{8R} \iint v' w'' dx dy \cong \\ &\cong - \frac{Ed^3}{8R} \sum_B \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B \cdot h^2 = \\ &= - \frac{Ed^3}{8R} h^2 \sum_B \left(\frac{1}{2h} (v_{be} + v_{bd} - v_{ae} - v_{ad}) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{h^2} (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be}) = \\ &= - \frac{Ed^3}{16Rh} \sum_B (v_{be} + v_{bd} - v_{ae} - v_{ad}) \\ &\quad (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be}) \quad (4.8f) \end{aligned}$$

Note-se na I_6 , o artifício, já assinalado, que permite aproximar ambas as derivadas nos pontos tipo B.

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{Ed^3}{12R^2} \iint w w'' dx dy \cong \frac{Ed^3}{12R^2} \sum_A w_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_A h^2 = \\ &= \frac{Ed^3}{12R^2} h^2 \sum_A w_A \left(\frac{1}{h^2} (w_{Ad} - 2w_A + w_{Ae}) \right) = \\ &= \frac{Ed^3}{12R^2} \sum_A w_A (w_{Ad} - 2w_A + w_{Ae}) \quad (4.8g) \end{aligned}$$

$$I_8 = -(-h^2 \sum_A Z_A w_A) \quad (4.8h)$$

Nesta última expressão, o primeiro sinal negativo é da expressão (4.1) e, o segundo é devido a força Z_A ter o sentido oposto ao do eixo dos z .

Introduzidas as condições de contorno, passam a distinguir-se diversos tipos de termos, dependendo da posição dos nós em relação às bordas. Além disso, os "elementos" com centro em A contribuem com energia proporcional à sua área total h^2 da malha, ou apenas proporcional a $h^2/2$ ou $h^2/4$ (respectivamente para os nós A das bordas e dos cantos). Os "elementos" com centro em B sempre armazenam energia proporcional a h^2 .

4.3.3 - Sistema de Equações Minimizantes

Estabelecidas as condições de contorno e calculadas as grandezas I_k , a condição de mínimo (4.2) do funcional π_p é dada por:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial v_{i,p}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \pi_p}{\partial w_{i,j}} = 0 \quad (4.9a-b)$$

que se traduzem por

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,p}} &= 0 \\ \sum_{k=1}^8 \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,j}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10a-b)$$

isto para todos os "elementos" da meia casca.

Antes de listar as diversas parcelas de energia I_k minimizadas em relação a $v_{i,p}$ e $w_{i,j}$, desenvolve-se, a fim de beneficiar a clareza dessas expressões minimizadas, a minimização de uma, por exemplo a I_1 , na sua integral com rede de 8×8 malhas, sem perda de generalidade.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Ed}{2} h^2 \sum_A \left(\frac{1}{2h} (v_{Ad} - v_{Ae}) + \frac{w_A}{R} \right)^2 = \\ &= \frac{Edh^2}{2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2h} (v_{1,04} - (-v_{1,04})) \right) + \frac{w_{1,01}}{R} \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{1,06} - v_{1,02}) \right) + \frac{w_{1,03}}{R} \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{1,08} - v_{1,04}) \right) + \frac{w_{1,05}}{R} \right) + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2h} (v_{1,20} - v_{1,16}) \right) + \frac{w_{1,17}}{R} \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{2,04} - (-v_{2,04})) \right) + \frac{w_{2,01}}{R} \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{2,06} - v_{2,02}) \right) + \frac{w_{2,03}}{R} \right]^2 + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{2,20} - v_{2,16}) \right) + \frac{w_{2,17}}{R} \right]^2 + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{8,04} - (-v_{8,04})) \right) + \frac{w_{8,01}}{R} \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{8,06} - (-v_{8,04})) \right) + \frac{w_{8,03}}{R} \right]^2 + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2h} (v_{8,20} - v_{8,16}) \right) + \frac{w_{8,17}}{R} \right]^2 \end{aligned}$$

Derivando em relação aos deslocamentos $w_{i,j}$ vem

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,01}} = \frac{Edh^2}{4R^2} w_{1,01} + \frac{Edh}{R} v_{1,04}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,03}} = \frac{Edh^2}{2R^2} w_{1,03} + \frac{Edh}{4R} v_{1,06}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,j}} = \frac{Edh^2}{2R^2} w_{1,j} + \frac{Edh}{4R} (v_{1,j+3} - v_{1,j-1}),$$

$$, j = 05, 07, \dots, 13$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,15}} = \frac{Edh^2}{2R^2} w_{1,15} - \frac{Edh}{4R} v_{1,14}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,01}} = \frac{Edh^2}{2R^2} w_{i,01} + \frac{Edh}{2R} v_{i,04}, \quad i = 2, 3, \dots, 8$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,03}} = \frac{Edh^2}{R^2} w_{i,03} + \frac{Edh}{2R} v_{i,06}, \quad i = 2, 3, \dots, 8$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,15}} = \frac{Edh^2}{R^2} w_{i,15} - \frac{Edh}{2R} v_{i,14}, \quad i = 2, 3, \dots, 8$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,j}} = \frac{Edh^2}{2R^2} w_{i,j} + \frac{Edh}{4R} (v_{i,j+3} - v_{i,j-1}),$$

$$, i = 2, 3, \dots, 8 \quad \text{e} \quad j = 05, 07, \dots, 13$$

E derivando em relação aos $v_{i,p}$ vem

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,04}} = \frac{Edh}{4R} (w_{1,01} - w_{1,05}) + \frac{Ed}{8} (3v_{1,04} - v_{1,08})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,04}} = \frac{Edh}{2R} (w_{i,01} - w_{i,05}) + \frac{Ed}{4} (3v_{i,04} - v_{i,08}),$$

$$i = 2, 3, \dots, 8$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,06}} = \frac{Edh}{4R} (w_{1,03} - w_{1,07}) + \frac{Ed}{8} (2v_{1,06} - v_{1,10})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,06}} = \frac{Edh}{2R} (w_{i,03} - w_{i,07}) + \frac{Ed}{4} (2v_{i,06} - v_{i,10}),$$

$$, i = 2, 3, \dots, 8$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,p}} = \frac{Edh}{4R} (w_{1,p-3} - w_{1,p+1}) + \frac{Ed}{8} (-v_{1,p-4} + 2v_{1,p} - v_{1,p+4}),$$

$$, p = 08, 10, 12$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,p}} = \frac{Edh}{2R} (w_{i,p-3} - w_{i,p+1}) + \frac{Ed}{4} (-v_{i,p-4} + 2v_{i,p} - v_{i,p+4}),$$

$$, i = 2, 3, \dots, 8 \quad e \quad p = 08, 10, 12$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,14}} = \frac{Edh}{4R} (w_{1,11} - w_{1,15}) + \frac{Ed}{8} (-v_{1,10} + 2v_{1,14})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,14}} = \frac{Edh}{2R} (w_{i,11} - w_{i,15}) + \frac{Ed}{4} (-v_{i,10} + 2v_{i,14}),$$

$$, i = 2, 3, \dots, 8$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,16}} = \frac{Edh}{4R} w_{1,13} + \frac{Ed}{8} (-v_{1,12} + 3v_{1,16})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,16}} = \frac{Edh}{2R} w_{i,13} + \frac{Ed}{4} (-v_{i,12} + 3v_{i,16}),$$

$$, i = 2, 3, \dots, 8$$

Portanto, essas expressões minimizadas, generaliza-
das para redes de $n \times n$ malhas, e as expressões das outras
parcelas de energia minimizadas, são as indicadas a seguir:

a) Minimização da I_1

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,01}} = \bar{A}w_{1,01} + \bar{B}v_{1,04}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,01}} = 2\bar{A}w_{i,01} + 2\bar{B}v_{i,04} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,03}} = 2\bar{A}w_{1,03} + \bar{B}v_{1,06}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,03}} = 4\bar{A}w_{i,03} + 2\bar{B}v_{i,06} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,j}} = -\bar{B}v_{1,j-1} + 2\bar{A}w_{1,j} + \bar{B}v_{1,j+3} \quad , \quad j = 05, 07, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,j}} = -2\bar{B}v_{i,j-1} + 4\bar{A}w_{i,j} + 2\bar{B}v_{i,j+3} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$j = 05, 07, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{1,15}} = -\bar{B}v_{1,14} + 2\bar{A}w_{1,15}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,15}} = -2\bar{B}v_{i,14} + 4\bar{A}w_{i,15} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,04}} = \bar{B}w_{1,01} + 3\bar{G}v_{1,04} - \bar{B}w_{1,05} - \bar{G}v_{1,08}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,04}} = 2\bar{B}w_{i,01} + 6\bar{G}v_{i,04} - 2\bar{B}w_{i,05} - 2\bar{G}v_{i,08}$$

$$, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,06}} = \bar{B}w_{1,03} + 2\bar{G}v_{1,06} - \bar{B}w_{1,07} - \bar{G}v_{1,10}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,06}} = 2\bar{B}w_{i,03} + 4\bar{G}v_{i,06} - 2\bar{B}w_{i,07} - 2\bar{G}v_{i,10} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,p}} = -\bar{G}v_{1,p-4} + \bar{B}w_{1,p-3} + 2\bar{G}v_{1,p} - \bar{B}w_{1,p+1} - \bar{G}v_{1,p+4} \cdot$$

, $p = 08, 10, \dots, 2n-4$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,p}} = -2\bar{G}v_{i,p-4} + 2\bar{B}w_{i,p-3} + 4\bar{G}v_{i,p} - 2\bar{B}w_{i,p+1} - 2\bar{G}v_{i,p+4}$$

, $i = 2, 3, \dots, n$
 $p = 08, 10, \dots, 2n-4$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,14}} = -\bar{G}v_{1,10} + \bar{B}w_{1,11} + 2\bar{G}v_{1,14} - \bar{B}w_{1,15}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,14}} = -2\bar{G}v_{i,10} + 2\bar{B}w_{i,11} + 4\bar{G}v_{i,14} - 2\bar{B}w_{i,15}$$

, $i = 2, 3, \dots, n$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{1,16}} = -\bar{G}v_{1,12} + \bar{B}w_{1,13} + 3\bar{G}v_{1,16}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,16}} = -2\bar{G}v_{i,12} + 2\bar{B}w_{i,13} + 6\bar{G}v_{i,16} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

onde

$$\bar{A} = \frac{Edh^2}{4R^2} \quad , \quad \bar{B} = \frac{Edh}{4R} \quad e \quad \bar{G} = \frac{Ed}{8}$$

b) Minimização da I_2

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{1,04}} = \frac{\bar{M}}{2} v_{1,04} + \frac{\bar{M}}{4} v_{1,06} - \frac{\bar{M}}{2} v_{2,04} - \frac{\bar{M}}{4} v_{2,06}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{1,p}} = \frac{\bar{M}}{4} v_{1,p-2} + \frac{\bar{M}}{2} v_{1,p} + \frac{\bar{M}}{4} v_{1,p+2} - \frac{\bar{M}}{4} v_{2,p-2} -$$

$$- \frac{\bar{M}}{2} v_{2,p} - \frac{\bar{M}}{4} v_{2,p+2} \quad , \quad p = 06, 08, \dots, 2n-2$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{i,04}} = -\frac{\bar{M}}{2} v_{i-1,04} - \frac{\bar{M}}{4} v_{i-1,06} + \bar{M} v_{i,04} +$$

$$+ \frac{\bar{M}}{2} v_{i,06} - \frac{\bar{M}}{2} v_{i+1,04} - \frac{\bar{M}}{4} v_{i+1,06} ,$$

$i = 2, 3, \dots, n-1$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{i,p}} = -\frac{\bar{M}}{4} v_{i-1,p-2} - \frac{\bar{M}}{2} v_{i-1,p} - \frac{\bar{M}}{4} v_{i-1,p+2} +$$

$$+ \frac{\bar{M}}{2} v_{i,p-2} + \bar{M} v_{i,p} + \frac{\bar{M}}{2} v_{i,p+2} - \frac{\bar{M}}{4} v_{i+1,p-2} +$$

$$- \frac{\bar{M}}{2} v_{i+1,p} - \frac{\bar{M}}{4} v_{i+1,p+2} , \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$p = 06, 08, \dots, 2n-2$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{1,16}} = \frac{\bar{M}}{4} v_{1,14} + \frac{\bar{M}}{2} v_{1,16} - \frac{\bar{M}}{4} v_{2,14} - \frac{\bar{M}}{2} v_{2,16}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{i,16}} = -\frac{\bar{M}}{4} v_{i-1,14} - \frac{\bar{M}}{2} v_{i-1,16} + \frac{\bar{M}}{2} v_{i,14} + \frac{\bar{M}}{2} v_{i,16} +$$

$$- \frac{\bar{M}}{4} v_{i+1,14} - \frac{\bar{M}}{2} v_{i+1,16} , \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{8,04}} = -\frac{\bar{M}}{2} v_{7,04} - \frac{\bar{M}}{4} v_{7,06} + \bar{M} v_{8,04} + \frac{\bar{M}}{2} v_{8,06}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{8,p}} = -\frac{\bar{M}}{4} v_{7,p-2} - \frac{\bar{M}}{2} v_{7,p} - \frac{\bar{M}}{4} v_{7,p+2} + \frac{\bar{M}}{2} v_{8,p-2} +$$

$$+ \bar{M} v_{8,p} + \frac{\bar{M}}{2} v_{8,p+2} , \quad p = 06, 08, \dots, 2n-2$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{8,16}} = -\frac{\bar{M}}{4} v_{7,14} - \frac{\bar{M}}{2} v_{8,14} + \bar{M} v_{8,16}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_{i,j}} \equiv 0 \quad \text{para todos } i, j$$

onde

$$\bar{M} = \frac{Ed}{2} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right)$$

c) Minimização da I_3

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{1,01}} = 1.5\bar{N}w_{1,01} - 3\bar{N}w_{2,01} + 1.5\bar{N}w_{3,01}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{1,j}} = 3\bar{N}w_{1,j} - 6\bar{N}w_{2,j} + 3\bar{N}w_{3,j}, \quad j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{2,01}} = -3\bar{N}w_{1,01} + 7\bar{N}w_{2,01} - 5\bar{N}w_{3,01} + \bar{N}w_{4,01}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{2,j}} = -6\bar{N}w_{1,j} + 14\bar{N}w_{2,j} - 10\bar{N}w_{3,j} + 2\bar{N}w_{4,j},$$

$$, j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{3,01}} = 1.5\bar{N}w_{1,01} - 5\bar{N}w_{2,01} + 6.5\bar{N}w_{3,01} - 4\bar{N}w_{4,01} + \bar{N}w_{5,01}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{3,j}} = 3\bar{N}w_{1,j} - 10\bar{N}w_{2,j} + 13\bar{N}w_{3,j} - 8\bar{N}w_{4,j} + 2\bar{N}w_{5,j},$$

$$, j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{i,01}} = \bar{N}w_{i-2,01} - 4\bar{N}w_{i-1,01} + 6\bar{N}w_{i,01} - 4\bar{N}w_{i+1,01} + \bar{N}w_{i+2,01}$$

$$, i = 4, 5, \dots, n-2$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{i,j}} = 2\bar{N}w_{i-2,j} - 8\bar{N}w_{i-1,j} + 12\bar{N}w_{i,j} - 8\bar{N}w_{i+1,j} + 2\bar{N}w_{i+2,j}$$

$$, i = 4, 5, \dots, n-2 \text{ e}$$

$$j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{7,01}} = \bar{N}w_{5,01} - 4\bar{N}w_{6,01} + 6\bar{N}w_{7,01} - 4\bar{N}w_{8,01}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{7,j}} = 2\bar{N}w_{5,j} - 8\bar{N}w_{6,j} + 12\bar{N}w_{7,j} - 8\bar{N}w_{8,j},$$

$$, j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{8,01}} = \bar{N}w_{6,01} - 4\bar{N}w_{7,01} + 7\bar{N}w_{8,01}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{8,j}} = 2\bar{N}w_{6,j} - 8\bar{N}w_{7,j} + 14\bar{N}w_{8,j} \quad , \quad j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todo } i, p$$

onde
$$\bar{N} = \frac{Ed}{24h^2}$$

d) Minimização da I_4

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{1,01}} = 3\bar{N}w_{1,01} - 4\bar{N}w_{1,03} + \bar{N}w_{1,05}$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{1,j}} = \bar{N}w_{1,j-4} - 4\bar{N}w_{1,j-2} + 6\bar{N}w_{1,j} - 4\bar{N}w_{1,j+2} + \bar{N}w_{1,j+4} \quad , \quad j = 05, 07, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{1,03}} = -4\bar{N}w_{1,01} + 7\bar{N}w_{1,03} - 4\bar{N}w_{1,05} + \bar{N}w_{1,07}$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{1,13}} = \bar{N}w_{1,09} - 4\bar{N}w_{1,11} + 6\bar{N}w_{1,13} - 4\bar{N}w_{1,15}$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{1,15}} = \bar{N}w_{1,11} - 4\bar{N}w_{1,13} + 6\bar{N}w_{1,15}$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,01}} = 6\bar{N}w_{i,01} - 8\bar{N}w_{i,03} + 2\bar{N}w_{i,05} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,03}} = -8\bar{N}w_{i,01} + 14\bar{N}w_{i,03} - 8\bar{N}w_{i,05} + 2\bar{N}w_{i,07} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,j}} = 2\bar{N}w_{i,j-4} - 8\bar{N}w_{i,j-2} + 12\bar{N}w_{i,j} - 8\bar{N}w_{i,j+2} + 2\bar{N}w_{i,j+4} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \text{e} \quad j = 05, 07, \dots, 2n-5$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,13}} = 2\bar{N}w_{i,09} - 8\bar{N}w_{i,11} + 12\bar{N}w_{i,13} - 8\bar{N}w_{i,15} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,15}} = 2\bar{N}w_{i,11} - 8\bar{N}w_{i,13} + 12\bar{N}w_{i,15} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todo } i, p$$

e) Minimização da I_5

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{1,01}} = 4\bar{N}w_{1,01} - 4\bar{N}w_{1,03} - 4\bar{N}w_{2,01} + 4\bar{N}w_{2,03}$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{1,j}} = -4\bar{N}w_{1,j-2} + 8\bar{N}w_{1,j} - 4\bar{N}w_{1,j+2} + 4\bar{N}w_{2,j-2} - 8\bar{N}w_{2,j} + 4\bar{N}w_{2,j+2} \quad , \quad j = 03, 05, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{1,15}} = -4\bar{N}w_{1,13} + 8\bar{N}w_{1,15} + 4\bar{N}w_{2,13} - 8\bar{N}w_{2,15}$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{i,01}} = -4\bar{N}w_{i-1,01} + 4\bar{N}w_{i-1,03} + 8\bar{N}w_{i,01} - 8\bar{N}w_{i,03} - 4\bar{N}w_{i+1,01} + 4\bar{N}w_{i+1,03} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{i,j}} = 4\bar{N}w_{i-1,j-2} - 8\bar{N}w_{i-1,j} + 4\bar{N}w_{i-1,j+2} - 8\bar{N}w_{i,j-2} + 16\bar{N}w_{i,j} - 8\bar{N}w_{i,j+2} + 4\bar{N}w_{i+1,j-2} - 8\bar{N}w_{i+1,j} + 4\bar{N}w_{i+1,j+2} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \text{ e } j = 03, 05, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{i,15}} = 4\bar{N}w_{i-1,13} - 8\bar{N}w_{i-1,15} - 8\bar{N}w_{i,13} + 16\bar{N}w_{i,15} + 4\bar{N}w_{i+1,13} - 8\bar{N}w_{i+1,15} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{8,01}} = -4\bar{N}w_{7,01} + 4\bar{N}w_{7,03} + 8\bar{N}w_{8,01} - 8\bar{N}w_{8,03}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_5}{\partial w_{8,j}} &= 4\bar{N}w_{7,j-2} - 8\bar{N}w_{7,j} + 4\bar{N}w_{7,j+2} - 8\bar{N}w_{8,j-2} + \\ &+ 16\bar{N}w_{8,j} - 8\bar{N}w_{8,j+2}, \quad j = 03, 05, \dots, 2n-3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{8,15}} = 4\bar{N}w_{7,13} - 8\bar{N}w_{7,15} - 8\bar{N}w_{8,13} + 16\bar{N}w_{8,15}$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todo } i, p$$

f) Minimização da I_6

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{1,j}} = -\bar{P}v_{1,j+3} + \bar{P}v_{2,j+3}, \quad j = 01, 03$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_6}{\partial w_{1,j}} &= \bar{P}v_{1,j-1} - \bar{P}v_{2,j-1} - \bar{P}v_{1,j+3} + \bar{P}v_{2,j+3}, \\ &, \quad j = 05, 07, \dots, 2n-3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{1,15}} = \bar{P}v_{1,14} - \bar{P}v_{2,14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_6}{\partial w_{i,j}} &= \bar{P}v_{i-1,j+3} - 2\bar{P}v_{i,j+3} + \bar{P}v_{i+1,j+3}, \\ &, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ & \quad j = 01, 03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_6}{\partial w_{i,j}} &= -\bar{P}v_{i-1,j-1} + 2\bar{P}v_{i,j-1} - \bar{P}v_{i+1,j-1} + \bar{P}v_{i-1,j+3} - \\ &- 2\bar{P}v_{i-1,j+3} - 2\bar{P}v_{i,j+3}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ & \quad j = 05, 07, \dots, 2n-3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{i,15}} = -\bar{P}v_{i-1,14} + 2\bar{P}v_{i,14} - \bar{P}v_{i+1,14}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{8,j}} = \bar{P}v_{7,j+3} - 2\bar{P}v_{8,j+3} \quad , \quad j = 01, 03$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{8,j}} = -\bar{P}v_{7,j-1} + 2\bar{P}v_{8,j-1} + \bar{P}v_{7,j+3} - 2\bar{P}v_{8,j+3} \\ , \quad j = 05, 07, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{8,15}} = -\bar{P}v_{7,14} + 2\bar{P}v_{8,14}$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{i,p}} = -\bar{P}w_{1,p-3} + \bar{P}w_{2,p-3} + \bar{P}w_{1,p+1} - \bar{P}w_{2,p+1} \quad , \\ , \quad p = 04, 06, \dots, 2n-2$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{1,16}} = -\bar{P}w_{1,13} + \bar{P}w_{2,13}$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{i,p}} = \bar{P}w_{i-1,p-3} - 2\bar{P}w_{i,p-3} + \bar{P}w_{i+1,p-3} - \bar{P}w_{i-1,p+1} + \\ + 2\bar{P}w_{i,p+1} - \bar{P}w_{i+1,p+1} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ p = 04, 06, \dots, 2n-2$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{8,p}} = \bar{P}w_{7,p-3} - 2\bar{P}w_{8,p-3} - \bar{P}w_{7,p+1} + 2\bar{P}w_{8,p+1}$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{i,16}} = \bar{P}w_{i-1,13} - 2\bar{P}w_{i,13} + \bar{P}w_{i+1,13} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{8,16}} = \bar{P}w_{7,13} - 2\bar{P}w_{8,13}$$

onde
$$\bar{P} = - \frac{Ed^3}{16Rh}$$

g) Minimização da I_7

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{1,01}} = 2\bar{S}w_{1,01} - 2\bar{S}w_{1,03}$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{1,j}} = -2\bar{S}w_{1,j-2} + 4\bar{S}w_{1,j} - 2\bar{S}w_{1,j+2} \quad , \quad j = 03, 05, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{1,15}} = -2\bar{S}w_{1,13} + 4\bar{S}w_{1,15}$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{i,01}} = 4\bar{S}w_{i,01} - 4\bar{S}w_{i,03} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{i,j}} = -4\bar{S}w_{i,j-2} + 8\bar{S}w_{i,j} - 4\bar{S}w_{i,j+2} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$j = 03, 05, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{i,15}} = -4\bar{S}w_{i,13} + 8\bar{S}w_{i,15} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todo } i, p$$

onde

$$\bar{S} = - \frac{Ed^3}{24R^2}$$

h) Minimização da I_8

$$\frac{\partial I_8}{\partial w_{1,01}} = \frac{h^2}{4} z_{1,01}$$

$$\frac{\partial I_8}{\partial w_{1,j}} = \frac{h^2}{2} z_{1,j} \quad , \quad j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_8}{\partial w_{i,01}} = \frac{h^2}{2} z_{i,01} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_8}{\partial w_{i,j}} = h^2 z_{i,j} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \text{e} \quad j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_8}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todo } i, p$$

Estão aí todas as expressões necessárias à construção do sistema de equações correspondentes à minimização de π_p .

O sistema de $n^2 + n \cdot (n-1)$ equações é dado por

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial v_{i,p}} = \frac{\partial}{\partial v_{i,p}} \sum_{k=1}^8 I_k = 0 = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,p}} = 0 \quad (n \cdot (n-1) \text{ equações})$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial w_{i,j}} \sum_{k=1}^8 I_k = 0 = \sum_{k=1}^8 \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,j}} = 0 \quad (n^2 \text{ equações})$$

Os termos $\partial I_8 / \partial v_{i,p}$ e $\partial I_8 / \partial w_{i,j}$ correspondem às cargas externas; os outros, às características geométricas e alásticas da estrutura. Convém pois escrever o sistema na forma

$$\sum_{k=1}^7 \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,p}} = - \frac{\partial I_8}{\partial v_{i,p}}$$

$$\sum_{k=1}^7 \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,j}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,j}}$$

Ainda é conveniente, para a resolução, alternar as equações provenientes de derivação em relação aos $v_{i,p}$ e as oriundas de derivação com respeito aos $w_{i,j}$, conforme ilustra bem a construção do sistema para o caso de $n=8$ (isto é, rede de 8×8 malhas) feito a seguir.

Para o caso de $n=8$, tem-se, então, um sistema de 120 equações e 120 incógnitas (56 equações fornecidas pela minimização em relação aos v e 64 em relação aos w).

Antes de montar o sistema de equações, para esse caso, são pertinentes algumas observações. Note-se que as equações provenientes de derivação em relação aos $w_{1,01}$ são:

$$\sum_{k=1}^7 \frac{\partial I_k}{\partial w_{1,01}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{1,01}} = - \frac{h^2}{4} Z_{1,01} \neq 0$$

e em geral, para as equações oriundas de derivação em rela

ção aos $w_{i,j}$ são:

$$\sum_{k=1}^7 \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,j}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,j}} = - c_{i,j} h^2 z_{i,j}$$

com

$$c_{1,01} = 0.25$$

$$c_{i,01} = 0.50 \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, 8$$

$$c_{1,j} = 0.50 \quad \text{para } j = 03, 05, \dots, 15$$

$$c_{i,j} = 1.00 \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, 8 \text{ e } j = 03, 05, \dots, 15$$

Por outro lado, para as equações provenientes de derivação com respeito aos $v_{i,p}$ tem-se

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial v_{i,02}} \equiv 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 8 \text{ e}$$

$$\sum_{k=1}^7 \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,02}} \equiv 0 \equiv - \frac{\partial I_8}{\partial v_{i,02}} \equiv 0$$

pois $v_{i,02} \equiv 0$ (para $i = 1, 2, \dots, 8$), não havendo, portanto, qualquer variação de energia por variação dos deslocamentos tangenciais $v_{i,02}$ na linha de simetria; não tem sentido a operação $\partial \pi_p / \partial v_{i,02}$, pois os $v_{i,02}$ são constantes por condição de contorno (simetria). Assim, simplesmente, não há equações provenientes de $\partial \pi_p / \partial v_{i,02}$. E em relação aos outros $v_{i,p}$ tem-se que:

$$\sum_{k=1}^7 \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,p}} = - \frac{\partial I_8}{\partial v_{i,p}}$$

mas $\partial I_8 / \partial v_{i,p} \equiv 0$ e, portanto, as equações provenientes das derivações em relação aos $v_{i,p}$ são:

$$\sum_{k=1}^8 \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,p}} \equiv 0.$$

Indicando-se aqui somente por Σ o símbolo $\sum_{k=1}^7$ e alternando-se as equações provenientes de derivação em relação aos $v_{i,p}$ e as oriundas de derivação com respeito aos $w_{i,p}$ (como já sugerida anteriormente), o sistema pode, então, ser escrito na seguinte forma:

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,01}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,01}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,03}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,03}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,04}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,05}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,05}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,06}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,07}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,07}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,08}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,09}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,09}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,10}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,11}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,11}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,12}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,13}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,13}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,14}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,15}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,15}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,16}} = 0$$

(4.11k-o)

Com $i = 1, 2, \dots, 8$, essas 15 equações típicas, repetindo-se 8 vezes, originam as 120 equações do sistema (facilmente transformável no sistema correspondente a uma outra rede, com $n \neq 8$). Cada uma delas contém, ordenadamente, apenas algumas dentre 15 incógnitas, como se vê ao examinar a matriz do sistema.

O sistema é, finalmente

$$[\bar{D}] \{\bar{\delta}\}^T = \{\bar{F}\}^T \quad (4.12)$$

onde

$$\{\bar{\delta}\} = \{w_{1,01}, w_{1,03}, v_{1,04}, w_{1,05}, \dots, w_{8,15}, v_{8,16}\} \quad (4.13a)$$

$$\{\bar{F}\} = \left\{ \frac{-\partial I_8}{\partial w_{1,01}}, \frac{-\partial I_8}{\partial w_{1,03}}, 0, \frac{-\partial I_8}{\partial w_{1,05}}, 0, \dots, \frac{-\partial I_8}{\partial w_{8,15}}, 0 \right\} \quad (4.13b)$$

$$[\bar{D}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline D_1 & \bar{D}_1 & \frac{3}{2}\bar{\bar{D}}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bar{D}_1 & D_2 & \bar{D}_2 & \bar{\bar{D}}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2}\bar{\bar{D}}_2 & \bar{D}_2 & D_3 & \bar{D}_3 & \bar{\bar{D}}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \bar{\bar{D}}_2 & \bar{D}_3 & D_4 & \bar{D}_3 & \bar{\bar{D}}_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_2 & \bar{D}_3 & D_4 & \bar{D}_3 & \bar{\bar{D}}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_2 & \bar{D}_3 & D_4 & \bar{D}_3 & \bar{\bar{D}}_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_2 & \bar{D}_3 & D_4 & \bar{D}_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{D}}_2 & \bar{D}_3 & D_2 \\ \hline \end{array} \quad (4.13c)$$

e as submatrizes da $[\bar{D}]$ são:

OBS: Representam-se apenas os elementos diferentes de zero da banda superior, por elas serem simétricas e em banda.

Q14	2010	205	201																	
	Q15		2010	205	201															
		06	-205	204		202														
			2014		2010	205	201													
				07	-205	204		202												
					2014		2010	205	201											
						07	-205	204		202										
							2014		2010	205	201									
								07	-205	204		202								
									2014		2010	205	201							
										07	-205	204		202						
											2014		2010	205	201					
												07	-205	204		202				
													2014		2010	205	201			
														07	-205	204		202		
															2014		2010	205		
																07	-205	204		
																	2014			
																				06

$$[D_2] =$$

Os símbolos das submatrizes da $[D]$ representam:

$$\begin{aligned} Q1 &= \bar{N} \\ Q2 &= -\bar{G} \\ Q3 &= \bar{P} \\ Q4 &= \bar{M}/4 \\ Q5 &= \bar{B} - \bar{P} \\ Q6 &= 6\bar{G} + \bar{M} \\ Q7 &= 4\bar{G} + \bar{M} \\ Q8 &= 3\bar{G} + \bar{M}/2 \\ Q9 &= 2\bar{G} + \bar{M}/2 \\ Q10 &= -8\bar{N} - 2\bar{S} \\ Q11 &= \bar{A} + 8.5\bar{N} + 2\bar{S} \\ Q12 &= 2\bar{A} + 18\bar{N} + 4\bar{S} \\ Q13 &= 2\bar{A} + 17\bar{N} + 4\bar{S} \\ Q14 &= 2\bar{A} + 21\bar{N} + 4\bar{S} \\ Q15 &= 4\bar{A} + 44\bar{N} + 8\bar{S} \\ Q16 &= 2\bar{A} + 20.5\bar{N} + 4\bar{S} \\ Q17 &= 4\bar{A} + 43\bar{N} + 8\bar{S} \\ Q18 &= 2\bar{A} + 20\bar{N} + 4\bar{S} \end{aligned}$$

Os termos independentes ou "termos de carga", são calculados para o caso de $n = 8$. De maneira geral

$$\bar{F}_{i,j} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,j}} = -c_{i,j} h^2 z_{i,j}$$

ou mais simplesmente,

$$\bar{F}_{i,j} = -c_{i,j} h^2 z_i \quad (4.14)$$

pois, a variação somente de j , com o mesmo i , não altera $z_{i,j}$ (figura 4.4).

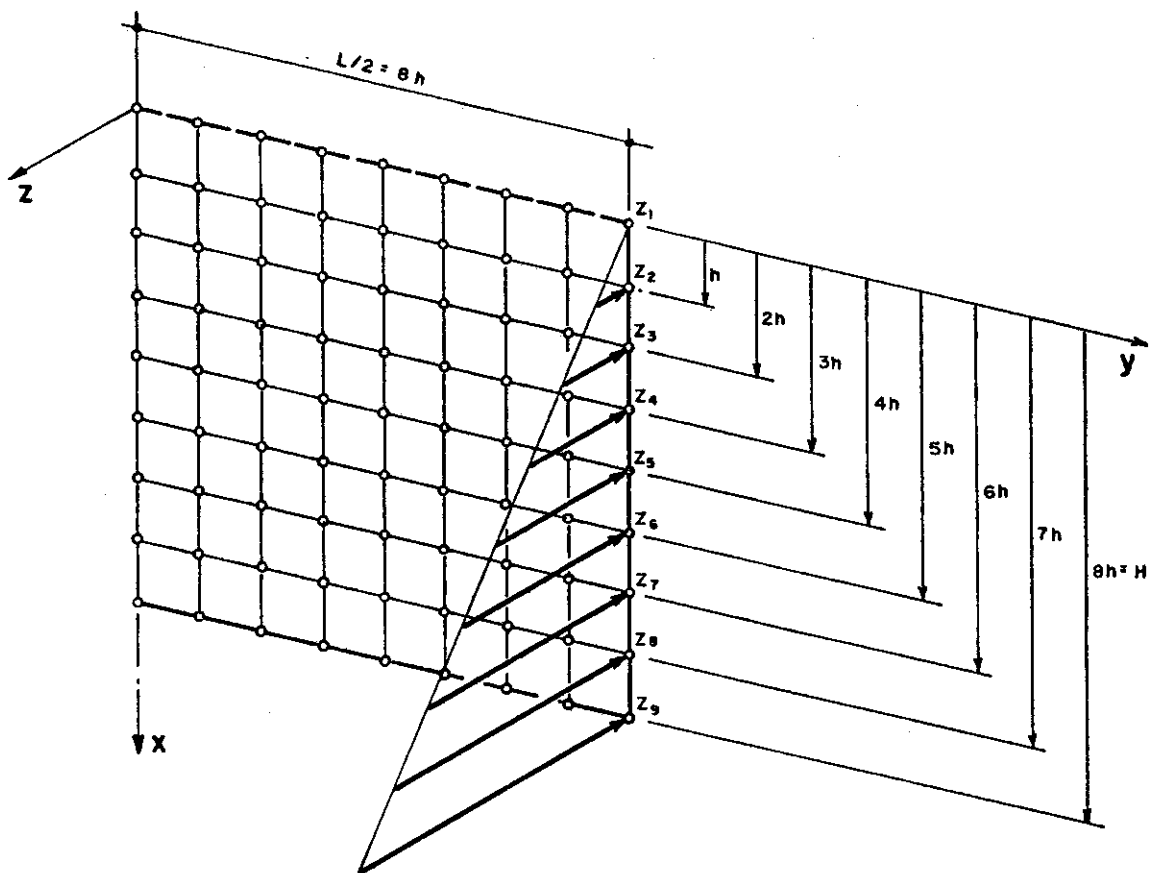


Figura 4.4 - Esquema da Carga

Os Z_i valem respectivamente

$$Z_1 = 0$$

$$Z_2 = \gamma_a h$$

$$Z_3 = \gamma_a \cdot 2h$$

$$Z_4 = \gamma_a \cdot 3h$$

$$Z_5 = \gamma_a \cdot 4h$$

$$Z_6 = \gamma_a \cdot 5h$$

$$Z_7 = \gamma_a \cdot 6h$$

$$Z_8 = \gamma_a \cdot 7h$$

que, como se observa, podem ser obtidos da seguinte forma genérica:

$$Z_i = (i-1)\gamma_\alpha h. \quad (4.15)$$

Com isso, os termos independentes das equações oriundas de derivação em relação aos $w_{i,j}$ valem

$$\bar{F}_{i,01} = -c_{i,1} h^2 Z_i = -0.5 h^2 Z_i = -\gamma_\alpha \frac{(i-1)}{2} h^3, \\ , i = 1, 2, \dots, 8$$

$$\bar{F}_{i,j} = -c_{i,j} h^2 Z_i = -1.0 h^2 Z_i = -\gamma_\alpha (i-1) h^3, \\ , i = 1, 2, \dots, 8 \text{ e} \\ j = 03, 04, 05, \dots, 15 \quad (4.16a-b)$$

Finalmente, considerando que $\bar{F}_{i,p} \equiv 0$ (pois $\partial I_8 / \partial v_{i,p} \equiv 0$), os "termos de carga" são, ordenadamente para $n = 8$:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{i,01} &= -\gamma_\alpha \frac{(i-1)}{2} h^3 \\ \bar{F}_{i,02} &= 0 \\ \bar{F}_{i,03} &= -\gamma_\alpha (i-1) h^3 \\ \bar{F}_{i,04} &= 0 \\ \bar{F}_{i,05} &= -\gamma_\alpha (i-1) h^3 \\ \bar{F}_{i,06} &= 0 \\ \bar{F}_{i,07} &= -\gamma_\alpha (i-1) h^3 \\ \bar{F}_{i,08} &= 0 \\ \bar{F}_{i,09} &= -\gamma_\alpha (i-1) h^3 \\ \bar{F}_{i,10} &= 0 \\ \bar{F}_{i,11} &= -\gamma_\alpha (i-1) h^3 \\ \bar{F}_{i,12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{F}_{i,13} = -\gamma_{\alpha}(i-1)h^3$$

$$\bar{F}_{i,14} = 0$$

$$\bar{F}_{i,15} = -\gamma_{\alpha}(i-1)h^3$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, 8$.

4.3.4 - Expressões das Rotações e Esforços e Cálculo com PI-2, impondo Rotação nula no Engastamento

Nestes primeiros ensaios numéricos apresentam-se a formulação e o cálculo das rotações, w' e w'' , e dos esforços, M_x , M_y , N_y , de longe os mais importantes.

Têm-se das (1.41a-h) que

$$\begin{aligned} N_y &= D\left(v' + \frac{w}{R}\right) + \frac{K}{R}\left(w'' + \frac{w}{R^2}\right) \\ M_x &= Kw'' \\ M_y &= K\left(w'' + \frac{w}{R^2}\right) \end{aligned} \quad (4.17a-c)$$

onde se substituíram todas as derivadas de ϕ por y e já se impuseram todas aquelas hipóteses admitidas no item 4.2.

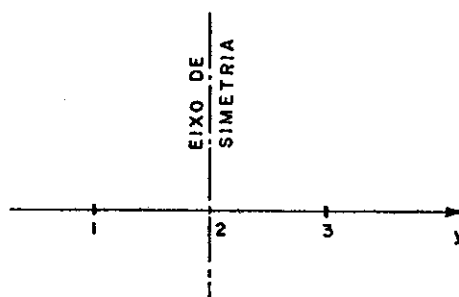
Pelos motivos já mencionados no capítulo 3, escrevem-se a seguir essas expressões em suas formas matriciais

$$\begin{aligned} [N_y] &= D[v'] + \frac{D}{R}[w] + \frac{K}{R}[w''] \\ [M_x] &= K[w''] \\ [M_y] &= K[w''] + \frac{K}{R^2}[w] \end{aligned} \quad (4.18a-c)$$

Para o cálculo desses esforços e das rotações w' e w'' , utiliza-se a melhor aproximação obtida no capítulo anterior (Ensaio de Aferição). Isto é, aproximam-se as derivadas das expressões dessas grandezas, com diferenças finitas provenientes do emprego de polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do segundo grau, com a imposição de rotação nula no engastamento.

Passa-se a seguir à discretização dessas expressões.

Nesta formulação, como na do capítulo 3, evitou-se a utilização de pontos fictícios acima da borda livre, preferindo-se fórmulas assimétricas, lançando mão apenas de valores efetivamente calculados, como se se tratasse de deslocamentos medidos sobre um modelo. Naturalmente, empregam-se pontos fictícios na tradução das condições de contorno. Além disso, é utilizada a condição de simetria dos w no eixo de simetria, para v^* e w^{**} , que leva às seguintes expressões em diferenças finitas com $PI-2$:



Condições

$$w_1 = w_3$$

$$v_1 = -v_3$$

$$v_2 = 0$$

$$f_2^* = \frac{1}{2h} (2v_3) \text{ para } v^*$$

$$f_2^{**} = \frac{1}{h^2} (-2w_2 + 2w_3) \text{ para } w^{**}$$

(4.19a-b)

As expressões das derivadas envolvidas nas (4.18a-c) e as expressões das rotações w' e w^* , deduzidas como no capítulo anterior, são, para uma linha ou coluna de nós da rede conforme se deriva em relação a y ou a x , respectivamente:

$$\{v^*\} = \frac{1}{2h} \{v\} [P^*]$$

$$\{w''\}^T = \frac{1}{h^2} [P''] \{w\}^T$$

(4.20a-b)

$[w] =$

$w_{1,01}$	$w_{1,03}$	$w_{1,05}$	$w_{1,07}$	$w_{1,09}$	$w_{1,11}$	$w_{1,13}$	$w_{1,15}$	0
$w_{2,01}$								0
								0
				$w_{i,j}$				0
								0
								0
$w_{7,01}$							$w_{7,15}$	0
$w_{8,01}$	$w_{8,03}$	$w_{8,05}$	$w_{8,07}$	$w_{8,09}$	$w_{8,11}$	$w_{8,13}$	$w_{8,15}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

E as matrizes $[P']$, $[P^\cdot]$, $[P^{\cdot\cdot}]$ e $[P'']$ escrevem-se, de acordo com as expressões tabeladas em 2.3.3.1a e b:

$$[P'] = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P^{\cdot}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P^{\cdot\cdot}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P''] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que as matrizes $[P^*]$ e $[P^{**}]$ foram afetadas pelas condições de contorno de simetria, que se traduziram na substituição dos elementos da primeira coluna dessas matrizes derivadas, pelos coeficientes das expressões (4.19a-b). Note-se, também, que as demais matrizes derivadas (as $[P']$ e $[P'']$) são as $[P_x]_\gamma$ e $[P_{xx}]_\gamma$ expandidas para o caso de $n=8$, como não poderiam deixar de ser, uma vez que se está aplicando aqui a mesma aproximação utilizada naqueles ensaios de aferição.

