

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

FLEXO-TORÇÃO: TEORIAS DE 1.º e 2.º ORDEM
AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO

Eng. DAGOBERTO DARIO MORI

SÃO CARLOS, OUTUBRO DE 1978

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

FLEXO-TORÇÃO: TEORIAS DE 1^a e 2^a ORDEM
AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO

ENG. DAGOBERTO DARIO MORI

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador:

PROF. DR. MUNIR RACHID

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Munir Rachid
Prof. Dr. Tioeturo Yagui
Prof. Dr. Odilson Coimbra Fernandes

São Carlos, Outubro de 1978

À Elzinha e ao Cássio.
Aos meus pais e avô.

Agradeço:

Ao Prof. Dr. Munir Rachid, como amigo, pelo apoio e estímulo nos momentos difíceis pelos quais passei; como orientador, pela orientação dedicada e constante.

Aos colegas e amigos do Departamento, em especial àqueles que me ampararam com incentivos e sempre se mostraram presentes.

Ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos, pela utilização de seus equipamentos.

Aos funcionários do Departamento, em particular a Sra. Wilma Provinciali Vall pela datilografia deste trabalho, ao Sr. João Paulo Moretti pelos desenhos e ao Sr. Casimiro Paschoal da Silva.

RESUMO

A determinação dos esforços solicitantes em problemas de torção, de maneira geral, acarreta cálculos por demais trabalhosos.

Neste trabalho, em uma primeira fase, é apresentado um programa para computador que automatiza o processo energético de cálculo em teoria de 1^a ordem.

Os esforços solicitantes calculados são: bimomento, momento de flexo-torção, momento de torção livre e momento torçor; são também calculados os ângulos de giro e as suas primeiras derivadas.

Em uma segunda fase, aborda-se o mesmo problema em teoria de 2^a ordem: são feitas as considerações teóricas pertinentes e o cálculo também é automatizado.

As barras estudadas podem ser isostáticas ou hiperestáticas, e os vínculos rígidos ou elásticos.

ABSTRACT

In general, the determination of internal forces in torsion problems implies in cumbersome calculations.

In this dissertation, in a first part, a computer program aiming the automatization of the energy method in first order theory was presented.

The internal forces computed are: bimoment, warping, Saint-Venant's and total torsional moments; rotation angles and their first derivatives are calculated too.

In a second part, the same problem is discussed in second order theory: theoretical considerations are done and computations are also made automatic.

Studied beams can be isostatic or hiperstatic, and their supports rigid or elastic.

SINBOLOGIA USADA NESTE TRABALHO

- U - energia de deformação.
- T - energia potencial das cargas aplicadas.
- V - energia potencial total.
- x - eixo longitudinal pelos centros de gravidade das seções.
- y, z - eixos principais de inércia.
- CT - centro de torção.
- CG - centro de gravidade.
- t - espessura da seção transversal.
- ω - área setorial.
- n - distância do CT à tangente à linha do esqueleto.
- s - ordenada ao longo da linha do esqueleto.
- r_e - raio vetor de um ponto do esqueleto com centro no CT.
- M_t - momento torçor total.
- M_{ft} - momento de flexo-torção.
- M_ϱ - momento torçor livre.
- J_t - momento de inércia à torção.
- J_ω - momento setorial de inércia.
- ϕ - ângulo de rotação da seção.
- u - empenamento da seção (deslocamento na direção de x).
- v - deslocamento na direção da ordenada s.
- E - módulo de elasticidade do material.
- G - módulo de elasticidade transversal do material.
- S_ω - momento estático setorial.

- S - área da seção transversal.
- E - bimomento.
- B* - bimomento de 2^a ordem.
- r - segmento característico ou comprimento de comparação.
- m - momento torçor distribuído.
- M - momento torçor aplicado.
- B_a - bimomento aplicado.
- P - carga concentrada.
- σ - tensões normais.
- τ - tensões de cisalhamento.
- ϵ - deformação específica devida a σ .
- γ - distorção.
- e - ordenada (na espessura da seção transversal) perpendicular a s.
- α - ângulo de inclinação de um segmento infinitésimo longitudinal.
- δ - empenamento de segunda ordem.
- U _{ω} - característica geométrica de Vlassov.
- i, j - extremidades de segmento.
- h_i - comprimento de segmento.
- l - comprimento de barra.
- K - constante elástica de mola.

Í N D I C E

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.1 - Conceito da energia	1
1.2 - Conceito físico do método energético	2
2. RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO	3
2.1 - Referencial adotado	3
2.2 - Hipóteses iniciais	3
2.3 - Área setorial	3
2.4 - Torção uniforme, ou livre, ou de Saint- Venant	5
2.5 - Empenamento da seção	5
2.6 - Torção não uniforme ou flexo-torção	7
2.7 - Esforço solicitante bimomento	10
2.8 - Condições de contorno	12
3. PROBLEMAS ESTUDADOS NESTE TRABALHO	13

CAPÍTULO II - DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

1. CARGAS APLICADAS E DESLOCAMENTOS	15
2. TENSÕES	15
3. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	16
4. CONVENÇÃO ADOTADA NESTE TRABALHO	21
4.1 - Convenção para o giro ϕ	21
4.2 - Convenção para a carga torçora	21
4.3 - Convenção para o bimomento aplicado	22
5. ENERGIA POTENCIAL DAS CARGAS	22
5.1 - Energia potencial dos momentos torçores aplicados	22
5.2 - Energia potencial dos bimomentos aplicados ..	23
6. EXPRESSÃO DA ENERGIA POTENCIAL	25

CAPÍTULO III - AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS
ANGULARES, BIMOMENTO, MOMENTO DE FLEXO-TOR-
ÇÃO E MOMENTO DE TORÇÃO LIVRE

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	26
2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A FORMA DE SE APLICAR O PROCESSO DE RITZ AO ESTUDO, EM TEORIAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM	27
3. APLICAÇÃO DO PROCESSO DE RITZ AO CÁLCULO DOS DESLO- CAMENTOS ϕ EM TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM	29
3.1 - Função adotada para os deslocamentos ϕ	29
3.2 - Contribuição do segmento i para a expressão da energia potencial total	31
3.3 - Construção do sistema de equações	33
3.4 - Resolução do sistema de equações obtido	37
4. CÁLCULO, EM TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM, DOS VALORES DO BIMOMENTO, MOMENTO DE FLEXO-TORÇÃO, MOMENTO DE TORÇÃO LIVRE E MOMENTO TORÇOR FINAL	37
5. VINCULAÇÃO ELÁSTICA	40
5.1 - Vínculos de garfo elásticos (molas a torção).	40
5.2 - Engastamentos elásticos ao efeito de esfor- ços axiais (molas a bimomento)	42

CAPÍTULO IV - PROCEDIMENTO DE CÁLCULO E EXEMPLOS NUMÉRICOS

1. PROGRAMA PARA AUTOMATIZAR O CÁLCULO	45
2. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VERIFICAÇÕES	47
2.1 - Primeiro exemplo (bimomento aplicado)	48
2.2 - Segundo exemplo (momento torçor uniformemente distribuído aplicado)	58
2.3 - Terceiro exemplo (momento torçor concentrado aplicado)	67
2.4 - Quarto exemplo (carga concentrada axial não centrada aplicada)	72
2.5 - Quinto exemplo (bimomento aplicado)	78

2.6 - Sexto exemplo (molas a torção)	83
2.7 - Sétimo exemplo (molas a bimomento)	89
2.8 - Oitavo exemplo	95
3. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES SOBRE OS EXEMPLOS APRESENTADOS	98

CAPÍTULO V - DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO EM TEORIA DE
SEGUNDA ORDEM

1. APLICAÇÃO DO PROCESSO AO CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS ϕ EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM	99
1.1 - Cálculo da contribuição do termo de 2ª ordem	100
1.2 - Acréscimos na matriz elementar das caracte- rísticas geométricas e elásticas	103
2. CÁLCULO, EM TEORIA DE 2ª ORDEM, DOS VALORES DO BIMOMENTO, MOMENTO DE FLEXO-TORÇÃO, MOMENTO DE TORÇÃO LIVRE E MOMENTO TORÇOR FINAL	105
2.1 - Cálculo do momento de torção livre	105
2.2 - Cálculo das demais grandezas de flexo- -torção	106
3. PROGRAMA PARA COMPUTADOR AUTOMATIZANDO O CÁLCULO ..	107
3.1 - Novos dados para o programa	107
3.2 - Comentários sobre o programa	107
4. EXEMPLOS	108
4.1 - Primeiro exemplo (bimomento aplicado)	108
4.2 - Segundo exemplo (momento torçor concentrado aplicado)	125
4.3 - Terceiro exemplo (momento torçor uniforme- mente distribuído aplicado)	135
4.4 - Quarto exemplo (molas a torção e molas a bimomento)	145
5. CONCLUSÕES	162

APÊNDICE

1. PROGRAMA, EM LINGUAGEM FORTRAN, PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM TEORIA DE 1 ^a ORDEM	164
2. PROGRAMA, EM LINGUAGEM FORTRAN, PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM TEORIA DE 2 ^a ORDEM	168
3. SUBROTINA USADA NOS PROGRAMAS APRESENTADOS	172
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	174

CAPÍTULO I

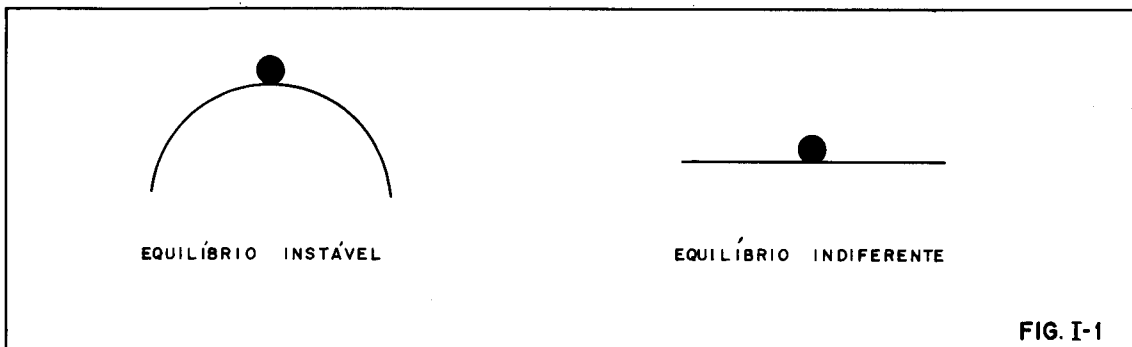
INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

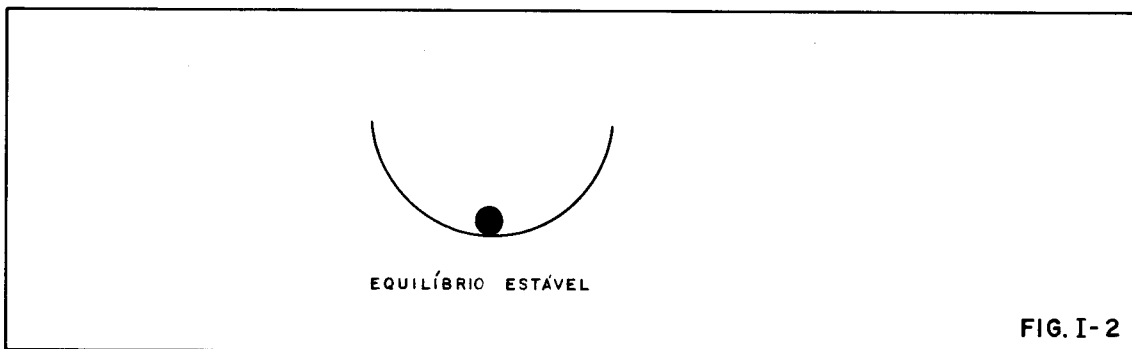
1.1 - Conceito de energia

Para se desenvolver o estudo da flexo-torção de barras pelo método energético é conveniente, inicialmente, observar o seguinte:

1.1.1 - A energia de um sistema é máxima ou estacionária quando esse sistema se encontra, respectivamente, em equilíbrio instável ou indiferente (ver figura I-1).



1.1.2 - A energia de um sistema é mínima quando o sistema se encontra em equilíbrio estável (ver figura I-2).



1.2 - Conceito físico do método energético

Para se deslocar uma estrutura, inicialmente em posição de equilíbrio estável, a uma posição vizinha, se executa um trabalho, isto é, se acrescenta uma energia potencial externa ao sistema. Pode-se portanto concluir que uma estrutura terá a mínima energia potencial total quando estiver na posição de equilíbrio estável.

Usa-se a seguinte notação:

U = energia potencial dos esforços internos, ou energia de deformação.

T = energia potencial das cargas aplicadas.

V = U + T = energia potencial total.

De acordo com o exposto tem-se, para o equilíbrio dos sistemas com um grau de liberdade:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

onde θ é uma ordenada que define a posição (ângulo de giro, deslocamento linear, etc) do sistema.

Tem-se, ainda:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0 \quad \text{que indica o equilíbrio indiferente.}$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0 \quad \text{que indica o equilíbrio instável.}$$

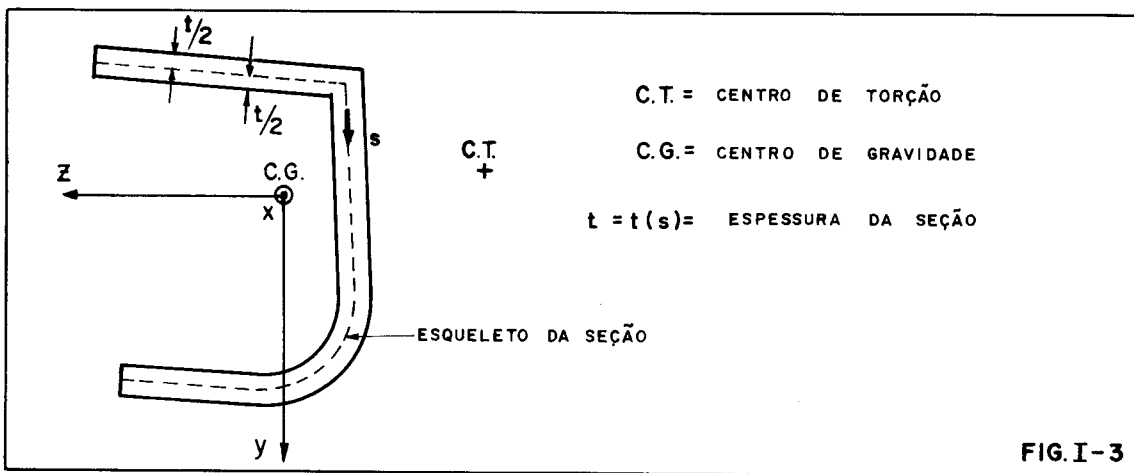
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0 \quad \text{que indica o equilíbrio estável.}$$

2. RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO

2.1 - Referencial adotado

A barra será referida a um sistema de eixos x y z , sendo y e z eixos principais de inércia da seção e x um eixo longitudinal pelos centros de gravidade das seções.

Além dos eixos mencionados, se faz uso também de uma coordenada s ao longo do esqueleto da seção (ver figura I-3).



2.2 - Hipóteses iniciais

- A espessura t é bem menor que as dimensões características da seção e estas, por sua vez, são bem menores que o comprimento da barra.
- A seção é indeformável em seu plano e suas dimensões não variam com x .

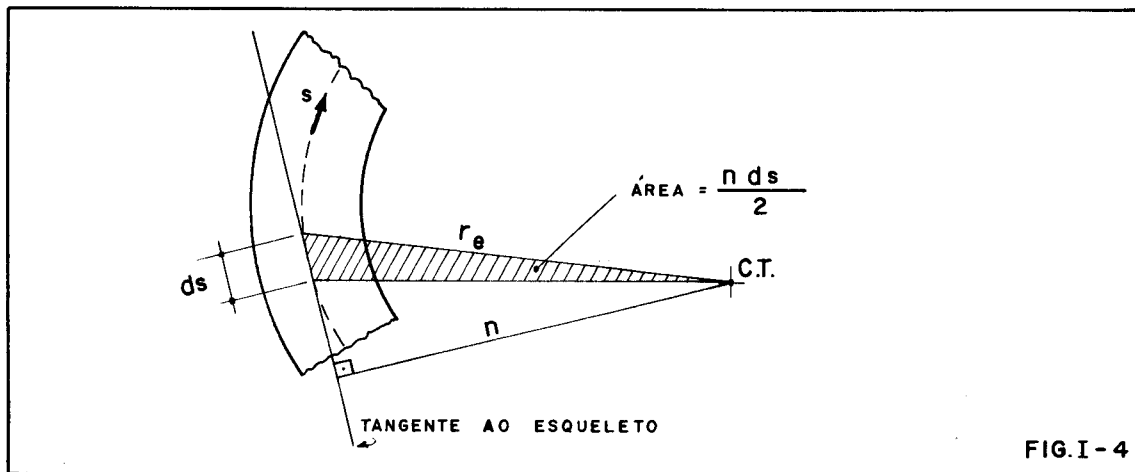
2.3 - Área setorial

É uma característica geométrica da seção definida por:

$$\omega = \int_{s_1}^s n \, ds \quad \dots (I-1)$$

sendo n a distância do centro de torção à tangente ao esqueleto da seção (figura I-4).

O nome "área setorial" provém da propriedade esquematizada na figura I-4.



Com a finalidade de facilitar certas aplicações da teoria de flexo-torção, adota-se a origem da ordenada s em um ponto O_s de modo que

$$\int_S \omega \, ds = 0$$

onde $ds = t \, ds$

Adota-se ω positivo quando, para um observador olhando no sentido positivo de x o raio vetor r_e gira no sentido horário partindo de O_s para um ponto genérico.

2.4 - Torção uniforme ou livre ou de Saint Venant

Ocorre a torção livre ou uniforme quando são satisfeitas as seguintes condições:

- a) o momento torçor é constante ao longo do eixo x ;
- b) não há vínculos que impeçam deslocamentos longitudinais;
- c) a seção é constante com x .

A tensão tangencial, provocada pela torção livre,

é linearmente distribuída na espessura da seção, sendo nula no esqueleto e tendo seus valores máximos nas bordas da dos por:

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} t \quad \dots (I-2)$$

onde: M_t = momento torçor

J_t = momento de inércia à torção definido por:

$$J_t = \int_s (t^3 ds) / 3$$

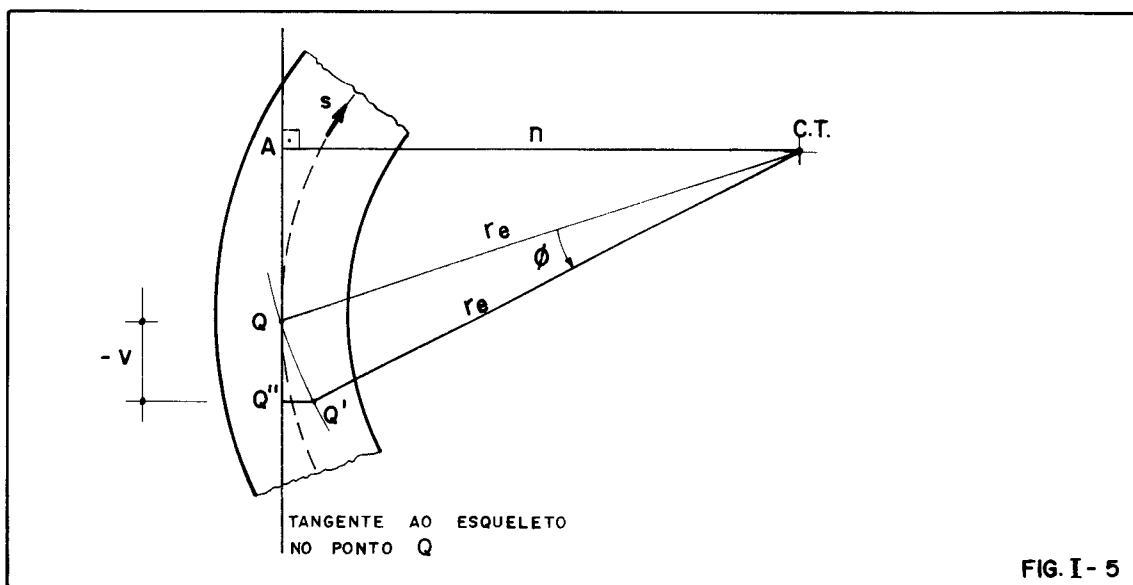
A derivada do ângulo de giro da seção é dada por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi' = \frac{M_t}{G J_t} \quad \dots (I-3)$$

2.5 - Empenamento da seção

O empenamento da seção é o deslocamento u na direção de x causado pela rotação ϕ da seção.

Devido ao giro ϕ da seção em torno do centro de torção, um ponto do esqueleto sofrerá um deslocamento QQ' indicado na figura I-5.



Deslocamentos u têm a direção de x e deslocamentos v a direção da ordenada s .

Para ângulos pequenos, conforme figura I-5

$$\overline{QQ'} = r_e \phi$$

onde r_e é o raio vetor que une o centro de torção com o ponto Q genérico do esqueleto.

Seja $\overline{QQ''}$ a projeção do deslocamento na direção da tangente ao esqueleto por Q . Essa projeção é negativa por causa das convenções do ângulo de giro e da ordenada s ao longo do esqueleto (ver convenção de sinais para a área setorial e para o ângulo de giro).

Da semelhança dos triângulos $(CT)AQ$ e $QQ''Q'$ pode-se deduzir:

$$\frac{-v}{r_e \phi} = \frac{n}{r_e} \quad \text{ou} \quad -v = n \phi$$

ou:

$$\frac{dv}{dx} = -n \frac{d\phi}{dx} = -n \phi'$$

Como a tensão tangencial é nula no esqueleto, pela lei de Hooke se conclui que a distorção γ de um elemento $ds dx$ situado no plano tangente ao esqueleto também é nula. Isto tem como consequência, pela teoria da elasticidade:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial s} = n \phi'$$

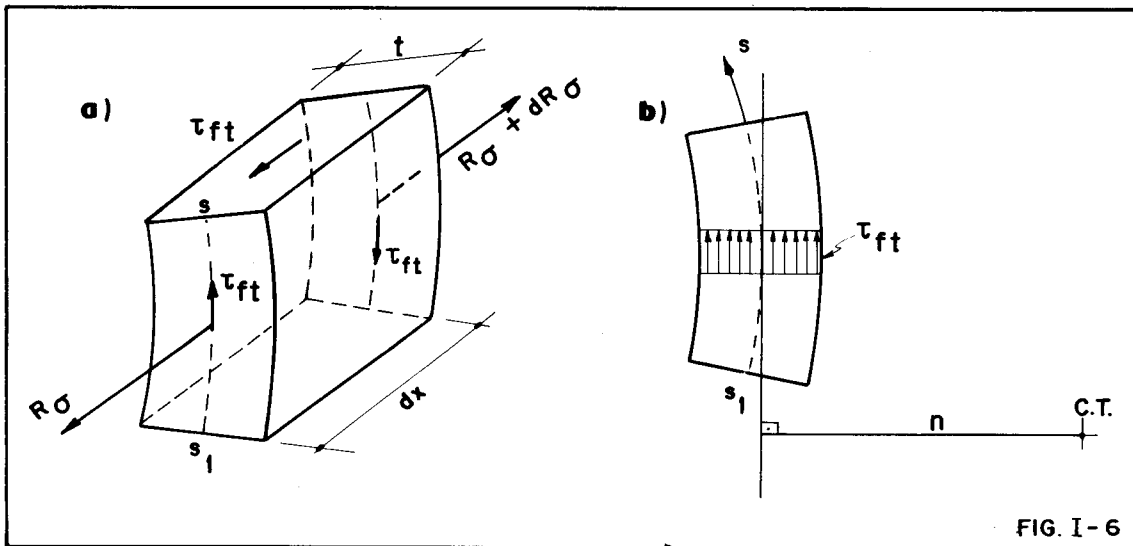
Como na torção livre o deslocamento longitudinal não depende de x , tem-se:

$$\frac{du}{ds} = n \phi'$$

sendo σ_x a tensão normal de flexo-torção produzida pelo impedimento parcial do empenamento.

A proporcionalidade entre σ_x e ω chama a atenção sobre o fato de que as tensões σ não têm resultante força nem momento

A figura I-6.a representa um elemento de comprimento dx limitado pelas ordenadas s_1 (na borda da seção) e s .



O equilíbrio deste elemento exige a presença de tensões de cisalhamento na face $t \cdot dx$ para equilibrar a variação das tensões σ_x . Estas tensões, típicas da flexo-torção, são indicadas por τ_{ft} e supostas uniformemente distribuídas sobre a espessura t .

Seja R_σ a resultante das tensões σ_x

$$R_\sigma = \int_{s_1}^s \sigma_x dS$$

Usando a expressão (I-6), obtém-se:

$$R_\sigma = E \phi'' \int_{s_1}^s \omega dS$$

O equilíbrio do elemento considerado na figura I-6.a fornece:

$$\tau_{ft} \cdot t \cdot dx = d R_{\sigma} = \frac{d R_{\sigma}}{dx} \cdot dx$$

Portanto:

$$\tau_{ft} = \frac{E \phi'''}{t} \int_{s_1}^s \omega \, dS \quad \dots (I-7)$$

Com o aparecimento destas tensões τ_{ft} , a equação (I-4), base de cálculo da flexo-torção, parece ficar ameaçada uma vez que é resultante da suposição de $\tau = 0$ no esqueleto. Acontece, entretanto, que nas seções delgadas, como as tensões τ provenientes da torção livre são muito grandes em comparação com as τ_{ft} da flexo-torção, a equação (I-4) continua sendo uma aproximação muito boa.

Apesar disso, a contribuição das tensões τ_{ft} para o momento torçor (M_t) é apreciável, uma vez que estas tensões trabalham com braços bem maiores (n) que as tensões τ da torção livre (figura I-6.b).

Portanto, sendo M_{ft} o momento de flexo-torção, tem-se:

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ft} \, dS \, n \quad \text{(Integral estendida a toda a seção)}$$

usando as expressões (I-7) e (I-1), e efetuando a integração por partes, obtém-se:

$$M_{ft} = -E \phi''' \int_{s_1}^{s_2} \omega^2 \, dS \quad \dots (I-8)$$

São agora introduzidas as seguintes características geométricas de seção, denominadas por analogia com expressões conhecidas da Resistência dos Materiais:

a) Momento setorial de inércia

$$J_{\omega} = \int_S \omega^2 \, dS \quad \dots (I-9)$$

b) Momento estático setorial

$$S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega \, dS \quad \dots (I-10)$$

Portanto, a expressão (I-8) pode ser assim escrita:

$$M_{ft} = -E J_{\omega} \phi''' \quad \dots (I-11)$$

O momento torçor (M_t) é, portanto, resultante da soma de duas parcelas

$$M_t = M_{\ell} + M_{ft} \quad \dots (I-12)$$

onde M_{ℓ} é o momento de torção livre fornecido pela expressão (I-3):

$$M_{\ell} = G J_t \phi' \quad \dots (I-13)$$

A substituição de M_{ft} e M_{ℓ} por suas expressões, respectivamente, (I-11) e (I-13), em (I-12) fornece a equação diferencial no ângulo de giro:

$$E J_{\omega} \phi''' - G J_t \phi' = -M_t \quad \dots (I-14)$$

2.7 - Esforço solicitante bimomento

Define-se o bimomento como:

$$B = \int_S \sigma_x \omega \, dS \quad \dots (I-15)$$

Utilizando-se a expressão (I-6), obtêm-se:

$$B = E \phi'' \int_S \omega^2 \, dS$$

ou, usando a expressão (I-9):

$$B = E J_{\omega} \phi'' \quad \dots (I-16)$$

Colocando-se a expressão (I-16) em (I-6), obtêm-se:

$$\sigma_x = \frac{B}{J_{\omega}} \omega \quad \dots (I-17)$$

Derivando-se em relação a x a expressão (I-16) e comparando-a com a (I-11) obtêm-se:

$$M_{ft} = -B' \quad \dots (I-18)$$

Com a utilização de (I-10), (I-11) e (I-18) em (I-7), obtêm-se:

$$\tau_{ft} = \frac{B' S_{\omega}}{t J_{\omega}} \quad \dots (I-19)$$

Levando-se as expressões (I-13) e (I-18) em (I-12) resulta:

$$M_t = C J_t \phi' - B'$$

Derivando em relação a x, obtêm-se:

$$\frac{d M_t}{dx} = C J_t \phi'' - B''$$

A utilização de (I-16) fornece:

$$M'_t = \frac{C J_t}{E J_{\omega}} B - B'' \quad \dots (I-20)$$

Para simplificar a redação, se define um comprimento de comparação ou segmento característico pela relação:

$$r = \sqrt{\frac{E J_{\omega}}{C J_t}} \quad \dots (I-21)$$

que, levada na expressão (I-20), fornece:

$$r^2 B'' - B = -r^2 m \quad \dots (I-22)$$

onde $m = \frac{dM}{dx}$ é a carga torçora distribuída.

A expressão (I-22) representa a nova equação diferencial do problema de flexo-torção, sendo que a condição de $m = \text{constante}$ atende quase que todos os casos práticos.

2.8 - Condições de contorno

As constantes de integração resultam das seguintes condições de contorno:

- a) Extremidade livre: sendo $\sigma_x = 0$ de (I-15) resulta $B = 0$.
- b) Extremidade engastada: sendo o deslocamento longitudinal (u) nulo para qualquer ponto do esqueleto, de (I-4) se conclui que $\phi' = 0$, sendo portanto também nulo o momento de torção livre, conforme (I-13).

Portanto, pela utilização de (I-18) e (I-12), se obtêm:

$$B' = -M_t$$

- c) Seção intermediária com salto no diagrama do M_t : o salto no diagrama é resultante da aplicação de um momento torçor concentrado externo, de modo que a continuidade exige que σ_x seja o mesmo em ambas as seções, isto é:

$$B_{\text{esquerda}} = B_{\text{direita}}$$

- d) Extremidade com distribuição dada de tensões normais: neste caso, a própria definição do bimomento (I-15) fornece o seu valor.

Caso nas extremidades sejam aplicadas cargas a-

xiais P_i concentradas em pontos de área setorial ω_i , respectivamente, o bimomento é calculado por:

$$B = \sum_{i=1}^N P_i \omega_i \quad \dots (I-23)$$

onde N é o número de cargas P_i aplicadas e ω_i são os valores da área setorial correspondentes aos pontos de aplicação dos P_i .

3. PROBLEMAS ESTUDADOS NESTE TRABALHO

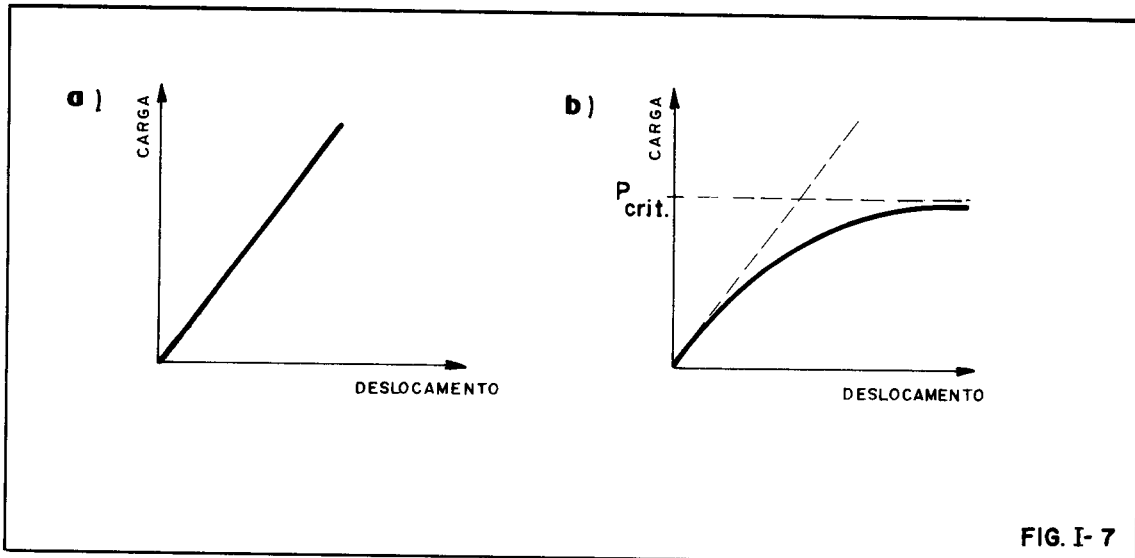
Os problemas tratados neste trabalho referem-se a barras de seção delgada aberta, vinculadas da maneira mais geral possível, inclusive com apoios elásticos, e solicitadas por cargas torçoras concentradas, ou uniformemente distribuídas e bimomentos aplicados.

Inicialmente se faz um estudo de tais problemas, desenvolvendo-se o assunto em teoria de 1ª ordem, com a preocupação principal de se automatizar o cálculo da flexo-torção. Neste estudo se tem sempre uma proporcionalidade entre as cargas aplicadas e os deslocamentos resultantes, pois a configuração de equilíbrio usada é a não deslocada (figura I-7.a).

Numa segunda etapa, levando-se em conta a posição deformada da barra pela rotação em torno do centro de torção, os esforços internos solicitantes (tensões normais) realizam um trabalho nessa rotação, provocando um acréscimo na energia total do sistema. Considerando-se este acréscimo, o estudo passa a ser desenvolvido em teoria de 2ª ordem.

Neste caso, não se tem mais proporcionalidade entre cargas aplicadas e deslocamentos resultantes, sendo possível se determinar para um estado de carregamento uma variação significativa nos deslocamentos (figura I-7.b)

Os deslocamentos obtidos, em geral, evidenciam claramente a existência de cargas críticas.



Tanto na primeira etapa, teoria de 1^a ordem, como na segunda, são calculados os valores dos seguintes esforços e deslocamentos:

- a) ângulos de giro das seções - ϕ
- b) derivadas primeiras dos ângulos de giro - ϕ'
- c) bimomento atuante nas seções - B
- d) momento de torção livre - M_l
- e) momento de flexo-torção - M_{ft}
- f) momento torçor final - M_t

CAPÍTULO II

DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

1. CARGAS APLICADAS E DESLOCAMENTOS

Nos problemas tratados neste trabalho as cargas possíveis de serem aplicadas são:

- a) Momento torçor concentrado - M
- b) Momento torçor uniformemente distribuído - m
- c) Bimomento - B_a

Os deslocamentos por elas produzidos são:

- a) giro ϕ de toda a seção transversal em torno do centro de torção (função somente de x);
- b) deslocamentos axiais (direção de x) chamados de empenamento e que são funções de x e s.

2. TENSÕES

- a) As tensões normais σ_x em seções transversais são produzidas pelo bimomento, conforme equação (I-17):

$$\sigma_x = \frac{B}{J_\omega} \omega$$

- b) As tensões tangenciais ou de cisalhamento são: a tensão τ_ℓ de torção livre, produzida pelo momento de torção livre, conforme a equação (I-2), e a tensão τ_{ft} de flexo-torção, produzida pelo momento de flexo-torção conforme equações (I-7), (I-10) e (I-11).

$$\tau_\ell = \frac{M_\ell}{J_t} t \qquad \tau_{ft} = \frac{M_{ft} S_\omega}{t J_\omega}$$

3. ENERCI A DE DEFORMAÇÃO

As cargas aplicadas nas barras produzem os deslocamentos que caracterizam a posição deformada, sendo responsáveis pelo aparecimento das tensões normais e tangenciais.

Chamando-se as deformações específicas correspondentes, respectivamente, por ϵ e γ , pode-se escrever, para a energia específica de deformação, a expressão seguinte:

$$\frac{dU}{dVol} = \frac{1}{2} (\sigma \epsilon + \tau \gamma) \quad \dots (II-1)$$

Sendo $dVol = dx \cdot dS$ o elemento de volume e $\epsilon = \sigma/E$ $\gamma = \tau/G$ as deformações específicas.

Para se achar a expressão da energia de deformação, é necessário integrar a expressão (II-1) no volume:

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} \int_S \sigma^2 dS \, dx + \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \int_S \tau^2 dS \, dx \quad \dots (II-2)$$

onde E e G são, respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material e ℓ o comprimento da barra.

A expressão (II-2) pode ser desmembrada em duas parcelas: a primeira U_1 correspondente à tensão σ e a segunda U_2 correspondente à tensão τ .

Na primeira parcela U_1 a tensão σ deve ser substituída pela expressão (I-17). Após a integração na seção obtém-se:

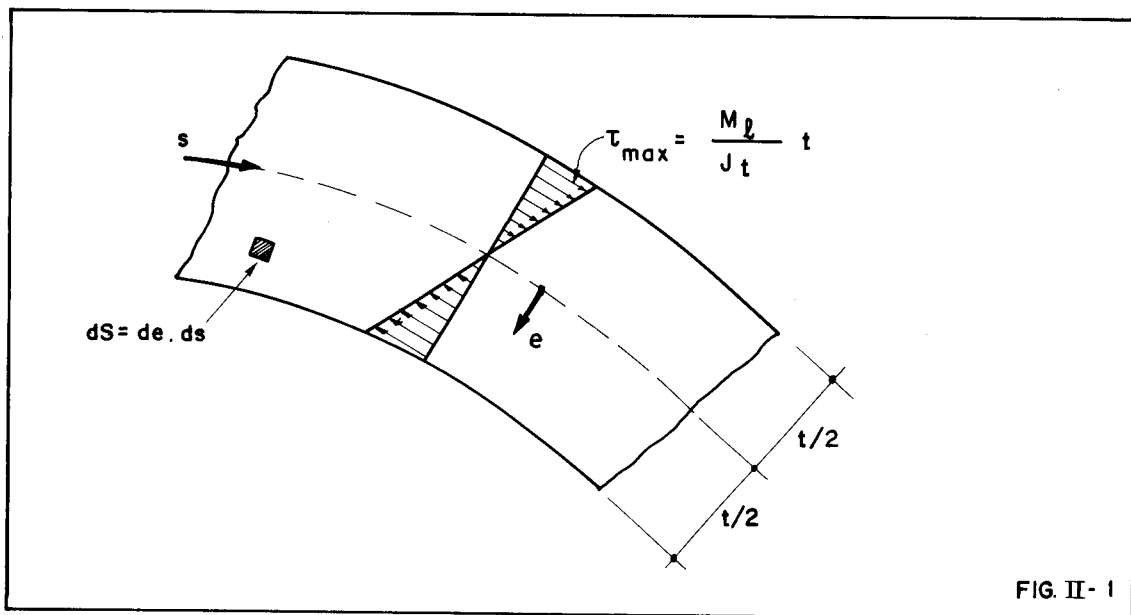
$$U_1 = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} \frac{B^2}{J_w} dx \quad \dots (II-3)$$

Substituindo B da expressão (II-3) pela expressão (I-16), obtém-se:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} E J_{\omega} \phi''^2 dx \quad \dots (II-4)$$

Na segunda parcela U_2 considera-se a tensão τ como a tensão de torção livre, desprezando-se a contribuição da flexo-torção por esta ser bem menor em comparação com a primeira.

Portanto, $\tau = \tau_{\ell}$



Conforme a figura II-1, tem-se:

$$\tau = \frac{2 M_{\ell}}{J_t} e \quad \dots (II-5)$$

sendo e uma ordenada na espessura com origem no esqueleto e perpendicular a ele no plano da seção.

Usando na segunda parcela U_2 da energia de deformação a expressão (II-5), obtêm-se:

$$U_2 = \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \left[\int_s \int_{-t/2}^{+t/2} \left(\frac{4 M_{\ell}^2}{J_t^2} e^2 de ds \right) \right] dx$$

Efetuando, tem-se:

$$U_2 = \frac{1}{2} G \int_0^{\ell} \frac{M_{\ell}^2}{J_t} dx \quad \dots \text{ (II-6)}$$

Substituindo M_{ℓ} de (II-6) pela expressão (I-13), obtêm-se:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} G J_t \phi'^2 dx \quad \dots \text{ (II-7)}$$

A energia de deformação $U \tilde{e}$ obtida somando-se as expressões (II-4) e (II-7):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (E J_{\omega} \phi''^2 + G J_t \phi'^2) dx \quad \dots \text{ (II-8)}$$

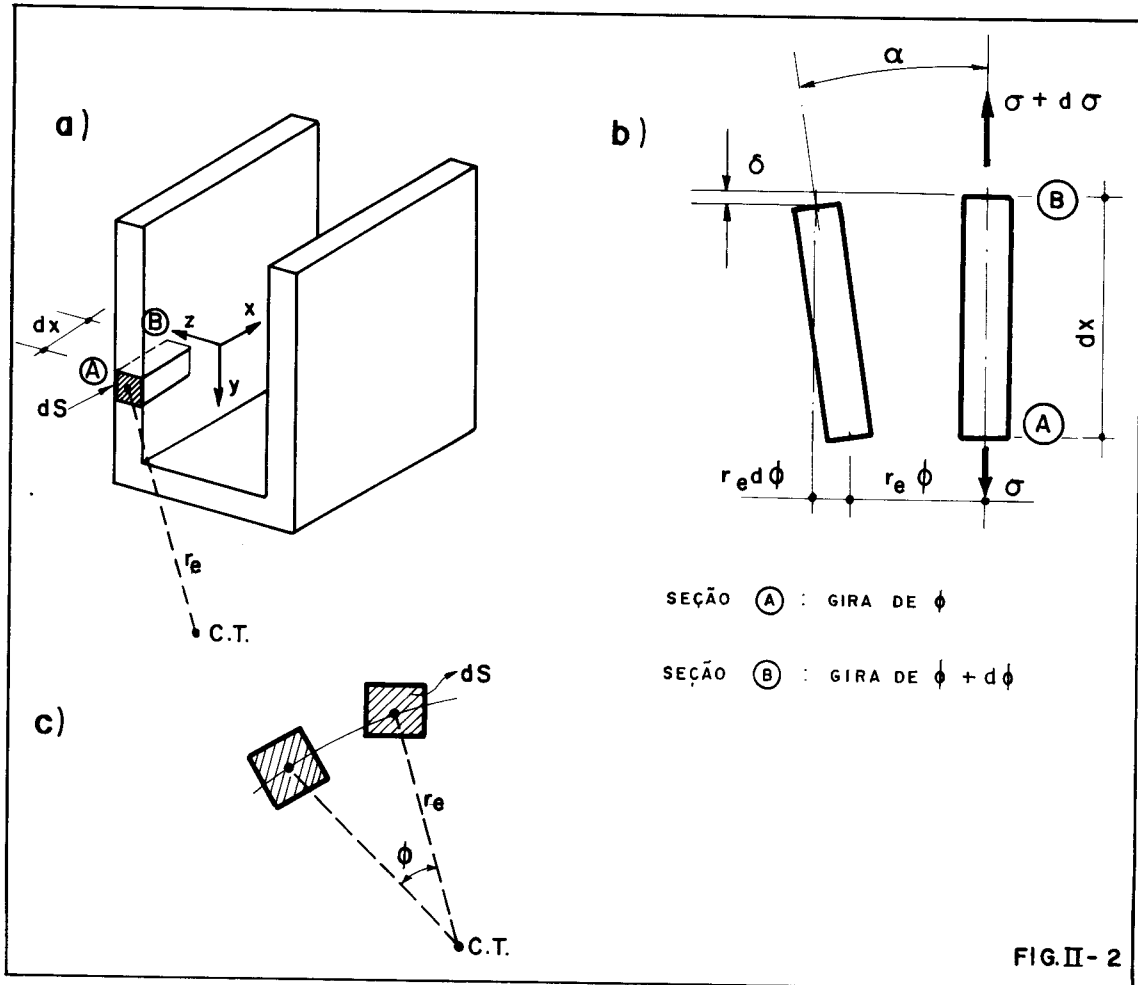
É importante notar que na expressão (II-8) da energia de deformação considerou-se o trabalho produzido pelas tensões tangenciais em deslocamentos ϕ , rotações em torno do centro de torção. Considerou-se também o trabalho produzido pelas tensões normais em deslocamentos longitudinais na direção de x .

Será necessário, ainda, levar em consideração, no cálculo da energia de deformação, o trabalho produzido pelas tensões normais em deslocamentos longitudinais causados pela variação da rotação ϕ ao longo da ordenada x .

Note-se que ao se levar em conta o trabalho de tensões normais em deslocamentos causados pela rotação da seção, se passa a considerar termos de segunda ordem.

Na figura II-2.a é indicado um elemento de volume $dS dx$ com a sua distância r_e até o centro de torção. O deslocamento deste elemento devido ao giro é esquematizado na figura II-2.b. Ainda nesta figura, é indicada a distância δ de que as duas extremidades do elemento se aproximam, na direção x , devido à variação da rotação ϕ , isto é, o empenamento de segunda ordem. Nota-se que ocorre este empenamento δ porque as duas seções separadas de dx (seção A e seção B)

giram de ângulos diferentes, provocando a inclinação do elemento de um ângulo α .



De acordo com a figura II-2.b, tem-se:

$$\delta = dx (1 - \cos \alpha) = dx \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Para o ângulo α pequeno pode-se escrever aproximadamente:

$$\delta = \frac{\alpha^2}{2} dx \quad \dots (II-9)$$

sendo α o ângulo dado por

$$\alpha = r_e \frac{d\phi}{dx} = r_e \cdot \phi' \quad \dots (II-10)$$

Levando (II-10) em (II-9), obtêm-se:

$$\delta = \frac{r_e^2 \phi'^2}{2} dx \quad \dots (II-11)$$

Portanto a energia das tensões σ , provenientes do bimomento, durante o encurtamento δ é dada por:

$$U_3 = \int_0^{\ell} \int_S \sigma dS \cdot \delta \quad \dots (II-12)$$

Substituindo, na expressão (II-12), σ e δ pelas expressões (I-17) e (II-11) respectivamente tem-se:

$$U_3 = \int_0^{\ell} \int_S \frac{B}{J_{\omega}} \omega dS \cdot \frac{r_e^2 \phi'^2}{2} dx$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[\frac{B}{J_{\omega}} \phi'^2 dx \cdot \int_S \omega r_e^2 dS \right] \quad \dots (II-13)$$

O termo $\int_S \omega r_e^2 dS$ representa uma característica puramente geométrica da seção, sendo indicada por VLASSOV⁽¹⁾ com U_{ω} .

Chama-se, portanto, U_{ω} de característica geométrica de Vlassov.

Levando-se $U_{\omega} = \int_S \omega r_e^2 dS$ em (II-13) obtêm-se:

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{U_{\omega} B}{J_{\omega}} \phi'^2 dx \quad \dots (II-14)$$

A característica geométrica de Vlassov U_{ω} tem a mesma dimensão do momento setorial de inércia, sendo nula para seções com pelo menos um eixo de simetria.

Somando-se as expressões (II-8) e (II-14) obtêm-se a expressão final da energia potencial dos esforços internos ou energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left(E J_{\omega} \phi''^2 + G J_t \phi'^2 + \frac{U_{\omega} B}{J_{\omega}} \phi'^2 \right) dx$$

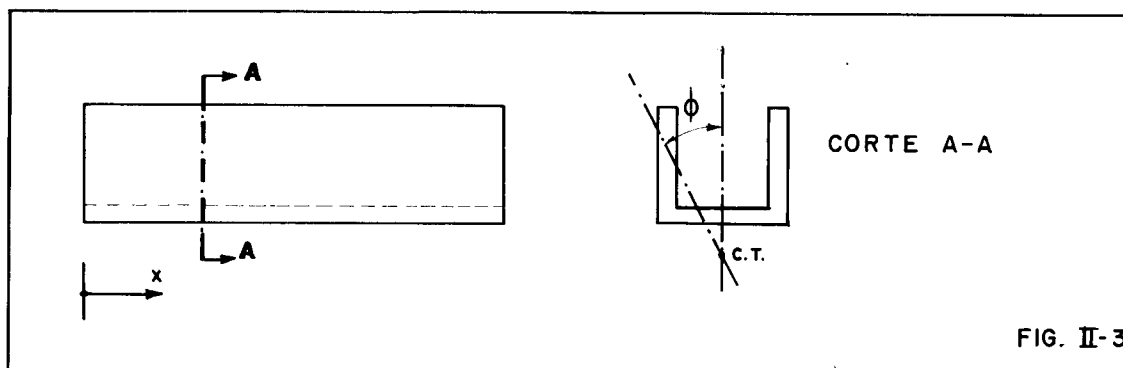
ou:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[E J_{\omega} \phi''^2 + \left(G J_t + \frac{U_{\omega} B}{J_{\omega}} \right) \phi'^2 \right] dx \dots (II-15)$$

4. CONVENÇÃO ADOTADA NESTE TRABALHO

4.1 - Convenção para o giro ϕ

O giro ϕ será positivo quando ocorrer no sentido anti-horário, para um observador olhando no sentido positivo de x, conforme figura II-3.



4.2 - Convenção para carga torçora concentrada e uniformemente distribuída aplicadas

A carga torçora concentrada ou uniformemente distribuída será positiva quando um observador olhando no sentido positivo de x, considerar o seu sentido como horário, conforme a figura II-4.a.

No caso do esforço solicitante momento torçor o sinal é atribuído de acordo com a figura II-4.b onde M_t e $M_t + dM_t$ estão indicados no sentido positivo.

