

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES LIVRES DE EDIFÍCIOS
PELA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia - Área de Concentração: Engenharia de Estruturas.

ENG. JOSÉ ELIAS LAIER
ORIENTADOR: PROF. DR. MUNIR RACHID

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Munir Rachid
Prof. Dr. Mário Franco
Prof. Dr. Lafael Petroni
Prof. Dr. Paulo Seleguin
Prof. Dr. Eddie Mancini

SUPLENTE:

Prof. Dr. Roberto L.A. Barbato
Prof. Dr. Rubens Lima Pereira
Prof. Dr. João Baptista Nogueira
Prof. Dr. Ilio Montanari

São Carlos, 1978

À
minha esposa
e ao
meu filho

A G R A D E C I M E N T O S

Ao saudoso Professor Dr. Miguel Carlos Stamato, mais uma vez, o nosso reconhecimento.

Agradecemos ao Professor Dr. Munir Rachid pela valiosa orientação dada na realização do presente trabalho.

Agradecemos aos colegas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e, em particular, ao Prof. Dr. Nelson Onuchic pela contínua colaboração.

Agradecemos ao Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos pela utilização de seus equipamentos.

Finalizando, queremos expressar os nossos agradecimentos aos colegas de Departamento e em particular ao Sr. Rui Roberto Casale e Sr. Egydio Jurandir Christianini; aquele pela datilografia e esse pelos desenhos.

R E S U M O

Estudam-se, no presente trabalho, as vibrações livres de edifícios, utilizando-se a técnica do meio contínuo.

Para tanto, são tratados apenas os edifícios cuja estrutura possa ser assimilada a um conjunto de painéis verticais. Estes painéis são supostos travados horizontalmente, ao nível dos andares, por diafrágm^as (lajes) de rigidez infinita em seus planos e nula transversalmente.

De início, estudam-se, de modo sistemático, as vibrações livres de diversos tipos de painéis, isolados e, posteriormente, as vibrações livres de suas associações.

São feitas comparações com resultados obtidos por meio de outras técnicas.

A B S T R A C T

This work deals with free vibrations in tall builldings using the continuous medium technique.

Are studied only the buildings in which the structure can be treated as a set of vertical panels, tied horizontally at the floor level, through the slabs working as diaphragms considered rigid in their planes and with no transversal stiffness.

At first are studied, in a systematic way, free vibrations of various types of isolated panels and then the free vibrations of their associations.

Comparisons are made with results obtained by others techniques.

Í N D I C E

NOTAÇÃO 1

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO 5

CAPÍTULO II

VIBRAÇÕES LIVRES DE TIPOS BÁSICOS
DE PAINÉIS EM SEUS PLANOS

2.1 - Introdução 11
2.2 - Vibrações Livres de Paredes 12
2.3 - Vibrações Livres de Pórticos 18
2.4 - Vibrações Livres da Associação
Contínua de Pórticos e Paredes 24

CAPÍTULO III

VIBRAÇÕES LIVRES DA ASSOCIAÇÃO CONTÍNUA
DE PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

3.1 - Introdução 43
3.2 - Hipóteses e Convenções 45
3.3 - Equações Básicas 47
3.4 - Vibrações Livres de Associação sô
Contendo Pórticos 56
3.5 - Vibrações Livres de Associação sô
Contendo Paredes 72

3.6 - Vibrações Livres de Associação com Disposição Simétrica de Pórticos e Paredes.....	85
3.7 - Análise Aproximada das Vibrações Livres da Associação de Pórticos e Paredes	95
3.7.1 - Solução Por Série de Potências	96
3.7.2 - Solução Pelo Método de RITZ-GALERKIN	101
3.7.3 - Solução Pelo Método de STODOLA-VIANELLO	104

CAPÍTULO IV

OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	125
---------------------------------------	-----