4.4 - DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA COM REDES DUAIS

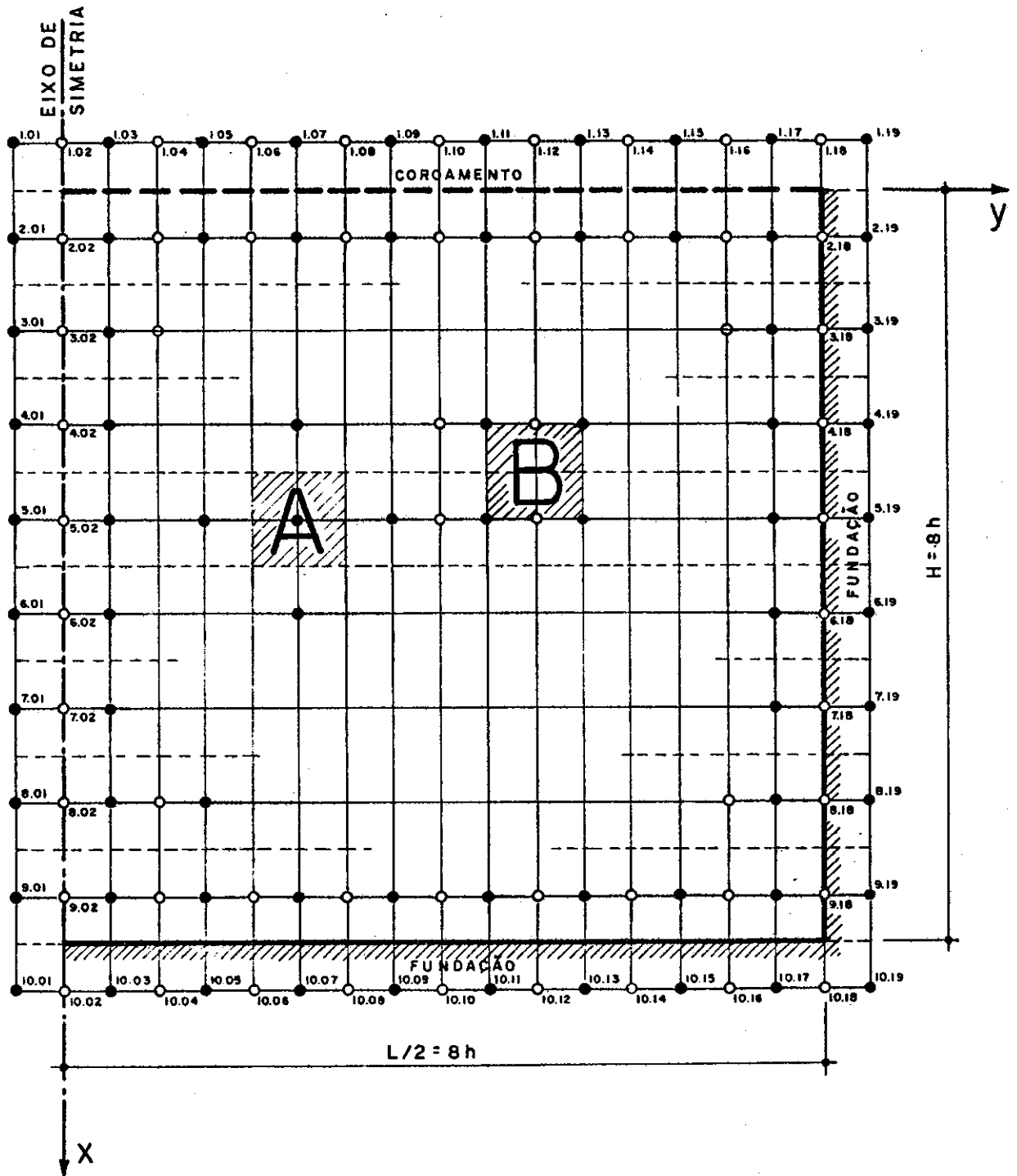


Figura 4.5

Analogamente à discretização anterior, diante da simetria, considera-se metade da casca e estabelecem-se agora, duas redes duais de malhas quadradas de abertura $h=H/n$, respectivamente para os deslocamentos v e w , como esquematiza a figura 4.5 para $n=8$.

Para esta discretização, adotou-se a mesma nomenclatura para a discriminação de pontos da rede utilizada como na discretização anterior. Observe-se, porém, que as letras A e B agora distinguem pontos estabelecidos pelos nós da rede w e pontos que se localizam no centro de cada malha desta mesma rede, respectivamente (vejam figuras 4.5 e 4.6). Note-se também, que os deslocamentos v e w obtidos por esta discretização são em pontos distintos da discretização anterior. Apesar disso, não são feitas outras observações explícitas, por o próprio desenvolvimento da discretização e as figuras ilustrativas, já as fazerem nitidamente.

As derivadas das (4.3a-h) são expressas mediante diferenças finitas obtidas por $PI-2$, utilizando-se os nós de uma ou de outra rede como se indicam abaixo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_B &= \frac{1}{2(h/2)} (v_b - v_a) = \frac{1}{h} (v_b - v_a) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_A &= \frac{1}{2(h/2)} (v_2 - v_1) = \frac{1}{h} (v_2 - v_1) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_A &= \frac{1}{h^2} (w_{Ab} - 2w_A + w_{Ac}) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_A &= \frac{1}{h^2} (w_{Ad} - 2w_A + w_{Ae}) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_B &= \frac{1}{4(h/2)^2} (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be}) = \\ &= \frac{1}{h^2} (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be}). \end{aligned} \tag{4.21a-e}$$

Note-se que, desta forma, três das derivadas são calculadas com malhas $h/2$, embora ambas as redes tenham malhas de abertura h . São justamente as que ficariam menos bem definidas

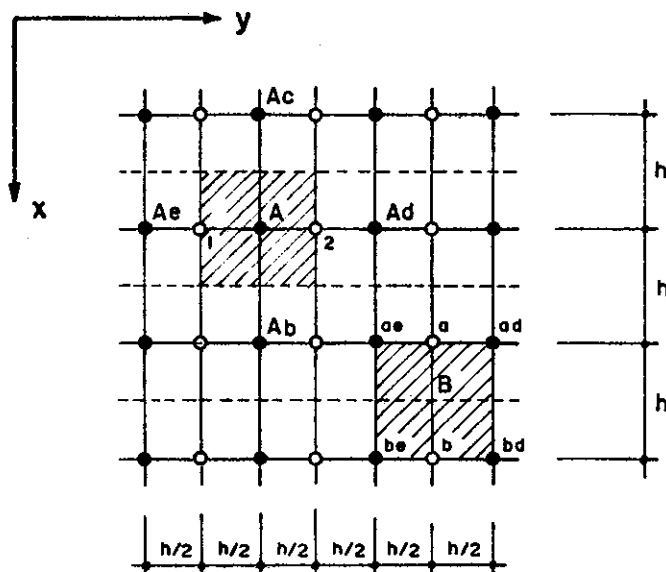


Figura 4.6

com $PI-2$ sobre malhas h .

4.4.1 - Condições de Contorno

As únicas condições de contorno a serem impostas, como já se observou na discretização anterior, são as concernentes ao eixo de simetria e às bordas engastadas. Nas bordas engastadas admitem-se para os deslocamentos w a condição de Stiefengaste (veja condições (3.45a-c)) e, para os deslocamentos v as mesmas admitidas no item anterior, salvo na borda inferior, que serão diferentes devido sua rede estar deslocada de $h/2$ em relação àquela. Enfim, as condições de contorno a serem impostas são:

a) No eixo de simetria para $i = 1, 2, \dots, n+2$

$$v_{i,02} = 0$$

$$w_{i,01} = w_{i,03}$$

(4.22a-b)

b) Na borda engastada lateral para $i = 1, 2, \dots, n+2$

$$v_{i, 2n+2} = 0$$

$$w_{borda} = 0 \quad (4.23a-b)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i, 2n+2} = \frac{1}{h} (w_{i, 2n+3} - w_{i, 2n+1}) = 0$$

Esta condição de engastamento discretizada com malha $h/2$, graças à peculiar disposição da rede dos w , acarreta

$$w_{i, 2n+3} = w_{i, 2n+1} = 0, \quad (4.23c)$$

desde que se admita

$$w_{borda} = 0.5 (w_{i, 2n+1} + w_{i, 2n+3}).$$

Note-se a forte representação de engastamento.

c) Na borda engastada inferior, com aproximações semelhantes às da borda lateral, para $j = 01, 03, \dots, 2n+3$ e $p = 04, 06, \dots, 2n$

$$w_{borda} = 0.5 (w_{n+1, j} + w_{n+2, j}) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{borda} = \frac{1}{h} (w_{n+2, j} - w_{n+1, j}) = 0,$$

resultam

$$w_{n+2, j} = w_{n+1, j} = 0, \quad (4.24a)$$

e para os deslocamentos tangenciais v ,

$$v_{borda} = 0.5 (v_{n+1, p} + v_{n+2, p})$$

isto é,

$$v_{n+2, p} = -v_{n+1, p} \quad (4.24b)$$

e, para o canto

$$v_{n+2, 2n+2} = -v_{n+1, 2n+2} = 0 \quad (4.24c)$$

4.4.2 - Aproximação do Cálculo da Energia

Agora as grandezas I_k das (4.3a-h) são aproximadas calculando-se a energia armazenada nos diversos "elementos A" (para as integrais que contêm $\partial v/\partial y$, $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$) ou nos "elementos B" (para as que contêm $\partial v/\partial x$ ou $\partial^2 w/\partial x \partial y$). Resultam com isso, as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\bar{A}h}{2} \sum_A \left(\frac{1}{h} (v_2 - v_1) + \frac{1}{R} w_A \right)^2 \\
 I_2 &= \frac{\bar{B}}{2} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right) \sum_B (v_b - v_a)^2 \\
 I_3 &= \bar{G} \sum_A (w_{Ac} - 2w_A + w_{Ab})^2 \\
 I_4 &= \bar{G} \sum_A (w_{Ae} - 2w_A + w_{Ad})^2 \\
 I_5 &= 2\bar{G} \sum_B (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be})^2 \\
 I_6 &= 2\bar{M} \sum_B (v_b - v_a) (w_{ae} + w_{bd} - w_{ad} - w_{be}) \\
 I_7 &= -2\bar{N} \sum_A w_A (w_{Ae} - 2w_A + w_{Ad}) \\
 I_8 &= \sum_A Z_A w_A h^2.
 \end{aligned} \tag{4.25a-h}$$

As constantes introduzidas valem

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= Edh, \quad \bar{B} = \frac{Ed}{2} \left(1 + \frac{d^2}{4R^2} \right), \\
 \bar{G} &= \frac{Ed^3}{24h^2}, \quad \bar{M} = -\frac{Ed^3}{16Rh}, \quad \bar{N} = -\frac{Ed^3}{24R^2}.
 \end{aligned}$$

Introduzidas as condições de contorno passam a distinguir-se, como na outra discretização, diversos tipos de termos, dependendo da posição do elemento em relação às bordas. Além disso, nesta, os "elementos B" são considerados com sua área total ou com metade ou com um quarto dela, ao passo que os "elementos A" contribuem sempre proporcional

mente à sua área total.

4.4.3 - Sistema de Equações Minimizantes

Impondo-se a condição de mínimo (4.2) do funcional π_p , dada por (4.9a-b), que se traduzem por (4.10a-b), indicam-se a seguir as diversas parcelas de energia I_k minimizadas em relação aos deslocamentos v e w . Como na outra discretização considerou-se o caso de redes de $n \times n$ malhas.

a) Minimização da I_1

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,04}} = \bar{A} \left(\frac{1}{h} (2v_{i,04} - v_{i,06}) + \frac{1}{R} (w_{i,03} - w_{i,05}) \right),$$

, $i = 2, 3, \dots, n$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,p}} = \bar{A} \left(\frac{1}{h} (-v_{i,p-2} + 2v_{i,p} - v_{i,p+2}) + \frac{1}{R} (w_{i,p-1} - w_{i,p+1}) \right),$$

, $i = 2, 3, \dots, n$ e $p = 06, 08, \dots, 2n-2$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{n+1,04}} = \frac{\bar{A}}{h} (2v_{n+1,04} - v_{n+1,06})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{n+1,p}} = \frac{\bar{A}}{h} (-v_{n+1,p-2} + 2v_{n+1,p} - v_{n+1,p+2})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{i,2n}} = \frac{\bar{A}}{h} (2v_{i,2n} - v_{i,2n-2}) + \frac{\bar{A}}{R} w_{i,2n-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial v_{n+1,2n}} = \frac{\bar{A}}{h} (2v_{n+1,2n} - v_{n+1,2n-2})$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,03}} = \frac{\bar{A}h}{R} \left(\frac{1}{R} w_{i,03} + \frac{1}{h} v_{i,04} \right), \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w_{i,j}} = \frac{\bar{A}h}{R} \left(\frac{1}{R} w_{i,j} + \frac{1}{h} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right),$$

, $i = 2, 3, \dots, n$ e
 $j = 05, 07, \dots, 2n-1$

b) Minimização da I_2

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{1,p}} = \frac{\bar{B}}{2} (v_{1,p} - v_{2,p}), \quad p = 04, 06, \dots, 2n$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{2,p}} = \frac{\bar{B}}{2} (-v_{1,p} + 3v_{2,p} - 2v_{3,p}), \quad p = 04, 06, \dots, 2n$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{i,p}} = \frac{\bar{B}}{2} (-v_{i-1,p} + 2v_{i,p} - v_{i+1,p}), \quad i = 3, 4, \dots, n$$

$p = 04, 06, \dots, 2n$

$$\frac{\partial I_2}{\partial v_{n+1,p}} = \frac{\bar{B}}{2} (3v_{n+1,p} - v_{n,p}), \quad p = 04, 06, \dots, 2n$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial w_{i,j}} \equiv 0 \quad \text{para todos } i, j$$

c) Minimização da I_3

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{1,j}} = 2\bar{G} (w_{1,j} + w_{3,j} - 2w_{2,j}), \quad j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{2,j}} = 2\bar{G} (-2w_{1,j} + 5w_{2,j} - 4w_{3,j} + w_{4,j}),$$

, $j = 03, 05, \dots, 2n-1$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{i,j}} = 2\bar{G} (w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}),$$

, $i = 3, 4, \dots, n$ e $j = 03, 05, \dots, 2n-1$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{n-1,j}} = 2\bar{G} (w_{n-3,j} - 4w_{n-2,j} + 6w_{n-1,j} - 4w_{n,j}) ,$$

$$, j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial w_{n,j}} = 2\bar{G} (w_{n-2,j} - 4w_{n-1,j} + 6w_{n,j}) , j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todos } i, p$$

d) Minimização da I_4

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,03}} = 2\bar{G} (2w_{i,03} - 3w_{i,05} + w_{i,03}) , i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,05}} = 2\bar{G} (-3w_{i,03} + 6w_{i,05} - 4w_{i,07} + w_{i,09}) ,$$

$$, i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,j}} = 2\bar{G} (w_{i,j-4} - 4w_{i,j-2} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j+2} + w_{i,j+4}) ,$$

$$, i = 2, 3, \dots, n \text{ e } j = 07, 09, \dots, 2n-5$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,2n-3}} = 2\bar{G} (w_{i,2n-7} - 4w_{i,2n-5} + 6w_{i,2n-3} - 4w_{i,2n-1}) ,$$

$$, i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial w_{i,2n-1}} = 2\bar{G} (w_{i,2n-5} - 4w_{i,2n-3} + 6w_{i,2n-1}) ,$$

$$, i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todo } i, p$$

e) Minimização da I_5

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{1,03}} = 2\bar{G} (w_{1,03} - w_{1,05} - w_{2,03} + w_{2,05})$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{1,j}} = 2\bar{G} (-w_{1,j-2} + 2w_{1,j} - w_{1,j+2} + w_{2,j-2} - 2w_{2,j} + w_{2,j+2}), \quad j = 05, 07, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{1,2n-1}} = 2\bar{G} (-w_{1,2n-3} + 2w_{1,2n-1} + w_{2,2n-3} - 2w_{2,2n-1})$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{2,03}} = 2\bar{G} (-w_{1,03} + w_{1,05} + 3w_{2,03} - 3w_{2,05} - 2w_{3,03} + 2w_{3,05})$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{2,j}} = 2\bar{G} (w_{1,j-2} - 2w_{1,j} + w_{1,j+2} - 3w_{2,j-2} + 6w_{2,j} - 3w_{2,j+2} + 2w_{3,j-2} - 4w_{3,j} + 2w_{3,j+2}), \quad j = 05, 07, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{2,2n-1}} = 2\bar{G} (w_{1,2n-3} - 2w_{1,2n-1} - 3w_{2,2n-3} + 6w_{2,2n-1} + 2w_{3,2n-3} - 4w_{3,2n-1})$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{i,03}} = 2\bar{G} (-2w_{i-1,03} + 2w_{i-1,05} + 4w_{i,03} - 4w_{i,05} - 2w_{i+1,03} + 2w_{i+1,05}), \quad i = 3, 4, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{i,j}} = 2\bar{G} (2w_{i-1,j-2} - 4w_{i-1,j} + 2w_{i-1,j+2} - 4w_{i,j-2} + 8w_{i,j} - 4w_{i,j+2} + 2w_{i+1,j-2} - 4w_{i+1,j} + 2w_{i+1,j+2}), \quad i = 3, 4, \dots, n-1 \text{ e } j = 05, 07, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{i,2n-1}} = 2\bar{G} (2w_{i-1,2n-3} - 4w_{i-1,2n-1} - 4w_{i,2n-3} + 8w_{i,2n-1} + 2w_{i+1,2n-3} - 4w_{i+1,2n-1}) , \quad i = 3, 4, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{n,3}} = 2\bar{G} (-2w_{n-1,03} + 2w_{n-1,05} + 4w_{n,03} - 4w_{n,05})$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{n,j}} = 2\bar{G} (2w_{n-1,j-2} - 4w_{n-1,j} + 2w_{n-1,j+2} - 4w_{n,j-2} + 8w_{n,j} - 4w_{n,j+2}) , \quad j = 05, 07, \dots, 2n-3$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial w_{n,2n-1}} = 2\bar{G} (2w_{n-1,2n-3} - 4w_{n-1,2n-1} - 4w_{n,2n-3} + 8w_{n,2n-1})$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todos } i, p$$

f) Minimização da I_6

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{1,03}} = \bar{M} (v_{2,04} - v_{1,04})$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{1,j}} = \bar{M} (v_{1,j-1} - v_{1,j+1} - v_{2,j-1} + v_{2,j+1}) , \quad j = 05, 07, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{2,03}} = \bar{M} (v_{1,04} - 3w_{2,04} + 2w_{3,04})$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{2,j}} = \bar{M} (-v_{1,j-1} + v_{1,j+1} + 3v_{2,j-1} - 3v_{2,j+1} - 2v_{3,j-1} + 2v_{3,j+1}) , \quad j = 05, 07, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{i,03}} = 2\bar{M} (v_{i-1,04} - 2v_{i,04} + v_{i+1,04}) , \quad i = 3, 4, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial w_{i,j}} = \bar{M} (-v_{i-1,j-1} + v_{i-1,j+1} + 2v_{i,j-1} - 2v_{i,j+1} + v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j+1}) , \quad i = 3,4,\dots,n \quad \text{e}$$

$$j = 05,07,\dots,2n-1$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{1,p}} = \bar{M} (-w_{1,p-1} + w_{1,p+1} + w_{2,p-1} - w_{2,p+1}) ,$$

$$p = 04,06,\dots,2n-2$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{1,2n}} = \bar{M} (-w_{1,2n-1} + w_{2,2n-1})$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{2,p}} = \bar{M} (w_{1,p-1} - w_{1,p+1} - 3w_{2,p-1} + 3w_{2,p+1} + 2w_{3,p-1} + 2w_{3,p+1}) , \quad p = 04,06,\dots,2n-2$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{2,2n}} = \bar{M} (w_{1,2n-1} - 3w_{2,2n-1} + 2w_{3,2n-1})$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{i,p}} = 2\bar{M} (w_{i-1,p-1} - w_{i-1,p+1} - 2w_{i,p-1} + 2w_{i,p+1} + w_{i+1,p-1} - w_{i+1,p+1}) , \quad i = 3,4,\dots,n-1 \quad \text{e}$$

$$p = 04,06,\dots,2n-2$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{n,p}} = 2\bar{M} (w_{n-1,p-1} - w_{n-1,p+1} - 2w_{n,p-1} + 2w_{n,p+1}) ,$$

$$p = 04,06,\dots,2n-2$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{i,2n}} = 2\bar{M} (w_{i-1,2n-1} - 2w_{i,2n-1} + w_{i+1,2n-1}) ,$$

$$i = 3,4,\dots,n-1$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{n,2n}} = 2\bar{M} (w_{n-1,2n-1} - 2w_{n,2n-1})$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{n+1,p}} = 2\bar{M} (w_{n,p-1} - w_{n,p+1}), \quad p = 04, 06, \dots, 2n-2$$

$$\frac{\partial I_6}{\partial v_{n+1,2n}} = 2\bar{M} w_{n,2n-1}$$

g) Minimização da I_7

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{i,03}} = -2\bar{N} (2w_{i,03} + 2w_{i,05}), \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{i,j}} = -2\bar{N} (2w_{i,j-2} - 4w_{i,j} + 2w_{i,j+2}), \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$j = 05, 07, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial w_{i,2n-1}} = -2\bar{N} (2w_{i,2n-3} - 4w_{i,2n-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial I_7}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todo } i, p$$

h) Minimização da I_8

$$\frac{\partial I_8}{\partial w_{i,j}} = 2_{i,j} h^2, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \text{e} \quad j = 03, 05, \dots, 2n-1$$

$$\frac{\partial I_8}{\partial v_{i,p}} \equiv 0 \quad \text{para todos } i, p.$$

Com essas expressões monta-se o sistema de equações para o caso de $n=8$, correspondente à minimização do funcional π_p . Como anteriormente, indica-se também somente por Σ o símbolo $\sum_{K=1}^7$.

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,03}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,03}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,04}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,05}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,05}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,06}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,07}} = - \frac{\partial I_8}{\partial v_{i,07}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,08}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,09}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,09}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,10}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,11}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,11}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,12}} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,13}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,13}}$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,14}} = 0$$

(4.26a-1)

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial w_{i,15}} = - \frac{\partial I_8}{\partial w_{i,15}} \quad (4.26m-n)$$

$$\Sigma \frac{\partial I_k}{\partial v_{i,16}} = 0$$

Essas 14 equações repetindo-se 8 vezes, originadas fazendo-se $i = 1, 2, \dots, 8$, têm-se 112 equações. Para $i=9$, têm-se que os deslocamentos w são nulos nesta linha de pontos por imposição de contorno. Porém, nada se diz a respeito dos deslocamentos v . Consequentemente para $i=9$ têm-se mais 7 equações, que são para a determinação dos deslocamentos $v_{9,04}, v_{9,06}, \dots, v_{9,16}$. Finalmente, têm-se 119 equações e 119 incógnitas, que podem ser escritas como a (4.12), isto é:

$$[\bar{D}] \cdot \{\bar{\delta}\}^T = \{\bar{F}\}^T \quad (4.27)$$

onde

$$\{\bar{\delta}\} = \{w_{1,03}, v_{1,04}, \dots, w_{i,j}, v_{i,p}, \dots, v_{9,14}, v_{9,16}\} \quad (4.28a)$$

$$\{\bar{F}\} = \left\{ \frac{-\partial I_8}{\partial w_{1,03}}, 0, \dots, \frac{-\partial I_8}{\partial w_{i,j}}, 0, \dots, 0, 0 \right\} \quad (4.28b)$$

$$[\bar{D}] =$$

D_1	\bar{D}_1	\bar{D}_1						
\bar{D}_1	D_2	$2\bar{D}_1$	\bar{D}_1					
\bar{D}_1	$2\bar{D}_1$	D_3	$2\bar{D}_1$	\bar{D}_1				
	\bar{D}_1	$2\bar{D}_1$	D_3	$2\bar{D}_1$	\bar{D}_1			
		\bar{D}_1	$2\bar{D}_1$	D_3	$2\bar{D}_1$	\bar{D}_1		
			\bar{D}_1	$2\bar{D}_1$	D_3	$2\bar{D}_1$	\bar{D}_1	
				\bar{D}_1	$2\bar{D}_1$	D_3	$2\bar{D}_1$	
					\bar{D}_1	$2\bar{D}_1$	D_3	\bar{D}_3
							\bar{D}_3	\bar{D}_4

e as submatrizes da $[\bar{D}]$, são, agora:

020														
		020												
				020										
						020								
								020						
										020				
											020			
												020		
													020	
														020

$$[\bar{D}_1] =$$

Nestas submatrizes os símbolos representam:

$$Q19 = \bar{M}$$

$$Q20 = 2\bar{G}$$

$$Q21 = \bar{A}/h$$

$$Q22 = \bar{A}/h + 3\bar{B}/4$$

$$Q23 = \bar{A}/h + \bar{B}$$

$$Q24 = \bar{B}$$

$$Q25 = \bar{B}/2$$

$$Q26 = 2\bar{A}/h + 3\bar{B}$$

$$Q27 = -\bar{A}/h$$

$$Q28 = \bar{A}h/R^2 + 34\bar{G} + 8\bar{N}$$

$$Q29 = \bar{A}h/R^2 + 24\bar{G} + 4\bar{N}$$

$$Q30 = \bar{A}h/R^2 + 40\bar{G} + 8\bar{N}$$

$$Q31 = \bar{A}h/R^2 + 20\bar{G} + 4\bar{N}$$

$$Q32 = -12\bar{G} - 4\bar{N}$$

$$Q33 = -14\bar{G} - 4\bar{N}$$

$$Q34 = -16\bar{G} - 4\bar{N}$$

$$Q35 = \bar{A}/R - 3\bar{M}$$

$$Q36 = A/R - 4\bar{M}$$

Os "termos de carga" provêm da [4.25h]

$$I_8 = \sum_A Z_A w_A h^2$$

onde os "elementos A" nunca são "fragmentados", resultando, pois, os seguintes termos independentes, para o caso particular de $n=8$:

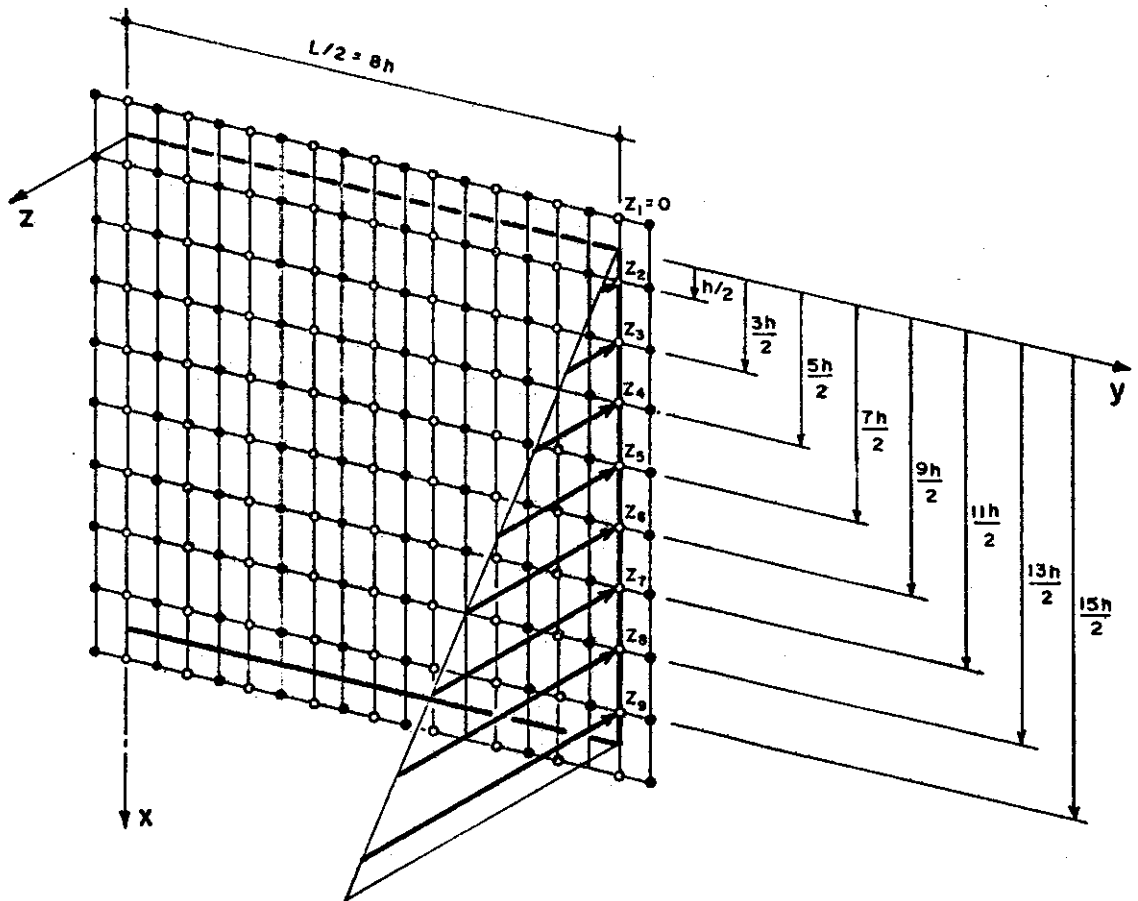
$$\bar{F}_{i,j} = \frac{-\partial I_8}{\partial w_{i,j}} = -h^2 Z_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,p} = \frac{\partial I_8}{\partial v_{i,p}} = 0 \quad \text{para todos } i,p$$

ou mais simplesmente

$$\bar{\bar{F}}_{i,j} = -h^2 Z_i \quad \text{e} \quad \bar{\bar{F}}_{i,p} = 0$$

pois, como já visto, a variação somente de j com o mesmo i , não altera o $Z_{i,j}$.



Os Z_i valem, respectivamente

$$Z_1 = 0$$

$$Z_2 = \gamma_a h/2$$

$$Z_3 = \gamma_a 3h/2$$

$$Z_4 = \gamma_a \ 5h/2$$

$$Z_5 = \gamma_a \ 7h/2$$

$$Z_6 = \gamma_a \ 9h/2$$

$$Z_7 = \gamma_a \ 11h/2$$

$$Z_8 = \gamma_a \ 13h/2$$

$$Z_9 = \gamma_a \ 15h/2$$

que podem ser obtidas da seguinte forma genérica, salvo a Z_1

$$Z_i = \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a \ h \quad i = 2, 3, \dots, 9. \quad (4.29)$$

Com isso, os "termos de carga" são, ordenadamente para $n=8$ e considerando-se que $\partial I_8 / \partial v_{i,p} = 0$:

a) Os 14 primeiros

$$\bar{\bar{F}}_{1,j} = 0 \quad , \quad j = 03, 04, 05, \dots, 16$$

b) Os seguintes, de $i = 2$ até $i = 8$

$$\bar{\bar{F}}_{i,03} = - \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a \ h$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,04} = 0$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,05} = - \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a \ h$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,06} = 0$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,07} = - \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a \ h$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,08} = 0$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,09} = - \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a \ h$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,10} = 0$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,11} = - \frac{(2i-3)}{2} \gamma_a \ h$$

$$\bar{\bar{F}}_{i,12} = 0$$

$$\overline{\overline{F}}_{i,13} = - \frac{(2i-3)}{2} \gamma_{\alpha} h$$

$$\overline{\overline{F}}_{i,14} = 0$$

$$\overline{\overline{F}}_{i,15} = - \frac{(2i-3)}{2} \gamma_{\alpha} h$$

$$\overline{\overline{F}}_{i,16} = 0$$

c) E os 7 últimos

$$F_{9,j} = 0, \quad j = 04, 06, \dots, 16$$

4.4.4 - Expressões das Rotações e Esforços, e Cálculo com PI-4, sem a Imposição de Rotação nula no Engastamento

Analogamente ao item 4.3.4, nestes primeiros ensaios numéricos apresentam-se a formulação e o cálculo das rotações w' e w'' , e dos esforços M_x , M_y , N_y , de longe os mais importantes.

Como se viu no item 4.3.4 as expressões desses esforços mediante as hipóteses admitidas em 4.2, podem ser escritas matricialmente como as (4.18a-c), isto é:

$$[N_y] = D[v] + \frac{D}{R}[w] + \frac{K}{R}[w^{**}]$$

$$[M_x] = K[w'']$$

$$[M_y] = K[w^{**}] + \frac{K}{R^2}[w].$$

A formulação desses esforços e rotações w' e w'' é feita mediante a melhor aproximação obtida dos ensaios de aferição (capítulo 3), que foi a de aproximar as derivadas das expressões daquelas (do reservatório) grandezas com diferenças finitas provenientes do emprego de polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do quarto grau, sem a imposição de rotação nula no engastamento — aproximação B.

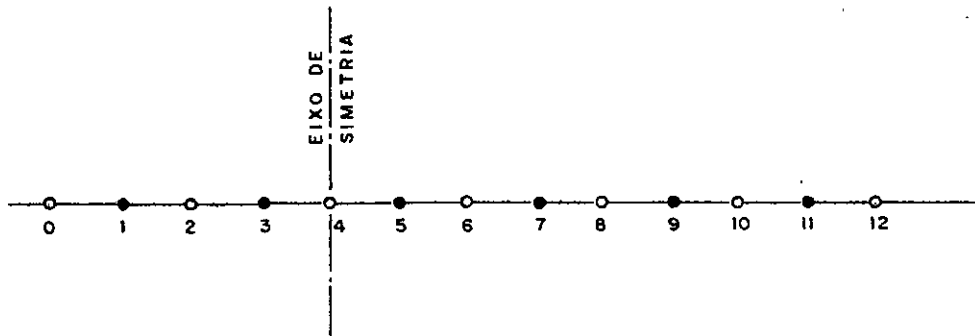
Passa-se a seguir à formulação dessas grandezas.

Como no capítulo 3 (item 3.4) utilizou-se somente uma linha de pontos fictícios locada $h/2$ acima da borda livre, preferindo-se lançar mão de expressões assimétricas de diferenças finitas. Para a tradução das condições de contorno, naturalmente empregam-se pontos fictícios e, além disso, é utilizada a condição de simetria dos w (como no item 4.3.4.1) no eixo de simetria, para v^* e w^* , que leva às seguintes expressões em diferenças finitas, agora, com *PI-4*:

Condições de simetria

$$w_1 = w_7; w_3 = w_5 \quad e$$

$$v_0 = -v_8; v_1 = -v_6; v_4 = 0$$



- pontos da rede dos w
- o pontos da rede dos v

$$f_4^* = \frac{1}{36h^2} \left\{ \boxed{0} - \boxed{+48} - \boxed{-6} \right\}$$

$$f_6^* = \frac{1}{36h^2} \left\{ \boxed{0} - \boxed{-3} - \boxed{+24} - \boxed{-3} \right\} \quad (4.30a-c)$$

$$f_8^* = \frac{1}{36h^2} \left\{ \boxed{0} - \boxed{-24} - \boxed{0} - \boxed{+24} - \boxed{-3} \right\}$$

$$f_5^{\dots} = \frac{1}{36h^2} \left\{ \boxed{-42} \text{---} \boxed{+45} \text{---} \boxed{-3} \right\} \quad (4.31a-b)$$

$$f_7^{\dots} = \frac{1}{36h^2} \left\{ \boxed{+45} \text{---} \boxed{-90} \text{---} \boxed{+48} \text{---} \boxed{-3} \right\}$$

Expressões estas facilmente obtidas por meio das tabeladas no item 2.3.3.2a, impondo-se essas condições de simetria.

Naturalmente, as expressões das derivadas envolvidas nas expressões dos esforços (4.18a-c) e as expressões das rotações w' e w'' , deduzidas para uma linha ou coluna de nós da rede (conforme se deriva em relação a y ou a x , respectivamente), são as mesmas (4.20a-e), a menos do fator multiplicativo que aqui foi admitido como sendo $1/36$ para todas expressões

$$\{v^{\bullet}\} = \frac{1}{36h} \{v\} [\bar{P}^{\bullet}]$$

$$\{w''\}^T = \frac{1}{36h^2} [\bar{P}''] \{w\}^T$$

$$\{w^{\bullet\bullet}\} = \frac{1}{36h^2} \{w\} [\bar{P}^{\bullet\bullet}]$$

$$\{w'\}^T = \frac{1}{36h} [\bar{P}'] \{w\}^T$$

$$\{w^{\bullet}\} = \frac{1}{36h} \{w\} [\bar{P}^{\bullet}]$$

onde as matrizes derivadas $[\bar{P}]$, são as provenientes do emprego de $PI-\epsilon$, no caso, sem a imposição de rotação nula no engastamento.

Para $n=8$, as matrizes completas dos deslocamentos obtidos ao final da resolução do sistema de equações minimizantes, são de 8 linhas por 7 colunas para os w e, de 9 linhas por 7 colunas para os v , como se indicam a seguir:

[w] =

$w_{1,03}$	$w_{1,05}$	$w_{1,07}$	$w_{1,09}$	$w_{1,11}$	$w_{1,13}$	$w_{1,15}$
$w_{2,03}$						$w_{2,15}$
$w_{3,03}$						$w_{3,15}$
$w_{4,03}$			$w_{i,j}$			$w_{4,15}$
$w_{5,03}$						$w_{5,15}$
$w_{6,03}$						$w_{6,15}$
$w_{7,03}$						$w_{7,15}$
$w_{8,03}$						$w_{8,15}$

[v] =

$v_{1,04}$	$v_{1,06}$	$v_{1,08}$	$v_{1,10}$	$v_{1,12}$	$v_{1,14}$	$v_{1,16}$
$v_{2,04}$						$v_{2,16}$
$v_{3,04}$						$v_{3,16}$
$v_{4,04}$						$v_{4,16}$
$v_{5,04}$			$v_{i,p}$			$v_{5,16}$
$v_{6,04}$						$v_{6,16}$
$v_{7,04}$						$v_{7,16}$
$v_{8,04}$						$v_{8,16}$
$v_{9,04}$	$v_{9,06}$	$v_{9,08}$	$v_{9,10}$	$v_{9,12}$	$v_{9,14}$	$v_{9,16}$

[v]=

0	$v_{1,04}$	$v_{1,06}$	$v_{1,08}$	$v_{1,10}$	$v_{1,12}$	$v_{1,14}$	$v_{1,16}$	0
0								0
0								0
0								0
0				$v_{i,p}$				0
0								0
0								0
0								0
0	$v_{9,04}$	$v_{9,06}$	$v_{9,08}$	$v_{9,10}$	$v_{9,12}$	$v_{9,14}$	$v_{9,16}$	0

As matrizes $[\bar{P}^{\cdot}]$, $[\bar{P}^{\cdot\cdot}]$, $[\bar{P}^{\cdot\cdot\cdot}]$ e $[\bar{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}]$ escrevem-se de acordo com as expressões tabeladas em 2.3.3.2a, e as condições de contorno (4.30a-c) e (4.31a-b), que são aquelas que traduzem a condição de simetria dos w e antimetria dos v para as derivadas em relação a y :

$$[\bar{P}'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +48 & -3 & -24 & +3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & +24 & 0 & -24 & +3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & +24 & 0 & -24 & +3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & +24 & 0 & -24 & +3 & -3 & +9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & +24 & 0 & -24 & +18 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +24 & 0 & -54 & +108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +24 & +30 & -144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +9 & +75 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{P}''] = \begin{bmatrix} +105 & -312 & +342 & -168 & +33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +33 & -60 & +18 & +12 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & +48 & -90 & +48 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & +48 & -90 & +48 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & +48 & -90 & +48 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & +48 & -90 & +48 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +48 & -90 & +48 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +12 & +18 & -60 & +33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +33 & -168 & +342 & -312 & +105 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{P}^{**}] = \begin{bmatrix} -42 & +45 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +45 & -90 & +48 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & +48 & -90 & +48 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & +48 & -90 & +48 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & +48 & -90 & +48 & -3 & -3 & +33 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & +48 & -90 & +48 & +12 & -168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +48 & -90 & +18 & +342 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +48 & -60 & -312 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +33 & +105 \end{bmatrix}$$

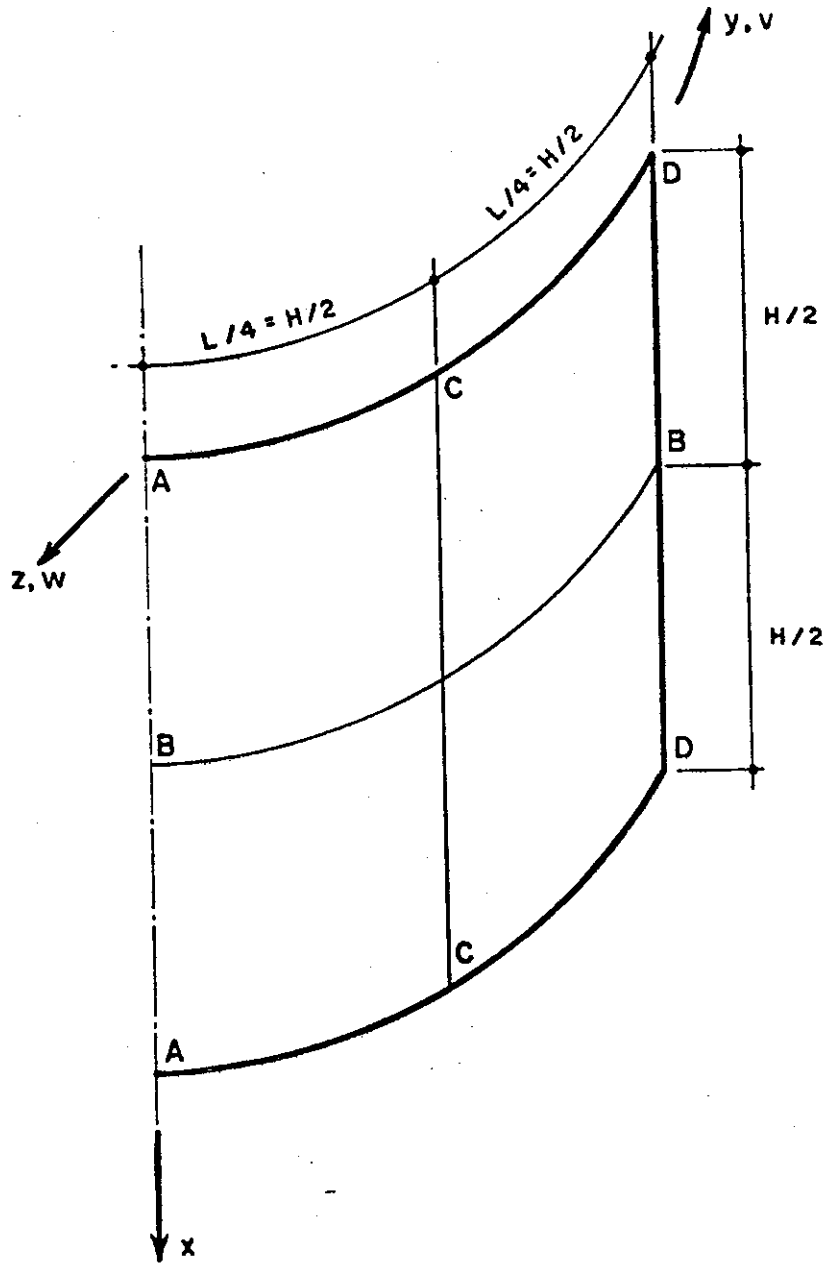
$$[\bar{P}'] = \begin{bmatrix} -75 & +144 & -108 & +48 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -30 & +54 & -18 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +3 & -24 & 0 & +24 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +3 & -24 & 0 & +24 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +3 & -24 & 0 & +24 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +3 & -24 & 0 & +24 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +3 & -24 & 0 & +24 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & +18 & -54 & +30 & +9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +9 & -48 & +108 & -144 & +75 \end{bmatrix}$$

Note-se, aqui também, que as matrizes derivadas $[\bar{P}']$ e $[\bar{P}'']$ são as mesmas $[P_x]_\beta$ e $[P_{xx}]_\beta$ respectivamente, expandidas para o caso de $n=8$, pelos mesmos motivos citados no item 4.3.4.