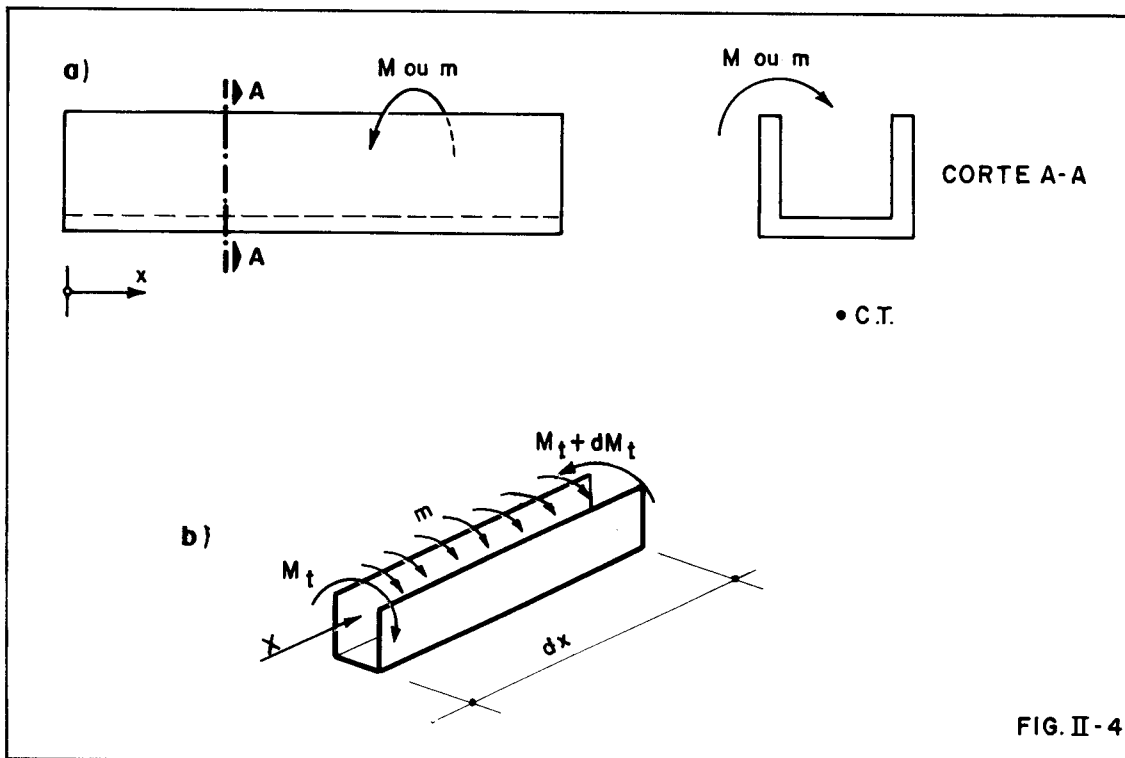


FIG. II - 4

4.3 - Convenção para o bimomento aplicado

a) Quando o bimomento \bar{m} é aplicado por meio de cargas axiais concentradas P_i em pontos de área setorial ω_i conforme expressão (I-23) o seu sinal é resultante da multiplicação algébrica da carga pela área setorial.

São consideradas positivas as cargas axiais aplicadas no sentido positivo de x .

b) O empenamento u provocado pelo bimomento \bar{m} é positivo quando ocorre no sentido da ordenada x , caso contrário é negativo.

5. ENERGIA POTENCIAL DAS CARGAS

5.1 - Energia potencial dos momentos torçores aplicados

Como essas cargas torçoras trabalham durante a rotação ϕ , tem-se:

$$T_1 = \sum_{i=1}^N M_i \phi_i \quad \dots \text{ (II-16)}$$

sendo N o número de cargas torçoras concentradas aplicadas.

Quando a carga torçora for distribuída ao longo de x, tem-se:

$$T_2 = \int_0^{\ell} m \phi \, dx \quad \dots \text{ (II-17)}$$

sendo m uma função de x, adotando-se neste trabalho somente uma distribuição uniforme, isto é, constante com x.

As parcelas T_1 e T_2 da energia potencial das cargas têm sinal positivo, pois de acordo com a convenção de sinais adotada para M, m e ϕ , o trabalho realizado por essas cargas na rotação ϕ é negativo.

O sinal da energia potencial contrário ao do trabalho realizado provém do fato de que os deslocamentos admitidos correspondem a uma perda de potencial por parte das cargas aplicadas.

5.2 - Energia potencial dos bimomentos aplicados

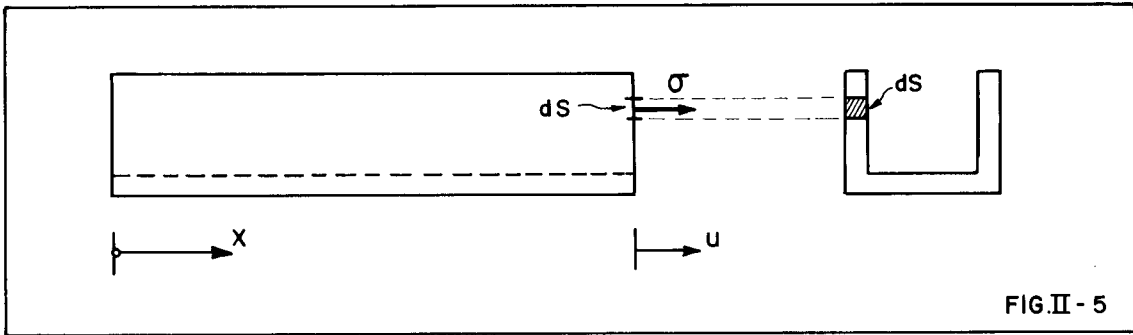
Os bimomentos aplicados trabalham durante o empenamento por eles provocado.

De acordo com a expressão (I-4) o empenamento é dado por $u = \omega \phi'$.

Portanto, conforme figura (II-5), o trabalho realizado pelos bimomentos aplicados durante o empenamento u é dado por:

$$\int_S \sigma \, dS \cdot u$$

onde σ é a tensão aplicada.



Portanto, a energia potencial do bimomento aplicado é dada por:

$$T_3 = - \int_S \sigma \, dS \, \omega \, \phi'$$

Ou:

$$T_3 = - \phi' \int_S \sigma \, \omega \, dS$$

Utilizando-se a expressão (I-15), pode-se escrever:

$$T_3 = - \sum_{i=1}^N B_{ai} \phi_i' \quad \dots \quad (II-18)$$

sendo N o número de bimomentos aplicados e ϕ_i' a derivada em relação a x do ângulo de giro da seção i.

Portanto, a energia potencial das cargas é obtida através da soma das expressões (II-16), (II-17) e (II-18), obtendo-se:

$$T = \sum_{i=1}^N (M_i \phi_i - B_{ai} \phi_i') + \int_0^l m \phi \, dx \quad \dots \quad (II-19)$$

6. EXPRESSÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

Somando-se os resultados obtidos nas expressões (II-15) e (II-19), obtêm-se a expressão da energia potencial total da seguinte forma:

$$V = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[E J_{\omega} \phi''^2 + \left(G J_t + \frac{U_{\omega} B}{J_{\omega}} \right) \phi'^2 \right] dx + \sum_{i=1}^N (M_i \phi_i - B_{ai} \phi_i') + \int_0^{\ell} m \phi dx \right\} \dots (II-20)$$

Integrando em s desde a origem O_s até o ponto genérico Q obtêm-se:

$$u = \phi' \int_{O_s}^Q n \, ds$$

Da definição de área setorial, chega-se a:

$$u = \omega \phi' \quad \dots (I-4)$$

Portanto, os deslocamentos longitudinais u são contados a partir do ponto O_s no sentido positivo de x .

2.6 - Torção não uniforme ou flexo-torção

No estudo aqui realizado a seção da barra não varia com x , ocorrendo portanto flexo-torção nos casos de momento torçor não constante e de impedimento dos deslocamentos longitudinais u . A equação (I-4) continua válida para o caso, sendo que a derivada do ângulo de giro $\frac{d\phi}{dx}$ não é mais constante em x .

Sendo σ_x e ϵ_x , respectivamente, a tensão e a deformação específica longitudinal, pode-se escrever pela lei de Hooke:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad \dots (I-5)$$

Como $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

e usando a equação (I-4), tem-se:

$$\epsilon_x = \omega \phi''$$

Substituindo-se ϵ_x em (I-5), obtêm-se:

$$\sigma_x = E \omega \phi'' \quad \dots (I-6)$$

CAPÍTULO III

AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS ANGULARES, BIMO-
MENTO, MOMENTO DE FLEXO-TORÇÃO E MOMENTO DE TORÇÃO LIVRE

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O problema da determinação dos deslocamentos ϕ pelo método energético resume-se em se achar uma função $\phi(x)$ de tal maneira que a energia total V se torne extrema. A energia total será extrema na posição de equilíbrio. Problemas desta natureza são tratados na disciplina "Cálculo das Variações", onde é fornecida a função incôgnita como solução de uma equação diferencial chamada equação de EULER.

A expressão (II-20) da energia potencial total pode ser colocada em forma de um funcional como segue:

$$V = \int_0^{\ell} F(\phi, \phi', \phi'') dx + \sum_{i=1}^N (M_i \phi_i - B_{ai} \phi_i')$$

onde:

$$F = \frac{1}{2} \left[E J_{\omega} \phi''^2 + \left(G J_t + \frac{E U}{J_{\omega}} \right) \phi'^2 + 2 m \phi \right]$$

No caso em estudo, para se achar o extremo do funcional V a equação de EULER é dada por:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \phi} \right] - \left[\frac{\partial F}{\partial \phi'} \right]' + \left[\frac{\partial F}{\partial \phi''} \right]'' = 0$$

Aplicando-se a equação de EULER para o funcional F da energia total, se obtém a seguinte equação diferencial na função ϕ :

$$E J_{\omega} \phi'''' - G J_t \phi'' - \left(\frac{B U_{\omega}}{J_{\omega}} \phi' \right)' + m = 0 \quad \dots \text{(III-1)}$$

É importante notar que quando o termo de segunda ordem, entre parênteses, da equação diferencial (III-1) for nulo, a nova equação obtida, integrada uma vez em função de x , coincide com a expressão (I-14) deduzida pelo método do equilíbrio.

A função ϕ solução da equação diferencial (III-1) é a função que torna extremo o valor do funcional da energia e caracteriza portanto uma posição de equilíbrio do sistema.

Comumente, o objetivo do método energético não é a obtenção da equação diferencial do problema, mas sim evitar a resolução direta desta equação através da aplicação do processo de RITZ.

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A FORMA DE SE APLICAR O PROCESSO DE RITZ AO ESTUDO, EM TEORIAS DE 1ª e 2ª ORDEM

O processo de RITZ consiste na escolha de funções aproximadas para os deslocamentos ϕ , sendo essas funções dependentes de alguns parâmetros.

A energia passará, então, a ser uma função desses parâmetros. Portanto, transforma-se, através do processo de RITZ, o problema de se achar o extremo de um funcional em um problema de se achar o extremo de uma função de um número finito de variáveis.

O inconveniente principal do processo de RITZ está na escolha das funções, as quais, para cada caso particular, devem satisfazer as condições de contorno do problema, e principalmente no desenvolvimento extremamente trabalhoso das integrais que devem ser feitas.

Torna-se, portanto, necessário uma automatização deste processo de cálculo, através de uma escolha conveniente das funções, para se evitarem os inconvenientes acima citados.

Ao se retomar a expressão (II-20) da energia potencial total, fazem-se as seguintes considerações:

- a) Com a finalidade de se desenvolver, inicialmente, o trabalho em teoria de primeira ordem, o processo de RITZ é aplicado à expressão (II-20), retirando-se da mesma a expressão (II-14).
- b) Numa segunda fase, o processo é aplicado à expressão (II-20) com todos os seus termos, para se desenvolver o trabalho em teoria de segunda ordem.

Para se entender a diferença entre não se levar em conta a expressão (II-14) na energia total (teoria de 1^a ordem), e se considerar a expressão (II-20) completa (teoria de 2^a ordem), são feitas as seguintes observações:

- a) A expressão (II-8) que fornece a energia de deformação como a soma das contribuições dos esforços internos solicitantes é baseada na hipótese de que as tensões normais σ não trabalham nas rotações ϕ .
- b) Esta hipótese coincide muito bem com a realidade no caso dos deslocamentos pequenos, conforme figura III-1, isto é, ao se considerar a tensão tangencial correspondente à deformação ϕ como pequena de 1^a ordem, os eventuais efeitos recíprocos entre σ e ϕ serão pequenos de 2^a ordem.
- c) Conclui-se portanto que ao se acrescentarem estes efeitos entre σ e ϕ , expressão (II-14), na energia potencial total, o estudo passa a ser desenvolvido em teoria de segunda ordem.
- d) A diferença entre os resultados das teorias de 1^a e 2^a ordens, está indicada na figura III-1: a teoria de 1^a ordem fornece uma relação linear entre carga e deslocamento ao passo que, em teoria de 2^a ordem, esta relação não é mais linear, mesmo utilizando-se as relações lineares da lei de Hooke (regime elástico).

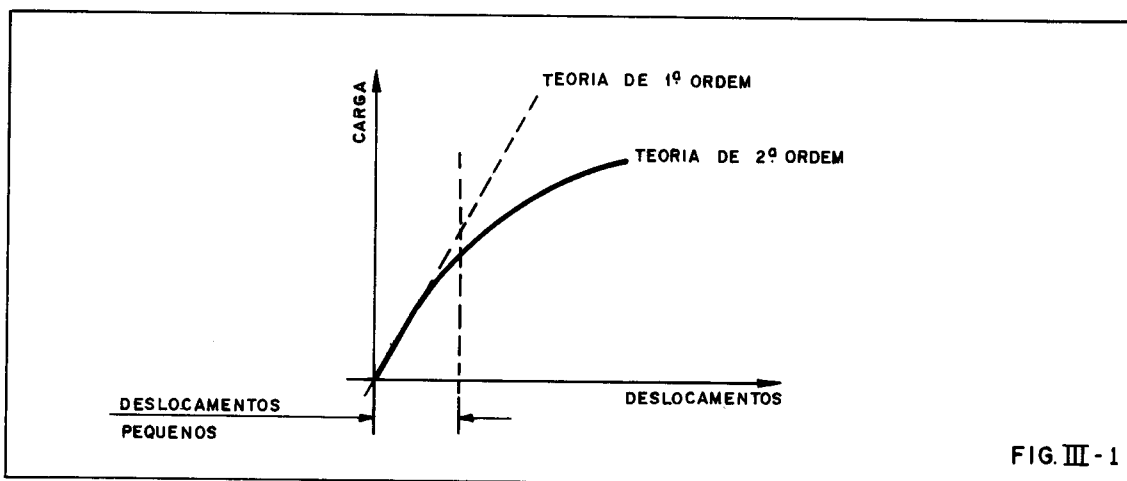


FIG. III-1

3. APLICAÇÃO DO PROCESSO DE RITZ AO CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS ϕ EM TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM

3.1 - Função adotada para os deslocamentos ϕ

A fórmula da energia potencial total a ser considerada é a seguinte:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (E J_{\omega} \phi''^2 + G J_t \phi'^2) dx + \int_0^l m \phi dx + \sum_{i=1}^N (M_i \phi_i - B_{ai} \phi_i') \dots (III-2)$$

Para a aplicação do processo de RITZ, adota-se uma função aproximada para os deslocamentos ϕ . A barra é dividida em segmentos de modo que a função ϕ é válida para cada um destes segmentos. Através de uma divisão conveniente da barra, evita-se o problema das condições de contorno e, de acordo com o número de divisões, pode-se chegar a uma precisão estabelecida. Ao se dividir a barra em segmentos finitos, com uma função aproximada para cada segmento, se aplica ao estudo o método dos elementos finitos.

Para tanto, considera-se um segmento i delimitado pelas seções i e j , sendo $j = i+1$, conforme figura III-2.

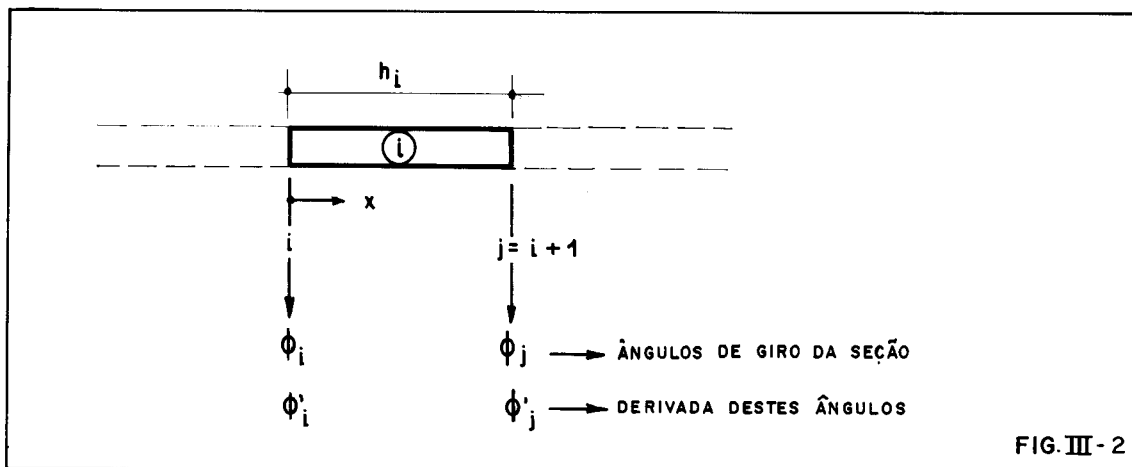


FIG. III-2

Adota-se um polinômio do 3º grau em x para a função ϕ com parâmetros independentes a, b, c e d, obrigando-se a função a obedecer às condições de continuidade pré-escolhidas da seguinte forma:

Sendo $\phi = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (III-3)

Deve-se ter:

$$\begin{aligned} \phi(x=0) &= \phi_i & \phi(x=h_i) &= \phi_j \\ \phi'(x=0) &= \phi'_i & \phi'(x=h_i) &= \phi'_j \end{aligned}$$

para cada segmento i.

Desta forma, as possíveis condições de vinculação a que estejam submetidas as extremidades dos segmentos podem ser obedecidas.

Obtém-se, portanto, as seguintes equações em a, b, c e d:

$$\begin{aligned} d &= \phi_i \\ c &= \phi'_i \\ ah_i^3 + bh_i^2 + ch_i + d &= \phi_j \\ 3ah_i^2 + 2bh_i + c &= \phi'_j \end{aligned}$$

As quais fornecem os seguintes resultados:

$$d = \phi_i$$

$$c = \phi_i'$$

$$a = -\frac{2}{h_i^3}(\phi_j - \phi_i) + \frac{1}{h_i^2}(\phi_j' + \phi_i')$$

$$b = \frac{3}{h_i^2}(\phi_j - \phi_i) - \frac{1}{h_i}(\phi_i' + \phi_j')$$

Levando em(III-3) as expressões de a, b, c e d obtêm-se:

$$\phi = f_1(x)\phi_i + f_2(x)\phi_j + f_3(x)\phi_i' + f_4(x)\phi_j' \quad .(III-4)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= 2\left(\frac{x}{h_i}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 + 1 \\ f_2(x) &= -2\left(\frac{x}{h_i}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 \\ f_3(x) &= x \left[\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 - 2\frac{x}{h_i} + 1 \right] \\ f_4(x) &= x \left[\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 - \frac{x}{h_i} \right] \end{aligned} \right\} \dots (III-5)$$

Para a substituição em(III-2) das expressões de ϕ , ϕ' e ϕ'' , é necessário ainda desenvolver:

$$\left. \begin{aligned} \phi' &= f_1'(x)\phi_i + f_2'(x)\phi_j + f_3'(x)\phi_i' + f_4'(x)\phi_j' \\ \phi'' &= f_1''(x)\phi_i + f_2''(x)\phi_j + f_3''(x)\phi_i' + f_4''(x)\phi_j' \end{aligned} \right\} (III-6)$$

3.2 - Contribuição do segmento i para a expressão da energia potencial total

Substituindo-se as expressões de ϕ , ϕ' e ϕ'' na expressão(III-2) e realizando-se as integrais no comprimento

h_i do segmento adotado, obtêm-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{1}{2} \int_0^{h_i} E J_{\omega} \phi''^2 dx &= \frac{E J_{\omega}}{2} \left(\frac{12}{h_i^3} \phi_i^2 + \frac{12}{h_i^3} \phi_j^2 + \frac{4}{h_i} \phi_i'^2 + \right. \\
 &+ \frac{4}{h_i} \phi_j'^2 - \frac{24}{h_i^3} \phi_i \phi_j + \frac{12}{h_i^2} \phi_i \phi_i' + \frac{12}{h_i^2} \phi_i \phi_j' - \frac{12}{h_i^2} \phi_j \phi_i' - \\
 &\left. - \frac{12}{h_i^2} \phi_j \phi_j' + \frac{4}{h_i} \phi_i' \phi_j' \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1}{2} \int_0^{h_i} G J_t \phi'^2 dx &= \frac{G J_t}{2} \left(\frac{6}{5h_i} \phi_i^2 + \frac{6}{5h_i} \phi_j^2 + \frac{2h_i}{15} \phi_i'^2 + \right. \\
 &+ \frac{2h_i}{15} \phi_j'^2 - \frac{12}{5h_i} \phi_i \phi_j + \frac{1}{5} \phi_i \phi_i' + \frac{1}{5} \phi_i \phi_j' - \frac{1}{5} \phi_j \phi_i' - \\
 &\left. - \frac{1}{5} \phi_j \phi_j' - \frac{h_i}{15} \phi_i' \phi_j' \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_0^{\ell} m \phi dx = m \left(\frac{h_i}{2} \phi_i + \frac{h_i}{2} \phi_j + \frac{h_i^2}{12} \phi_i' - \frac{h_i^2}{12} \phi_j' \right)$$

Os momentos torçores concentrados e os bimomentos serão sempre considerados aplicados no início dos segmentos, extremidade i do segmento i .

Somando-se as parcelas a), b) e c), e considerando-se ainda os esforços aplicados, tem-se a contribuição V_i , do segmento i , para a energia total, de modo que:

$$V = \sum_{i=1}^{NH} V_i$$

onde NH é o número de segmentos em que a viga foi dividida.

A energia V_i para o segmento i fica dada em função dos parâmetros ϕ_i , ϕ_i' , ϕ_j e ϕ_j' .

Matriz elemental das características geométricas e elásticas (matriz simétrica)

	ϕ_i	ϕ_i'	ϕ_j	ϕ_j'
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi_i}$	$\frac{12EJ}{h_i^3} \omega + \frac{6GJ}{5h_i} t$	$\frac{6EJ}{h_i^2} \omega + \frac{GJ}{10} t$	$-\frac{12EJ}{h_i^3} \omega - \frac{6GJ}{5h_i} t$	$\frac{6EJ}{h_i^2} \omega + \frac{GJ}{10} t$
	D	E	-D	E
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi_i'}$	$\frac{6EJ}{h_i^2} \omega + \frac{GJ}{10} t$	$\frac{4EJ}{h_i} \omega + \frac{2h_i GJ}{15} t$	$-\frac{6EJ}{h_i^2} \omega - \frac{GJ}{10} t$	$\frac{2EJ}{h_i} \omega - \frac{h_i GJ}{30} t$
	E	A	-B	C
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi_j}$	$-\frac{12EJ}{h_i^3} \omega - \frac{6GJ}{5h_i} t$	$-\frac{6EJ}{h_i^2} \omega - \frac{GJ}{10} t$	$\frac{12EJ}{h_i^3} \omega + \frac{6GJ}{5h_i} t$	$-\frac{6EJ}{h_i^2} \omega - \frac{GJ}{10} t$
	-D	-B	D	-B
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi_j'}$	$\frac{6EJ}{h_i^2} \omega + \frac{GJ}{10} t$	$\frac{2EJ}{h_i} \omega - \frac{h_i GJ}{30} t$	$-\frac{6EJ}{h_i^2} \omega - \frac{GJ}{10} t$	$\frac{4EJ}{h_i} \omega + \frac{2h_i GJ}{15} t$
	B	C	-B	A

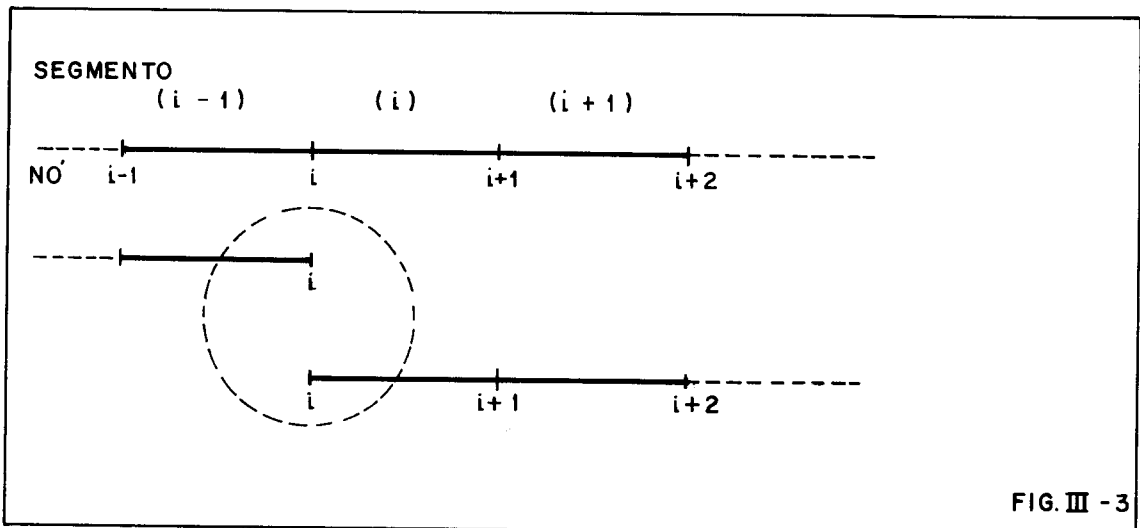
Vetor elementar das cargas

	Termo independente
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi_i}$	$\frac{m h_i}{2} + M_i$
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi'_i}$	$\frac{m h_i^2}{12} - B_{a_i}$
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi_j}$	$\frac{m h_i}{2}$
$\frac{\partial V_i}{\partial \phi'_j}$	$\frac{-m h_i^2}{12}$

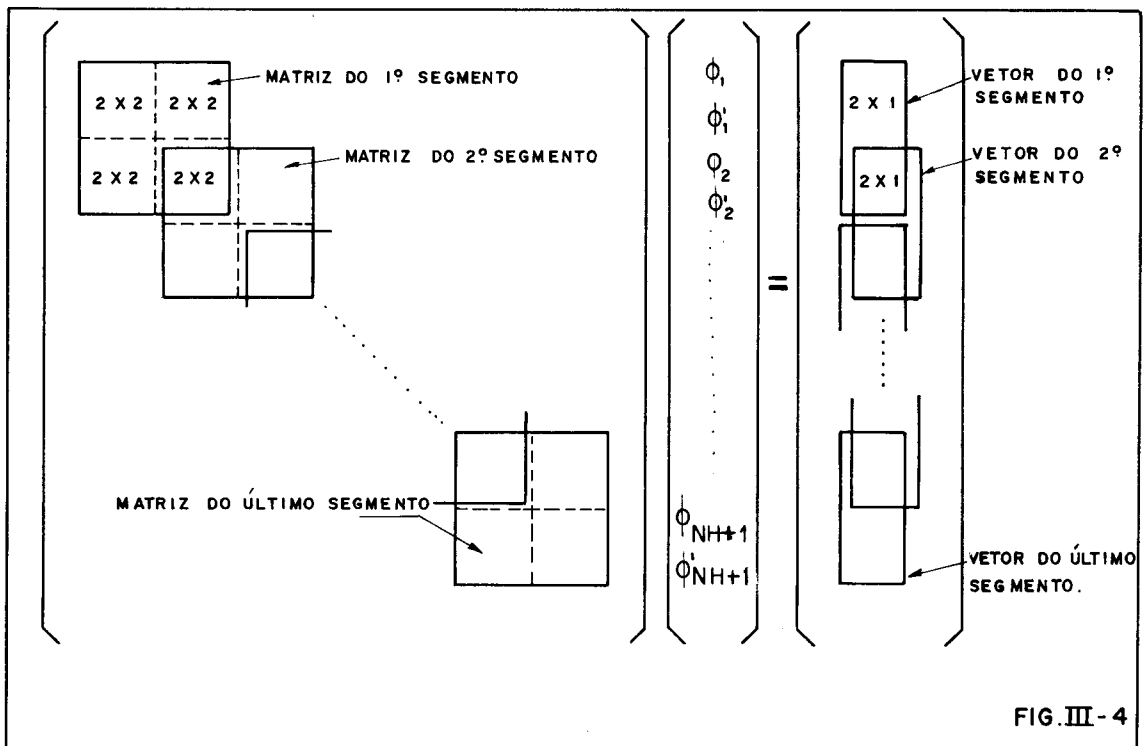
Portanto, o sistema elementar de equações pode, matricialmente, ser assim escrito:

$$\begin{bmatrix} D & B & -D & B \\ B & A & -B & C \\ -D & -B & D & -B \\ B & C & -E & A \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi'_i \\ \phi_j \\ \phi'_j \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} -\frac{m h_i}{2} - M_i \\ -\frac{m h_i^2}{12} + B_{a_i} \\ -\frac{m h_i}{2} \\ +\frac{m h_i^2}{12} \end{bmatrix}$$

O sistema final de equações, isto é, para uma barra toda, é construído pela superposição conveniente das matrizes elementares e dos vetores elementares, bastando para isso lembrar que o ponto ou nó i é ao mesmo tempo extremidade dos dos segmentos $i-1$ e i , conforme figura III-3.



Esta superposição dos vetores e matrizes elementares está esquematizada na figura III-4.



Este sistema final obtido é composto da matriz das características geométricas e elásticas da barra e do respectivo vetor das cargas aplicadas. Cada linha desta matriz corresponde a uma das equações (III-7) e cada coluna contém os coeficientes do mesmo parâmetro, sendo que o vetor contém os termos independentes dos parâmetros.

3.4 - Resolução do sistema de equações obtido

Antes de se resolver o sistema de equações da figura III-4, pela inversão da matriz das características geométricas e elásticas, algumas de suas linhas e colunas são eliminadas, pois, de acordo com a vinculação da barra em estudo, algumas das $2(NH+1)$ incógnitas são inicialmente conhecidas.

Neste capítulo, serão considerados os seguintes tipos de vínculos, definidos em função dos deslocamentos por eles impedidos:

a) Vínculo de garfo - $\phi_i = 0$

b) engastamento - $\phi_i = 0$ e $\phi'_i = 0$

No item 5 deste capítulo, serão considerados também os casos de vinculação elástica.

Em consequência da vinculação, o sistema da figura III-4 passará a ter $2(NH+1)-NREST$ incógnitas, sendo $NREST$ o número de parâmetros conhecidos, isto é, o número de condições de vinculação iniciais. Portanto, neste sistema, as linhas e colunas correspondentes aos parâmetros conhecidos serão eliminadas.

O novo sistema de equações com $2(NH+1)-NREST$ incógnitos é então resolvido através da inversão da matriz das características elásticas e geométricas, obtendo-se, portanto, para todos os pontos i os valores de ϕ_i e sua derivada ϕ'_i .

4. CÁLCULO, EM TEORIA DE 1ª ORDEM, DOS VALORES DO BIMOMENTO, MOMENTO DE FLEXO-TORÇÃO, MOMENTO DE TORÇÃO LIVRE E MOMENTO TORÇOR FINAL.

De acordo com o resumo de flexo-torção do capítulo I, sabe-se que:

- a) Bimomento: $B = E J_{\omega} \phi''$
- b) Momento de flexo-torção: $M_{f_t} = -E J_{\omega} \phi'''$
- c) momento de torção livre: $M_{\ell} = G J_t \phi'$
- d) Momento torçor final: $M_t = M_{f_t} + M_{\ell}$

Pela resolução do sistema são conhecidos os valores de ϕ_i e ϕ'_i para todas as $(NH+1)$ seções consideradas, portanto são conhecidos também os valores do momento de torção livre para estes pontos.

Para se calcularem os valores do bimomento e do momento de flexo-torção, sejam os segmentos indicados na figura III-5.

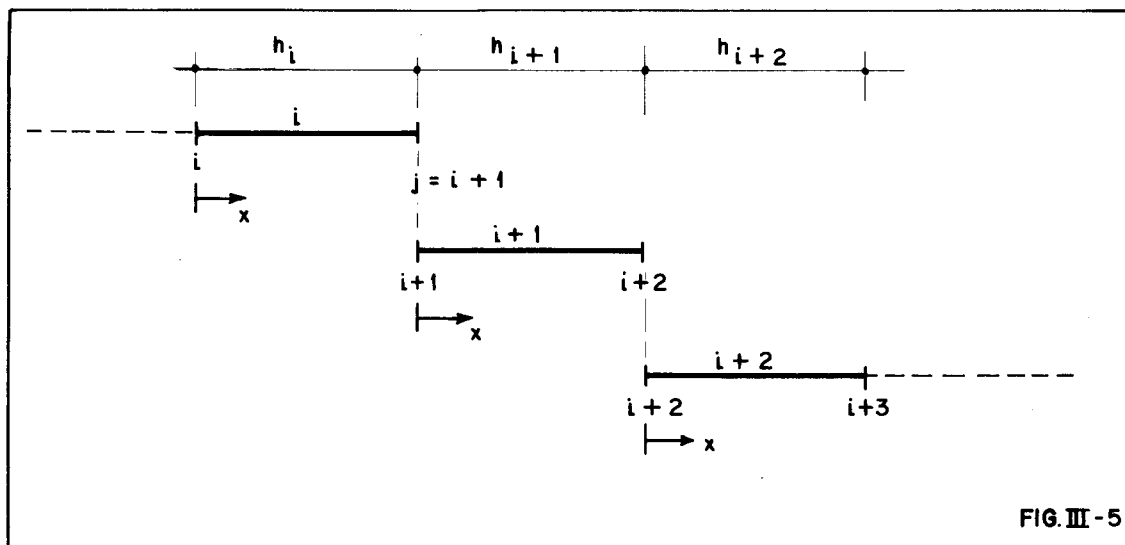


FIG. III-5

De acordo com as expressões (III-6), ϕ'' e ϕ''' são obtidos pela derivação das funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$, obtendo-se, portanto, para cada segmento, as expressões de ϕ'' e ϕ''' nas suas extremidades, fazendo-se, respectivamente:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = h_i$$

Como a função ϕ adotada é um polinômio do 3º grau, que, derivado três vezes, resulta em uma constante, o valor do momento de flexo-torção, assim obtido, para cada segmento

da barra será uma constante e o valor do bimomento variará linearmente ao longo do segmento.

Adotando-se esta sistemática de cálculo, nota-se que, para se obter uma aproximação aceitável nos valores do momento de flexo-torção e bimomento, é necessário uma divisão da barra em um número grande de segmentos. Nota-se também que em seções para as quais são fornecidas condições de vinculação, a precisão deixa mais a desejar.

A partir dos valores calculados de ϕ_i e ϕ'_i , obtidos pela resolução do sistema da figura III-4, adota-se, visando-se a obtenção de resultados mais precisos, para cada segmento, a função exata, a qual é obtida pela solução da equação diferencial regente do problema em teoria de primeira ordem.

De acordo com a expressão (I-22), esta equação diferencial pode assim ser escrita:

$$r^2 E'' - B = r^2 m$$

No caso de m constante, a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$E(x) = C_1 \sinh \frac{x}{r} + C_2 \cosh \frac{x}{r} + r^2 m \dots \text{(III-8)}$$

Para o segmento i da figura III-5, pode-se escrever:

$$\text{para } x = 0 : \quad \phi(x) = \phi_i$$

$$\text{para } x = 0 : \quad \phi'(x) = \phi'_i$$

$$\text{para } x = h_i : \quad \phi(x) = \phi_j$$

$$\text{para } x = h_i : \quad \phi'(x) = \phi'_j$$

Usando a equação (I-16), obtêm-se:

$$E J_{\omega} \phi''(x) = C_1 \sinh \frac{x}{r} + C_2 \cosh \frac{x}{r} + r^2 m$$

que, integrada em x, fornece:

$$EJ_{\omega} \phi'(x) = C_1 r \cosh \frac{x}{r} + C_2 r \sinh \frac{x}{r} + r^2 m x + C_3$$

$$EJ_{\omega} \phi(x) = C_1 r^2 \sinh \frac{x}{r} + C_2 r^2 \cosh \frac{x}{r} + \frac{r^2 m x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Substituindo-se as expressões de $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ para $x=0$ e $x=h_i$, respectivamente nas duas expressões anteriores, obtêm-se um sistema de quatro equações nas quatro incógnitas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , que resolvido, fornece os seguintes resultados para C_1 e C_2 :

$$C_1 = \frac{EJ_{\omega} (\phi_j' - \phi_i' - \phi_i' h_i) - \frac{r^2 m h_i^2}{2} - \left[EJ_{\omega} (\phi_j' - \phi_i') - r^2 m h_i \right] \left[\frac{r^2 \cosh \frac{h_i}{r} - r^2}{r \sinh \frac{h_i}{r}} \right]}{r^2 \sinh \frac{h_i}{r} - r h_i - \left[\frac{(r \cosh \frac{h_i}{r} - r)(r^2 \cosh \frac{h_i}{r} - r^2)}{r \sinh \frac{h_i}{r}} \right]}$$

$$C_2 = \frac{EJ_{\omega} (\phi_j' - \phi_i') - r^2 m h_i - \left[(r \cosh \frac{h_i}{r} - r) C_1 \right]}{r \sinh \frac{h_i}{r}}$$

Portanto, para cada segmento, de acordo com a expressão (III-8), se obtêm a expressão do bimomento.

O momento de flexo-torção é calculado de acordo com a expressão (I-18), isto é:

$$M_{ft} = - \frac{C_1}{r} \cosh \frac{x}{r} - \frac{C_2}{r} \sinh \frac{x}{r}$$

5. VINCULAÇÃO ELÁSTICA

5.1 - Vínculos elásticos à rotação (molas a torção)

São vínculos que apresentam rotações proporcionais ao momento torçor reativo no vínculo.

Sendo K_i a constante de proporcionalidade entre o momento torçor reativo e a rotação resultante do vínculo elástico situado na extremidade i do segmento i , conforme figura III-6, a energia de deformação acumulada na mola de torção será:

$$U_T = \frac{1}{2} M_{t_i} \phi_i$$

Como $M_{t_i} = K_i \phi_i$, obtêm-se:

$$U_T = \frac{1}{2} K_i \phi_i^2 \quad \dots \quad (\text{III-9})$$

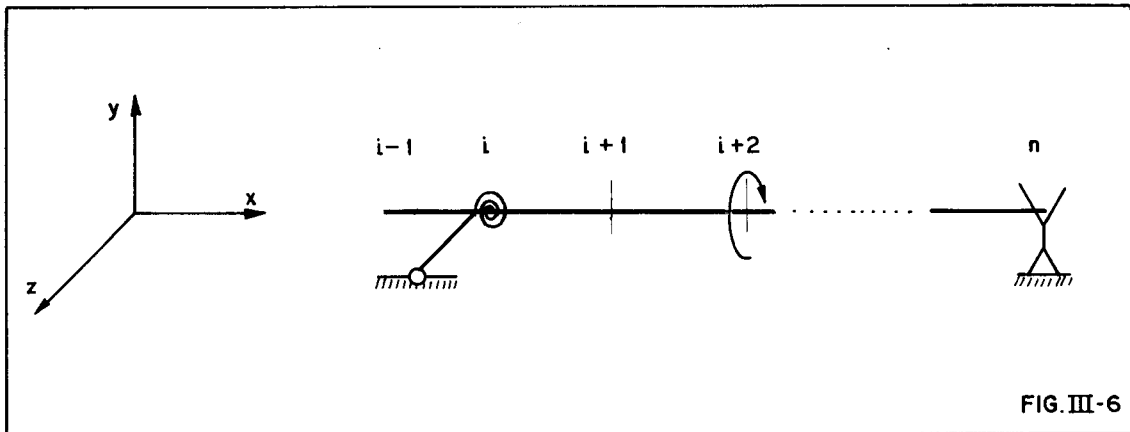


FIG. III-6

De acordo com as expressões (III-7), pode-se escrever:

$$\frac{\partial U_T}{\partial \phi_i} = K_i \phi_i$$

Portanto, pode-se afirmar que, na matriz elementar das características geométricas e elásticas (página 35) apenas o elemento da primeira linha e primeira coluna é que, no caso de vinculação elástica no segmento, sofre um acrêscimo igual ao do valor da constante da mola.

O sistema elementar de equações para o segmento i , com vinculação elástica na extremidade i , pode ser assim escrito:

$$\begin{bmatrix}
 \textcircled{D+K} & B & -D & B \\
 B & A & -E & C \\
 -D & -B & D & -B \\
 B & C & -B & A
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \phi_i \\
 \phi_i' \\
 \phi_j \\
 \phi_j'
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -\frac{m h_i}{2} - M_i \\
 -\frac{m h_i^2}{12} + B a_i \\
 -\frac{m h_i}{2} \\
 \frac{m h_i^2}{12}
 \end{bmatrix}$$

Deve-se ainda notar que para a extremidade i do segmento i , além desta condição de vinculação elástica, fornecida diretamente pela matriz elementar, pode-se ainda fornecer a condição de vinculação $\phi_i' = 0$.

5.2 - Engastamentos elásticos ao efeito de esforços axiais
(molas a binomento)

São vínculos que apresentam deslocamentos axiais proporcionais aos esforços axiais relativos em pontos do esqueleto da seção transversal.

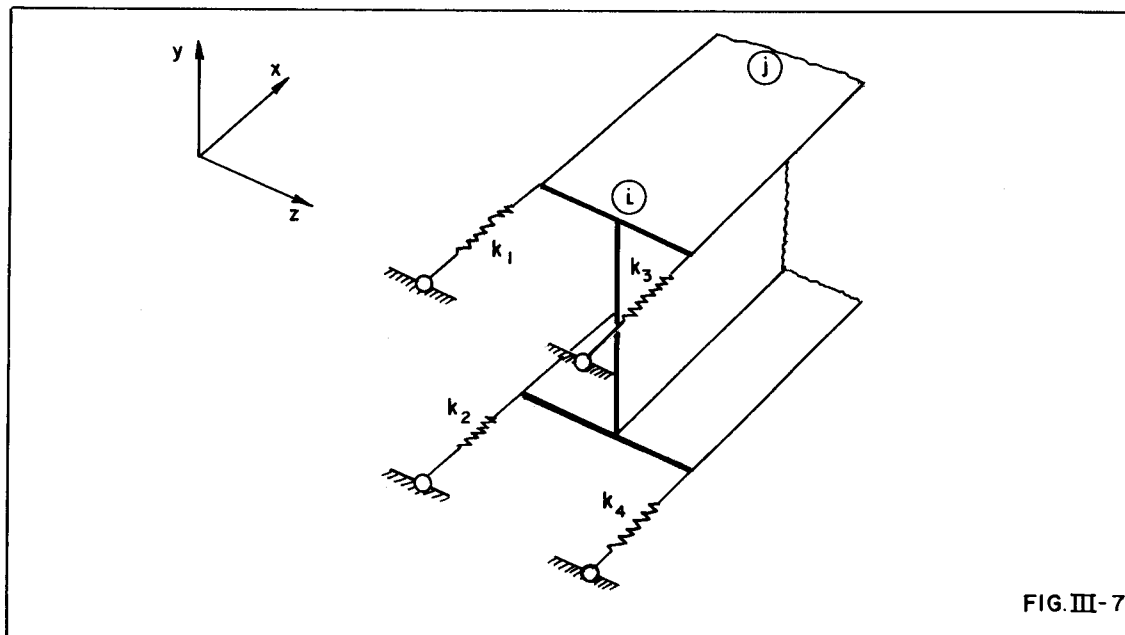


FIG. III-7

De acordo com a expressão (I-4), os deslocamentos longitudinais de pontos t , localizados na linha do eixo longitudinal da seção transversal i , são dados por:

$$u_t = \omega_t \phi_i$$

sendo t o ponto da seção i em contato com a mola e ω_t a sua respectiva área setorial.

Sabe-se também que:

$$P_t = K_t u_t$$

onde P_t - é o esforço da mola no ponto t .

K_t - é o coeficiente da mola no ponto t .

Portanto, a energia de deformação na seção i é da da por:

$$U_D = \frac{1}{2} \sum P_t u_t$$

ou, substituindo as expressões de u_t e P_t :

$$U_D = \frac{1}{2} \sum K_t \omega_t^2 \phi_i^2$$

ou:

$$U_D = \frac{1}{2} \phi_i^2 \sum K_t \omega_t^2 \quad \dots \quad \text{(III-10)}$$

onde $\sum K_t \omega_t^2$ será chamada de constante elástica da mola a bímomento.

De acordo com as expressões (III-7), tem-se:

$$\frac{\partial U_D}{\partial \phi_i} = \phi_i \sum K_t \omega_t^2$$

Pode-se, portanto, afirmar que, na matriz elementar das características geométricas e elásticas (página 35),

apenas o elemento da segunda linha e segunda coluna sofre um acréscimo do valor:

$$\sum_t K_t \omega_t^2$$

O sistema elementar de equações para o segmento i com vinculação elástica a bimomento na extremidade i pode ser assim escrito:

$$\begin{bmatrix} D & B & -D & B \\ B & A + \sum_t K_t \omega_t^2 & -B & C \\ -D & -B & D & -B \\ B & C & -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-m h_i}{2} - M_i \\ \frac{-m h_i^2}{12} + L_{a_i} \\ \frac{-m h_i}{2} \\ + \frac{m h_i^2}{12} \end{bmatrix}$$

Deve-se ainda notar que, para a extremidade i do segmento i , além desta condição de vinculação elástica fornecida diretamente pela matriz elementar, pode-se ainda fornecer a condição de vinculação $\phi_i = 0$.

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO E EXEMPLOS NUMÉRICOS

1. PROGRAMA PARA AUTOMATIZAR O CÁLCULO

No apêndice, encontra-se um programa em linguagem FORTRAN para o computador Burroughs-3500, que permite o cálculo dos ângulos de giro ϕ , suas derivadas ϕ' , dos bimotores, dos momentos de flexo-torção, dos momentos de torção livre e dos momentos torçores finais para todos os pontos considerados na divisão da barra.

Explica-se a seguir a maneira de serem fornecidos os dados ao programa.

- a) Características elásticas do material: são fornecidos diretamente pelo programa os valores de:
 E = módulo de elasticidade longitudinal = 2100 tf/cm².
 G = módulo de elasticidade transversal = 800 tf/cm² (estes valores deverão ser alterados caso o material das barras não seja o aço).
- b) Características geométricas da seção transversal: devem ser fornecidos os seguintes valores de:
 J_t = momento de inércia a torção (AJT)
 J_w = momento setorial de inércia (AJW)
- c) Divisão da barra: deve ser fornecido o número (Nh) de segmentos em que a barra é dividida.
- d) Construção do vetor das cargas e da matriz das características geométricas e elásticas: devem ser fornecidos, em um cartão para cada nó, os seguintes dados:
NO - número do nó (entende-se por nó o ponto de encontro de dois segmentos da barra);

- BI - o valor do binomento aplicado no n^o referido, em $tf \cdot cm^2$;
- AMT - o valor do momento torçor aplicado no n^o referido, em $tf \cdot cm$;
- AMD(NO) - o valor do momento torçor uniformemente distribuído no segmento de mesmo número do n^o referido, em $tf \cdot cm/cm$;
- H(NO) - o valor do comprimento do segmento de mesmo número do n^o referido, em cm ;
- AK(NO) - o valor da constante de mola a torção no n^o referido, em $tf \cdot cm$;
- AKW(NO) - o valor da constante de mola a binomento dado pela expressão $\sum_t K_t \omega_t^2$ no n^o referido, em $tf \cdot cm^3$.

É importante notar que cada segmento de divisão da barra tem sempre o mesmo número do n^o antecedente, de modo que o segmento referente ao último n^o deve ter dimensão H(NO) igual a zero.

e) Entrada das condições de contorno (condições de vinculação).

Para cada n^o da barra, são duas as incógnitas a serem calculadas: o giro ϕ e sua derivada ϕ' ; portanto, quando as condições de vinculação indicarem valores nulos para essas incógnitas, os dados são fornecidos ao programa da seguinte maneira:

- 1) Inicialmente, em um cartão de dados, é fornecido o número de incógnitas (NREST) ϕ e ϕ' iguais a zero.
- 2) A seguir, para cada n^o que tiver condições de vinculação, é fornecido um cartão de dados para cada condição com as seguintes informações:

NO - número do n^o que apresenta condições de vinculação.

IFUNC - esta constante deve assumir o valor zero ou um, conforme se tenha respectivamente, o giro ϕ igual a zero ou sua derivada ϕ' igual a zero.

É oportuno frisar que estas condições de vinculação devem sempre ser fornecidas na ordem crescente do número do nó e ainda, em primeiro lugar, a restrição do giro ϕ igual a zero (IFUNC = 0), para depois se fornecer a restrição de sua derivada ϕ' igual a zero (IFUNC = 1).

Fornecidos todos estes dados, o programa monta a matriz das características geométricas e elásticas e o vetor de cargas para toda a barra. Com auxílio da subrotina GAJOR, resolve o sistema de equações fornecendo os valores do ângulo de giro ϕ e sua derivada ϕ' para todos os nós.

Com base nestes valores, são calculados, através da solução exata para cada segmento, os valores do bimomento e momento de flexo-torção para as duas extremidades de todos os segmentos da barra.

Com os valores da derivada primeira do ângulo de giro, calcula-se diretamente, para cada nó da barra, o momento de torção livre.

Como os valores do bimomento e momento de flexo-torção são calculados para as extremidades dos segmentos, para um único nó i , obtém-se o valor calculado para a extremidade subsequente do segmento $i-1$ e o valor calculado para a extremidade antecedente do segmento i . Como estes valores são calculados partindo-se de valores ϕ e ϕ' aproximados, e les podem apresentar diferenças.

Optou-se, portanto, por apresentar ambos os resultados obtidos para o bimomento e momento de flexo-torção, como também a média aritmética dos dois valores.

O programa fornece também os valores do bimomento, do momento de flexo-torção, do momento de torção livre e do momento torçor final para pontos situados no meio dos segmentos da barra.

2. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VERIFICAÇÕES

Alguns dos exemplos aqui apresentados serviram para a verificação do processo de automatização de cálculo e do correspondente programa para o computador.

No primeiro exemplo, é explicada detalhadamente a maneira como se utiliza o programa de cálculo.

Com a finalidade de se compararem os resultados, e de se verificar a precisão obtida, além dos resultados obtidos pelo programa de cálculo, são apresentadas as soluções exatas dos problemas pela resolução da equação diferencial regente. Convém salientar que estas soluções exatas são, na maioria dos casos, de obtenção extremamente trabalhosa.

Os exemplos foram escolhidos com a finalidade de ilustrar os tipos de problemas possíveis de serem resolvidos.

Para a resolução dos problemas em teoria de primeira ordem, obteve-se precisão excelente, dividindo-se a barra em 8 segmentos. No entanto, é possível uma divisão da barra em até 40 segmentos. Este número de divisões poderia ser maior se fossem usadas técnicas computacionais próprias para solução de sistema de equações cuja matriz é simétrica e de banda.

2.1 - Primeiro exemplo (Figura IV-1)

A barra da figura IV-1 está submetida a um bimoto na extremidade direita com vínculos de garfos nas extremidades e sua seção tem as seguintes características geométricas:

$$J_t = 0,3278 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 5802 \text{ cm}^6$$

O comprimento da barra é:

$$l = 300 \text{ cm}$$

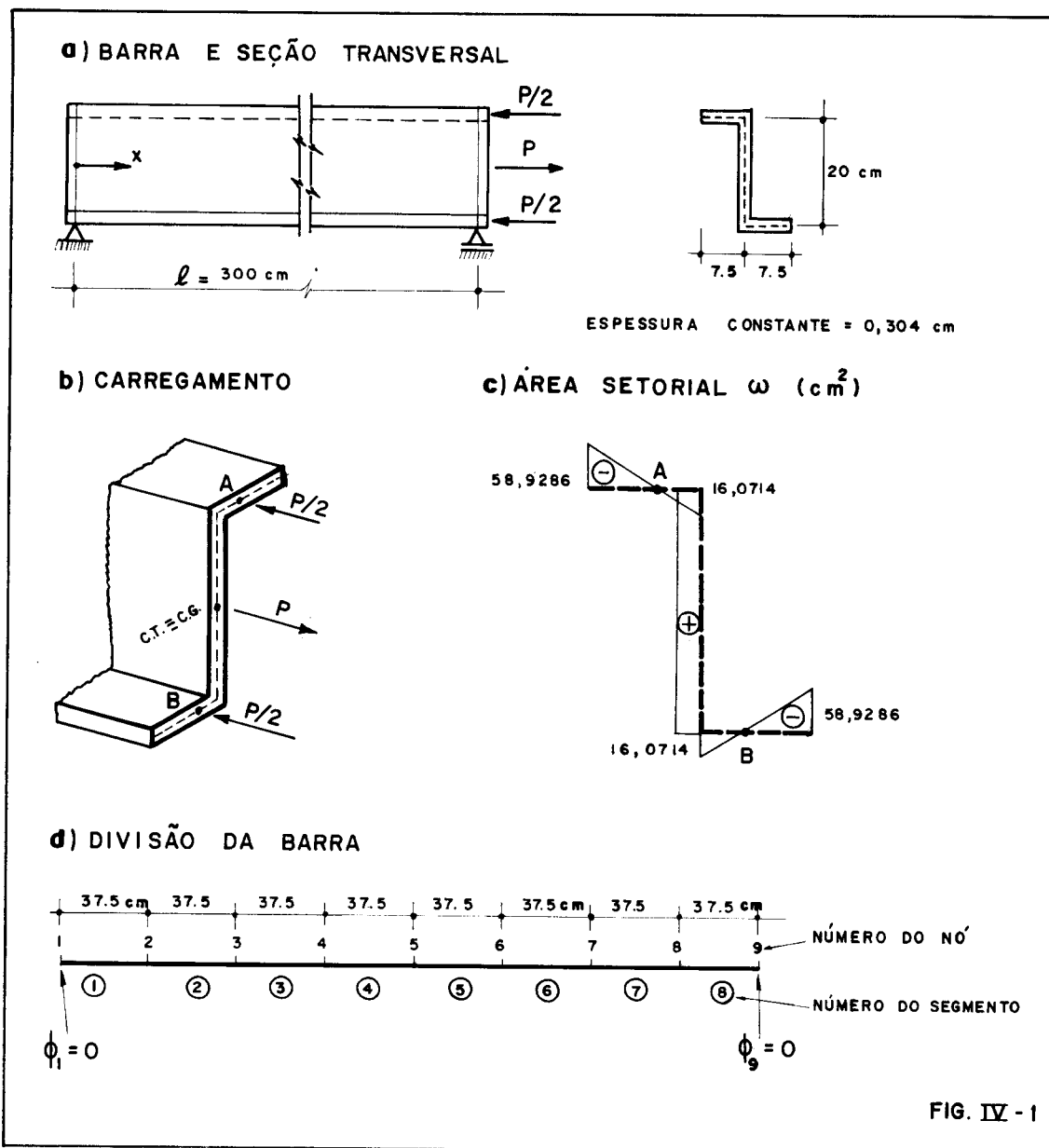


FIG. IV - 1

O bimomento aplicado é calculado conforme expressão (I-23):

$$B_a = \sum_i P_i \omega_i = 16,0714 P$$

Os resultados exatos podem ser obtidos pela resolução da equação diferencial:

$$r^2 B'' - B = 0$$

com solução geral:

$$B(x) = C_1 \operatorname{senh} \frac{x}{r} + C_2 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

Condições de contorno:

$$B(0) = 0$$

$$B(l) = B_a = 16,0714 P$$

Donde:

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{B_a}{\operatorname{senh} \frac{l}{r}}$$

Portanto:

$$B(x) = C_1 \operatorname{senh} \frac{x}{r} = \frac{B_a \operatorname{senh} \frac{x}{r}}{\operatorname{senh} \frac{l}{r}}$$

Para o momento de flexo-torção, tem-se:

$$M_{ft}(x) = -B'(x) = -\frac{B_a \operatorname{cosh} \frac{x}{r}}{r \operatorname{senh} \frac{l}{r}}$$

Para achar a expressão do momento de torção livre, faz-se:

$$B(x) = E J_{\omega} \phi''$$

Logo:

$$\phi'' = \frac{B_a \operatorname{senh} \frac{x}{r}}{E J_{\omega} \operatorname{senh} \frac{l}{r}}$$

Integrando duas vezes, obtêm-se:

$$\phi' = \frac{r B_a \operatorname{cosh} \frac{x}{r}}{E J_{\omega} \operatorname{senh} \frac{l}{r}} + D_1$$

$$\phi = \frac{r^2 B_a \sinh \frac{x}{r}}{E J_\omega \sinh \frac{\ell}{r}} + D_1 x + D_2$$

Condições de contorno:

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(\ell) = 0$$

Donde:

$$D_2 = 0$$

$$D_1 = \frac{-B_a}{\sinh \frac{\ell}{r}} \frac{\sinh \frac{\ell}{r}}{\ell G J_t}$$

Portanto:

$$M_\ell(x) = G J_t \phi' = \frac{B_a}{\sinh \frac{\ell}{r}} \left(\frac{1}{r} \cosh \frac{x}{r} - \frac{1}{\ell} \sinh \frac{\ell}{r} \right)$$

Substituindo-se nas expressões de $B(x)$, $M_{ft}(x)$ e $M_\ell(x)$ os valores de:

$$B_a = 16,0714 \text{ P}$$

$$\ell = 300 \text{ cm}$$

$$r = \sqrt{\frac{E J_\omega}{G J_t}} = 215,5505 \text{ cm}$$

e fazendo x variar de 0 a 300 cm, em intervalos de 37,5 cm, conforme figura IV-1, obtêm-se os resultados da tabela IV-1.

TABELA IV-1				
NO	Bimomento (tf.cm ²)	Momento de Flexo Torção (tf.cm)	Momento de Torção Livre (tf.cm)	Momento Torçor (tf.cm)
1	zero	-0,0395187 P	-0,0140526 P	-0,0535713 P
2	1,4894382 P	-0,0401183 P	-0,0134531 P	-0,0535713 P
3	3,0240706 P	-0,0419351 P	-0,0116362 P	-0,0535713 P
4	4,6504625 P	-0,0450244 P	-0,0085469 P	-0,0535713 P
5	6,4179638 P	-0,0494799 P	-0,0040914 P	-0,0535713 P
6	8,3802058 P	-0,0554368 P	+0,0018655 P	-0,0535713 P
7	10,5967290 P	-0,0630758 P	+0,0095045 P	-0,0535713 P
8	13,1347896 P	-0,0726287 P	+0,0190574 P	-0,0535713 P
9	16,0714000 P	-0,0843854 P	+0,0308140 P	-0,0535713 P

São agora apresentados os resultados obtidos pelo programa do apêndice. Com a finalidade de se compararem os resultados, para estudo da precisão em função do número de divisões da barra, apresentam-se, além do conjunto de resultados referentes à divisão da viga em oito segmentos, os resultados referentes, respectivamente, às divisões em quatro e dois segmentos. Para melhor comparação dos resultados obtidos, adotou-se para os exemplos apresentados, o valor de $P = 1 \text{ tf.}$

a) Divisão da barra em oito segmentos.

Os resultados estão indicados nas tabelas IV-2 e IV-3.

TABELA IV-2

```
*****
*      *      *      *
* NO *      *      *      *
*      *      *      *
*      *      *      *
*      *      *      *
* 1 *      *      *      *
*      *      *      *
* 2 *      *      *      *
*      *      *      *
* 3 *      *      *      *
*      *      *      *
* 4 *      *      *      *
*      *      *      *
* 5 *      *      *      *
*      *      *      *
* 6 *      *      *      *
*      *      *      *
* 7 *      *      *      *
*      *      *      *
* 8 *      *      *      *
*      *      *      *
* 9 *      *      *      *
*      *      *      *
*****
```

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.5358686E-04
2	-0.1980957E-02	-0.5130056E-04
3	-0.3789576E-02	-0.4437229E-04
4	-0.5248288E-02	-0.3259183E-04
5	-0.6168908E-02	-0.1560172E-04
6	-0.6346924E-02	0.7113576E-05
7	-0.5555290E-02	0.3624330E-04
8	-0.3537540E-02	0.7267134E-04
9	0.0000000E+00	0.1175030E-03

TABELA IV-3

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.8633092E-06	-0.3951871E-01	-0.1405262E-01	-0.5357133E-01
1.5	0.7419098E+00	-0.3966832E-01	-0.1390301E-01	-0.5357133E-01
2	0.1489438E+01 0.1489436E+01 0.1489437E+01	-0.4011827E-01 -0.4011827E-01 -0.4011827E-01	-0.1345306E-01	-0.5357133E-01
2.5	0.2248241E+01	-0.4087197E-01	-0.1269935E-01	-0.5357133E-01
3	0.3024069E+01 0.3024067E+01 0.3024068E+01	-0.4193514E-01 -0.4193514E-01 -0.4193514E-01	-0.1163619E-01	-0.5357133E-01
3.5	0.3822791E+01	-0.4331581E-01	-0.1025552E-01	-0.5357133E-01
4	0.4650459E+01 0.4650457E+01 0.4650458E+01	-0.4502445E-01 -0.4502445E-01 -0.4502445E-01	-0.8546881E-02	-0.5357133E-01
4.5	0.5513336E+01	-0.4707398E-01	-0.6497347E-02	-0.5357133E-01
5	0.6417958E+01 0.6417956E+01 0.6417957E+01	-0.4947993E-01 -0.4947993E-01 -0.4947993E-01	-0.4091394E-02	-0.5357133E-01
5.5	0.7371172E+01	-0.5226052E-01	-0.1310809E-02	-0.5357133E-01
6	0.8380198E+01 0.8380196E+01 0.8380197E+01	-0.5543679E-01 -0.5543679E-01 -0.5543679E-01	0.1865464E-02	-0.5357133E-01
6.5	0.9452672E+01	-0.5903280E-01	0.5461472E-02	-0.5357133E-01
7	0.1059672E+02 0.1059672E+02 0.1059672E+02	-0.6307577E-01 -0.6307577E-01 -0.6307577E-01	0.9504443E-02	-0.5357133E-01
7.5	0.1182099E+02	-0.6759631E-01	0.1402499E-01	-0.5357133E-01
8	0.1313478E+02 0.1313477E+02 0.1313477E+02	-0.7262866E-01 -0.7262866E-01 -0.7262866E-01	0.1905733E-01	-0.5357133E-01
8.5	0.1454800E+02	-0.7821091E-01	0.2463958E-01	-0.5357132E-01
9	0.1607138E+02	-0.8438532E-01	0.3081400E-01	-0.5357132E-01

b) Divisão da barra em quatro segmentos.

Os resultados estão indicados nas tabelas IV-4 e IV-5.

TABELA IV-4

```

*****
*      *      *      *      *
* NO *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 1 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 2 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 3 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 4 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 5 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*****
    
```

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.5358600E-04
2	-0.3789517E-02	-0.4437156E-04
3	-0.6168810E-02	-0.1560140E-04
4	-0.5555199E-02	0.3624279E-04
5	0.0000000E+00	0.1175011E-03

TABELA IV-5

```

*****
*      *      *      *      *      *
* NO *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 1 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 1.5 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 2 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 2.5 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 3 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 3.5 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 4 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 4.5 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 5 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*****
    
```

NO	BIMOMENTO (TF.CM2)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.2775633E-04	-0.3951887E-01	-0.1405239E-01	-0.5357126E-01
1.5	0.1489416E+01	-0.4011841E-01	-0.1345285E-01	-0.5357126E-01
2	0.3024054E+01	-0.4193527E-01		
	0.3023995E+01	-0.4193526E-01		
	0.3024025E+01	-0.4193526E-01	-0.1163600E-01	-0.5357126E-01
2.5	0.4650391E+01	-0.4502451E-01	-0.8546745E-02	-0.5357125E-01
3	0.6417894E+01	-0.4947994E-01		
	0.6417824E+01	-0.4947993E-01		
	0.6417859E+01	-0.4947993E-01	-0.4091311E-02	-0.5357125E-01
3.5	0.8380064E+01	-0.5543668E-01	0.1865440E-02	-0.5357124E-01
4	0.1059658E+02	-0.6307555E-01		
	0.1059649E+02	-0.6307552E-01		
	0.1059654E+02	-0.6307553E-01	0.9504310E-02	-0.5357122E-01
4.5	0.1313454E+02	-0.7262822E-01	0.1905701E-01	-0.5357121E-01
5	0.1607113E+02	-0.8438469E-01	0.3081348E-01	-0.5357121E-01

c) Divisão da barra em dois segmentos.

Os resultados estão indicados nas tabelas IV-6 e IV-7.

TABELA IV-6

```

*****
*      *      *      *      *
* NO *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*****
*      *      *      *      *
* 1 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 2 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 3 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*****
    
```

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.5357068E-04
2	-0.6167203E-02	-0.1559460E-04
3	0.0000000E+00	0.1174718E-03

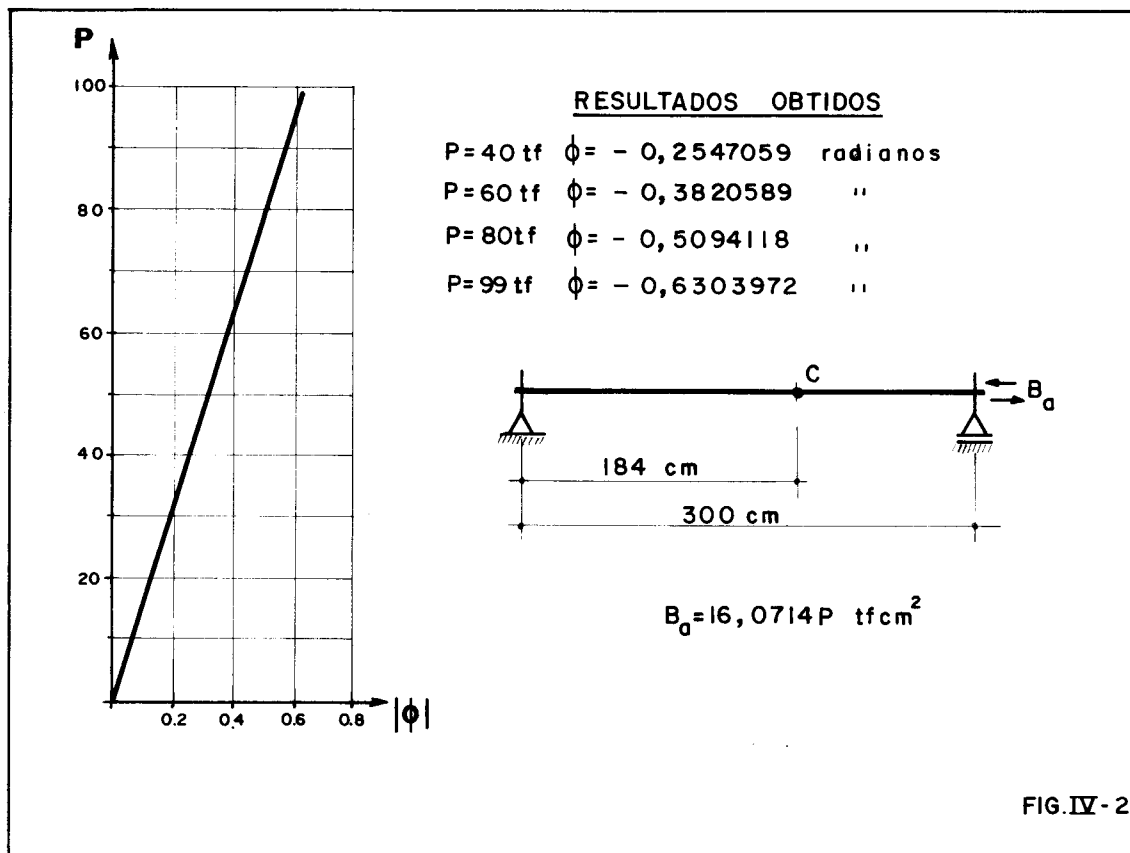
TABELA IV-7

```

*****
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* NO *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*****
*      *      *      *      *      *
* 1 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 1.5 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 2 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 2.5 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
* 3 *      *      *      *      *      *
*      *      *      *      *      *
*****
    
```

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.9048875E-03	-0.3952178E-01	-0.1404837E-01	-0.5357015E-01
1.5	0.3023346E+01	-0.4193691E-01	-0.1163325E-01	-0.5357015E-01
2	0.6417331E+01	-0.4948063E-01		
	0.6415065E+01	-0.4948063E-01		
	0.6416198E+01	-0.4948033E-01	-0.4089528E-02	-0.5356986E-01
2.5	0.1059366E+02	-0.6307112E-01	0.9501556E-02	-0.5356956E-01
3	0.1606779E+02	-0.8437536E-01	0.3080580E-01	-0.5356956E-01

Com a finalidade de se verificar a proporcionalidade entre carga e deslocamentos, calcularam-se os valores do ângulo de rotação na seção C (figura IV-2), para diversos valores da carga P, obtendo-se o gráfico da figura IV-2.



No caso apresentado, divisão da barra em oito segmentos, a entrada dos dados deve obedecer a seguinte ordem:

1º cartão - Características geométricas da barra:

$$AJT = 0,3278 \text{ cm}^4$$

$$AJW = 5802 \text{ cm}^6$$

$$\text{Formato} = 2F10.0$$

2º cartão - divisão da viga

$$NH = 8$$

$$\text{Formato} = I2$$

3º ao 11º cartão - Construção do sistema de equações

$$\text{Formato} = I2, 6F10.0$$

Cartões	NO	BI	AMT	AMD (NO)	H(NO)	AK(NO)	AKW(NO)
3º cartão	1	b	b	b	37,5	b	b
4º cartão	2	b	b	b	37,5	b	b
5º cartão	3	b	b	b	37,5	b	b
6º cartão	4	b	b	b	37,5	b	b
7º cartão	5	b	b	b	37,5	b	b
8º cartão	6	b	b	b	37,5	b	b
9º cartão	7	b	b	b	37,5	b	b
10º cartão	8	b	b	b	37,5	b	b
11º cartão	9	16,0714	b	b	b	b	b

(b = brancos)

12º ao 14º cartão - condições de contorno

12º cartão - NREST = 2 - formato = I2

13º cartão - NO = 1 , IFUNC = 0 - formato = 2I2

14º cartão - NO = 9 , IFUNC = 0 - formato = 2I2

Observar que, tanto para o nó 1 como para o nó 9, o valor de IFUNC é zero, pois nestes pontos se tem vínculos de garfos, isto é:

$$\phi_1 = 0 \quad e \quad \phi_9 = 0$$

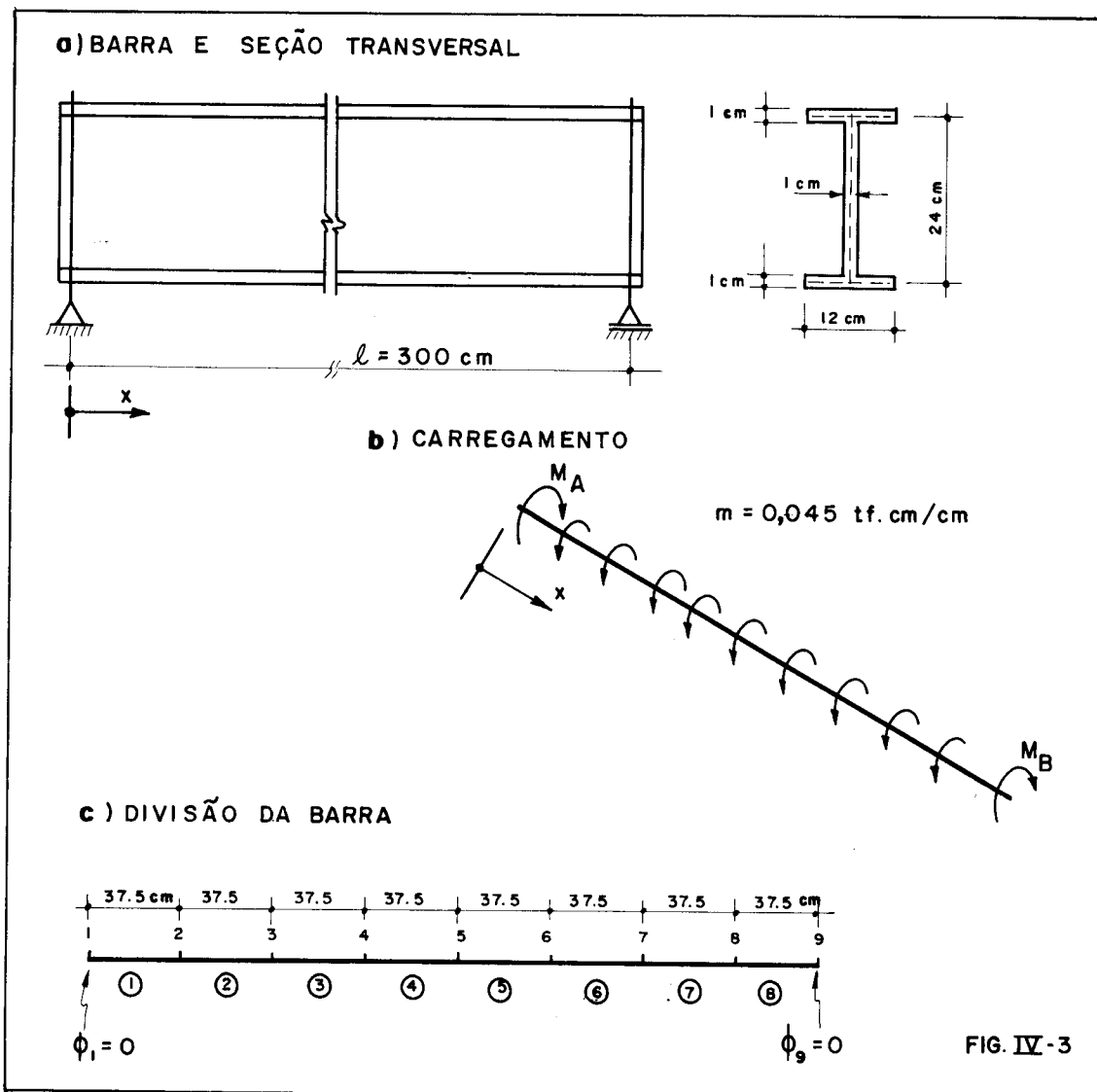
2.2 - Segundo exemplo (Figura IV-3)

A barra da figura IV-3 está submetida a um momento torçor distribuído e tem as seguintes características geométricas:

$$J_t = 16 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 41472 \text{ cm}^6$$

$$l = 300 \text{ cm}$$



Para este problema serão apresentados dois casos: o primeiro para vínculos de garfos nas extremidades, conforme figura IV-3, e o segundo para engastamentos fixos nas extremidades.

a) Primeiro caso - vínculos de garfos:

Os resultados exatos são obtidos pela resolução da seguinte equação diferencial:

$$r^2 B'' - B = -r^2 m$$

Com solução geral:

$$B = C_1 \operatorname{senh} \frac{x}{r} + C_2 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + r^2_m$$

Condições de contorno:

$$B(0) = 0$$

$$B(\ell) = 0$$

Donde:

$$C_2 = r^2_m$$

$$C_1 = \frac{r^2_m (\operatorname{cosh} \frac{\ell}{r} - 1)}{\operatorname{senh} \frac{\ell}{r}}$$

Portanto:

$$B(x) = \frac{r^2_m}{\operatorname{senh} \frac{\ell}{r}} (\operatorname{cosh} \frac{\ell}{r} - 1) \operatorname{senh} \frac{x}{r} - r^2_m \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + r^2_m$$

Para o momento de flexo-torção tem-se:

$$M_{ft}(x) = \frac{-rm}{\operatorname{senh} \frac{\ell}{r}} (\operatorname{cosh} \frac{\ell}{r} - 1) \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + rm \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

Para o momento de torção livre tem-se:

$$M_\ell(x) = G J_t \phi' = \frac{rm}{\operatorname{senh} \frac{\ell}{r}} (\operatorname{cosh} \frac{\ell}{r} - 1) \operatorname{cosh} \frac{x}{r} - rm \operatorname{senh} \frac{x}{r} + m \left(x - \frac{\ell}{2}\right)$$

Para o giro ϕ tem-se:

$$\phi(x) = \frac{1}{E J_\omega} \left[\frac{r^4_m}{\operatorname{senh} \frac{\ell}{r}} (\operatorname{cosh} \frac{\ell}{r} - 1) \operatorname{senh} \frac{x}{r} - r^4_m \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + \frac{r^2_m x^2}{2} - \frac{r^2_m \ell x}{2} + r^4_m \right]$$

Substituindo-se nas expressões de $B(x)$, $M_{ft}(x)$, $M_{\ell}(x)$, e $\phi(x)$ os valores de:

$$m = 0,045 \text{ tf}\cdot\text{cm/cm}$$

$$r = \sqrt{\frac{E J_{\omega}}{G J_t}} = 82,4864 \text{ cm}$$

$$\ell = 300 \text{ cm}$$

e fazendo x variar de 0 a 300 cm, em intervalos de 37,5 cm, conforme figura IV-1, obtêm-se os resultados das tabelas IV-8 e IV-9.

TABELA IV-8			
Valor de x (cm)	NO	Ângulo de giro (radianos)	Derivada 1ª do ângulo de giro(1/cm)
0	1	zero	$-2,522449 \cdot 10^{-4}$
37,5	2	$-9,1425942 \cdot 10^{-3}$	$-2,279101 \cdot 10^{-4}$
75,0	3	$-1,6655052 \cdot 10^{-2}$	$-1,683307 \cdot 10^{-4}$
112,5	4	$-2,1518037 \cdot 10^{-2}$	$-8,870218 \cdot 10^{-5}$
150,0	5	$-2,3194247 \cdot 10^{-2}$	zero
187,5	6	$-2,1518081 \cdot 10^{-2}$	$8,869829 \cdot 10^{-5}$
225,0	7	$-1,6655072 \cdot 10^{-2}$	$1,683285 \cdot 10^{-4}$
262,5	8	$-9,1425273 \cdot 10^{-3}$	$2,279110 \cdot 10^{-4}$
300,0	9	zero	$2,522439 \cdot 10^{-4}$

TABELA IV-9				
NO	Bimomento (tf·cm ²)	Momento de Flexo torção (tf·cm)	Momento de torção livre (tf·cm)	Momento torçor (tf·cm)
1	zero	-3,521400	-3,228735	-6,750135
2	104,460126	-2,145372	-2,917249	-5,062621
3	166,504599	-1,220454	-2,154632	-3,375086
4	199,180749	-0,552146	-1,135388	-1,687534
5	209,359673	zero	zero	zero
6	199,179065	0,552289	1,135338	1,687627
7	166,501160	1,220645	2,154605	3,375250
8	104,453672	2,145658	2,917261	5,062919
9	zero	3,521935	3,228722	6,705657

Os resultados obtidos pelo computador são apresen-
tados nas tabelas IV-10 e IV-11.

TABELA IV-10

```

*****
*      *      *      *
* NO *  ANGULO DE GIRO *  DERIVADA 1 DO *
*      *  (RADIANOS) *  ANGULO DE GIRO *
*      *      *      *
*****
*      *      *      *
* 1 *  0.0000000E+00 * -0.2522426E-03 *
*      *      *      *
* 2 *  -0.9142791E-02 * -0.2279025E-03 *
*      *      *      *
* 3 *  -0.1665522E-01 * -0.1683232E-03 *
*      *      *      *
* 4 *  -0.2151816E-01 * -0.8869663E-04 *
*      *      *      *
* 5 *  -0.2319487E-01 * -0.4014200E-41 *
*      *      *      *
* 6 *  -0.2151816E-01 *  0.8869663E-04 *
*      *      *      *
* 7 *  -0.1665522E-01 *  0.1683232E-03 *
*      *      *      *
* 8 *  -0.9142791E-02 *  0.2279025E-03 *
*      *      *      *
* 9 *  0.0000000E+00 *  0.2522426E-03 *
*      *      *      *
*****

```

TABELA IV-11

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	0.1500306E-01	-0.3521281E+01	-0.3228705E+01	-0.6749986E+01
1.5	0.5866519E+02	-0.2761653E+01	-0.3144583E+01	-0.5906236E+01
2	0.1044711E+03 0.1044667E+03 0.1044689E+03	-0.2145334E+01 -0.2145340E+01 -0.2145337E+01	-0.2917152E+01	-0.5062489E+01
2.5	0.1398054E+03	-0.1640337E+01	-0.2578405E+01	-0.4218742E+01
3	0.1665104E+03 0.1665079E+03 0.1665092E+03	-0.1220455E+01 -0.1220459E+01 -0.1220457E+01	-0.2154536E+01	-0.3374994E+01
3.5	0.1859651E+03	-0.8639038E+00	-0.1667342E+01	-0.2531246E+01
4	0.1991840E+03 0.1991829E+03 0.1991835E+03	-0.5521788E+00 -0.5521818E+00 -0.5521803E+00	-0.1135317E+01	-0.1687497E+01
4.5	0.2068495E+03	-0.2691078E+00	-0.5746408E+00	-0.8437486E+00
5	0.2093616E+03 0.2093616E+03 0.2093616E+03	0.1372429E-05 -0.1372429E-05 0.3004557E-35	-0.5138176E-37	0.2953175E-35
5.5	0.2068495E+03	0.2691078E+00	0.5746408E+00	0.8437486E+00
6	0.1991829E+03 0.1991840E+03 0.1991835E+03	0.5521818E+00 0.5521788E+00 0.5521803E+00	0.1135317E+01	0.1687497E+01
6.5	0.1859651E+03	0.8639038E+00	0.1667342E+01	0.2531246E+01
7	0.1665079E+03 0.1665104E+03 0.1665092E+03	0.1220459E+01 0.1220455E+01 0.1220457E+01	0.2154536E+01	0.3374994E+01
7.5	0.1398054E+03	0.1640337E+01	0.2578405E+01	0.4218742E+01
8	0.1044667E+03 0.1044711E+03 0.1044689E+03	0.2145340E+01 0.2145334E+01 0.2145337E+01	0.2917152E+01	0.5062489E+01
8.5	0.5866519E+02	0.2761653E+01	0.3144583E+01	0.5906236E+01
9	0.1500306E-01	0.3521281E+01	0.3228705E+01	0.6749986E+01

b) Segundo caso - o segundo exemplo (figura IV-3) será agora resolvido substituindo-se os v̄nculos de garfo por engastamentos fixos e considerando-se o comprimento ℓ da barra igual a 400 cm.

A resoluçãõ exata do problema segue o mesmo esquema de resoluçãõ do primeiro caso deste problema, mudando-se apenas as condições de contorno que passam ser as seguintes:

$$\phi(0) = 0 \qquad \phi(\ell) = 0$$

$$\phi'(0) = 0 \qquad \phi'(\ell) = 0$$

Sendo que:

para $\phi'(0) = 0$ se tem $B'(0) = \frac{m \ell}{2}$

para $\phi'(\ell) = 0$ se tem $B'(\ell) = -\frac{m \ell}{2}$

Com estas condições, obtêm-se os resultados das tabelas IV-12 e IV-13.

TABELA IV-12			
Valor de x (cm)	NO	Ângulo de giro (radianos)	Derivada 1ª do ângulo de giro(1/cm)
0	1	zero	zero
50	2	$-4,5715771 \cdot 10^{-3}$	$-1,5098092 \cdot 10^{-4}$
100	3	$-1,2750588 \cdot 10^{-2}$	$-1,5938805 \cdot 10^{-4}$
150	4	$-1,9311724 \cdot 10^{-2}$	$-9,4995632 \cdot 10^{-5}$
200	5	$-2,1746264 \cdot 10^{-2}$	zero
250	6	$-1,9311724 \cdot 10^{-2}$	$9,4995629 \cdot 10^{-5}$
300	7	$-1,2750589 \cdot 10^{-2}$	$1,5938804 \cdot 10^{-4}$
350	8	$-4,5715788 \cdot 10^{-3}$	$1,5098090 \cdot 10^{-4}$
400	9	zero	zero

TABELA IV-13				
NO	Bimomento (tf·cm ²)	Momento de Flexo torção (tf·cm)	Momento de torção livre (tf·cm)	Momento torçor (tf·cm)
1	-447,92062	-9,0000000	zero	-9,00
2	-112,68681	-4,8174442	-1,9325558	-6,75
3	63,87185	-2,4598330	-2,0401670	-4,50
4	148,63931	-1,0340559	-1,2159441	-2,25
5	173,72720	zero	zero	zero
6	148,63941	1,0340559	1,2159441	2,25
7	63,87184	2,4598330	2,0401670	4,45
8	-112,68682	4,8174444	1,9325556	6,75
9	-447,92068	9,0000001	zero	9,00

São apresentados, nas tabelas IV-14 e IV-15, os resultados obtidos pelo computador

TABELA IV-14

```

*****
*      *      *      *
*  NO  *  ANGULO DE GIRO  *  DERIVADA 1 DO  *
*      *  (RADIANOS)    *  ANGULO DE GIRO  *
*      *      *      *
*****
*      *      *      *
*  1  *  0.0000000E+00  *  0.0000000E+00  *
*      *      *      *
*  2  *  -0.4571088E-02  *  -0.1509613E-03  *
*      *      *      *
*  3  *  -0.1274916E-01  *  -0.1593694E-03  *
*      *      *      *
*  4  *  -0.1930959E-01  *  -0.9498526E-04  *
*      *      *      *
*  5  *  -0.2174388E-01  *  0.1910000E-42  *
*      *      *      *
*  6  *  -0.1930959E-01  *  0.9498526E-04  *
*      *      *      *
*  7  *  -0.1274916E-01  *  0.1593694E-03  *
*      *      *      *
*  8  *  -0.4571088E-02  *  0.1509613E-03  *
*      *      *      *
*  9  *  0.0000000E+00  *  0.0000000E+00  *
*      *      *      *
*****
    
```

TABELA IV-15

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.4478858E+03	-0.8999893E+01	0.0000000E+00	-0.8999893E+01
1.5	-0.2543273E+03	-0.6603138E+01	-0.1271755E+01	-0.7874893E+01
2	-0.1126511E+03 -0.1126932E+03 -0.1126721E+03	-0.4817589E+01 -0.4817639E+01 -0.4817614E+01	-0.1932304E+01	-0.6749919E+01
2.5	-0.9785885E+01	-0.3477866E+01	-0.2147077E+01	-0.5624944E+01
3	0.6387464E+02 0.6385315E+02 0.6386390E+02	-0.2460015E+01 -0.2460045E+01 -0.2460030E+01	-0.2039928E+01	-0.4499958E+01
3.5	0.1150849E+03	-0.1669821E+01	-0.1705152E+01	-0.3374973E+01
4	0.1486283E+03 0.1486193E+03 0.1486238E+03	-0.1034162E+01 -0.1034181E+01 -0.1034171E+01	-0.1215811E+01	-0.2249983E+01
4.5	0.1675793E+03	-0.4942134E+00	-0.6307786E+00	-0.1124992E+01
5	0.1737100E+03 0.1737100E+03 0.1737100E+03	0.7983658E-05 -0.7983658E-05 0.1172177E-35	0.2444800E-38	0.1174622E-35
5.5	0.1675793E+03	0.4942134E+00	0.6307786E+00	0.1124992E+01
6	0.1486193E+03 0.1486283E+03 0.1486238E+03	0.1034181E+01 0.1034162E+01 0.1034171E+01	0.1215811E+01	0.2249983E+01
6.5	0.1150849E+03	0.1669821E+01	0.1705152E+01	0.3374973E+01
7	0.6385315E+02 0.6387464E+02 0.6386390E+02	0.2460045E+01 0.2460015E+01 0.2460030E+01	0.2039928E+01	0.4499958E+01
7.5	-0.9785885E+01	0.3477866E+01	0.2147077E+01	0.5624944E+01
8	-0.1126932E+03 -0.1126511E+03 -0.1126721E+03	0.4817639E+01 0.4817589E+01 0.4817614E+01	0.1932304E+01	0.6749919E+01
8.5	-0.2543273E+03	0.6603138E+01	0.1271755E+01	0.7874893E+01
9	-0.4478858E+03	0.8999893E+01	0.0000000E+00	0.8999893E+01

2.3 - Terceiro exemplo (Figura IV-4)

A barra está submetida, conforme figura IV-4, a um momento torçor aplicado de 18 tcm e é vinculada por dois engastamentos fixos nas suas extremidades. São dadas as seguintes características geométricas:

$$J_t = 16 \text{ cm}^4$$

$$J_w = 41472 \text{ cm}^6$$

$$l = 400 \text{ cm}$$

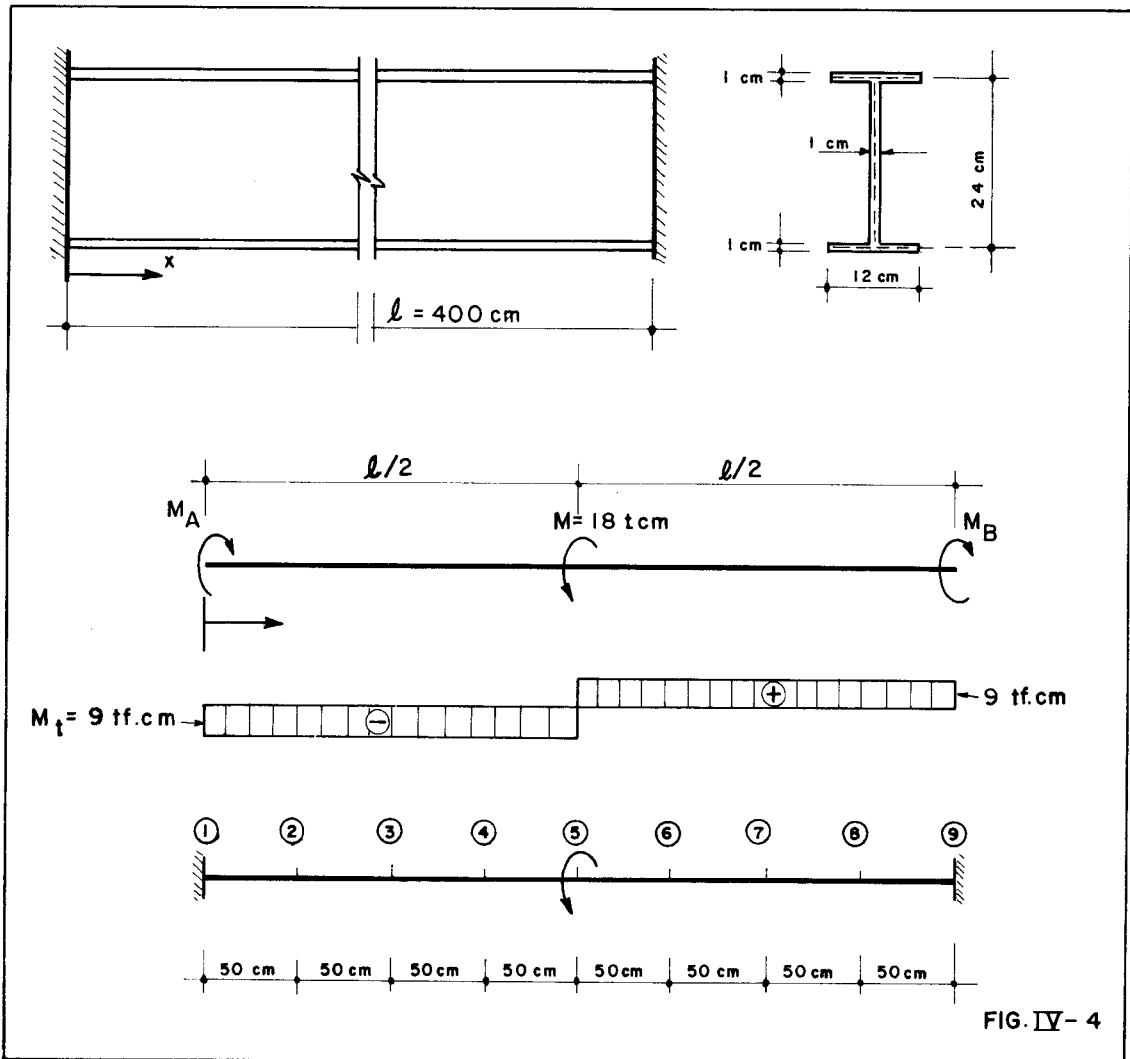
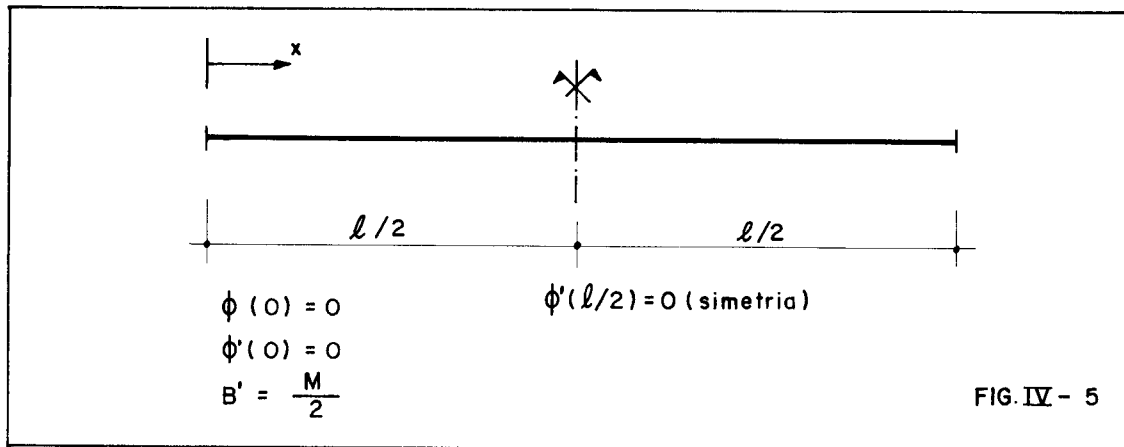


FIG. IV- 4



Com as condições indicadas na figura IV-5, obtêm-se a solução exata, válida no intervalo $0 \leq x \leq l/2$:

$$B(x) = 742,3772626 \operatorname{senh} \frac{x}{r} - 621,6478231 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

$$M_{ft}(x) = -9,0 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + 7,5363709 \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$M_{\ell}(x) = \frac{G}{E} \frac{J_t}{J_{\omega}} (61236 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} - 51277,46769 \operatorname{senh} \frac{x}{r} - 61236)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{E J_{\omega}} (5051134,895 \operatorname{senh} \frac{x}{r} - 4229691,788 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} - 61236 x + 4229691,788)$$

Fazendo-se x variar de 0 a 200 cm em intervalos de 50 cm, obtêm-se os valores para o intervalo $0 \leq x < l/2$. Os demais valores, para $l/2 < x \leq l$, serão obtidos em função da simetria do problema (ver tabelas IV-16 e IV-17).

TABELA IV-16			
Valor de x (cm)	NO	Ângulo de giro (radianos)	Derivada 1ª do ângulo de giro (1/cm)
0	1	zero	zero
50	2	$-7,0061170 \cdot 10^{-3}$	$-2,4597655 \cdot 10^{-4}$
100	3	$-2,1746264 \cdot 10^{-2}$	$-3,1877609 \cdot 10^{-4}$
150	4	$-3,6486411 \cdot 10^{-2}$	$-2,4597655 \cdot 10^{-4}$
200	5	$-4,3492528 \cdot 10^{-2}$	zero
250	6	$-3,6486411 \cdot 10^{-2}$	$+2,4597655 \cdot 10^{-4}$
300	7	$-2,1746264 \cdot 10^{-2}$	$+3,1877609 \cdot 10^{-4}$
350	8	$-7,0061170 \cdot 10^{-3}$	$+2,4597655 \cdot 10^{-4}$
400	9	zero	zero

TABELA IV-17				
NO	Bimomento (tf·cm ²)	Momento de Flexo torção (tf·cm)	Momento de torção livre (tf·cm)	Momento torçor (tf·cm)
1	-621,64782	-9,0000000	zero	-9,00
2	-261,32612	-5,8515001	-3,1484999	-9,00
3	zero	-4,9196660	-4,0803340	-9,00
4	261,32612	-5,8515001	-3,1484999	-9,00
5	621,64782	$\begin{cases} -9,0000000 \\ +9,0000000 \end{cases}$	zero	$\begin{cases} -9,00 \\ +9,00 \end{cases}$
6	261,32612	+5,8515001	+3,1484999	+9,00
7	zero	+4,9196660	+4,0803340	+9,00
8	-261,32612	+5,8515001	+3,1484999	+9,00
9	-621,64782	+9,0000000	zero	+9,00

Observar que, para os nós (no caso s \tilde{o} o n \tilde{o} 5) em que existe momento torçor aplicado s \tilde{a} o fornecidos 2 valores para momento torçor final e a mesma descontinuidade para o momento de flexo-torç \tilde{a} o.

S \tilde{a} o apresentados, nas tabelas IV-18 e IV-19, os resultados obtidos pelo computador.