ANEXOS

I - RIGIDEZ DE PÓRTICO À FORÇA CORTANTE	129
II - COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA ASSOCIAÇÃO DE PAREDES POR LINTÉIS	133
III - COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA ASSOCIAÇÃO DE PÓRTICOS E PAREDES POR VIGAS	139
IV - RAÍZES DA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU	147
V - FÓRMULA DE RECORRÊNCIA PARA OS MODOS MAIS ALTOS DE VIBRAÇÃO	151
BIBLIOGRAFIA	157

NOTAÇÃO

a) Eixos Coordenados

Oxz - sistema de coordenadas ortogonais no plano
do painel

OXYZ - sistema de coordenadas ortogonais no espa
ço

b) Índices

f - caracteriza grandezas referentes aos p^orti-
cos

p - caracteriza grandezas referentes às paredes

pf - caracteriza grandezas referentes aos pai-
néis compostos de p^orticos e paredes

i - caracteriza grandezas referentes aos modos
de vibração

t - caracteriza grandezas referentes à torção li
vre e torção total

ft - caracteriza grandezas referentes à flexo-
-torção

CM - caracteriza grandezas referentes ao centro
de massa

m - caracteriza grandezas referentes à massa

X,Y,Z - caracteriza resultantes e grandezas se-
gundo os eixos OX, OY e OZ, respectiva-
mente

c) Derivadas

- Número romano como expoente caracteriza o grau da derivada em relação às variáveis z ou Z
- O ponto caracteriza derivada em relação à variável tempo

d) Deslocamentos

u = deslocamento segundo Ox

U, V = deslocamentos segundo OX e OY , respectivamente

W = rotação segundo OZ

e) Esforços

M = momento

Q = força cortante

T_t = momento torção total

f) Parâmetros Elásticos e Geométricos

E = módulo de elasticidade

G = módulo de elasticidade transversal

J = momento de inércia

j = produto de inércia (EJ_x, EJ_{ft})

s = "rigidez" de pórtico à força cortante

h = pé direito

H = altura total

d = comprimento

g) Parâmetros de Vibração

ω_i = frequência angular

T_i = período de vibração

a_i = constante

t = variável tempo

σ_i = produto $m\omega_i^2$

h) Notação Matricial

$\left\{ \right\}$ = matriz coluna

$\left[\right]$ = matriz quadrada

$\left| \right|$ = matriz retangular

Outras notações são usadas ao longo do texto, porém, seus significados ficam evidentes pela maneira como são introduzidas.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento dinâmico das estruturas de edifícios altos e suas implicações tem recebido especial atenção na literatura técnica. A difusão dos computadores e o desenvolvimento de métodos matriciais (1)*, dentre eles o método dos elementos finitos, permitiram que tal estudo pudesse ser feito por modelos matemáticos cada vez mais requintados e precisos. Contínuo aperfeiçoamento verifica-se também com relação às técnicas de ensaios, tanto em modelos reduzidos como também nas estruturas reais.

Para evidenciar a importância do estudo do comportamento dinâmico das estruturas de edifícios altos, reproduz-se na figura I-1. os espectros de potência dos sismos e dos ventos, divulgados por RAVARA (2), que se constituem na repartição da energia nas diversas frequências em que ocorrem. Na figura I-1. constam também valores característicos da frequência natural de vários tipos de estruturas, o que permite avaliar o caráter dinâmico dos sismos e dos ventos sobre os mesmos (uma solicitação tem caráter dinâmico para uma estrutura, quando sob ação dessa solicitação desenvolvem-se na estrutura forças de inércia da mesma ordem de grandeza das demais forças atuantes (2)).

(*) Os números entre parênteses referem-se à bibliografia relacionada no fim do trabalho.