A seguir, apresentam-se os valores das grandezas w , v , w' , w'' , N_y , M_x e M_y obtidos por meio das aproximações com rede habitual. As experimentações foram feitas com redes de 6×6 , 8×8 , 12×12 e 16×16 malhas quadradas.

Com o objetivo de permitir uma melhor visualização do comportamento das aproximações do cálculo das grandezas w , v , N_y , M_x e M_y (as mais importantes), à medida que se refina a malha, foram feitos 6 gráficos. Um para os deslocamentos w , outro para os deslocamentos v . Um terceiro para os N_y e outro para os M_x . E os dois últimos para os M_y . Representaram-se nesses gráficos somente os valores das grandezas em uma diretriz e em uma geratriz. O suficiente para se atingir o objetivo acima citado.

A nomenclatura adotada para representação gráfica dos valores das grandezas w , v , N_y , M_x e M_y , está indicada na página seguinte. Quanto as escalas, estas estão indicadas nos próprios gráficos.



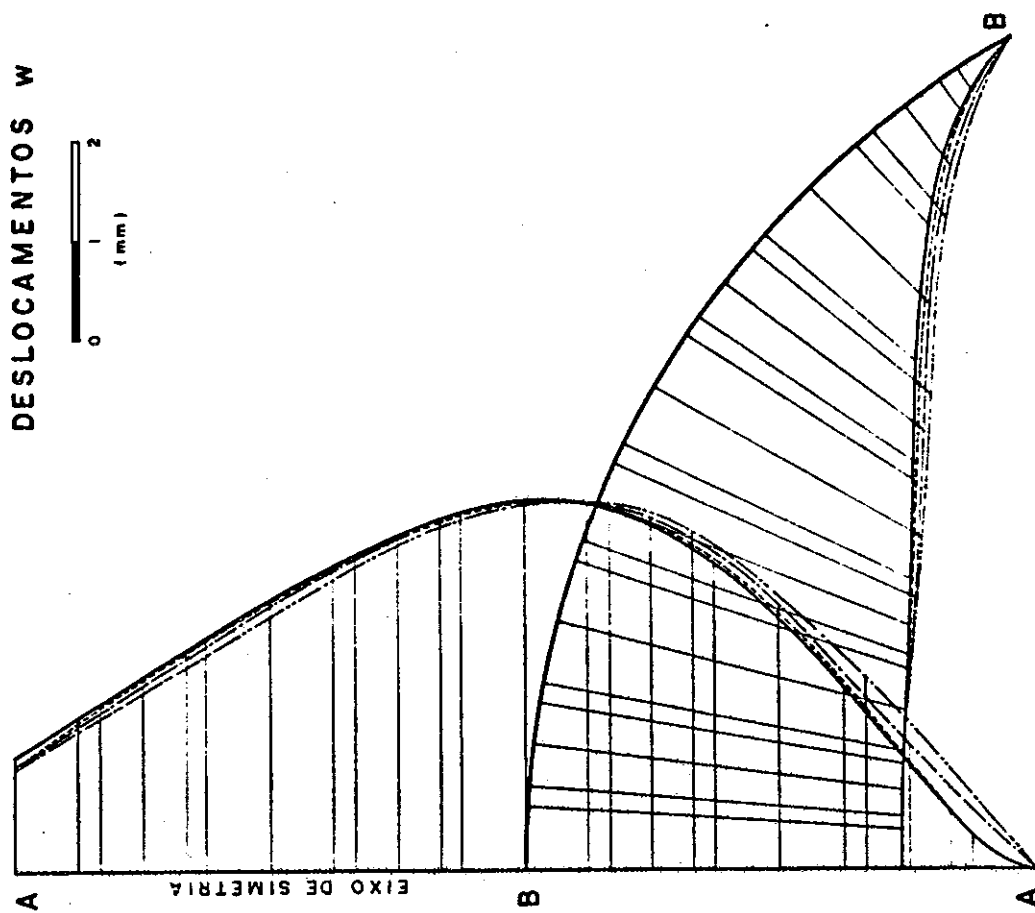
..... Aproximação com rede 6 x 6 malhas

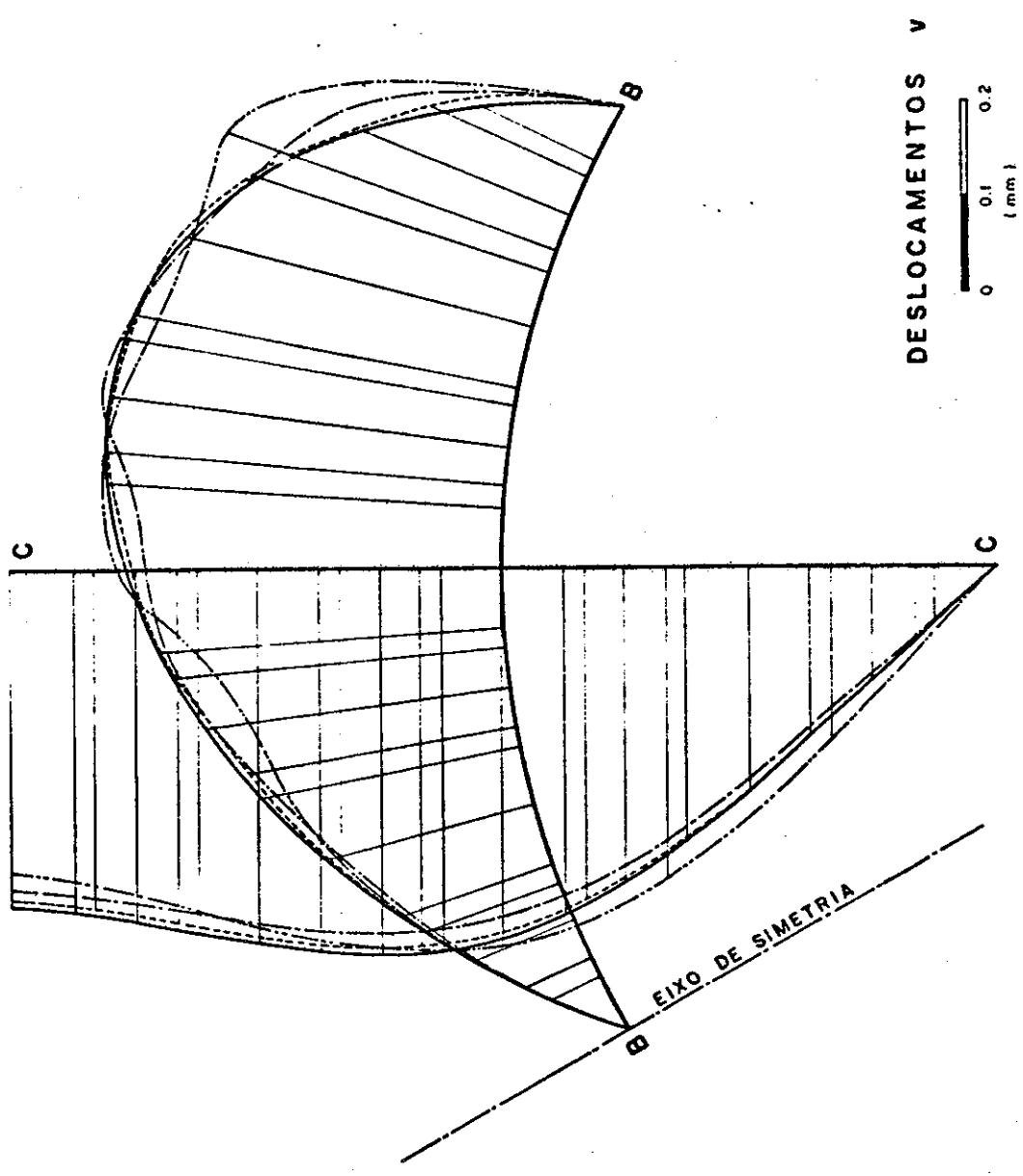
- . - . - . Aproximação com rede 8 x 8 malhas

----- Aproximação com rede 12 x 12 malhas

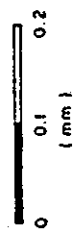
————— Aproximação com rede 16 x 16 malhas

ESCALA DA ESTRUTURA = 1:200

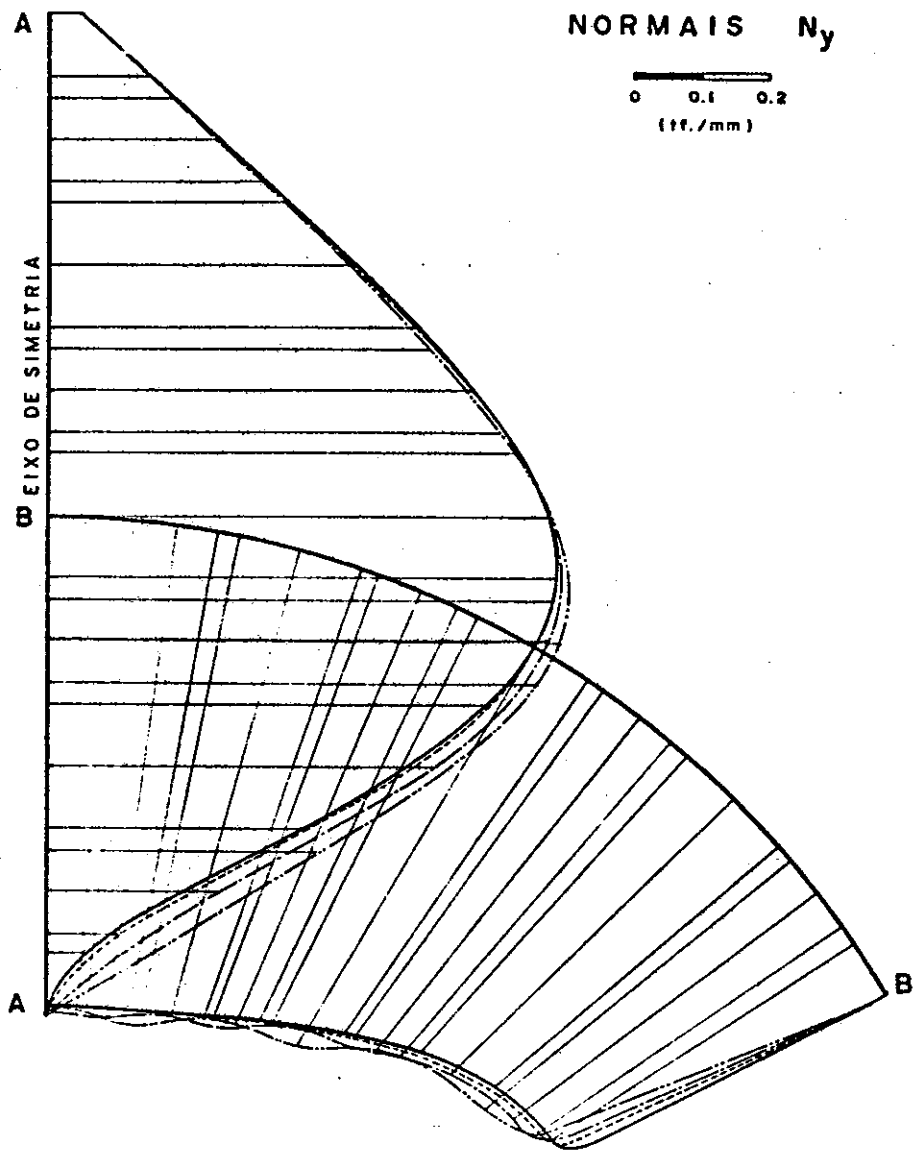


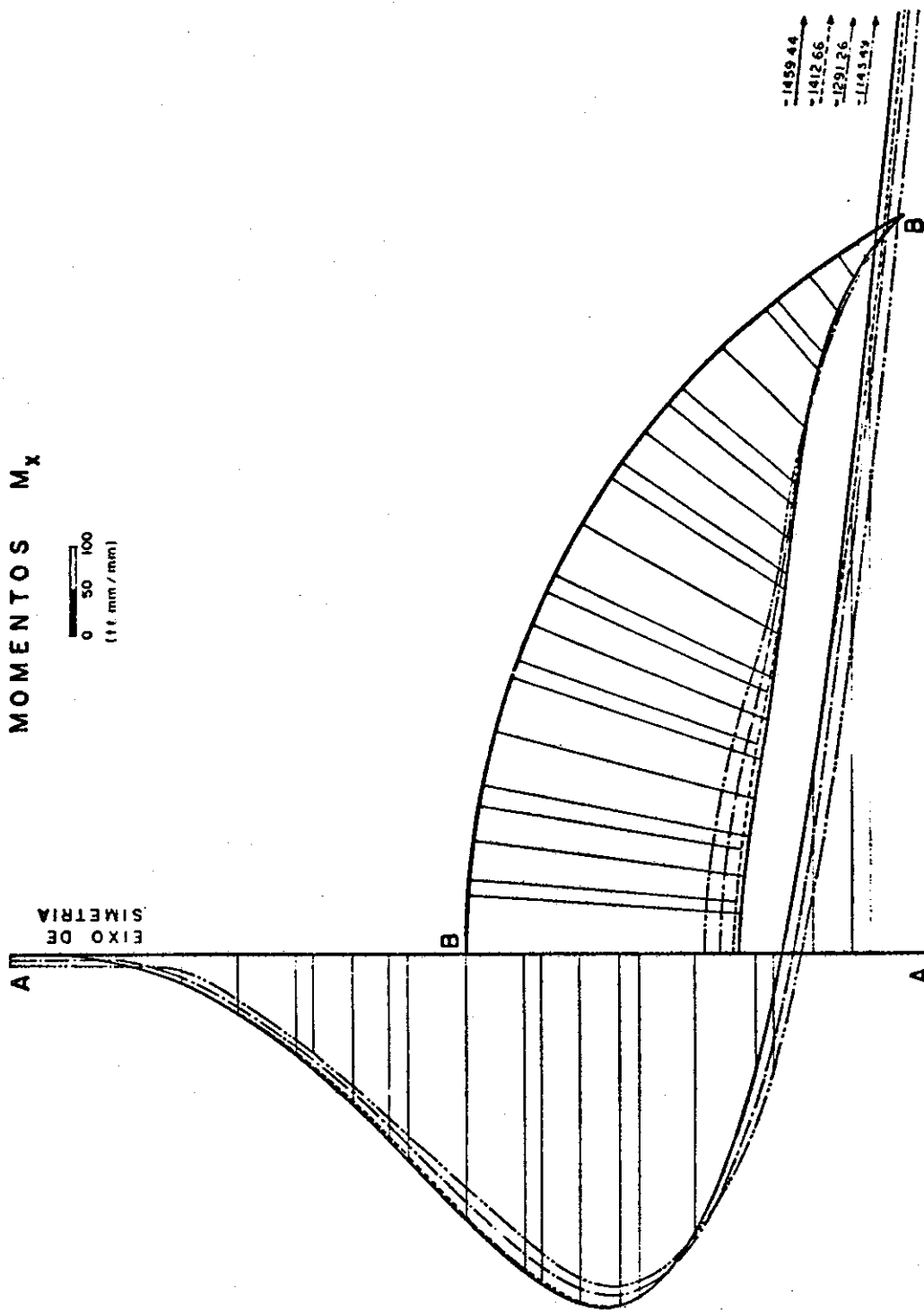


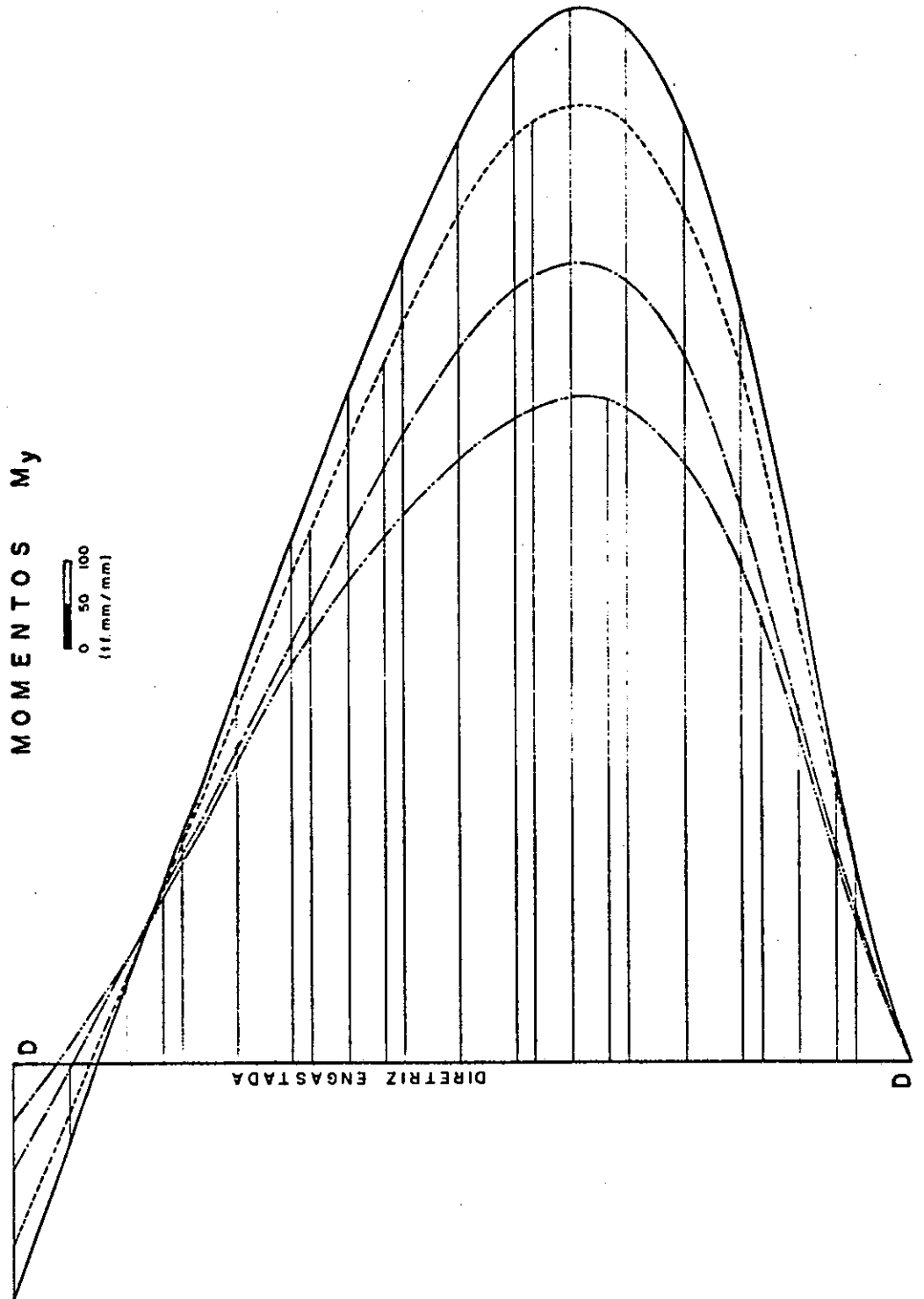
DESLOCAMENTOS V



EIXO DE SIMETRIA

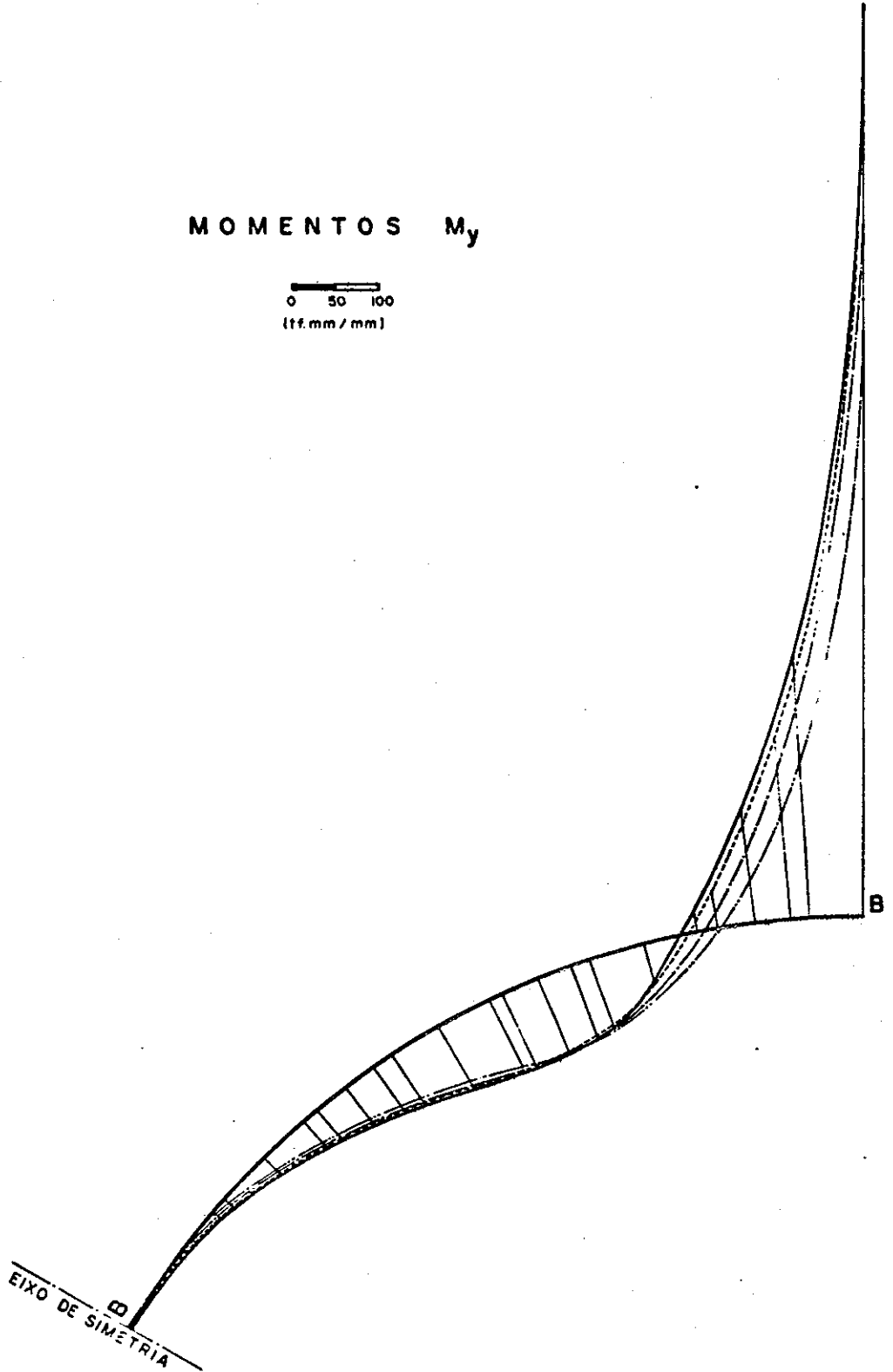






MOMENTOS M_y

0 50 100
(tf.mm/mm)



ROTACAO W

LINHA: 1	-.1594140E-03 -.1467354E-03 -.5463305E-04	-.1591571E-03 -.1373256E-03 -.2572211E-04	-.1582645E-03 -.1236649E-03 .0000000E+00	-.1563402E-03 -.1051772E-03 -.1568274E-03	-.1527715E-03 -.8185268E-04 -.1540249E-03
LINHA: 2	-.1588258E-03 -.1488402E-03 -.5575543E-04	-.1586917E-03 -.1402500E-03 -.2516352E-04	-.1581645E-03 -.1271401E-03 .0000000E+00	-.1086729E-03 -.1271401E-03 -.1551787E-03	-.8457610E-04 -.1540249E-03 -.153583E-03
LINHA: 3	-.1555938E-03 -.1497315E-03 -.5722170E-04	-.1555884E-03 -.1424553E-03 -.2501399E-04	-.1556177E-03 -.1303554E-03 .0000000E+00	-.1122430E-03 -.1463715E-03 -.1455595E-03	-.8755499E-04 -.1444486E-03 -.128501E-03
LINHA: 4	-.1444435E-03 -.1444992E-03 -.5812734E-04	-.1447707E-03 -.1395632E-03 -.2521162E-04	-.1455595E-03 -.1294830E-03 .0000000E+00	-.1128501E-03 -.1274907E-03 -.1455595E-03	-.8877016E-04 -.1274903E-03 -.8437729E-04
LINHA: 5	-.1204880E-03 -.1274977E-03 -.5615941E-04	-.1212379E-03 -.1253079E-03 -.2471766E-04	-.1227697E-03 -.1185604E-03 .0000000E+00	-.1274907E-03 -.1053432E-03 -.1455595E-03	-.1274903E-03 -.8437729E-04 -.8575787E-04
LINHA: 6	-.7950049E-04 -.9309000E-04 -.4909765E-04	-.8025882E-04 -.4482610E-04 -.2240061E-04	-.8244958E-04 -.9303796E-04 .0000000E+00	-.8575787E-04 -.8572981E-04 -.2475573E-04	-.8941826E-04 -.7118291E-04 -.3151421E-04
LINHA: 7	-.1774612E-04 -.3807781E-04 -.2463935E-04	-.1866021E-04 -.4447630E-04 -.1710460E-04	-.2137595E-04 -.4925739E-04 .0000000E+00	-.2475573E-04 -.5049794E-04 -.5485408E-04	-.3151421E-04 -.4609668E-04 -.4745281E-04
LINHA: 8	.6407686E-04 .3782283E-04 -.1086054E-04	.6307679E-04 .2647855E-04 -.7750023E-05	.6003294E-04 .1407671E-04 .0000000E+00	.5485408E-04 .2175919E-05 -.1484144E-03	.4745281E-04 -.6995717E-05 .1404826E-03
LINHA: 9	.1585154E-03 .1285479E-03 .2259310E-04	.1575227E-03 .1127878E-03 .6288450E-05	.1544325E-03 .9300560E-04 .0000000E+00	.1484144E-03 .6990298E-04 -.2479622E-03	.1404826E-03 .4531592E-04 .2293941E-03
LINHA: 10	.2445942E-03 .2167033E-03 .4207156E-04	.2457267E-03 .1985175E-03 .2408401E-04	.2429622E-03 .1737316E-03 .0000000E+00	.2377866E-03 .1418216E-03 -.2479622E-03	.2293941E-03 .1035473E-03 .2788535E-03
LINHA: 11	.2923704E-03 .2677675E-03 .9544128E-04	.2917509E-03 .2508459E-03 .4094061E-04	.2897276E-03 .2262256E-03 .0000000E+00	.2857317E-03 .1922339E-03 -.2344338E-03	.2788535E-03 .1480843E-03 .2305993E-03
LINHA: 12	.2377644E-03 .2239725E-03 .9419976E-04	.2374780E-03 .2132116E-03 .4363129E-04	.2345057E-03 .1965826E-03 .0000000E+00	.2344338E-03 .1721688E-03 -.2344338E-03	.2305993E-03 .1381925E-03 .0000000E+00
LINHA: 13	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00

ROTACAO W PONTO

LINHA: 1	-.3251205E-03 .5378619E-04 .3025416E-05	.1232038E-04 .5723121E-04 -.1756934E-04	.2444253E-04 .5465475E-04 .0000000E+00	.3597276E-04 .4451504E-04 -.3838094E-04	.4615651E-04 .2648294E-04 .5055251E-04
LINHA: 2	-.4840448E-03 .6109138E-04 .3191120E-04	.1277309E-04 .6842584E-04 .1002775E-04	.2541283E-04 .7058612E-04 .0000000E+00	.3838094E-04 .6560911E-04 -.2541283E-04	.5055251E-04 .5234835E-04 .5413571E-04
LINHA: 3	-.6425038E-03 .6754395E-04 .6243794E-04	.1298171E-04 .7893931E-04 .3818607E-04	.2630684E-04 .8623186E-04 .0000000E+00	.4011241E-04 .8707902E-04 -.2630684E-04	.5413571E-04 .7440039E-04 .5599979E-04
LINHA: 4	-.7952217E-03 .7219438E-04 .9445219E-04	.1269043E-04 .8780186E-04 .6724945E-04	.2682249E-04 .1037981E-03 .0000000E+00	.4044036E-04 .1084094E-03 -.2682249E-04	.5599979E-04 .1073700E-03 .3922324E-04
LINHA: 5	-.9220453E-03 .7444643E-04 .1256965E-03	.1188571E-04 .9411558E-04 .9631341E-04	.2470607E-04 .1129450E-03 .0000000E+00	.3922324E-04 .1277918E-03 .2239970E-04	.5584798E-04 .1341232E-03 .5342282E-04
LINHA: 6	-.1027698E-02 .7367681E-04 .1541118E-03	.1060870E-04 .9667914E-04 .1234089E-03	.2239970E-04 .1207627E-03 .0000000E+00	.3641972E-04 .1425927E-03 -.1027698E-02	.5342282E-04 .1565538E-03 .4892703E-05
LINHA: 7	-.1092563E-02 .6923859E-04 .1747788E-03	.8976622E-05 .9416760E-04 .1454111E-03	.1929701E-04 .1220413E-03 .0000000E+00	.3205461E-04 .1496468E-03 -.1092563E-02	.4851585E-04 .1707553E-03 .6978866E-05
LINHA: 8	-.1075018E-02 .6071472E-04 .1820989E-03	.6978866E-05 .8549565E-04 .1580482E-03	.1530419E-04 .1167411E-03 .0000000E+00	.2628146E-04 .1457533E-03 -.1075018E-02	.4110474E-04 .1724124E-03 .4892703E-05
LINHA: 9	-.5664663E-03 .4926434E-04 .1740245E-03	.4892703E-05 .7036154E-04 .1562716E-03	.1098431E-04 .9778864E-04 .0000000E+00	.1547448E-04 .1285744E-03 -.5664663E-03	.3154459E-04 .1577188E-03 .2896064E-05
LINHA: 10	-.7589724E-03 .3311987E-04 .1442714E-03	.2896064E-05 .4991330E-04 .1354551E-03	.6695918E-05 .7185631E-04 .0000000E+00	.1233153E-04 .9806364E-04 -.7589724E-03	.2077827E-04 .1251025E-03 .2738985E-04
LINHA: 11	-.4765512E-03 .1732764E-04 .9454121E-04	.1260749E-05 .2738985E-04 .9419976E-04	.3044261E-05 .4124283E-04 .0000000E+00	.5906390E-05 .5839011E-04 -.4765512E-03	.1046131E-04 .7796905E-04 .8371347E-05
LINHA: 12	-.1744708E-03 .5012247E-05 .7602777E-04	.2532615E-06 .8371347E-05 .4001383E-04	.6767950E-06 .1324427E-04 .0000000E+00	.1457389E-05 .1992234E-04 -.1744708E-03	.2814020E-05 .2830996E-04 .0000000E+00
LINHA: 13	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00

DESLOCAMENTOS V EM MILIMETROS

LINHA: 1	.000	.067	.124	.181	.233	.277	.313	.336	.349	.345	.329	.296	.257
LINHA: 2	.105	.173	.064	.000	.235	.279	.316	.341	.353	.352	.336	.305	.261
LINHA: 3	.204	.069	.069	.000	.237	.284	.321	.349	.363	.364	.350	.321	.277
LINHA: 4	.000	.064	.125	.184	.240	.289	.328	.358	.376	.380	.368	.342	.298
LINHA: 5	.241	.169	.088	.000	.242	.292	.334	.367	.387	.396	.387	.364	.320
LINHA: 6	.267	.186	.127	.000	.242	.294	.337	.373	.394	.409	.403	.387	.341
LINHA: 7	.000	.064	.126	.186	.238	.291	.335	.374	.400	.416	.414	.398	.357
LINHA: 8	.300	.217	.119	.000	.231	.283	.328	.368	.396	.416	.416	.404	.366
LINHA: 9	.311	.226	.126	.000	.219	.270	.313	.354	.383	.406	.409	.401	.364
LINHA: 10	.000	.230	.130	.000	.202	.250	.291	.332	.360	.384	.389	.385	.354
LINHA: 11	.307	.226	.129	.000	.180	.224	.262	.300	.326	.351	.357	.357	.329
LINHA: 12	.000	.046	.091	.137	.155	.193	.226	.259	.283	.306	.313	.315	.292
LINHA: 13	.259	.192	.078	.000	.126	.157	.184	.212	.232	.252	.258	.261	.243
LINHA: 14	.000	.032	.063	.096	.095	.119	.139	.160	.175	.190	.195	.198	.184
LINHA: 15	.217	.162	.046	.000	.063	.079	.092	.106	.116	.126	.129	.130	.121
LINHA: 16	.000	.024	.048	.072	.031	.039	.045	.052	.057	.062	.063	.063	.059
LINHA: 17	.000	.039	.023	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 18	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

ESFORÇO NY EM TONELADAS

LINHA: 1	-.045	-.047	-.053	-.059	-.068	-.079	-.094	-.113	-.135	-.160	-.187
LINHA: 2	-.211	-.250	-.151	-.157	-.162	-.169	-.179	-.191	-.206	-.222	-.239
LINHA: 3	-.254	-.276	-.251	-.252	-.254	-.257	-.261	-.267	-.274	-.283	-.292
LINHA: 4	-.301	-.313	-.301	-.302	-.309	-.349	-.346	-.342	-.343	-.345	-.348
LINHA: 5	-.352	-.351	-.347	-.346	-.344	-.343	-.342	-.342	-.343	-.345	-.348
LINHA: 6	-.403	-.402	-.441	-.437	-.432	-.426	-.421	-.416	-.411	-.407	-.404
LINHA: 7	-.452	-.540	-.530	-.524	-.515	-.506	-.496	-.486	-.475	-.467	-.458
LINHA: 8	-.496	-.625	-.609	-.601	-.589	-.578	-.563	-.549	-.534	-.520	-.506
LINHA: 9	-.531	-.687	-.673	-.661	-.650	-.636	-.618	-.601	-.581	-.563	-.544
LINHA: 10	-.572	-.729	-.714	-.704	-.689	-.674	-.654	-.634	-.611	-.590	-.568
LINHA: 11	-.642	-.739	-.725	-.715	-.700	-.685	-.664	-.644	-.619	-.597	-.572
LINHA: 12	-.686	-.831	-.699	-.690	-.676	-.662	-.643	-.624	-.599	-.577	-.552
LINHA: 13	-.725	-.839	-.629	-.623	-.611	-.600	-.583	-.567	-.546	-.527	-.504
LINHA: 14	-.771	-.909	-.629	-.612	-.604	-.597	-.585	-.574	-.558	-.544	-.526
LINHA: 15	-.814	-.970	-.667	-.666	-.661	-.658	-.652	-.647	-.638	-.631	-.621
LINHA: 16	-.862	-.100	-.702	-.702	-.701	-.701	-.700	-.701	-.700	-.700	-.700
LINHA: 17	-.904	-.000	-.758	-.758	-.758	-.758	-.758	-.758	-.758	-.758	-.758
	-.000	-.000	-.800	-.800	-.800	-.800	-.800	-.800	-.800	-.800	-.800

ESFORÇO MX EM TONELADAS MILIM./MILIM.

LINHA: 1	.600	.450	-275	-1.373	-2.009	-4.773	-6.859	-8.973	-10.878	-12.246	-12.681	-11.749	-9.062
	-4.487	1.289	5.200	.000									
LINHA: 2	.690	.650	-275	-1.373	-2.909	-4.773	-6.859	-8.973	-10.878	-12.246	-12.681	-11.749	-9.062
	-4.487	1.289	5.200	.000									
LINHA: 3	11.412	10.884	9.300	6.717	3.229	-1.013	-5.749	-10.617	-15.065	-18.449	-20.011	-19.042	-15.119
	-8.615	-1.401	2.639	.000									
LINHA: 4	32.940	32.335	30.542	27.602	23.551	18.549	12.807	6.705	.715	-4.533	-8.322	-10.008	-9.243
	-6.333	-2.574	-0.665	.000									
LINHA: 5	66.254	65.646	63.860	60.814	56.580	51.161	44.674	37.329	29.459	21.546	14.183	7.991	1.480
	.837	-.220	-.318	.000									
LINHA: 6	111.322	110.784	109.032	106.117	101.845	96.153	88.966	80.259	70.129	58.837	46.806	34.684	21.251
	13.357	5.852	1.379	.000									
LINHA: 7	167.020	165.506	164.984	162.231	158.081	152.234	144.400	134.288	121.678	106.544	89.135	70.044	50.339
	31.542	15.745	4.815	.000									
LINHA: 8	230.484	228.063	228.724	226.302	222.638	216.634	208.359	197.010	182.060	163.124	140.139	113.612	84.753
	55.712	29.590	9.998	.000									
LINHA: 9	296.215	294.909	294.916	292.898	289.674	284.040	275.151	263.737	247.102	225.057	197.147	163.519	125.374
	85.269	47.312	16.975	.000									
LINHA: 10	354.873	354.708	354.077	352.757	350.134	345.491	337.918	326.260	309.238	285.604	254.414	215.342	169.106
	118.518	68.197	25.609	.000									
LINHA: 11	391.965	391.973	391.892	391.392	389.994	386.895	381.068	371.198	355.790	333.180	301.855	260.754	209.919
	151.388	90.171	35.301	.000									
LINHA: 12	386.707	386.912	387.490	388.149	388.835	387.645	384.800	378.663	367.587	349.718	322.970	285.490	236.243
	175.950	109.843	44.524	.000									
LINHA: 13	311.156	311.613	312.907	314.888	317.262	319.530	321.037	320.714	317.202	308.665	292.858	267.229	229.409
	178.275	115.747	50.037	.000									
LINHA: 14	130.225	130.880	132.889	136.220	140.878	146.735	153.588	161.008	168.255	174.071	176.581	173.169	160.552
	135.356	95.813	45.404	.000									
LINHA: 15	-197.156	-194.323	-193.801	-189.359	-182.688	-173.343	-160.822	-144.635	-124.412	-100.090	-72.150	-42.104	-12.847
	10.862	22.871	18.078	.000									
LINHA: 16	-714.103	-713.209	-710.725	-705.561	-698.260	-686.574	-669.537	-645.425	-612.269	-567.892	-510.221	-437.692	-350.251
	-250.793	-147.534	-56.301	.000									
LINHA: 17	-1459.442	-1458.921	-1457.175	-1453.517	-1446.865	-1435.524	-1417.228	-1388.953	-1346.866	-1286.140	-1200.983	-1084.653	-930.119
	-731.696	-489.899	-223.584	.000									

ESFORÇO NY EM TONELADAS MILIM./MILIM.