TABELA IV-18

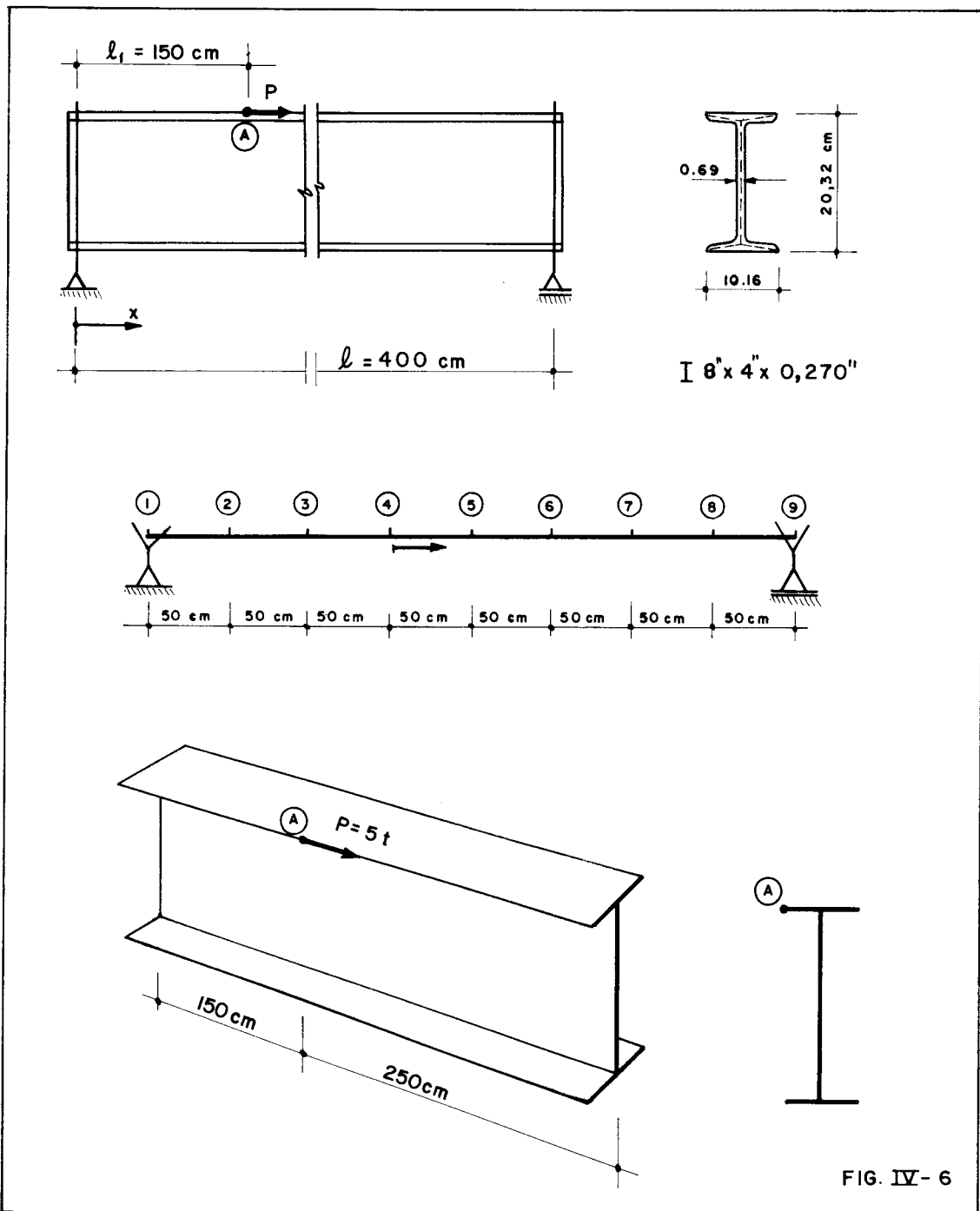
```
*****
*      *      *      *
*  ND  *  ANGULO DE GIRO *  DERIVADA 1 DO *
*      *  (RADIANS)    *  ANGULO DE GIRO *
*      *      *      *
*****
*      *      *      *
*  1  *  0.0000000E+00 *  0.0000000E+00 *
*      *      *      *
*  2  *  -0.7005376E-02 * -0.2459465E-03 *
*      *      *      *
*  3  *  -0.2174388E-01 * -0.3187388E-03 *
*      *      *      *
*  4  *  -0.3646238E-01 * -0.2459465E-03 *
*      *      *      *
*  5  *  -0.4348776E-01 *  0.3479021E-42 *
*      *      *      *
*  6  *  -0.3646238E-01 *  0.2459465E-03 *
*      *      *      *
*  7  *  -0.2174388E-01 *  0.3187388E-03 *
*      *      *      *
*  8  *  -0.7005376E-02 *  0.2459465E-03 *
*      *      *      *
*  9  *  0.0000000E+00 *  0.0000000E+00 *
*      *      *      *
*****
```

TABELA IV-19

* NO *	* BIMOMENTO (TF.CM ²) *	* MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM) *	* MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM) *	* MOMENTO TORCOR (TF.CM) *
1	-0.6215958E+03	-0.8999885E+01	0.0000000E+00	-0.8999885E+01
1.5	-0.4219066E+03	-0.7097351E+01	-0.1902534E+01	-0.8999885E+01
2	-0.2612704E+03 -0.2613215E+03 -0.2612959E+03	-0.5851770E+01 -0.5851801E+01 -0.5851785E+01	-0.3148116E+01	-0.8999901E+01
2.5	-0.1248708E+03	-0.5147688E+01	-0.3852229E+01	-0.8999917E+01
3	0.2148932E-01 -0.2148932E-01 -0.3814883E-34	-0.4920060E+01 -0.4920060E+01 -0.4920060E+01	-0.4079857E+01	-0.8999917E+01
3.5	0.1248708E+03	-0.5147688E+01	-0.3852229E+01	-0.8999917E+01
4	0.2613215E+03 0.2612704E+03 0.2612959E+03	-0.5851801E+01 -0.5851770E+01 -0.5851785E+01	-0.3148116E+01	-0.8999901E+01
4.5	0.4219066E+03	-0.7097351E+01	-0.1902534E+01	-0.8999885E+01
5	0.6215958E+03 0.6215958E+03 0.6215958E+03	-0.8999885E+01 0.8999885E+01	0.4453147E-38 0.4453147E-38	-0.8999885E+01 0.8999885E+01
5.5	0.4219066E+03	0.7097351E+01	0.1902534E+01	0.8999885E+01
6	0.2612704E+03 0.2613215E+03 0.2612959E+03	0.5851770E+01 0.5851801E+01 0.5851785E+01	0.3148116E+01	0.8999901E+01
6.5	0.1248708E+03	0.5147688E+01	0.3852229E+01	0.8999917E+01
7	-0.2148932E-01 0.2148932E-01 0.2784463E-34	0.4920060E+01 0.4920060E+01 0.4920060E+01	0.4079857E+01	0.8999917E+01
7.5	-0.1248708E+03	0.5147688E+01	0.3852229E+01	0.8999917E+01
8	-0.2613215E+03 -0.2612704E+03 -0.2612959E+03	0.5851801E+01 0.5851770E+01 0.5851785E+01	0.3148116E+01	0.8999901E+01
8.5	-0.4219066E+03	0.7097351E+01	0.1902534E+01	0.8999885E+01
9	-0.6215958E+03	0.8999885E+01	0.0000000E+00	0.8999885E+01

2.4 - Quarto exemplo (Figura IV-6)

A barra está submetida, conforme figura IV-6, a uma carga axial $P = 5 \text{ tf}$ aplicada no ponto A indicado e é vinculada nas extremidades por garfos. A seção transversal da barra é um perfil I $8'' \times 4'' \times 0,270''$.



De acordo com RACHID⁽²⁾, as características geométricas são:

$$\omega_A = \text{área setorial do ponto A} = 47,6 \text{ cm}^2$$

$$J_\omega = 14700 \text{ cm}^6$$

$$J_t = 15,5 \text{ cm}^4$$

sendo então:

$$r^2 = 2489,516129 \text{ cm}^2$$

Além da solicitação por flexo-torção, a barra em estudo está submetida à solicitação por flexão e força normal. Neste trabalho, estuda-se somente a parte referente à flexo-torção.

Para este caso, por não haver simetria, deve-se calcular as equações para os dois intervalos $0 \leq x < \ell_1$ e $\ell_1 < x \leq \ell$.

Para a solução exata, extremamente trabalhosa no caso, faz-se uso das seguintes condições de contorno:

a) $B(0) = 0$

b) $B(\ell) = 0$

c) no intervalo $0 \leq x < \ell_1$ $B(\ell_1) = B_1$

no intervalo $\ell_1 < x \leq \ell$ $B(\ell_1) = B_2$

$$B_1 = B_2 + B_a$$

sendo $B_a = P \omega_A$ conforme expressão (I-23).

Para a seção $x = \ell_1$, tem-se:

d) continuidade em ϕ

e) continuidade em ϕ'

f) $\phi(0) = 0$

g) $\phi(\ell) = 0$

Utilizando-se todas estas condições de contorno, recai-se em um sistema de 7 equações com 7 incógnitas nas constantes de integração

Obtêm-se, após a resolução deste sistema, as seguintes expressões:

a) para o intervalo $0 \leq x < l_1$

$$B(x) = 11,775274 \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$M_\ell(x) = -0,595 + 0,236 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

$$M_{ft}(x) = -0,236 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{G J_t} (-0,595 x + 11,775274 \operatorname{senh} \frac{x}{r})$$

b) para o intervalo $l_1 < x \leq l$

$$B(x) = 2411,204710 \operatorname{senh} \frac{x}{r} - 2411,204175 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

$$M_\ell(x) = -0,595 x + 48,3255284 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} - 48,3255177 \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$M_{ft}(x) = -48,3255284 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + 48,3255177 \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{G J_t} (-0,595x + 2411,204710 \operatorname{senh} \frac{x}{r} - 2411,204175 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + 238)$$

Fazendo-se x variar de 0 a 400 cm, em intervalos de 50 cm, obtêm-se os valores das tabelas IV-20 e IV-21.

TABELA IV-20			
Valor de x (cm)	NO	Ângulo de giro (radianos)	Derivada 1 ^a do ângulo de giro (1/cm)
0	1	zero	$-2,895150 \cdot 10^{-5}$
50	2	$-1,280115 \cdot 10^{-3}$	$-1,856820 \cdot 10^{-5}$
100	3	$-1,339182 \cdot 10^{-3}$	$2,391060 \cdot 10^{-5}$
150	4	$\begin{cases} 2,376125 \cdot 10^{-3} \\ 2,376133 \cdot 10^{-3} \end{cases}$	$1,448349 \cdot 10^{-4}$
200	5	$6,066280 \cdot 10^{-3}$	$2,282129 \cdot 10^{-5}$
250	6	$5,904262 \cdot 10^{-3}$	$-2,193583 \cdot 10^{-5}$
300	7	$4,331081 \cdot 10^{-3}$	$-3,827159 \cdot 10^{-5}$
350	8	$2,248017 \cdot 10^{-3}$	$-4,401009 \cdot 10^{-5}$
400	9	zero	$-4,541278 \cdot 10^{-5}$

TABELA IV-21				
NO	Bimomento (tf·cm ²)	Momento de Flexo torção (tf·cm)	Momento de torção livre (tf·cm)	Momento torçor (tf·cm)
1	zero	-0,236001	-0,358999	-0,595
2	13,87657	-0,364754	-0,230246	-0,595
3	42,89414	-0,891492	0,296492	-0,595
4	$\begin{cases} 118,71396 \\ -119,28602 \end{cases}$	-2,390953	1,795953	-0,595
5	-43,77813	-0,877984	0,282984	-0,595
6	-16,03716	-0,322996	-0,272004	-0,595
7	- 5,79460	-0,120432	-0,474568	-0,595
8	- 1,87460	-0,049275	-0,545725	-0,595
9	zero	-0,031882	-0,563118	-0,595

Observar que, para os nós (no caso s \tilde{o} o n \tilde{o} 4) em que existe bimomento aplicado, s \tilde{a} o fornecidos 2 valores para o esfor \tilde{c} o solicitante bimomento,

S \tilde{a} o apresentados, nas tabelas IV-22 e IV-23, os resultados obtidos pelo computador.

TABELA IV-22

```
*****
*      *      *      *
* NO *      *      *      *
*      *      *      *
*      *      *      *
*****
*      *      *      *
* 1 *      *      *      *
*      *      *      *
* 2 *      *      *      *
*      *      *      *
* 3 *      *      *      *
*      *      *      *
* 4 *      *      *      *
*      *      *      *
* 5 *      *      *      *
*      *      *      *
* 6 *      *      *      *
*      *      *      *
* 7 *      *      *      *
*      *      *      *
* 8 *      *      *      *
*      *      *      *
* 9 *      *      *      *
*      *      *      *
*****
```

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.2892138E-04
2	-0.1278715E-02	-0.1853832E-04
3	-0.1336813E-02	0.2392191E-04
4	0.2376029E-02	0.1447143E-03
5	0.6063638E-02	0.2282945E-04
6	0.5902346E-02	-0.2191332E-04
7	0.4330063E-02	-0.3825558E-04
8	0.2247602E-02	-0.4400012E-04
9	0.0000000E+00	-0.4540487E-04

TABELA IV-23

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.7957979E-02	-0.2363424E+00	-0.3586252E+00	-0.5949676E+00
1.5	0.6149930E+01	-0.2665522E+00	-0.3284154E+00	-0.5949676E+00
2	0.1388435E+02 0.1385976E+02 0.1387206E+02	-0.3650924E+00 -0.3650571E+00 -0.3650748E+00	-0.2298751E+00	-0.5949499E+00
2.5	0.2514935E+02	-0.5569266E+00	-0.3800558E-01	-0.5949322E+00
3	0.4288596E+02 0.4282592E+02 0.4285594E+02	-0.8915639E+00 -0.8914547E+00 -0.8915093E+00	0.2966317E+00	-0.5948776E+00
3.5	0.7154577E+02	-0.1454001E+01	0.8591782E+00	-0.5948230E+00
4	0.1186063E+03 -0.1191799E+03	-0.2389280E+01 -0.2389281E+01 -0.2389280E+01	0.1794457E+01	-0.5948234E+00
4.5	-0.7219284E+02	-0.1447998E+01	0.8531744E+00	-0.5948237E+00
5	-0.4371236E+02 -0.4377149E+02 -0.4374192E+02	-0.8779089E+00 -0.8760204E+00 -0.8779647E+00	0.2830852E+00	-0.5948795E+00
5.5	-0.2650132E+02	-0.5323778E+00	-0.6255735E-01	-0.5949352E+00
6	-0.1602474E+02 -0.1604650E+02 -0.1603562E+02	-0.3232100E+00 -0.3232508E+00 -0.3232304E+00	-0.2717252E+00	-0.5949556E+00
6.5	-0.9679581E+01	-0.1967150E+00	-0.3982611E+00	-0.5949761E+00
7	-0.5794011E+01 -0.5802134E+01 -0.5798072E+01	-0.1206068E+00 -0.1206216E+00 -0.1206142E+00	-0.4743692E+00	-0.5949834E+00
7.5	-0.3402510E+01	-0.7534780E-01	-0.5196430E+00	-0.5949908E+00
8	-0.1875117E+01 -0.1878443E+01 -0.1876780E+01	-0.4938936E-01 -0.4939414E-01 -0.4939175E-01	-0.5456015E+00	-0.5949932E+00
8.5	-0.8320373E+00	-0.3606242E-01	-0.5589332E+00	-0.5949956E+00
9	0.1076652E-02	-0.3197527E-01	-0.5630203E+00	-0.5949956E+00

2.5 - Quinto exemplo (Figura IV-7)

A barra está vinculada com garfos, conforme figura IV-7, e está submetida a um bimomento aplicado na sua extremidade direita. A seção transversal da barra é um perfil I 18"x 6"x 0,460".

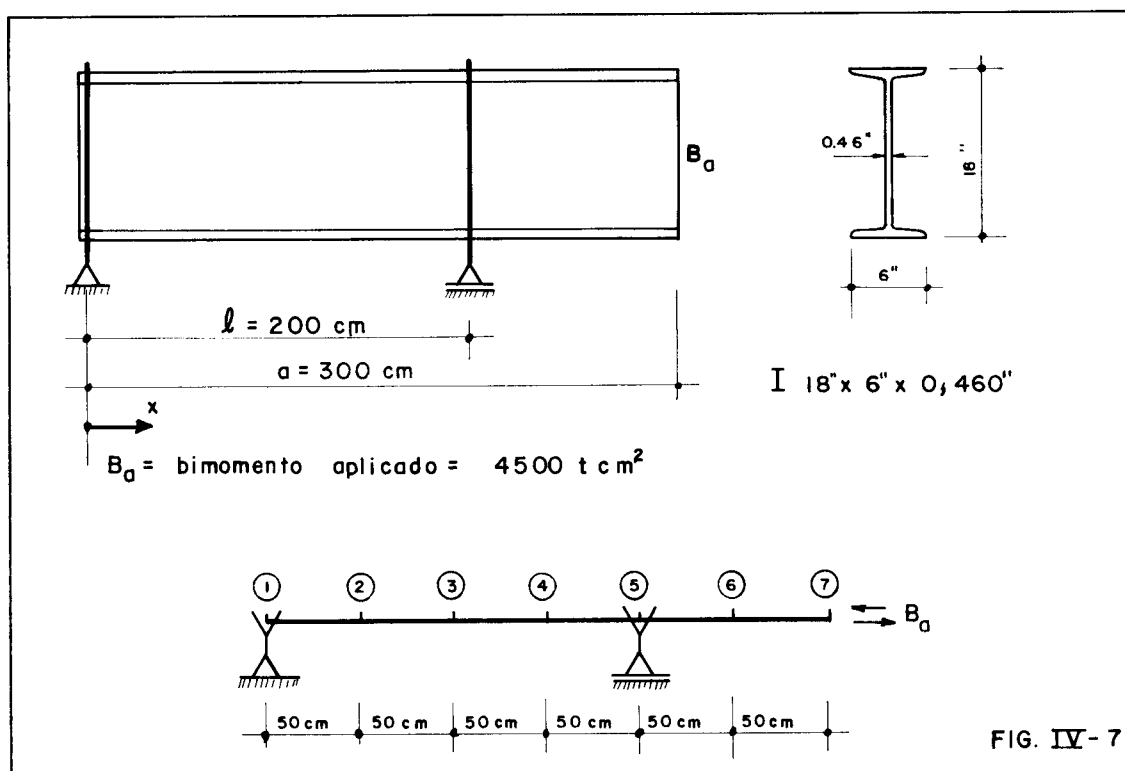
As características geométricas⁽²⁾ são:

$$J_{\omega} = 426000 \text{ cm}^6$$

$$J_t = 105 \text{ cm}^4$$

sendo portanto:

$$r^2 = 10650 \text{ cm}^2$$



As condições de contorno são as seguintes:

- a) $B(0) = 0$
- b) $B(a) = B_a$

- c) para $x = \ell$, há continuidade do bimomento.
- d) O momento torçor final no trecho $\ell < x \leq a$ é nulo.
- e) $\phi(0) = 0$
- f) no trecho $0 \leq x < \ell$ tem-se $\phi(\ell) = 0$
- g) no trecho $\ell < x \leq a$ tem-se $\phi(\ell) = 0$
- h) Para $x = \ell$, há continuidade em ϕ'

Obtêm-se as seguintes expressões para o intervalo $0 \leq x < \ell$:

$$B(x) = 630,0132 \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$M_t(x) = -10,7115$$

$$M_{ft}(x) = -6,10485 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

$$M_\ell(x) = -10,7115 + 6,10485 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{G J_t} (-10,7115 x + 630,0132 \operatorname{senh} \frac{x}{r})$$

As equações escritas a seguir são válidas para o intervalo $\ell < x \leq a$:

$$B(x) = -3286,1354 \operatorname{senh} \frac{x}{r} + 3756,8788 \operatorname{cosh} \frac{x}{r}$$

$$M_t(x) = 0$$

$$M_{ft}(x) = +31,842756 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} - 36,404275 \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$M_\ell(x) = -31,842756 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + 36,404275 \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{G J_t} (-3286,1354 \operatorname{senh} \frac{x}{r} + 3756,8788 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} - 2141,6577)$$

Fazendo-se x variar de 0 a 300 cm, em intervalos de 50 cm, obtêm-se, através destas equações, os valores relacionados nas tabelas IV-24 e IV-25.

TABELA IV-24			
Valor de x (cm)	NO	Ângulo de giro (radianos)	Derivada 1ª do ângulo de giro (1/cm)
0	1	zero	$-5,484107 \cdot 10^{-5}$
50	2	$-2,598064 \cdot 10^{-3}$	$-4,614167 \cdot 10^{-5}$
100	3	$-4,292358 \cdot 10^{-3}$	$-1,796429 \cdot 10^{-5}$
150	4	$-3,960861 \cdot 10^{-3}$	$3,643369 \cdot 10^{-5}$
200	5	zero	$1,300725 \cdot 10^{-4}$
250	6	$9,813144 \cdot 10^{-3}$	$2,700786 \cdot 10^{-4}$
300	7	$2,807550 \cdot 10^{-2}$	$4,747464 \cdot 10^{-4}$

TABELA IV-25				
NO	Bimomento (tf·cm ²)	Momento de flexo torção (tf·cm)	Momento de torção livre (tf·cm)	Momento torçor (tf·cm)
1	zero	- 6,10485	- 4,60665	-10,7115
2	317,3376	- 6,83560	- 3,87590	-10,7115
3	710,5919	- 9,20250	- 1,50900	-10,7115
4	1274,0127	-13,77193	+ 3,06043	-10,7115
5	2142,0016	{ -21,63800 -10,92560	+10,92605	{ -10,7115 zero
6	2965,9618	-22,68660	+22,68660	zero
7	4500,0000	-39,87870	+39,87870	zero

São apresentados, nas tabelas IV-26 e IV-27, os resultados obtidos pelo computador.

TABELA IV-26

```
*****
*      *      *      *
* NO *      *      *      *
*      *      *      *
*      *      *      *
*****
*      *      *      *
* 1 *      *      *      *
*      *      *      *
* 2 *      *      *      *
*      *      *      *
* 3 *      *      *      *
*      *      *      *
* 4 *      *      *      *
*      *      *      *
* 5 *      *      *      *
*      *      *      *
* 6 *      *      *      *
*      *      *      *
* 7 *      *      *      *
*      *      *      *
*****
```

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.5482758E-04
2	-0.2597575E-02	-0.4613155E-04
3	-0.4291126E-02	-0.1796202E-04
4	-0.3960251E-02	0.3642338E-04
5	0.0000000E+00	0.1300419E-03
6	0.9610963E-02	0.2700435E-03
7	0.2807321E-01	0.4746804E-03

TABELA IV-27

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.1080708E-01	-0.6103693E+01	-0.4605517E+01	-0.1070921E+02
1.5	0.1540781E+03	-0.6283644E+01	-0.4425566E+01	-0.1070921E+02
2	0.3172534E+03 0.3172292E+03 0.3172413E+03	-0.6834160E+01 -0.6834150E+01 -0.6834155E+01	-0.3875050E+01	-0.1070920E+02
2.5	0.4991129E+03	-0.7787640E+01	-0.2921560E+01	-0.1070920E+02
3	0.7104309E+03 0.7103983E+03 0.7104146E+03	-0.9200390E+01 -0.9200368E+01 -0.9200379E+01	-0.1508810E+01	-0.1070919E+02
3.5	0.9636110E+03	-0.1115561E+02	0.4464369E+00	-0.1070918E+02
4	0.1273651E+04 0.1273602E+04 0.1273626E+04	-0.1376874E+02 -0.1376870E+02 -0.1376872E+02	0.3059564E+01	-0.1070916E+02
4.5	0.1658750E+04	-0.1719370E+02	0.6484558E+01	-0.1070914E+02
5	0.2141720E+04 0.2141662E+04 0.2141691E+04	-0.2163265E+02 -0.1092341E+02	0.1092352E+02 0.1092352E+02	-0.1070914E+02 0.1074226E-03
5.5	0.2480577E+04	-0.1632220E+02	0.1632230E+02	0.1074226E-03
6	0.2965778E+04 0.2965697E+04 0.2965738E+04	-0.2268355E+02 -0.2268346E+02 -0.2268350E+02	0.2268366E+02	0.1536902E-03
6.5	0.3625795E+04	-0.3038234E+02	0.3038254E+02	0.1999577E-03
7	0.4499716E+04	-0.3987295E+02	0.3987315E+02	0.1999577E-03

2.6 - Sexto exemplo - Vínculos elásticos

O problema resolvido a seguir é o mesmo do segundo exemplo, 1º caso, somente que na extremidade direita da barra, ao invés do vínculo de garfo rígido, será colocado um vínculo de garfo elástico, ou seja, uma mola a torção com constante elástica $K = 250 \text{ t cm}$, conforme a figura IV-8.a

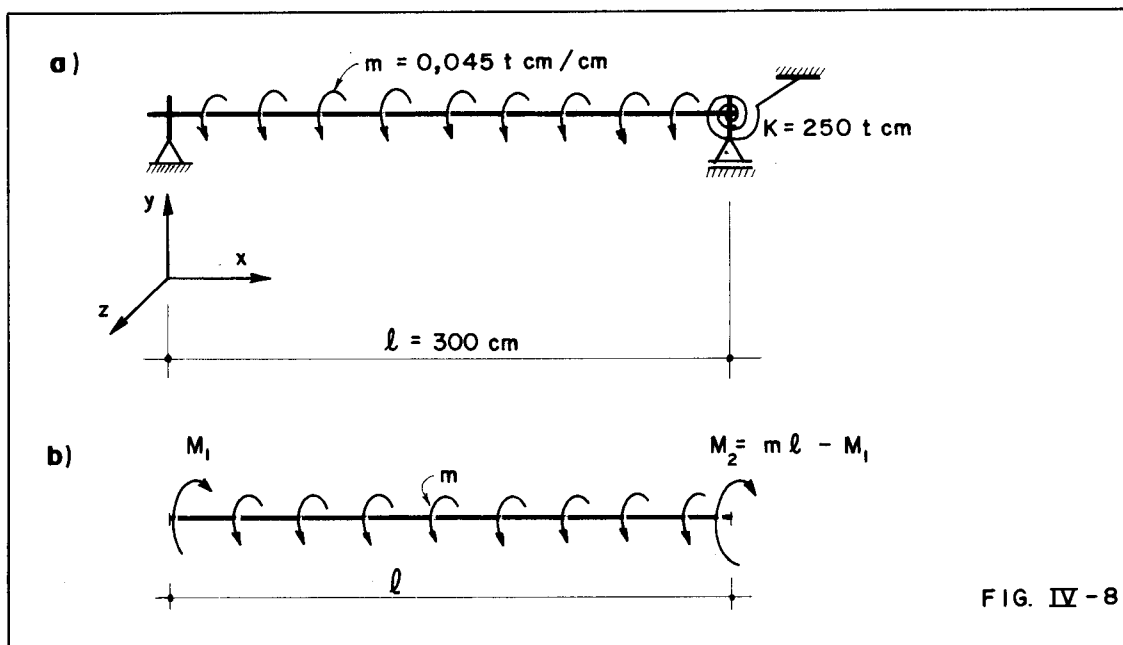


FIG. IV-8

As características geométricas da seção transversal são as seguintes:

$$J_{\omega} = 41472 \text{ cm}^6$$

$$J_t = 16 \text{ cm}^4$$

As expressões do bimomento e momento de flexo-torção são idênticas ao do segundo exemplo, 1º caso, pois estes esforços solicitantes não sofrem influência quando se considera um dos vínculos de garfo como elástico no presente exemplo.

De acordo com a figura IV-8.b, M_1 é a reação no garfo rígido e $M_2 = (m l - M_1)$ no garfo elástico.

Portanto:

$$M_t(x) = -M_1 + mx$$

Ou seja:

$$M_\ell(x) = -M_1 + mx + \frac{r m}{\sinh \frac{\ell}{r}} (\cosh \frac{\ell}{r} - 1) \cosh \frac{x}{r} - r m \sinh \frac{x}{r}$$

Logo:

$$\phi(x) = \frac{1}{G J_t} \left(-M_1 x + \frac{m x^2}{2} + \frac{r^2 m}{\sinh \frac{\ell}{r}} (\cosh \frac{\ell}{r} - 1) \sinh \frac{x}{r} - r^2 m \cosh \frac{x}{r} + C \right)$$

As condições de contorno são:

a) $\phi(0) = 0$

b) Para o vínculo de garfo elástico, de acordo com a convenção adotada, obtêm-se:

$$M_2 = -K \phi(\ell) \quad \text{ou seja} \quad \phi(\ell) = -\frac{m\ell - M_1}{K}$$

Utilizando-se estas condições, obtêm-se as seguintes expressões:

$$M_\ell(x) = -7,734055 + 0,045 x + 3,52141 \cosh \frac{x}{r} - 3,71189 \sinh \frac{x}{r}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{G J_t} (-7,734055 x + 0,0225 x^2 + 290,46841 \sinh \frac{x}{r} - 306,18 \cosh \frac{x}{r} + 306,18)$$

Fazendo-se x variar de 0 a 300 cm, em intervalos de 37,5 cm, obtêm-se os valores relacionados nas tabelas IV-28 e IV-29.

TABELA IV-28			
Valor de x (cm)	NO	Ângulo de giro (radianos)	Derivada 1ª do ângulo de giro(1/cm)
0	1	zero	$-3,2911289 \cdot 10^{-4}$
37,5	2	$-1,2025493 \cdot 10^{-2}$	$-3,0477905 \cdot 10^{-4}$
75,0	3	$-2,2420861 \cdot 10^{-2}$	$-2,4520207 \cdot 10^{-4}$
112,5	4	$-3,0166782 \cdot 10^{-2}$	$-1,6557717 \cdot 10^{-4}$
150,0	5	$-3,4726451 \cdot 10^{-2}$	$-7,6882559 \cdot 10^{-5}$
187,5	6	$-3,5932861 \cdot 10^{-2}$	$1,1812846 \cdot 10^{-5}$
225,0	7	$-3,3953025 \cdot 10^{-2}$	$9,1435647 \cdot 10^{-5}$
262,5	8	$-2,9323839 \cdot 10^{-2}$	$1,5100844 \cdot 10^{-4}$
300,0	9	$-2,3063785 \cdot 10^{-2}$	$1,7532813 \cdot 10^{-4}$

TABELA IV-29				
NO	Bimomento (tf·cm ²)	Momento de flexo torção (tf·cm)	Momento de torção livre (tf·cm)	Momento torçor (tf·cm)
1	zero	-3,521400	-4,212645	-7,734045
2	104,460126	-2,145372	-3,901172	-6,046544
3	166,504599	-1,220454	-3,138587	-4,359041
4	199,180749	-0,552146	-2,119388	-2,671534
5	209,359673	zero	-0,984097	-0,984097
6	199,179065	0,552289	0,151204	0,703493
7	166,501160	1,220645	1,170376	2,391021
8	104,453672	2,145658	1,932906	4,078564
9	zero	3,5211935	2,244200	5,766135

São apresentados, nas tabelas IV-30 e IV-31, os resultados obtidos pelo computador.

TABELA IV-30

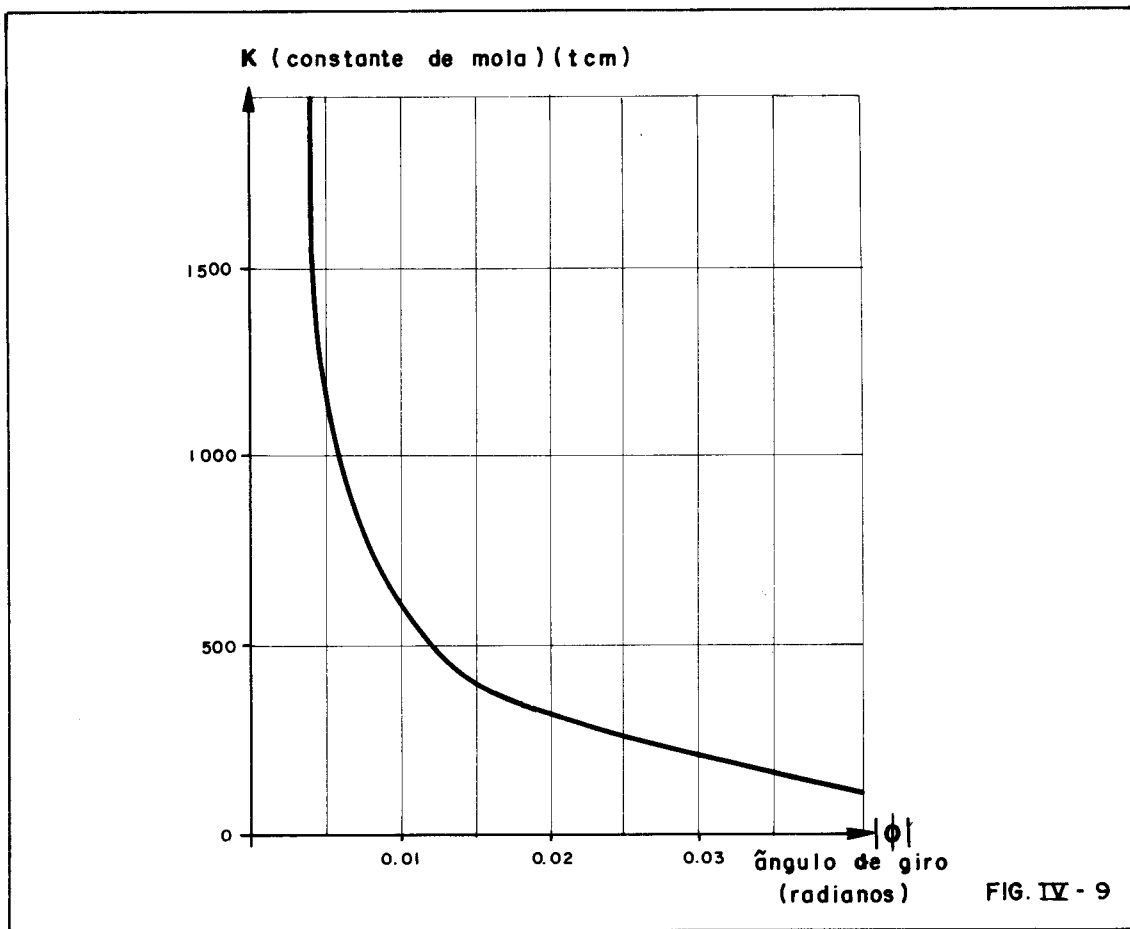
```
*****
*      *      *      *      *
* NO *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 1 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 2 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 3 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 4 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 5 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 6 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 7 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 8 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 9 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*****
```

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.3291218E-03
2	-0.1202576E-01	-0.3047818E-03
3	-0.2242117E-01	-0.2452024E-03
4	-0.3016708E-01	-0.1655759E-03
5	-0.3472676E-01	-0.7687927E-04
6	-0.3503302E-01	0.1181736E-04
7	-0.3395306E-01	0.9144388E-04
8	-0.2932360E-01	0.1510232E-03
9	-0.2306378E-01	0.1753633E-03

TABELA IV-31

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	0.1500306E+01	-0.3521281E+01	-0.4212759E+01	-0.7734041E+01
1.5	0.5866519E+02	-0.2761653E+01	-0.4128638E+01	-0.6890291E+01
2	0.1044711E+03 0.1044667E+03 0.1044689E+03	-0.2145334E+01 -0.2145340E+01 -0.2145337E+01	-0.3901206E+01	-0.6046543E+01
2.5	0.1398054E+03	-0.1640337E+01	-0.3562460E+01	-0.5202796E+01
3	0.1665104E+03 0.1665079E+03 0.1665092E+03	-0.1220455E+01 -0.1220459E+01 -0.1220457E+01	-0.3138591E+01	-0.4359048E+01
3.5	0.1859651E+03	-0.8639038E+00	-0.2651396E+01	-0.3515300E+01
4	0.1991840E+03 0.1991829E+03 0.1991835E+03	-0.5521788E+00 -0.5521818E+00 -0.5521803E+00	-0.2119372E+01	-0.2671552E+01
4.5	0.2068495E+03	-0.2691078E+00	-0.1558695E+01	-0.1827803E+01
5	0.2093616E+03 0.2093616E+03 0.2093616E+03	0.1372429E-05 -0.1372429E-05 0.2386937E-35	-0.9840547E+00	-0.9840547E+00
5.5	0.2068495E+03	0.2691078E+00	-0.4094139E+00	-0.1403060E+00
6	0.1991829E+03 0.1991840E+03 0.1991835E+03	0.5521818E+00 0.5521788E+00 0.5521803E+00	0.1512622E+00	0.7034424E+00
6.5	0.1859651E+03	0.8639038E+00	0.6832872E+00	0.1547191E+01
7	0.1665079E+03 0.1665104E+03 0.1665092E+03	0.1220459E+01 0.1220455E+01 0.1220457E+01	0.1170482E+01	0.2390939E+01
7.5	0.1398054E+03	0.1640337E+01	0.1594350E+01	0.3234687E+01
8	0.1044667E+03 0.1044711E+03 0.1044689E+03	0.2145340E+01 0.2145334E+01 0.2145337E+01	0.1933097E+01	0.4076434E+01
8.5	0.5866519E+02	0.2761653E+01	0.2160529E+01	0.4922181E+01
9	0.1500306E+01	0.3521281E+01	0.2244650E+01	0.5765931E+01

O gráfico da figura IV-9 mostra a variação do ângulo de giro na extremidade com vínculo elástico em função da constante de mola.



Quando se considera a constante elástica da mola $K = 0$, o respectivo ângulo de giro assume o valor de $-0,1582$ radianos.

Nota-se também que, quando o vínculo for rígido ($K \rightarrow \infty$), o momento torçor final M_2 (momento reativo no vínculo) é $6,75$ tcm e que, no caso de vínculo elástico (com constante de mola $K = 150$ t cm) esse valor passa para $M_2 = 5,26$ tcm.

As características da seção transversal são:

$$J_t = 16 \text{ cm}^4$$

$$J_{\omega} = 41472 \text{ cm}^6$$

Para este problema considera-se que todas as molas tenham a mesma constante elástica à deformação axial $K = 8 \text{ t/cm}$.

Portanto, a constante elástica a bimomento (ver item 5.2 do capítulo III) é dada por:

$$AKW = \sum_{t=1}^4 K_t \omega_t^2 = 4 \cdot 8 \cdot 72^2 = 165888 \text{ tcm}^3$$

As condições de contorno são:

a) $\phi(0) = 0$

b) $\phi(l) = 0$

c) $\phi'(l) = 0$

d) De acordo com a expressão (I-23), o bimomento para $x = 0$ é dado por:

$$B(0) = \sum_t P_t \omega_t$$

sendo

$$P_t = K_t u_t$$

De acordo com a expressão (I-4), os deslocamentos longitudinais u_t são dados por:

$$u_t = \omega_t \phi'(0)$$

Destas três expressões, pode-se escrever:

$$B(0) = \phi'(0) \sum_t K_t \omega_t^2$$

ou seja,

$$B(0) = \phi'(0) \cdot AKW$$

Utilizando-se estas quatro condições, obtêm-se as seguintes expressões:

$$B(x) = 340,011124 \operatorname{senh} \frac{x}{r} - 353,292483 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + r^2 m$$

$$M_{ft}(x) = \frac{-340,011124}{r} \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + \frac{353,292483}{r} \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$M_{\rho}(x) = -7,757251 + mx + \frac{340,011124}{r} \operatorname{cosh} \frac{x}{r} - \frac{353,292483}{r} \operatorname{senh} \frac{x}{r}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{G J_t} \left[-7,757251 x + \frac{mx^2}{2} + 340,011124 \operatorname{senh} \frac{x}{r} - 353,292483 \operatorname{cosh} \frac{x}{r} + 353,292483 \right]$$

Estes resultados são mostrados nas tabelas IV-32 e IV-33, para x variando de 0 a 400 cm, em intervalos de 50 cm.

TABELA IV-32			
Valor de x (cm)	NO	Ângulo de giro (radianos)	Derivada 1ª do ângulo de giro (1/cm)
0	1	zero	$-2,8400180 \cdot 10^{-4}$
50	2	$-1,4029142 \cdot 10^{-2}$	$-2,6270431 \cdot 10^{-4}$
100	3	$-2,5225367 \cdot 10^{-2}$	$-1,7793570 \cdot 10^{-4}$
150	4	$-3,1345324 \cdot 10^{-2}$	$-6,4173316 \cdot 10^{-5}$
200	5	$-3,1552144 \cdot 10^{-2}$	$+5,5088832 \cdot 10^{-5}$
250	6	$-2,6098415 \cdot 10^{-2}$	$+1,5844018 \cdot 10^{-4}$
300	7	$-1,6421870 \cdot 10^{-2}$	$+2,1844282 \cdot 10^{-4}$
350	8	$-5,6900281 \cdot 10^{-3}$	$+1,9123750 \cdot 10^{-4}$
400	9	zero	zero

TABELA IV-33				
NO	Bimomento (tf·cm ²)	Momento de flexo torção (tf·cm)	Momento de torção livre (tf·cm)	Momento torçor (tf·cm)
1	-47,112483	-4,122028	-3,635223	-7,757251
2	104,927042	-2,144636	-3,362615	-5,507251
3	180,727905	-0,979674	-2,277577	-3,257251
4	209,004995	-0,185832	-0,821419	-1,007251
5	200,470243	0,537612	0,705137	1,242749
6	151,890511	1,464715	2,028034	3,492749
7	44,862836	2,946681	2,796068	5,742749
8	-161,157055	5,544909	2,447840	7,992749
9	-544,212199	10,243223	zero	10,243223

São apresentados, nas tabelas IV-34 e IV-35, os resultados obtidos pelo computador.

TABELA IV-34

```

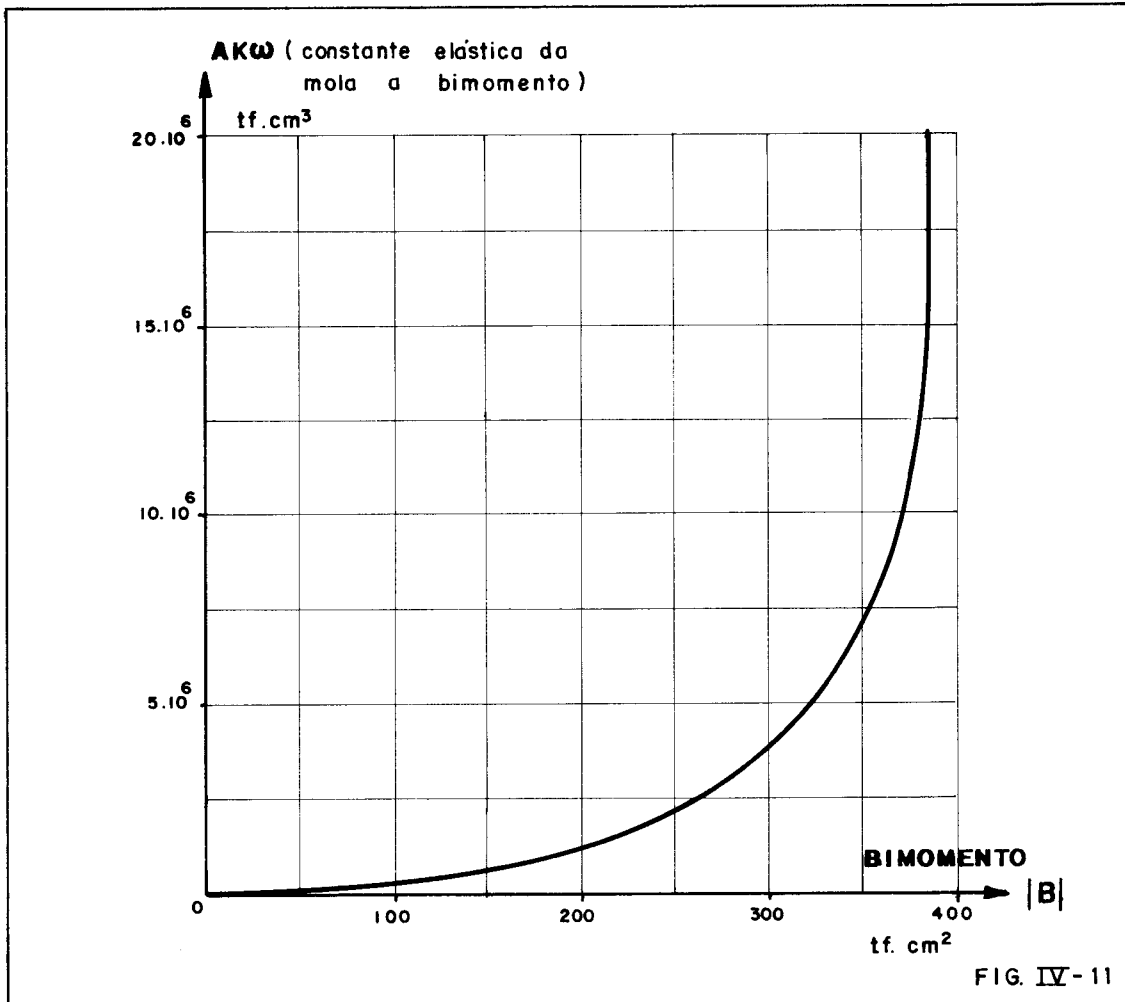
*****
*      *      *      *      *
* NO *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*****
*      *      *      *      *
* 1 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 2 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 3 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 4 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 5 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 6 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 7 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 8 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
* 9 *      *      *      *      *
*      *      *      *      *
*****

```

TABELA IV-35

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORÇAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORÇAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORÇOR (TF.CM)
1	-0.4706627E+02	-0.4121593E+01	-0.3635609E+01	-0.7757202E+01
1.5	0.4120954E+02	-0.2994448E+01	-0.3637754E+01	-0.6632202E+01
2	0.1049589E+03 0.1049401E+03 0.1049495E+03	-0.2144478E+01 -0.2144503E+01 -0.2144491E+01	-0.3362723E+01	-0.5507214E+01
2.5	0.1500636E+03	-0.1492964E+01	-0.2889262E+01	-0.4302226E+01
3	0.1807304E+03 0.1807279E+03 0.1807321E+03	-0.9796181E+00 -0.9796332E+00 -0.9796256E+00	-0.2277608E+01	-0.3257234E+01
3.5	0.1997893E+03	-0.5569327E+00	-0.1575308E+01	-0.2132241E+01
4	0.2090028E+03 0.2090012E+03 0.2090020E+03	-0.1857836E+00 -0.1857954E+00 -0.1857895E+00	-0.8214575E+00	-0.1007247E+01
4.5	0.2092199E+03	0.1681625E+00	-0.5041538E-01	0.1177472E+00
5	0.2004637E+03 0.2004684E+03 0.2004661E+03	0.5376861E+00 0.5376733E+00 0.5376797E+00	0.7050611E+00	0.1242741E+01
5.5	0.1819274E+03	0.9569486E+00	0.1410786E+01	0.2307734E+01
6	0.1510851E+03 0.1510979E+03 0.1510915E+03	0.1464802E+01 0.1464783E+01 0.1464793E+01	0.2027932E+01	0.3492725E+01
6.5	0.1075747E+03	0.2108175E+01	0.2509541E+01	0.4617716E+01
7	0.4480795E+02 0.4489370E+02 0.4480803E+02	0.2946705E+01 0.2946673E+01 0.2946689E+01	0.2796011E+01	0.5742700E+01
7.5	-0.4199887E+02	0.4057862E+01	0.2809822E+01	0.6867684E+01
8	-0.1611199E+03 -0.1610715E+03 -0.1610957E+03	0.5544659E+01 0.5544603E+01 0.5544631E+01	0.2448025E+01	0.7992656E+01
8.5	-0.3234436E+03	0.7544447E+01	0.1573181E+01	0.9117628E+01
9	-0.5440956E+03	0.1024263E+02	0.0000000E+00	0.1024263E+02

O gráfico da figura IV-11 mostra a variação do bimomento na extremidade com vínculo elástico em função da constante de mola.



Observa-se que, quando o engastamento for rígido ($AKW \rightarrow \infty$), o momento relativo M_1 vale 9,0 tcm e quando este vínculo for substituído pelo da figura IV-10.a ($AKW = 165888 \text{ tcm}$), o momento M_1 passa a valer 7,76 tcm.

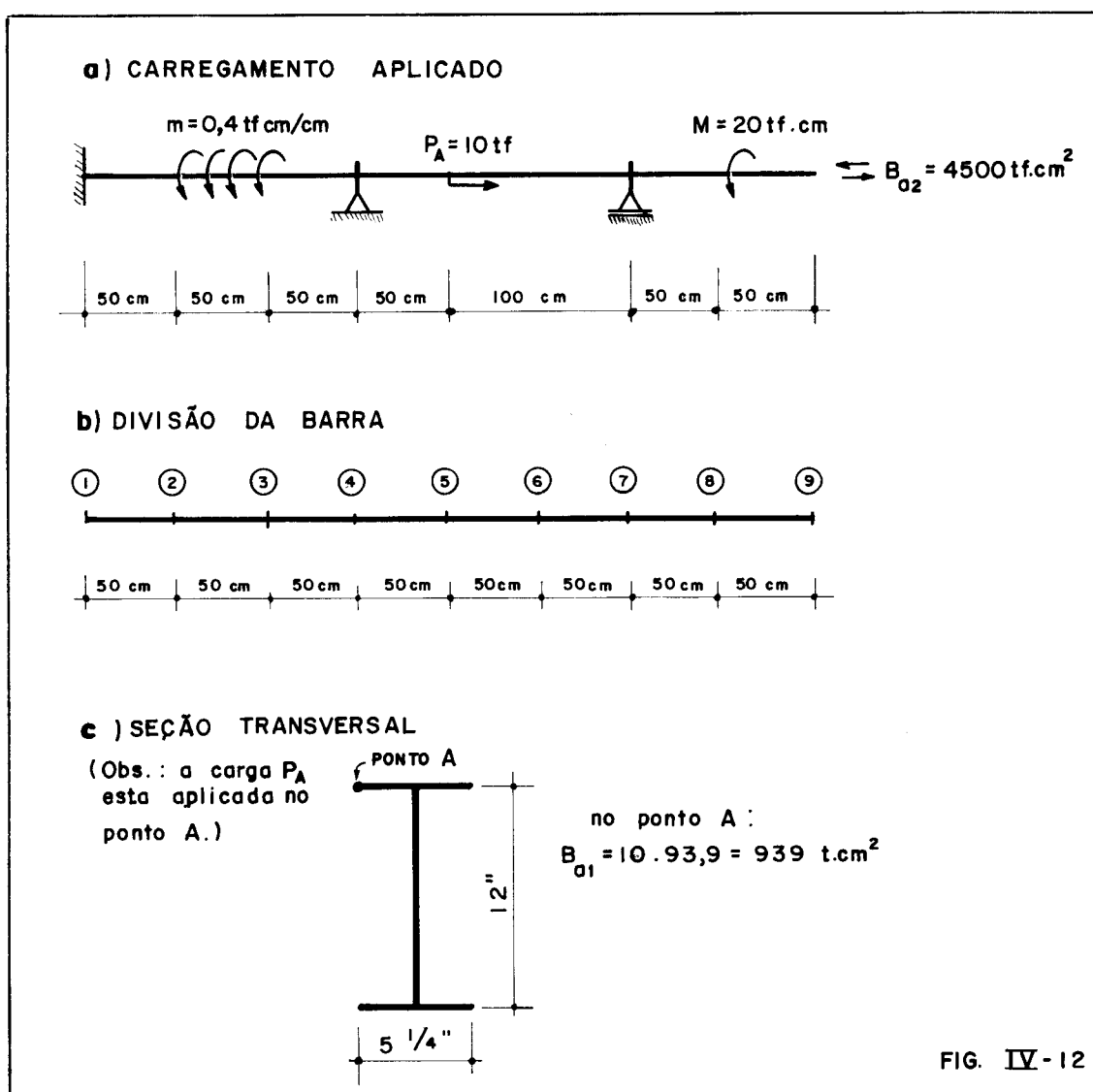
2.8 - Oitavo exemplo

Este exemplo é apresentado com a finalidade de mostrar que, caso não se tivesse o programa de cálculo para computador, desenvolvido neste trabalho, seria praticamente impossível, ou melhor, trabalhoso demais, resolvê-lo manualmente, pois se tem sete equações de giro, com vinte e oito constantes a serem determinadas.