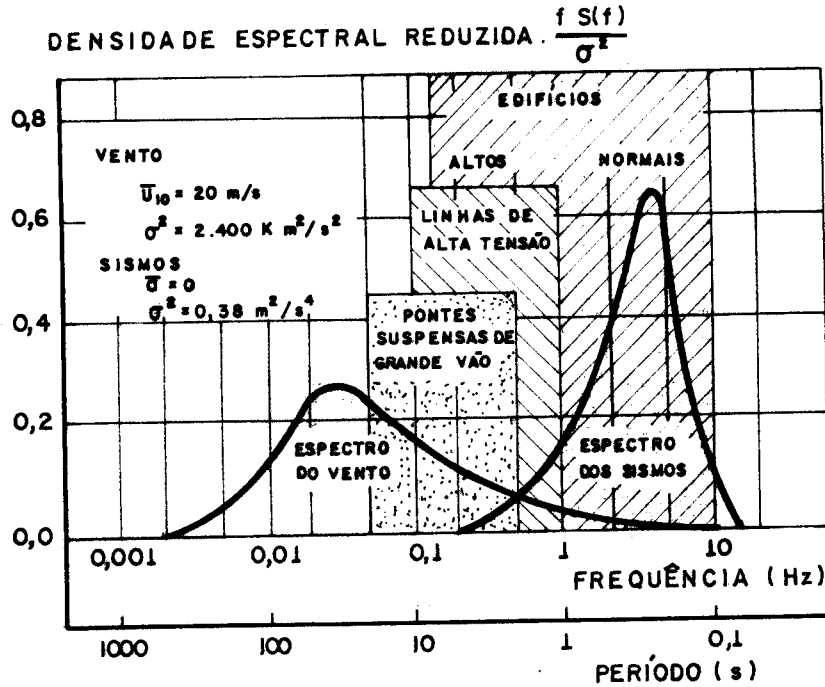


FIG. I.1 - CARÁTER DINÂMICO DO VENTO E DOS SISMOS

Mais recentemente, o conforto do usuário, um aspecto interessante relacionado com o comportamento dinâmico das estruturas de edifícios altos, tem sido fartamente abordado (3) (4) (5) (6). Como se sabe, o ser humano é sensível às acelerações contidas nos movimentos laterais dos edifícios altos, podendo ocorrer sensações de mal estar, quando tais acelerações excedem certos limites. Acelerações da ordem de 5% da aceleração da gravidade causam acentuado desconforto; da ordem de 15% já são intoleráveis.

No estudo do comportamento dinâmico das estruturas, a análise das vibrações livres ocupa posição central;

dai a preocupação constante para com esse assunto. De um modo geral, dois são os caminhos utilizados para a análise das vibrações livres de estruturas de edifícios elevados: o primeiro por meio de técnicas matriciais e o segundo por meio da técnica do meio contínuo, tendo aquele recebido intenso tratamento na literatura técnica e esse, reduzida e restrita contribuição (7) (8) (9) (10) (11).

A análise das vibrações livres de edifícios altos pela técnica do meio contínuo tem sido abordada por meio de considerações planas (7) (8) (9) (10), cuja aplicação pode ser estendida às estruturas tridimensionais, quando a simetria da estrutura permite tal consideração (11). Constata-se facilmente que a análise das vibrações livres pode ser levada a bom termo através de considerações planas, quando a estrutura do edifício possui simetria com relação a dois planos ortogonais verticais, pois, dessa forma, os tres movimentos horizontais das lajes (uma rotação e duas translações) tornam-se independentes (admite-se, naturalmente, simetria também com relação à massa).

O presente trabalho tem por objetivo ampliar e generalizar a aplicação da técnica do meio contínuo à análise das vibrações livres das estruturas de edifícios altos, permitindo abordar estruturas tridimensionais compostas pela associação de diversos tipos de painéis verticais de contraventamento, dispostos de modo arbitrário em planta.