LINHA: 1	41.622	41.557	41.090	39.967	37.450	32.860	25.260	17.950	-1.659	-21.510	-44.007	-49.264	-90.704
LINHA: 2	-102.007	-40.900	-13.787	200.895	38.824	36.159	30.771	21.286	0.405	-9.662	-31.984	-56.849	-80.718
LINHA: 3	34.380	39.524	39.776	39.769	39.858	39.215	36.218	29.783	18.959	3.067	-17.849	-42.729	-68.790
LINHA: 4	-97.069	-94.004	-55.964	85.428	40.152	41.773	41.507	38.156	30.513	17.538	-1.267	-25.737	-54.763
LINHA: 5	-90.870	-100.639	-87.230	-86.640	39.596	43.671	46.490	46.669	42.813	33.450	17.382	-6.337	-37.822
LINHA: 6	-83.999	-109.574	-125.162	-251.930	38.097	44.722	50.806	54.818	55.194	50.004	37.263	14.777	-19.398
LINHA: 7	-67.022	-129.008	-205.502	-589.406	35.614	44.690	53.982	61.888	66.714	66.071	57.254	36.728	.664
LINHA: 8	16.140	17.442	21.376	27.527	32.111	43.322	55.699	67.034	76.232	80.319	75.945	58.365	21.902
LINHA: 9	-55.293	-135.189	-242.365	-754.703	27.621	40.412	54.834	69.425	82.543	91.218	91.694	78.157	43.321
LINHA: 10	-40.529	-136.386	-273.092	-910.371	22.361	35.864	51.624	68.325	84.503	97.214	102.568	94.133	63.317
LINHA: 11	3.025	4.586	9.371	17.031	16.581	29.866	45.777	63.259	81.178	96.877	106.659	103.959	70.506
LINHA: 12	-22.608	-130.925	-294.143	-1046.042	10.769	22.797	37.517	54.244	72.175	89.254	102.247	105.166	88.897
LINHA: 13	-2.804	-1.228	3.555	11.425	5.586	15.336	27.613	41.915	57.953	74.249	88.498	95.829	88.256
LINHA: 14	-2.175	-117.642	-301.839	-1147.763	1.614	8.464	17.251	27.770	40.065	53.296	66.182	75.444	75.284
LINHA: 15	19.124	-96.374	-292.406	-1198.267	-515	3.216	8.115	14.142	21.467	29.784	38.699	46.596	50.419
LINHA: 16	-7.443	-5.987	-1.434	6.007	-0.754	.403	1.954	3.931	6.435	9.661	13.014	16.779	19.952
LINHA: 17	-10.388	-9.145	-5.164	1.369	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 18	38.386	-68.293	-263.253	-1178.167	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 19	-11.266	-10.293	-7.152	-1.980	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 20	51.589	-36.999	-714.115	-1069.020	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 21	-9.898	-9.258	-7.114	-3.606	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 22	56.162	-8.391	-149.089	-859.798	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 23	-6.662	-6.309	-5.185	-3.320	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 24	42.967	9.762	-78.863	-559.769	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 25	-2.604	-2.513	-2.164	-1.616	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 26	20.120	11.210	-21.845	-223.584	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 27	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
LINHA: 28	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

1
3
2
0
1

ROTACAO W*

LINHA: 1	-.1594927E-03	-.1593379E-03	-.1588400E-03	-.1578653E-03	-.1562134E-03
	-.1576027E-03	-.1496930E-03	-.1441045E-03	-.1364471E-03	-.1263643E-03
	-.1136010E-03	-.9806985E-04	-.7995059E-04	-.5977435E-04	-.3851188E-04
	-.1744048E-04	.0000000E+00			
LINHA: 2	-.1593674E-03	-.1592538E-03	-.1588840E-03	-.1581228E-03	-.1567589E-03
	-.1544977E-03	-.1509790E-03	-.1457869E-03	-.1384867E-03	-.1286603E-03
	-.1159784E-03	-.1002728E-03	-.8164976E-04	-.6061560E-04	-.3827024E-04
	-.1666570E-04	.0000000E+00			
LINHA: 3	-.1582288E-03	-.1581913E-03	-.1580342E-03	-.1576218E-03	-.1567290E-03
	-.1550402E-03	-.1521610E-03	-.1476234E-03	-.1409189E-03	-.1315379E-03
	-.1190475E-03	-.1031595E-03	-.8391676E-04	-.6184385E-04	-.3828075E-04
	-.1593984E-04	.0000000E+00			
LINHA: 4	-.1540707E-03	-.1541394E-03	-.1542991E-03	-.1544044E-03	-.1542183E-03
	-.1533962E-03	-.1514992E-03	-.1479902E-03	-.1422642E-03	-.1336926E-03
	-.1216998E-03	-.1058829E-03	-.8620073E-04	-.6324523E-04	-.3865341E-04
	-.1568954E-04	.0000000E+00			
LINHA: 5	-.1467714E-03	-.1469536E-03	-.1454488E-03	-.1461154E-03	-.1467041E-03
	-.1468610E-03	-.1461103E-03	-.1438620E-03	-.1394354E-03	-.1320976E-03
	-.1211504E-03	-.1060720E-03	-.8674101E-04	-.6376056E-04	-.3891536E-04
	-.1572542E-04	.0000000E+00			
LINHA: 6	-.1281237E-03	-.1284133E-03	-.1292401E-03	-.1304657E-03	-.1318537E-03
	-.1330504E-03	-.1335815E-03	-.1328382E-03	-.1300991E-03	-.1245618E-03
	-.1154328E-03	-.1020712E-03	-.8423501E-04	-.6242988E-04	-.3838738E-04
	-.1562544E-04	.0000000E+00			
LINHA: 7	-.1020292E-03	-.1024175E-03	-.1035512E-03	-.1053080E-03	-.1074856E-03
	-.1097640E-03	-.1117036E-03	-.1127244E-03	-.1121172E-03	-.1090574E-03
	-.1026887E-03	-.9225297E-04	-.7733601E-04	-.5821587E-04	-.3636263E-04
	-.1504524E-04	.0000000E+00			
LINHA: 8	-.6476324E-04	-.6523926E-04	-.6664102E-04	-.6888306E-04	-.7181207E-04
	-.7518243E-04	-.7863226E-04	-.8166523E-04	-.8364113E-04	-.8377602E-04
	-.8119387E-04	-.7503520E-04	-.6467121E-04	-.5003106E-04	-.3271244E-04
	-.1365650E-04	.0000000E+00			
LINHA: 9	-.1538510E-04	-.1592946E-04	-.1754984E-04	-.2020795E-04	-.2382020E-04
	-.2824457E-04	-.3324705E-04	-.3847037E-04	-.4340790E-04	-.4738395E-04
	-.4957325E-04	-.4905422E-04	-.4497182E-04	-.3681402E-04	-.2490285E-04
	-.1112774E-04	.0000000E+00			
LINHA: 10	.4565448E-04	.4506500E-04	.4329311E-04	.4032219E-04	.3614312E-04
	.3077404E-04	.2628447E-04	.1684180E-04	.8748961E-05	.4905742E-06
	-.7239345E-05	-.1353602E-04	-.1735578E-04	-.1770901E-04	-.1407383E-04
	-.7135517E-05	.0000000E+00			
LINHA: 11	.1156704E-03	.1150672E-03	.1132278E-03	.1100862E-03	.1055300E-03
	.9943533E-04	.9168964E-04	.8227857E-04	.7109519E-04	.5850149E-04
	.4491094E-04	.3109797E-04	.1818617E-04	.7594615E-05	.7731724E-06
	-.1425171E-05	.0000000E+00			
LINHA: 12	.1886704E-03	.1880875E-03	.1862949E-03	.1831680E-03	.1785078E-03
	.1728484E-03	.1634898E-03	.1525280E-03	.1389118E-03	.1225232E-03
	.1034884E-03	.8230843E-04	.6091379E-04	.3828251E-04	.1943075E-04
	.6058457E-05	.0000000E+00			
LINHA: 13	.2540955E-03	.2535742E-03	.2519570E-03	.2490776E-03	.2446650E-03
	.2383440E-03	.2296622E-03	.2180947E-03	.2031104E-03	.1842466E-03
	.1612222E-03	.1341260E-03	.1036687E-03	.7149106E-04	.4068606E-04
	.1492353E-04	.0000000E+00			
LINHA: 14	.2954757E-03	.2950580E-03	.2937504E-03	.2913691E-03	.2876138E-03
	.2826587E-03	.2741584E-03	.2632561E-03	.2486224E-03	.2295031E-03
	.2852321E-03	.1754134E-03	.1402276E-03	.1008940E-03	.6031980E-04
	.2387110E-04	.0000000E+00			
LINHA: 15	.2892007E-03	.2889227E-03	.2880400E-03	.2863872E-03	.2836942E-03
	.2795639E-03	.2734803E-03	.2647911E-03	.2527327E-03	.2364388E-03
	.2150225E-03	.1877007E-03	.1540750E-03	.1146019E-03	.7144650E-04
	.2982254E-04	.0000000E+00			
LINHA: 16	.2037698E-03	.2036456E-03	.2032406E-03	.2024510E-03	.2011054E-03
	.1989467E-03	.1956342E-03	.1907229E-03	.1836689E-03	.1738155E-03
	.1404253E-03	.1427199E-03	.1200346E-03	.9210836E-04	.5975936E-04
	.2423918E-04	.0000000E+00			
LINHA: 17	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00

ROTACAO W PCNTC

LINHA: 1	.4496225E-03 .4525233E-04 .5199223E-04 - .2199739E-04	.9734213E-05 .5263220E-04 .4143788E-04 .0000000E+00	.1937681E-04 .5741449E-04 .2638946E-04	.2878768E-04 .5942656E-04 .8150901E-05	.3773393E-04 .5785892E-04 - .1014149E-04
LINHA: 2	-.6089194E-03 .6892738E-04 .6616849E-04 - .2791859E-05	.1001725E-04 .5718446E-04 .5843269E-04 .0000000E+00	.2002774E-04 .6384906E-04 .4587764E-04	.2997561E-04 .6814729E-04 .2935565E-04	.3970583E-04 .6919746E-04 .1137940E-04
LINHA: 3	-.7681301E-03 .5163223E-04 .8038570E-04 .1628286E-04	.1021354E-04 .6134302E-04 .7576677E-04 .0000000E+00	.2050784E-04 .6940679E-04 .6604668E-04	.3091275E-04 .7655314E-04 .5153042E-04	.4135899E-04 .8036697E-04 .3380841E-04
LINHA: 4	-.9253009E-03 .5349540E-04 .9454717E-04 .3548890E-04	.1021184E-04 .6460119E-04 .9355946E-04 .0000000E+00	.2059719E-04 .7509120E-04 .8719324E-04	.3128080E-04 .8422981E-04 .7499148E-04	.4228746E-04 .9107278E-04 .5729241E-04
LINHA: 5	-.1076409E-02 .5435135E-04 .1091954E-03 .5493627E-04	.9945291E-05 .6674849E-04 .1112658E-03 .0000000E+00	.2024288E-04 .7914181E-04 .1086843E-03	.3099348E-04 .9085001E-04 .9907775E-04	.4236714E-04 .1009314E-03 .8136411E-04
LINHA: 6	-.1215208E-02 .5406122E-04 .1295728E-03 .7440426E-04	.9534415E-05 .6760011E-04 .1274689E-03 .0000000E+00	.1943542E-04 .8176605E-04 .1295047E-03	.3002351E-04 .9599322E-04 .1228171E-03	.4154188E-04 .1093578E-03 .1053275E-03
LINHA: 7	-.1333236E-02 .5262345E-04 .1306860E-03 .4332364E-04	.8868868E-05 .6696116E-04 .1424636E-03 .0000000E+00	.1819049E-04 .8262426E-04 .1483257E-03	.2837984E-04 .9912724E-04 .1449254E-03	.3978238E-04 .1155977E-03 .1281680E-03
LINHA: 8	-.1420043E-02 .4947314E-04 .1373772E-03 .1107669E-03	.8012401E-05 .6463972E-04 .1533212E-03 .0000000E+00	.1654495E-04 .8135242E-04 .1635618E-03	.2608914E-04 .9966029E-04 .1637905E-03	.3708585E-04 .1187866E-03 .1444982E-03
LINHA: 9	-.1463714E-02 .4580326E-04 .1394266E-03 .1254361E-03	.6991089E-05 .6047857E-04 .1584862E-03 .0000000E+00	.1454679E-04 .7761479E-04 .1733298E-03	.2320891E-04 .9701645E-04 .1774842E-03	.3348279E-04 .1180645E-03 .1645426E-03
LINHA: 10	-.1451902E-02 .4044641E-04 .1357070E-03 .1354447E-03	.5847658E-05 .5441342E-04 .1579226E-03 .0000000E+00	.1226665E-04 .7119158E-04 .1757820E-03	.1981878E-04 .9074667E-04 .1838545E-03	.2904923E-04 .1126212E-03 .1741844E-03
LINHA: 11	-.1373922E-02 .3304461E-04 .1254002E-03 .1395009E-03	.4629721E-05 .4654634E-04 .1488698E-03 .0000000E+00	.9802085E-05 .6207924E-04 .1691568E-03	.1605891E-04 .8066522E-04 .1807661E-03	.2393464E-04 .1020573E-03 .1751161E-03
LINHA: 12	-.1221768E-02 .2640602E-04 .1023034E-03 .1348964E-03	.3405032E-05 .3720715E-04 .1311978E-03 .0000000E+00	.7285387E-05 .5059713E-04 .1522786E-03	.1212105E-04 .4701940E-04 .1664465E-03	.1839839E-04 .8443704E-04 .1651646E-03
LINHA: 13	-.9976071E-03 .1842643E-04 .8518540E-04 .1200792E-03	.2253801E-05 .2702543E-04 .1053952E-03 .0000000E+00	.4883506E-05 .3750133E-04 .1251309E-03	.8271774E-05 .5066040E-04 .1401831E-03	.1281506E-04 .6463386E-04 .1428920E-03
LINHA: 14	-.7146192E-03 .1140317E-04 .5818284E-04 .9441051E-04	.1266599E-05 .1695543E-04 .7364427E-04 .0000000E+00	.2788787E-05 .2404582E-04 .8964367E-04	.4829024E-05 .3317156E-04 .1032638E-03	.7666764E-05 .4454842E-04 .1085971E-03
LINHA: 15	-.4072912E-03 .5471224E-05 .3195544E-04 .5975026E-04	.5291949E-06 .8223782E-05 .4034069E-04 .0000000E+00	.1194625E-05 .1196531E-04 .5061150E-04	.2135203E-05 .1540760E-04 .6027524E-04	.3504305E-05 .2324357E-04 .6586917E-04
LINHA: 16	-.1357738E-03 .1245109E-05 .9444717E-05 .2294402E-04	.1062872E-06 .2183006E-05 .1264676E-04 .0000000E+00	.2533197E-06 .3298221E-05 .1654484E-04	.4832982E-06 .4819261E-05 .2063529E-04	.8434145E-06 .6838280E-05 .2381776E-04
LINHA: 17	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00	.0000000E+00 .0000000E+00 .0000000E+00

5.0 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os bons resultados obtidos nos Ensaio de Aferição, considerados sobre reservatório cilíndrico circular, com $PI-2$ para os deslocamentos e com a aproximação γ para esforços e rotações, sugerem a conveniência dessas mesmas aproximações para o caso de outras cascas cilíndricas circulares. Pelo menos refletiram bem o comportamento de bordas livres e engastadas. Ficam, entretanto, outros tipos de vínculos, pontos a serem analisados.

Na aplicação feita no capítulo 4, nota-se, principalmente quanto aos momentos M_x , a rápida convergência que se verificou nos Ensaio de Aferição com a aproximação γ .

Devido a limitações de memória do sistema de computação utilizado e do tempo necessário para processamento, não se fizeram experimentações numéricas com redes de malhas mais apertadas, como nos Ensaio de Aferição, pelo menos até àquele tamanho de malha para o qual de nada mais

adianta refiná-lo.

Essa limitação de até 16×16 malhas, naturalmente, decorre não somente do método de resolução de sistema de equações lineares utilizado, mas também de sua programação. Isto é, se se usa memória auxiliar ou não, e como ela é utilizada. Além disso, influiu nessa limitação, o tempo de processamento. Para o processamento dos quatro sistemas de equações minimizantes foram necessários aproximadamente os seguintes tempos: 1:20, 2:40, 9:00 e 28:00 horas respectivamente para resolver os sistemas de 66×66 , 120×120 , 276×276 e 496×496 equações lineares.

Naturalmente, seria possível recorrer a métodos que visam otimizar a utilização de memória e sejam eficientes quanto à precisão. Porém, é bom lembrar que influi na precisão do método, a precisão do computador, principalmente se o sistema de equações é de grande porte.

Quanto ao tempo de processamento, isto está intimamente ligado ao método utilizado, se é iterativo ou direto (otimizado ou não), a utilização ou não de memória auxiliar, e ao sistema operacional do computador.

No trabalho usou-se o método de GAUSS - JORDAN - RUTISHAUSER com a utilização de memória auxiliar.

Apesar de se ter desenvolvido a discretização do cálculo dos deslocamentos, dos esforços e rotações da casca estudada no capítulo 4 com redes duais, ficam para posterior trabalho, complementar deste, as experimentações numéricas.

Feitas essas observações, passa-se a seguir à listagem de algumas conclusões e sugestões.

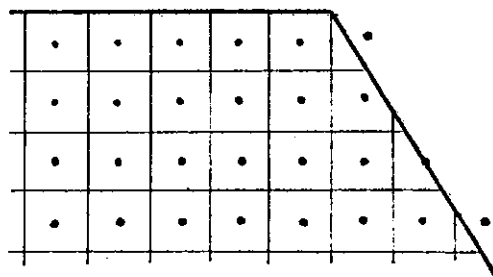
Como conclusão bastante interessante, isto mediante as análises dos Ensaios de Aferição, é o fato de se ter obtido os melhores resultados para valores de M_x com a aproximação γ , que é com expressões em diferenças finitas provenientes de emprego de polinômios do segundo grau, com a imposição de rotação nula no engastamento; as quais se julgaram, a priori, serem as piores aproximações de derivadas, apesar da reimposição de rotação nula uma vez que esta já

tinha sido imposta no cálculo dos deslocamentos. Isto vem provar que nem sempre é verdade que, quando se utiliza expressões em diferenças finitas de derivadas, obtêm-se melhores resultados quanto maior for o grau do polinômio interpolador utilizado para a obtenção dessas expressões.

Outra conclusão, agora referente às experimentações numéricas do item 4, apesar de não muito afirmativa, pois não se tem em mãos as soluções exatas, é que as aproximações com polinômios interpoladores do segundo grau, parecem dar bons resultados ao compará-los com os dos Ensaio de Aferição; aproximação γ para o cálculo dos esforços, rotações e deslocamentos. Naturalmente, cabem aqui as mesmas sugestões citadas no item 3.6.5 para as redes habituais, no que diz respeito a correção de valores das grandezas consideradas em alguns pontos. Como também, a aplicação da extrapolação de Richardson para obtenção de melhores resultados, uma vez que se verifica convergência monotônica ao se refinar a malha (veja resultados apresentados no item 4.3.5).

Pontos que requereriam estudos específicos são, por exemplo:

- a) Automatização da minimização da energia. Para o que é necessário um conhecimento razoável em desenvolvimento de algoritmos, para programação de computadores digitais.
- b) Utilização de polinômios interpoladores de grau mais elevado para a aproximação do cálculo dos deslocamentos, como já se observou no capítulo 3.
- c) Tratamento de contornos curvilíneos, trapezoidais, etc. Por exemplo, um contorno trapezoidal, poderia ser tratado como se indica abaixo, admitindo malhas quadradas.



Os "elementos" cujos centros estão fora da estrutura são desprezados. E aqueles cujos centros se localizam exatamente sobre o contorno da estrutura podem ou não ser desprezados, dependendo da grandeza que se deseja aproximar e do tipo de vínculo deste contorno. Por exemplo, admitindo engastamento e a grandeza deslocamento, pode-se desprezar tais elementos, uma vez que os deslocamentos são nulos, o que não deixa de ser verdade, pois admitir deslocamento nulo, implica em dizer que a energia armazenada no elemento em questão é nula. Como outro exemplo, se fosse borda livre e a grandeza ainda o deslocamento, poderia-se mediar a energia; o que foi feito no capítulo 4.

6.0 DOCUMENTAÇÃO DOS PROGRAMAS

6.1 - INTRODUÇÃO

Apresentam-se neste capítulo os programas utilizados para o cálculo dos Ensaios de Aferição e Cálculo Variacional da casca. Cada programa é documentado por meio de um resumo, um diagrama de blocos expresso resumidamente e sua listagem. Seguiu-se esta forma de documentação por não se pretender aqui documentá-los rigorosamente, porém de forma clara.

Pelo resumo comenta-se a função do programa. Pelo diagrama de blocos resumido, mostra-se o esquema lógico da programação do problema (apenas os principais passos, daí tê-lo denominado de resumido), e pela listagem, a sua programação propriamente dita na linguagem FORTRAN IV para o HP2100A.

Os programas foram elaborados segundo a *Técnica da*

Programação Estruturada, por apresentar duas grandes vantagens em relação à técnica de programação comumente utilizada, que são:

- (1) Maior facilidade na elaboração do algoritmo do problema e, principalmente
- (2) Maior facilidade na sua verificação.

A Técnica da Programação Estruturada, é dividir sempre o problema a ser resolvido em vários outros problemas de menor grau de dificuldade, denominados de blocos na linguagem computacional. Essa divisão é feita de modo a permitir que cada parte (bloco), possa ser programada e verificada independentemente das outras, daí as vantagens acima citadas.

Nos itens 6.2 e 6.3, documentam-se todos os programas utilizados e inclusive os não utilizados (posteriormente justificados) para os cálculos numéricos dos Ensaios de Aferição. Os programas não utilizados são ao todo três, a saber:

- (1) *Programa CANAL* para o cálculo analítico dos deslocamentos w , momentos M_x e rotações ψ do reservatório padrão adotado.
- (2) *Programa EARH* para o cálculo numérico das grandezas w , M_x e ψ , expressas pela aproximação com polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermíticos do segundo e do quarto grau sobre *nodulação habitual*, do reservatório padrão adotado.
- (3) *Programa EARD* para o cálculo numérico das grandezas w , M_x e ψ , expressas pela aproximação com polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermíticos do segundo e do quarto grau, sobre *nodulação dual*, do reservatório padrão.

Esses três programas não foram utilizados única e exclusivamente, por apresentarem os resultados nas formas incomodas para fins de análise, como se vêem na documentação.

Porém, eles foram feitos com o objetivo de servir de referência a futuras programações desse tipo de discretizações.

Agora, os programas apresentados e que foram utilizados são ao todo oito, a saber:

- (1) *Programa CALW* para o cálculo analítico dos deslocamentos w , com a gravação dos resultados em disco magnético.
- (2) *Programa EARHW* para o cálculo numérico da grandeza w expressa pela aproximação variacional com polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do segundo grau, sobre nodulação habitual, com a gravação dos resultados em disco magnético.
- (3) *Programa EARDW* para o cálculo numérico da grandeza w expressa pela aproximação variacional com polinômios interpoladores Lagrangeanos e Hermitianos do segundo grau, sobre nodulação dual, com a gravação dos resultados em disco magnético.
- (4) *Programa IMPW* para a impressão dos três resultados dos deslocamentos w (os analíticos, os aproximados com rede habitual e com rede dual).
- (5) *Programa CWLHA* para o cálculo e impressão das rotações ψ (as analíticas e as quatro aproximações com rede habitual).
- (6) *Programa CMXHA* para o cálculo e impressão dos momentos M_x (os analíticos e as quatro aproximações com rede habitual).
- (7) *Programa CWLDU* para o cálculo e impressão das rotações ψ (as analíticas e as quatro aproximações com rede dual).
- (8) *Programa CMXDU* para o cálculo e impressão dos momentos M_x (os analíticos e as quatro aproximações com rede dual).

Naturalmente esses oito programas se originam dos três citados anteriormente, ou melhor, esses programas foram desenvolvidos apenas com o objetivo de que se pudesse imprimir todos os resultados (deslocamentos, momentos e rotações exatos e aproximados com rede habitual e dual) nas formas apresentadas no item 3.5, por serem mais adequadas para fins de análise sobre as aproximações estudadas. Por esse motivo, apresentam-se esses oito programas de forma mais simples que à linha estabelecida anteriormente, suprimindo-se desta o diagrama de blocos.

No item 6.4, documentam-se os programas utilizados para os cálculos numéricos das discretizações, com rede habitual, do cálculo dos deslocamentos w e v , dos esforços M_x , M_y e N_y , e das rotações w' e w'' , desenvolvidas no capítulo 4. Os programas são:

- (1) *Programa GERA* para a geração e gravação em disco magnético da matriz dos coeficientes e dos termos independentes do sistema de equações minimizantes.
- (2) *Programa CALWV* para o cálculo dos deslocamentos w e v (resolução do sistema de equações minimizantes) e perfuração dos valores dessas grandezas em fita de papel, para serem utilizados pelos dois programas seguintes.
- (3) *Programa ESFRO* para o cálculo dos esforços M_x , M_y e N_y e das rotações w' e w'' .
- (4) *Programa LISTE* Programa utilizado para imprimir as submatrizes que compõem a matriz dos coeficientes.

Os programas (1), (2), (3) e (4), citados acima, foram elaborados permitindo que as malhas da rede habitual pudessem ser inclusive retangulares, porém, todas iguais.

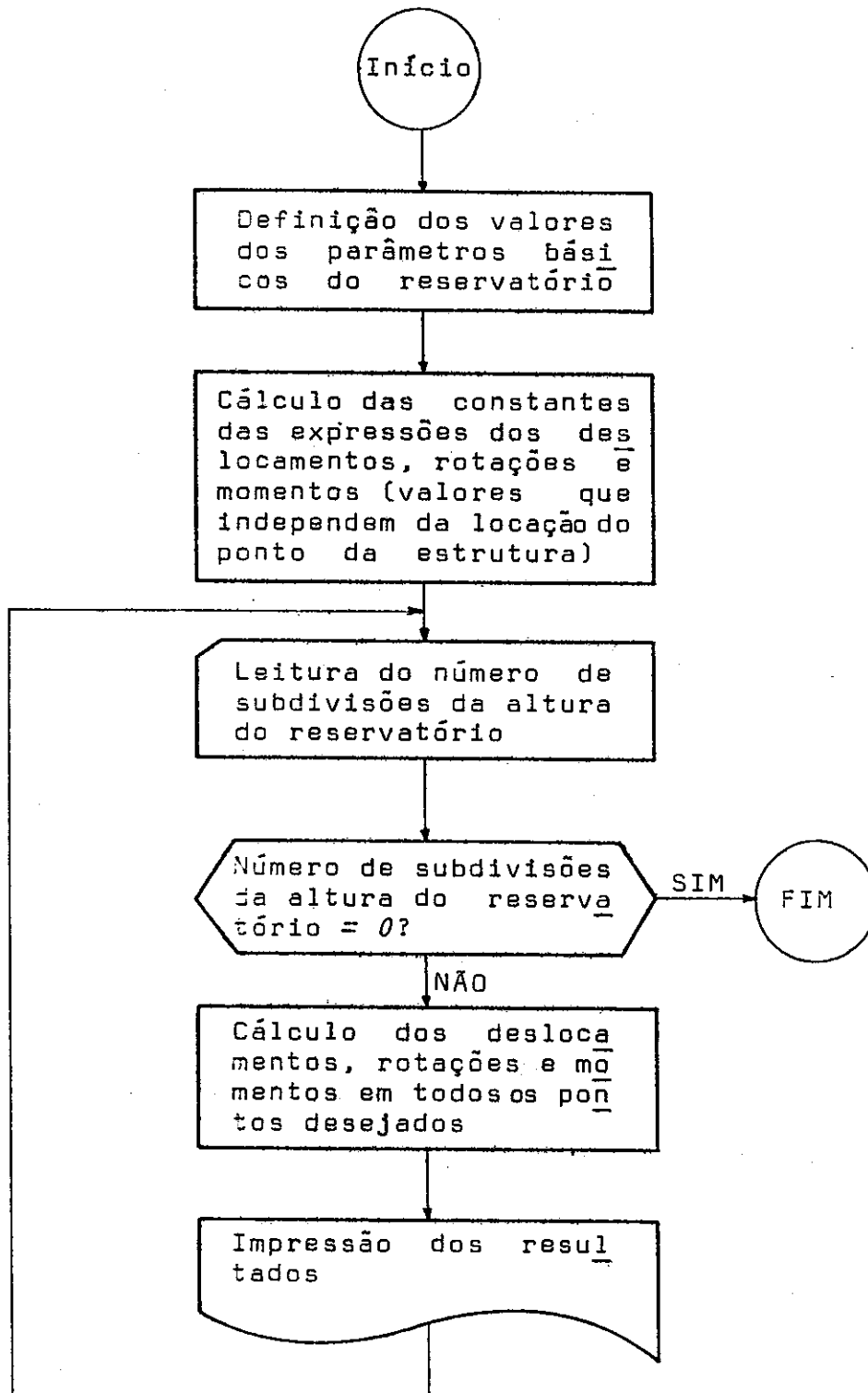
6.2 - DOCUMENTAÇÃO DOS PROGRAMAS CANAL, EARH E EARD

6.2.1 - Programa CANAL

Este programa, para o cálculo analítico do reservatório padrão, foi elaborado de modo a obter as grandezas de interesse deste trabalho (deslocamentos w , rotações $\psi = -w'$ e momentos $M_x = Kw''$) nos pontos da estrutura, onde também são calculadas tais grandezas por meio das duas discretizações, uma com rede habitual e outra com rede dual, do cálculo dos deslocamentos e das oito discretizações do cálculo das rotações e momentos, quatro para cada tipo de nodulação.

A fim de possibilitar o confronto comparativo destes resultados com os obtidos pelas discretizações (objetivo do capítulo 3), o programa imprime os resultados na forma de duas tabelas. Uma para comparação com os resultados provenientes de discretizações com rede habitual e outra, para comparação com os resultados oriundos de discretizações com rede dual.

a) Diagrama de Blocos



b) Listagem do Programa

```

***** DISCO: 001.1 * SUBC: 1 * ARQ: LPA26 * 11/05/78 * 23P 22M 515 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FIN4
0002 PRGR-AM CANAL
0003 C
0004 C
0005 C *** ENSAIO DE AFERICAO - SOLUCAO ANALITICA
0006 C
0007 C *** PRGR-AMADO EM 21/10/77 PARA O MP2100A DA UFSCAR
0008 C
0009 DIMENSAO N(73)*L(73)*S(73)*LS(73)
0010 REAL *A(73)*MAS(73)
0011 INTEGR T1(4)*IITS(4)
0012 DATA T1/2*MA+2*MB1+2*HTU+2*HAL/*IITS/2*HUU+2*HAL*2*H /
0013 C
0014 C *** DEFINICAO DAS FUNCOES SENO E COSSENO HIPERBOLICAS
0015 C
0016 SINH(X)=(EXP(X)-EXP(-X))/2.
0017 COSH(X)=(EXP(X)+EXP(-X))/2.
0018 C *** DEFINICAO DAS UNIDADES DE ENTRADA E SAIDA
0019 IENT=5
0020 ISAI=0
0021 C
0022 C *** DADOS EM TONELADAS E MILIMETROS
0023 C
0024 R=12./3.1415926535*1.E4
0025 CL=0.1*3.1415926535/3.
0026 F=4.E4
0027 E=2.5
0028 C
0029 C *** CALCULO DAS CONSTANTES DAS EXPRESSOES DO DESLOCAMENTO
0030 C ROTACAO E MOMENTO
0031 C
0032 ALFA=SQRT(3.)
0033 ALFA=SQRT(ALFA)/R/SQRT(CL)
0034 TETA=ALFA*H
0035 CTK=C*CL**3*H**3/12.
0036 AM=SIN(TETA)*COSH(TETA)+COS(TETA)*SINH(TETA)-COS(TETA)*
0037 * COSH(TETA)
0038 B=COS(TETA)*COSH(TETA)
0039 C=SIN(TETA)*COSH(TETA)+2.*COS(TETA)*COSH(TETA)-COS(TETA)*
0040 * SINH(TETA)
0041 L=COS(TETA)*SINH(TETA)-SIN(TETA)*COSH(TETA)
0042 A=A*F*-E*C
0043 B=B*F*E*TETA
0044 C=C*F*E*AM
0045 F=F/E/CL*1.E-9
0046 100 HEAD(ENT,*N
0047 IF(N.LE.0)STOP
0048 C
0049 C *** CTE= DISTANCIA ENTRE PUNTOS
0050 C *** F = ALTURA DO RESERVATORIO PADRAO
0051 C *** CHSERRACAO , CTE = F/(2.*N), PORQUE O CALCULO E FEITO PARA
0052 C *** Z(N+1) PUNTOS EQUIDISTANTES DE CTE
0053 C
0054 N1=N+1
0055 CTE=F/(2.*N)
0056 X=-CTE
0057 C
0058 C *** CALCULO DOS DESLOCAMENTOS, ROTACOES E ESFORÇOS
0059 C
0060 LC 1 I=1,N1
0061 X=X+CTE
0062 C --- CALCULO PARA COMPARACAO COM A MODULACAO HABITUAL
0063 CALL RESF(X,ALFA,A,B,C,F,CTK,W,L,MA,1)
0064 C --- CALCULO PARA COMPARACAO COM STIEFENGASTE
0065 IF(I.LE.N1)GO TO 1
0066 X=X+TE
0067 CALL RESF(X,ALFA,A,B,C,F,CTK,W,S,WLS,MAS,1)
0068 I

```

```

0069 C
0070 C *** IMPRESSAO DOS RESULTADOS
0071 C
0072 CALL IMPR(2,N,W,L,MX,TIT)
0073 CALL IMPR(3,N,W,S,L,MAS,TITS)
0074 GC TO 100
0075 EAC
0076 C
0077 C *** SUBROTINA CESF - CALCULO DE W,L E MX
0078 C
0079 SUBROUTINE CESF(X,ALFA,A,B,C,P,CTR,W,L,MX,I)
0080 REAL MX(I),W(L),L(I)
0081 ALFA=ALFA*X
0082 F1=EXP(ALFA)+EXP(-ALFA)
0083 P2=B*SIN(ALFA)+C*COS(ALFA)
0084 F3=2.*EXP(-ALFA)*B*COS(ALFA)
0085 W(I)=-P*(X+(F1*P2-F3)/(2.*A*ALFA))
0086 W(L)=-P*(1.+1./2./A*(P1*((B-C)*SIN(ALFA)+(B+C)*
0087 *COS(ALFA))+2.*EXP(-ALFA)*(B-C)*COS(ALFA)))
0088 MX(I)=-CTR*P*ALFA/A*((EXP(ALFA)-EXP(-ALFA))*
0089 *(B-COS(ALFA)-C*SIN(ALFA))-2.*EXP(-ALFA)*B*SIN(ALFA))
0090 RETURN
0091 EAC
0092 C
0093 C *** SUBROTINA IMPR - IMPRESSAO DOS RESULTADOS
0094 SUBROUTINE IMPR(INIC,N,W,L,MX,TIT)
0095 REAL W(L),L(1),MX(1)
0096 INTEGER TIT(1)
0097 CALL PAGN(N,TIT)
0098 NPL=53
0099 IFI=2*(N+1)
0100 L=1
0101 I=0
0102 DO 10 J=INIC,IFI*2
0103 I=I+1
0104 IF(I.LE.L*NPL)GO TO 10
0105 L=L+1
0106 CALL PAGN(N,TIT)
0107 10 WRITE(6,J)W(I),L(I),MX(I)
0108 3 FCHMAT(15,F16.7,E21.7,F15.3)
0109 RETURN
0110 EAC
0111 C
0112 C *** SUBROTINA PAGN - MUDANCA DE PAGINA E IMPRESSAO DO CABECALHO
0113 C
0114 SUBROUTINE PAGN(N,TIT)
0115 INTEGER TIT(1)
0116 C --- FCSICIONAMENTO DE PAGINA NOVA
0117 CALL EXEC(3,11068,62)
0118 CALL EXEC(3,11068,63)
0119 C --- IMPRESSAO DO CABECALHO
0120 WRITE(6,1)N,(TIT(I),I=1,4)
0121 1 FCHMAT(1) ENSAIO DE AFERICAC - SOLUCAO ANALITICA PARA N=
0122 * 12/" ACOLOCACAO COMPATIVEL COM A DISCRETIZACAO COM NEDE"
0123 * 1X,A2)
0124 WRITE(6,2)
0125 2 FCHMAT(1) " PONTO DESLOCAMENTO"9X"ROTACAO W"7X,
0126 * "MOMENTO MX"11X"RADIAL W"
0127 RETURN
0128 END
0129 EAC
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

ENSAIO DE AFERICAC - SOLUCAO ANALITICA PARA N=12
 ACOLOCACAO COMPATIVEL COM A DISCRETIZACAO COM NEDE HABITUAL

PONTO	DESLOCAMENTO RADIAL W	ROTACAO W'	MOMENTO MX
2	-.0927695	-.1657091E-03	.000
4	-.6448530	-.1653624E-02	4.370
6	-1.1924577	-.1625196E-02	20.785
8	-1.7215215	-.1535805E-02	53.825
10	-2.2044706	-.1339551E-02	106.571
12	-2.5971956	-.9867678E-03	176.483
14	-2.8463363	-.4371022E-03	262.050
16	-2.8655510	.3178410E-04	336.315
18	-2.6117358	.219360E-03	371.762
20	-2.0545364	.2094508E-02	305.859
22	-1.2555773	.2600514E-03	61.525
24	-.4240361	.2173048E-02	7457.831
26	-.0000011	.1739294E-05	-1349.817

ENSAIO DE AFERICAC - SOLUCAC ANALITICA PARA N=12
 MODIFICAC COMPATIVEL COM A DISCRETIZACAO COM REDE DUAL

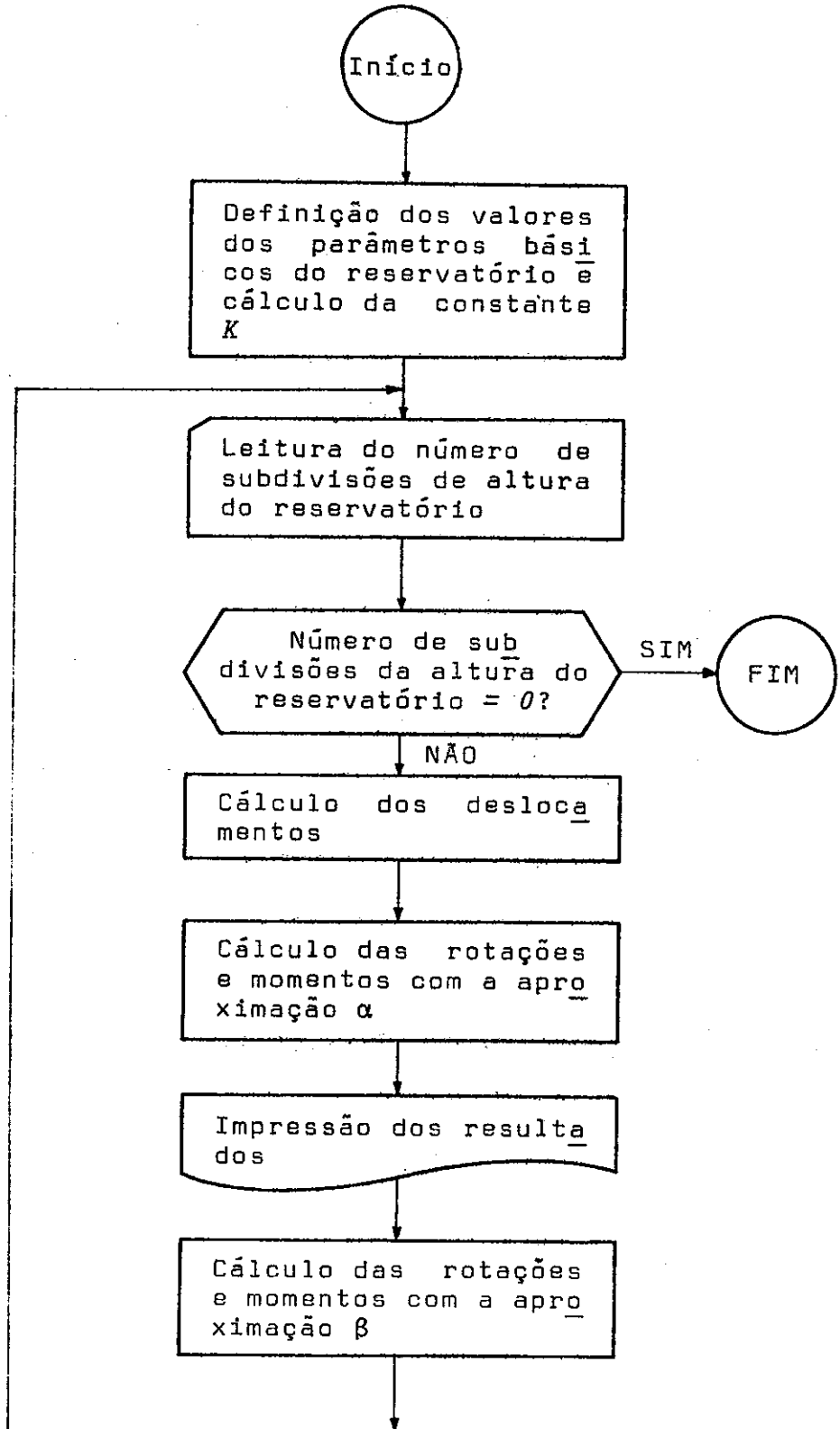
PONTO	DESLOCAMENTO	ROTACAO W'	MOMENTO Mx
	ACIAL W		
3	-.3e89350	-.1656690E-03	.988
5	-.5152084	-.1644509E-03	10.768
7	-1.4507038	-.1590804E-03	34.580
9	-1.5711592	-.1454163E-03	77.651
11	-2.4154944	-.1185688E-03	140.390
13	-2.7416592	-.7381825E-04	219.667
15	-2.8544466	-.8369461E-05	302.667
17	-2.7743514	.7577916E-04	363.392
19	-2.2760929	.1677020E-03	355.660
21	-1.5768277	.2423225E-03	211.748
23	-.8227050	.2548420E-03	-157.398
25	-.1223792	.1364810E-03	-851.285

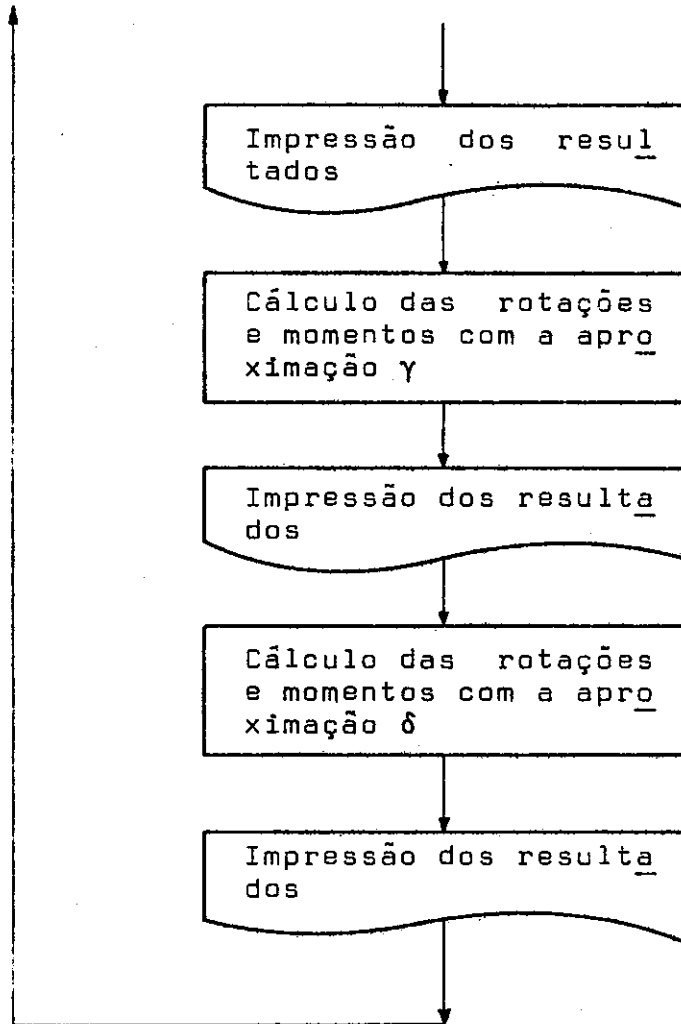
6.2.2 - Programa EARH

Este programa, para o cálculo numérico da aproximação variacional com polinômios interpoladores sobre nodulação habitual, item 3.3, do reservatório padrão, foi desenvolvido para primeiramente calcular os deslocamentos em todos os pontos da rede habitual, estabelecido por uma subdivisão da altura H do reservatório, e em seguida calcular as quatro aproximações de rotações e momentos, já denominadas de aproximações α , β , γ e δ .

Para isso, e mediante a utilização da técnica da programação estruturada, programaram-se a geração da matriz dos coeficientes e dos termos independentes da expressão (3.26) e as gerações das matrizes derivadas $[P_x]$ e $[P_{xx}]$ (matrizes (3.30), (3.32), (3.34), (3.36), (3.38), (3.40), (3.42) e (3.44)) na forma de subrotinas. Desenvolveram-se também nessa forma, programas para resolução do sistema de equações lineares e impressão dos resultados.

a) Diagrama de Blocos





B) Listagem do Programa