A barra de seção transversal I 12" x 5 1/4" x 0,460" está carregada conforme figura IV-12.a e apresenta as seguintes características geométricas⁽²⁾:

$$J_t = 75,8 \text{ cm}^4 \qquad J_\omega = 117000 \text{ cm}^6$$

$$\omega_A = \text{área setorial do ponto A} = 93,9 \text{ cm}^2$$



Com a divisão da figura IV-12.c, o programa forneceu os resultados das tabelas IV-36 e IV-37.

TABELA IV-36

```
*****
*
* NO *      ANGULO DE GIRO *      DERIVADA 1 DO
* *      (RADIANDS) *      ANGULO DE GIRO
* *
*****
*
* 1 *      0.0000000E+00 *      0.0000000E+00
*
* 2 *      -0.9333593E-03 *      -0.2168835E-04
*
* 3 *      -0.9997938E-03 *      0.1965612E-04
*
* 4 *      0.0000000E+00 *      0.6345648E-05
*
* 5 *      0.5648076E-04 *      0.1886357E-04
*
* 6 *      -0.5614949E-03 *      -0.2200565E-04
*
* 7 *      0.0000000E+00 *      0.6844353E-04
*
* 8 *      0.9944290E-02 *      0.3831438E-03
*
* 9 *      0.4412202E-01 *      0.1053543E-02
*
*****
```

TABELA IV-37

* NO	* BINOMENTO (TF.CM2)	* MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	* MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	* MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.3450161E+03	-0.1045258E+02	0.0000000E+00	-0.1045258E+02
1.5	-0.1038851E+03	-0.9085228E+01	-0.1367357E+01	-0.1045258E+02
2	0.1210142E+03 0.1217082E+03 0.1213612E+03	-0.9137403E+01 -0.9137802E+01 -0.9137602E+01	-0.1315182E+01	-0.1045278E+02
2.5	0.2389649E+03	-0.3630070E+00	-0.8997654E-01	-0.4529835E+00
3	0.1403288E+03 0.1396153E+03 0.1399720E+03	0.8355069E+01 0.8354681E+01 0.8354875E+01	0.1191947E+01	0.9546823E+01
3.5	-0.6375588E+02	0.8123613E+01	0.1423015E+01	0.9546629E+01
4	-0.2770887E+03 -0.2771488E+03 -0.2771187E+03	0.9161828E+01 -0.1398801E+02	0.3848001E+00 0.3848001E+00	0.9546629E+01 -0.1360321E+02
4.5	0.5995965E+02	-0.1332645E+02	-0.2767601E+00	-0.1360321E+02
5	0.4064366E+03 -0.5325971E+03	-0.1474710E+02 -0.1474713E+02 -0.1474711E+02	0.1143887E+01	-0.1360323E+02
5.5	-0.1957596E+03	-0.1252916E+02	-0.1074085E+01	-0.1360325E+02
6	0.1102911E+03 0.1099851E+03 0.1101381E+03	-0.1226882E+02 -0.1226876E+02 -0.1226879E+02	-0.1334423E+01	-0.1360321E+02
6.5	0.4332429E+03	-0.1392344E+02	0.3202544E+00	-0.1360318E+02
7	0.8241932E+03 0.8236706E+03 0.8239319E+03	-0.1775360E+02 -0.2414899E+02	0.4150416E+01 0.4150416E+01	-0.1360318E+02 -0.1999857E+02
7.5	0.1507384E+04	-0.3124940E+02	0.1125083E+02	-0.1999857E+02
8	0.2426621E+04 0.2425792E+04 0.2426206E+04	-0.4323241E+02 -0.2323200E+02	0.2323384E+02 0.2323384E+02	-0.1999857E+02 0.1846853E-02
8.5	0.3211150E+04	-0.4040217E+02	0.4040402E+02	0.1846853E-02
9	0.4498237E+04	-0.6388503E+02	0.6388687E+02	0.1846853E-02

3. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES SOBRE OS EXEMPLOS APRESENTADOS

Os exemplos foram apresentados de maneira a serem evidenciados os possíveis carregamentos e todos os tipos de vínculos, quer sejam rígidos ou elásticos.

A solução exata, obtida através da resolução da equação diferencial regente do problema, foi apresentada, em alguns casos, no intuito principal de serem comparados os resultados obtidos com os calculados pelo computador e, também de se mostrar que, mesmo nos casos mais simples possíveis, o trabalho algébrico na resolução destas equações não é pequeno. O oitavo exemplo, que representa um caso mais geral, se resolvido manualmente geraria um sistema de 28 equações a 28 incógnitas.

Portanto, torna-se evidente a necessidade da automatização do processo de cálculo, através do programa desenvolvido neste trabalho.

Os resultados exatos e os fornecidos pelo programa, quando comparados, mostram uma precisão excelente, muito além da usualmente requerida para fins práticos.

Para se ter uma idéia do tempo de computação, basta notar que o oitavo exemplo levou 2 minutos para ser processado.

CAPÍTULO V

DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO EM TEORIA DE 2ª ORDEM

1. APLICAÇÃO DO PROCESSO AO CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS ϕ
EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM

A expressão da energia potencial total a ser considerada neste capítulo é dada por (II-20):

$$V = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[E J_{\omega} \phi''^2 + G J_t \phi'^2 + \frac{U_{\omega} B}{J_{\omega}} \phi'^2 \right] dx \right\} + \\ + \sum_{i=1}^N (M_i \phi_i - B_{a_i} \phi'_i) + \int_0^{\ell} m \phi dx$$

No capítulo III, item 3, ao se calcular a contribuição do segmento i para a expressão da energia potencial total, foram desenvolvidos, segundo o polinômio do 3º grau adotado para as rotações ϕ , todos os termos desta expressão, com exceção do termo:

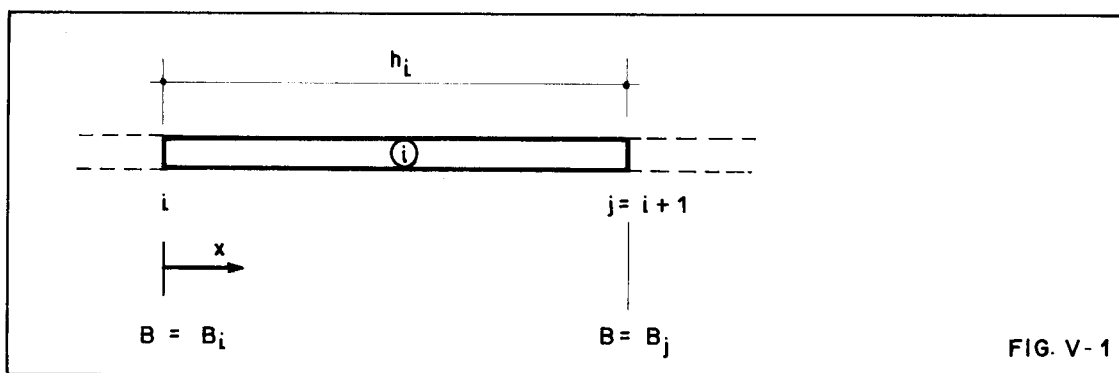
$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{U_{\omega} B \phi'^2}{J_{\omega}} dx \quad \dots (V-1)$$

Para se desenvolver o estudo em teoria de segunda ordem, resta substituir, na expressão (V-1), ϕ' dado pela expressão (III-6) e E dado pela solução geral da equação diferencial (I-22), ou seja:

$$E = K_1 \sinh \frac{x}{r} + K_2 \cosh \frac{x}{r} + r^2 m \quad \dots (V-2)$$

1.1 - Cálculo da contribuição do termo de segunda ordem

A figura V-1 mostra o segmento i e são indicados os bimotoes em suas extremidades, os quais, por serem de primeira ordem, são conhecidos. É importante lembrar que, através da expressão (V-1) se está acrescentando na energia potencial total, o trabalho das tensões σ nas rotações ϕ , sendo estas tensões σ provocadas pelo esforço solicitante bimotoe de primeira ordem.



As constantes de integração K_1 e K_2 são determinadas em função dos valores do bimotoe nas extremidades do segmento:

a) para $x = 0$ $B = B_i$

b) para $x = h_i$ $B = B_j$

Da aplicação destas condições, obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{B_j - B_i \cosh \frac{h_i}{r} - r^2_m \left(1 - \cosh \frac{h_i}{r} \right)}{\sinh \frac{h_i}{r}} \\ K_2 &= B_i - r^2_m \end{aligned} \right\} \dots (V-3)$$

A substituição de (V-3) em (V-2) fornece:

$$B = \frac{B_j - B_i \cosh \frac{h_i}{r} - r^2 m (1 - \cosh \frac{h_i}{r})}{\sinh \frac{h_i}{r}} \sinh \frac{x}{r} +$$

$$+ (B_i - r^2 m) \cosh \frac{x}{r} + r^2 m \quad \dots \quad (V-4)$$

Com a expressão (III-6), que fornece o valor de ϕ' , mais a expressão (V-2) substituídas em (V-1) obtêm-se a contribuição do segmento i para a energia potencial total:

$$\frac{1}{2} \int_0^{h_i} \frac{U_\omega}{J_\omega} B \phi'^2 dx = \frac{U_\omega}{2 J_\omega} \int_0^{h_i} \left[(K_1 \sinh \frac{x}{r} + K_2 \cosh \frac{x}{r} +$$

$$+ r^2 m) (f_1'(x) \phi_i + f_2'(x) \phi_j + f_3'(x) \phi_i +$$

$$+ f_4'(x) \phi_j)^2 \right]$$

Realizando as operações algébricas e integrando-se no comprimento h_i , obtêm-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^{h_i} \frac{U_\omega}{J_\omega} B \phi'^2 dx = \frac{U_\omega}{2 J_\omega} \left[(\phi_i^2 + \phi_j^2 - 2\phi_i \phi_j) (K_1 C_1 + K_2 C_2 +$$

$$+ \frac{36 E_1}{h_i}) + \phi_i'^2 (K_1 C_3 + K_2 C_4 + 4h_i E_1) + \phi_j'^2 (K_1 C_5 +$$

$$+ K_2 C_6 + 4h_i E_1) + 2(\phi_i \phi_i' - \phi_j \phi_i') (K_1 C_7 + K_2 C_8 +$$

$$+ 3E_1) + 2(\phi_i \phi_j' - \phi_j \phi_i') (K_1 C_9 + K_2 C_{10} + 3E_1) +$$

$$+ 2(\phi_i' \phi_j') (K_1 C_{11} + K_2 C_{12} - h_i E_1) \right] \quad \dots \quad (V-5)$$

As expressões das constantes $C_1, C_3, C_5, C_7, C_9, C_{11}$ e E_1 são as seguintes:

$$E_1 = \frac{r^2 m}{30}$$

$$C_1 = \frac{1}{h_i} \left[36D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^5 - 72D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 + 36D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 \right]$$

$$C_3 = r \left[9D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 - 24D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 + 22D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2 - 8D_7 \left(\frac{r}{h_i}\right) + D_9 \right]$$

$$C_5 = r \left[9D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 - 12D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 + 4D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2 \right]$$

$$C_7 = 18D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^5 - 42D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 + 30D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 - 6D_7 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2$$

$$C_9 = 18D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^5 - 30D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 + 12D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3$$

$$C_{11} = r \left[9D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 - 18D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 + 11D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2 - 2D_7 \left(\frac{r}{h_i}\right) \right]$$

As constantes $C_2, C_4, C_6, C_8, C_{10}$ e C_{12} têm expressões análogas a estas, apenas trocando-se as constantes D_1, D_3, D_5, D_7 e D_9 por, respectivamente, D_2, D_4, D_6, D_8 e D_{10} .

As constantes D_i são dadas pelas seguintes expressões:

$$D_1 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^4 \cosh \frac{h_i}{r} - 4 \left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \sinh \frac{h_i}{r} + 12 \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \cosh \frac{h_i}{r} - 24 \left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} + 24 \cosh \frac{h_i}{r} - 24$$

$$D_2 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^4 \sinh \frac{h_i}{r} - 4 \left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \cosh \frac{h_i}{r} + 12 \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \sinh \frac{h_i}{r} - 24 \left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} + 24 \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_3 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \cosh \frac{h_i}{r} - 3 \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \sinh \frac{h_i}{r} + 6 \left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} - 6 \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_4 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \sinh \frac{h_i}{r} - 3 \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \cosh \frac{h_i}{r} + 6 \left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} - 6 \cosh \frac{h_i}{r} + 6$$

$$D_5 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \cosh \frac{h_i}{r} - 2 \left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} + 2 \cosh \frac{h_i}{r} - 2$$

$$D_6 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \sinh \frac{h_i}{r} - 2 \left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} + 2 \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_7 = \left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} - \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_8 = \left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} - \cosh \frac{h_i}{r} + 1$$

$$D_9 = \cosh \frac{h_i}{r} - 1$$

$$D_{10} = \sinh \frac{h_i}{r}$$

1.2 - Acrêscimos na matriz elementar das características geométricas e elásticas

Como em teoria de segunda ordem, a expressão da energia potencial total é a mesma da usada no estudo em primeira ordem mais o termo da expressão (V-5), é necessário somente acrescentar a contribuição deste termo.

Seja $[a]_i$ a matriz elementar das características geométricas e elásticas, indicada na página 34 deste trabalho.

Os acréscimos que esta matriz irá sofrer estão representados a seguir pelos símbolos dos elementos correspondentes, isto é:

a_{jk} = acréscimo na linha j e coluna k da matriz $[a]_i$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_i^2} = \frac{U_\omega}{J_\omega} \left(K_1 C_1 + K_2 C_2 + \frac{36 E_1}{h_i} \right)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_i \partial \phi_i'} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (K_1 C_7 + K_2 C_8 + 3 E_1)$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = - a_{11}$$

$$a_{14} = a_{41} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_i \partial \phi_j'} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (K_1 C_9 + K_2 C_{10} + 3 E_1)$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_i'^2} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (K_1 C_3 + K_2 C_4 + 4 h_i E_1)$$

$$a_{23} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_i' \partial \phi_j} = - a_{12}$$

$$a_{24} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_i' \partial \phi_j'} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (K_1 C_{11} + K_2 C_{12} - h_i E_1)$$

$$a_{33} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_j^2} = a_{11}$$

$$a_{34} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_j \partial \phi_j'} = - a_{14}$$

$$a_{44} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \phi_j'^2} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (K_1 C_5 + K_2 C_6 + 4 h_i E_1)$$

Feitos estes acréscimos na matriz elementar $[a]_i$, a construção do sistema final de equações se processa da mesma maneira indicada na figura III-4.

2. CÁLCULO, EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM, DOS VALORES DO BIMOMENTO, MOMENTO DE FLEXO-TORÇÃO, MOMENTO DE TORÇÃO LIVRE E MOMENTO TORÇOR FINAL

A resolução do sistema de equações fornece os valores de ϕ_i e ϕ_i' de segunda ordem, para todos os (NH+1) pontos considerados na divisão da barra.

2.1 - Cálculo do momento de torção livre

Pela teoria de 1ª ordem, de acordo com (I-12), sabe-se que:

$$M_t = M_{ft} + M_\ell$$

Com a substituição de M_{ft} e M_ℓ por suas expressões, obtém-se:

$$M_t = - E J_\omega \phi'''' + G J_t \phi'$$

que, derivada, fornece:

$$M_t' = -(E J_\omega \phi'''')' + (G J_t \phi')' \quad \dots (V-6)$$

Pela teoria de 2ª ordem, de acordo com (III-1), sabe-se que:

$$M_t' = - E J_\omega \phi'''' + G J_t \phi'' + \left(\frac{U_\omega}{J_\omega} B \phi' \right)'$$

que pode ser escrita na seguinte forma:

$$M_t' = -(E J_\omega \phi'''')' + \left[G J_t \phi' + \frac{U_\omega}{J_\omega} B \phi' \right]'$$

ou:

$$M_t' = -(E J_\omega \phi'''')' + \left[(G J_t + \frac{U_\omega}{J_\omega} E) \phi' \right]' \quad \dots (V-7)$$

Lembrando que o momento de torção livre, em teoria de 1ª ordem, é dado por:

$$M_{\ell} = G J_t \phi'$$

a comparação de (V-6) com (V-7) permite concluir que o momento de torção livre, em teoria de 2ª ordem, será dado por:

$$M_{\ell} = \left(G J_t + \frac{U}{J_{\omega}} B \right) \phi' \quad \dots (V-8)$$

onde B é o bimomento de 1ª ordem.

2.2 - Cálculo das demais grandezas de flexo-torção

Para se calcularem os valores do bimomento e momento de flexo-torção, não é mais possível, como na teoria de 1ª ordem, a partir dos valores calculados de ϕ_i e ϕ'_i , adotar-se para cada segmento a função exata que é obtida da resolução da equação diferencial regente do problema, pois não se conhece a sua solução.

Procede-se, portanto, por meio das derivadas do ângulo ϕ . A expressão (I-16) fornece o bimomento como:

$$B = E J_{\omega} \phi''$$

Com a utilização da expressão (III-6), obtém-se então para o bimomento de 2ª ordem:

$$B^* = E J_{\omega} \left(f_1''(x) \phi_i + f_2''(x) \phi_j + f_3''(x) \phi'_i + f_4''(x) \phi'_j \right)$$

onde ϕ_i , ϕ_j , ϕ'_i e ϕ'_j são valores de 2ª ordem.

O momento de flexo-torção de 2ª ordem será calculado por:

$$M_{ft} = -(B^*)'$$

ou

$$M_{ft} = -E J_{\omega} \left(f_1'''(x) \phi_1 + f_2'''(x) \phi_j + f_3'''(x) \phi_1 + f_4'''(x) \phi_j \right)$$

No caso de vínculos elásticos, molas a torção ou molas a bimomento, o procedimento é análogo ao desenvolvido em teoria de 1^a ordem, no item 5 do Capítulo III.

3. PROGRAMA PARA COMPUTADOR AUTOMATIZANDO O CÁLCULO

No apêndice é apresentado um programa em linguagem FORTRAN para o computador Burroughs-3500 que fornece os valores do bimomento, momento de flexo-torção, momento de torção livre e momento torçor final para todos os pontos considerados na divisão da barra, bem como os valores do ângulo de giro e primeira derivada.

3.1 - Novos dados para o programa

Além dos dados que devem ser fornecidos para o estudo em teoria de primeira ordem, há necessidade dos seguintes:

- a) Os valores do esforço solicitante bimomento de primeira ordem, para todos os pontos de divisão.
- b) O valor da característica geométrica de Vlassov (U_{ω}) da seção transversal da barra calculado pela expressão:

$$\int_S \omega r_e^2 dS \quad \dots (V-9)$$

3.2 - Comentários sobre o programa

Para se poder alcançar, nos resultados fornecidos pelo programa, uma boa precisão, é necessário, neste caso,

dividir-se a barra em um número maior de segmentos em comparação ao estudo realizado em teoria de primeira ordem. Isto se deve ao fato de se calcular o bimomento em cada trecho com uma função linear (derivada segunda do polinômio do 3º grau) e o momento de flexo-torção como constante ao longo do segmento (derivada terceira do polinômio do 3º grau).

Em regiões próximas a pontos de descontinuidade da função ϕ ou pontos de inflexão, os erros são mais acentuados, sendo necessário dividir estas regiões em um número maior de elementos.

4. EXEMPLOS

4.1 - Primeiro exemplo - (Figura V-2)

O exemplo resolvido a seguir é o mesmo da figura IV-1, onde uma barra é submetida a um bimomento aplicado na extremidade direita e é vinculada nas extremidades por dois vínculos de garfo.

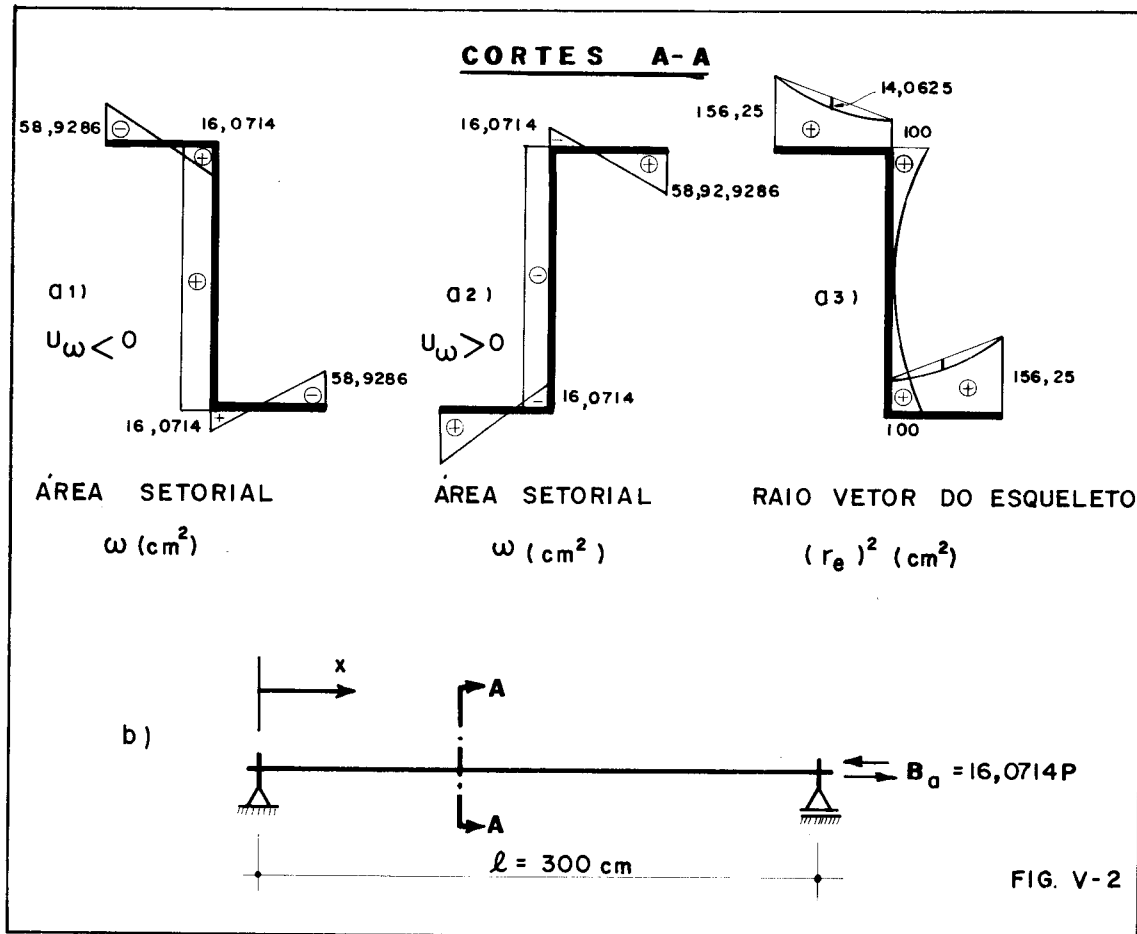
As características geométricas da seção transversal são as seguintes:

$$J_t = 0,3278 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 5802 \text{ cm}^6$$

$$U_\omega = \pm 9950 \text{ cm}^6$$

De acordo com as figuras V-2.a, a característica geométrica de Vlassov pode assumir os valores $U_\omega = -9950 \text{ cm}^6$ e $U_\omega = +9950 \text{ cm}^6$ dependendo da posição relativa do perfil ao eixo x.



De acordo com a expressão (V-9), a característica geométrica de Vlassov U_{ω} é dada por:

$$U_{\omega} = \int_S \omega r_e^2 dS$$

ou, para a espessura t constante:

$$U_{\omega} = t \int_S \omega (r_e)^2 ds$$

Para se calcular o seu valor integra-se o produto do diagrama de área setorial (ω) pelo diagrama do raio vetor elevado ao quadrado (r_e^2):

Da integração do produto dos diagramas a_1 por a_3 (conforme figura V-2.a) se obtêm:

$$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$$

Da integração do produto dos diagramas a_2 por a_3 se obtêm:

$$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$$

Segundo a expressão (V-9), nota-se que o sinal de U_{ω} é uma consequência direta do diagrama de área setorial, uma vez que o diagrama do raio vetor do esqueleto, por ser elevado ao quadrado, é sempre positivo.

Este problema será apresentado resolvido com o mesmo bimomento positivo aplicado ($B_a = 642,856 \text{ tfcm}^2$) sendo o primeiro caso com U_{ω} positivo e o segundo com U_{ω} negativo, conforme indicado na figura V-5.

São apresentados, nas tabelas V-1 a V-4, os valores obtidos para $B_a = 642,8560 \text{ tf}\cdot\text{cm}^2$, sendo a barra de comprimento $\ell = 300 \text{ cm}$ dividida em 30 elementos de acordo com a figura V-3.

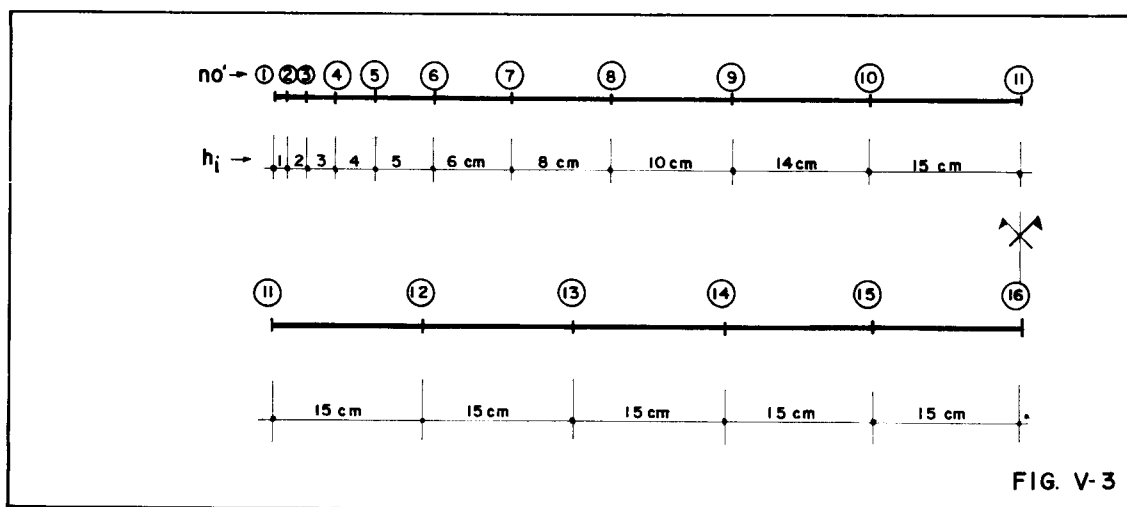


FIG. V-3

TABELA V-1

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.3358999E-02
2	-0.6717758E-02	-0.3358638E-02
3	-0.1679122E-01	-0.3356729E-02
4	-0.3020888E-01	-0.3351604E-02
5	-0.4694230E-01	-0.3340979E-02
6	-0.6693446E-01	-0.3321912E-02
7	-0.9337255E-01	-0.3285487E-02
8	-0.1259256E+00	-0.3221686E-02
9	-0.1639902E+00	-0.3117243E-02
10	-0.2065488E+00	-0.2955162E-02
11	-0.2492623E+00	-0.2731061E-02
12	-0.2882074E+00	-0.2452324E-02
13	-0.3225477E+00	-0.2116750E-02
14	-0.3514169E+00	-0.1722586E-02
15	-0.3739265E+00	-0.1263695E-02
16	-0.3891772E+00	-0.7547364E-03
17	-0.3962714E+00	-0.1813653E-03
18	-0.3943302E+00	0.4495453E-03
19	-0.3836247E+00	0.1087401E-02
20	-0.3636811E+00	0.1768471E-02
21	-0.3339312E+00	0.2487265E-02
22	-0.2936946E+00	0.3236661E-02
23	-0.2432032E+00	0.4007744E-02
24	-0.1910943E+00	0.4677775E-02
25	-0.1415208E+00	0.5236508E-02
26	-0.9785152E-01	0.5680016E-02
27	-0.6278324E-01	0.6008719E-02
28	-0.3831450E-01	0.6225261E-02
29	-0.1939720E-01	0.6386018E-02
30	-0.6516752E-02	0.6492306E-02
31	0.0000000E+00	0.6545166E-02

TABELA V-2

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.3047454E-02	-0.2206387E+01	-0.8808640E+00	-0.3087251E+01
2	0.4409727E+01 0.4405843E+01 0.4407785E+01	-0.2206387E+01 -0.2229416E+01 -0.2217901E+01	-0.8625592E+00	-0.3080461E+01
3	0.1109409E+02 0.1108852E+02 0.1109131E+02	-0.2229416E+01 -0.2262107E+01 -0.2245761E+01	-0.8347664E+00	-0.3080527E+01
4	0.2013695E+02 0.2012960E+02 0.2013328E+02	-0.2262107E+01 -0.2304841E+01 -0.2283474E+01	-0.7971291E+00	-0.3080603E+01
5	0.3165381E+02 0.3164460E+02 0.3164920E+02	-0.2304841E+01 -0.2358004E+01 -0.2331423E+01	-0.7492518E+00	-0.3080674E+01
6	0.4579263E+02 0.4578914E+02 0.4578088E+02	-0.2358004E+01 -0.2426858E+01 -0.2392431E+01	-0.6907746E+00	-0.3083205E+01
7	0.6518400E+02 0.6515344E+02 0.6516872E+02	-0.2426858E+01 -0.2516669E+01 -0.2471763E+01	-0.6115017E+00	-0.3083265E+01
8	0.9032013E+02 0.9028345E+02 0.9030179E+02	-0.2516669E+01 -0.2627051E+01 -0.2571860E+01	-0.5112579E+00	-0.3083118E+01
9	0.1218081E+03 0.1217681E+03 0.1217881E+03	-0.2627051E+01 -0.2758059E+01 -0.2691428E+01	-0.3911451E+00	-0.3082573E+01
10	0.1603493E+03 0.1603355E+03 0.1603424E+03	-0.2758059E+01 -0.2893014E+01 -0.2824409E+01	-0.2546882E+00	-0.3079098E+01
11	0.2037307E+03 0.2037473E+03 0.2037390E+03	-0.2893014E+01 -0.3021984E+01 -0.2957499E+01	-0.1181314E+00	-0.3075630E+01
12	0.2490770E+03 0.2491014E+03 0.2490892E+03	-0.3021984E+01 -0.3130560E+01 -0.3076272E+01	0.1803219E-02	-0.3074469E+01
13	0.2960598E+03 0.2960929E+03 0.2960763E+03	-0.3130560E+01 -0.3210482E+01 -0.3170521E+01	0.9736960E-01	-0.3073152E+01
14	0.3442501E+03 0.3442931E+03 0.3442716E+03	-0.3210482E+01 -0.3252428E+01 -0.3231455E+01	0.1597822E+00	-0.3071673E+01
15	0.3930795E+03 0.3931334E+03 0.3931065E+03	-0.3252428E+01 -0.3246009E+01 -0.3249219E+01	0.1791836E+00	-0.3070035E+01

(continua)

TABELLA V-2 (continuaçãõ)

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

* NO	* BIMOMENTO (TF,CM ²)	* MOMENTO DE FLEXU TORÇAO (TF,CM)	* MOMENTO DE TORÇAO LIVRE (TF,CM)	* MOMENTO TORÇOR (TF,CM)
* 16 *	* 0.4418235E+03 *	* -0.3246009E+01 *	* *	* *
* 16 *	* 0.4418893E+03 *	* -0.3179805E+01 *	* *	* *
* 16 *	* 0.4418504E+03 *	* -0.3212907E+01 *	* 0.1446577E+00 *	* -0.3068249E+01 *
* 17 *	* 0.4895864E+03 *	* -0.3179605E+01 *	* *	* *
* 17 *	* 0.4896649E+03 *	* -0.3041489E+01 *	* *	* *
* 17 *	* 0.4896257E+03 *	* -0.3110647E+01 *	* 0.4430711E-01 *	* -0.3066340E+01 *
* 18 *	* 0.5352872E+03 *	* -0.3041489E+01 *	* *	* *
* 18 *	* 0.5353342E+03 *	* -0.2827310E+01 *	* *	* *
* 18 *	* 0.5353107E+03 *	* -0.2934400E+01 *	* -0.1345861E+00 *	* -0.3068986E+01 *
* 19 *	* 0.5749166E+03 *	* -0.2827310E+01 *	* *	* *
* 19 *	* 0.5750014E+03 *	* -0.2533415E+01 *	* *	* *
* 19 *	* 0.5749590E+03 *	* -0.2680363E+01 *	* -0.3841184E+00 *	* -0.3064481E+01 *
* 20 *	* 0.6104692E+03 *	* -0.2533415E+01 *	* *	* *
* 20 *	* 0.6105640E+03 *	* -0.2143248E+01 *	* *	* *
* 20 *	* 0.6105106E+03 *	* -0.2338332E+01 *	* -0.7245494E+00 *	* -0.3062881E+01 *
* 21 *	* 0.6405695E+03 *	* -0.2143248E+01 *	* *	* *
* 21 *	* 0.6406735E+03 *	* -0.1646502E+01 *	* *	* *
* 21 *	* 0.6406215E+03 *	* -0.1894675E+01 *	* -0.1166525E+01 *	* -0.3061399E+01 *
* 22 *	* 0.6637245E+03 *	* -0.1646502E+01 *	* *	* *
* 22 *	* 0.6638303E+03 *	* -0.1033976E+01 *	* *	* *
* 22 *	* 0.6637854E+03 *	* -0.1340239E+01 *	* -0.1719895E+01 *	* -0.3060134E+01 *
* 23 *	* 0.6783120E+03 *	* -0.1033976E+01 *	* *	* *
* 23 *	* 0.6781800E+03 *	* -0.3550125E+00 *	* *	* *
* 23 *	* 0.6782400E+03 *	* -0.6949444E+00 *	* -0.2393062E+01 *	* -0.3068006E+01 *
* 24 *	* 0.6824510E+03 *	* -0.3550125E+00 *	* *	* *
* 24 *	* 0.6822895E+03 *	* 0.3036569E+00 *	* *	* *
* 24 *	* 0.6823702E+03 *	* -0.2612781E-01 *	* -0.3070138E+01 *	* -0.3096266E+01 *
* 25 *	* 0.6792529E+03 *	* 0.3036569E+00 *	* *	* *
* 25 *	* 0.6790853E+03 *	* 0.9025518E+00 *	* *	* *
* 25 *	* 0.6791691E+03 *	* 0.6031043E+00 *	* -0.3706598E+01 *	* -0.3103494E+01 *
* 26 *	* 0.6718649E+03 *	* 0.9025518E+00 *	* *	* *
* 26 *	* 0.6717123E+03 *	* 0.1405014E+01 *	* *	* *
* 26 *	* 0.6717886E+03 *	* 0.1153783E+01 *	* -0.4263117E+01 *	* -0.3109334E+01 *
* 27 *	* 0.6632822E+03 *	* 0.1405014E+01 *	* *	* *
* 27 *	* 0.6631614E+03 *	* 0.1783236E+01 *	* *	* *
* 27 *	* 0.6632218E+03 *	* 0.1594125E+01 *	* -0.4707774E+01 *	* -0.3113649E+01 *
* 28 *	* 0.6560285E+03 *	* 0.1783236E+01 *	* *	* *
* 28 *	* 0.6559845E+03 *	* 0.2057489E+01 *	* *	* *
* 28 *	* 0.6560065E+03 *	* 0.1920363E+01 *	* -0.5016947E+01 *	* -0.3096585E+01 *
* 29 *	* 0.6498121E+03 *	* 0.2057489E+01 *	* *	* *
* 29 *	* 0.6497793E+03 *	* 0.2256028E+01 *	* *	* *
* 29 *	* 0.6497957E+03 *	* 0.2157758E+01 *	* -0.5255379E+01 *	* -0.3097620E+01 *
* 30 *	* 0.6452632E+03 *	* 0.2258028E+01 *	* *	* *
* 30 *	* 0.6452430E+03 *	* 0.2380179E+01 *	* *	* *
* 30 *	* 0.6452531E+03 *	* 0.2319103E+01 *	* -0.5417399E+01 *	* -0.3098296E+01 *
* 31 *	* 0.6428628E+03 *	* 0.2380179E+01 *	* -0.5499316E+01 *	* -0.3119137E+01 *

TABELA V-3

$$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$$

ND	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.1556050E-02
2	-0.3111960E-02	-0.1555840E-02
3	-0.7776064E-02	-0.1554739E-02
4	-0.1399173E-01	-0.1551820E-02
5	-0.2173701E-01	-0.1545869E-02
6	-0.3098262E-01	-0.1535401E-02
7	-0.4319204E-01	-0.1515907E-02
8	-0.5819371E-01	-0.1482834E-02
9	-0.7568831E-01	-0.1430694E-02
10	-0.9519575E-01	-0.1353108E-02
11	-0.1147468E+00	-0.1250327E-02
12	-0.1326047E+00	-0.1127363E-02
13	-0.1484659E+00	-0.9840345E-03
14	-0.1620211E+00	-0.8197687E-03
15	-0.1729492E+00	-0.6335364E-03
16	-0.1809097E+00	-0.4237740E-03
17	-0.1855339E+00	-0.1882876E-03
18	-0.1864151E+00	0.7586630E-04
19	-0.1834577E+00	0.3516493E-03
20	-0.1764184E+00	0.6597159E-03
21	-0.1648120E+00	0.1005032E-02
22	-0.1480751E+00	0.1393769E-02
23	-0.1255484E+00	0.1833564E-02
24	-0.1010452E+00	0.2258271E-02
25	-0.7652919E-01	0.2651297E-02
26	-0.5396305E-01	0.2994815E-02
27	-0.3517317E-01	0.3271301E-02
28	-0.2170257E-01	0.3465345E-02
29	-0.1108131E-01	0.3616286E-02
30	-0.3745791E-02	0.3719596E-02
31	0.0000000E+00	0.3772078E-02

TABELA V-4

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM2)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	0.1398451E-02	-0.1280864E+01	-0.4080587E+00	-0.1688923E+01
2	0.2563126E+01	-0.1280864E+01		
	0.2564826E+01	-0.1270482E+01		
	0.2563976E+01	-0.1275673E+01	-0.4164389E+00	-0.1692112E+01
3	0.6376273E+01	-0.1270482E+01		
	0.6376553E+01	-0.1256266E+01		
	0.6377413E+01	-0.1263374E+01	-0.4287901E+00	-0.1692164E+01
4	0.1140362E+02	-0.1256266E+01		
	0.1140636E+02	-0.1238576E+01		
	0.1140499E+02	-0.1247421E+01	-0.4448214E+00	-0.1692242E+01
5	0.1759924E+02	-0.1238576E+01		
	0.1760227E+02	-0.1217931E+01		
	0.1760075E+02	-0.1228253E+01	-0.4640989E+00	-0.1692352E+01
6	0.2490985E+02	-0.1217931E+01		
	0.2491709E+02	-0.1193383E+01		
	0.2491347E+02	-0.1205657E+01	-0.4860065E+00	-0.1691665E+01
7	0.3446416E+02	-0.1193383E+01		
	0.3447139E+02	-0.1164974E+01		
	0.3446777E+02	-0.1179179E+01	-0.5129191E+00	-0.1692098E+01
8	0.4612113E+02	-0.1164974E+01		
	0.4612623E+02	-0.1135692E+01		
	0.4612368E+02	-0.1150333E+01	-0.5424020E+00	-0.1692735E+01
9	0.5975454E+02	-0.1135692E+01		
	0.5975431E+02	-0.1109903E+01		
	0.5975443E+02	-0.112798E+01	-0.5708501E+00	-0.1693648E+01
10	0.7529295E+02	-0.1109903E+01		
	0.7528142E+02	-0.1094062E+01		
	0.7528718E+02	-0.1101982E+01	-0.5930615E+00	-0.1695044E+01
11	0.9169235E+02	-0.1094062E+01		
	0.9167415E+02	-0.1094265E+01		
	0.9168325E+02	-0.1094164E+01	-0.6016888E+00	-0.1695853E+01
12	0.1080881E+03	-0.1094265E+01		
	0.1080670E+03	-0.1114105E+01		
	0.1080776E+03	-0.1104185E+01	-0.5921083E+00	-0.1696294E+01
13	0.1247786E+03	-0.1114105E+01		
	0.1247539E+03	-0.1156783E+01		
	0.1247663E+03	-0.1135444E+01	-0.5613716E+00	-0.1696816E+01
14	0.1421057E+03	-0.1156783E+01		
	0.1420769E+03	-0.1226126E+01		
	0.1420913E+03	-0.1191454E+01	-0.5059918E+00	-0.1697446E+01
15	0.1604688E+03	-0.1226126E+01		
	0.1604348E+03	-0.1326606E+01		
	0.1604518E+03	-0.1276466E+01	-0.4217544E+00	-0.1698221E+01

(continua)

TABELLA V-4 (continuação)

$U_{(0)} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORÇAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORÇAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORÇOR (TF.CM)
16	0.1803368E+03	-0.1326806E+01		
	0.1802964E+03	-0.1464591E+01		
	0.1803166E+03	-0.1395698E+01	-0.3034843E+00	-0.1699183E+01
17	0.2022653E+03	-0.1464591E+01		
	0.2022168E+03	-0.1646683E+01		
	0.2022411E+03	-0.1555637E+01	-0.1447513E+00	-0.1700389E+01
18	0.2269171E+03	-0.1646683E+01		
	0.2269021E+03	-0.1873114E+01		
	0.2269096E+03	-0.1759699E+01	0.6250341E-01	-0.1697396E+01
19	0.2531257E+03	-0.1873114E+01		
	0.2530664E+03	-0.2148651E+01		
	0.2530971E+03	-0.2010983E+01	0.3086513E+00	-0.1702331E+01
20	0.2831523E+03	-0.2148651E+01		
	0.2830828E+03	-0.2492307E+01		
	0.2831176E+03	-0.2320579E+01	0.6162960E+00	-0.1704283E+01
21	0.3179751E+03	-0.2492307E+01		
	0.3178903E+03	-0.2918131E+01		
	0.3179327E+03	-0.2705219E+01	0.9984785E+00	-0.1706740E+01
22	0.3587442E+03	-0.2918131E+01		
	0.3586400E+03	-0.3444614E+01		
	0.3586921E+03	-0.3181472E+01	0.1471624E+01	-0.1709848E+01
23	0.4068674E+03	-0.3444614E+01		
	0.4068751E+03	-0.4043572E+01		
	0.4069163E+03	-0.3744193E+01	0.2056506E+01	-0.1667687E+01
24	0.4554880E+03	-0.4043572E+01		
	0.4556161E+03	-0.4650880E+01		
	0.4555521E+03	-0.4347226E+01	0.2666577E+01	-0.1660649E+01
25	0.5021249E+03	-0.4650880E+01		
	0.5022701E+03	-0.5229216E+01		
	0.5021975E+03	-0.4940048E+01	0.3267241E+01	-0.1672807E+01
26	0.5441038E+03	-0.5229216E+01		
	0.5442477E+03	-0.5737480E+01		
	0.5441758E+03	-0.5483348E+01	0.3818469E+01	-0.1664879E+01
27	0.5786726E+03	-0.5737480E+01		
	0.5787951E+03	-0.6135567E+01		
	0.5787339E+03	-0.5936524E+01	0.4278765E+01	-0.1657758E+01
28	0.6033374E+03	-0.6135567E+01		
	0.6033832E+03	-0.6433363E+01		
	0.6033603E+03	-0.6284465E+01	0.4610231E+01	-0.1674234E+01
29	0.6226833E+03	-0.6433363E+01		
	0.6227190E+03	-0.6656211E+01		
	0.6227012E+03	-0.6544787E+01	0.4872696E+01	-0.1672091E+01
30	0.6360314E+03	-0.6656211E+01		
	0.6360541E+03	-0.6794143E+01		
	0.6360428E+03	-0.6725177E+01	0.5054610E+01	-0.1670567E+01
31	0.6428482E+03	-0.6794143E+01		
			0.5147719E+01	-0.1646424E+01

O gráfico da figura V-4 representa a variação do giro do nó $i = 18$ em função do bimomento aplicado. São traçadas três curvas que representam os estudos em teoria de primeira ordem e teoria de segunda ordem para U_{ω} positivo e U_{ω} negativo.

Os dados lançados são os da tabela V-5.

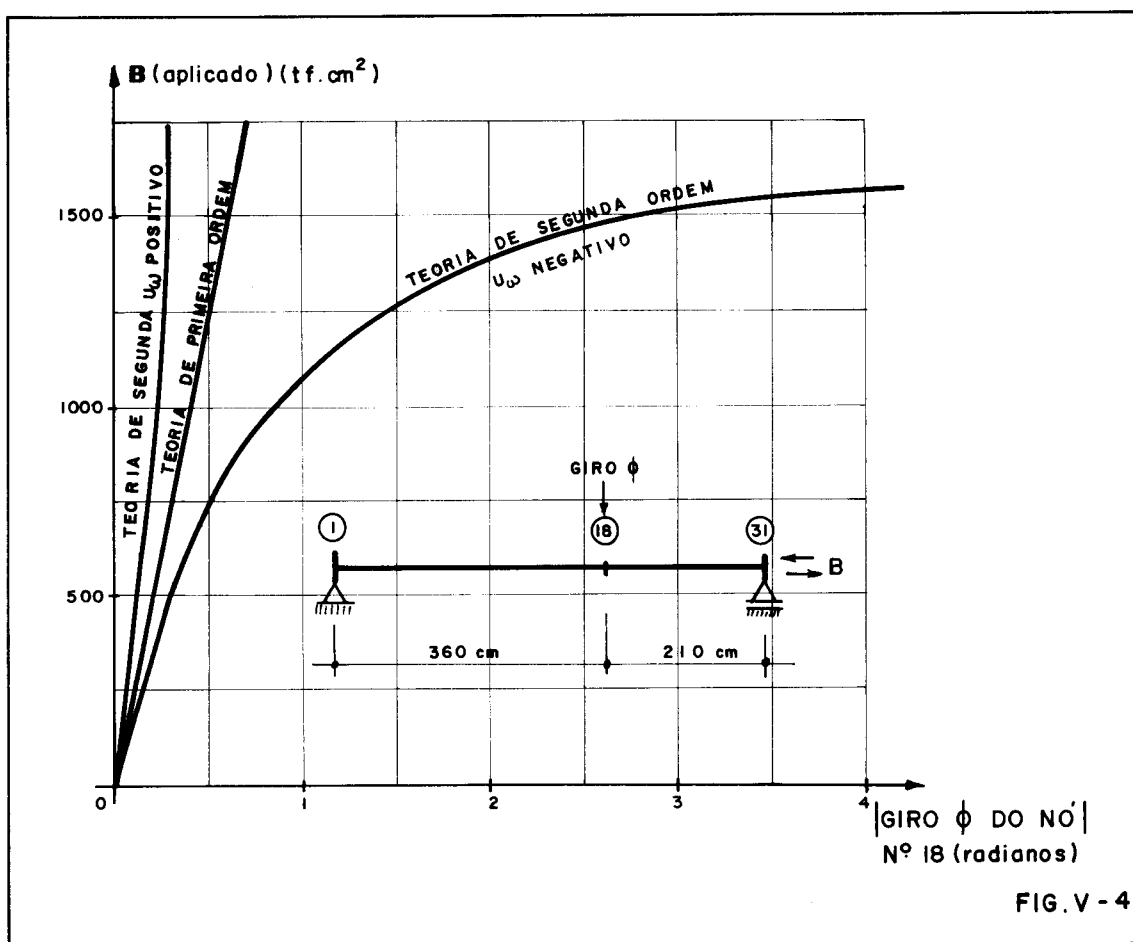


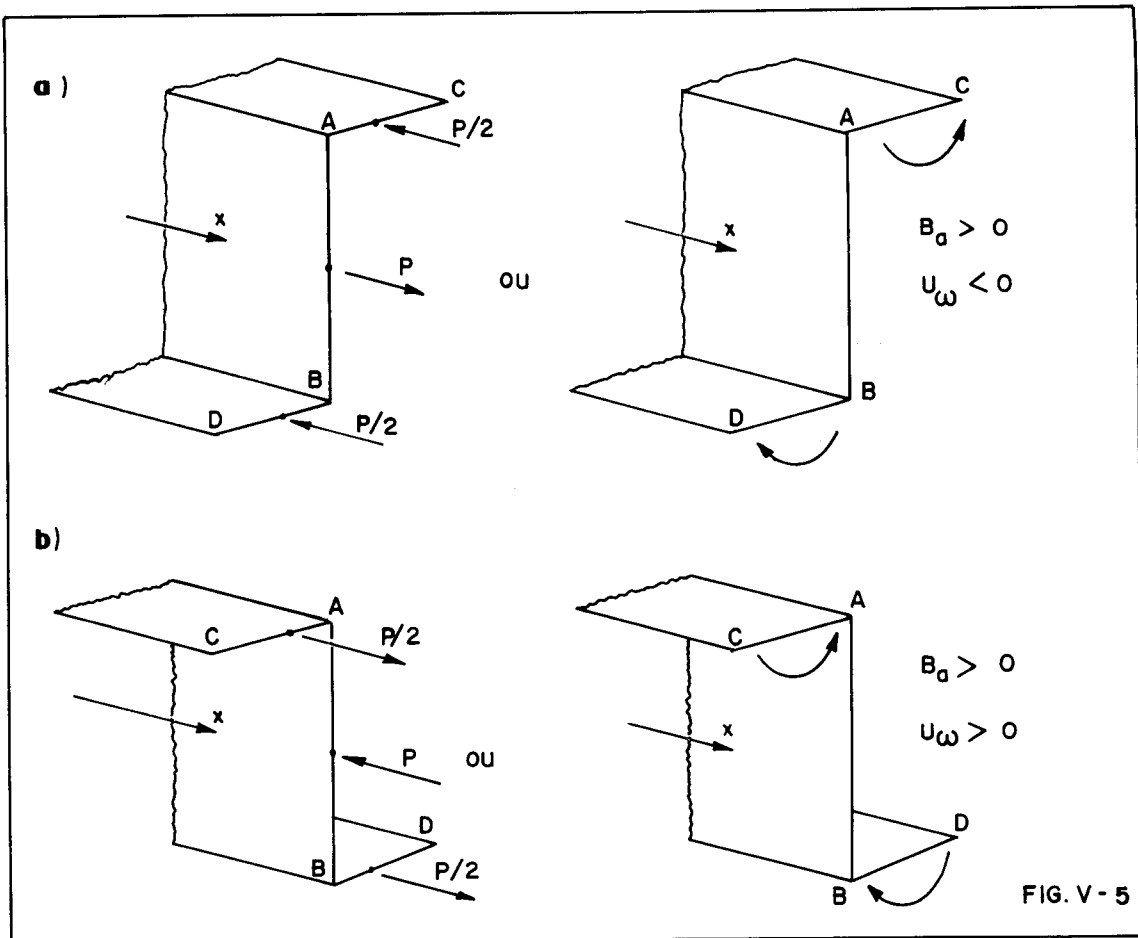
TABELA V-5			
Bimomento aplicado (tf·cm ²)	Giro do nó $i=18$ (radianos)		
	1 ^a ordem	2 ^a ordem $U_{\omega} > 0$	2 ^a ordem $U_{\omega} < 0$
642,8560	-0,2547	-0,1864	-0,3943
964,2840	-0,3821	-0,2459	-0,8059
1285,7120	-0,5094	-0,2922	-1,6604
1591,0686	-0,6304	-0,3274	-4,1900

Observando-se o gráfico da figura V-4, nota-se claramente que em teoria de primeira ordem, os deslocamentos são proporcionais às cargas; no estudo em teoria de segunda ordem notam-se dois casos:

- a) Para U_{ω} positivo, nota-se a não existência de carga crítica (que provoca a perda de estabilidade) sendo que o valor dos deslocamentos tendem a se estabilizarem em um determinado limite.
- b) Para U_{ω} negativo, nota-se claramente a existência de carga crítica.

Tal fato confirma os resultados obtidos por RACHID⁽³⁾.

A existência destes dois casos no estudo em teoria de segunda ordem pode ser explicada de acordo com a figura V-5 onde, para cada caso são indicados dois modos possíveis de ser aplicado o mesmo bímomento positivo.



Pela figura, nota-se que, no caso a), que apresenta carga crítica, o perfil Z tem suas mesas comprimidas nas regiões C e D que não estão em ligação com a alma, sendo, portanto, regiões mais sensíveis de perderem a estabilidade. No caso b), no qual não há carga crítica, as regiões das mesas que são comprimidas são A e B, as quais estão confinadas, isto é, ligadas à alma, tornando o perfil Z menos sujeito à instabilidade.

São apresentados, a seguir, gráficos das rotações ϕ ao longo do comprimento l da barra para quatro valores do binomento aplicado.

Para cada um destes valores são apresentadas três curvas: estudo em primeira ordem e segunda ordem para os casos de U_0 positivo e negativo.

É importante notar que neste exemplo foram aplicados binomentos que resultam em rotações ϕ muito grandes, aceitáveis apenas matematicamente, com a finalidade única de se evidenciar claramente a existência da carga crítica. É suposto também que o material segue indefinidamente a lei de Hooke; evidentemente as cargas aplicadas devem ser limitadas por considerações de resistência do material.

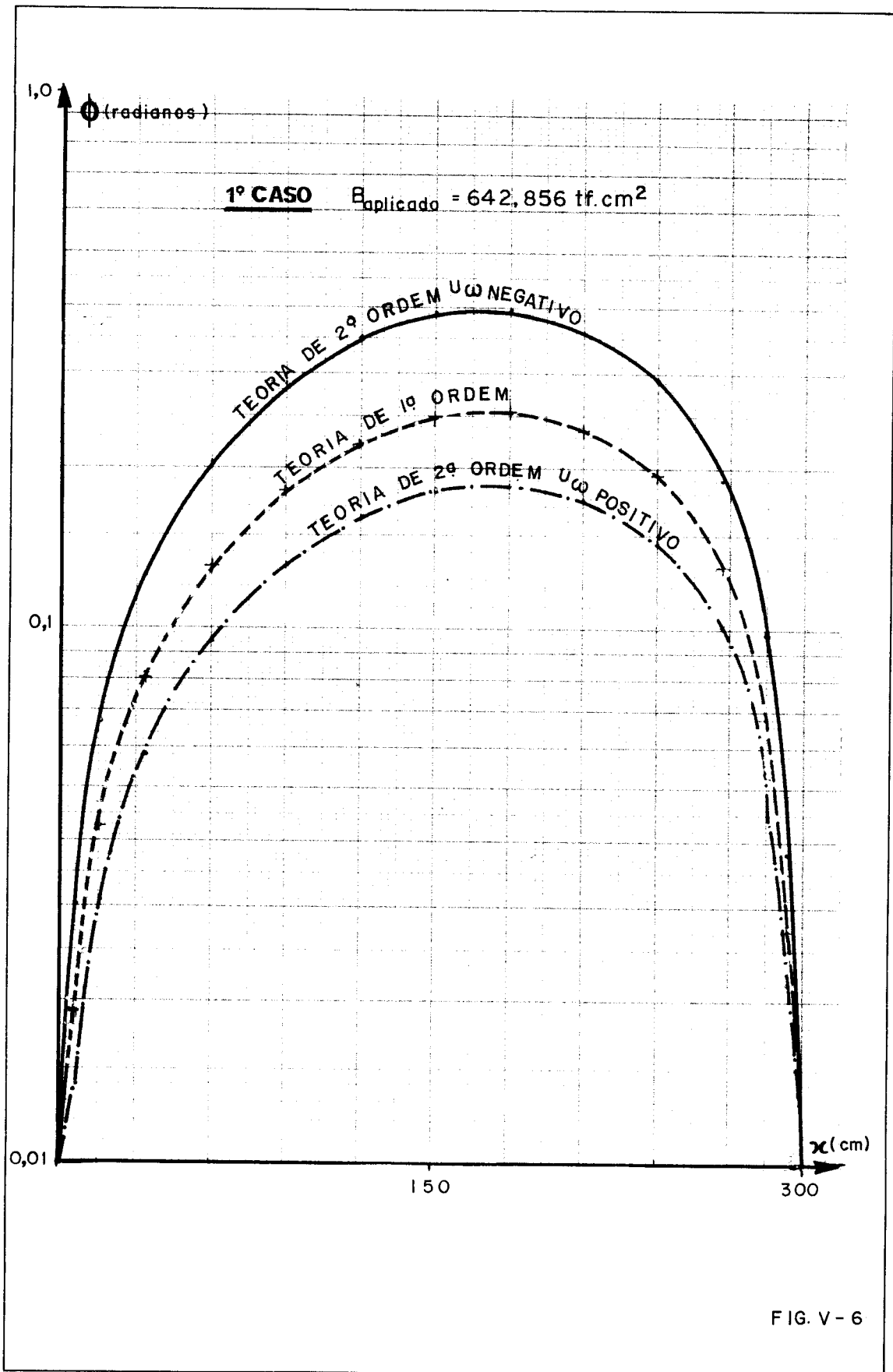
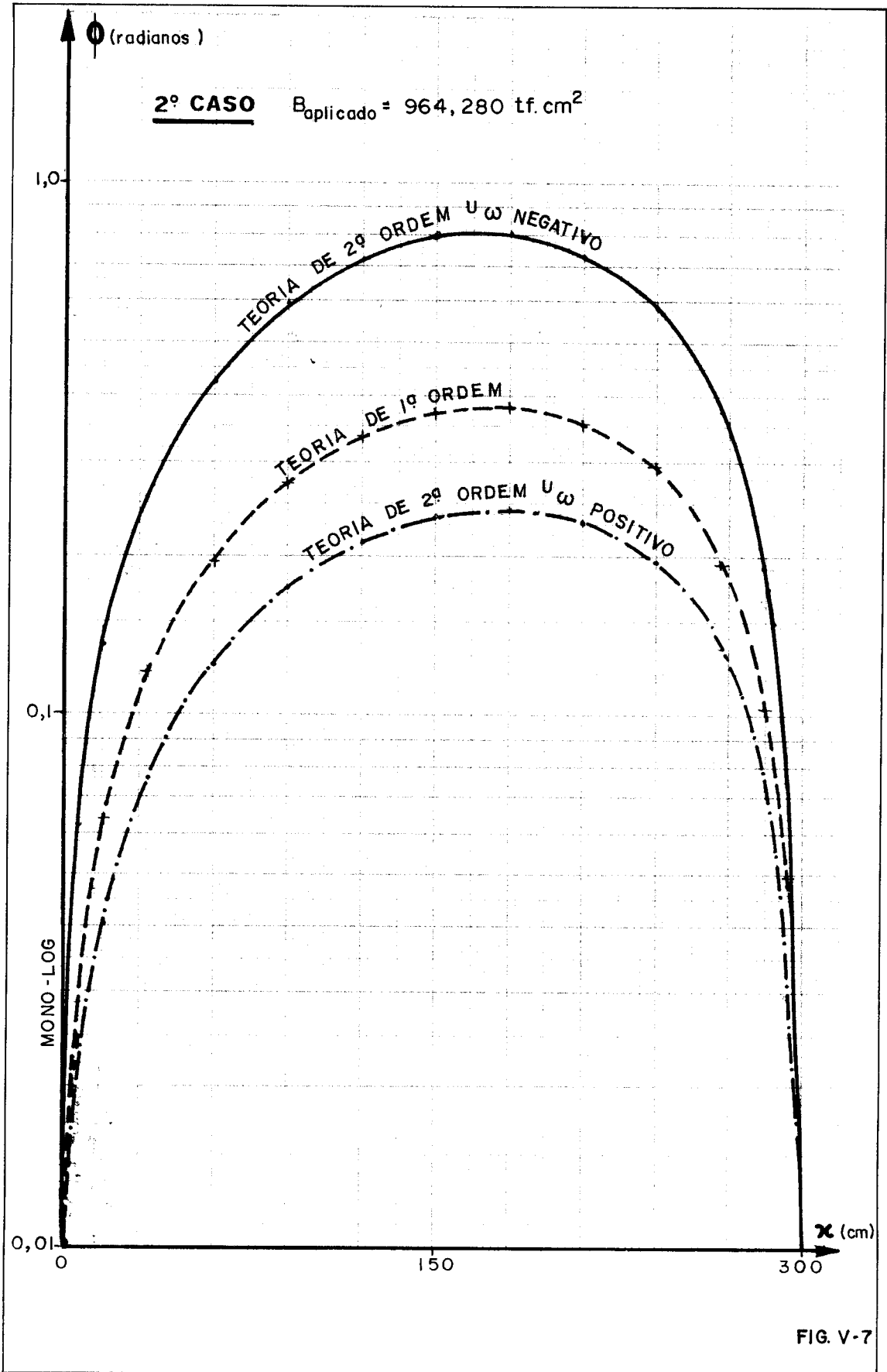
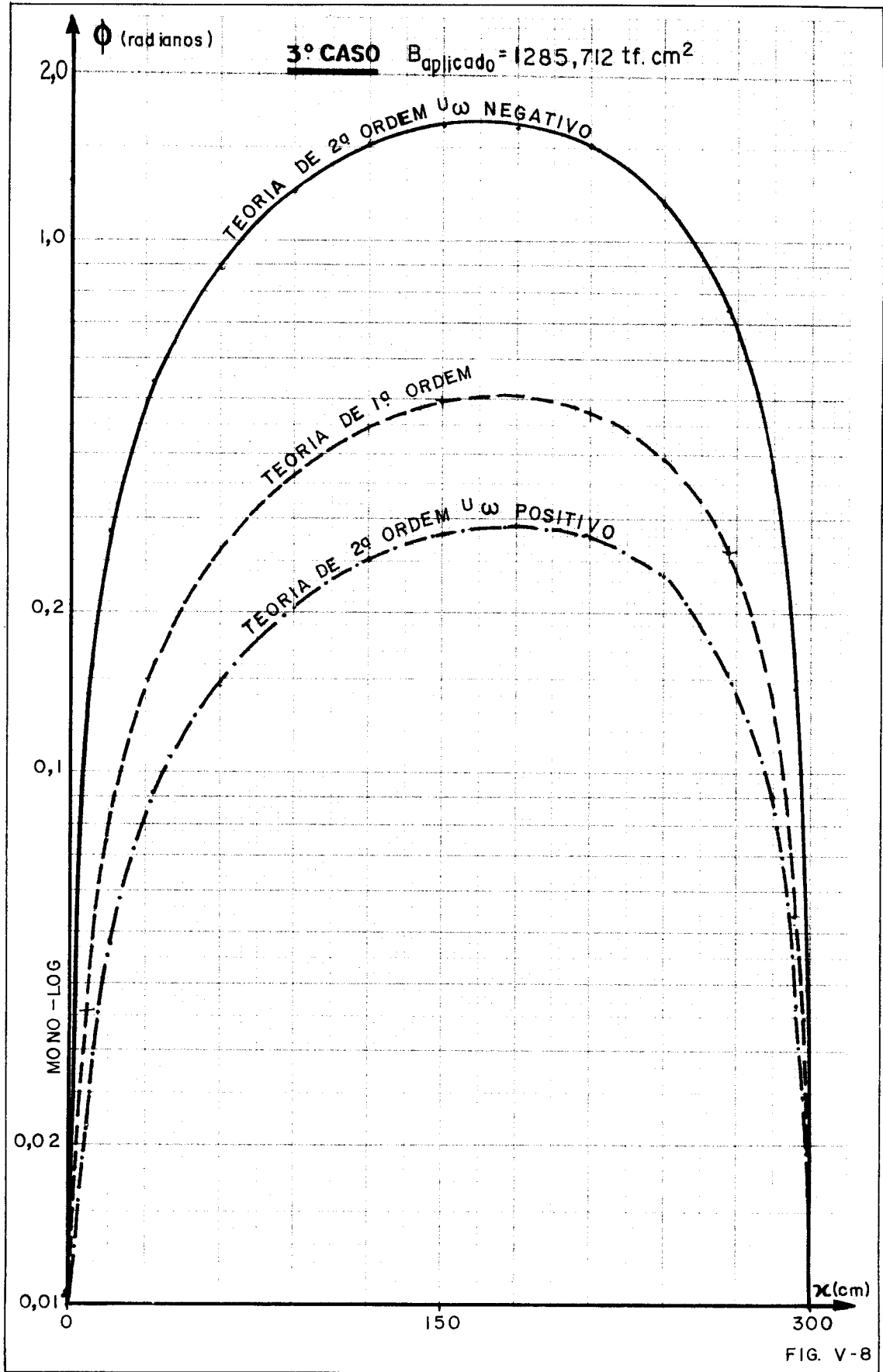
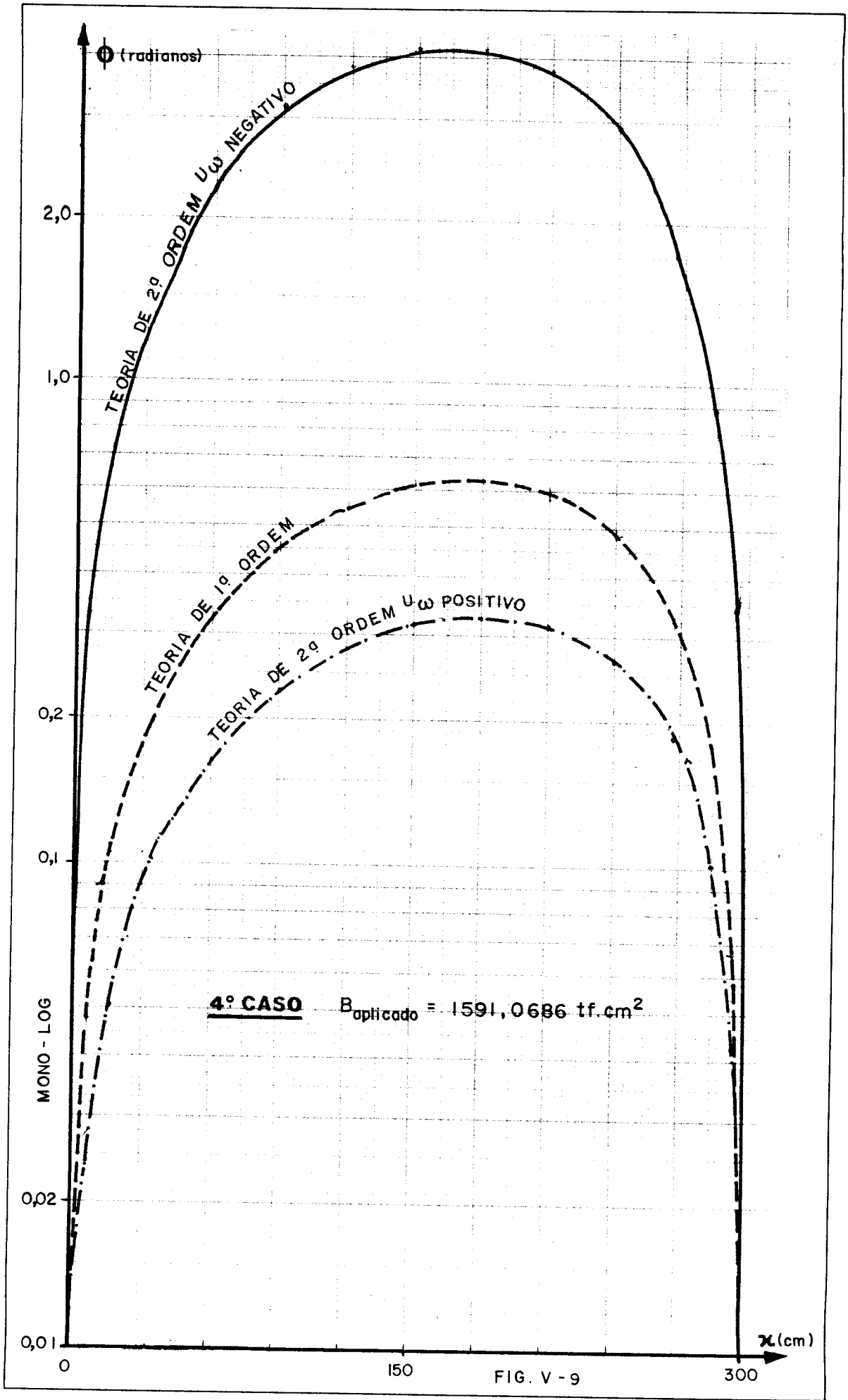


FIG. V - 6







Para este exemplo, com divisão da barra em 30 elementos de diferentes comprimentos e estudo em teoria de segunda ordem, a entrada dos dados deve seguir a seguinte ordem:

1º cartão - Características geométricas da barra

$$AJT = 0,3278 \text{ cm}^4$$

$$AJW = 5802 \text{ cm}^6$$

$$AUW = \pm 9950 \text{ cm}^6 \text{ (dependendo do caso em estudo)}$$

$$\text{Formato} = 3F10.0$$

2º cartão - Divisão da viga

$$NH = 30$$

$$\text{Formato} = I2$$

3º ao 33º cartão - Construção do sistema de equações

$$\text{Formato} = I2 , 6F10.0$$

Cartões	NO	EI	AHT	AMD(NO)	H(NO)	AK(NO)	AKW(NO)
3º cartão	1	b	b	b	1,0	b	b
4º cartão	2	b	b	b	2,0	b	b
5º cartão	3	b	b	b	3,0	b	b
6º cartão	4	b	b	b	4,0	b	b
7º cartão	5	b	b	b	6,0	b	b
.							
.							
.							
32º cartão	30	b	b	b	1,0	b	b
33º cartão	31	642,856	b	b	b	b	b

(b = brancos)

34º ao 36º cartão - Condições de contorno

34º cartão - NREST = 2

Formato = I2

35º cartão - NO = 1 , IFUNC = 0

Formato = 2I2

36º cartão - NO = 31 , IFUNC = 0

Formato = 2I2

Obs.: tanto para o nó 1 como para o nó 31, a rotação ϕ vale zero (vínculos de garfo) portanto, IFUNC = 0

37º ao 40º cartão - Valores de bimomento de primeira ordem.

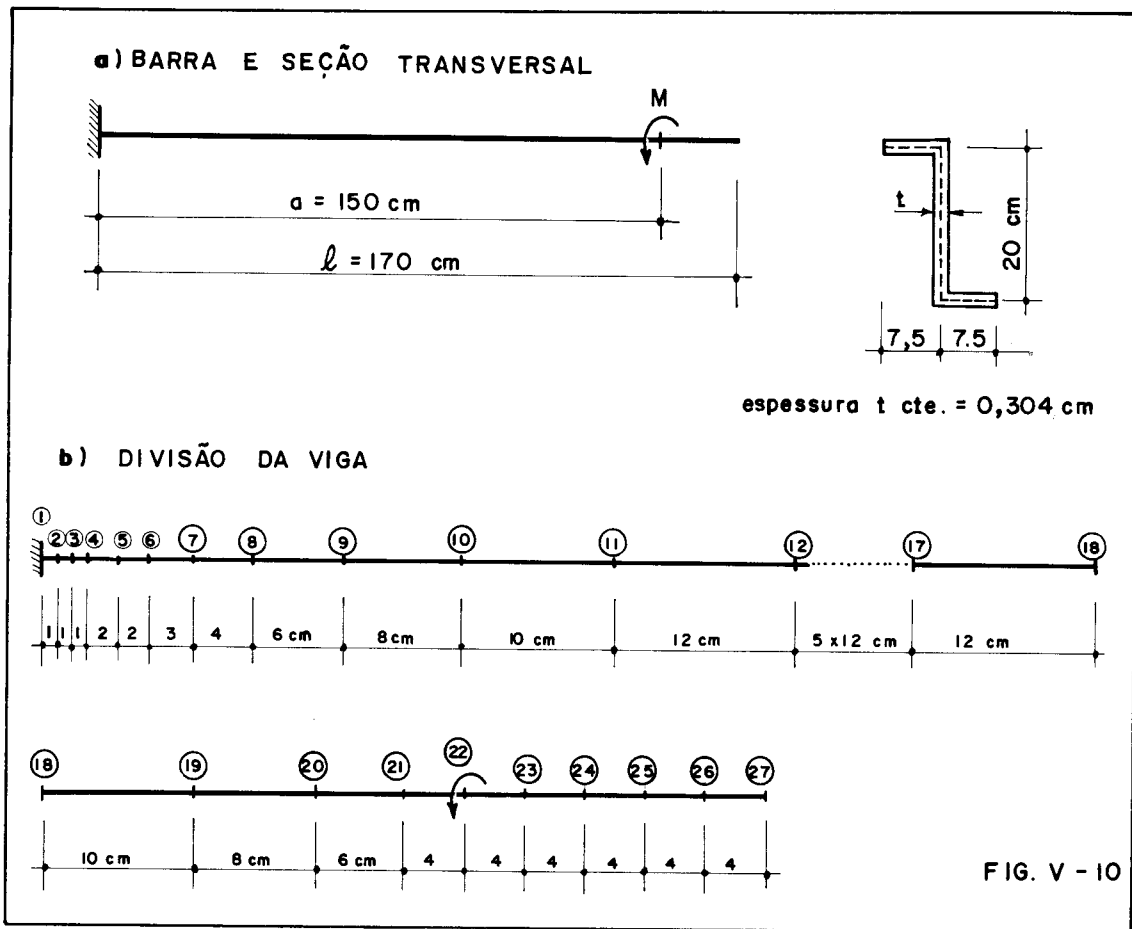
Devem ser escritos oito valores em cada cartão no formato F10.0. Como se tem 31 valores, são usados quatro cartões.

4.2 - Segundo exemplo - (Figura V-10)

A barra da figura V-10.a, engastada na extremidade de esquerda e livre na outra, está submetida a um momento torçor concentrado a uma distância $a = 150$ cm do engastamento. A seção transversal da barra é o perfil Z do exemplo anterior.

Conforme apresentado no exercício anterior, este problema também será resolvido, para o mesmo momento torçor aplicado, de duas maneiras: a primeira para U_{ω} positivo e a segunda para U_{ω} negativo.

A barra de comprimento $l = 170$ cm foi dividida em 26 elementos, de acordo com a figura V-10.b.



São apresentados, nas tabelas V-6 a V-19, os resultados obtidos através do programa para computador, para $M_t = 1,0 \text{ t}\cdot\text{cm}$

TABELLA V-6

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANUS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	-0.5000039E-05	-0.9986432E-05
3	-0.1994564E-04	-0.1989118E-04
4	-0.4475531E-04	-0.2971464E-04
5	-0.1236429E-03	-0.4911916E-04
6	-0.2410182E-03	-0.6820299E-04
7	-0.4878507E-03	-0.9623366E-04
8	-0.9457557E-03	-0.1325115E-03
9	-0.1898524E-02	-0.1846207E-03
10	-0.3639740E-02	-0.2498915E-03
11	-0.6519724E-02	-0.3249049E-03
12	-0.1091262E-01	-0.4055685E-03
13	-0.1621373E-01	-0.4763187E-03
14	-0.2230555E-01	-0.5373876E-03
15	-0.2907297E-01	-0.5889385E-03
16	-0.3640241E-01	-0.6310713E-03
17	-0.4418119E-01	-0.6638306E-03
18	-0.5229684E-01	-0.6872111E-03
19	-0.5923585E-01	-0.6994955E-03
20	-0.6495496E-01	-0.7045760E-03
21	-0.6906667E-01	-0.705958E-03
22	-0.7190810E-01	-0.7049379E-03
23	-0.7472562E-01	-0.7038611E-03
24	-0.7753930E-01	-0.7030218E-03
25	-0.8035011E-01	-0.7024211E-03
26	-0.8315899E-01	-0.7020599E-03
27	-0.8596691E-01	-0.7019392E-03

TABELA V-7

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.1221755E+03	-0.9976070E+00	0.0000000E+00	-0.9976070E+00
2	-0.1211779E+03	-0.9976070E+00		
	-0.1211779E+03	-0.9928725E+00		
	-0.1211779E+03	-0.9952398E+00	-0.4771105E-02	-0.1000011E+01
3	-0.1201800E+03	-0.9928725E+00		
	-0.1201800E+03	-0.9882106E+00		
	-0.1201800E+03	-0.9905416E+00	-0.9469213E-02	-0.1000011E+01
4	-0.1191908E+03	-0.9882106E+00		
	-0.1191907E+03	-0.9813576E+00		
	-0.1191902E+03	-0.9847841E+00	-0.1409506E-01	-0.9988792E+00
5	-0.1172330E+03	-0.9813576E+00		
	-0.1172330E+03	-0.9724606E+00		
	-0.1172330E+03	-0.9769091E+00	-0.2313288E-01	-0.1000042E+01
6	-0.1152801E+03	-0.9724606E+00		
	-0.1152804E+03	-0.9617375E+00		
	-0.1152872E+03	-0.9670990E+00	-0.3189030E-01	-0.9989893E+00
7	-0.1124012E+03	-0.9617375E+00		
	-0.1123990E+03	-0.9474328E+00		
	-0.1124001E+03	-0.9545851E+00	-0.4451285E-01	-0.9990980E+00
8	-0.1086092E+03	-0.9474328E+00		
	-0.1086034E+03	-0.9283939E+00		
	-0.1086003E+03	-0.9379133E+00	-0.6041250E-01	-0.9983258E+00
9	-0.1030331E+03	-0.9283939E+00		
	-0.1030264E+03	-0.9043314E+00		
	-0.1030297E+03	-0.9163626E+00	-0.8235180E-01	-0.9987144E+00
10	-0.9579175E+02	-0.9043314E+00		
	-0.9578533E+02	-0.8775464E+00		
	-0.9578864E+02	-0.8909389E+00	-0.1082414E+00	-0.9991803E+00
11	-0.8701006E+02	-0.8775464E+00		
	-0.8700558E+02	-0.8506325E+00		
	-0.8700782E+02	-0.8640895E+00	-0.1355992E+00	-0.9996887E+00
12	-0.7679799E+02	-0.8506325E+00		
	-0.7680323E+02	-0.8278321E+00		
	-0.7680061E+02	-0.8392323E+00	-0.1617507E+00	-0.1000983E+01
13	-0.6686925E+02	-0.8278321E+00		
	-0.6687394E+02	-0.8112392E+00		
	-0.6687199E+02	-0.8195357E+00	-0.1813450E+00	-0.1000881E+01

(continua)

TABELLA V-7 (continuação)

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
14	-0.5713907E+02 -0.5714329E+02 -0.5714118E+02	-0.8112392E+00 -0.8002111E+00 -0.8057252E+00	-0.1950647E+00	-0.1000790E+01
15	-0.4754075E+02 -0.4754453E+02 -0.4754264E+02	-0.8002111E+00 -0.7941735E+00 -0.7971923E+00	-0.2035159E+00	-0.1000708E+01
16	-0.3801445E+02 -0.3801763E+02 -0.3801614E+02	-0.7941735E+00 -0.7926074E+00 -0.7933904E+00	-0.2072435E+00	-0.1000634E+01
17	-0.2850654E+02 -0.2850958E+02 -0.2850805E+02	-0.7926074E+00 -0.7950360E+00 -0.7938217E+00	-0.2067434E+00	-0.1000565E+01
18	-0.1896912E+02 -0.1896942E+02 -0.1896947E+02	-0.7950360E+00 -0.8003667E+00 -0.7977013E+00	-0.2024751E+00	-0.1000176E+01
19	-0.1095575E+02 -0.1095405E+02 -0.1095520E+02	-0.8003667E+00 -0.8067220E+00 -0.8035444E+00	-0.1963527E+00	-0.9998971E+00
20	-0.4510870E+01 -0.4509264E+01 -0.4510077E+01	-0.8067220E+00 -0.8127647E+00 -0.8097533E+00	-0.1899500E+00	-0.9997033E+00
21	0.3674246E+00 0.3689049E+00 0.3661647E+00	-0.8127647E+00 -0.8176652E+00 -0.8152250E+00	-0.1843501E+00	-0.9995750E+00
22	0.3639566E+01 0.3641129E+01 0.3640358E+01	-0.8176652E+00 0.1805819E+00	-0.1802652E+00 -0.1802652E+00	-0.9999305E+00 0.3166773E-03
23	0.2918822E+01 0.2918837E+01 0.2918849E+01	0.1805819E+00 0.1812551E+00 0.1809185E+00	-0.1809099E+00	0.8594086E-05
24	0.2193817E+01 0.2193832E+01 0.2193825E+01	0.1812551E+00 0.1819663E+00 0.1816207E+00	-0.1816119E+00	0.8817682E-05
25	0.1465867E+01 0.1465903E+01 0.1465895E+01	0.1819663E+00 0.1827770E+00 0.1823817E+00	-0.1823726E+00	0.9044476E-05
26	0.7347952E+00 0.7348117E+00 0.7348035E+00	0.1827770E+00 0.1836288E+00 0.1832029E+00	-0.1831937E+00	0.9274352E-05
27	0.2963711E-03	0.1836288E+00	-0.1840765E+00	-0.4476973E-03

TABELLA V-8

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

```

*****
* NO * ANGULO DE GIRO * DERIVADA 1 DO *
* * (RADIANOS) * ANGULO DE GIRO *
* * * *
*****
* 1 * 0.0000000E+00 * 0.0000000E+00 *
* 2 * -0.5383315E-05 * -0.1075295E-04 *
* 3 * -0.2147856E-04 * -0.2142388E-04 *
* 4 * -0.4820374E-04 * -0.3201281E-04 *
* 5 * -0.1332160E-03 * -0.5294490E-04 *
* 6 * -0.2597651E-03 * -0.7354963E-04 *
* 7 * -0.5260391E-03 * -0.1038439E-03 *
* 8 * -0.1020351E-02 * -0.1430950E-03 *
* 9 * -0.2049700E-02 * -0.1995352E-03 *
* 10 * -0.3982345E-02 * -0.2702682E-03 *
* 11 * -0.7047749E-02 * -0.3514871E-03 *
* 12 * -0.1179915E-01 * -0.4385355E-03 *
* 13 * -0.1752793E-01 * -0.5144180E-03 *
* 14 * -0.2410141E-01 * -0.5793567E-03 *
* 15 * -0.3138964E-01 * -0.6335827E-03 *
* 16 * -0.3920548E-01 * -0.6773295E-03 *
* 17 * -0.4760455E-01 * -0.7108266E-03 *
* 18 * -0.5626520E-01 * -0.7342935E-03 *
* 19 * -0.6369398E-01 * -0.7463356E-03 *
* 20 * -0.6968669E-01 * -0.7511295E-03 *
* 21 * -0.7419708E-01 * -0.7519350E-03 *
* 22 * -0.7720361E-01 * -0.7511543E-03 *
* 23 * -0.8020579E-01 * -0.7499809E-03 *
* 24 * -0.8320360E-01 * -0.7490709E-03 *
* 25 * -0.8619870E-01 * -0.7484227E-03 *
* 26 * -0.8919153E-01 * -0.7480348E-03 *
* 27 * -0.9218333E-01 * -0.7479058E-03 *
*****

```

TABELA V-9

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.1315100E+03	-0.9997522E+00	0.0000000E+00	-0.9997522E+00
2	-0.1305103E+03	-0.9997522E+00		
	-0.1305103E+03	-0.9992333E+00		
	-0.1305103E+03	-0.9994928E+00	-0.5023922E-03	-0.9999951E+00
3	-0.1295170E+03	-0.9992333E+00		
	-0.1295170E+03	-0.9986820E+00		
	-0.1295170E+03	-0.9989577E+00	-0.1037541E-02	-0.9999952E+00
4	-0.1285103E+03	-0.9986820E+00		
	-0.1285102E+03	-0.9977931E+00		
	-0.1285103E+03	-0.9982376E+00	-0.1604887E-02	-0.9998425E+00
5	-0.1262226E+03	-0.9977931E+00		
	-0.1262226E+03	-0.9965026E+00		
	-0.1262226E+03	-0.9971479E+00	-0.2833909E-02	-0.9999618E+00
6	-0.1242293E+03	-0.9965026E+00		
	-0.1242293E+03	-0.9947177E+00		
	-0.1242294E+03	-0.9956102E+00	-0.4185031E-02	-0.9997952E+00
7	-0.1215451E+03	-0.9947177E+00		
	-0.1215446E+03	-0.9919208E+00		
	-0.1215448E+03	-0.9933193E+00	-0.6431086E-02	-0.9997504E+00
8	-0.1172709E+03	-0.9919208E+00		
	-0.1172701E+03	-0.9873569E+00		
	-0.1172700E+03	-0.9896389E+00	-0.9812905E-02	-0.9994518E+00
9	-0.1116510E+03	-0.9873569E+00		
	-0.1116480E+03	-0.9799680E+00		
	-0.1116495E+03	-0.9836624E+00	-0.1564769E-01	-0.9993101E+00
10	-0.1035083E+03	-0.9799680E+00		
	-0.1035037E+03	-0.9689982E+00		
	-0.1035000E+03	-0.9744631E+00	-0.2468263E-01	-0.9991657E+00
11	-0.9411373E+02	-0.9689982E+00		
	-0.9410740E+02	-0.9537939E+00		
	-0.9411057E+02	-0.9613961E+00	-0.3765466E-01	-0.9990507E+00
12	-0.8266187E+02	-0.9537939E+00		
	-0.8266076E+02	-0.9355789E+00		
	-0.8266132E+02	-0.9446664E+00	-0.5510440E-01	-0.9997908E+00
13	-0.7143381E+02	-0.9355789E+00		
	-0.7143320E+02	-0.9162895E+00		
	-0.7143351E+02	-0.9259342E+00	-0.7395169E-01	-0.9998859E+00

(continua)

TABELA V-9 (continuação)

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORÇAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORÇAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORÇOR (TF.CM)
14	-0.6043773E+02	-0.9162895E+00		
	-0.6043758E+02	-0.8965312E+00		
	-0.6043766E+02	-0.9064103E+00	-0.9356215E-01	-0.9999725E+00
15	-0.4967921E+02	-0.8965312E+00		
	-0.4967948E+02	-0.8768560E+00		
	-0.4967935E+02	-0.8866936E+00	-0.1133581E+00	-0.1000052E+01
16	-0.3915721E+02	-0.8768560E+00		
	-0.3915788E+02	-0.8577710E+00		
	-0.3915754E+02	-0.8673135E+00	-0.1328112E+00	-0.1000125E+01
17	-0.2886402E+02	-0.8577710E+00		
	-0.2886505E+02	-0.8397451E+00		
	-0.2886514E+02	-0.8487581E+00	-0.1514345E+00	-0.1000193E+01
18	-0.1878871E+02	-0.8397451E+00		
	-0.1879483E+02	-0.8245131E+00		
	-0.1879177E+02	-0.8321291E+00	-0.1687751E+00	-0.1000904E+01
19	-0.1054970E+02	-0.8245131E+00		
	-0.1055415E+02	-0.8132084E+00		
	-0.1055192E+02	-0.8168607E+00	-0.1819371E+00	-0.1000798E+01
20	-0.4048402E+01	-0.8132084E+00		
	-0.4051498E+01	-0.8052547E+00		
	-0.4049990E+01	-0.8092315E+00	-0.1914518E+00	-0.1000683E+01
21	0.7800300E+00	-0.8052547E+00		
	0.7781578E+00	-0.8000715E+00		
	0.7790999E+00	-0.8026631E+00	-0.1979178E+00	-0.1000581E+01
22	0.3978444E+01	-0.8000715E+00	-0.2018818E+00	-0.1001953E+01
	0.3976698E+01	0.2012264E+00	-0.2018818E+00	-0.6553788E-03
	0.3977571E+01			
23	0.3171792E+01	0.2012264E+00		
	0.3171812E+01	0.1999682E+00		
	0.3171802E+01	0.2005973E+00	-0.2005861E+00	0.1117819E-04
24	0.2371959E+01	0.1999682E+00		
	0.2371959E+01	0.1987836E+00		
	0.2371949E+01	0.1993759E+00	-0.1993650E+00	0.1090813E-04
25	0.1576824E+01	0.1987836E+00		
	0.1576843E+01	0.1976708E+00		
	0.1576854E+01	0.1982272E+00	-0.1982165E+00	0.1064375E-04
26	0.7861601E+00	0.1976708E+00		
	0.7861766E+00	0.1966281E+00		
	0.7861694E+00	0.1971494E+00	-0.1971391E+00	0.1038537E-04
27	-0.3337905E-03	0.1966281E+00	-0.1961308E+00	0.4972776E-03

Com os resultados da tabela V-10 foram construídos os gráficos da figura V-11.

TABELA V-10			
Momento torçor aplicado (tf.cm)	Giro no nó i=22 (radianos)		
	Teoria de 1ª ordem	Teoria de 2ª ordem	
		$U_{\omega} > 0$	$U_{\omega} < 0$
1,0	-0,0744583	-0,0772036	-0,0719081
1,5	-0,1116875	-0,1178849	-0,1060496
2,0	-0,1489166	-0,1603347	-0,1390657
3,0	-0,2233749	-0,2501304	-0,2019453

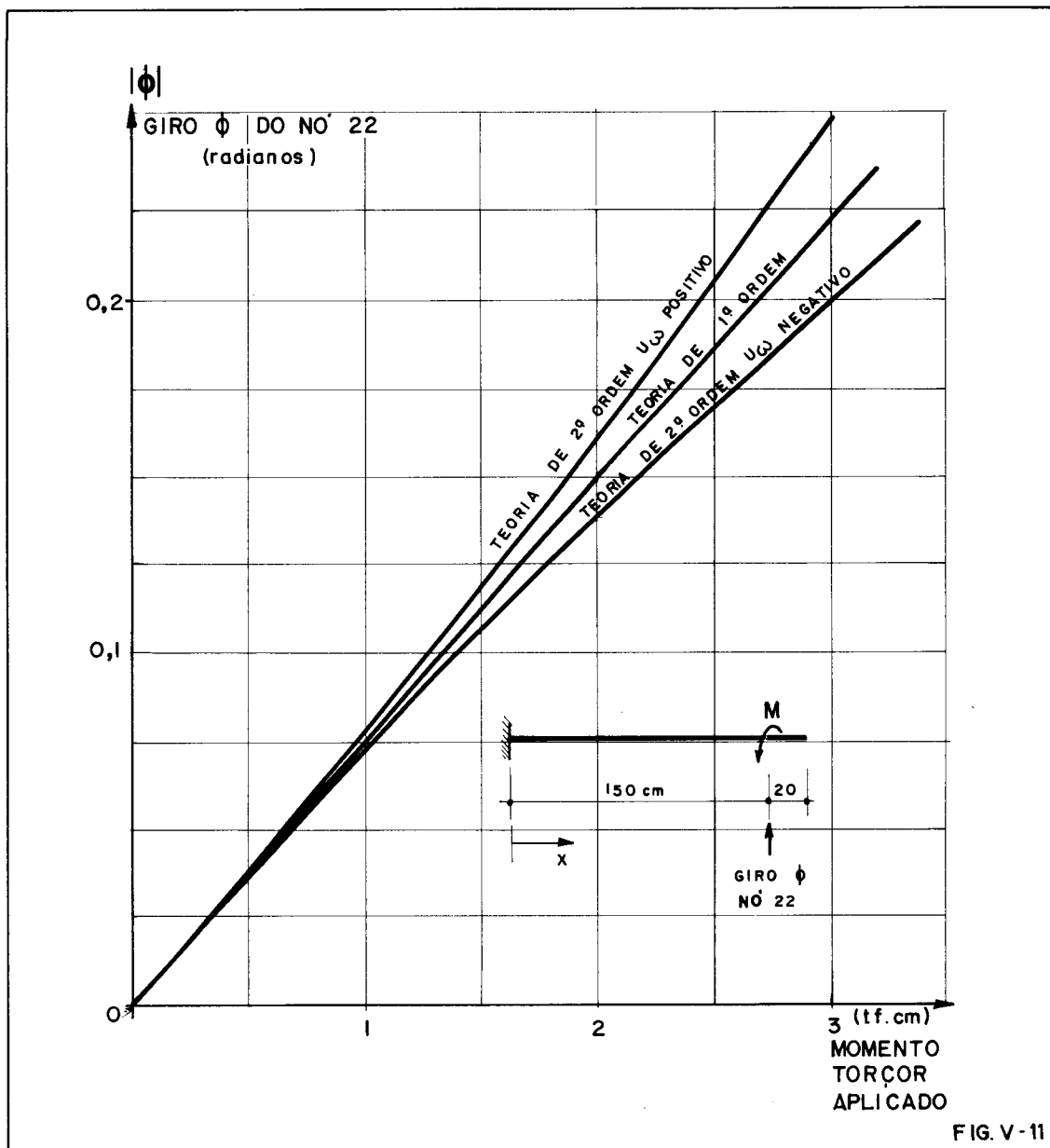
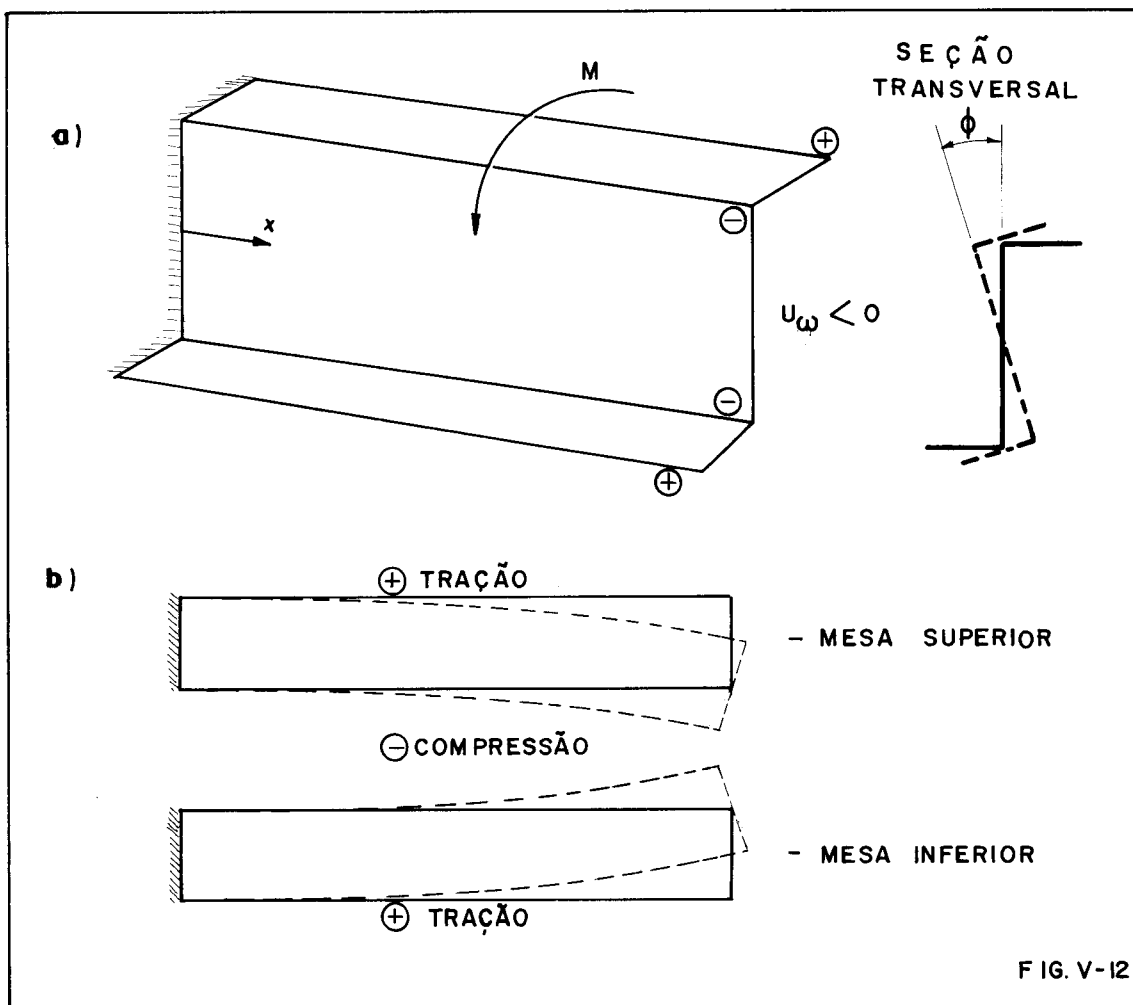


FIG. V-11

Observa-se, neste gráfico, que, para um mesmo valor do momento aplicado, a barra com U_{ω} positivo tem deslocamentos maiores que no caso de U_{ω} negativo, sendo os resultados de 1ª ordem intermediários entre eles.

A existência destes dois casos, em teoria de 2ª ordem, pode ser explicada baseando-se na figura V-12.



De acordo com a figura V-12.a, que esquematiza o caso de U_{ω} negativo, nota-se que, pela aplicação do momento torçor concentrado, as seções transversais realizam as rotações ϕ indicadas. Estas rotações provocam, nas mesas superior e inferior do perfil, zonas comprimidas e tracionadas, conforme a figura V-12.b.

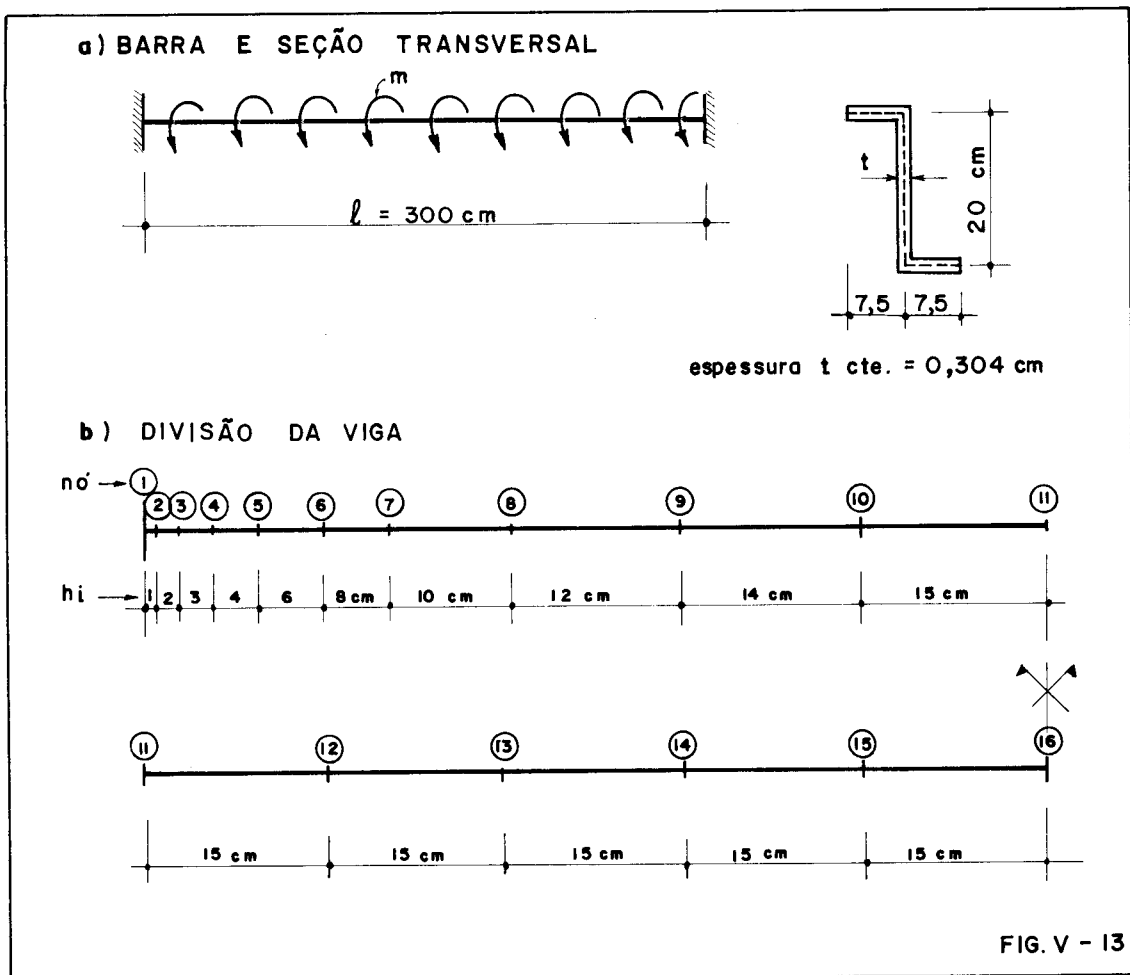
Neste caso, as regiões comprimidas das mesas estão localizadas no encontro das mesas com a alma, sendo portanto, regiões mais rígidas à perda de estabilidade.