```
***** DISCO: VETOR * SUBT: 3 * ARG: LPA2B * 11/05/76 * ZIP: 59M 385 * PAG: 1 *****
-----1-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTA4.L
0002 PROGRAM EARTH
0003 C
0004 C *** ENSAIO DE APERICAO - NODULACAO HABITUAL
0005 C
0006 DIMENSAO X(73)*AL(73)*P(73,73)*A(73,73)
0007 REAL MA(73)
0008 EQUIVALENCE (A(1,1),P(1,1))
0009 INTEGER I(114),APROX(12)
0010 DATA I(1)/CMA,CMB1,CMIU,CMA2,APROX/2MA,2MA,2MA,1H ,
0011 *2MB,2MTA,1P,2MBA,2MA,1H,2MB,2MT,1MA/
0012 C
0013 C *** DADOS EM UNIDADES E MILIMETROS
0014 C
0015 C CM = A = CONSTANTE DE RIGIDEZ
0016 C A = ALICHO DE SUOIV. DA ALT. H DO RESERVATORIO
0017 C E = MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO
0018 C C = COEF. DE PROPORCIONALIDADE P/ O CALC. DA
0019 C ESPESSURA DA PAREDE DO RESERVATORIO
0020 C F = RIGIDEZ DO RESERVATORIO
0021 C GAMA = TENS. ESPECIFICO DO LÍQUIDO
0022 C H = RAIO DE CURVATURA DO RESERVATORIO
0023 C D = ESPESSURA DA PAREDE DO RESERVATORIO
0024 C W = DESLOCAMENTO
0025 C AL = ROTACAO
0026 C MA = MÓDULO
0027 C
0028 E=2.5
0029 CA=0.1
0030 F=4.04
0031 GAMA=1.04
0032 F=12.72*10.093*1.04
0033 C=C*0.141593/3.
0034 L=C*F
0035 C=2*0.03/12.
0036 ZOO HEAD(5)*A
0037 IF (NODULACAO) GO TO 100
0038 FM=F/A
0039 C
0040 C *** CALCULO DOS DESLOCAMENTOS W
0041 C
0042 CALL CP-F(N,C,K,D,FM,GAMA,A)
0043 CALL CL-LS(N,A)
0044 K=N+1
0045 DO 10 I=1,N
0046 10 W(I)=A*(K)
0047 W(N)=0.
0048 C
0049 C *** APROXIMACAO ALPHA DO CALCULO DA ROTACAO E DO MOMENTO
0050 C
0051 CTE= C/D/PM
0052 CALL F-AG(N,F,U)
0053 CALL F-LI(N*CTE*W*W)
0054 CTE=C/D/PM
0055 CALL F-AG(N,F,U)
0056 CALL F-LI(N*CTE*W*W)
0057 CALL F-AG(12*N,I,APROX,1,W,W,N)
0058 C
0059 C *** APROXIMACAO BETA DO CALCULO DA ROTACAO E DO MOMENTO
0060 C
```

```

0061 CTE=1./12./FM
0062 CALL FANG(N,P,0)
0063 CALL MULT(K,CTE,W,P*NL)
0064 CTE=CTE/FM*CH
0065 CALL FANG(N,P,0)
0066 CALL MULT(K,CTE,W,P*MX)
0067 CALL IMPR(2,N,III,APRUX,4,W*NL,MX)
0068 C
0069 C *** APROXIMACAO GAMA DO CALCULO DA ROTACAO E DO MOMENTO
0070 C
0071 CTE=0.5/FM
0072 CALL FANG(N,P,1)
0073 CALL MULT(K,CTE,W,P*NL)
0074 CTE=(W**2)/FM
0075 CALL FANG(N,P,1)
0076 CALL MULT(K,CTE,W,P*MX)
0077 CALL IMPR(2,N,III,APRUX,7,W*NL,MX)
0078 C
0079 C *** APROXIMACAO DELTA DO CALCULO DA ROTACAO E DO MOMENTO
0080 C
0081 CTE=1./25./FM
0082 CALL FANG(N,P,1)
0083 CALL MULT(K,CTE,W,P*NL)
0084 CTE=CTE/FM*CH
0085 CALL FANG(N,P,1)
0086 CALL MULT(K,CTE,W,P*MX)
0087 CALL IMPR(2,N,III,APRUX,10,W*NL,MX)
0088 GC TO 200
0089 100 END
0090 END
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

ENSAIO DE AFERICAC - DISCRETIZACAO COM NEDE HABITUAL
 NUMERO DE SUBDIVISOES = 12 APROXIMACAO ALFA

PONTO	DESLOCAMENTO RACIAL W	ROTACAO W*	MOMENTO MX
2	-.095311e	-.1634856e-03	2.420
4	-.639255e	-.1626808e-03	2.420
6	-1.181183e	-.1602154e-03	18.904
8	-1.707358e	-.1515954e-03	50.056
10	-2.1918197	-.1322233e-03	100.120
12	-2.5928473	-.9918914e-04	168.953
14	-2.8530807	-.6812778e-04	250.058
16	-2.9049325	.2522108e-04	326.213
18	-2.6849403	.115398e-03	364.336
20	-2.1613350	.1959102e-03	310.649
22	-1.3788724	.2457615e-03	88.182
24	-.5229250	.2006308e-03	-399.627
26	.0000000	.1007241e-03	-399.627

ENSAIO DE AFERICAC - DISCRETIZACAO COM NEDE HABITUAL
 NUMERO DE SUBDIVISOES = 12 APROXIMACAO BETA

PONTO	DESLOCAMENTO RACIAL W	ROTACAO W*	MOMENTO MX
2	-.095311e	-.1630267e-03	-.623
4	-.639255e	-.1632621e-03	1.197
6	-1.181183e	-.1612079e-03	17.682
8	-1.707358e	-.1532674e-03	48.481
10	-2.1918197	-.1353003e-03	98.557
12	-2.5928473	-.1023129e-03	167.930
14	-2.8530807	-.5006857e-04	250.470
16	-2.9049325	.2204031e-04	329.383
18	-2.6849403	.116843e-03	371.989
20	-2.1613350	.2076633e-03	324.691
22	-1.3788724	.2005585e-03	110.295
24	-.5229250	.2020845e-03	-377.513
26	.0000000	.958843e-04	-1130.685

ENSAIO DE AFERIÇÃO - DISCRETIZAÇÃO COM REDE MESH
 NÚMERO DE SUBDIVISÕES = 12 APROXIMAÇÃO GAMA

PONTO	DESLOCAMENTO RACIAL W	ROTACAO W'	MOMENTO MX
2	-.095311e	-.1634856e-03	2.420
4	-.6392559	-.162880e-03	2.420
6	-1.181183e	-.1602154e-03	18.904
8	-1.70735e	-.1515454e-03	50.056
10	-2.191e197	-.1328233e-03	100.120
12	-2.5928473	-.9918914e-04	168.953
14	-2.8530807	-.4681277e-04	250.058
16	-2.9049325	.2522106e-04	326.213
18	-2.6849403	.1115396e-03	364.336
20	-2.1613350	.1959102e-03	310.629
22	-1.3788724	.2457615e-03	68.182
24	-.5229250	.2688308e-03	-399.627
26	.0000000	.0000000e+00	-1255.020

ENSAIO DE AFERIÇÃO - DISCRETIZAÇÃO COM REDE MESH
 NÚMERO DE SUBDIVISÕES = 12 APROXIMAÇÃO DELTA

PONTO	DESLOCAMENTO RACIAL W	ROTACAO W'	MOMENTO MX
2	-.095311e	-.1630287e-03	-.617
4	-.6392559	-.1632620e-03	1.197
6	-1.181183e	-.1612079e-03	17.682
8	-1.70735e	-.1532874e-03	48.480
10	-2.191e197	-.1353003e-03	98.555
12	-2.5928473	-.1023128e-03	167.931
14	-2.8530807	-.5008904e-04	250.470
16	-2.9049325	.2284028e-04	329.381
18	-2.6849403	.1118643e-03	371.988
20	-2.1613350	.2016634e-03	324.690
22	-1.3788724	.2605585e-03	110.295
24	-.5229250	.2472474e-03	-311.262
26	.0000000	.0000000e+00	-1859.445

c) Listagem das Subrotinas

c.1) Subrotina GMRH

Esta subrotina gera a matriz dos coeficientes e dos termos independentes do sistema de equações (3.26). Seus parâmetros são: N , E , R , D , HM , $GAMA$, M , onde N é o número de subdivisões da altura H do reservatório, E , R e D são respectivamente o módulo de elasticidade, o raio de curvatura e a espessura da parede do reservatório. HM é a abertura da malha ($=H/N$), $GAMA$ é o peso específico do líquido contido no reservatório e, M é a matriz de $N \times N + 1$ elementos que conterá a matriz dos coeficientes e dos termos independentes.

***** DISCO: METCO2 * SLBO: 3 * ANO: EMAUS * 11/05/78 * ZIP 48P 275 * PAG 1 *****
-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80

```
0001 FTA4
0002      SLEBCLTINE GMRP(N,E,R,U,PP,GAMA,N)
0003 C
0004 C **** SLEBCLTINA PARA GERACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES E 1.1.
0005 C      CC ENSAIO DE AFERICAO - NULLLLACAO HABITUAL
0006 C
0007 C      REAL P(73,73)
0008 C
0009 C
0010 C      A=E*D****2/(4.*R**2)
0011 C      B=E*D**3/(24.*R**2)
0012 C
0013 C **** ZERAR MATRIZ P
0014 C
0015 C      CC 10 I=1,N
0016 C      CC 10 J=1,N
0017 C      10 P(I,J)=0.
0018 C
0019 C *** GERACAO DOS ELEMENTOS DE P*O POR LINHA
0020 C
0021 C      A4=4.*A
0022 C      B3=3.*B
0023 C      B6=6.*B
0024 C      A412B=A4+12.*B
0025 C      B2=2.*B
0026 C
0027 C **** GERACAO DAS 3 PRIMEIRAS LINHAS
0028 C
0029 C      P(1,1)=2.*A+B3
0030 C      P(1,2)=-6.*B
0031 C      P(1,3)=B3
0032 C      P(2,1)=-6.*B
0033 C      P(2,2)=A4+14.*B
0034 C      P(2,3)=-10.*B
0035 C      P(2,4)=B2
0036 C      P(3,1)=B3
0037 C      P(3,2)=-10.*B
0038 C      P(3,3)=A4+13.*B
0039 C      P(3,4)=-B6
0040 C      P(3,5)=B2
0041 C
0042 C **** GERACAO DAS LINHAS N-1 E N
0043 C
0044 C      I=N-1
0045 C      J=N-3
0046 C      P(I,J)=B2
0047 C      P(I,J+1)=-B6
0048 C      P(I,J+2)=A412B
0049 C      P(I,J+3)=-B6
0050 C      I=I+1
0051 C      P(I,J+1)=B2
0052 C      P(I,J+2)=-B6
0053 C      P(I,J+3)=A4+14.*B
0054 C
0055 C **** GERACAO DAS LINHAS CONSTANTES
0056 C
0057 C      IN=4
0058 C      IP=N-2
0059 C      CC 20 I=IN,IP
0060 C      J=I-2
0061 C      P(I,J)=B2
0062 C      P(I,J+1)=-B6
0063 C      P(I,J+2)=A412B
0064 C      P(I,J+3)=-B6
0065 C      20 P(I,J+4)=B2
0066 C
0067 C **** GERACAO DOS TERMOS INDEPENDENTES
0068 C
0069 C      CIE=B6+A*P**3
0070 C      J=N+1
0071 C      CC 30 I=1,N
0072 C      30 P(I,J)=(I-1)*CIE
0073 C      RETURN
0074 C      END
0075 C      ENCS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

c.2) Subrotina GJR1S

É a subrotina utilizada para resolução de sistema de equações lineares. O método programada é o de Gauss-Jordan-Rutishauser. Seus parâmetros são: N , A , onde N é a ordem do sistema e A a matriz dos coeficientes junto com os termos independentes, alocados na coluna $N+1$ da matriz A .

```
***** DISCC: METCC2 * SLBC: 1 * ARG: DMA07 * 24.06.78 * 2H 42M 25S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FIN4
0002 SUBROUTINE GJR1S(N,A)
0003 C
0004 C*** SUBROUTINE PARA RESOLUCAO DE SISTEMA DE EQUACCOES
0005 C LINEARES FELC METODO DE GAUSS JORDAN RUTHSHAUSER
0006 C
0007 DIMENSION A(73,73),B(73),C(72),IP(72),IC(72)
0008 DC 1 K=1,A
0009 T=0.
0010 DC 6 I=K,A
0011 S=0.
0012 DC 3 J=K,A
0013 3 S=S+ABS(A(I,J))
0014 IF(S.EG.0)GO TO 5
0015 4 DC 2 J=K,A
0016 IF(ABS(A(I,J))-S*12.2.7)
0017 7 IP(K)=I
0018 IC(K)=J
0019 PIVC=A(I,J)
0020 T=ABS(PIVC/S)
0021 2 CONTINUE
0022 6 CONTINUE
0023 IF(T)101.5.101
0024 101 IF(IP(K)-K)8.98.8
0025 8 N1=N+1
0026 DC 9 J=1,N1
0027 IPK=IP(K)
0028 Z=A(IPK,J)
0029 A(IPK,J)=A(K,J)
0030 5 A(K,J)=Z
0031 98 IF(IC(K)-K)10.20.10
0032 10 ICK=IC(K)
0033 DC 11 I=1,A
0034 Z=A(I,ICK)
0035 A(I,ICK)=A(I,K)
0036 11 A(I,K)=Z
0037 20 DC 12 J=1,A
0038 IF (J-K)13.14.13
0039 14 B(J)=1./PIVC
0040 C(J)=1.
0041 GO TO 15
0042 13 B(J)=-A(K,J)/PIVC
0043 C(J)=A(J,K)
0044 15 A(K,J)=0.
0045 12 A(J,K)=0.
0046 B(N+1)=-A(K,N+1)/PIVC
0047 A(K,N+1)=0.
0048 N1=N+1
0049 K1=K+1
0050 DC 1 I=1,A
0051 DC 1 J=K1,N1
0052 1 A(I,J)=A(I,J)+C(I)*B(J)
0053 DC 16 M=N1.1.-1
0054 IF(IC(K)-K)17.16.17
0055 17 Z=A(IC(K),N+1)
0056 A(IC(K),N+1)=A(K,N+1)
0057 A(K,N+1)=Z
0058 16 CONTINUE
0059 GO TO 18
0060 5 WRITE(5,100)
0061 100 FORMAT(///SX"PROGRAMA NAO EXECUTADO - MATRIZ SINGULAR"//)
0062 18 RETURN
0063 END
0064 3
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

c.3) Subrotinas para a Geração das Matrizes Derivadas

Cada subrotina a seguir listada, gera a matriz derivada $[P_x]$ ou $[P_{xx}]$ e tem como parâmetros N , P e M , onde N é o número de subdivisões da altura H do reservatório, P é a matriz derivada de ordem $N+1$ e M é um parâmetro seletivo. Por exemplo, se $M=0$ gera, a matriz derivada $[P_x]_\alpha$ e se $M=1$ a matriz derivada $[P_x]_\gamma$. Isto porque a diferença existente na geração de uma ou de outra matriz é de um fator multiplicativo, ou de se fazer com que uma determinada coluna dessa matriz contenha somente zeros ou não. Com isso, evitou-se a programação de mais uma subrotina para a geração de uma matriz derivada que difere de uma outra apenas de um fator multiplicativo ou de uma coluna.

c.3.1) Subrotina PXAG

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_x]_\alpha$ ou $[P_x]_\gamma$.

c.3.2) Subrotina PXXAG

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_{xx}]_\alpha$ ou $[P_{xx}]_\gamma$.

c.3.3) Subrotina PXBD

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_x]_\beta$ ou $[P_x]_\delta$.

c.3.4) Subrotina PXXBD

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_{xx}]_\beta$ ou $[P_{xx}]_\delta$.

c.4) Subrotinas Auxiliares MULT, IMPR E PAGN

A subrotina *MULT* calcula expressão do tipo

$$\{ESF\} = CTE \cdot \{W\} \cdot [P].$$

A subrotina *IMPR* imprime os resultados provenientes

tes da discretização do cálculo dos deslocamentos e de uma aproximação do cálculo das rotações e momentos.

A subrotina *PAGN*, tem a função de mudar de página e imprimir cabeçalho.

```
***** DISCC: METCO2 * SLEC: 3 * ARC: LMA09 * 11/05/78 * 21F 49M 48S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FIN4
0002 SLENCUTINE PXAG(N,P,M)
0002 C
0004 C *** GERACAC DA MATRIZ PX ALFA CU PX GAMA
0005 C
0006 C M = 1 GERA MATRIZ PX ALFA
0007 C M = 1 GERA MATRIZ PX GAMA
0008 C
0009 DIMENSIGN P(73,73)
0010 C
0011 C *** ZERAR A MATRIZ F
0012 C
0013 K=N+1
0014 DO 10 I=1,K
0015 DO 10 J=1,K
0016 10 F(I,J)=0.
0017 C
0018 C *** GERACAC DOS ELEMENTOS NO PCR CCLUNA
0019 C
0020 C *** GERACAC DA CCLUNA 1
0021 F(1,1)=-3.
0022 F(2,1)=4.
0023 F(3,1)=-1.
0024 C *** GERACAC DAS CCLUNAS 2 A N
0025 DO 20 J=2,N
0026 F(J-1,J)=-1.
0027 20 F(J+1,J)=1.
0028 IF(N.EQ.1)RETURN
0029 C *** GERACAC DA CCLUNA N+1 DA MATRIZ PX ALFA
0030 F(K,K)=3.
0031 F(K-1,K)=-4.
0032 F(K-2,K)=1.
0033 RETURN
0034 ENC
0035 ENCS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```



```

***** DISCO: DETCO2 * SUBC: 3 * ARG: LMA10 * 11/05/78 * 21H 50M 1S * PAG 1 *****
-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----
0001  FTA4
0002      SUBROUTINE PXXAG(N,P,M)
0003  C
0004  C *** GERACAO DA MATRIZ PXX ALFA CU PXX GAMA
0005  C
0006  C      M = 1 GERA MATRIZ PXX ALFA
0007  C      M = 1 GERA MATRIZ PXX GAMA
0008  C
0009  C      DIMENSICA P(73,73)
0010  C
0011  C *** ZERAR A MATRIZ P
0012  C
0013      K=N+1
0014      DO 10 I=1,K
0015      DO 10 J=1,K
0016      10 P(I,J)=0.
0017  C
0018  C *** GERACAO DOS ELEMENTOS NO PCF CCLUNA
0019  C
0020  C *** GERACAO DA CCLUNA 1
0021      P(1,1)=1.
0022      P(2,1)=-2.
0023      P(3,1)=1.
0024  C *** GERACAO DAS CCLUNAS 2 A N
0025      DO 20 J=2,N
0026      P(J-1,J)=1.
0027      P(J,J)=-2.
0028      20 P(J+1,J)=1.
0029      P(K-1,K)=2.
0030      IF(N.EQ.1)-ETORN
0031  C *** GERACAO DA CCLUNA N+1 DA MATRIZ PXX ALFA
0032      P(K,K)=1.
0033      P(K-1,K)=-2.
0034      P(K-2,K)=1.
0035      RETORN
0036      END
0037      ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

```

***** DISCO: DETCO2 * SUBC: 3 * ARG: LMA11 * 11/05/78 * 21H 50M 14S * PAG 1 *****
-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----
0001  FTA4
0002      SUBROUTINE PXXB(N,P,M)
0003  C
0004  C *** GERACAO DA MATRIZ PXX BETA CU PXX DELTA
0005  C
0006  C      M = 1 GERA MATRIZ PXX BETA
0007  C      M = 1 GERA MATRIZ PXX DELTA
0008  C
0009  C      DIMENSICA P(73,73)
0010  C
0011  C *** ZERAR A MATRIZ P
0012  C
0013      K=N+1
0014      DO 10 I=1,K
0015      DO 10 J=1,K
0016      10 P(I,J)=0.
0017  C
0018  C *** GERACAO DOS ELEMENTOS NO PCF CCLUNA
0019  C
0020      F=1.
0021      IF(N.EQ.1)F=3.
0022  C *** GERACAO DAS CCLUNAS 1 E 2
0023      P(1,1)=-25.*F
0024      P(2,1)=5.*F
0025      P(3,1)=-35.*F
0026      P(4,1)=15.*F
0027      P(5,1)=-3.*F
0028      P(1,2)=-3.*F
0029      P(2,2)=-10.*F
0030      P(3,2)=18.*F
0031      P(4,2)=-6.*F
0032      P(5,2)=1.*F
0033      K=N-1
0034  C *** GERACAO DAS CCLUNAS 3 A N-1
0035      DO 20 J=3,K
0036      P(J-2,J)=1.*F
0037      P(J-1,J)=-5.*F
0038      P(J,J)=5.*F

```

```

0039      20 P(L+2,J)=-1.*F
0040      L1=K-4
0041      L2=K-3
0042      L3=K-2
0043      L4=K-1
0044      IF(M.EQ.1)GO TO 30
0045 C *** GERACAO DAS COLUNAS N E N+1 DA MATRIZ PX BETA
0046      P(L1,N)=-1
0047      P(L2,N)=6.
0048      P(L3,N)=-18.
0049      P(L4,N)=10.
0050      P(K,N) =3.
0051      P(L1,K)=3.
0052      P(L2,K)=-18.
0053      P(L3,K)=30.
0054      P(L4,K)=-48.
0055      P(K,K)=25.
0056      RETURN
0057 C *** GERACAO DA COLUNA N DA MATRIZ PX DELTA
0058      30 P(L2,N)=2.
0059      P(L3,N)=-18.
0060      P(L4,N)=-18.
0061      RETURN
0062      END
0063      ENDS

```

***** LISTAGEM TERMINADA *****

***** DISCO: MET02 * SUBC: 3 * ARG: DPA12 * 11/05/78 * 21H 51M 28S * PAG 1 *****

```

-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTN4
0002      SUBROUTINE PXXB(N,P,M)
0003 C
0004 C *** GERACAO DA MATRIZ PAX BETA CL PAX DELTA
0005 C
0006 C      M = 1 GERA MATRIZ PAX BETA
0007 C      M = 1 GERA MATRIZ PAX DELTA
0008 C
0009      DIMENSION P(73,73)
0010 C
0011 C *** ZEPAR A MATRIZ P
0012 C
0013      K=N+1
0014      DO 10 I=1,K
0015      DO 10 J=1,K
0016      10 P(I,J)=0.
0017 C
0018 C *** GERACAO DOS ELEMENTOS #0 PGM COLUNA
0019 C
0020      F=1.
0021      IF(M.EQ.1)F=3.
0022 C ** GERACAO DAS COLUNAS 1 E 2
0023      P(1,1)=35.*F
0024      P(2,1)=-104.*F
0025      P(3,1)=114.*F
0026      P(4,1)=-56.*F
0027      P(5,1)=11.*F
0028      P(1,2)=11.*F
0029      P(2,2)=-20.*F
0030      P(3,2)=4.*F
0031      P(4,2)=-4.*F
0032      P(5,2)=-1.*F
0033      K=K-1
0034 C *** GERACAO DAS COLUNAS 3 A N-1
0035      DO 20 J=3,K
0036      P(J-2,J)=-1.*F
0037      P(J-1,J)=16.*F
0038      P(J,J) =-30.*F
0039      P(J+1,J)=16.*F
0040      20 P(J+2,J)=-1.*F
0041      L1=K-4
0042      L2=K-3
0043      L3=K-2
0044      L4=K-1
0045      IF(M.EQ.1)GO TO 30

```

```
0046 C *** GERACAO DAS CCLUNAS N E N+1 DA MATRIZ PAX BETA
0047 P(L1,N)=-1.
0048 P(L2,N)=4.
0049 P(L3,N)=6.
0050 P(L4,N)=-20.
0051 P(K,N)=11.
0052 P(L1,K)=11.
0053 P(L2,K)=-56.
0054 P(L3,K)=114.
0055 P(L4,K)=-104.
0056 P(K,K)=35.
0057 RETLNA
0058 C *** GERACAO DA CCLUNA N DA MATRIZ PAX DELTA
0059 30 P(L2,N)=-4.
0060 P(L3,N)=54.
0061 P(L4,N)=-108.
0062 P(L2,K)=8.
0063 P(L3,K)=-54.
0064 P(L4,K)=216.
0065 RETLNA
0066 END
0067 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

***** DISCO: PETCH2 * SUBC: 3 * ARG: DMA08 * 11/05/78 * 21F 49M 31S * PAG 1 *****

```
-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FTN4
0002 C
0003 C *** SUBROTINA DE MULTIPLICACAO
0004 C
0005 SUBROUTINE MULT(K,CTE,W,P,ESF)
0006 DIMENSIAO N(1),P(73,73),ESF(1)
0007 DO 10 I=1,K
0008 S=0.
0009 DO 20 J=1,K
0010 S=S+(C)*P(J,I)
0011 10 ESF(I)=CTE*S
0012 RETLNA
0013 END
0014 C
0015 C *** SUBROTINA DE IMPRESSAO
0016 C
0017 SUBROUTINE IMPH(INIC,N,TIT,APROX,IN,W,NL,PM)
0018 DIMENSIAO N(1),NL(1)
0019 REAL PM(1)
0020 INTEGER TIT(1),APROX(1)
0021 CALL PAGA(N,TIT,APROX,IN)
0022 NPL=53
0023 IF IP=2*(N+1)
0024 L=1
0025 J=0
0026 DO 10 I=INIC,IFIN,2
0027 J=J+1
0028 IF (J.LE.L*NPL) GO TO 10
0029 L=L+1
0030 CALL PAGA(N,TIT,APROX,IN)
0031 10 WRITE(6,3) I,W(J),NL(J),PM(J)
0032 3 FORMAT(15,F16.7,E21.7,F15.3)
0033 RETLNA
0034 END
0035 C
0036 C *** SUBROTINA PAGA - PLDANCA DE PAGINA E IMPRESSAO DE CABECALHO
0037 C
0038 SUBROUTINE PAGA(N,TIT,APROX,IN)
0039 INTEGER TIT(1),APROX(1)
0040 IF=IN+2
0041 CALL EXEC(3,11068,62)
0042 CALL EXEC(3,11068,63)
0043 WRITE(6,1)(TIT(1),I=1,4),N,(APROX(1),I=IN,IF)
0044 1 FORMAT(" ENSAIO DE APLICACAO - DISCRETIZACAO COM REDE "4A2/
0045 " N ALTERN DE SUBDIVISOES ="13.5X,"APROXIMACAO "3A2/)
0046 WRITE(6,2)
0047 2 FORMAT(" PCNTC DESLOCAMENTO"5X"ROTACAO "7X,
0048 "MOMENTO "X"/11X"RADIO "X")
0049 RETURN
0050 END
0051 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```



```

0036      200 HEAD(=*)A
0037      IF(A=0.0)GO IC 100
0038      FM = FPA
0039      C
0040      C *** CALCULO DOS DESLOCAMENTOS W
0041      C
0042      CALL GYND(N,DE,H,L,FM,GAMA+A)
0043      CALL GYIS(N,A)
0044      W=0
0045      DO 10 I=1,N
0046      10 W(I)=Z(I)*K
0047      W(N)=0
0048      C
0049      C *** APROXIMACAO A DO CALCULO DA ROTACAO E DO MOMENTO
0050      C
0051      CTE=0.0/PM
0052      CALL FAD(N,P,0)
0053      CALL MULT(K,CTE,W,P,WL)
0054      CTE=C/PM*CH
0055      CALL FAD(N,P,0)
0056      CALL MULT(I,CTE,W,P,MX)
0057      CALL INPR(I,N,11,APROX,1,W,WL,MX)
0058      C
0059      C *** APROXIMACAO B DO CALCULO DA ROTACAO E DO MOMENTO
0060      C
0061      CTE = 1.0/12.0/PM
0062      CALL FAD(N,P,0)
0063      CALL MULT(K,CTE,W,P,WL)
0064      CTE=CTE/PM*CH
0065      CALL FAD(N,P,0)
0066      CALL MULT(I,CTE,W,P,MX)
0067      CALL INPR(I,N,11,APROX,2,W,WL,MX)
0068      C
0069      C *** APROXIMACAO C DO CALCULO DA ROTACAO E DO MOMENTO
0070      CTE = 1.0/12.0/PM
0071      CALL FAD(N,P)
0072      CALL MULT(K,CTE,W,P,WL)
0073      CTE=CTE/PM*CH
0074      CALL FAD(N,P)
0075      CALL MULT(I,CTE,W,P,MX)
0076      CALL INPR(I,N,11,APROX,3,W,WL,MX)
0077      C
0078      C *** APROXIMACAO D DO CALCULO DA ROTACAO E MOMENTO
0079      C
0080      CTE = 1.0/24.0/PM
0081      CALL FAD(N,P)
0082      CALL MULT(K,CTE,W,P,WL)
0083      CTE=CTE/PM*CH
0084      CALL FAD(N,P)
0085      CALL MULT(I,CTE,W,P,MX)
0086      CALL INPR(I,N,11,APROX,4,W,WL,MX)
0087      GO IC 200
0088      100 ENL
0089      END

```

***** LISTAGEM TERMINADA *****

ENSAIO DE AFERICACAO - DISCRETIZACAO COM MELE DUAL
 NUMERO DE SUBDIVISOES = 12 APROXIMACAO A

PCATC	DESLOCAMENTO FACIAL W	ROTACAO W'	MOMENTO MX
1	.1629589	-.1627126E-03	.000
3	-.3794183	-.1627125E-03	.000
5	-.9217916	-.1614156E-03	10.376
7	-1.4559202	-.1556943E-03	35.394
9	-1.9597835	-.1414369E-03	78.664
11	-2.3584332	-.1134101E-03	141.550
13	-2.7191544	-.6886404E-04	220.418
15	-2.8861935	-.3215519E-05	302.658
17	-2.7410172	.7976159E-04	361.671
19	-2.3244495	.1689261E-03	351.645
21	-1.6148436	.2383591E-03	203.819
23	-.7353000	.2422668E-03	-172.880
25	.0000000	.1970066E-03	-172.880

ENSAIO DE AFERICAC - DISCRETIZACAO COM MEDE DUAL
 NUMERO DE SUBDIVISOES = 12 APROXIMACAO B

PONTO	DESLOCAMENTO FACIAL w	ACTACAO w*	MOMENTO MX
1	.1629589	-.1627631E-03	3.045
3	-.3794163	-.1626398E-03	-1.220
5	-.9217916	-.1621530E-02	9.156
7	-1.4555202	-.1571170E-03	33.873
9	-1.9597535	-.1436485E-03	77.029
11	-2.3984332	-.1188633E-03	140.219
13	-2.7191544	-.7292048E-04	220.138
15	-2.8561935	-.6222295E-05	304.593
17	-2.7410178	.7874162E-04	367.424
19	-2.3244495	.1722147E-03	363.124
21	-1.6148436	.2492667E-03	222.891
23	-.7353886	.2620965E-03	-153.807
25	.0000000	.1533106E-03	-759.375

ENSAIO DE AFERICAC - DISCRETIZACAO COM MEDE DUAL
 NUMERO DE SUBDIVISOES = 12 APROXIMACAO C

PONTO	DESLOCAMENTO FACIAL w	ACTACAO w*	MOMENTO MX
1	.1629589	-.1627126E-03	.000
3	-.3794163	-.1627126E-03	.000
5	-.9217916	-.1614156E-03	10.376
7	-1.4555202	-.1556943E-03	35.395
9	-1.9597535	-.1414369E-03	78.664
11	-2.3984332	-.1139101E-03	141.550
13	-2.7191544	-.8886403E-04	220.419
15	-2.8561935	-.3279495E-05	302.658
17	-2.7410178	.7970159E-04	361.671
19	-2.3244495	.1689261E-03	351.645
21	-1.6148436	.2363591E-03	203.619
23	-.7353886	.2422205E-03	-172.880
25	.0000000	.7353886E-04	-1176.622

ENSAIO DE AFERICAC - DISCRETIZACAO COM MEDE DUAL
 NUMERO DE SUBDIVISOES = 12 APROXIMACAO D

PONTO	DESLOCAMENTO FACIAL w	ACTACAO w*	MOMENTO MX
1	.1629589	-.1627631E-03	3.045
3	-.3794163	-.1626398E-03	-1.220
5	-.9217916	-.1621530E-03	9.156
7	-1.4555202	-.1571170E-03	33.874
9	-1.9597535	-.1436485E-03	77.030
11	-2.3984332	-.1188634E-03	140.218
13	-2.7191544	-.7202047E-04	220.138
15	-2.8561935	-.6222261E-05	304.593
17	-2.7410178	.7874110E-04	367.425
19	-2.3244495	.1722147E-03	363.128
21	-1.6148436	.2492806E-03	222.891
23	-.7353886	.2776317E-03	-178.087
25	.0000000	.5739043E-04	-1212.402

b) Listagens das Subrotinas

b.1) Subrotina GMRD

Esta subrotina gera a matriz dos coeficientes e dos termos independentes do sistema de equações (3.48). Seus parâmetros são os mesmos da subrotina GMRH.

```
***** DISCO: METOD * SUBC: 3 * ARG: CPA03 * 11/05/78 * 21F 47M 44S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001  FTA4
0002      SUBROUTINE GMRD(N,E,K,D,FM,GAMA,M)
0003  C
0004  C *** GERACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES E T.I
0005  C   DO ENSAIO DE AFERICAO - NOULLACAO DUAL
0006  C
0007      REAL F(73,73)
0008  C
0009  C *** CALCULO DAS CONSTANTES A,B
0010  C
0011      A=E*C**2/4./FM**2
0012      B=E*C**3/24./FM**2
0013  C
0014  C *** ZERAR MATRIZ F
0015  C
0016      DO 10 I=1,N
0017      DO 10 J=1,N
0018      10 F(I,J)=0.
0019  C
0020  C *** GERACAO DOS ELEMENTOS DE N*O POR LINHA
0021  C
0022      E2=2.*E
0023      E4=4.*E
0024      B12=12.*B
0025      A4=4.*A
0026      A4B12=A4+B12
0027  C
0028  C *** GERACAO DAS CLAS PRIMEIRAS LINHAS
0029  C
0030      F(1,1)=E2
0031      F(1,2)=-4.*B
0032      F(1,3)=E2
0033      F(2,1)=-4.*E
0034      F(2,2)=A4+10.*B
0035      F(2,3)=-E4
0036      F(2,4)=E2
0037  C
0038  C *** GERACAO DA LINHA 3 A LINHA N-2
0039  C
0040      KK=N-2
0041      DO 20 I=3,KK
0042      J=I-2
0043      F(I,J)=E2
0044      F(I,J+1)=-E4
0045      F(I,J+2)=A4B12
0046      F(I,J+3)=-E4
0047      20 F(I,J+4)=E2
0048  C
0049  C *** GERACAO DAS ULTIMAS DUAS LINHAS
0050  C
0051      I=N-1
0052      J=N-3
0053      F(I,J)=E2
0054      F(I,J+1)=-E4
0055      F(I,J+2)=A4B12
0056      F(I,J+3)=-E4
0057      I=I+1
0058      J=J+1
0059      F(I,J)=E2
0060      F(I,J+1)=-E4
0061      F(I,J+2)=A4B12
0062  C
0063  C *** GERACAO DOS TERMOS INDEPENDENTES
0064  C
0065      CTE=GAMA**3
0066      J=N+1
0067      F(1,J)=0.
0068      DO 30 I=2,N
0069      30 F(I,J)=(2.*I-3.)/2.*CTE
0070      RETURN
0071      END
0072      ENDS
```

b.2) *Subrotinas para a Geração das Matrizes Derivadas*

Cada subrotina a seguir listada gera a matriz derivada $[P_x]$ ou $[P_{xx}]$. Seus parâmetros são: N e P , onde N é o número de subdivisões da altura H do reservatório e P é a matriz derivada de ordem $N+1$.

c.5) *Subrotina PXC*

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_x]_c$.

c.6) *Subrotina PXXC*

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_{xx}]_c$.

c.7) *Subrotina PXD*

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_x]_d$.

c.8) *Subrotina PXXD*

Subrotina para gerar a matriz derivada $[P_{xx}]_d$.


```

***** DISCO: METCO2 * SUBC: 3 * ARG: LPA13 * 11/05/78 * 21- 51P 515 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FIN4
0002     SUBROUTINE PXC(N,P)
0003 C
0004 C *** GERACAO DA MATRIZ PA C
0005 C
0006     DIMENSION P(73,73)
0007 C
0008 C *** ZERAR A MATRIZ P
0009 C
0010     K=N+1
0011     DO 10 I=1,K
0012     DO 10 J=1,K
0013     10 P(I,J)=0.
0014 C
0015 C *** GERACAO DOS ELEMENTOS #0 POR COLUNA
0016 C
0017 C *** GERACAO DA COLUNA 1
0018     P(1,1)=-12.
0019     P(2,1)=-24.
0020     P(3,1)=-6.
0021 C *** GERACAO DAS COLUNAS 2 A N
0022     DO 20 J=2,N
0023     P(J-1,J)=-6.
0024     20 P(J+1,J)=6.
0025 C *** GERACAO DA COLUNA N+1
0026     P(N,K)=-4.
0027     RETURN
0028     END
0029     ENDS

```

***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

***** DISCO: METCO2 * SUBC: 3 * ARG: LPA14 * 11/05/78 * 21H 52P 25 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FIN4
0002     SUBROUTINE PXX(N,P)
0003 C
0004 C *** GERACAO DA MATRIZ PAX C
0005 C
0006     DIMENSION P(73,73)
0007 C
0008 C *** ZERAR A MATRIZ
0009 C
0010     K=N+1
0011     DO 10 I=1,K
0012     DO 10 J=1,K
0013     10 P(I,J)=0.
0014 C
0015 C *** GERACAO DOS ELEMENTOS #0 POR COLUNA
0016 C
0017 C *** GERACAO DA COLUNA 1
0018     P(1,1)=12.
0019     P(2,1)=-24.
0020     P(3,1)=12.
0021 C *** GERACAO DAS COLUNAS 2 A N
0022     DO 20 J=2,N
0023     P(J-1,J)=12.
0024     P(J,J)=-24.
0025     20 P(J+1,J)=12.
0026 C *** GERACAO DA COLUNA N+1
0027     P(N,K)=12.
0028     RETURN
0029     ENDS

```

***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

***** DISCO: METCO2 * SUBC: 3 * ARG: LPA15 * 11/05/78 * 21H 52P 135 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FIN4
0002     SUBROUTINE PXC(N,P)
0003 C
0004 C *** GERACAO DA MATRIZ PA D
0005 C
0006     DIMENSION P(73,73)
0007 C
0008 C *** ZERAR A MATRIZ P
0009 C
0010     K=N+1
0011     DO 10 I=1,K
0012     DO 10 J=1,K
0013     10 P(I,J)=0.

```

```

0014 C
0015 C *** GERACAC DOS ELEMENTOS P#0 POR COLUMNA
0016 C
0017 C *** GERACAC LAS COLUMNAS 1 E 2
0018 F(1,1)=-275.
0019 F(2,1)=1220.
0020 F(3,1)=-1220.
0021 F(4,1)=550.
0022 F(5,1)=-105.
0023 F(1,2)=-105.
0024 F(2,2)=-350.
0025 F(3,2)=220.
0026 F(4,2)=-210.
0027 F(5,2)=35.
0028 KK=N-1
0029 C *** GERACAC LAS COLUMNAS 3 A N-1
0030 DO 20 L=3, KK
0031 F(L-2, L)=35.
0032 F(L-1, L)=-220.
0033 F(L+1, L)=220.
0034 20 F(L+2, L)=-35.
0035 L=K-2
0036 C *** GERACAC LA COLUMNA N
0037 F(L-1, N)=20.
0038 F(L, N) =-252.
0039 F(N, N) =-70.
0040 C *** GERACAC LA COLUMNA N+1
0041 F(L, K) =14.
0042 F(N, K) =-140.
0043 RETURN
0044 END
0045 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

```

***** DISCO: METOC2 * SUBC: 3 * ANG: LPA16 * 11/05/78 * 211.52M 265 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTA4
0002 SUBROUTINE FXX(N,M)
0003 C
0004 C *** GERACAC DA MATRIZ FXX D
0005 C
0006 DIMENSION P(73,73)
0007 C
0008 C *** ZERAR A MATRIZ F
0009 C
0010 K=N+1
0011 DO 10 I=1,K
0012 DO 10 L=1,K
0013 10 F(I,L)=0.
0014 C
0015 C *** GERACAC DOS ELEMENTOS DE P#0 POR COLUMNA
0016 C
0017 C *** GERACAC LAS COLUMNAS 1 E 2
0018 F(1,1)=1225.
0019 F(2,1)=-3240.
0020 F(3,1)=3550.
0021 F(4,1)=-1500.
0022 F(5,1)=225.
0023 F(1,2)=305.
0024 F(2,2)=-700.
0025 F(3,2)=210.
0026 F(4,2)=140.
0027 F(5,2)=-35.
0028 KK=N-1
0029 C *** GERACAC LAS COLUMNAS 3 A N-1
0030 DO 20 L=3, KK
0031 F(L-2, L)=-35.
0032 F(L-1, L)=550.
0033 F(L, L) =-1050.
0034 F(L+1, L)=550.
0035 20 F(L+2, L)=-35.
0036 L=K-2
0037 C *** GERACAC LA COLUMNA N
0038 F(L-1, N)=-40.
0039 F(L, N) =508.
0040 F(N, N)=-1000.
0041 C *** GERACAC LA COLUMNA N+1
0042 F(L, K) =-56.
0043 F(N, K)=700.
0044 RETURN
0045 END
0046 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

6.3 - DOCUMENTAÇÃO DOS PROGRAMAS CALW, EARHW, EARDW, IMPW, CWLHA, CMXHA, CWLDU E CMXDU

6.3.1 - Programa CALW

Este programa calcula a solução analítica dos deslocamentos w em todos os pontos, ao longo da altura do reservatório, onde também serão posteriormente calculados por meio das discretizações com rede habitual e com rede dual. Os resultados são gravados em disco magnético no arquivo *ARQWA*, cujas características são:

número de registros = ao número máximo de subdivisões (N_{max}) desejado da altura H do reservatório.

comprimento do registro = $2.(N_{max}+1)$.