No caso de U_{ω} positivo, inverte-se a situação tornando-se a barra mais suscetível a deslocamentos.

4.3 - Terceiro exemplo - (Figura V-13)

A barra da figura V-13.a, engastada nas duas extremidades, está submetida a um momento torçor uniformemente distribuído e sua seção transversal é a mesma dos exemplos anteriores.

A barra de comprimento $l = 300$ cm foi dividida em 30 segmentos, de acordo com a figura V-13.b.



São apresentados, nas tabelas V-11 a V-14, os resultados obtidos pelo computador, adotando-se para m (momento torçor uniformemente distribuído) o valor 0,01 tcm/cm.

TABELA V-11

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

ND	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	-0.2955979E-05	-0.5691523E-05
3	-0.2623749E-04	-0.1730926E-04
4	-0.1027745E-03	-0.3353749E-04
5	-0.2775427E-03	-0.5353932E-04
6	-0.6606335E-03	-0.8016140E-04
7	-0.1444360E-02	-0.1096604E-03
8	-0.2698395E-02	-0.1375461E-03
9	-0.4480001E-02	-0.1589763E-03
10	-0.6704748E-02	-0.1692242E-03
11	-0.9319449E-02	-0.1649964E-03
12	-0.1167913E-01	-0.1476660E-03
13	-0.1369716E-01	-0.1198812E-03
14	-0.1523642E-01	-0.8426707E-04
15	-0.1619909E-01	-0.4343710E-04
16	-0.1692650E-01	-0.3923539E-04
17	-0.1619909E-01	0.4343710E-04
18	-0.1523642E-01	0.8426707E-04
19	-0.1369716E-01	0.1198812E-03
20	-0.1167913E-01	0.1476660E-03
21	-0.9319449E-02	0.1649964E-03
22	-0.6704748E-02	0.1692242E-03
23	-0.4480001E-02	0.1589763E-03
24	-0.2698395E-02	0.1375461E-03
25	-0.1444360E-02	0.1096604E-03
26	-0.6606335E-03	0.8016140E-04
27	-0.2775427E-03	0.5353932E-04
28	-0.1027745E-03	0.3353749E-04
29	-0.2623749E-04	0.1730926E-04
30	-0.2955979E-05	0.5691523E-05
31	0.0000000E+00	0.0000000E+00

TABELLA V-12

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEGG TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.7253043E+02	-0.1493860E+01	0.0000000E+00	-0.1493860E+01
2	-0.7103657E+02	-0.1493860E+01		
	-0.7103353E+02	-0.1475555E+01		
	-0.7103505E+02	-0.1484708E+01	-0.2264273E-02	-0.1486972E+01
3	-0.6808242E+02	-0.1475555E+01		
	-0.6807747E+02	-0.1445419E+01		
	-0.6807995E+02	-0.1460487E+01	-0.6564736E-02	-0.1467052E+01
4	-0.6374122E+02	-0.1445419E+01		
	-0.6373450E+02	-0.1403966E+01		
	-0.6373786E+02	-0.1424692E+01	-0.1246959E-01	-0.1437162E+01
5	-0.5811864E+02	-0.1403966E+01		
	-0.5809888E+02	-0.1346137E+01		
	-0.5810926E+02	-0.1375051E+01	-0.1936918E-01	-0.1394441E+01
6	-0.5002305E+02	-0.1346137E+01		
	-0.4999810E+02	-0.1267590E+01		
	-0.5001098E+02	-0.1306864E+01	-0.2791488E-01	-0.1334779E+01
7	-0.3982738E+02	-0.1267590E+01		
	-0.3982704E+02	-0.1170110E+01		
	-0.3984221E+02	-0.1218850E+01	-0.3626934E-01	-0.1255119E+01
8	-0.2812594E+02	-0.1170110E+01		
	-0.2809670E+02	-0.1055264E+01		
	-0.2810832E+02	-0.1112687E+01	-0.4271524E-01	-0.1155402E+01
9	-0.1542754E+02	-0.1055264E+01		
	-0.1536744E+02	-0.9241016E+00		
	-0.1540749E+02	-0.9896827E+00	-0.4589990E-01	-0.1035583E+01
10	-0.2450016E+01	-0.9241016E+00		
	-0.2429627E+01	-0.7818379E+00		
	-0.2439822E+01	-0.8529698E+00	-0.4509390E-01	-0.8980636E+00
11	0.9297941E+01	-0.7818379E+00		
	0.9297721E+01	-0.6375208E+00		
	0.9296831E+01	-0.7096794E+00	-0.4065292E-01	-0.7503323E+00
12	0.1885853E+02	-0.6375208E+00		
	0.1885732E+02	-0.4948912E+00		
	0.1885793E+02	-0.5662060E+00	-0.3397537E-01	-0.6001814E+00
13	0.2628069E+02	-0.4948912E+00		
	0.2628010E+02	-0.3531401E+00		
	0.2628040E+02	-0.4240157E+00	-0.2607209E-01	-0.4500878E+00
14	0.3157720E+02	-0.3531401E+00		
	0.3157696E+02	-0.2117878E+00		
	0.3157708E+02	-0.2824639E+00	-0.1757189E-01	-0.3000358E+00
15	0.3475378E+02	-0.2117878E+00		
	0.3475370E+02	-0.7058437E-01		
	0.3475374E+02	-0.1411861E+00	-0.8825095E-02	-0.1500112E+00

(continua)

TABELA V-12 (continuação)

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
16	0.3581247E+02	-0.7058437E-01		
	0.3581247E+02	0.7058437E-01		
	0.3581247E+02	0.6189570E-11	-0.7901493E-13	0.6110555E-11
17	0.3475370E+02	0.7058437E-01		
	0.3475378E+02	0.2117878E+00		
	0.3475374E+02	0.1411861E+00	0.8825095E-02	0.1500112E+00
18	0.3157696E+02	0.2117878E+00		
	0.3157720E+02	0.3531401E+00		
	0.3157708E+02	0.2824639E+00	0.1757189E-01	0.3000358E+00
19	0.2628010E+02	0.3531401E+00		
	0.2628069E+02	0.4948912E+00		
	0.2628040E+02	0.4240157E+00	0.2607209E-01	0.4500878E+00
20	0.1885732E+02	0.4948912E+00		
	0.1885853E+02	0.6375208E+00		
	0.1885793E+02	0.5662060E+00	0.3397537E-01	0.6001614E+00
21	0.9295721E+01	0.6375208E+00		
	0.9297941E+01	0.7818379E+00		
	0.9296831E+01	0.7096794E+00	0.4065292E-01	0.7503323E+00
22	-0.2429627E+01	0.7818379E+00		
	-0.2450016E+01	0.9241016E+00		
	-0.2439822E+01	0.8529698E+00	0.4509390E-01	0.8900636E+00
23	-0.1536744E+02	0.9241016E+00		
	-0.1542754E+02	0.1055264E+01		
	-0.1540749E+02	0.9896827E+00	0.4589990E-01	0.1035583E+01
24	-0.2809070E+02	0.1055264E+01		
	-0.2812594E+02	0.1170110E+01		
	-0.2810832E+02	0.1112887E+01	0.4271524E-01	0.1155402E+01
25	-0.3982704E+02	0.1170110E+01		
	-0.3982738E+02	0.1267590E+01		
	-0.3984221E+02	0.1218850E+01	0.3626934E-01	0.1255119E+01
26	-0.4999810E+02	0.1267590E+01		
	-0.5002305E+02	0.1346137E+01		
	-0.5001028E+02	0.1306864E+01	0.2791488E-01	0.1334779E+01
27	-0.5809988E+02	0.1346137E+01		
	-0.5811804E+02	0.1403966E+01		
	-0.5810926E+02	0.1375051E+01	0.1936918E-01	0.1394401E+01
28	-0.6373450E+02	0.1403966E+01		
	-0.6374122E+02	0.1445419E+01		
	-0.6373706E+02	0.1424692E+01	0.1246959E-01	0.1437162E+01
29	-0.6807747E+02	0.1445419E+01		
	-0.6808242E+02	0.1475556E+01		
	-0.6807995E+02	0.1460487E+01	0.6564736E-02	0.1467052E+01
30	-0.7103353E+02	0.1475556E+01		
	-0.7103657E+02	0.1493860E+01		
	-0.7103505E+02	0.1484708E+01	0.2264273E-02	0.1486972E+01
31	-0.7253043E+02	0.1493860E+01		
			0.0000000E+00	0.1493860E+01

TABELA V-13

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	-0.2968642E-05	-0.5916840E-05
3	-0.2635111E-04	-0.1738475E-04
4	-0.1032245E-03	-0.3368553E-04
5	-0.2787649E-03	-0.5377539E-04
6	-0.6836056E-03	-0.8050251E-04
7	-0.1450419E-02	-0.1100784E-03
8	-0.2698672E-02	-0.1379519E-03
9	-0.4494357E-02	-0.1592287E-03
10	-0.6810647E-02	-0.1691790E-03
11	-0.9332052E-02	-0.1646082E-03
12	-0.1168385E-01	-0.1470256E-03
13	-0.1369140E-01	-0.1191559E-03
14	-0.1522034E-01	-0.8364652E-04
15	-0.1617552E-01	-0.4308141E-04
16	-0.1650020E-01	0.2987328E-04
17	-0.1617552E-01	0.4308141E-04
18	-0.1522034E-01	0.8364652E-04
19	-0.1369140E-01	0.1191559E-03
20	-0.1168385E-01	0.1470256E-03
21	-0.9332052E-02	0.1646082E-03
22	-0.6810647E-02	0.1691790E-03
23	-0.4494357E-02	0.1592287E-03
24	-0.2698672E-02	0.1379519E-03
25	-0.1450419E-02	0.1100784E-03
26	-0.6836056E-03	0.8050251E-04
27	-0.2787649E-03	0.5377539E-04
28	-0.1032245E-03	0.3368553E-04
29	-0.2635111E-04	0.1738475E-04
30	-0.2968642E-05	0.5916840E-05
31	0.0000000E+00	0.0000000E+00

TABELA V-14

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORÇAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORÇAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORÇOR (TF.CM)
1	-0.7283925E+02	-0.1494587E+01	0.0000000E+00	-0.1494587E+01
2	-0.7134467E+02	-0.1494587E+01		
	-0.7134195E+02	-0.1478328E+01		
	-0.7134331E+02	-0.1486457E+01	-0.8292614E-03	-0.1487287E+01
3	-0.6838530E+02	-0.1476328E+01		
	-0.6838076E+02	-0.1451174E+01		
	-0.6838303E+02	-0.1464751E+01	-0.2524586E-02	-0.1467276E+01
4	-0.6402724E+02	-0.1451174E+01		
	-0.6402067E+02	-0.1413072E+01		
	-0.6402405E+02	-0.1432123E+01	-0.5142756E-02	-0.1437266E+01
5	-0.5838588E+02	-0.1413072E+01		
	-0.5838038E+02	-0.1358543E+01		
	-0.5838448E+02	-0.1385608E+01	-0.8729446E-02	-0.1394537E+01
6	-0.5019913E+02	-0.1358543E+01		
	-0.5017374E+02	-0.1282210E+01		
	-0.5018643E+02	-0.1320376E+01	-0.1418830E-01	-0.1334565E+01
7	-0.3981606E+02	-0.1282210E+01		
	-0.3980308E+02	-0.1164472E+01		
	-0.3980997E+02	-0.1233341E+01	-0.2132635E-01	-0.1254668E+01
8	-0.2803915E+02	-0.1164472E+01		
	-0.2800096E+02	-0.1066245E+01		
	-0.2802006E+02	-0.1125359E+01	-0.2951175E-01	-0.1154871E+01
9	-0.1520601E+02	-0.1066245E+01		
	-0.1516290E+02	-0.9290242E+00		
	-0.1518446E+02	-0.9976347E+00	-0.3753950E-01	-0.1035174E+01
10	-0.2156562E+01	-0.9290242E+00		
	-0.2139837E+01	-0.7798184E+00		
	-0.2146199E+01	-0.8544213E+00	-0.4364915E-01	-0.8980704E+00
11	0.9561439E+01	-0.7798184E+00		
	0.9556803E+01	-0.6300207E+00		
	0.9559121E+01	-0.7049195E+00	-0.4577642E-01	-0.7506959E+00
12	0.1900711E+02	-0.6300207E+00		
	0.1900289E+02	-0.4846792E+00		
	0.1900500E+02	-0.5573499E+00	-0.4328396E-01	-0.6000339E+00
13	0.2627308E+02	-0.4846792E+00		
	0.2626962E+02	-0.3431976E+00		
	0.2627135E+02	-0.4139384E+00	-0.3658055E-01	-0.4505189E+00
14	0.3141758E+02	-0.3431976E+00		
	0.3141514E+02	-0.2046778E+00		
	0.3141636E+02	-0.2739377E+00	-0.2642844E-01	-0.3003661E+00
15	0.3448531E+02	-0.2046778E+00		
	0.3448405E+02	-0.6801519E-01		
	0.3448468E+02	-0.1363465E+00	-0.1384251E-01	-0.1501890E+00

(continua)

TABELA V-14 (continuação)

$$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
16	0.3550428E+02	-0.6801519E-01		
	0.3550428E+02	0.6801519E-01		
	0.3550428E+02	-0.6896255E-11	0.9651852E-13	-0.6799736E-11
17	0.3448405E+02	0.6801519E-01		
	0.3448531E+02	0.2046778E+00		
	0.3448468E+02	0.1363465E+00	0.1384251E-01	0.1501890E+00
18	0.3141514E+02	0.2046778E+00		
	0.3141758E+02	0.3431976E+00		
	0.3141636E+02	0.2739377E+00	0.2642844E-01	0.3003661E+00
19	0.2626962E+02	0.3431976E+00		
	0.2627308E+02	0.4846792E+00		
	0.2627135E+02	0.4139384E+00	0.3658055E-01	0.4505189E+00
20	0.1900269E+02	0.4846792E+00		
	0.1900711E+02	0.6300207E+00		
	0.1900500E+02	0.5573499E+00	0.4328396E-01	0.6006339E+00
21	0.9556803E+01	0.6300207E+00		
	0.9561439E+01	0.7798184E+00		
	0.9559121E+01	0.7049195E+00	0.4577642E-01	0.7506959E+00
22	-0.2132837E+01	0.7798184E+00		
	-0.2156562E+01	0.9290242E+00		
	-0.2146199E+01	0.8544213E+00	0.4364915E-01	0.8980704E+00
23	-0.1516290E+02	0.9290242E+00		
	-0.1529601E+02	0.1066245E+01		
	-0.1516446E+02	0.9976347E+00	0.3753950E-01	0.1035174E+01
24	-0.2800096E+02	0.1066245E+01		
	-0.2803915E+02	0.1164472E+01		
	-0.2804006E+02	0.1125359E+01	0.2951175E-01	0.1154671E+01
25	-0.3988368E+02	0.1164472E+01		
	-0.3991606E+02	0.1262210E+01		
	-0.3989997E+02	0.1233341E+01	0.2132635E-01	0.1254668E+01
26	-0.5017374E+02	0.1262210E+01		
	-0.5019913E+02	0.1358543E+01		
	-0.5018643E+02	0.1320376E+01	0.1418830E-01	0.1334565E+01
27	-0.5835038E+02	0.1358543E+01		
	-0.5836858E+02	0.1413072E+01		
	-0.5835948E+02	0.1385808E+01	0.8729446E-02	0.1394537E+01
28	-0.6402087E+02	0.1413072E+01		
	-0.6402724E+02	0.1451174E+01		
	-0.6402405E+02	0.1432123E+01	0.5142756E-02	0.1437266E+01
29	-0.6838076E+02	0.1451174E+01		
	-0.6838530E+02	0.1478328E+01		
	-0.6838303E+02	0.1464751E+01	0.2524586E-02	0.1467275E+01
30	-0.7134195E+02	0.1478328E+01		
	-0.7134467E+02	0.1494587E+01		
	-0.7134331E+02	0.1486457E+01	0.8292614E-03	0.1467286E+01
31	-0.7283925E+02	0.1494587E+01	0.0000000E+00	0.1494587E+01

Comparando-se os valores obtidos para o giro ϕ nos casos de U_{ω} positivo e U_{ω} negativo nota-se, de acordo com a figura V-14, o seguinte:

- a) Do n^o 1 ao n^o 12, os valores do ângulo de giro ϕ para U_{ω} positivo são maiores que os valores do ângulo de giro para U_{ω} negativo; o mesmo acontece com os n^{os} 20 a 31.
- b) Do n^o 13 ao n^o 19 os valores do ângulo de giro ϕ para U_{ω} positivo são menores do que os valores do ângulo de giro para U_{ω} negativo.

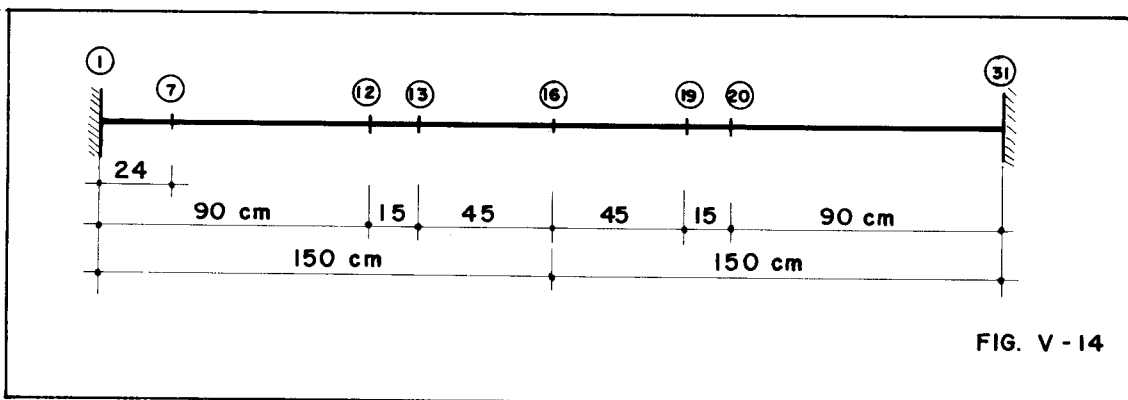


FIG. V - 14

As tabelas V-15 e V-16 mostram os valores do ângulo de giro para os nós 7 e 16 para diversos valores do momento distribuído.

TABELA V-15			
Momento torçor uniform. distribuído (tf·cm/cm)	Giro no n ^o 16 (radianos)		
	Teoria de 1 ^a ordem	Teoria de 2 ^a ordem	
		$U_{\omega} > 0$	$U_{\omega} < 0$
0,010	-0,0165132	-0,0165002	-0,0165265
0,030	-0,0495395	-0,0494262	-0,0496629
0,045	-0,0743092	-0,0740600	-0,0745928
0,100	-0,1651316	-0,1640051	-0,1666390
0,500	-0,8256580	-0,8146345	-0,8854589

TABELA V-16			
Momento torçor uniform. distribuído m (tf.cm/cm)	Giro no n ^o 7 (radianos)		
	Teoria de 1 ^a ordem	Teoria de 2 ^a ordem	
		U _ω > 0	U _ω < 0
0,010	-0,0014474	-0,0014504	-0,0014446
0,030	-0,0043421	-0,0043698	-0,0043152
0,045	-0,0065132	-0,0065757	-0,0064530
0,100	-0,0144738	-0,0147899	-0,0141836
0,500	-0,0723689	-0,0817172	-0,0663475

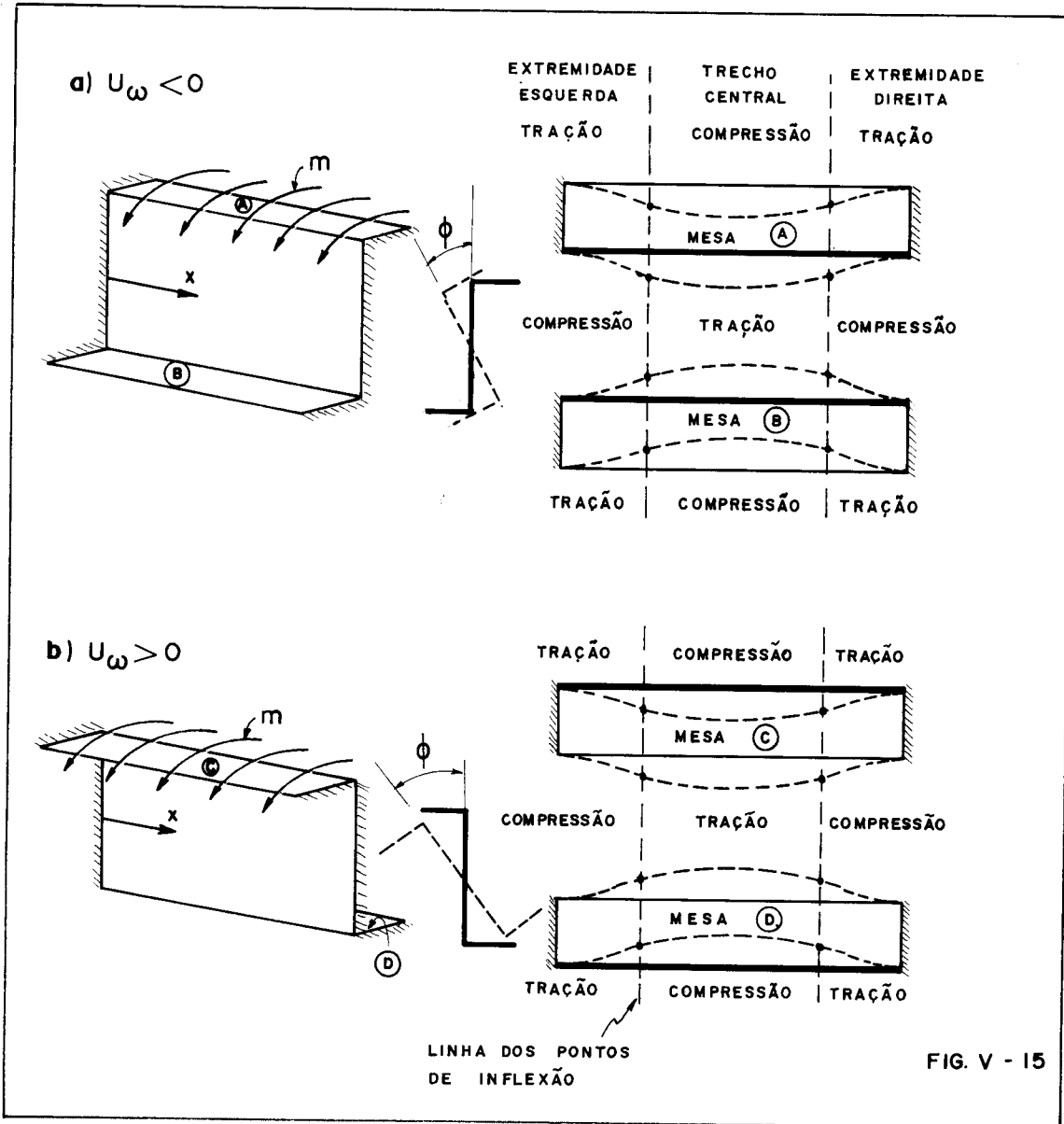
Comparando-se os valores tabelados nota-se que para o n^o 16, os valores do giro, em teoria de 2^a ordem, com U_ω positivo, são sempre menores que os valores obtidos em teoria de primeira ordem, e os valores para U_ω negativo são sempre maiores que estes últimos. No caso do n^o 7, a situação é inversa.

Estes resultados são, a seguir, explicados na figura V-15.

De acordo com esta figura, nota-se que os trechos centrais das mesas do perfil, para o caso de U_ω negativo, são comprimidos nas regiões que não estão ligadas com a alma e, no caso de U_ω positivo os trechos centrais são comprimidos nas regiões ligadas à alma.

Portanto, no primeiro caso (U_ω negativo), o trecho central da barra tem mais tendência a deslocamentos de 2^a ordem (compressão em regiões menos confinadas) que o caso de U_ω positivo.

Raciocínio análogo se aplica às extremidades, observando-se que nessas seções os deslocamentos maiores são verificados para o caso de U_ω positivo.

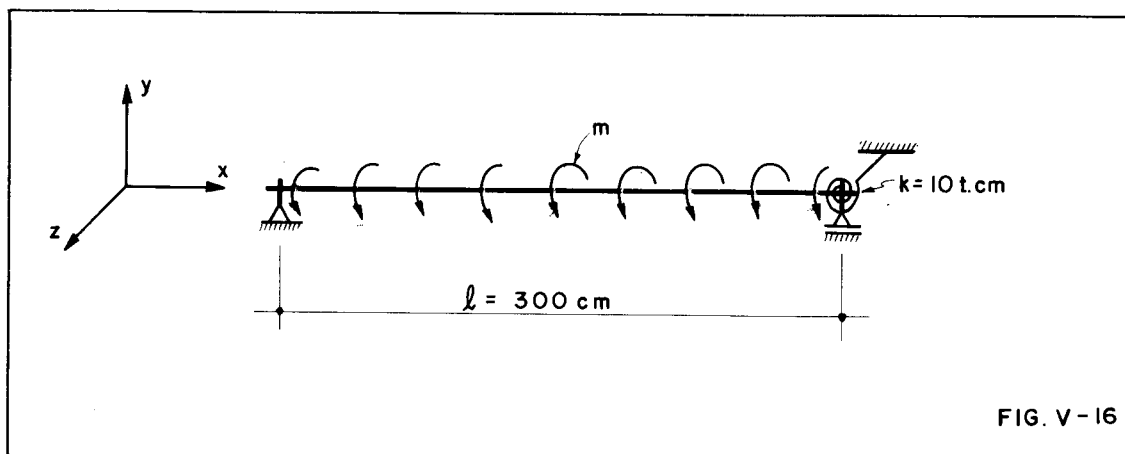


4.4 - Quarto exemplo - (Figura V-16) e (Figura V-18)

Neste exemplo utiliza-se a mesma barra dos exemplos anteriores, nos casos de vínculos de garfo elásticos e molas a bimomento.

a) Vínculos de garfo elásticos

A barra é vinculada na extremidade esquerda por um garfo rígido e na direita por um garfo elástico com constante de mola $K = 10 \text{ tf}\cdot\text{cm}$. A carga aplicada é, conforme figura V-16, um momento torçor uniformemente distribuído e a divisão da barra segue o mesmo esquema da figura V-13.b.



São apresentados, nas tabelas V-17 a V-20, os resultados obtidos pelo computador para um momento torçor distribuído $m = 0,01 \text{ t}\cdot\text{cm}/\text{cm}$.

TABELA V-17

$$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$$

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.1277841E-02
2	-0.1277824E-02	-0.1277790E-02
3	-0.3633067E-02	-0.1277386E-02
4	-0.7663418E-02	-0.1276033E-02
5	-0.1276172E-01	-0.1272858E-02
6	-0.2037768E-01	-0.1269234E-02
7	-0.3044215E-01	-0.1249926E-02
8	-0.4281359E-01	-0.1222952E-02
9	-0.5724177E-01	-0.1179876E-02
10	-0.7333025E-01	-0.1116197E-02
11	-0.8947224E-01	-0.1033798E-02
12	-0.1042816E+00	-0.9388891E-03
13	-0.1175877E+00	-0.8337499E-03
14	-0.1292547E+00	-0.7207356E-03
15	-0.1391825E+00	-0.6022704E-03
16	-0.1473080E+00	-0.4808355E-03
17	-0.1536054E+00	-0.3589539E-03
18	-0.1580871E+00	-0.2391753E-03
19	-0.1608040E+00	-0.1240604E-03
20	-0.1618450E+00	-0.1616613E-04
21	-0.1613378E+00	0.8196541E-04
22	-0.1594475E+00	0.1678154E-03
23	-0.1566140E+00	0.2346613E-03
24	-0.1535133E+00	0.2801897E-03
25	-0.1505606E+00	0.3088687E-03
26	-0.1480202E+00	0.3252241E-03
27	-0.1460425E+00	0.3334011E-03
28	-0.1447015E+00	0.3368164E-03
29	-0.1436887E+00	0.3382749E-03
30	-0.1430116E+00	0.3387109E-03
31	-0.1426729E+00	0.3387656E-03

TABELLA V-18

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	0.5964378E-03	-0.1234592E+01	-0.3351010E+00	-0.1569693E+01
2	0.1235188E+01 0.1236976E+01 0.1236062E+01	-0.1234592E+01 -0.1223864E+01 -0.1229228E+01	-0.3322563E+00	-0.1561484E+01
3	0.3684704E+01 0.3687679E+01 0.3686191E+01	-0.1223664E+01 -0.1205998E+01 -0.1214931E+01	-0.3265558E+00	-0.1541487E+01
4	0.7305674E+01 0.7309840E+01 0.7307757E+01	-0.1205998E+01 -0.1180998E+01 -0.1193498E+01	-0.3179881E+00	-0.1511486E+01
5	0.1203383E+02 0.1204577E+02 0.1203900E+02	-0.1180998E+01 -0.1145254E+01 -0.1163126E+01	-0.3065621E+00	-0.1469688E+01
6	0.1891729E+02 0.1893417E+02 0.1892573E+02	-0.1145254E+01 -0.1095023E+01 -0.1120139E+01	-0.2895019E+00	-0.1409640E+01
7	0.2769436E+02 0.2771657E+02 0.2770547E+02	-0.1095023E+01 -0.1029853E+01 -0.1062438E+01	-0.2670942E+00	-0.1329532E+01
8	0.3801510E+02 0.3804331E+02 0.3802920E+02	-0.1029853E+01 -0.9488773E+00 -0.9893650E+00	-0.2399788E+00	-0.1229344E+01
9	0.4942984E+02 0.4946504E+02 0.4944744E+02	-0.9488773E+00 -0.8507574E+00 -0.8998173E+00	-0.2092533E+00	-0.1109071E+01
10	0.6137504E+02 0.6139834E+02 0.6138699E+02	-0.8507574E+00 -0.7377168E+00 -0.7942371E+00	-0.1764864E+00	-0.9707235E+00
11	0.7245410E+02 0.7246850E+02 0.7246630E+02	-0.7377168E+00 -0.6165029E+00 -0.6771099E+00	-0.1455007E+00	-0.8226106E+00
12	0.8171604E+02 0.8172025E+02 0.8171814E+02	-0.6165029E+00 -0.4909660E+00 -0.5537345E+00	-0.1189059E+00	-0.6726403E+00
13	0.8908474E+02 0.8908848E+02 0.8908661E+02	-0.4909660E+00 -0.3614404E+00 -0.4262032E+00	-0.9650648E-01	-0.5227097E+00
14	0.9451009E+02 0.9451317E+02 0.9451163E+02	-0.3614404E+00 -0.2284909E+00 -0.2949656E+00	-0.7784303E-01	-0.3728087E+00
15	0.9794053E+02 0.9794282E+02 0.9794168E+02	-0.2284909E+00 -0.9284694E-01 -0.1606689E+00	-0.6225848E-01	-0.2229274E+00

(continua)

TABELA V-18 (continuação)

$$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
16	0.9933553E+02	-0.9284694E-01		
	0.9933697E+02	0.4466345E-01		
	0.9933625E+02	-0.2409174E-01	-0.4896418E-01	-0.7305592E-01
17	0.9866701E+02	0.4466345E-01		
	0.9866760E+02	0.1831804E+00		
	0.9866730E+02	0.1139219E+00	-0.3710613E-01	0.7681581E-01
18	0.9591989E+02	0.1831804E+00		
	0.9591969E+02	0.3218799E+00		
	0.9591979E+02	0.2525302E+00	-0.2583213E-01	0.2266980E+00
19	0.9109149E+02	0.3218799E+00		
	0.9109004E+02	0.4600425E+00		
	0.9109106E+02	0.3909612E+00	-0.1435998E-01	0.3766012E+00
20	0.8419000E+02	0.4600425E+00		
	0.8418872E+02	0.5971246E+00		
	0.8418936E+02	0.5285635E+00	-0.2047364E-02	0.5265362E+00
21	0.7523185E+02	0.5971246E+00		
	0.7523043E+02	0.7328315E+00		
	0.7523114E+02	0.6649780E+00	0.1153613E-01	0.6765142E+00
22	0.6423795E+02	0.7328315E+00		
	0.6421520E+02	0.8627373E+00		
	0.6422658E+02	0.7977644E+00	0.2653397E-01	0.8243184E+00
23	0.5213668E+02	0.8627373E+00		
	0.5209789E+02	0.9784429E+00		
	0.5211738E+02	0.9205901E+00	0.4161762E-01	0.9622077E+00
24	0.4032658E+02	0.9784429E+00		
	0.4032408E+02	0.1076203E+01		
	0.4034033E+02	0.1027323E+01	0.5498138E-01	0.1062304E+01
25	0.2956204E+02	0.1076203E+01		
	0.2953556E+02	0.1156468E+01		
	0.2954880E+02	0.1116336E+01	0.6600154E-01	0.1182337E+01
26	0.2028381E+02	0.1156468E+01		
	0.2025309E+02	0.1219327E+01		
	0.2027345E+02	0.1187697E+01	0.7441549E-01	0.1262313E+01
27	0.1294713E+02	0.1219327E+01		
	0.1293216E+02	0.1264586E+01		
	0.1293965E+02	0.1241956E+01	0.8029819E-01	0.1322255E+01
28	0.7873817E+01	0.1264586E+01		
	0.7868548E+01	0.1296505E+01		
	0.7871182E+01	0.1280546E+01	0.8393483E-01	0.1364480E+01
29	0.3979032E+01	0.1296505E+01		
	0.3975230E+01	0.1319445E+01		
	0.3977131E+01	0.1307975E+01	0.8647787E-01	0.1394453E+01
30	0.1336340E+01	0.1319445E+01		
	0.1334041E+01	0.1333271E+01		
	0.1335190E+01	0.1326358E+01	0.8807301E-01	0.1414431E+01
31	0.7698133E-03	0.1333271E+01	0.8883790E-01	0.1422109E+01

TABELA V-19

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	-0.1193099E-02
2	-0.1193080E-02	-0.1193043E-02
3	-0.3578801E-02	-0.1192604E-02
4	-0.7154655E-02	-0.1191139E-02
5	-0.1191293E-01	-0.1187723E-02
6	-0.1901665E-01	-0.1179597E-02
7	-0.2639285E-01	-0.1163484E-02
8	-0.3989488E-01	-0.1135545E-02
9	-0.5326931E-01	-0.1091778E-02
10	-0.6812527E-01	-0.1028476E-02
11	-0.8296623E-01	-0.9484163E-03
12	-0.9652687E-01	-0.8581739E-03
13	-0.1086723E+00	-0.7601050E-03
14	-0.1193019E+00	-0.6564145E-03
15	-0.1283471E+00	-0.5491862E-03
16	-0.1357699E+00	-0.4404153E-03
17	-0.1415615E+00	-0.3320413E-03
18	-0.1457426E+00	-0.2259815E-03
19	-0.1483622E+00	-0.1241648E-03
20	-0.1494986E+00	-0.2856228E-04
21	-0.1482603E+00	0.5878059E-04
22	-0.1477872E+00	0.1357184E-03
23	-0.1454502E+00	0.1961389E-03
24	-0.1428372E+00	0.2370604E-03
25	-0.1403222E+00	0.2640320E-03
26	-0.1381456E+00	0.2791778E-03
27	-0.1364461E+00	0.2867925E-03
28	-0.1352920E+00	0.2899856E-03
29	-0.1344198E+00	0.2913531E-03
30	-0.1338366E+00	0.2917626E-03
31	-0.1335448E+00	0.2918141E-03

TABELLA V-20

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLESSIONE (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAGIONE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	0.1052703E-02	-0.1345355E+01	-0.3126782E+00	-0.1658233E+01
2	0.1346407E+01	-0.1345355E+01		
	0.1349543E+01	-0.1326471E+01		
	0.1347975E+01	-0.1335913E+01	-0.3155073E+00	-0.1651420E+01
3	0.4002485E+01	-0.1326471E+01		
	0.4007635E+01	-0.1295250E+01		
	0.4005000E+01	-0.1310861E+01	-0.3206152E+00	-0.1631476E+01
4	0.7893386E+01	-0.1295250E+01		
	0.7900433E+01	-0.1252081E+01		
	0.7896910E+01	-0.1273666E+01	-0.3278961E+00	-0.1601562E+01
5	0.1290876E+02	-0.1252081E+01		
	0.1292850E+02	-0.1191537E+01		
	0.1291863E+02	-0.1221809E+01	-0.3368792E+00	-0.1556688E+01
6	0.2007772E+02	-0.1191537E+01		
	0.2010399E+02	-0.1109020E+01		
	0.2009005E+02	-0.1150278E+01	-0.3487678E+00	-0.1459046E+01
7	0.2897615E+02	-0.1109020E+01		
	0.2900757E+02	-0.1006835E+01		
	0.2895166E+02	-0.1057928E+01	-0.3616014E+00	-0.1419529E+01
8	0.3907592E+02	-0.1006835E+01		
	0.3911077E+02	-0.8879152E+00		
	0.3909304E+02	-0.9473766E+00	-0.3727435E+00	-0.1320120E+01
9	0.4970578E+02	-0.8879152E+00		
	0.4980224E+02	-0.7556679E+00		
	0.4976001E+02	-0.8217930E+00	-0.3789809E+00	-0.1200780E+01
10	0.6038109E+02	-0.7556679E+00		
	0.6039468E+02	-0.6181482E+00		
	0.6038144E+02	-0.6869080E+00	-0.3767985E+00	-0.1003707E+01
11	0.6966691E+02	-0.6181482E+00		
	0.6965722E+02	-0.4859780E+00		
	0.6966207E+02	-0.5520631E+00	-0.3639416E+00	-0.9100046E+00
12	0.7894669E+02	-0.4859780E+00		
	0.7893868E+02	-0.3627666E+00		
	0.7894279E+02	-0.4243723E+00	-0.3414114E+00	-0.7657837E+00
13	0.8238018E+02	-0.3627666E+00		
	0.8237361E+02	-0.2469526E+00		
	0.8237690E+02	-0.3048596E+00	-0.3106778E+00	-0.6155374E+00
14	0.8607790E+02	-0.2469526E+00		
	0.8607308E+02	-0.1368369E+00		
	0.8607549E+02	-0.1918947E+00	-0.2733802E+00	-0.4652749E+00
15	0.8812504E+02	-0.1368369E+00		
	0.8812263E+02	-0.3063855E-01		
	0.8812413E+02	-0.8373771E-01	-0.2312662E+00	-0.3150039E+00

(continua)

TABELA V-20 (continuação)

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
16	0.8858220E+02	-0.3063655E-01		
	0.8858101E+02	0.7345922E-01		
	0.8858161E+02	0.2141033E-01	-0.1861409E+00	-0.1647306E+00
17	0.8747913E+02	0.7345922E-01		
	0.8747973E+02	0.1772692E+00		
	0.8747943E+02	0.1253642E+00	-0.1398249E+00	-0.1446071E-01
18	0.8482070E+02	0.1772692E+00		
	0.8482304E+02	0.2825622E+00		
	0.8482187E+02	0.2299157E+00	-0.9411566E-01	0.1358000E+00
19	0.8058401E+02	0.2825622E+00		
	0.8058859E+02	0.3910288E+00		
	0.8058660E+02	0.3367955E+00	-0.5074982E-01	0.2800457E+00
20	0.7472316E+02	0.3910288E+00		
	0.7472804E+02	0.5042359E+00		
	0.7472590E+02	0.4476324E+00	-0.1136307E-01	0.4302693E+00
21	0.6710510E+02	0.5042359E+00		
	0.6717106E+02	0.6235767E+00		
	0.6716848E+02	0.5639063E+00	0.2255624E-01	0.5804025E+00
22	0.5781821E+02	0.6235767E+00		
	0.5780484E+02	0.7458339E+00		
	0.5781193E+02	0.6847053E+00	-0.4972260E-01	0.7344279E+00
23	0.4730317E+02	0.7458339E+00		
	0.4732995E+02	0.8618496E+00		
	0.4734696E+02	0.8038418E+00	0.6808534E-01	0.8719271E+00
24	0.3690776E+02	0.8618496E+00		
	0.3690677E+02	0.9650270E+00		
	0.3697227E+02	0.9134383E+00	0.7801225E-01	0.9914506E+00
25	0.2730690E+02	0.9650270E+00		
	0.2727907E+02	0.1052905E+01		
	0.2729279E+02	0.1008960E+01	0.8205903E-01	0.1091025E+01
26	0.1882563E+02	0.1052905E+01		
	0.1883319E+02	0.1123373E+01		
	0.1884451E+02	0.1068139E+01	0.8254308E-01	0.1170682E+01
27	0.1209296E+02	0.1123373E+01		
	0.1207611E+02	0.1174806E+01		
	0.1200423E+02	0.1149089E+01	0.8134421E-01	0.1230434E+01
28	0.7370608E+01	0.1174806E+01		
	0.7370897E+01	0.1211341E+01		
	0.7373893E+01	0.1193073E+01	0.7982708E-01	0.1272900E+01
29	0.3730876E+01	0.1211341E+01		
	0.3732518E+01	0.1237692E+01		
	0.3734697E+01	0.1224517E+01	0.7832628E-01	0.1302843E+01
30	0.1257134E+01	0.1237692E+01		
	0.1254489E+01	0.1253603E+01		
	0.1255811E+01	0.1245648E+01	0.7715833E-01	0.1322806E+01
31	0.8863318E-03	0.1253603E+01	0.7652534E-01	0.1330128E+01

Com os dados da tabela V-21 foi construído o gráfico da figura V-17.

TABELA V-21			
Momento torçor uniform. distribuído m (tf·cm/cm)	Giro do garfo elástico (radianos)		
	Teoria de 1ª ordem	Teoria de 2ª ordem	
		$U_{\omega} > 0$	$U_{\omega} < 0$
0,010	-0,1379420	-0,1335448	-0,1426729
0,030	-0,4147679	-0,3768461	-0,4599188
0,045	-0,6207391	-0,5414201	-0,7313296
0,100	-1,3794200	-1,0446521	-2,1038271

A tabela V-22 mostra os valores do momento torçor no vínculo de garfo elástico, para os mesmos valores de m:

TABELA V-22			
Momento torçor uniformemente distribuído m (tf·cm/cm)	Momento torçor relativo no garfo elástico (tf·cm)		
	Teoria de 1ª ordem	Teoria de 2ª ordem	
		$U_{\omega} > 0$	$U_{\omega} < 0$
0,010	1,379	1,330	1,422
0,030	4,138	3,751	4,589
0,045	6,207	5,387	7,301
0,100	13,794	10,378	21,079

Pela tabela dos momentos torçores relativos no garfo elástico, nota-se que para $m = 0,1$ tfcm/cm, no caso de U_{ω} negativo, o apoio elástico recebe 21,079 tf·cm de um total de 30 tf·cm aplicado, ao passo que, para U_{ω} positivo, o apoio elástico recebe apenas 10,378 tf·cm do mesmo total.

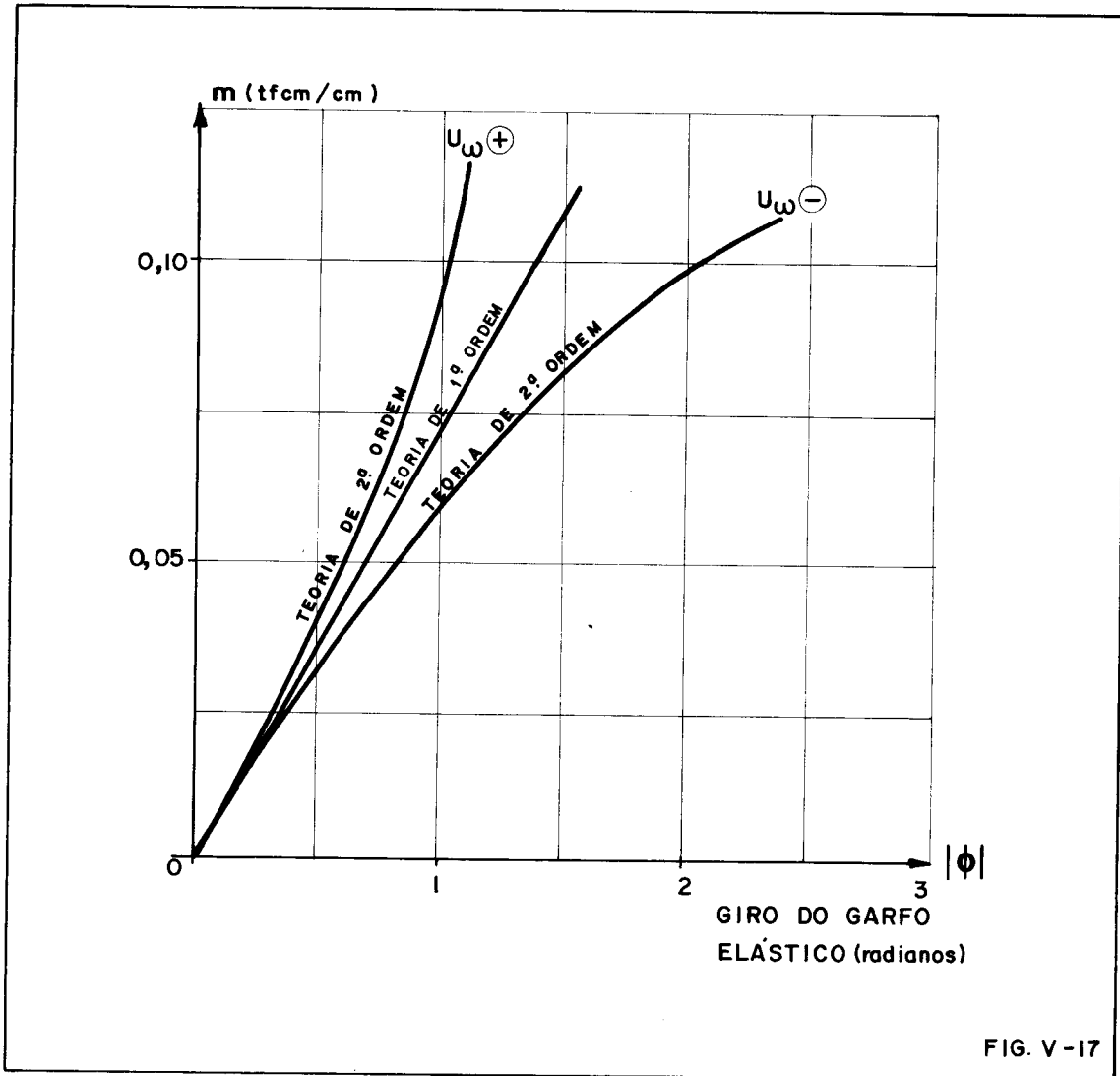


FIG. V-17

b) Vínculos elásticos à ação do bimomento.

A barra aqui estudada é vinculada na extremidade esquerda por um engastamento rígido e na direita por um engastamento elástico a deslocamentos axiais (molas a bimomento). A constante elástica desta mola a bimomento, de acordo com a expressão (III-10), é dada por $AKW = 349668,7 \text{ tcm}^3$ (ver figura V-18).

A secção transversal da barra é a mesma dos exemplos anteriores e a carga aplicada é um momento torçor uniformemente distribuído.

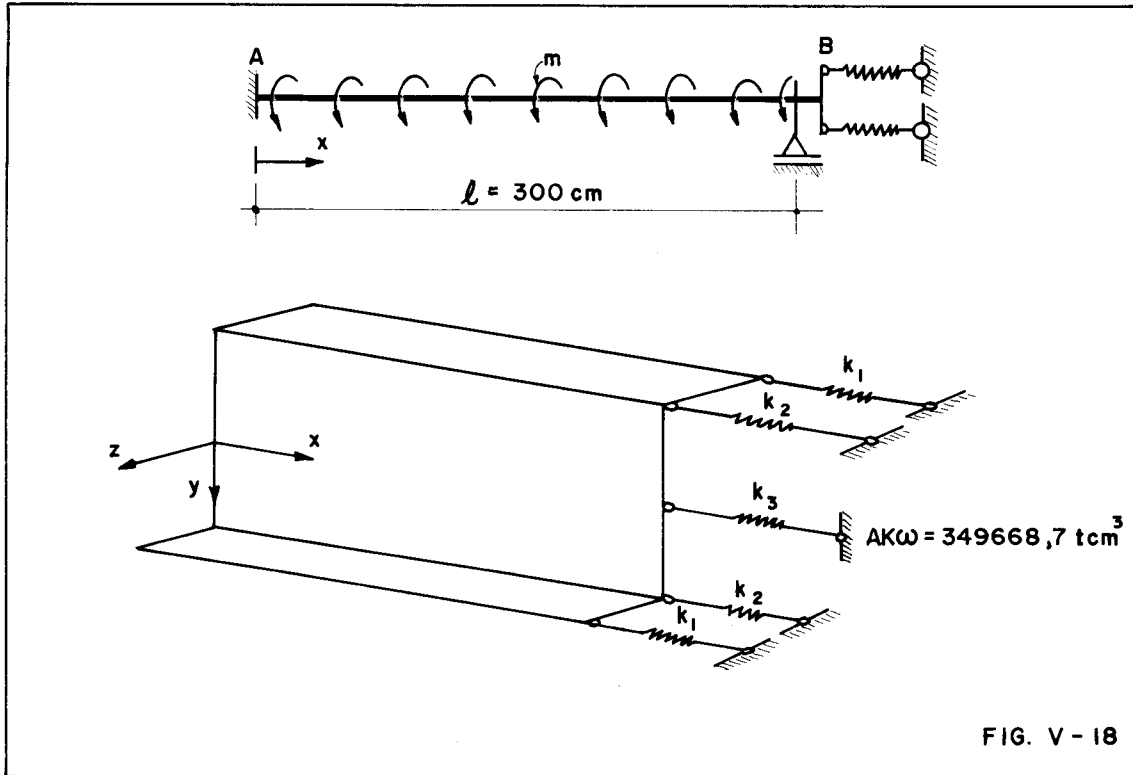


FIG. V - 18

O vínculo A, engastamento fixo, impede tanto as rotações como os deslocamentos axiais. O vínculo B, composto por um vínculo de garfo e mola a bimomento, impede as rotações e é elástico a deslocamentos axiais.