***** DISCO: YET002 * SUBC: 3 * ARG: CMA32 * 11/05/78 * 21- 52M 445 * PAG 1 *****

```

1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTN4.L
0002 PROGRAM CALA
0003 C
0004 C PROGRAMA PARA O CALCULO ANALITICO DOS DESLOCAMENTOS
0005 C RADIAIS * DO RESERVATORIO CILINDRICO CIRCULAR PERFE
0006 C ITAVENTE ENCASTADA NA BASE
0007 C
0008 INTENB CPNTB(128),TRBLF(640),NCTRB(2),ARGWA(3)
0009 DIMENSIOA *(145)
0010 DATA ARGWA/2*PI,2*PI*1MA/*NCTRB/1,1/
0011 SINP(X)=(EXP(X)-EXP(-X))/2.
0012 COSP(X)=(EXP(X)+EXP(-X))/2.
0013 CALL EXEC(24,1,CPNTB,128,TRBLF,NCTRB,5,IER)
0014 CALL TESTE(1)
0015 CALL EXEC(24,4,ARGWA,1,1,1978,1,IER)
0016 CALL TESTE(2)
0017 C
0018 C *** DADOS EM TONELADAS E MILIMETROS
0019 C
0020 R=12./3.141593*1.E4
0021 CL=0.1*3.141593/3.
0022 F=4.E4
0023 E=2.E
0024 C
0025 C *** CALCULO DAS CONSTANTES DA EXPR. ANAL. DO DESLOCAMENTO
0026 C
0027 ALFA=SQRT(3.)
0028 ALFA=SQRT(ALFA)/H/SQRT(CL)
0029 TETA=ALFA*F
0030 AM=SIN(TETA)*COSH(TETA)+COS(TETA)*SIN(TETA)-COS(TETA)*
0031 *COSH(TETA)
0032 B=CCS(TETA)*COSH(TETA)
0033 C=SIN(TETA)*COSH(TETA)+2.*CCS(TETA)*COSH(TETA)-COS(TETA)*
0034 *SIN(TETA)
0035 D=CCS(TETA)*SIN(TETA)-SIN(TETA)*COSH(TETA)
0036 A=2*CL*E*F
0037 E=E-C*TETA
0038 C=C*TETA-A*F
0039 F=F+E/CL*1.E-5
0040 100 READ(5,*)N
0041 IF(N.LE.0)GO TO 200
0042 N1=2*(N-1)-1
0043 CTE=F/(2.*N)
0044 X=-CTE
0045 C
0046 C *** CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
0047 C
0048 DO 10 I=1,N1
0049 X=X+CTE
0050 ALFAX=ALFA*X
0051 F1=EXP(-ALFAX)+EXP(-ALFAX)
0052 F2=B*SIN(ALFAX)+C*CCS(ALFAX)
0053 F3=2.*EXP(-ALFAX)*D*CCS(ALFAX)
0054 10 X(I)=-F*(X-(F1*F2-F3)/(2.*A*ALFA))
0055 C
0056 C *** G-AVACAO CCS * NC REGISTRO N=5 DO ARQUIVO ARGWA
0057 C
0058 NCP=N-E
0059 CALL EXEC(24,8,ARGWA,NCP,1,IER)
0060 CALL TESTE(1ER)
0061 WRITE(1,1)N
0062 1 FORMAT(1X'#G-AVCL * P/ N='13)
0063 GO TO 100
0064 200 END
0065 ENLS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

6.3.2 - Programa EARHW

Programa para o cálculo dos deslocamentos w segundo a discretização com rede habitual. Os resultados são gravados em disco magnético no arquivo *ARQWH*, cujas características são:

número de registros = ao número máximo de subdivisões (N_{max}) desejado da altura H do reservatório.

comprimento do registro = $N_{max}+1$.

```
***** DISCO: PETCO2 * SUBC: 3 * ARG: DPA06 * 11/05/78 * 23H 17M 53S * PAG 1 *****
-----1U-----2U-----3U-----4U-----5U-----6U-----7U-2-----8U
0001 FTA4.L
0002 PROGRAM EARHW
0003 C
0004 C *** ENSAIO DE AFENICAO - ONDULACAO HABITUAL
0005 C
0006 INTEGER CPNTE(128),IRBUF(640),NOTRB(2),ARQWH(3)
0007 DIMENSICA *(73),A(73,73)
0008 DATA A/CAR/2*AR,2*CR,1*H/1,NOTRB/1,1/
0009 CALL EXEC(24,1,OPNFB,128,TRBUF,NOTRB,5,IER)
0010 CALL TESTE(1)
0011 CALL EXEC(24,4,ARQWH,1,1,1979,1,IER)
0012 CALL TESTE(2)
0013 C
0014 C *** DADOS EM TONELADAS E MILIMETROS
0015 C
0016 C CR = K = CONSTANTE DE RIGIDEZ
0017 C N = NUMERO DE SUBDIV. DA ALT. H DO RESERVATORIO
0018 C E = MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO
0019 C C = COEF. DE PROPORCIONALIDADE P/ O CALC. DA
0020 C ESPESURA DA PAREDE DO RESERVATORIO
0021 C F = ALTEZA DO RESERVATORIO
0022 C GAMA = VISC. ESPECIFICO DO LIQUIDO
0023 C R = RAIO DE CURVATURA DO RESERVATORIO
0024 C U = ESPESURA DA PAREDE DO RESERVATORIO
0025 C W = DESLOCAMENTO
0026 C
0027 E=2.5
0028 CA=0.1
0029 F=4.E4
0030 GAMA=1.E-9
0031 H=12./3.141593*1.E4
0032 C=CA*3.141593/3.
0033 U=C*H
0034 CH=E*U**3/12.
0035 200 READ(5,*)N
0036 IF(N.EQ.0)GO TO 100
0037 FM=F/N
0038 NRCH=N-5
0039 C
0040 C *** CALCULO DOS DESLOCAMENTOS W
0041 C
0042 CALL GMM(N,E,R,U,FM,GAMA,A)
0043 CALL GMMIS(N,A)
0044 K=N+1
0045 DO 10 I=1,N
0046 10 W(I)=A(1,K)
0047 W(K)=0.
0048 C
0049 C *** GRAVACAO DOS W NO REG=NRCH DO ARQUIVO ARQWH
0050 C
0051 CALL EXEC(24,8,ARQWH,NRCH,W,IER)
0052 CALL TESTE(3)
0053 WRITE(1,1)N
0054 1 FORMAT('GRAVCO REG="13')
0055 GO TO 200
0056 100 END
0057 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

6.3.3 - Programa EARDW

Programa para o cálculo dos deslocamentos w segundo a discretização com rede dual. Os resultados são gravados em disco magnético no arquivo *ARQWD*, cujas características são as mesmas que as do arquivo *ARQWH*.

```
***** DISCO: METCO2 * SUBC: 3 * ANO: CPA04 * 11/05/78 * 23H 17M 34S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTN4
0002 PROGRAM EARDW
0003 C
0004 C *** ENSAIO DE AFERICAO - DISCRETIZACAO COM REDE DUAL
0005 C
0006 INTEGER OPATH(128),TRBUF(640),NUTHB(2),ARGWD(3)
0007 DIMENSION N(73),A(73,73)
0008 DATA ARGWD/2*H,2*H,1*H/,ACTHB/1,1/
0009 CALL EXEC(24,1,CPATH,128,TRBUF,NUTHB,5,IER)
0010 CALL TESTE(1)
0011 CALL EXEC(24,4,ARGWD,1,1,1*H,1,IER)
0012 CALL TESTE(2)
0013 C
0014 C *** DADOS EM IGRELAUS E MILIMETROS
0015 C
0016 C CM = K = CONSTANCE DE RIGIDEZ
0017 C N = NUMERO DE SUBDIV. DA ALT. H DO RESERVATORIO
0018 C E = MODULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO
0019 C C = COEF. DE PROPORCIONALIDADE P/ O CALC. DA
0020 C ESPESURA DA PAREDE DO RESERVATORIO
0021 C F = ALTEZA DO RESERVATORIO
0022 C GAMA = PESO ESPECIFICO DO LIQUIDO
0023 C R = RAIO DE CURVATURA DO RESERVATORIO
0024 C C = ESPESURA DA PAREDE DO RESERVATORIO
0025 C W = DESLOCAMENTO
0026 C
0027 E = 2.5
0028 CA = 0.1
0029 F = 4.E4
0030 GAMA = 1.E-5
0031 R = 12./3.141593*1.E4
0032 C = CA*3.141593/3.
0033 U = C*R
0034 CM = E*U**3/12.
0035 200 HEAD(5,*)N
0036 IF(N.EG.0)GO TO 100
0037 FX = F/N
0038 NROR=N-5
0039 C
0040 C *** CALCULO DOS DESLOCAMENTOS
0041 C
0042 CALL GPRD(N,E,R,D,CM,GAMA,A)
0043 CALL GCRIS(N,A)
0044 K=N+1
0045 CC TO 1=1,N
0046 10 W(1)=A(I,K)
0047 W(K)=0.
0048 C
0049 C *** GRAVACAO DOS W NO REG=NROR DO ARQUIVO ARGWD
0050 C
0051 CALL EXEC(24,8,ARGWD,NROR,W,IER)
0052 CALL TESTE(3)
0053 WRITE(I,1)N
0054 1 FC=PAI("GRAVADO REG="13)
0055 GO TO 200
0056 100 END
0057 END
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

6.3.4 - Programa IMPW

Programa desenvolvido para imprimir os conteúdos dos arquivos ARQWA, ARQWH e ARQWD na forma de tabelas apresentadas no item 3.5 (tabelas dos deslocamentos).

```

***** DISCO: METU02 * SLBC: 3 * ARG: LPA33 * 11/05/78 * 23H IBM 115 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTA4,L
0002 PROGRAM IMPW
0003 C
0004 C *** PROGRAMA PARA IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS W
0005 C
0006 INTEGE= CPNTB(12B),TRBUE(64U),NOTRB(2),ARQWA(3),ARQWH(3),ARQWD(3)
0007 DIMENSIO WA(14B),WH(7J),WD(7J)
0008 DATA NOTRB/1,1/
0009 DATA WA/2MAH,2MHW,1MA/
0010 DATA WH/2MAH,2MHW,1MH/
0011 DATA WD/2MAH,2MHW,1MD/
0012 C
0013 C *** DEFINICAO E ABERTURA DOS ARQUIVOS ARQWA, ARQWH E ARQWD
0014 C
0015 CALL EXEC(24,1,OPNTB,12B,TRBUE,NOTRB,5,IER)
0016 CALL TESTE(1)
0017 CALL EXEC(24,4,ARQWA,1,1,1978,1,IER)
0018 CALL TESTE(2)
0019 CALL EXEC(24,4,ARQWH,1,1,1979,1,IER)
0020 CALL TESTE(3)
0021 CALL EXEC(24,4,ARQWD,1,1,1980,1,IER)
0022 CALL TESTE(4)
0023 READ(5,*)NLP
0024 GO TO 100
0025 IF (N.LC.0)GO TO 200
0026 NCR=N-3
0027 C
0028 C *** LEITURA DOS WA, WH E WD
0029 C
0030 WA = DESLOCAMENTOS EXATOS
0031 WH = DESLOCAMENTOS APROXIMADOS COM REDE HABITUAL
0032 WD = DESLOCAMENTOS APROXIMADOS COM REDE DUAL
0033 C
0034 CALL EXEC(24,5,ARQWA,NCR,WA,IER)
0035 CALL TESTE(5)
0036 CALL EXEC(24,6,ARQWH,NCR,WH,IER)
0037 CALL TESTE(6)
0038 CALL EXEC(24,6,ARQWD,NCR,WD,IER)
0039 CALL TESTE(7)
0040 NV=0
0041 IA=-1
0042 IP=1
0043 CALL CABEC(N,NV)
0044 WRITE(6,1)IP,WD(1)
0045 1 FORMAT(15,F46.7)
0046 C
0047 C *** IMPRESSAO DOS WA, WH E WD
0048 C
0049 GO TO 101=N
0050 IA=IA+2
0051 IP=IP+1
0052 IF (IA.GT.NV*NLP)CALL CABEC(N,NV)
0053 WRITE(6,2)IP,WA(IA),WH(1)
0054 2 FORMAT(15,1A,2F15.7)
0055 IP=IP+1
0056 10 WRITE(6,3)IP,WA(IA+1),WD(1+1)
0057 3 FORMAT(15,1A,2F15.7)
0058 IP=IP+1
0059 WRITE(6,2)IP,WA(IA+2),WH(1)
0060 GO TO 100

```

```

0061 200 END
0062 C
0063 C *** SELECÇÃO PARA IMPRESSÃO DO CABEÇALHO
0064 C
0065 SUBROUTINE CABEC(N,NV)
0066 C --- POSICIONAMENTO DE PAGINA NOVA
0067 CALL EXEC(1,1106B,02)
0068 CALL EXEC(3,1106B,03)
0069 C --- IMPRESSÃO DO CABEÇALHO
0070 WRITE(6,1)A
0071 1 FORMAT(' ENSAIO DE APLICAÇÃO PARA N="I3)
0072 WRITE(6,2)
0073 2 FORMAT(/" PCNTC"14#"DESLOCAMENTOS RADIAIS M"/
0074 *12X"ANALITICO"/7X"HABITUAL"8X"DUAL")
0075 NV=NV+1
0076 END
0077 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

6.3.5 - Programa CWLHA

Programa para calcular as rotações ψ do reservatório padrão ao longo de sua altura, segundo a solução analítica e as quatro aproximações de cálculo com rede habitual. Os resultados são impressos em forma de tabelas conforme estão apresentados no item 3.5.

```

***** DISCO: METL02 * SUBC: 3 * ANG: LPA35 * 11/05/78 * 21F 53P 27S * PAG 1 *****
-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FINA=L
0002 PROGRAM CWLHA
0003 C
0004 C *** PROGRAMA PARA O CALCULO DAS ROTACOES DO RESERVATORIO
0005 C CILINDRICO CIRCULAR PERFEITAMENTE ENGASTADO NA BASE
0006 C NOS PONTOS ESTABELECIDOS PELA REDE HABITUAL
0007 C
0008 INTEGER CPNTC(120),THRU(640),NCTRB(2),ANGW(3)
0009 DIMENSION AL(73),ALAF(73),ALBET(73),WLGAM(73),WLUEL(73)
0010 DIMENSION W(73),PA(73,73)
0011 DATA A=GM/2*PI,2*GM,1*PI/,NCTRB/1,1/
0012 SIN(X)=(EXP(X)-EXP(-X))/2.
0013 COSH(X)=(EXP(X)+EXP(-X))/2.
0014 CALL EXEC(24,1,CPNTC,128,THRU,NCTRB,5,IER)
0015 CALL TESTE(1)
0016 CALL EXEC(24,4,ANGW,1,1,179,1,IER)
0017 CALL TESTE(2)
0018 C
0019 C *** CAUCS EM TONELADAS E MILIMETROS
0020 C
0021 R=12./3.141593*1.E9
0022 CL=0.1*3.141593/3.
0023 F=4.E-
0024 E=2.5
0025 C
0026 C *** CALCULO DAS CONSTANTES DA EXPR. ANAL. DA ROTACAO
0027 C
0028 ALFA=SQRT(3.)
0029 ALFA=SQRT(ALFA)/F/SQRT(CL)
0030 TETA=ALFA*F
0031 AM=SIN(TETA)*COSH(TETA)+COS(TETA)*SINH(TETA)-COS(TETA)*
0032 *COSH(TETA)
0033 C=COSH(TETA)*COSH(TETA)
0034 C=SIN(TETA)*COSH(TETA)+2.*COS(TETA)*COSH(TETA)-COS(TETA)*
0035 *SINH(TETA)
0036 U=COS(TETA)*SIN(TETA)-SIN(TETA)*COSH(TETA)
0037 A=AM*U-B*C
0038 B=B-U*TETA
0039 C=C*TETA-AM
0040 F=F/E/CL*1.E-9
0041 C
0042 C ALFA = NO DE LINHAS A SEREM IMPRESSAS POR PAGINA
0043 C N = NO DE SUBDIVISOES DA ALTURA H DO RESERVATORIO
0044 C

```



```
0045 READ(5,*)ALF
0046 . 100 READ(5,*)N
0047 IF(N.LE.0)GC TO 200
0048 C
0049 C *** CALCULO ANALITICO DAS ROTACÕES *
0050 C
0051 FM=F/N
0052 N1=N+1
0053 X=-FM
0054 DC 10 I=1,N1
0055 X=X+FM
0056 ALFAX=ALFA*X
0057 F1=EXP(ALFAX)+EXP(-ALFAX)
0058 F2=C*SIN(ALFAX)+L*CCS(ALFAX)
0059 F3=2.*EXP(-ALFAX)*C*CCS(ALFAX)
0060 10 WL(I)=-F*(1.+1./2./A*(PI*(1-C)*SIN(ALFAX)+(B+C)*
0061 *CCS(ALFAX))+2.*EXP(-ALFAX)*(C-C)*CCS(ALFAX))
0062 C
0063 C *** CALCULO APROXIMADOS DAS ROTACÕES (CALCULOS DISCRETIZADOS
0064 C CCM REDE FABITUAL)
0065 C
0066 NCR=N-5
0067 CALL EXEC(24,B,ARGH,NCRH,WF,IER)
0068 CALL TESTE(3)
0069 C
0070 C *** APROXIMACAO ALFA
0071 C
0072 CTE=0.5/FM
0073 CALL FAX(N,FX,0)
0074 CALL MLT(N1,CTE,WF,FX,MLALF)
0075 C
0076 C ** APROXIMACAO BETA
0077 C
0078 CTE=1./12./FM
0079 CALL FAX(N,FX,0)
0080 CALL MLT(N1,CTE,WF,FX,MLBET)
0081 C
0082 C *** APROXIMACAO GAMA
0083 C
0084 CTE=0.5/FM
0085 CALL FAX(N,FX,1)
0086 CALL MLT(N1,CTE,WF,FX,MLGAM)
0087 C
0088 C *** APROXIMACAO DELTA
0089 C
0090 CTE=1./36./FM
0091 CALL FAX(N,FX,1)
0092 CALL MLT(N1,CTE,WF,FX,MLDEL)
0093 C
0094 C *** IMPRESSAO DOS RESULTADOS
0095 C
0096 NV=0
0097 NF=0
0098 DC 20 I=1,N1
0099 NF=NF+2
0100 IF(I.GE.NV*NLFC)CALL CABEC(N,NV)
0101 20 WRITE(6,1)NF,AL(I),MLALF(I),MLBET(I),MLGAM(I),MLDEL(I)
0102 1 FORMAT(15,2E16,/)
0103 GC TO 100
0104 200 ENC
0105 C
0106 C *** SUBROTINA DE IMPRESSAO DO CABECALHO
0107 C
0108 SUBROUTINE CABEC(N,NV)
0109 C --- POSICIONAMENTO DE PAGINA NOVA
0110 CALL EXEC(13,11000,62)
0111 CALL EXEC(13,11000,63)
0112 C --- IMPRESSAO DO CABECALHO
0113 WRITE(6,1)N
0114 1 FORMAT(" ENSAIO DE APLICACAO PARA N="I3" - REDE FABITUAL")
0115 WRITE(6,2)
0116 2. FORMAT(/" FONTO"21A" O T A C C E S W"/
0117 *10A"ANALITICO"6X"APROX. ALFA"5A"APROX. BETA"5X"APROX. GAMA"
0118 *4X"APROX. DELTA")
0119 NV=NV+1
0120 ENC
0121 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

6.3.6 - Programa CMXHA

Programa para calcular os momentos M_x do reservatório padrão ao longo de sua altura, segundo a solução analítica e as quatro aproximações de cálculo com rede habitual. Os resultados são impressos na forma apresentada no item 3.5.

```

***** DISCO: METU2 * SLBC: 3 * ANO: LPA36 * 11/05/78 * 21h 54m 75 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTA4,L
0002 PROGRAM CMXHA
0003 C
0004 C *** PROGRAMA PARA O CALCULO DOS MOMENTOS MX DO RESERVATORIO
0005 C CILINDRICO CIRCULAR PERFEITAMENTE ENGASTADO NA BASE
0006 C NOS PONTOS ESTABELECIDOS PELA REDE HABITUAL
0007 C
0008 INTEGER CPATH(128),IRBUF(640),NOTRB(2),ANGWM(3)
0009 REAL *X(73),*XALF(73),*XDET(73),*XGAM(73),*XDEL(73)
0010 DIMENSION *H(73),*PAX(73,73)
0011 DATA ANGLP/2*PI,ANGW,IPF/,NOTRB/1,1/
0012 SIN(*X)=(EXP(*X)-EXP(-*X))/2.
0013 COS(*X)=(EXP(*X)+EXP(-*X))/2.
0014 CALL EXEC(2,1,CPATH,128,IRBUF,NOTRB,5,IER)
0015 CALL TESTE(1)
0016 CALL EXEC(2,4,ANGWM,1,1,1979,1,IER)
0017 CALL TESTE(2)
0018 C
0019 C *** DADOS EM TONELADAS E MILIMETROS
0020 C
0021 R=12./3.141593*1.E4
0022 CL=0.1*3.141593/3.
0023 F=4.E4
0024 E=2.5
0025 C
0026 C *** CALCULO DAS CONSTANTES DA EXPR. ANAL. DO MOMENTO
0027 C
0028 ALFA=SGHT(3.)
0029 ALFA=SGHT(ALFA)/R/SGHT(CL)
0030 TETA=ALFA*H
0031 CT=5*CL**3*H**3/12.
0032 AM=SIN(TETA)*COSH(TETA)+COS(TETA)*SIN(TETA)-COS(TETA)*
0033 *COS(TETA)
0034 B=CCS(TETA)*COSH(TETA)
0035 C=SIN(TETA)*COSH(TETA)+2.*COS(TETA)*COSH(TETA)-COS(TETA)*
0036 *SIN(TETA)
0037 D=CCS(TETA)*SIN(TETA)-SIN(TETA)*COSH(TETA)
0038 A=2.*L=2*CL
0039 B=-D*TETA
0040 C=C*TET--AM
0041 F=H/E/CL*1.E-9
0042 C
0043 C ALF = N° DE LINHAS A SEREM IMPRESSAS POR PAGINA
0044 C N = N° DE SUBDIVISÕES DA ALTURA DO RESERVATORIO
0045 C
0046 READ(5,*)ALF
0047 100 READ(5,*)N
0048 IF (N.LE.0)GO TO 200
0049 C
0050 C *** CALCULO ANALITICO DO MX
0051 C
0052 FM=F/A
0053 X=-FM
0054 NI=N+1
0055 DO 10 I=1,NI
0056 X=X+FM
0057 ALFAX=ALFA*X
0058 F1=1-1/ALFAX+EXP(-ALFAX)
0059 F2=F*SIN(ALFAX)+C*COS(ALFAX)
0060 F3=2.*EXP(-ALFAX)*B*COS(ALFAX)

```

```
0061      10 PA(1)=-LTA*P*ALFA/AP*((EXP(ALFAX)-EXP(-ALFAX))*
0062      *(-COS(ALFAX)-C*SIN(ALFAX))-2.*EXP(-ALFAX)*C*SIN(ALFAX))
0063      C
0064      C *** CALCULOS APROXIMADOS DOS MOMENTOS (CALCULOS DISCRETIZADOS
0065      C CC= HEDE HABITUAL)
0066      C
0067      MZ=PM**M
0068      NCR=NT-E
0069      CALL EXEC(2,*,*,ANGM,NCR,*,*,IER)
0070      CALL TESTE(3)
0071      C
0072      C *** APROXIMACAO ALFA
0073      C
0074      CTE=CTA/PMZ
0075      CALL PAAB(N,PAX,0)
0076      CALL MULT(N1,CTE,*,*,PAX,MXALF)
0077      C
0078      C *** APROXIMACAO BETA
0079      C
0080      CTE=CTA/12./PMZ
0081      CALL PAAB(N,PAX,0)
0082      CALL MULT(N1,CTE,*,*,PAX,MXBET)
0083      C
0084      C *** APROXIMACAO GAMA
0085      C
0086      CTE=CTA/PMZ
0087      CALL PAAB(N,PAX,1)
0088      CALL MULT(N1,CTE,*,*,PAX,MXGAM)
0089      C
0090      C *** APROXIMACAO DELTA
0091      C
0092      CTE=CTA/36./PMZ
0093      CALL PAAB(N,PAX,1)
0094      CALL MULT(N1,CTE,*,*,PAX,MXDEL)
0095      C
0096      C *** IMPRESSAO DOS RESULTADOS
0097      C
0098      NV=0
0099      NPB=0
0100      CC 20 I=1,N1
0101      NPB=N*CC
0102      IF(I.GE.NV*ALF)CALL CABEC(N,NV)
0103      20 *-ITE(I-1)*AP*PAX(I)*MXALF(I)*MXBET(I)*MXGAM(I)*MXDEL(I)
0104      1 FC=AP*(1E-5F12.3)
0105      GO TO 100
0106      200 END
0107      C
0108      C *** SUBROTINA PARA IMPRESSAO DO CABECALHO
0109      C
0110      SUBROUTINE CABEC(N,NV)
0111      C --- POSICIONAMENTO DE PAGINA NOVA
0112      CALL EXEC(13,11068,02)
0113      CALL EXEC(13,11068,03)
0114      C --- IMPRESSAO DO CABECALHO
0115      *-ITE(0-1)X
0116      1 FORMAT(' ENSAIO DE AFERICAC PARA N="I3" - HEDE HABITUAL')
0117      *-ITE(0-2)
0118      2 FORMAT(' FCNTCHISA'X' C P E R T U      PAX'
0119      *'XANALITIC'X'5X'AP.ALFA'5X'AP.BETA'5X'AP.GAMA'4X'AP.DELTA')
0120      NV=NV+1
0121      ENL
0122      ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

6.3.7 - Programa CWLDU

Análogo ao *CWLHA*, agora as aproximações são com re de dual.

```

***** DISCO: METCO2 * SLBO: 3 * ARG: DPA3E * 11/05/78 * 21F 55F 285 * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTN4,L
0002 PROGRAM CWLDU
0003 C
0004 C *** PROGRAMA PARA O CALCULO DAS NOTACCES DO RESENVATCHIC
0005 C CILINDRICO CIRCULAR PERFEITAMENTE ENGASTADO NA BASE
0006 C ACS PONTOS ESTABELECIDOS PELA MEDE LUAL
0007 C
0008 INTEGER CPNTB(128),THBUF(640),NCTHB(2),ANGLWD(3)
0009 DIMENSION NL(73),WLA(73),WLB(73),WLC(73),WLD(73)
0010 DIMENSION WC(73),PX(73,73)
0011 DATA ANGLW/27.44,28.00,1.00,NCTHB/1,1/
0012 SIN(X)=(EXP(X)-EXP(-X))/2.
0013 COS(X)=(EXP(X)+EXP(-X))/2.
0014 CALL EXEC(2,1,CPNTB,128,THBUF,NCTHB,S,IEH)
0015 CALL TESTE(1)
0016 CALL EXEC(2,4,ANGLWD,1,1,19.00,1,IEH)
0017 CALL TESTE(2)
0018 C
0019 C *** CADCS EM TONELADAS E MILIMETROS
0020 C
0021 F=12./3.141593*1.E4
0022 CL=0.1*3.141593/3.
0023 F=4.E4
0024 E=2.5
0025 C
0026 C *** CALCULO DAS CONSTANTES DA EXPR. ANAL. DA NOTACAO
0027 C
0028 ALFA=SGRT(3.)
0029 ALFA=SGRT(ALFA)/N/SGRT(CL)
0030 TETA=ALFA*F
0031 AM=SIN(TETA)*CCSH(TETA)+COS(TETA)*SIN(TETA)-COS(TETA)*
0032 *CCSH(TETA)
0033 B=CCS(TETA)*CCSH(TETA)
0034 C=SIN(TETA)*CCSH(TETA)+2.*COS(TETA)*CCSH(TETA)-CCS(TETA)*
0035 *SIN(TETA)
0036 D=CCS(TETA)*SIN(TETA)-SIN(TETA)*CCSH(TETA)
0037 A=AM*D-B*C
0038 E=-D*TETA
0039 C=C*TETA-AM
0040 F=L/E/CL*1.E-9
0041 C
0042 C ALF= ANG DE LINHAS A SEREM IMPRESSAS POR PAGINA
0043 C N = ANG DE SECLIVISUES DA ALTURA H DO RESENVATCHIC
0044 C
0045 HEAD(5,*)ALF
0046 100 HEAD(5,*)N
0047 IF(N.LE.0)GO TO 200
0048 C
0049 C *** CALCULO ANALITICO DAS NOTACCES W*
0050 C
0051 FM=F/N
0052 N1=N+1
0053 X=-FM/2.
0054 DO 10 I=1,N
0055 X=X+FM
0056 ALFAX=ALFA*X
0057 F1=EXP(ALFAX)+EXP(-ALFAX)
0058 F2=2.*SIN(ALFAX)+C*CCS(ALFAX)
0059 F3=2.*EXP(-ALFAX)*B*COS(ALFAX)
0060 10 WL(I)=-F*(1.+1./2./A*(PI*(1E-C)*SIN(ALFAX)+(B+C)*

```

```

0061      *CCS(ALFAX))+2.*EXP(-ALFAX)*(E-C)*CUS(ALFAX))
0062 C
0063 C *** CALCULUS APROXIMADOS DAS RETACUES (CALCULUS DISCRETIZADOS
0064 C     COM REDE LOCAL)
0065 C
0066      NRCH=1-5
0067      CALL EXEC(24,c,ANGU,D,ANCH,NL,IER)
0068      CALL TESTE(3)
0069 C
0070 C *** APROXIMACAO A
0071 C
0072      CTE=0.5/PM
0073      CALL PAAG(N,PA,U)
0074      CALL PULT(N1,CTE,nD,PA,nLA)
0075 C
0076 C *** APROXIMACAO B
0077 C
0078      CTE=1./12./PM
0079      CALL PAAG(N,PA,U)
0080      CALL PULT(N1,CTE,nD,PA,nLB)
0081 C
0082 C *** APROXIMACAO C
0083 C
0084      CTE=1./12./PM
0085      CALL PAC(N,PA)
0086      CALL PULT(N1,CTE,nD,PA,nLC)
0087 C
0088 C *** APROXIMACAO D
0089 C
0090      CTE=1./420./PM
0091      CALL PAAG(N,PA)
0092      CALL PULT(N1,CTE,nD,PA,nLD)
0093 C
0094 C *** IMPRESSAO DOS RESULTADOS
0095 C
0096      NV=0
0097      NP=1
0098      CALL CABEC(N,NV)
0099      WRITE(6,2)NP,nLA(1),nLB(1),nLC(1),nLD(1)
0100      2 FORMAT(15,1e7,4E16,/)
0101      DO 20 I=2,N1
0102      NP=NP+1
0103      IF(1.GE.NV*NLF)CALL CABEC(N,NV)
0104      20 WRITE(6,1)NP,nL(I-1),nLA(I),nLB(I),nLC(I),nLD(I)
0105      1 FORMAT(15,5E16,/)
0106      GO TO 100
0107      200 END
0108 C
0109 C *** SUBROTINA DE IMPRESSAO DO CABECALHO
0110 C
0111      SUBROUTINE CABEC(N,NV)
0112 C --- POSICIONAMENTO DE PAGINA NOVA
0113      CALL EXEC(13,1106,02)
0114      CALL EXEC(13,1106,03)
0115 C --- IMPRESSAO DO CABECALHO
0116      WRITE(6,1)N
0117      1 FORMAT(" ENSAIO DE APLICACAO PARA N="I3" - REDE LOCAL")
0118      WRITE(6,2)
0119      2 FORMAT(10"CONTINUAÇÃO DE T A C C E S      "10)
0120      *IX"ANALITICO"AX"APHX, A"BX"APHX, B"BX"APHX, C"
0121      *BX"APHX, D")
0122      NV=NV+1
0123      END
0124      ENCL

```

***** LISTAGEM TERMINADA *****

6.3.8 - Programa CMXDU

Análogo ao *CMXHA*, agora as aproximações são com re de dual.

```
***** DISCO: PETOL2 * SUBC: 3 * ARG: CMAJ1 * 11/05/78 * 21F 54M 47S * PAG 1 *****
-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTA4,L
0002 PRCCPRM CMXDU
0003 C
0004 C *** PROGRAMA PARA O CALCULO DOS MOMENTOS MX DO RESERVATORIO
0005 C CILINDRICO CIRCULAR PERFEITAMENTE ENGASTADO NA BASE
0006 C NOS PONTOS ESTABELECIDOS PELA REDE DUAL
0007 C
0008 INTEGR= CPNTB(128)*TRMBF(640)*NCTHB(2)*ARGWD(3)
0009 REAL PA(73),PXA(73),PXB(73),PXC(73),PXO(73)
0010 DIMENSION =D(73),PXX(73,73)
0011 DATA A=AL/2*PAH,2*RGW,INH/2,NCTHB/1,1/
0012 SINH(X)=(EXP(X)-EXP(-X))/2.
0013 COSH(X)=(EXP(X)+EXP(-X))/2.
0014 CALL EX=C(2,1,CPNTB,128,TRMBF,NCTHB,5,IER)
0015 CALL TESTE(1)
0016 CALL EX=C(2,4,ARGWD,1,1,1980,1,IER)
0017 CALL TESTE(2)
0018 C
0019 C *** CALCS EM TLAELAGAS E MILIMETROS
0020 C
0021 H=12./3.141593*1.24
0022 CL=0.1*3.141593/3.
0023 H=4.E+
0024 E=2.5
0025 C
0026 C *** CALCULO DAS CONSTANTES DA EXPR. ANAL. DO MOMENTO
0027 C
0028 ALFA=SQ-T(3.)
0029 ALFA=SQ-T(ALFA)/H/SGRT(CL)
0030 TETA=ALFA**
0031 CTX=EXP(2*3*H**3/12.
0032 AM=SIN(TETA)*COSH(TETA)+COS(TETA)*SINH(TETA)-COS(TETA)*
0033 *COSH(TETA)
0034 E=COS(TETA)*COSH(TETA)
0035 C=SIN(TETA)*COSH(TETA)+2.*COS(TETA)*COSH(TETA)-COS(TETA)*
0036 *SINH(TETA)
0037 L=COS(TETA)*SINH(TETA)-SIN(TETA)*COSH(TETA)
0038 A=AL*E**C
0039 B=H*L*TETA
0040 C=C*TETA**
0041 F=B/E/CL*1.E-9
0042 C
0043 C ALF= N-0 DE LINHAS A SEREM IMPRESSAS POR PAGINA
0044 C N = N-0 DE SUBDIVISOES DA ALTURA H DO RESERVATORIO
0045 C
0046 READ(5,*)ALF
0047 100 READ(5,*)N
0048 IF(N.LE.0)GO TO 200
0049 C
0050 C *** CALCULO ANALITICO DO MX
0051 C
0052 FV=F/A
0053 X=-FV/C.
0054 A1=X+1
0055 GO TO I=1,A
0056 XXX=FV
0057 ALFAX=ALFA*X
0058 F1=EXP(-ALFAX)+EXP(-ALFAX)
0059 F2=C*SIN(ALFAX)+C*COS(ALFAX)
0060 F3=2.*EXP(-ALFAX)*H*CGS(ALFAX)
```

```

0061      10 *X(I)=-CTK*ALFA/A*((EXP(ALFAX)-EXP(-ALFAX))*
0062      *COS(ALFAX)-C*SIN(ALFAX))-2.*EXP(-ALFAX)*E*SIN(ALFAX))
0063      C
0064      C *** CALCULOS APROXIMADOS DOS MOMENTOS (CALCULOS DISCRETIZADOS
0065      C      CCM FEDE DLAL)
0066      C
0067      H*2=H*PM
0068      N*CH=N*-S
0069      CALL EXEC(2*H*6,ARGND,N*CH,W*CIEN)
0070      CALL T*STE(3)
0071      C
0072      C *** APROXIMACAO A
0073      C
0074      CTE=CTK/H*2
0075      CALL P*XXAG(N,P*XX,0)
0076      CALL M*LT(N,CTE,W*U,P*XX,P*XA)
0077      C
0078      C *** APROXIMACAO B
0079      C
0080      CTE=CTK/12./H*2
0081      CALL P*XXEL(N,P*XX,0)
0082      CALL M*LT(N,CTE,W*U,P*XX,P*XB)
0083      C
0084      C *** APROXIMACAO C
0085      C
0086      CTE=CTK/12./H*2
0087      CALL P*XXAC(N,P*XX)
0088      CALL M*LT(N,CTE,W*U,P*XX,P*XC)
0089      C
0090      C *** APROXIMACAO D
0091      C
0092      CTE=CTK/420./H*2
0093      CALL P*XXAD(N,P*XX)
0094      CALL M*LT(N,CTE,W*U,P*XX,P*XU)
0095      C
0096      C *** IMPRESSAO DOS RESULTADOS
0097      C
0098      NV=0
0099      NF=1
0100      CALL CABEC(N,NV)
0101      *WRITE(C*2)NF,P*XA(1),P*XB(1),P*XC(1),P*XU(1)
0102      2 FC*FMT(15,12A,4F12.3)
0103      DC 20 I=2,N1
0104      NF=NF+2
0105      IF(I.GE.NV*ALP)CALL CABEC(N,NV)
0106      20 *WRITE(C*1)NF,P*XA(I-1),P*XB(I-1),P*XC(I-1),P*XU(I-1)
0107      1 FC*FMT(15,5F12.3)
0108      DC TC 100
0109      200 ENC
0110      C
0111      C *** SELECÇÃO PARA IMPRESSAO DO CABECALHO
0112      C
0113      SUP*CLINE CABEC(N,NV)
0114      C --- POSICIONAMENTO DE PAGINA NOVA
0115      CALL EXEC(3,11060*02)
0116      CALL EXEC(3,11060*03)
0117      C --- IMPRESSAO DO CABECALHO
0118      *WRITE(C*1)N
0119      1 FC*FMT(15)ENSAIO DE APLICACAO PARA N="13" - FEDE DLAL)
0120      *WRITE(C*2)
0121      2 FC*FMT(15)PCATC"15X"U P E R T O P*XA"/
0122      *EX"AN"=1111C"5X"AP*ROX.A"5X"AP*ROX.B"5X"AP*ROX.C"5X"AP*ROX.D")
0123      NV=NV+1
0124      ENC
0125      ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

6.4 - DOCUMENTAÇÃO DOS PROGRAMAS GERA, CALWV, LISTE E ESFR0

6.4.1 - Programa GERA

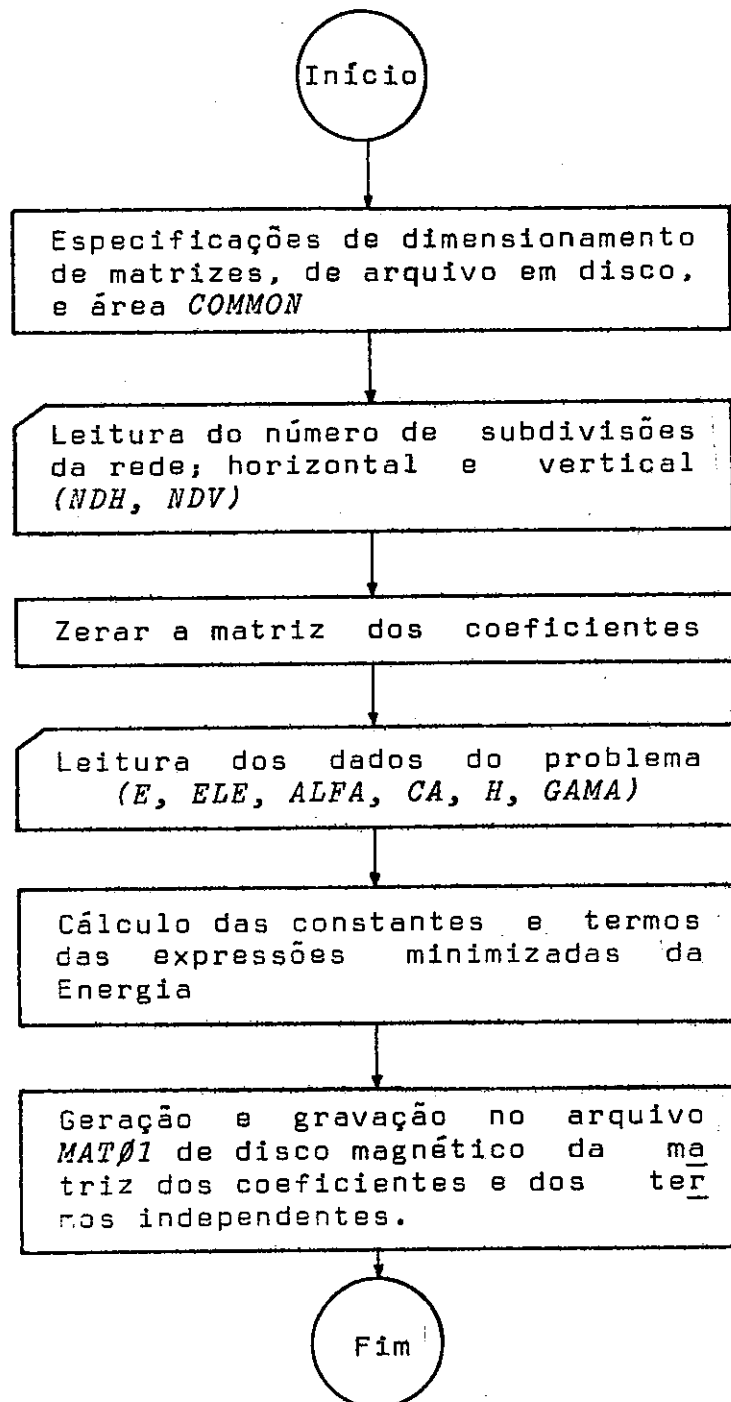
Este programa gera a matriz dos coeficientes e dos termos independentes do sistema de equações minimizantes e as grava em $N+1$ registros (cada um podendo conter uma linha da matriz) do arquivo *MATØ1*, de disco magnético, onde N é a ordem do sistema de equações. Com isso, as características do arquivo *MATØ1* são:

número de registros = máxima ordem do sistema de equações minimizantes admitida (e possível, mais um).

comprimento do registro = 2.(número de malhas da rede na direção $y-1$).

Para a geração dessas matrizes, do item 4.3.3, tem-se que elas provêm da minimização das diversas parcelas de energia I_k em relação aos deslocamentos $w_{i,j}$ e $v_{i,p}$. Diante disto e objetivando facilitar a programação e principalmente a sua verificação (programação estruturada) da geração da matriz dos coeficientes e dos termos independentes, em vez de partir do sistema padrão montado, como se fez nos Ensaios de Aferição, programaram-se as suas montagens. Isto é, programaram-se as oito parcelas de energia minimizadas na forma de oito subrotinas, a saber: *I1*, *I2*, *I3*, *I4*, *I5*, *I6*, *I7* e *INDEP*, de modo que após suas execuções obtêm-se essas matrizes gravadas em disco magnético no arquivo denominado de *MATØ1*.

a) Diagrama de Blocos



b) Listagem do Programa GERA e das Subrotinas 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e INDEP

```

***** DISCO: NFI002 * SURC: 3 * ARG: DP446 * 05/02/78 * 24H 35M 41S * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001  FIM4
0002      PROGRAM GERA
0003  C
0004  C *** PROGRAM PARA GERAR A MATRIZ DOS COEFICIENTES DA DISCRETIZACAO
0005  C *** DE REDES SUPERPOSTAS E GERACAO DOS TERMOS INDEPENDENTES
0006  C
0007  C * UNIDADES DOS DADOS EM TONELADA E MILIMETRO
0008  C   E   = MODULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO
0009  C   ELE = COMPRIMENTO DO CORDOAMENTO
0010  C   ALFA = ANGULO DE ABERTURA
0011  C   CA  = RELACAO R/H
0012  C   M   = ALTURA (LARGURA) DA CASCA
0013  C   GAMA = PESO ESPECIFICO DO LIQUIDO (CARGA)
0014  C   C   = ESPESURA DA CASCA
0015  C   TH  = ABERTURA DA MALHA - MEDIDO NA DIRECAO X
0016  C   TK  = ABERTURA DA MALHA - MEDIDO NA DIRECAO Y
0017  C
0018  C   11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. INDEP = SUBROTINAS QUE GERAM O
0019  C                                     SISTEMA DE EQUACOES
0020  C                                     MINIMIZANTES.
0021  C
0022  C   OBSERVACAO: A MATRIZ DOS COEFICIENTES E DOS TERMOS INDEPENDENTES
0023  C   DO SISTEMA DE EQUACOES MINIMIZANTES E ARMAZENADO NUM
0024  C   ARQUIVO DE DISCO MAGNETICO DE MODO QUE CADA REGISTRO
0025  C   CONTEHA OS ELEMENTOS DE UMA LINHA DA MATRIZ DOS COE
0026  C   FICIENTES E NO REGISTRO NEXT+1 OS TERMOS INDEPENDEN -
0027  C
0028  C   DIMENSION NARG(3)*NOTRH(2),A(496)
0029  C   REAL M,N
0030  C   INTEGER OTR(124),TRB(2048)
0031  C   COMMON OTR,TRB,NARG,NEQ6,A
0032  C   DATA NOTRH/1,1/
0033  C   NARG(1)=244A
0034  C   NARG(2)=244B
0035  C   NARG(3)=141
0036  C
0037  C *** DEFINICAO DO ARQUIVO EFMP
0038  C
0039  C   CALL EXEC(24,1,OTR,128,TRB,NOTRH,16,IER)
0040  C   CALL TESTE(1)
0041  C   CALLEXEC(24,4,NARG,100,1,175,1,IER)
0042  C   CALL TESTE(2)
0043  C *** ZERA A MATRIZ DOS COEFICIENTES A
0044  C   DO 1000 I=1,496
0045  C   1000 A(I)=0.
0046  C *** LEITURA DE NDH E NOV
0047  C   READ(5,*)NDH,NOV
0048  C   NEQ = NOV*2-1
0049  C   NEQ=(NOV*2-1)*NDH
0050  C *** ZERA A MATRIZ DOS COEFICIENTES
0051  C   DO 10 I=1,NEQ
0052  C   CALL EXEC(24,8,NARG,1,A,IER)
0053  C   CALL TESTE(3)
0054  C   10 CONTINUE
0055  C *** LEITURA DOS DADOS DO PROBLEMA
0056  C   READ(5,*)E,ELE,ALFA,CA,M,GAMA
0057  C *** CALCULO DAS CONSTANTES E DOS ELEMENTOS
0058  C - CALCULO DAS CONSTANTES DO PROBLEMA
0059  C   R=ELE/ALFA
0060  C   TR=ELE/2./NOV
0061  C   TK=M/NOV
0062  C   Q=CA*M
0063  C - CALCULO DOS ELEMENTOS
0064  C   ED=0.0
0065  C   ED2=ED*Q*Q
0066  C   P = ED/4.*(TH*TK/P/R)
0067  C   N = ED*TK/(4.*Q)
0068  C   V = ED/R.*(TK/TH)
0069  C   DV=ED/2.*(1.+Q*Q/(4.*P*P))*(TH/TK)
0070  C   S3 = ED3/24./(TK*TK*TK)*TH
0071  C   S4 = ED3/24./(TH*TH*TH)*TK
0072  C   S5=ED3/6./(TK*TH)
0073  C   S6 = -ED3/16./P/TK
0074  C   S7 = -ED3/12./R/P*(TH/TK)

```

0075 CALL 11(M,N,P,NDH)
 0076 CALL 12(M,N,P,NDH)
 0077 CALL 13(M,N,P,NDH)
 0078 CALL 14(M,N,P,NDH)
 0079 CALL 15(M,N,P,NDH)
 0080 CALL 16(M,N,P,NDH)
 0081 CALL 17(M,N,P,NDH)
 0082 CALL 18(M,N,P,NDH)
 0083 CALL 19(M,N,P,NDH)
 0084 CALL 20(M,N,P,NDH)

***** LISTAGEN TERMINADA *****

***** DISCO: METO2 * SURC: 3 * APG: PMA59 * 05/08/78 * 24H 36M 17S * PAG 1 *****
 1-----15-----21-----30-----60-----50-----60-----70-2-----A0

0001 FTN4
 0002 SUBROUTINE 11(M,N,P,NDH)
 0003 REAL M,N
 0004 INTEGER OT(178),TR(2048),NARG(3)
 0005 COMMON CIP,TR,NARG,NEOR,A(496)
 0006 C *** PARCELA 11
 0007 C
 0008 C * LINHA 1
 0009 A(1) = P
 0010 A(2) = N
 0011 CALL EXEC(24,3,NARG,1,A,IER)
 0012 CALL TESTE(3)
 0013 A(3) = 0.
 0014 A(4) = 0.
 0015 C * LINHA 2
 0016 A(2) = 2.*P
 0017 A(4) = N
 0018 CALL EXEC(24,4,NARG,2,A,IER)
 0019 CALL TESTE(4)
 0020 A(2) = 0.
 0021 A(4) = 0.
 0022 C * LINHA 3 (104)
 0023 A(2) = 3.*P
 0024 A(3) = N
 0025 A(7) = -N
 0026 A(4) = -N
 0027 CALL EXEC(24,4,NARG,3,A,IER)
 0028 CALL TESTE(5)
 0029 A(3) = 0.
 0030 A(7) = 0.
 0031 A(7) = 0.
 0032 A(4) = 0.
 0033 C * LINHA 4 (106)
 0034 A(5) = 2.*P
 0035 A(9) = -N
 0036 A(2) = N
 0037 A(4) = -N
 0038 CALL EXEC(24,4,NARG,5,A,IER)
 0039 CALL TESTE(6)
 0040 A(5) = 0.
 0041 A(9) = 0.
 0042 A(2) = 0.
 0043 A(4) = 0.
 0044 C * LINHA 5 FOR-2 (114)
 0045 K = NEOR-2
 0046 A(K-3) = -N
 0047 A(K) = 2.*M
 0048 A(K-2) = N
 0049 A(K+1) = -N
 0050 CALL EXEC(24,8,NARG,K,A,IER)
 0051 CALL TESTE(7)
 0052 A(K-3) = 0.
 0053 A(K-2) = 0.
 0054 C * LINHA 6 FOR-1 (115)
 0055 A(K+1) = 2.*P
 0056 A(K) = -N
 0057 CALL EXEC(24,8,NARG,K+1,A,IER)
 0058 CALL TESTE(10)
 0059 A(K+1) = 0.
 0060 A(K) = 0.

```

0061 C * LINHA NFOR (114)
0062 J1=NFOR-1
0063 J2=NFOR-3
0064 A(J1)= -4
0065 A(NFOR)=3.0N
0066 A(J2)= 4
0067 CALL EXEC(24.8,NARG,NEOB,A,IER)
0068 CALL TESTE(118)
0069 A(J1)=0.
0070 A(NFOR)=0.
0071 A(J2)=0.
0072 C * LINHAS J = 04.NEO-3.2
0073 K = NFOR-3
0074 DO 10 J=4.K.2
0075 A(J)=2.0N
0076 A(J-1)= -4
0077 A(J+1)= 4
0078 CALL EXEC(24.8,NARG,J,A,IER)
0079 CALL TESTE(128)
0080 A(J)= 0.
0081 A(J-1)= 0.
0082 10 A(J+1)= 0.
0083 C * LINHAS J.NEO-4.2
0084 K = NFOR-4
0085 DO 20 J=7.K.2
0086 A(J-4)= -4
0087 A(J)= 2.0N
0088 A(J+4)= -4
0089 A(J-1)= 4
0090 A(J+1)= -4
0091 CALL EXEC(24.8,NARG,J,A,IER)
0092 CALL TESTE(138)
0093 A(J-4)= 0.
0094 A(J)= 0.
0095 A(J+4)= 0.
0096 A(J-1)= 0.
0097 20 A(J+1)= 0.
0098 C * ELEMENTOS DOS BLOCOS I=2.NBH.1
0099 C * LINHA 1
0100 K1=NFOR-4
0101 K2=NFOR-3
0102 DO 30 I=2.NBH
0103 L= (I-1)*NEOB
0104 K=L+1
0105 A(K)= 2.0N
0106 A(K+2)= 2.0N
0107 CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0108 CALL TESTE(148)
0109 A(K)= 0.
0110 A(K+2)= 0.
0111 C * LINHA 2
0112 K=L+2
0113 A(K)= 4.0N
0114 A(K+3)= 2.0N
0115 CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0116 CALL TESTE(158)
0117 A(K)=0.
0118 A(K+3)= 0.
0119 C * LINHA 3
0120 K = L+3
0121 A(K)= 4.0N
0122 A(K+1)= -2.0N
0123 A(K-2)= 2.0N
0124 A(K+1)= -2.0N
0125 CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0126 CALL TESTE(168)
0127 A(K)=0.
0128 A(K+4)= 0.
0129 A(K-2)= 0.
0130 A(K+1)= 0.
0131 C * LINHA 4
0132 K=L+4
0133 A(K)=4.0N
0134 A(K+4)= -2.0N
0135 A(K-3)= 2.0N
0136 A(K+1)= -2.0N
0137 CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0138 CALL TESTE(178)
0139 A(K)= 0.
0140 A(K+4)= 0.
0141 A(K-3)= 0.
0142 A(K+1)= 0.

```

```
0143 C * LINHA NEQR-2 (I14)
0144 K=L+NEQR-2
0145 A(K)= 4.*V
0146 A(K-4)= -2.*M
0147 A(K-3)= 2.*N
0148 A(K+1)= -2.*N
0149 CALL EXEC(24.9,NAPQ,K,A,IER)
0150 CALL TESTF(17R)
0151 A(K)= 0.
0152 A(K-4)= 0.
0153 A(K-3)= 0.
0154 A(K+1)= 0.
0155 C * LINHA NEQR-1 (I15)
0156 K=L+NEQR-1
0157 A(K)= 4.*P
0158 A(K-1)= -2.*N
0159 CALL EXEC(24.8,NAPQ,K,A,IER)
0160 CALL TESTE(20R)
0161 A(K)=0.
0162 A(K-1)=0.
0163 C ** LINHA NEQR (I16)
0164 K=L+NEQR
0165 A(K)= 4.*V
0166 A(K-4)= -2.*M
0167 A(K-3)= 2.*N
0168 CALL EXEC(24.9,NAPQ,K,A,IER)
0169 CALL TESTE(21R)
0170 A(K)= 0.
0171 A(K-4)= 0.
0172 A(K-3)= 0.
0173 C * LINHAS J=7,NEQR=4.2
0174 DO 50 J=7,K1.2
0175 K=L+J
0176 A(K-4)= -2.*M
0177 A(K)= 4.*V
0178 A(K+4)= -2.*M
0179 A(K-7)= 2.*N
0180 A(K+1)= -2.*N
0181 CALL EXEC(24.8,NAPQ,K,A,IER)
0182 CALL TESTE(23R)
0183 A(K-4)= 0.
0184 A(K)= 0.
0185 A(K+4)= 0.
0186 A(K-3)= 0.
0187 50 A(K+1)= 0.
0188 C * LINHAS J=05,13.2
0189 DO 30 J=04,K2.2
0190 K=L+J
0191 A(K)= 4.*P
0192 A(K-1)= -2.*N
0193 A(K+3)= 2.*N
0194 CALL EXEC(24.8,NAPQ,K,A,IER)
0195 CALL TESTF(24R)
0196 A(K)=0.
0197 A(K-1)=0.
0198 30 A(K+3)=0.
0199 END
0200 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

```

***** DISCO: MET002 * SURC: 3 * APO: DMA60 * 05/09/78 * 24H 37M 21S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTNA
0002 SUBROUTINE IZ(DM,NDV,NDM)
0003 INTEGER CTR(120),TPR(2048),NARG(3)
0004 COMMON CTR,TPR,NARG,NEGR,A(496)
0005 C *** PARCELA IZ
0006 C * 5.1 LINHA 3
0007 CALL EXEC(24.6,NARG,3,A,IER)
0008 CALL TESTF(239)
0009 A(3)=A(3)+0.50*DM
0010 A(5)=A(5)+0.25*DM
0011 J=FOR+3
0012 A(J)= A(J)-0.50*DM
0013 A(J+2)=A(J+2)-0.25*DM
0014 CALL EXEC(24.8,NARG,3,A,IER)
0015 CALL TESTF(2)
0016 C * 8.1 LINHAS J=5,NEGR-2.2 (1J)
0017 KK=NEGR-2
0018 DO 200 J=5,KK.2
0019 CALL EXEC(24.6,NARG,J,A,IER)
0020 CALL TESTE(259)
0021 A(J-2)= A(J-2)+0.25*DM
0022 A(J) = A(J) +0.50*DM
0023 A(J+2)=A(J+2)+0.25*DM
0024 Y=NEGR+J
0025 A(K-2)= A(K-2)-0.25*DM
0026 A(K) = A(K) -0.50*DM
0027 A(K+2)= A(K+2)-0.25*DM
0028 CALL EXEC(24.8,NARG,J,A,IER)
0029 CALL TESTE(264)
0030 200 CONTINUE
0031 C * BLOCOS I=2,NOV-1
0032 KK=NOV-1
0033 DO 210 I=2,KK
0034 C * COL. 3
0035 L=(I-1)*NEGR
0036 K=L+3
0037 CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0038 CALL TESTE(334)
0039 J=L+NEGR+3
0040 A(J)= A(J) -0.50*DM
0041 A(J+2)=A(J+2)-0.25*DM
0042 J=L+3
0043 A(J)= A(J)+DM
0044 A(J+2)= A(J+2)+0.50*DM
0045 J=L+NEGR+3
0046 A(J)= A(J)-0.50*DM
0047 A(J+2)=A(J+2)-0.25*DM
0048 CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0049 CALL TESTE(344)
0050 C * LINHAS J= L+5,L+NEGR-2.2
0051 L1=L+5
0052 L2=L+NEGR-2
0053 DO 220 J=L1,L2.2
0054 CALL EXEC(24.6,NARG,J,A,IER)
0055 CALL TESTF(354)
0056 K=J+NEGR
0057 A(K-2)= A(K-2)-0.25*DM
0058 A(K) = A(K) -0.50*DM
0059 A(K+2)= A(K+2)-0.25*DM
0060 A(L-2)= A(L-2)+0.50*DM
0061 A(J) = A(J) +DM
0062 A(J+2)= A(J+2)+0.50*DM
0063 K=J+NEGR
0064 A(K-2)= A(K-2)-0.25*DM
0065 A(K) = A(K) -0.50*DM
0066 A(K+2)= A(K+2)-0.25*DM
0067 CALL EXEC(24.8,NARG,J,A,IER)
0068 CALL TESTE(364)
0069 220 CONTINUE
0070 K=L+NEGR
0071 CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0072 CALL TESTE(374)
0073 J=L+NEGR
0074 A(J-2)= A(J-2)-0.25*DM
0075 A(J) = A(J) -0.50*DM
0076 A(J+2)= A(J+2)+0.50*DM
0077 A(K) = A(K) +DM
0078 J=L+NEGR
0079 A(J-2)= A(J-2)-0.25*DM
0080 A(J) = A(J) -0.50*DM
0081 CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0082 CALL TESTE(404)

```

```
0083 210 CONTINUE
0084 C * LINHA 204
0085 K=(NDM-1)*NEGR
0086 CALL EXEC(24.6,NAPQ,K,A,IER)
0087 CALL TESTE(47P)
0088 JK=NEGR
0089 A(J-2)=A(J-2)-0.25*DM
0090 A(J) = A(J) -0.50*DM
0091 A(K-2)=A(K-2)+0.5*DM
0092 A(K) = A(K) +DM
0093 CALL EXEC(24.6,NAPQ,K,A,IER)
0094 CALL TESTE(48P)
0095 C * LINHA 204
0096 K=NEGR
0097 CALL EXEC(24.6,NAPQ,K,A,IER)
0098 CALL TESTE(41P)
0099 A(K-2) = A(K-2)+0.25*DM
0100 A(K) = A(K) +0.50*DM
0101 JK=NEGR
0102 A(J-2) = A(J-2)-0.25*DM
0103 A(J) = A(J) -0.50*DM
0104 CALL EXEC(24.6,NAPQ,K,A,IER)
0105 CALL TESTE(42P)
0106 C * LINHA 204
0107 K=(NDM-1)*NEGR+3
0108 CALL EXEC(24.6,NAPQ,K,A,IER)
0109 CALL TESTE(43P)
0110 A(K+2) = A(K+2)+0.5*DM
0111 A(K) = A(K) +DM
0112 JK=NEGR
0113 A(J+2) = A(J+2)-0.25*DM
0114 A(J) = A(J) -0.50*DM
0115 CALL EXEC(24.8,NAPQ,K,A,IER)
0116 CALL TESTE(44P)
0117 KK=NEGR-2
0118 C * LINHA 204
0119 KP=(ND-1)*NEGR
0120 DO 230 J=5,KK,2
0121 K=KP+J
0122 CALL EXEC(24.6,NAPQ,K,A,IER)
0123 CALL TESTE(45P)
0124 JK=NEGR
0125 A(J-2) = A(J-2)-0.25*DM
0126 A(J) = A(J) -0.50*DM
0127 A(J+2) = A(J+2)-0.25*DM
0128 A(K-2) = A(K-2)+0.50*DM
0129 A(K) = A(K) +DM
0130 A(K+2) = A(K+2)+0.50*DM
0131 CALL EXEC(24.8,NAPQ,K,A,IER)
0132 CALL TESTE(46P)
0133 230 CONTINUE
0134 END
0135 EXPR
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

```
***** DISCO: MET002 * SURC: 3 * APP: DMS1 * 05/08/78 * 2-H 38M 38S * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTA4.L
0002 SUPROUTINE I3(E3,N04)
0003 INTEGER DTR(128),TRR(2048),NARG(3)
0004 COMMON DTR,TRR,NARG,NEQR,A(496)
0005 C *** PARCELA 13
0006 C * BLOC 1
0007 CALL EXEC(24,6,NARG,1,A,IER)
0008 CALL TESTE(47P)
0009 A(I)= A(I)+1.5*E3
0010 A(NEQR+I)= A(NEQR+I)-3.0*E3
0011 A(2*NEQR+I)= A(2*NEQR+I)+1.5*E3
0012 CALL EXEC(24,8,NARG,1,A,IER)
0013 CALL TESTE(50R)
0014 C * BLOC 2
0015 K=NEQR+1
0016 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0017 CALL TESTE(51R)
0018 J=K-NEQR
0019 A(J)= A(J)-3.*E3
0020 A(K)= A(K)+7.*E3
0021 J=K+NEQR
0022 A(J)= A(J)-5.*E3
0023 J=J-NEQR
0024 A(J)= A(J)+E3
0025 CALL EXEC(24,9,NARG,K,A,IER)
0026 CALL TESTE(52R)
0027 K=2*NEQR+1
0028 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0029 CALL TESTE(53R)
0030 J=K-2*NEQR
0031 A(J)= A(J)+1.5*E3
0032 J=K-NEQR
0033 A(J)= A(J)-5.*E3
0034 A(K)= A(K)-4.5*E3
0035 J=K+NEQR
0036 A(J)= A(J)-1.*E3
0037 J=J+2*NEQR
0038 A(J)= A(J)+E3
0039 CALL EXEC(24,9,NARG,K,A,IER)
0040 CALL TESTE(54R)
0041 C * BLOCOS 1,2,3,7
0042 KL=(NDH-2)*NEQR
0043 KK=NEQR+1
0044 DO 300 L=2,KK,2
0045 CALL EXEC(24,6,NARG,J,A,IER)
0046 CALL TESTE(55R)
0047 A(J)= A(J)+3.*E3
0048 K=NEQR+J
0049 A(K)= A(K)-5.*E3
0050 K=2*NEQR+J
0051 A(K)= A(K)+3.*E3
0052 CALL EXEC(24,8,NARG,J,A,IER)
0053 CALL TESTE(56R)
0054 L=NEQR+1
0055 CALL EXEC(24,6,NARG,L,A,IER)
0056 CALL TESTE(57R)
0057 K=L-NEQR
0058 A(K)=A(K)-1.*E3
0059 A(L)=A(L)+11.*E3
0060 K=L+NEQR
0061 A(K)= A(K)-10.*E3
0062 K=L+2*NEQR
0063 A(K)= A(K)+2.*E3
0064 CALL EXEC(24,8,NARG,L,A,IER)
0065 CALL TESTE(60R)
0066 L=2*NEQR+J
0067 CALL EXEC(24,6,NARG,L,A,IER)
0068 CALL TESTE(61R)
0069 K=L-2*NEQR
0070 A(K)=A(K)+3.*E3
0071 K=L-NEQR
0072 A(K)=A(K)-10.*E3
0073 A(L)=A(L)+13.*E3
0074 K=L-NEQR
0075 A(K)= A(K)-9.*E3
0076 K=L+2*NEQR
0077 A(K)= A(K)+2.*E3
0078 CALL EXEC(24,8,NARG,L,A,IER)
0079 CALL TESTE(62R)
0080 L=KL+J
```



```
0091      CALL EXEC(24.6,NARG,L,A,IER)
0092      CALL TESTE(679)
0093      K=L-2*NECP
0094      A(K)= A(K)+2.*E3
0095      K=L-NECP
0096      A(K)= A(K)-8.*E3
0097      A(L)= A(L)+12.*E3
0098      K=L+NECP
0099      A(K)= A(K)-8.*E3
0090      CALL EXEC(24.8,NARG,L,A,IER)
0091      CALL TESTE(649)
0092      L=K+NECP+1
0093      CALL EXEC(24.6,NARG,L,A,IER)
0094      CALL TESTE(659)
0095      K=L-2*NECP
0096      A(K)= A(K)+2.*E3
0097      K=L-NECP
0098      A(K)= A(K)-8.*E3
0099      A(L)= A(L)+14.*E3
0100      CALL EXEC(24.8,NARG,L,A,IER)
0101      CALL TESTE(669)
0102 300 CONTINUE
0103 C * PLOCCS I=4,NCH-2,1
0104      K1=NECP-1
0105      KK=NCH-2
0106      DO 310 I=4,KK
0107      L=(I-1)*NECP
0108      K=L+1
0109      CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0110      CALL TESTE(679)
0111      J=K-2*NECP
0112      A(J)= A(J)+E3
0113      J=K-NECP
0114      A(J)= A(J)-6.*E3
0115      A(K)= A(K)+6.*E3
0116      J=K+NECP
0117      A(J)= A(J)-4.*E3
0118      J=K-2*NECP
0119      A(J)= A(J)+E3
0120      CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0121      CALL TESTE(703)
0122      DO 310 J=2,K1+2
0123      K=L+J
0124      CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0125      CALL TESTE(719)
0126      JJ=K-2*NECP
0127      A(JJ)= A(JJ)+2.*E3
0128      JJ=K-NECP
0129      A(JJ)= A(JJ)-8.*E3
0130      A(K)=A(K)+12.*E3
0131      JJ=K+NECP
0132      A(JJ)=A(JJ)-8.*E3
0133      JJ=K-2*NECP
0134      A(JJ)= A(JJ)+2.*E3
0135      CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0136      CALL TESTE(729)
0137 310 CONTINUE
0138 C * PLOCC
0139      K=L+1
0140      CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0141      CALL TESTE(739)
0142      J=K-2*NECP
0143      A(J)= A(J)+E3
0144      J=K-NECP
0145      A(J)= A(J)-4.*E3
0146      A(K)= A(K)+6.*E3
0147      J=K+NECP
0148      A(J)=A(J)-4.*E3
0149      CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0150      CALL TESTE(749)
0151 C * PLOCC
0152      K=(NCH-1)*NECP+1
0153      CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0154      CALL TESTE(753)
0155      J=K-2*NECP
0156      A(J)= A(J)+E3
0157      J=K-NECP
0158      A(J)= A(J)-4.*E3
0159      A(K)= A(K)+7.*E3
0160      CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0161      CALL TESTE(769)
0162      END
0163      ENDX
***** LISTAREM TERMINADA *****
```

***** DISCO: MET002 * SURG: 3 * ARG: DMA62 * 05/08/78 * 24M 39M 30S * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80

```

0001 FTA4
0002 SUBROUTINE I4(E4,NDH)
0003 INTEGER OTR(128),TRH(2048),NARG(3)
0004 COMMON OTR,TRH,NARG,NEQB,A(496)
0005 C *** PARCFEA I4
0006 C * HLC00 I
0007 CALL EXEC(24,6,NARG,1,A,IER)
0008 CALL TESTE(1)
0009 A(1)=A(1)+3.*E4
0010 A(2)=A(2)-4.*E4
0011 A(4)=A(4)+E4
0012 CALL EXEC(24,8,NARG,1,A,IER)
0013 CALL TESTE(2)
0014 CALL EXEC(24,6,NARG,2,A,IER)
0015 CALL TESTE(3)
0016 A(1)=A(1)-4.*E4
0017 A(2)=A(2)+7.*E4
0018 A(4)=A(4)-1.*E4
0019 A(6)=A(6)+E4
0020 CALL EXEC(24,8,NARG,2,A,IER)
0021 CALL TESTE(4)
0022 C * LINHA NEQB=3
0023 K=NEQB-3
0024 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0025 CALL TESTE(5)
0026 A(K-4)=A(K-4)+E4
0027 A(K-2)=A(K-2)-4.*E4
0028 A(K)=A(K)+6.*E4
0029 A(K+2)=A(K+2)-4.*E4
0030 CALL EXEC(24,8,NARG,K,A,IER)
0031 CALL TESTE(6)
0032 K=NEQB-5
0033 DO 400 J=4,K,2
0034 CALL EXEC(24,6,NARG,J,A,IER)
0035 CALL TESTE(7)
0036 K=J-4
0037 IF (K.EQ.0) K=1
0038 A(K)=A(K)+E4
0039 A(J-2)=A(J-2)-4.*E4
0040 A(J)=A(J)+6.*E4
0041 A(J+2)=A(J+2)-4.*E4
0042 A(J+4)=A(J+4)+E4
0043 CALL EXEC(24,8,NARG,J,A,IER)
0044 CALL TESTE(10)
0045 400 CONTINUE
0046 K=NEQB-1
0047 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0048 CALL TESTE(11)
0049 A(K-4)=A(K-4)+E4
0050 A(K-2)=A(K-2)-4.*E4
0051 A(K)=A(K)+6.*E4
0052 CALL EXEC(24,8,NARG,K,A,IER)
0053 CALL TESTE(12)
0054 K1=NEQB-5
0055 DO 410 I=2,NDH
0056 L=(I-1)*NF00
0057 M=L+1
0058 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0059 CALL TESTE(13)
0060 A(K)=A(K)+6.*E4
0061 A(K+1)=A(K+1)-8.*E4
0062 A(K+3)=A(K+3)+2.*E4
0063 CALL EXEC(24,8,NARG,K,A,IER)
0064 CALL TESTE(14)
0065 K=L+2
0066 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0067 CALL TESTE(15)
0068 A(K-1)=A(K-1)-8.*E4
0069 A(K)=A(K)+14.*E4
0070 A(K+2)=A(K+2)-8.*E4
0071 A(K+4)=A(K+4)+2.*E4
0072 CALL EXEC(24,8,NARG,K,A,IER)
0073 CALL TESTE(16)
0074 K=L+NEQB-3
0075 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0076 CALL TESTE(17)
0077 A(K-4)=A(K-4)+2.*E4
0078 A(K-2)=A(K-2)-8.*E4
0079 A(K)=A(K)+12.*E4
0080 A(K+2)=A(K+2)-8.*E4
0081 CALL EXEC(24,8,NARG,K,A,IER)
0082 CALL TESTE(18)
0083 K=L+NEQB-1
0084 CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)

```

```

0084      A(K-4)=1*(K-4)+2.*E4
0087      A(K-2)=A(K-2)-R.*E4
0088      A(K)=A(K)+12.*E4
0089      CALL EXEC(24,R,NARG,K,A,IER)
0090      CALL TESTE(22R)
0091      DO 410 J=4,K1,2
0092      K=L+J
0093      CALL EXEC(24,6,NARG,K,A,IER)
0094      CALL TESTE(23R)
0095      JJ=J-4
0096      IF(COVER,0)JJ=1
0097      JJ=L+JJ
0098      A(JJ)=A(JJ)+2.*E4
0099      A(K-2)=A(K-2)-R.*E4
0100      A(K)=A(K)+12.*E4
0101      A(K+2)=A(K+2)-R.*E4
0102      A(K+4)=1*(K+4)+2.*E4
0103      CALL EXEC(24,R,NARG,K,A,IER)
0104      CALL TESTE(24R)
0105      410 CONTINUE
0106      END
0107      ENDA

```

***** LISTAGEN TERMINADA *****

***** DISCO: METOP2 * SURC: 3 * ARG: DMA63 * 05/08/78 * 24h 40m 45 * PAG 1 *****

-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80

```

0001      FTN4
0002      SUBROUTINE IS(25,NDH)
0003      INTERSE(CTR(128),TRR(2048),NARG(1))
0004      COMMON CTR,TRR,NARG,NEGR,A(496)
0005      CALL EXEC(24,6,NARG,1,A,IER)
0006      CALL TESTE(1)
0007      A(1)=A(1)+E5
0008      A(2)=A(2)-E5
0009      J=NEGR+1
0010      A(J)=A(J)-E5
0011      A(J+1)=A(J+1)+E5
0012      CALL EXEC(24,8,NARG,1,A,IER)
0013      CALL TESTE(2)
0014      KL=NEGR-1
0015      LI=(NDH-1)*NEGR
0016      L2=LI+E54
0017      C * BLOCKS LJ E AJ
0018      DO 10 L=2,KL,2
0019      CALL EXEC(24,6,NARG,J,A,IER)
0020      CALL TESTE(3)
0021      K=J-2
0022      IF(K,EG,0)K=1
0023      A(K)=A(K)+E5
0024      A(J)=A(J)+2.*E5
0025      A(J+2)=A(J+2)-E5
0026      JJ=NEGR-K
0027      A(JJ)=A(JJ)+E5
0028      JJ=NEGR+J
0029      A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0030      A(JJ+2)=A(JJ+2)+E5
0031      CALL EXEC(24,8,NARG,J,A,IER)
0032      CALL TESTE(4)
0033      LL=J-1
0034      CALL EXEC(24,6,NARG,LL,A,IER)
0035      CALL TESTE(5)
0036      JJ=L2-L
0037      A(JJ)=A(JJ)+E5
0038      JJ=L2-J
0039      A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0040      JJ=L2-L+2
0041      A(JJ)=A(JJ)+E5
0042      JJ=L1-L
0043      A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0044      A(LL)=A(LL)+4.*E5
0045      JJ=L1-L+2
0046      A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0047      CALL EXEC(24,8,NARG,LL,A,IER)
0048      CALL TESTE(6)
0049      10 CONTINUE
0050      LL=L1-1
0051      CALL EXEC(24,6,NARG,LL,A,IER)
0052      CALL TESTE(7)
0053      A(LL)=A(LL)+2.*E5
0054      A(LL+1)=A(LL+1)-2.*E5
0055      JJ=L2+1
0056      A(JJ)=A(JJ)-E5
0057      A(JJ+1)=A(JJ+1)+E5
0058      CALL EXEC(24,8,NARG,LL,A,IER)
0059      CALL TESTE(10R)
0060      C * BLOCKS LJ E AJ

```

***** DISCO: METOPP * SURC: 3 * ARO: DMA61 * 05/04/78 * 24H 40M 4S * PAG 2 *****
-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80

```

0061      LL=LI-NEQR-1
0062      CALL EXEC(24.6,NARG,LL,A,IER)
0063      CALL TESTE(119)
0064      A(LL)=A(LL)+4.*E5
0065      A(LL-2)=A(LL-2)-2.*E5
0066      JJ=LI-1
0067      A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0068      A(JJ-2)=A(JJ-2)+E5
0069      CALL EXEC(24.8,NARG,LL,A,IER)
0070      CALL TESTE(128)
0071  C * SLOCCO I=1,NEQR-1
0072      LL=NEQR-1
0073      CALL EXEC(24.6,NARG,LL,A,IER)
0074      CALL TESTE(138)
0075      A(LL)=A(LL)+2.*E5
0076      A(LL-2)=A(LL-2)-E5
0077      JJ=NEQR+LL
0078      A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0079      A(JJ-2)=A(JJ-2)+E5
0080      CALL EXEC(24.8,NARG,LL,A,IER)
0081      CALL TESTE(148)
0082  C * SLOCCO I=2,II
0083      NDI=NI-1
0084      DO 20 I=2,NDI
0085          LI=(I-2)*NEQR
0086          L2=(I-1)*NEQR
0087          L3=I*NEQR
0088          K=L2+1
0089          CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0090          CALL TESTE(158)
0091          JJ=L1+I
0092          A(JJ)=A(JJ)-E5
0093          A(JJ+1)=A(JJ+1)+E5
0094          A(K)=A(K)+2.*E5
0095          A(K+1)=A(K+1)-2.*E5
0096          JJ=L3+1
0097          A(JJ)=A(JJ)-E5
0098          A(JJ+1)=A(JJ+1)+E5
0099          CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0100          CALL TESTE(168)
0101          K=L3-1
0102          CALL EXEC(24.6,NARG,K,A,IER)
0103          CALL TESTE(178)
0104          JJ=L1+NEQR-1
0105          A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0106          A(JJ-2)=A(JJ-2)+E5
0107          A(K)=A(K)+4.*E5
0108          A(K-2)=A(K-2)-2.*E5
0109          JJ=L3+NEQR-1
0110          A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0111          A(JJ-2)=A(JJ-2)+E5
0112          CALL EXEC(24.8,NARG,K,A,IER)
0113          CALL TESTE(208)
0114          DO 20 L=2,KL*2
0115              KK=L2+L
0116              CALL EXEC(24.6,NARG,KK,A,IER)
0117              CALL TESTE(218)
0118              K=J-2
0119              IF(K.EQ.0)K=1
0120              JJ=L1+K
0121              A(JJ)=A(JJ)+E5
0122              JJ=L1+J
0123              A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0124              JJ=JJ+2
0125              A(JJ)=A(JJ)+E5
0126              JJ=KK-L-K
0127              A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0128              A(KK)=A(KK)+4.*E5
0129              JJ=KK+2
0130              A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0131              JJ=L3+K
0132              A(JJ)=A(JJ)+E5
0133              JJ=L3+J
0134              A(JJ)=A(JJ)-2.*E5
0135              JJ=JJ+2
0136              A(JJ)=A(JJ)+E5
0137          CALL EXEC(24.8,NARG,KK,A,IER)
0138          CALL TESTE(228)
0139      20 CONTINUE
0140      RETURN
0141      END
0142      ENP

```

```
***** DISCO: METOPP > SUBC: 3 * APO: CW664 * 05/08/78 * 24H 40M 49S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTA4
0002 SUBROUTINE I6(G6,NDH)
0003 INTEGER JTH(12R),TFR(204R),NARG(3)
0004 COMMON /C7R,TFR,NARG,NEOR,A(496)
0005 KL=(NDH-1)*NECH
0006 K=0
0007 DO 10 J=3,5,2
0008 K=K+1
0009 CALL EXEC(24,A,NARG,K,A,IER)
0010 CALL TESTE(1)
0011 A(J)=A(J)-G6
0012 L=NEOR-J
0013 A(L)=A(L)+G6
0014 CALL EXEC(24,R,NARG,K,A,IER)
0015 CALL TESTE(2)
0016 L=K+K
0017 CALL EXEC(24,G,NARG,L,A,IER)
0018 CALL TESTE(3)
0019 JC=K+L+1
0020 A(JJ)=A(JJ)-2.*G6
0021 JJ=JJ-NEOR
0022 A(JJ)=A(JJ)+G6
0023 CALL EXEC(24,A,NARG,L,A,IER)
0024 CALL TESTE(4)
0025 10 CONTINUE
0026 C * P.I L,NEOR-1 (115)
0027 K=NEOR-1
0028 CALL EXEC(24,A,NARG,K,A,IER)
0029 CALL TESTE(5)
0030 A(K-1)=A(K-1)+G6
0031 J=K+NEOR-1
0032 A(J)=A(J)-G6
0033 CALL EXEC(24,R,NARG,K,A,IER)
0034 CALL TESTE(6)
0035 C * P.ADH L,NEOR-1 (815)
0036 K=NDH*NEOR-1
0037 CALL EXEC(24,G,NARG,K,A,IER)
0038 CALL TESTE(7)
0039 A(K-1)=A(K-1)+2.*G6
0040 J=K-NEOR-1
0041 A(J)=A(J)-G6
0042 CALL EXEC(24,R,NARG,K,A,IER)
0043 CALL TESTE(109)
0044 C * P.I L,NEOR (116)
0045 CALL EXEC(24,G,NARG,NEOR,A,IER)
0046 CALL TESTE(112)
0047 J=NEOR-3
0048 A(J)=A(J)-G6
0049 J=2*NEOR-3
0050 A(J)=A(J)+G6
0051 CALL EXEC(24,R,NARG,NEOR,A,IER)
0052 CALL TESTE(12R)
0053 C * P.ADH L,NEOR (816)
0054 K=NDH*NEOR
0055 CALL EXEC(24,G,NARG,K,A,IER)
0056 CALL TESTE(13R)
0057 J=K-3
0058 A(J)=A(J)-2.*G6
0059 J=K-NEOR-3
0060 A(J)=A(J)-G6
0061 CALL EXEC(24,R,NARG,K,A,IER)
0062 CALL TESTE(14R)
0063 C * PLCCO IP E AP
0064 KK=NEOR-2
0065 DO 20 J=3,KK,2
0066 CALL EXEC(24,G,NARG,J,A,IER)
0067 CALL TESTE(15R)
0068 K=J-3
0069 IF(K.EQ.0)K=1
0070 A(K)=A(K)-G6
0071 A(J+1)=A(J+1)+G6
0072 JJ=NEOR+K
0073 A(JJ)=A(JJ)+G6
0074 JJ=NEOR+J+1
0075 A(JJ)=A(JJ)-G6
0076 CALL EXEC(24,R,NARG,J,A,IER)
0077 CALL TESTE(16R)
```

```

0077      LL=KL+J
0078      CALL EXEC(24.4,NARO,LL,A,IER)
0079      CALL TESTE(17R)
0080      JJ=KL+K
0081      A(JJ)= A(JJ)-2.*G6
0082      JJ=KL+J+1
0083      A(JJ)= A(JJ)+2.*G6
0084      JJ=KL-NEGR+K
0085      A(JJ)=A(JJ)+G6
0086      JJ=KL-NEGR+J+1
0087      A(JJ)=A(JJ)-G6
0088      CALL EXEC(24.4,NARO,LL,A,IER)
0089      CALL TESTE(20R)
0090
0091      20 CONTINUE
0092      C * P.1-R L,J=4,12.7
0093      KK=NEGR-3
0094      DO 30 J=4, KK,2
0095      CALL EXEC(24.4,NARO,J,A,IER)
0096      CALL TESTE(21R)
0097      A(J-1)= A(J-1)+G6
0098      A(J+3)= A(J+3)-G6
0099      JJ=NEGR+J-1
0100      A(JJ)= A(JJ)-G6
0101      JJ=NEGR+J+3
0102      A(JJ)= A(JJ)+G6
0103      CALL EXEC(24.4,NARO,J,A,IER)
0104      CALL TESTE(22R)
0105      LL=KL+J
0106      CALL EXEC(24.6,NARO,LL,A,IER)
0107      CALL TESTE(23R)
0108      JJ=LL-1
0109      A(JJ)= A(JJ)+2.*G6
0110      JJ=LL+3
0111      A(JJ)= A(JJ)-2.*G6
0112      JJ=LL-NEGR-1
0113      A(JJ)= A(JJ)-G6
0114      JJ=LL-NEGR+3
0115      A(JJ)= A(JJ)+G6
0116      CALL EXEC(24.8,NARO,LL,A,IER)
0117      CALL TESTE(24R)
0118
0119      30 CONTINUE
0120      KK=NEGR-1
0121      L1=NEGR-3
0122      L2=NEGR-2
0123      DO 40 I=2, KK
0124      I1=(I-2)*NEGR
0125      I2=(I-1)*NEGR
0126      I3=(I+1)*NEGR
0127      C * BLOCK I15
0128      LL=I2-1
0129      CALL EXEC(24.6,NARO,LL,A,IER)
0130      CALL TESTE(25R)
0131      J1=I1-2
0132      J2=I2-2
0133      J3=I3-2
0134      A(J1)= A(J1)-G6
0135      A(J2)= A(J2)+2.*G6
0136      A(J3)= A(J3)-G6
0137      CALL EXEC(24.8,NARO,LL,A,IER)
0138      CALL TESTE(26R)
0139
0140      C * BLOCK I14
0141      CALL EXEC(24.6,NARO,I2,A,IER)
0142      CALL TESTE(27R)
0143      J1=I1-3
0144      J2=I2-3
0145      J3=I3-3
0146      A(J1)= A(J1)+G6
0147      A(J2)= A(J2)-2.*G6
0148      A(J3)= A(J3)+G6
0149      CALL EXEC(24.8,NARO,I2,A,IER)
0150      CALL TESTE(28R)
0151
0152      C * BLOCK IJ (21,03)
0153      IC=1
0154      DO 50 J=1,2
0155      IC=IC+2
0156      LL=I1+J
0157      CALL EXEC(24.6,NARO,LL,A,IER)
0158      CALL TESTE(29R)

```