Para um momento torçor uniformemente distribuído aplicado de $m = 0,01 \text{ tcm/cm}$, os resultados obtidos pelo computador estão indicados nas tabelas V-23 a V-26.

TABELA V-23

$$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$$

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	-0.3401868E-05	-0.6781705E-05
3	-0.3022182E-04	-0.1995117E-04
4	-0.1185406E-03	-0.3873595E-04
5	-0.3207074E-03	-0.6201531E-04
6	-0.7887366E-03	-0.9327646E-04
7	-0.1680473E-02	-0.1284519E-03
8	-0.3144621E-02	-0.1626294E-03
9	-0.5276823E-02	-0.1904493E-03
10	-0.8075276E-02	-0.2065690E-03
11	-0.1119564E-01	-0.2067491E-03
12	-0.1420248E-01	-0.1918745E-03
13	-0.1688979E-01	-0.1645808E-03
14	-0.1909035E-01	-0.1274757E-03
15	-0.2067798E-01	-0.8315391E-04
16	-0.2156234E-01	-0.3420551E-04
17	-0.2169395E-01	0.1678039E-04
18	-0.2106168E-01	0.6721474E-04
19	-0.1969321E-01	0.1145090E-03
20	-0.1765505E-01	0.1560751E-03
21	-0.1505255E-01	0.1893238E-03
22	-0.1202991E-01	0.2116590E-03
23	-0.8900622E-02	0.2203537E-03
24	-0.6356994E-02	0.2167972E-03
25	-0.4240859E-02	0.2050175E-03
26	-0.2659914E-02	0.1892356E-03
27	-0.1570213E-02	0.1734093E-03
28	-0.9011361E-03	0.1608559E-03
29	-0.4340903E-03	0.1503497E-03
30	-0.1408562E-03	0.1428126E-03
31	0.0000000E+00	0.1388816E-03

TABELLA V-24

$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM2)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
1	-0.8343492E+02	-0.1610542E+01	0.0000000E+00	-0.1610542E+01
2	-0.8182438E+02	-0.1610542E+01		
	-0.8182123E+02	-0.1591551E+01		
	-0.8182280E+02	-0.1601046E+01	-0.2732488E-02	-0.1603779E+01
3	-0.7863813E+02	-0.1591551E+01		
	-0.7863302E+02	-0.1560335E+01		
	-0.7863557E+02	-0.1575943E+01	-0.7929720E-02	-0.1563873E+01
4	-0.7395201E+02	-0.1560335E+01		
	-0.7394510E+02	-0.1517501E+01		
	-0.7394855E+02	-0.1538918E+01	-0.1508419E-01	-0.1554002E+01
5	-0.6787510E+02	-0.1517501E+01		
	-0.6785585E+02	-0.1457947E+01		
	-0.6786547E+02	-0.1487724E+01	-0.2350138E-01	-0.1511226E+01
6	-0.5910817E+02	-0.1457947E+01		
	-0.5908278E+02	-0.1377423E+01		
	-0.5909547E+02	-0.1417685E+01	-0.3394099E-01	-0.1451626E+01
7	-0.4806340E+02	-0.1377423E+01		
	-0.4803283E+02	-0.1278052E+01		
	-0.4804812E+02	-0.1327737E+01	-0.4429560E-01	-0.1372033E+01
8	-0.3525232E+02	-0.1278052E+01		
	-0.3521719E+02	-0.1161718E+01		
	-0.3523475E+02	-0.1219885E+01	-0.5248882E-01	-0.1272374E+01
9	-0.2127657E+02	-0.1161718E+01		
	-0.2123692E+02	-0.1029708E+01		
	-0.2125675E+02	-0.1095713E+01	-0.5688227E-01	-0.1152595E+01
10	-0.6821018E+01	-0.1029708E+01		
	-0.6801313E+01	-0.8873337E+00		
	-0.6811106E+01	-0.9585206E+00	-0.5656773E-01	-0.1015088E+01
11	0.6506691E+01	-0.8873337E+00		
	0.6505997E+01	-0.7435100E+00		
	0.6507344E+01	-0.8154218E+00	-0.5189899E-01	-0.8673208E+00
12	0.1765865E+02	-0.7435100E+00		
	0.1765719E+02	-0.6017262E+00		
	0.1765792E+02	-0.6726181E+00	-0.4451673E-01	-0.7171348E+00
13	0.2668309E+02	-0.6017262E+00		
	0.2668242E+02	-0.4609751E+00		
	0.2668275E+02	-0.5313507E+00	-0.3566612E-01	-0.5670168E+00
14	0.3359705E+02	-0.4609751E+00		
	0.3359682E+02	-0.3206491E+00		
	0.3359694E+02	-0.3908121E+00	-0.2613860E-01	-0.4169507E+00
15	0.3840656E+02	-0.3206491E+00		
	0.3840653E+02	-0.1804372E+00		
	0.3840654E+02	-0.2505432E+00	-0.1637879E-01	-0.2669220E+00

(continua)

TABELA V-24 (continuação)

$$U_{\omega} = -9950 \text{ cm}^6$$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
16	0.4111309E+02	-0.1804372E+00		
	0.4111309E+02	-0.4023152E-01		
	0.4111309E+02	-0.1103344E+00	-0.6582351E-02	-0.1169167E+00
17	0.4171656E+02	-0.4023152E-01		
	0.4171654E+02	0.9996360E-01		
	0.4171655E+02	0.2986604E-01	0.3212156E-02	0.3307820E-01
18	0.4021708E+02	0.9996360E-01		
	0.4021704E+02	0.2401185E+00		
	0.4021706E+02	0.1700410E+00	0.1303482E-01	0.1830759E+00
19	0.3661526E+02	0.2401185E+00		
	0.3661531E+02	0.3802653E+00		
	0.3661528E+02	0.3101919E+00	0.2289744E-01	0.3330894E+00
20	0.3091133E+02	0.3802653E+00		
	0.3091166E+02	0.5205664E+00		
	0.3091149E+02	0.4504259E+00	0.3270623E-01	0.4831321E+00
21	0.2310287E+02	0.5205664E+00		
	0.2310377E+02	0.6615055E+00		
	0.2310332E+02	0.5910459E+00	0.4217222E-01	0.6332182E+00
22	0.1318119E+02	0.6615055E+00		
	0.1318994E+02	0.7990014E+00		
	0.1317056E+02	0.7302534E+00	0.5071732E-01	0.7809707E+00
23	0.1973918E+01	0.7990014E+00		
	0.1934220E+01	0.9242107E+00		
	0.1954009E+01	0.8616060E+00	0.5701469E-01	0.9166207E+00
24	-0.9156308E+01	0.9242107E+00		
	-0.9190533E+01	0.1032422E+01		
	-0.9173421E+01	0.9783162E+00	0.6022508E-01	0.1036541E+01
25	-0.1951475E+02	0.1032422E+01		
	-0.1954362E+02	0.1123139E+01		
	-0.1952919E+02	0.1077781E+01	0.6060171E-01	0.1138382E+01
26	-0.2852874E+02	0.1123139E+01		
	-0.2855204E+02	0.1195455E+01		
	-0.2854039E+02	0.1159297E+01	0.5887427E-01	0.1216172E+01
27	-0.3572477E+02	0.1195455E+01		
	-0.3574203E+02	0.1248246E+01		
	-0.3573340E+02	0.1221651E+01	0.5610175E-01	0.1277952E+01
28	-0.4073501E+02	0.1248246E+01		
	-0.4074115E+02	0.1285852E+01		
	-0.4073808E+02	0.1267049E+01	0.5343010E-01	0.1320479E+01
29	-0.4459871E+02	0.1285852E+01		
	-0.4460319E+02	0.1313071E+01		
	-0.4460095E+02	0.1299461E+01	0.5094396E-01	0.1350405E+01
30	-0.4722933E+02	0.1313071E+01		
	-0.4723207E+02	0.1329553E+01		
	-0.4723070E+02	0.1321312E+01	0.4903909E-01	0.1370351E+01
31	-0.4856162E+02	0.1329553E+01		
			0.4800872E-01	0.1377562E+01

TABELA V-25

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	ANGULO DE GIRO (RADIANOS)	DERIVADA 1 DO ANGULO DE GIRO
1	0.0000000E+00	0.0000000E+00
2	-0.3501844E-05	-0.6981627E-05
3	-0.3111979E-04	-0.2054828E-04
4	-0.1221035E-03	-0.3991049E-04
5	-0.3304128E-03	-0.6389764E-04
6	-0.8124611E-03	-0.9602177E-04
7	-0.1729251E-02	-0.1310722E-03
8	-0.3228390E-02	-0.1660525E-03
9	-0.5396048E-02	-0.1927547E-03
10	-0.8211189E-02	-0.2065155E-03
11	-0.1130870E-01	-0.2037622E-03
12	-0.1425122E-01	-0.1664310E-03
13	-0.1684531E-01	-0.1570218E-03
14	-0.1894416E-01	-0.1206549E-03
15	-0.2044196E-01	-0.7807784E-04
16	-0.2126867E-01	-0.3172885E-04
17	-0.2138611E-01	0.1616630E-04
18	-0.2078560E-01	0.6307687E-04
19	-0.1948750E-01	0.1088419E-03
20	-0.1754260E-01	0.1495408E-03
21	-0.1503523E-01	0.1834125E-03
22	-0.1208799E-01	0.2077098E-03
23	-0.9086486E-02	0.2190068E-03
24	-0.6454774E-02	0.2177565E-03
25	-0.4320746E-02	0.2075547E-03
26	-0.2715926E-02	0.1925857E-03
27	-0.1605197E-02	0.1770126E-03
28	-0.9217073E-03	0.1644315E-03
29	-0.4441070E-03	0.1537944E-03
30	-0.1441173E-03	0.1461162E-03
31	0.0000000E+00	0.1420983E-03

TABELA V-26

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXU TORÇAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORÇAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORÇOR (TF.CM)
1	-0.8587191E+02	-0.1612722E+01	0.0000000E+00	-0.1612722E+01
2	-0.8425918E+02	-0.1612722E+01		
	-0.8425846E+02	-0.1609074E+01		
	-0.8425802E+02	-0.1610698E+01	0.7990930E-02	-0.1602907E+01
3	-0.8104031E+02	-0.1609074E+01		
	-0.8103836E+02	-0.1600448E+01		
	-0.8103934E+02	-0.1604761E+01	0.2239607E-01	-0.1582365E+01
4	-0.7623702E+02	-0.1600448E+01		
	-0.7623290E+02	-0.1583424E+01		
	-0.7623496E+02	-0.1591936E+01	0.4028828E-01	-0.1551648E+01
5	-0.6989920E+02	-0.1583424E+01		
	-0.6988807E+02	-0.1550127E+01		
	-0.6989203E+02	-0.1566776E+01	0.5782542E-01	-0.1508950E+01
6	-0.6058411E+02	-0.1550127E+01		
	-0.6055604E+02	-0.1488903E+01		
	-0.6057037E+02	-0.1519515E+01	0.7241121E-01	-0.1447104E+01
7	-0.4864542E+02	-0.1488903E+01		
	-0.4860245E+02	-0.1391291E+01		
	-0.4862393E+02	-0.1440097E+01	0.7434681E-01	-0.1305750E+01
8	-0.3468654E+02	-0.1391291E+01		
	-0.3463325E+02	-0.1253522E+01		
	-0.3466139E+02	-0.1322406E+01	0.5693448E-01	-0.1205472E+01
9	-0.1959099E+02	-0.1253522E+01		
	-0.1952834E+02	-0.1078972E+01		
	-0.1959928E+02	-0.1166247E+01	0.1968048E-01	-0.1146567E+01
10	-0.4423235E+01	-0.1078972E+01		
	-0.4399516E+01	-0.8847997E+00		
	-0.4411375E+01	-0.9818660E+00	-0.3019190E-01	-0.1012078E+01
11	0.8872480E+01	-0.8847997E+00		
	0.8853416E+01	-0.6965834E+00		
	0.8862948E+01	-0.7906916E+00	-0.7628847E-01	-0.8669600E+00
12	0.1930217E+02	-0.6965834E+00		
	0.1927947E+02	-0.5278686E+00		
	0.1929032E+02	-0.6122360E+00	-0.1052485E+00	-0.7174845E+00
13	0.2719780E+02	-0.5278686E+00		
	0.2717593E+02	-0.3802158E+00		
	0.2718686E+02	-0.4540522E+00	-0.1132453E+00	-0.5672975E+00
14	0.3287916E+02	-0.3802158E+00		
	0.3286112E+02	-0.2514400E+00		
	0.3287014E+02	-0.3158279E+00	-0.1008127E+00	-0.4166406E+00
15	0.3663272E+02	-0.2514400E+00		
	0.3662043E+02	-0.1370572E+00		
	0.3662658E+02	-0.1942486E+00	-0.7143686E-01	-0.2656855E+00

(continua)

TABELA V-26 (continuação)

$U_{\omega} = +9950 \text{ cm}^6$

NO	BIMOMENTO (TF.CM ²)	MOMENTO DE FLEXO TORCAO (TF.CM)	MOMENTO DE TORCAO LIVRE (TF.CM)	MOMENTO TORCOR (TF.CM)
16	0.3867629E+02 0.3867081E+02 0.3867355E+02	-0.1370572E+00 -0.3112768E-01 -0.8409245E-01		
17	0.3913773E+02 0.3913952E+02 0.3913862E+02	-0.3112768E-01 0.7301720E-01 0.2094476E-01	0.1568791E-01	0.3663267E-01
18	0.3804426E+02 0.3805321E+02 0.3804873E+02	0.7301720E-01 0.1822077E+00 0.1276124E+00	0.6019756E-01	0.1878100E+00
19	0.3532009E+02 0.3533552E+02 0.3532781E+02	0.1822077E+00 0.3028991E+00 0.2425534E+00	0.9632721E-01	0.3386806E+00
20	0.3079204E+02 0.3081255E+02 0.3080250E+02	0.3028991E+00 0.4405542E+00 0.3717266E+00	0.1180066E+00	0.4897333E+00
21	0.2420424E+02 0.2422751E+02 0.2421587E+02	0.4405542E+00 0.5988387E+00 0.5196965E+00	0.1205243E+00	0.6402207E+00
22	0.1524493E+02 0.1525636E+02 0.1524094E+02	0.5988387E+00 0.7720730E+00 0.6854558E+00	0.1014578E+00	0.7869137E+00
23	0.4427336E+01 0.4382030E+01 0.4404683E+01	0.7720730E+00 0.9419300E+00 0.8570015E+00	0.6509374E-01	0.9220952E+00
24	-0.6921130E+01 -0.6967990E+01 -0.6944580E+01	0.9419300E+00 0.1092410E+01 0.1017170E+01	0.2323342E-01	0.1040403E+01
25	-0.1789209E+02 -0.1793399E+02 -0.1791304E+02	0.1092410E+01 0.1216066E+01 0.1154238E+01	-0.1479631E-01	0.1139442E+01
26	-0.2766252E+02 -0.2769529E+02 -0.2767891E+02	0.1216066E+01 0.1309649E+01 0.1262857E+01	-0.4362494E-01	0.1219233E+01
27	-0.3552318E+02 -0.3557548E+02 -0.3556433E+02	0.1309649E+01 0.1373564E+01 0.1341606E+01	-0.6205717E-01	0.1279549E+01
28	-0.4106973E+02 -0.4107729E+02 -0.4107351E+02	0.1373564E+01 0.1416177E+01 0.1394870E+01	-0.7185224E-01	0.1323018E+01
29	-0.4532582E+02 -0.4533087E+02 -0.4532834E+02	0.1416177E+01 0.1445276E+01 0.1430727E+01	-0.7747018E-01	0.1353258E+01
30	-0.4822142E+02 -0.4822428E+02 -0.4822285E+02	0.1445276E+01 0.1462126E+01 0.1453701E+01	-0.8024210E-01	0.1373459E+01
31	-0.4968641E+02	0.1462126E+01	-0.8130431E-01	0.1360822E+01

Fazendo-se m assumir também os valores: 0,030, 0,045, 0,100 tfcm/cm obtiveram-se os valores da derivada primeira do ângulo de giro para o apoio elástico mostrados na tabela V-27.

É importante lembrar que, de acordo com a expressão (I-4), os deslocamentos axiais u são dados por $u_t = u_t \phi'$, isto é, são diretamente proporcionais à derivada primeira ϕ' .

TABELA V-27			
Momento torçor uniformemente distribuído m (tf·cm/cm)	Derivada primeira do ângulo de giro no apoio (B) elástico a deslocamentos axiais (1/cm)		
	Teoria de 1ª ordem	Teoria de 2ª ordem	
		$U_\omega > 0$	$U_\omega < 0$
0,010	$0,1391481 \cdot 10^{-3}$	$0,1420983 \cdot 10^{-3}$	$0,1366758 \cdot 10^{-3}$
0,030	$0,4174442 \cdot 10^{-3}$	$0,4199196 \cdot 10^{-3}$	$0,4150843 \cdot 10^{-3}$
0,045	$0,6261663 \cdot 10^{-3}$	$0,6318011 \cdot 10^{-3}$	$0,6209216 \cdot 10^{-3}$
0,100	$1,3914810 \cdot 10^{-3}$	$1,3936960 \cdot 10^{-3}$	$1,3888161 \cdot 10^{-3}$

A tabela V-28 mostra os valores do bimomento no apoio elástico para os mesmos valores de m .

TABELA V-28			
Momento torçor uniformemente distribuído m (tf·cm/cm)	Bimomento solicitante no apoio (B) elástico a deslocamentos axiais (tf·cm ²)		
	Teoria de 1ª ordem	Teoria de 2ª ordem	
		$U_\omega > 0$	$U_\omega < 0$
0,010	-48,656	-49,686	-47,790
0,030	-145,967	-146,830	-145,139
0,045	-218,951	-220,917	-485,616
0,100	-486,557	-487,323	-485,616

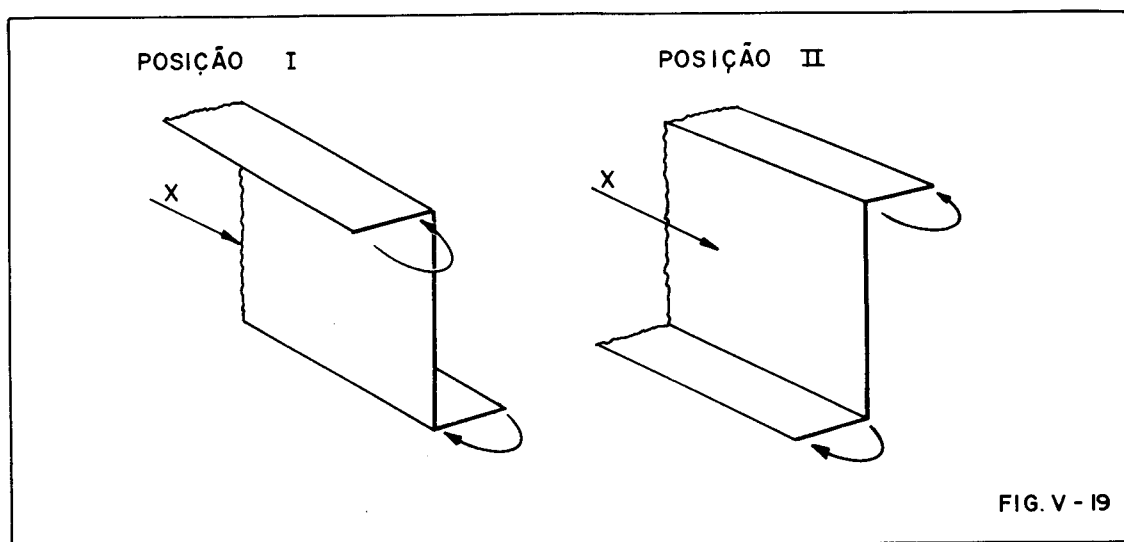
5. CONCLUSÕES

De acordo com os exemplos apresentados no item 4 do Capítulo V, conclui-se que é necessário, para cada caso, um estudo particular, pois são as seguintes as variáveis que influem na melhor utilização da barra:

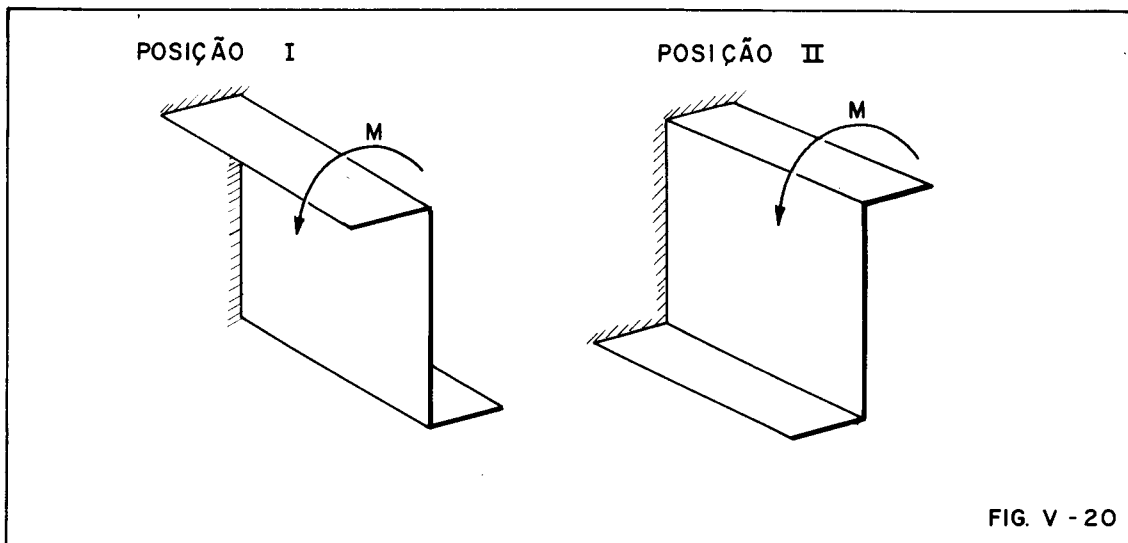
- a) - forma da seção transversal;
- b) - tipos e localização dos vínculos;
- c) - maneira de aplicação das cargas.

Esta melhor utilização da barra se verifica no caso de perfis que não apresentam eixos de simetria, isto é $U_{\omega} \neq 0$, pois nestes casos o estudo em teoria de segunda ordem não coincide com o estudo de primeira ordem.

Conforme explicado no primeiro exemplo, caso de bimomento aplicado, nota-se que para o mesmo bimomento positivo aplicado, a utilização do perfil na posição I é muito mais conveniente do que na posição II (ver Fig. V-19).



No segundo exemplo, a barra com mesma seção transversal é engastada numa extremidade e livre na outra. A carga torçora aplicada de acordo com a posição I acarreta deslocamentos angulares menores do que se aplicada conforme posição II (ver Fig. V-20).



Caso esta mesma barra (Fig. V-20) fosse engastada nas duas extremidades (terceiro exemplo), para as seções situadas próximas aos engastamentos verifica-se que a barra usada na posição I apresenta deslocamentos angulares maiores que na posição II.

Portanto, como inicialmente foi afirmado, cada caso deve ser estudado em particular, não sendo possível uma generalização do estudo com as respectivas sugestões de uso e conclusões.

APÊNDICE

1. PROGRAMA, EM LINGUAGEM FORTRAN, PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM

```
LARGE SSS
IDENT DACOBE
SEGMENT GAJOR, WRITE, READ
FILE 2=CARTAO, UNIT=READER
FILE 5=IMP, UNIT=PRINTER
SIZE REAL=40
  DIMENSION S(35,35), P(35), X(35), IELIM(10), H(20), AMD(20), ITES1(20),
  CITES2(20), AK(20), AKW(20), BIMQ(20)
  COMMON/SSS/S, N2, P, X
C**** **** CARACTERISTICAS DO MATERIAL
  E=2100.
  G=800.
C**** **** CARACTERISTICAS GEOMETRICAS
  READ(2,1) AJT, AJW
  1 FORMAT(2F10.0)
  WRITE(5,500) AJT, AJW
  600 FORMAT(5I5, 5X, 5CARACTERISTICAS GEOMETRICAS, //, //, 10X, 5MOMENTO DE I
  CNERCIA A TORCAO = 0, F12.5, 0 CM40, //, //, 10X, 5MOMENTO DE INERCIA SETORI
  CAL = 0, F12.5, 0 CM60, //, //, 5X, 5VETOR DAS CARGAS, //)
C**** **** DIVISAO DA VIGA
  READ(2,3) NH
  3 FORMAT(I2)
  NI=NH+1
  NM=NI*2
C**** **** CONSTRUCAO DO VETOR DE CARGA
  DO 4 I=1, NM
  4 P(I)=0.
  DO 50 I=1, NI
  ITES1(I)=0
  50 ITES2(I)=0
  DO 9 I=1, NI
  READ(2,10) NO, BI, AMT, AMD(NO), H(NO), AK(NO), AKW(NO)
  10 FORMAT(I2, 6F10.0)
  NO2=2*NO
  IF(BI) 11, 12, 11
  11 ITES1(1)=1
  P(NO2)=P(NO2)+BI
  12 IF(AMT) 13, 14, 13
  13 ITES2(1)=1
  P(NO2-1)=P(NO2-1)-AMT
  14 IF(AMD(NO)) 15, 9, 15
  15 HM2=0.5*H(NO)*AMD(NO)
  HM12=HM2*H(NO)/6.
  P(NO2-1)=P(NO2-1)-HM2
  P(NO2)=P(NO2)-HM12
  P(NO2+1)=P(NO2+1)-HM2
  P(NO2+2)=P(NO2+2)+HM12
  9 CONTINUE
C**** **** CONSTRUCAO DA MATRIZ DAS CARACT. GEOMETRICAS E ELASTICAS
  DO 5 I=1, NM
  DO 5 J=1, NM
  5 S(I,J)=0
  K=1
  I=1
  6 AS=(4.*E*AJW/H(I))+(2.*H(I)*G*AJT/15.)
  BS=(6.*E*AJW/4(I)**2)+(G*AJT/10.)
```

```
CS=(2.*E*AJW/H(I))-H(I)*G*AJT/30.)
DS=(12.*E*AJW/H(I)**3)+(6.*G*AJT/(5.*H(I)))
S(K,K)=S(K,K)+DS
S(K,K+1)=S(K,K+1)+BS
S(K,K+2)=S(K,K+2)-DS
S(K,K+3)=S(K,K+3)+BS
S(K+1,K+1)=S(K+1,K+1)+AS
S(K+1,K+2)=S(K+1,K+2)-BS
S(K+1,K+3)=S(K+1,K+3)+CS
S(K+2,K+2)=S(K+2,K+2)+DS
S(K+2,K+3)=S(K+2,K+3)-BS
S(K+3,K+3)=S(K+3,K+3)+AS
K=K+2
I=I+1
IF(I-NH)6,6,7
7 DO 8 I=2,NH
L=I-1
DO 8 J=1,L
8 S(I,J)=S(J,I)
DO 100 I=1,NI
J=2*I
JJ=J-1
S(JJ,JJ)=S(JJ,JJ)+AK(I)
100 S(J,J)=S(J,J)+AKW(I)
C**** ***** ENTRADA DAS CONDICÖES DE CONTORNO
READ(2,19) NREST
19 FORMAT(I2)
IF(NREST)20,20,21
21 DO 22 I=1,NREST
READ(2,23) NO,IFUNC
23 FORMAT(2I?)
IF(IFUNC)65,66,65
66 ITES2(NO)=1
65 IELIM(I)=2*NO+IFUNC-1
22 CONTINUE
C**** ***** ELIMINAÇÃO DAS LINHAS E COLUNAS DE OSÖ E OPÖ E COMPACTAÇÃO
N2=NM
DO 24 I=1,NREST
INC=IELIM(I)-I+2
DO 25 I1=INC,N2
I1M1=I1-1
DO 26 J=1,N2
26 S(I1M1,J)=S(I1,J)
25 P(I1M1)=P(I1)
DO 27 J=INC,N2
JM1=J-1
DO 27 I1=1,N2
27 S(I1,JM1)=S(I1,J)
24 N2=N2-1
20 CONTINUE
WRITE(5,31)(P(I),I=1,N2)
31 FORMAT(6(5X,F8.3),/)
C**** ***** INVERSÃO DA MATRIZ OSÖ E RESOLUÇÃO DO SISTEMA
CALL GAJUP
DO 32 I=1,N2
X(I)=0.
DO 32 J=1,N2
X(I)=X(I)+(S(I,J)*P(J))
32 CONTINUE
C**** ***** COLUCAÇÃO DOS ZEROS NO VETOR OXÖ
IDE=N2
IPARA=NM
K=NREST
33 IF(K-1)34,35,35
35 IF(IPARA=IELIM(K)) 36,36,37
36 X(IPARA)=0.0
IPARA=IPARA-1
K=K-1
```

```

GO TO 33
37 X(IPARA)=X(IDE)
   IPARA=IPARA-1
   IDE=IDE-1
   GO TO 35
34 CONTINUE
   WRITE(5,3P)
38 FORMAT(///,5X,OVETUR RESPOSTA DO SISTEMA,////)
   WRITE(5,610)
610 FORMAT(8+8,11X,8*****8,/)
   WRITE(5,620)
620 FORMAT(8+8,11X,8*      *      *      *8,/)
   WRITE(5,630)
630 FORMAT(8+8,13X,8ND      ANGULO DE GIRO,5X,8DERIVADA 1 DO,8)
   WRITE(5,620)
   WRITE(5,635)
635 FORMAT(8+8,22X,8(RADIANS),8,7X,8ANGULO DE GIRO,8)
   WRITE(5,620)
   WRITE(5,620)
   WRITE(5,610)
   WRITE(5,620)
   J=0
   NM1=NM-1
   DO 39 I=1,NM1,2
   J=J+1
   WRITE(5,636)J,X(I),X(I+1)
636 FORMAT(8+8,13X,I2,4X,E14.7,6X,E14.7)
   WRITE(5,620)
39 WRITE(5,620)
   WRITE(5,610)
C**** *****CALCULO DO BIMOMENTO , MFT , ML , T
   R2=E*AJW/G/AJT
   R=SQRT(R2)
   WRITE(5,640)
640 FORMAT(///,5X,8RESULTADOS OBTIDOS,////)
   WRITE(5,645)
645 FORMAT(8+8, 5X,8*****8,/)
   C*****8,/)
   WRITE(5,650)
650 FORMAT(8+8, 5X,8*      *8,16X,8*8,16X,8*8,16X,8*8,16X,8*8,/)
   WRITE(5,655)
655 FORMAT(8+8,15X,8BIMOMENTO ,8,7X,8MOMENTO DE,8,7X,8MOMENTO DE,8,5X,8MO
   CMENTO TORCOR,8)
   WRITE(5,650)
   WRITE(5,660)
660 FORMAT(8+8, 7X,8NO,8,6X,8(TF.CM),8,8X,8FLEXO TORCAO,8,5X,8TORCAO LIV
   CRE,8,8X,8(TF.CM),8)
   WRITE(5,650)
   WRITE(5,665)
665 FORMAT(8+8,33X,8(TF.CM),8,10X,8(TF.CM),8)
   WRITE(5,650)
   WRITE(5,650)
   WRITE(5,645)
   WRITE(5,650)
   DO 40 I=1,NH
   F5=I+0.5
   IX=2*I-1
   IX0=2*I
   IX1=IX+1
   IX2=IX+2
   IX3=IX+3
   CH=COSH(H(I)/R)
   SN=SINH(H(I)/R)
   CS1=COSH(H(I)/2./R)
   SM1=SINH(H(I)/2./R)
   C1=((E*AJW/R2)*(X(IX2)-X(IX)-X(IX1)*H(I))-(AMD(I)*H(I)**2/2.))-(((E
   C*AJW/R2)*(X(IX3)-X(IX1)))-(AMD(I)*H(I)))*(R*(CH-1.)/SN))/(SN*(H(I)
   C/R)-(CH-1.)*2/SN))

```



```
C2=((E*AJW/R)*(X(IX3)-X(IX1))-(R*AMD(I)*H(I))-((CH-1.)*C1))/SN
BI1=C2+R2*AMD(I)
BI2=C1*SN1+C2*CS1+R2*AMD(I)
TFT1=-C1/R
TFT2=-((C1/R)*CS1-(C2/R)*SN1
TL1=G*AJT*X(IX0)
TL2=(C1/R)*(CS1-1)+(C2/R)*SN1+(AMD(I)*H(I))/2.+G*AJT*X(IX0)
IF(I*1)41,41,42
41 T1=TFT1+TL1
T2=TFT2+TL2
WRITE(5,43)I,BI1,TFT1,TL1,T1
43 FORMAT(8+8,7X,I3,4(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
WRITE(5,44)F5,BI2,TFT2,TL2,T2
44 FORMAT(8+8,7X,F4.1,2X,E14.7,3(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
GO TO 45
42 T2=TFT2+TL2
BIM=(BI1+BI3)/2.
TFTM=(TFT1+TFT3)/2.
TM=TFTM+TL1
IT2=ITES2(I)
IF(IT2)53,54,53
53 T3=TFT3+TL1
T1=TFT1+TL1
WRITE(5,43)I,BI3,TFT3,TL1,T3
WRITE(5,650)
WRITE(5,56)BI1,TFT1,TL1,T1
56 FORMAT(8+8,13X,E14.7,3(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,58)BIM
58 FORMAT(8+8,13X,E14.7)
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
GO TO 57
54 WRITE(5,46)I,BI3,TFT3
46 FORMAT(8+8,7X,I3,2(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,47)BI1,TFT1
47 FORMAT(8+8,13X,E14.7,3X,E14.7)
WRITE(5,650)
IT1=ITES1(I)
IF(IT1)59,60,59
59 WRITE(5,61)TFTM,TL1,TM
61 FORMAT(8+8,27X,3(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
GO TO 57
60 WRITE(5,56)BIM,TFTM,TL1,TM
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
57 WRITE(5,44)F5,BI2,TFT2,TL2,T2
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
45 BI3=C1*SN+C2*CH+R2*AMD(I)
TF13=-((C1/R)*CH-(C2/R)*SN
40 CONTINUE
TL3=G*AJT*X(NM)
T3=TFT3+TL3
WRITE(5,43)I,BI3,TFT3,TL3,T3
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
WRITE(5,645)
STOP
END
```

2. PROGRAMA, EM LINGUAGEM FORTRAN, PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM

```
LARGE SSS
IDENT DAGOBE
SEGMENT GAJOB,WRITE,READ
FILE 2=CARTAO,UNIT=READER
FILE 5=IMP,UNIT=PRINTER
SIZE REAL=15
  DIMENSION S(62,62),P(62),X(62),IELIM(10),H(30),AMD(31),ITES1(31),
  CITES2(31),AK(31),AKW(31),RIMU(31)
  COMMON/SSS/S,N2,P,X
C**** **** CARACTERISTICAS DO MATERIAL
  E=2100.
  G=800.
C**** **** CARACTERISTICAS GEOMETRICAS
  READ(2,1)AJT,AJW,AUW
  1 FORMAT(3F10.0)
  WRITE(5,600)AJT,AJW,AUW
  600 FORMAT(5I6,5X,6CARACTERISTICAS GEOMETRICAS:////,10X,6MOMENTO DE I
  NERCIA A TORCAO =6,F12.5,6 CM40,////,10X,6MOMENTO DE INERCIA SETORI
  CAL =6,F12.5,6 CM60,////,10X,6CARACT GEOMETRICA DE VLASSOV=6,F12.5,6
  C CM60,////,5X,6VETOR DAS CARGAS,////)
C**** **** DIVISAO DA VIGA
  READ(2,3)NM
  3 FORMAT(I2)
  NI=NM+1
  NN=NI*2
C**** **** CONSTRUCAO DO VETOR DE CARGA
  DO 4 I=1,NI
  4 P(I)=0.
  DO 50 I=1,NI
  ITES1(I)=0
  50 ITES2(I)=0
  DO 9 I=1,NI
  READ(2,10)NO,BI,AMT,AMD(NO),H(NO),AK(NO),AKW(NO)
  10 FORMAT(I2,6F10.0)
  NO2=2*NO
  IF(BI)11,12,11
  11 ITES1(I)=1
  P(NO2)=P(NO2)+BI
  12 IF(AMT)13,14,13
  13 ITES2(I)=1
  P(NO2-1)=P(NO2-1)-AMT
  14 IF(AMD(NO))15,9,15
  15 HM2=0.5*H(NO)*AMD(NO)
  HM12=HM2*P(NO)/6.
  P(NO2-1)=P(NO2-1)-HM2
  P(NO2)=P(NO2)-HM12
  P(NO2+1)=P(NO2+1)-HM2
  P(NO2+2)=P(NO2+2)+HM12
  9 CONTINUE
C**** **** ENTRADA DAS CONDICAOES DE CONTORNO
  READ(2,19)NREST
  19 FORMAT(I2)
  DO 22 I=1,NREST
  READ(2,23)NO,IFUNC
  23 FORMAT(2I2)
  IF(IFUNC)65,66,65
```

```

66 ITES2(N0)=1
65 IELIN(I)=2*N0+IFUNC-1
22 CONTINUE
C*** **** ENTRADA DOS VALORES DO BIMOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM
READ(2,550) (BIMO(I),I=1,N1)
550 FORMAT(8F10.0)
C*** **** CONSTRUCAO DA MATRIZ DAS CARACT. GEOMETRICAS E ELASTICAS
DO 5 I=1,NM
DO 5 J=1,NM
5 S(I,J)=0
R2=E*AJW/G/AJT
R=SQRT(R2)
K=1
I=1
6 AS=(4.*E*AJW/H(I))+(2.*H(I)*G*AJT/15.)
BS=(6.*E*AJW/H(I)**2)+(G*AJT/10.)
CS=(2.*E*AJW/H(I))-(H(I)*G*AJT/30.)
DS=(12.*E*AJW/H(I)**3)+(6.*G*AJT/(5.*H(I)))
CH=(EXP(H(I)/R)+EXP(-H(I)/R))/2.
SN=(EXP(H(I)/R)-EXP(-H(I)/R))/2.
D1=CH*(H(I)/R)**4-4.*SN*(H(I)/R)**3+12.*CH*(H(I)/R)**2-24.*SN*H(I)
C/R+24.*CH-24.
D2=SN*(H(I)/R)**4-4.*CH*(H(I)/R)**3+12.*SN*(H(I)/R)**2-24.*CH*H(I)
C/R+24.*SN
D3=CH*(H(I)/R)**3-3.*SN*(H(I)/R)**2+6.*CH*H(I)/R-6.*SN
D4=SN*(H(I)/R)**3-3.*CH*(H(I)/R)**2+6.*SN*H(I)/R-6.*CH+6.
D5=CH*(H(I)/R)**2-2.*SN*H(I)/R+2.*CH-2.
D6=SN*(H(I)/R)**2-2.*CH*H(I)/R+2.*SN
D7=CH*H(I)/R-SN
D8=SN*H(I)/R-CH+1.
D9=CH-1.
C1=(36.*D1*(R/H(I))**5-72.*D3*(R/H(I))**4+36.*D5*(R/H(I))**3)/H(I)
C2=(36.*D2*(R/H(I))**5-72.*D4*(R/H(I))**4+36.*D6*(R/H(I))**3)/H(I)
C3=R*(9.*D1*(R/H(I))**4-24.*D3*(R/H(I))**3+22.*D5*(R/H(I))**2-8.*D
C7*R/H(I)+D9)
C4=R*(9.*D2*(R/H(I))**4-24.*D4*(R/H(I))**3+22.*D6*(R/H(I))**2-8.*D
C8*R/H(I)+SN)
C5=R*(9.*D1*(R/H(I))**4-12.*D3*(R/H(I))**3+4.*D5*(R/H(I))**2)
C6=R*(9.*D2*(R/H(I))**4-12.*D4*(R/H(I))**3+4.*D6*(R/H(I))**2)
C7=18.*D1*(R/H(I))**5-42.*D3*(R/H(I))**4+30.*D5*(R/H(I))**3-6.*D7*
C(R/H(I))**2
C8=18.*D2*(R/H(I))**5-42.*D4*(R/H(I))**4+30.*D6*(R/H(I))**3-6.*D8*
C(R/H(I))**2
C9=18.*D1*(R/H(I))**5-30.*D3*(R/H(I))**4+12.*D5*(R/H(I))**3
C10=18.*D2*(R/H(I))**5-30.*D4*(R/H(I))**4+12.*D6*(R/H(I))**3
C11=R*(9.*D1*(R/H(I))**4-18.*D3*(R/H(I))**3+11.*D5*(R/H(I))**2-2.*
CD7*R/H(I))
C12=R*(9.*D2*(R/H(I))**4-18.*D4*(R/H(I))**3+11.*D6*(R/H(I))**2-2.*
CDB*R/H(I))
E1=R2*AMD(I)/30.
LJ=I
LJ=I+1
AKTI=(BIMO(LJ)-BIMO(LI))*CH-R2*AMD(I)*(1.-CH)/SN
AKI=BIMO(LI)-R2*AMD(I)
S(K,K)=S(K,K)+(AKTI*C1+AKI*C2+36.*E1/H(I))*AUW/AJW+DS
S(K,K+1)=S(K,K+1)+(AKTI*C7+AKI*C8+3.*E1)*AUW/AJW+BS
S(K,K+2)=S(K,K+2)-(AKTI*C1+AKI*C2+36.*E1/H(I))*AUW/AJW-DS
S(K,K+3)=S(K,K+3)+(AKTI*C9+AKI*C10+3.*E1)*AUW/AJW+BS
S(K+1,K+1)=S(K+1,K+1)+(AKTI*C3+AKI*C4+4.*E1*H(I))*AUW/AJW+AS
S(K+1,K+2)=S(K+1,K+2)-(AKTI*C7+AKI*C8+3.*E1)*AUW/AJW-BS
S(K+1,K+3)=S(K+1,K+3)+(AKTI*C11+AKI*C12-E1*H(I))*AUW/AJW+CS
S(K+2,K+2)=S(K+2,K+2)+(AKI*C1+AKI*C2+36.*E1/H(I))*AUW/AJW+DS
S(K+2,K+3)=S(K+2,K+3)-(AKTI*C9+AKI*C10+3.*E1)*AUW/AJW-BS
S(K+3,K+3)=S(K+3,K+3)+(AKTI*C5+AKI*C6+4.*E1*H(I))*AUW/AJW+AS
K=K+2
I=I+1
IF(I-NM)6,6,7

```



```

WRITE(5,620)
39 WRITE(5,620)
WRITE(5,610)
C**** ****CALCULO DO BIMOMENTO , MFT , ML , T
WRITE(5,640)
640 FORMAT(////,5X,6RESULTADOS OBTIDOS0,////)
WRITE(5,645)
645 FORMAT(0+0, 5X,0*****
C*****0,/)
WRITE(5,650)
650 FORMAT(0+0, 5X,0* *0,16X,0*0,16X,0*0,16X,0*0,16X,0*0,/)
WRITE(5,655)
655 FORMAT(0+0,15X,0BIMOMENTO 0,7X,0MOMENTO DE0,7X,0MOMENTO DE0,5X,0MO
CMENTO TORCAO0)
WRITE(5,650)
WRITE(5,660)
660 FORMAT(0+0, 7X,0NO0,6X,0(TF.CM2)0,8X,0FLEXP TORCAO0,5X,0TORCAO LIV
CRE0,0X,0(TF.CM)0)
WRITE(5,650)
WRITE(5,665)
665 FORMAT(0+0,33X,0(TF.CM)0,10X,0(TF.CM)0)
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
WRITE(5,645)
WRITE(5,650)
DO 40 I=1,NH
IX=2*I-1
IX0=2*I
IX1=IX+1
IX2=IX+2
IX3=IX+3
BI1=(E*AJW*((6./H(I)**2)*(X(IX2)-X(IX))-(2./H(I))*(X(IX3)+2.*X(IX1)
C))
TFT1=-E*AJW*((12./H(I)**3)*(X(IX)-X(IX2))+(6./H(I)**2)*(X(IX1)+X(I
CX3)))
TL1=(G*AJT+BIM0(I) *AUW/AJW)*X(IX0)
IF (I-1)41,41,42
41 T1=TFT1+TL1
WRITE(5,43)I,BI1,TFT1,TL1,T1
43 FORMAT(0+0,7X,I3,4(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
GO TO 45
42 BIM=(BI1+BI3)/2.
TFTM=(TFT1+TFT3)/2.
TM=TFTM+TL1
IT2=ITES2(1)
IF (IT2)53,54,53
53 I3=TFT3+TL1
I1=TFT1+TL1
WRITE(5,43)I,BI3,TFT3,TL1,T3
WRITE(5,650)
WRITE(5,56)BI1,TFT1,TL1,T1
56 FORMAT(0+0,13X,E14.7,3(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,58)BIM
58 FORMAT(0+0,13X,E14.7)
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
GO TO 45
54 WRITE(5,46)I,BI3,TFT3
46 FORMAT(0+0,7X,I3,2(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,47)BI1,TFT1
47 FORMAT(0+0,13X,E14.7,3X,E14.7)
WRITE(5,650)
IT1=ITES1(I)

```

```
IF (IT1) 59,60,59
59 WRITE(5,61)TFTM,TL1,TM
61 FORMAT(0+0,27X,3(3X,E14.7))
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
GO TO 45
60 WRITE(5,56)BIM,TFTM,TL1,TM
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
45 BI3=E*AJW*((6./H(I)**2)*(X(IX)-X(IX2))+(2./H(I))*(X(IX1)+2.*X(IX3)
C))
TFT3=TFT1
40 CONTINUE
TL3=(G*AJT+BIM*(NI)*AUH/AJW)*X(NM)
T3=TFT3+TL3
WRITE(5,43)I,BI3,TFT3,TL3,T3
WRITE(5,650)
WRITE(5,650)
WRITE(5,645)
STOP
END
```

3. SUBROTINA USADA NOS PROGRAMAS APRESENTADOS

```
IDENT GAJOR
SUBROUTINE GAJOR
DIMENSION A(35,35),C(35),IP(35),IQ(35),B(35)
COMMON/SSS/A,N,P,X
DO 1 K=1,N
  T=0.
  DO 6 I=K,N
    S=0
    DO 3 J=K,N
      3 S=S+ABS(A(I,J))
      IF(S)4,5,4
    4 DO 2 J=K,N
      IF(ABS(A(I,J))-S)2,2,7
    7 IP(K)=I
      IQ(K)=J
      PIVO=A(I,J)
      T=ABS(PIVO/S)
    2 CONTINUE
    6 CONTINUE
    IF(T)101,5,101
  101 IF(IP(K)-K)8,98,8
    8 DO 9 J=1,N
      IPK=IP(K)
      Z=A(IPK,J)
      A(IPK,J)=A(K,J)
    9 A(K,J)=Z
  98 IF(IQ(K)-K)10,20,10
  10 IQK=IQ(K)
  DO 11 I=1,N
    Z=A(I,IQK)
    A(I,IQK)=A(I,K)
  11 A(I,K)=Z
  20 DO 12 J=1,N
    IF(J-K)13,14,13
  14 B(J)=1./PIVO
    C(J)=1.
    GO TO 15
  13 B(J)=-A(K,J)/PIVO
    C(J)=A(J,K)
  15 A(K,J)=0.
  12 A(J,K)=0.
  DO 1 I=1,N
    DO 1 J=1,N
      A(I,J)=A(I,J)+C(I)*B(J)
  1 CONTINUE
  DO 16 KAUX=1,N
    K=N-KAUX+1
    IF(IP(K)-K)17,18,17
  17 DO 102 I=1,N
    IPK=IP(K)
    Z=A(I,IPK)
    A(I,IPK)=A(I,K)
    A(I,K)=Z
  102 CONTINUE
  16 IF(IQ(K)-K) 104,16,104
  104 DO 103 J=1,N
    IQK=IQ(K)
    Z=A(IQK,J)
    A(IQK,J)=A(K,J)
    A(K,J)=Z
  103 CONTINUE
  16 CONTINUE
  GO TO 11B
  5 WRITE(9,100)
  100 FORMAT(///,4X)PROGRAMA NAO EXECUTADO-MATRIZ SINGULAR(//)
  118 RETURN
  END
```

BIBLIOGRAFIA

- 1) VLASSOV, B.Z. - Pièces longues en voiles minces. Paris, Eyrolles, 1962. 655p.
- 2) RACHID, Munir - Características de perfis. IN: Separata da Revista da Escola de Engenharia da UFMG, 12 (8), 1969.
- 3) RACHID, Munir - Instabilidade de barras de secção delgada. São Carlos, Departamento de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos, 1976.
- 4) SCHIEL, F - Barras de secção delgada. São Carlos, Departamento de Publicações da Escola de Engenharia de São Carlos, 1964.
- 5) TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M. - Theory of elastic stability. New York, McGraw-Hill, 1961.
- 6) JAHNKE, E. & EMDE, F. - Tables of functions with formulas and curves. 4.ed. New York, Dover, 1945.
- 7) KUO, S.S. - Computer applications of numerical methods. London, Addison - Wesley, 1972.
- 8) PACITTI, T. - FORTRAN - monitor, princípios. 3.ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1972.