```

0157      J1=I1+11
0158      J2=I1+22
0159      J3=I2+11
0160      A(J1)= A(I1)+G6
0161      A(J2)= A(J2)-2.*G6
0162      A(J3)= A(I2)+G6
0163      CALL EXEC(24,9,NARG,LL,A,IER)
0164      CALL TESTE(329)
0165      50 CONTINUE
0166      DO 40 L=4,LL,2
0167      LL=I1+L
0168      CALL EXEC(24,6,NARG,LL,A,IER)
0169      CALL TESTE(339)
0170      J1=J1+1
0171      J2=I1+J1
0172      J3=I2+J1
0173      J2=I2+J1
0174      A(J1)= A(I1)-G6
0175      A(J2)= A(J2)+2.*G6
0176      A(J3)= A(J3)-G6
0177      J1=J1+3
0178      J2=I1+J1
0179      J3=I1+J1
0180      J3=I2+J1
0181      A(J1)= A(J1)+G6
0182      A(J2)= A(J2)-2.*G6
0183      A(J3)= A(J3)+G6
0184      CALL EXEC(24,9,NARG,LL,A,IER)
0185      CALL TESTE(349)
0186      60 CONTINUE
0187      DO 40 L=3,LL,2
0188      LL=I1+L
0189      CALL EXEC(24,6,NARG,LL,A,IER)
0190      CALL TESTE(359)
0191      J1=J1+2
0192      IF (J1.EQ.0) J1=1
0193      J2=I1+J1
0194      J3=I1+J1
0195      J3=I2+J1
0196      A(J1)= A(I1)-G6
0197      A(J2)= A(J2)-2.*G6
0198      A(J3)= A(J3)+G6
0199      J1=J1+1
0200      J2=I1+J1
0201      J3=I1+J1
0202      J3=I2+J1
0203      A(J1)= A(I1)-G6
0204      A(J2)= A(J2)+2.*G6
0205      A(J3)= A(J3)-G6
0206      CALL EXEC(24,9,NARG,LL,A,IER)
0207      CALL TESTE(359)
0208      40 CONTINUE
0209      END
0210      ENDS
***** I.ISTAGEM TERMINADA *****

```

***** DISCO: MTE12 * SLFC: 3 * ARG: DPA65 * 65/04/78 * 24H 41M 56S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80-----

```

0001  FTR4
0002  SUBROUINE I7(FM,ADP)
0003  INTERFER (I+I2R).TRR (2048).NARG(3)
0004  C=NYC( ITR,TRR,NARG,NEGB,A(496)
0005  CALL EXEC(24,6,NARG,1,A,IER)
0006  CALL TESTE(1)
0007  A(1)= A(I)-FM
0008  A(2)= A(I)-FM
0009  CALL EXEC(24,9,NARG,1,A,IER)
0010  CALL TESTE(2)
0011  KK= NEAR=1
0012  CALL EXEC(24,6,NARG,KK,A,IER)
0013  CALL TESTE(3)
0014  A(KK-2)= A(KK-2)-FM
0015  A(KK) = A(KK)+2.*FM
0016  CALL EXEC(24,9,NARG,KK,A,IER)
0017  CALL TESTE(4)
0018  KLE=KLE+1

```

```

0019      DO 10 J=2,KL,2
0020      CALL EXEC(24,6,NARQ,J,A,IER)
0021      CALL TESTE(5)
0022      K=J-2
0023      IF (K.EQ.0) K=1
0024      A(K)= A(K)-FM
0025      A(J)= A(J)+2.*FM
0026      A(J+2)= A(J+2)-FM
0027      CALL EXEC(24,9,NARQ,J,A,IER)
0028      CALL TESTE(6)
0029      10 CONTINUE
0030      DO 20 I=2,NDH
0031      KK=(I-1)*NEQR
0032      LL=KK+1
0033      CALL EXEC(24,6,NARQ,LL,A,IFR)
0034      CALL TESTE(7)
0035      A(LL)= A(LL)+2.*FM
0036      A(LL+1)= A(LL+1)-2.*FM
0037      CALL EXEC(24,6,NARQ,LL,A,IER)
0038      CALL TESTE(10R)
0039      LL=I*NEQR-1
0040      CALL EXEC(24,6,NARQ,LL,A,IFR)
0041      CALL TESTE(11R)
0042      A(LL)= A(LL)+4.*FM
0043      A(LL-2)= A(LL-2)-2.*FM
0044      CALL EXEC(24,8,NARQ,LL,A,IER)
0045      CALL TESTE(11R)
0046      DO 20 J=2,KL,2
0047      LL=KK+J
0048      CALL EXEC(24,6,NARQ,LL,A,IER)
0049      CALL TESTE(12R)
0050      K=J-2
0051      IF (K.EQ.0) K=1
0052      JJ=KK+K
0053      A(JJ)=A(JJ)-2.*FM
0054      A(LL)=A(LL)+4.*FM
0055      JJ=KK+J+2
0056      A(JJ)= A(JJ)-2.*FM
0057      CALL EXEC(24,8,NARQ,LL,A,IER)
0058      CALL TESTE(13R)
0059      20 CONTINUE
0060      END
0061      ENDS

```

***** LISTAGEM TERMINADA *****

***** DISCO: MET02 * SUPC: 3 * APP: DMA47 * 05/04/72 * 24H 36V 9S * PAG 1 *****

```

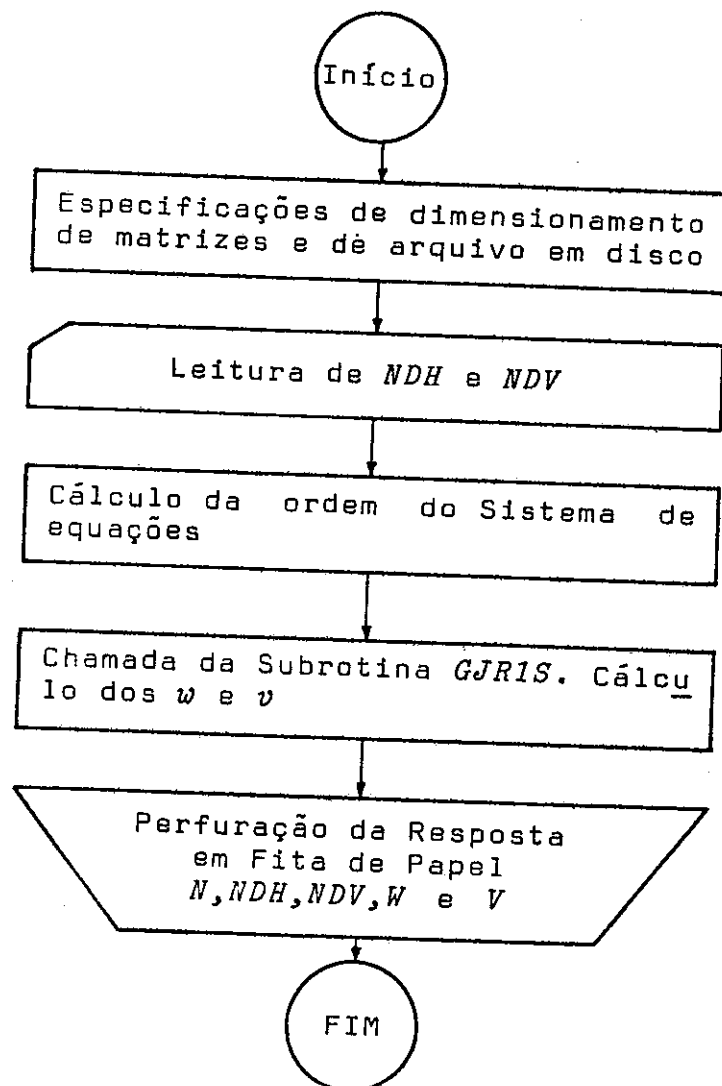
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001  FTA4
0002  SUBROUTINE INDEP(GAMA,TH,TK,NDH,NEQ)
0003  C
0004  C * SUBROUTINA PARA GERACAO DOS TERMOS INDEPENDENTES
0005  C
0006  INTEGER QTR(12R),TRR(204R)
0007  COMMON QTR,TRR,NARQ(3),NEQR,A(496)
0008  FR=GAMA*TH*TH*TK
0009  DO 10 I=1,NDH
0010  K=I-1
0011  L=K*NEQR
0012  FR=FR*K
0013  A(L+1)=FR<>0.5
0014  DO 10 J=2,NEQR,2
0015  JJ=L+J
0016  A(JJ)=FR*K
0017  10 A(JJ+1)=0.
0018  CALL EXEC(24,9,NARQ,NEQ+1,A,IER)
0019  CALL TESTE(77R)
0020  RETURN
0021  END
0022  ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```


6.4.2 - Programa CALWV

Este programa resolve sistema de equações gravadas em disco magnético, conforme programa *GERA*, e perfura a solução em fita de papel, que será a fita de dados para o programa *ESPRO*.

a) Diagrama de Blocos



Observação: A subrotina *GJRIS* é a documentada no item 6.2.2 (c.2), adaptada para uso de disco magnético como memória auxiliar.

5) Listagem do Programa

```
***** DISCO: MET002 * SURC: 3 * ARQ: CMA45 * 05/08/78 * 24H 33M 30S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTN4.L
0002 PROGRAM CAL.V
0003 C
0004 C *** PROGRAMA PARA O CALCULO DOS DESLOCAMENTOS W E V
0005 C DAS CARGAS CILINDRICAS CIRCULARES COM TRES BORDAS
0006 C ENCASTADAS (CORDA LIVRE - C COCAMENTO)
0007 C
0008 C INTEGER OTB(128),TRB(9928),AROMA(3),NOTRB(2)
0009 C DIMENSION A(496)
0010 C COMMON OTB,TRB,AROMA,N,A
0011 C DATA NOTRB/1,1/
0012 C
0013 C *** NDH = NRO DE DIVISOES DA ALTURA H (NRO DE MALHAS NA VERT.)
0014 C NOV = NRO DE DIVISOES DA LARGURA L/2L (NRO DE MALHAS NA HORIZ.)
0015 C N = NRO DE EQUACCOES =(2*NDV-1)*NDH
0016 C A = UMA LINHA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
0017 C AROMA = NOME DO ARQUIVO QUE CONTEM A MATRIZ DOS COEFICIENTES
0018 C
0019 C -----
0020 C
0021 C *** DEFINICAO E ABERTURA DO ARQUIVO
0022 C
0023 C AROMA(1)=R-VA
0024 C AROMA(2)=P-T0
0025 C AROMA(3)=I-1
0026 C CALL EXEC(24,1,OTB,128,TRB,NOTRB,76,IER)
0027 C CALL TESTE(1)
0028 C CALL EXEC(24,4,AROMA,100,1,175,1,IER)
0029 C CALL TESTE(2)
0030 C READR,9,NDV,NDH
0031 C N=(2*NDV-1)*NDH
0032 C N1=N+1
0033 C
0034 C *** CALCULO DOS W E V
0035 C
0036 C CALL GURIS
0037 C
0038 C *** PERFEICAO DOS RESULTADOS
0039 C
0040 C CALL EXEC(24,6,AROMA,N1,A,IER)
0041 C CALL TESTE(3)
0042 C CALL EXEC(3,10048)
0043 C WRITE(4,1)N,NDH,NOV
0044 C 1 FORMAT(3I5)
0045 C WRITE(4,2)A(I),I=1,N)
0046 C 2 FORMAT(5E14,7)
0047 C CALL EXEC(3,10048)
0048 C END
0049 C ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

***** DISCO: VETCOR * SUBC: 3 * APP: DVA43 * 05/08/78 * 24H 35M 15 * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80

```
0001 FTR4.L
0002 SUBROUTINE GURIS.
0003 C
0004 C *** SUBROTINA PARA RESOLUCAO DE SISTEMA DE EQUACOES
0005 C LINEARES PELO METODO DE GAUSS JORDAN PUTISHAUSER
0006 C USANDO DISCO MAGNETICO.
0007 C A MATRIZ DOS COEFICIENTES DEVE ESTAR GRAVADA POR LINHA
0008 C O VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES DEVE ESTAR GRAVADO
0009 C NO REGISTRO N+1 DO ARQUIVO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
0010 C
0011 DIMENSION A(496),AA(496),H(497),C(496),IP(496),IQ(496)
0012 INTEGER OTR(128),TRR(9928),AROMA(3)
0013 COMMON OTR,TRR,AROMA,N,A
0014 N1=N+1
0015 DO 1 K=1,N
0016 T=0.
0017 DO 4 I=K,N
0018 S=0.
0019 CALL EXEC(24,6,AROMA,I,A,IER)
0020 CALL TESTE(3)
0021 DO 2 J=K,N
0022 S=S+ARS(A(IJ))
0023 IF(S.EQ.0.)GO TO 5
0024 DO 2 J=K,N
0025 IF(ABS(A(IJ))-S*12.2,7
0026 7 IP(K)=I
0027 IQ(K)=J
0028 PIVO=A(IJ)
0029 T=ARS(PIVO/S)
0030 2 CONTINUE
0031 6 CONTINUE
0032 IF(T)101,5,101
0033 101 IF(ABS(T)-0)8,98,8
0034 8 IPK=IP(K)
0035 C
0036 C *** TROCA DE POSICAO - LINHA IPK COM LINHA K
0037 C
0038 CALL EXEC(24,6,AROMA,IPK,A,IER)
0039 CALL TESTE(4)
0040 CALL EXEC(24,6,AROMA,K,AA,IER)
0041 CALL TESTE(5)
0042 CALL EXEC(24,8,AROMA,IPK,AA,IER)
0043 CALL TESTE(6)
0044 CALL EXEC(24,8,AROMA,K,A,IER)
0045 CALL TESTE(7)
0046 CALL EXEC(24,6,AROMA,N1,A,IER)
0047 CALL TESTE(108)
0048 Z=A(IPK)
0049 A(IPK)=A(K)
0050 A(K)=Z
0051 CALL EXEC(24,8,AROMA,N1,A,IER)
0052 CALL TESTE(118)
0053 98 IF(TO(K)-K)10,20,10
0054 10 IGK=K
0055 C
0056 C *** PERMUTA DE COLUNAS - COLUNA IQK COM COLUNA K
0057 C
0058 DO 11 I=1,N
0059 CALL EXEC(24,6,AROMA,I,3,IER)
0060 CALL TESTE(128)
```

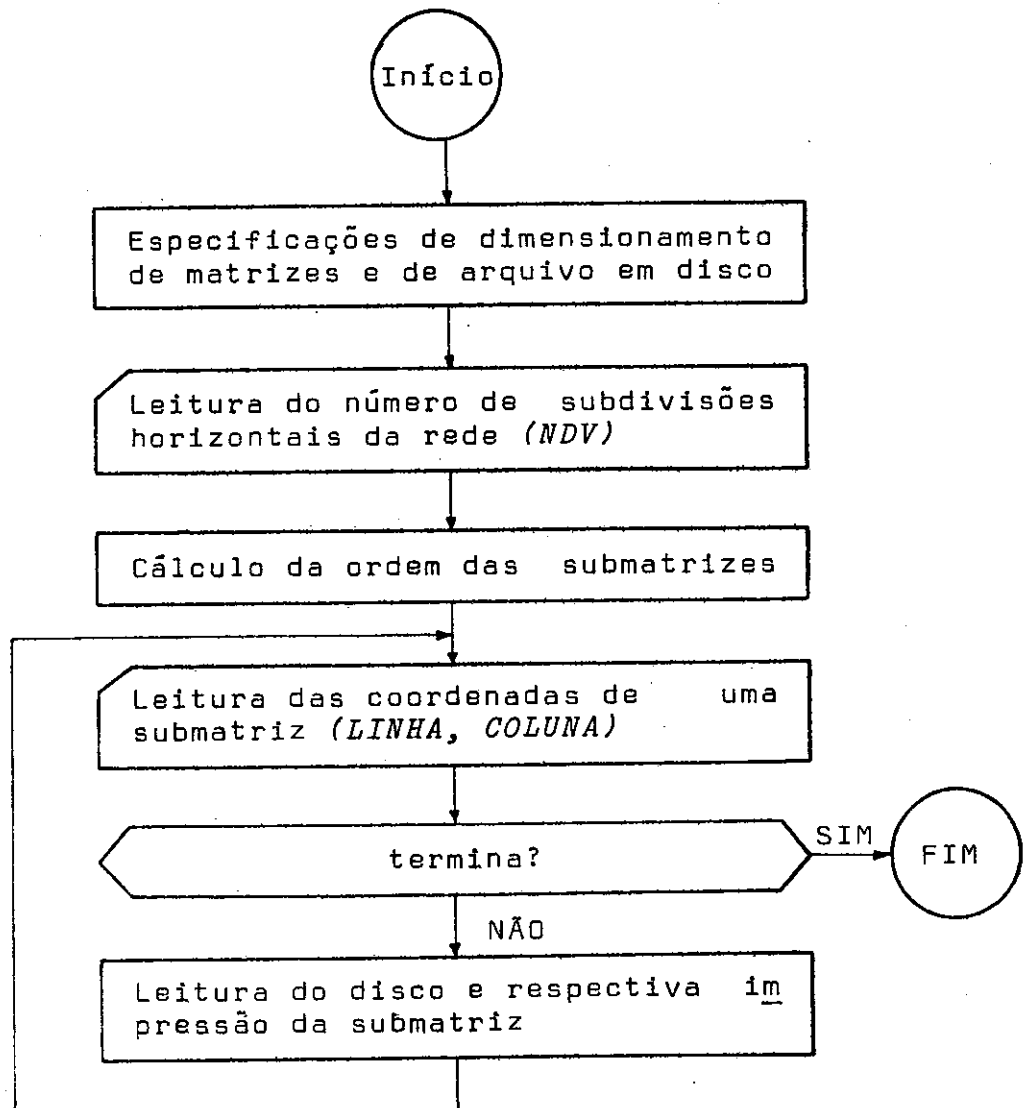
```
0061       Z=A(I,K)
0062       A(I,K)=Z(K)
0063       Z(K)=Z
0064       CALL EXEC(24.8,ARGMA,I,A,IER)
0065       CALL TESTE(138)
0066   11 CONTINUE
0067   20 CALL EXEC(24.6,ARGMA,K,A,IER)
0068       CALL TESTE(148)
0069       DO 17 J=1,N
0070       CALL EXEC(24.6,ARGMA,J,AA,IER)
0071       CALL TESTE(158)
0072       IF(J-N)13,14,13
0073   14 R(J)=1./PIVO
0074       C(J)=1.
0075       GO TO 15
0076   13 R(J)=-A(J)/PIVO
0077       C(J)=A(K)
0078   15 A(J)=0.
0079       AA(K)=0
0080       CALL EXEC(24.8,ARGMA,J,AA,IER)
0081       CALL TESTE(168)
0082   12 CONTINUE
0083       CALL EXEC(24.8,ARGMA,K,A,IER)
0084       CALL TESTE(178)
0085       CALL EXEC(24.6,ARGMA,N1,A,IER)
0086       CALL TESTE(208)
0087       R(N1)=-Z(K)/PIVO
0088       A(K)=0.
0089       CALL EXEC(24.8,ARGMA,N1,A,IER)
0090       CALL TESTE(218)
0091       K1=K+1
0092       DO 9 I=1,N
0093       CALL EXEC(24.6,ARGMA,I,A,IER)
0094       CALL TESTE(218)
0095       DO 21 J=1,N
0096   21 A(J)=A(J)+C(I)*R(J)
0097       CALL EXEC(24.8,ARGMA,I,A,IER)
0098       CALL TESTE(228)
0099   9 CONTINUE
0100       CALL EXEC(24.6,ARGMA,N1,A,IER)
0101       CALL TESTE(238)
0102       DO 22 J=1,N
0103   22 A(J)=A(J)+C(J)*R(N1)
0104       CALL EXEC(24.8,ARGMA,N1,A,IER)
0105       CALL TESTE(248)
0106   1 CONTINUE
0107       DO 16 K=N,1,-1
0108       IF(IQ(K)-K)17,16,17
0109   17 IQ=IQ(K)
0110       Z=A(IQ)
0111       A(IQ)=A(K)
0112       A(K)=Z
0113   16 CONTINUE
0114       CALL EXEC(24.8,ARGMA,N1,A,IER)
0115       CALL TESTE(258)
0116       RETURN
0117   5 WRITE(6,100)
0118  100 FORMAT(///5X"MATRIZ SINGULAR"//)
0119       RETURN
0120       END
0121       ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

6.4.3 - Programa LISTE

O programa *LISTE* tem a função de listar a matriz dos coeficientes. A listagem é feita submatriz por submatriz, devidamente selecionada pelos parâmetros *LINHA* e *COLUNA* fornecidos pelo usuário do programa. Ao parâmetro *NDV* é fornecido o número de subdivisões horizontais da rede, do qual se calcula a ordem das submatrizes que compõem a matriz dos coeficientes (*NEQB*).

Este programa foi elaborado com o fim de possibilitar a conferência da geração da matriz dos coeficientes do sistema de equações minimizantes.

a) Diagrama de Blocos



b) Listagem

```

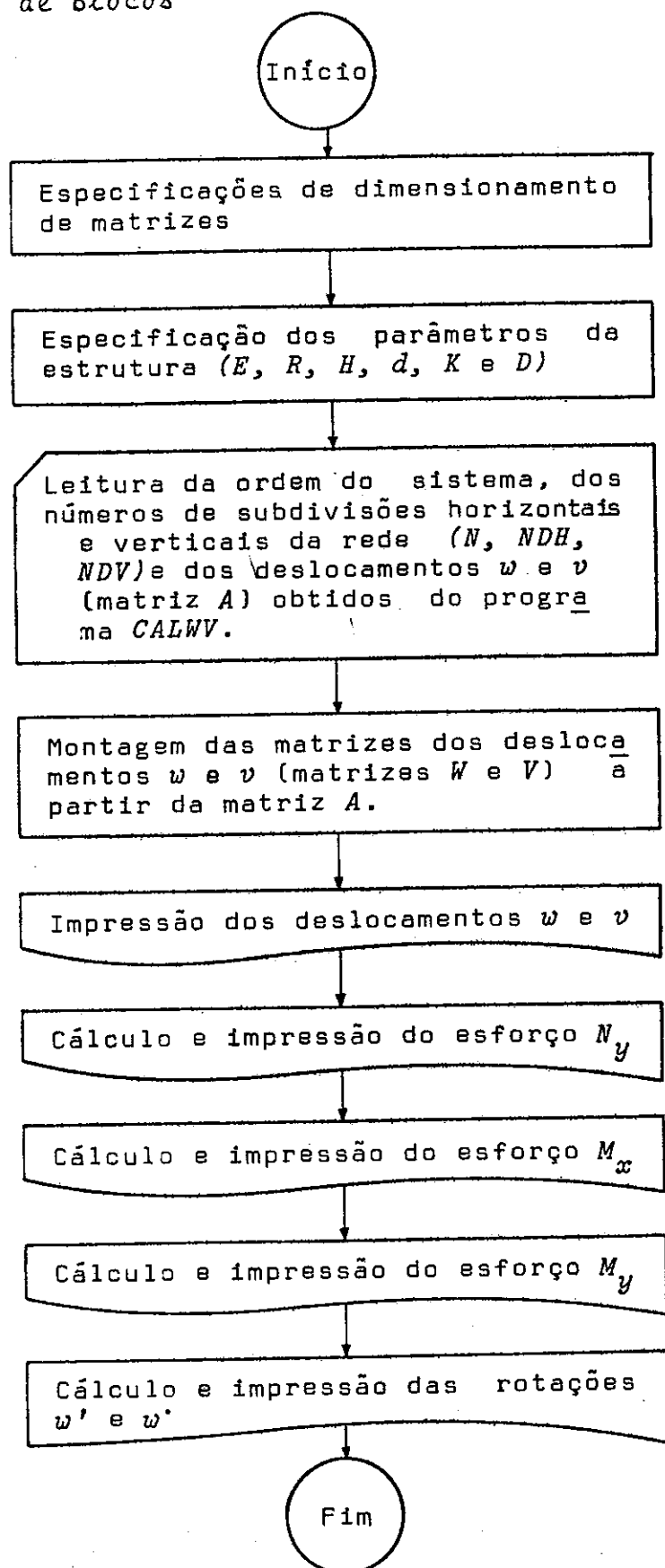
***** DISCO: MET002 * SUBC: 3 * ARO: DMA69 * 05/04/78 * 24H 42M 17S * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTR4
0002 PROGRAM LISTE
0003 C
0004 C * PROGRAMA P/04 LISTAR OS ELEMENTOS BLOCOS DIFERENTES DE ZE40
0005 C * DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DE SUA ESCOLHA
0006 C
0007 C * DISCO MET001 - ARQUIVO DA100
0008 C
0009 DIMENSION NARO(3),NOTR(2),A(496)
0010 INTEGER ITR(128),TRR(2048),COLUM,CI,CF
0011 DATA ITR/1,1/
0012 DATA NARO/244A,2HT0,1H1/
0013 C
0014 C * DEFINICAO DO ARQUIVO EFMP
0015 C
0016 CALL EXEC(24,1,OTR,128,TRR,NOTR,16,IER)
0017 CALL TESTE(1)
0018 CALL EXEC(24,4,NARO,100,1,175,1,IFR)
0019 CALL TESTE(2)
0020 C
0021 C * LEITURA DO NRO DE EQ. (NEQR)
0022 C
0023 READ(5,*)NDV
0024 NEQR=2*NDV-1
0025 K=2
0026 20 K=K+1
0027 READ(5,1)LINHA,COLUM
0028 1 FORMAT(2I2)
0029 IF(LIN-1,EQ,0)STOP 0000
0030 IF(MOD(K,3),EQ,0)50,60
0031 50 CALL EXEC(2,11068,62)
0032 CALL EXEC(3,11068,63)
0033 60 WRITE(6,2)LINHA,COLUM
0034 2 FORMAT(//1X'ELEMENTO'2I3/)
0035 LI=(LIN-1)*NEQR+1
0036 LF=LIN-ANEOH
0037 CI=(COLUM-1)*NEQR+1
0038 CF=COLUM*NEQR
0039 DO 10 I=CI,LF
0040 CALL EXEC(24,6,NARO,I,A,IER)
0041 CALL TESTE(3)
0042 10 WRITE(4,3)(A(M),M=CI,CF)
0043 3 FORMAT(1X,15F3.2)
0044 GO TO 20
0045 END
0046 ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****

```

6.4.4 - Programa ESFR0

Este programa calcula os esforços N_y , M_x e M_y e as rotações w' e v' com a melhor das quatro aproximações ensaiadas no capítulo 3, a aproximação γ . Além disso, imprime os deslocamentos w e v a partir dos quais se calculam os esforços e as rotações acima citados.

a) Diagrama de Blocos



b) Listagem do Programa ESFRO e das Subrotinas PL2, P2L2, P2P2 e PP2.

```

***** DISCO: MET002 * SUPR: 3 * APO: DMS80 * 05/08/78 * 24H 44M 26S * PAG 1 *****
-----1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-----80
0001 FTN=L
0002 PROGRAM ESFRO
0003 C
0004 C *** PROGRAMA PARA O CALCULO DOS ESFORÇOS NY, MX E MY, E
0005 C CALCULO DAS ROTACOES W1 E W2.
0006 C
0007 C W = DESLOCAMENTOS RADIAIS
0008 C V = DESLOCAMENTOS TANGENCIAIS
0009 C NY = ESFORÇO NY
0010 C MX = ESFORÇO MX
0011 C MY = ESFORÇO MY
0012 C WP = MATRIZ DERIVADA W PONTO
0013 C VP = MATRIZ DERIVADA V PONTO = - ROTACAO NA DIRECAO Y
0014 C WL = MATRIZ DERIVADA W LINHA = - ROTACAO NA DIRECAO X
0015 C WP2 = MATRIZ DERIVADA W 2 PONTOS
0016 C WL2 = MATRIZ DERIVADA W 2 LINHA
0017 C
0018 C E = MODULO DE ELASTICIDADE
0019 C R = RAO DE CURVATURA DA CASCA
0020 C L = LARGURA (ALTURA NO CASO)
0021 C DV = ESPESURA
0022 C CA = K = E.D**3/12
0023 C D = E.D.V
0024 C
0025 C N = NRO DE VALORES DE W E V CALCULADOS
0026 C NDV = NRO DE DIVISOES DA REDE AO LONGO DE W (DIRECAO X)
0027 C NDV = NRO DE DIVISOES DA REDE AO LONGO DO COMPRIMENTO (DIRECAO Y)
0028 C A = MATRIZ AUXILIAR QUE CONTERA OS N DESLOCAMENTOS CALCULADOS
0029 C PELO PROGRAMA CALWV
0030 C NEL = NRO DE VALORES DE W E V POR LINHA DA REDE
0031 C MX = ABERTURA DA MALHA NA DIRECAO X
0032 C MY = ABERTURA DA MALHA NA DIRECAO Y
0033 C P = MATRIZ OPERADORA ( CONTERA AS MATRIZES PARA O CALCULO DAS
0034 C DERIVADAS)
0035 C
0036 C DIMENSION W(17,17),V(17,17),WP(17,17),VP(17,17),WL(17,17)
0037 C DIMENSION WP2(17,17),WL2(17,17),A(496)
0038 C REAL NY(17,17),MX(17,17),MY(17,17)
0039 C REAL KSP,KSP2
0040 C REAL P(17,17)
0041 C EQUIVALENCES (NY(1,1),MX(1,1),MY(1,1)),(WP(1,1),VP(1,1))
0042 C
0043 C --- DADOS DA ESTRUTURA E CALCULO DAS CONSTANTES DAS EXPRESSOES
0044 C DOS ESFORÇOS E ROTACOES
0045 C
0046 C E=2.E5
0047 C R=12./3.141593*1.E4
0048 C DV=.24
0049 C CA=E.D**3/12.
0050 C D=E.D.V
0051 C
0052 C
0053 C --- LEITURA DOS DADOS PROVENIENTES DO PROGRAMA CALWV
0054 C
0055 C READ(5,*)N,NDV,NDV
0056 C READ(5,111)(A(I),I=1,N)
0057 C 111 FORMAT(5E14.7)
0058 C NY=V/NDV
0059 C MY=V/NDV
0060 C
0061 C --- SEPARACAO DOS W E V DE A
0062 C
0063 C NEL=2*NDV-1
0064 C INIC=2
0065 C IFIM=NEL-1
0066 C DO 10 I=1,NDV
0067 C INIC1=(I-1)*NEL+1
0068 C +(I-1)*A(INIC1)
0069 C J=1
0070 C DO 15 K=INIC,IFIM,2
0071 C J=J+1
0072 C W(I,J)=A(K)
0073 C V(I,J)=A(K+1)
0074 C INIC=INIC+NEL
0075 C IFIM=IFIM+NEL
0076 C 10 CONTINUE

```



```

0077 C
0078 C --- COLOCAR ZEROS ONDE OS DESLOCAMENTOS SAO NULOS PELAS
0079 C CONDICÖES DE CONTORNO E SIMETRIA
0080 C
0081 C NDVI=NDV+1
0082 C NDH1=NDH+1
0083 C DO 20 I=1,NDH
0084 C V(I,1)=0.
0085 C V(I,NDVI)=0.
0086 C 20 * (I,NDVI)=0.
0087 C DO 30 J=1,NDV1
0088 C V(NDH1,J)=0.
0089 C 30 *(NDH1,J)=0.
0090 C
0091 C --- IMPRESSAO DOS DESLOCAMENTOS W E V
0092 C
0093 C POSICIONAMENTO DE PAGINA
0094 C
0095 C CALL EXEC(13,1106R,67)
0096 C CALL EXEC(13,1106R,63)
0097 C --- DESLOCAMENTOS W
0098 C WRITE(4,112)
0099 C 112 FORMAT(' DESLOCAMENTOS W EM MILIVETROS?')
0100 C CALL IMPR(NDH1,NDV1,W)
0101 C --- DESLOCAMENTOS V
0102 C WRITE(4,113)
0103 C 113 FORMAT(' DESLOCAMENTOS V EM MILIVETROS?')
0104 C CALL IMPR(NDH1,NDV1,V)
0105 C
0106 C *** CALCULO DOS ESFORÇOS
0107 C
0108 C CALCULO DE NY
0109 C -----
0110 C CALCULO DE VP (V PONTO)
0111 C
0112 C CALL P22(NDV,P)
0113 C CTE=1./(2.*HY)
0114 C CALL MULT(NDV1,CTE*V*P,VP)
0115 C
0116 C CALCULO DE W2P (W 2 PONTOS)
0117 C
0118 C CALL P2PP(NDV,P)
0119 C CTE=1./HY/HY
0120 C CALL MULT(NDV1,CTE*V*P,W2P)
0121 C
0122 C CALCULO DE NY
0123 C
0124 C CSR=0./P
0125 C KSR=CA/P
0126 C DO 40 I=1,NDH1
0127 C DO 40 J=1,NDV1
0128 C 40 NY(I,J)=D*VP(I,J)+CSR*W(I,J)+KSR*W2P(I,J)
0129 C
0130 C --- IMPRESSAO DOS NY
0131 C
0132 C POSICIONAMENTO DE PAGINA
0133 C
0134 C CALL EXEC(13,1106R,62)
0135 C CALL EXEC(13,1106R,53)
0136 C WRITE(6,1)
0137 C 1 FORMAT(' ESFORÇO NY EM TONELADAS?')
0138 C CALL IMPR(NDH1,NDV1,NY)
0139 C
0140 C CALCULO DE MX
0141 C -----
0142 C CALCULO DE W2L (W 2 LINHAS)
0143 C
0144 C CALL P2L(NDH,P)
0145 C CTE=1./HY/HY
0146 C CALL MULT(NDH1,CTE*P*W,W2L)
0147 C
0148 C CALCULO DE MX
0149 C
0150 C DO 50 I=1,NDH1
0151 C DO 50 J=1,NDV1
0152 C 50 MX(I,J)=CA*W2L(I,J)

```

```
0153 C
0154 C --- IMPRESSAO DOS MX
0155 C
0156 C      WRITE(6,*)
0157 C      3 FORMAT('X' ESFORCO MX EM TONELADAS MILIM./MILIM.*/)
0158 C      CALL INPR(NDI,NDVI,MX)
0159 C
0160 C      CALCULO DE MY
0161 C
0162 C      KSRP=C1/P/S
0163 C      DO 60 I=1,NDI
0164 C      DO 60 J=1,NDVI
0165 C      60 MY(I,J)=C0+2P(I,J)+KSRP*W(I,J)
0166 C
0167 C --- IMPRESSAO DOS MY
0168 C
0169 C      WRITE(6,*)
0170 C      4 FORMAT('X' ESFORCO MY EM TONELADAS MILIM./MILIM.*/)
0171 C      CALL INPR(NDI,NDVI,MY)
0172 C
0173 C --- CALCULO DAS ROTACOES W E W.
0174 C
0175 C      CALL PR2(NDV,P)
0176 C      CTE=1./(2.*NY)
0177 C      CALL MULT(NDVI,CTE,W,P,W,P)
0178 C      CALL PL2(NDH,P)
0179 C      CTF=1./(2.*NY)
0180 C      CALL MULT(NDH,CTE,P,W,WL)
0181 C
0182 C --- IMPRESSAO DAS ROTACOES
0183 C
0184 C      CALL EXEC(3,1106R,42)
0185 C      CALL EXEC(3,1106R,63)
0186 C --- IMPRESSAO DOS W
0187 C      WRITE(6,5)
0188 C      5 FORMAT(' ROTACAO W'*/)
0189 C      DO 70 I=1,NDHI
0190 C      70 WRITE(6,6)I,(W(I,J),J=1,NDVI)
0191 C      6 FORMAT(' LINHA:'//2,5E15.7/(9X,5E15.7))
0192 C --- IMPRESSAO DOS W PONTO
0193 C      WRITE(6,7)
0194 C      7 FORMAT('///' ROTACAO W PONTO'*/)
0195 C      DO 80 I=1,NDHI
0196 C      80 WRITE(6,8)I,(WP(I,J),J=1,NDVI)
0197 C      END
0198 C
0199 C
0200 C *** SUBROTINA IMPR - IMPRESSAO DE RESULTADOS
0201 C
0202 C      SUBROUTINE IMPR(N,Y,X)
0203 C      DIMENSION X(17,17)
0204 C      DO 10 I=1,N
0205 C      10 WRITE(6,1)I,(X(I,J),J=1,N)
0206 C      1 FORMAT(' LINHA:'//2,13F9.3/(9X,13F9.3))
0207 C      RETURN
0208 C      END
0209 C
0210 C *** SUBROTINA MULT - MULTIPLICACAO DE MATRIZES
0211 C
0212 C      SUBROUTINE MULT(N, CTE,X,Y,Z)
0213 C      DIMENSION X(17,17),Y(17,17),Z(17,17)
0214 C      DO 10 I=1,N
0215 C      DO 10 J=1,N
0216 C      Z(I,J)=0.
0217 C      DO 10 K=1,N
0218 C      10 Z(I,J)=Z(I,J)+X(I,K)*Y(K,J)*CTE
0219 C      RETURN
0220 C      END
0221 C
0222 C ***** LISTAGEM TERMINADA *****
```



```
***** DISCO: METC12 * SRC: 3 * ARG: DMA79 * 05/08/78 * 24H 46M 11S * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FIN4.L
0002 SUPROUTINE PL2(NDH,P)
0003 C
0004 C *** SUPROUTINA PARA GERACAO DA MATRIZ OPERADOR LINHA
0005 C COM POLINOMIO INTERPOLADOR DO SEGUNDO GRAU
0006 C COM A CONDICAO DE CONTORNO USUAL
0007 C
0008 C DIMENSION P(17,17)
0009 C
0010 C --- ZERAR A MATRIZ P
0011 C
0012 C KK=NDH-1
0013 C DO 10 I=1, KK
0014 C DO 10 J=1, KK
0015 C 10 P(I,J)=0.
0016 C
0017 C --- GERAR OS ELEMENTOS # 0 POR LINHA
0018 C
0019 C --- LINHAS 1 E 2
0020 C P(1,1)=-3.
0021 C P(1,2)=4.
0022 C P(1,3)=-1.
0023 C P(2,1)=-1.
0024 C P(2,3)=1.
0025 C --- LINHAS # 3 A KK-2
0026 C KK2=KK-2
0027 C DO 20 I=3, KK2
0028 C P(I,I-1)=-1.
0029 C 20 P(I,I+1)=1.
0030 C
0031 C --- LINHA KK-1
0032 C
0033 C P(KK-1, KK-2)=-1.
0034 C RETURN
0035 C END
0036 C ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

```
***** DISCO: METC12 * SRC: 3 * ARG: DMA79 * 05/08/78 * 24H 45M 35S * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FIN4
0002 SUPROUTINE P2L2(NDH,P)
0003 C
0004 C *** SUPROUTINA PARA GERACAO DA MATRIZ OPERADOR P 2 LINHAS
0005 C * COM POLINOMIO DO SEGUNDO GRAU, JA COM AS CONDICAOES DE
0006 C * CONTORNO USUAIS
0007 C
0008 C DIMENSION P(17,17)
0009 C
0010 C * ZERAR A MATRIZ P
0011 C
0012 C KK=NDH-1
0013 C DO 30 I=1, KK
0014 C DO 30 J=1, KK
0015 C 30 P(I,J)=0.
0016 C --- GERAR OS ELEMENTOS # 0 POR LINHA
0017 C
0018 C --- LINHA 1
0019 C P(1,1)=1.
0020 C P(1,2)=-2.
0021 C P(1,3)=1.
0022 C --- LINHAS # 3 A KK-2
0023 C KK2=KK-2
0024 C DO 20 I=3, KK2
0025 C P(I,I-1)=1.
0026 C P(I,I)=-2.
0027 C 20 P(I,I+1)=1.
0028 C --- LINHAS KK-1 E KK
0029 C KK1=KK-1
0030 C P(KK1, KK1-1)=1.
0031 C P(KK1, KK1)=2.
0032 C P(KK1, KK1+1)=2.
0033 C RETURN
0034 C END
0035 C ENDS
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

```
***** DISCO: VETOR2 * SUBC: 3 * ARQ: DMA74 * 05/09/78 * 24H 45M 47S * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FTA4
0002 SUPROUTINE PR2(MDV,P)
0003 C
0004 C *** SUPROUTINA PARA GERACAO DA MATRIZ OPERADOR P 2 PONTOS
0005 C * COM POLINOMIO INTERPOLADOR DO SEGUNDO GRAU, JA COM AS
0006 C * CONDICIONES DE CONTORNO USUAIS
0007 C
0008 DIMENSION P(17,17)
0009 C
0010 C * ZERAR A MATRIZ P
0011 C
0012 KK=NDV-1
0013 DO 30 I=1,KK
0014 DO 30 J=1,KK
0015 30 P(I,J)=0.
0016 C
0017 C --- GERACAO DOS ELEMENTOS # 0 POR COLUNA
0018 C
0019 C --- COLUMNA 1
0020 P(1,1)=-2.
0021 P(2,1)=2.
0022 C --- COLUMNAS 2 A KK-2
0023 KK2=KK-2
0024 DO 10 J=2,KK2
0025 P(J-1,J)=1.
0026 P(J,J)=-2.
0027 10 P(J+1,J)=1.
0028 C --- COLUMNAS KK-1 E KK
0029 KK1=KK-1
0030 P(KK1-1,KK1)=1.
0031 P(KK1,KK1)=-2.
0032 P(KK1,KK1)=2.
0033 RETURN
0034 END
0035 ENDF
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```

```
***** DISCO: VETOR2 * SUBC: 3 * ARQ: DMA74 * 05/09/78 * 24H 46M 05 * PAG 1 *****
1-----10-----20-----30-----40-----50-----60-----70-2-----80
0001 FTA4
0002 SUPROUTINE PR2(MDV,P)
0003 C
0004 C *** SUPROUTINA PARA GERACAO DA MATRIZ OPERADOR P PONTO
0005 C * COM POLINOMIO DO SEGUNDO GRAU, JA COM AS CONDICIONES DE
0006 C * CONTORNO USUAIS
0007 C
0008 DIMENSION P(17,17)
0009 C
0010 C --- ZERAR A MATRIZ P
0011 C
0012 KK=NDV-1
0013 DO 30 I=1,KK
0014 DO 30 J=1,KK
0015 30 P(I,J)=0.
0016 C
0017 C --- GERACAO DOS ELEMENTOS # 0 POR COLUNA
0018 C
0019 C --- COLUMNA 1
0020 C
0021 P(2,1)=2.
0022 C --- COLUMNAS 2 A KK-2
0023 KK2=KK-2
0024 DO 10 J=2,KK2
0025 P(J-1,J)=-1.
0026 10 P(J+1,J)=1.
0027 C --- COLUMNA KK-1
0028 P(KK-2,KK-1)=-1.
0029 RETURN
0030 END
0031 ENDF
***** LISTAGEM TERMINADA *****
```