Na técnica do meio contínuo, a estrutura tridimensional do edifício é considerada como um conjunto de painéis verticais (pórticos, paredes, paredes associadas por lintéis, etc.) ligados entre si, horizontalmente, por diafragmas, de rigidez infinita em seus planos e nula transversalmente, uniformemente distribuídos ao longo da altura (simulação das lajes). Essa consideração, fundamental na técnica do meio contínuo, consiste em se admitir contínua a interação horizontal entre os painéis verticais de contraventamento, quando na estrutura real tal interação manifesta-se ao nível dos andares. Contudo, aquela consideração não perturba apreciavelmente o comportamento resultante, tendo-se em vista a estrutura como um todo (12) (13) (14). Percebe-se facilmente que a referida consideração aproxima-se tanto mais da realidade quanto maior for o número de andares. Na análise das vibrações livres admite-se, também, a distribuição uniforme ao longo da altura da massa do edifício (7) (8) (9) (10) (11), bem como do momento de inércia da mesma.

No presente trabalho estudam-se as vibrações livres de estruturas tridimensionais de edifícios altos somente no que respeita aos movimentos horizontais dos andares (duas translações e uma rotação). É admitido o comportamento elástico linear para o conjunto e a solução obtém-se por meio de sistemas de equações diferenciais, através de um tratamento semelhante ao do clássico processo dos deslocamentos.

Constata-se, facilmente, que, do modo como o estudo das vibrações livres é proposto, obtêm-se, para os movimentos horizontais da estrutura, uma infinidade de modos livres de vibração, enquanto, por outro lado, a maioria das técnicas matriciais conduzem a um número finito. Exemplificando, um edifício de dez andares possui apenas trinta possíveis modos livres de vibração em se considerando somente os movimentos horizontais das lajes, entretanto, a técnica do meio contínuo conduz a uma infinidade. Com essa consideração ficam desprovidos de significado físico os modos de vibração que não correspondem aos mencionados.

O capítulo II é dedicado à análise das vibrações livres de tipos básicos de painéis de contraventamento em seus planos. Embora tal análise já tenha sido apresentada na literatura técnica (7) (8) (9) (10), procura-se, aqui, apresentá-la de modo mais sistemático e evidenciar sua aplicação a um número maior de painéis para os quais ainda não foi dada maior atenção. Além disso, chama-se a atenção para algumas constatações de grande interesse. De certa forma, os assuntos abordados no capítulo II fracionam, em parte, o problema tratado no capítulo III.

A análise das vibrações livres de estruturas tridimensionais de edifícios altos, objeto do capítulo III, desenvolve-se formulando inicialmente o problema mais geral, que consiste na associação dos diversos tipos básicos de painéis de contraventamento. A solução, por outro lado, é apresentada na ordem crescente de complexidade da integra-

ção do sistema de equações diferenciais resultante. Resolve-se, primeiramente, o caso de associação sô contendo p_or_ticos, em seguida associação sô contendo paredes, depois o caso de associação simétrica dos diversos tipos básicos de painéis, e, finalmente, o caso mais geral que consiste na associação dos diversos tipos básicos de painéis dispostos de modo arbitrário em planta. Nesse último caso, a integração do sistema de equações diferenciais obtêm-se através de métodos aproximados, pois são remotas as possibilidades de uma solução "analítica". No presente trabalho é feita a integração do sistema de equações por meio de séries de potências (15), sendo também aplicados os métodos de RITZ-GALLERKIN (16) e STODOLA-VIANELLO (17).

Comentários sobre as amplas possibilidades do procedimento proposto no presente trabalho, no sentido de torná-lo ainda mais geral, bem como as conclusões finais, são conteudos do capítulo IV.

Alguns anexos são apresentados no fim do trabalho no intuito de esclarecer alguns pormenores relativos a parâmetros e relações usadas ao longo do texto.

Finalizando, espera-se ter sido dada também uma pequena contribuição para a melhor compreensão das vibrações livres de barras de seção delgada, tendo em vista a semelhança desse problema com o aqui tratado.

CAPÍTULO II

VIBRAÇÕES LIVRES DE TIPOS BÁSICOS DE PAINÉIS EM SEUS PLANOS

2.1. INTRODUÇÃO

A análise das vibrações livres de tipos básicos de painéis de contraventamento em seus planos, utilizando-se a técnica do meio contínuo, tem recebido contribuições esparsas na literatura técnica (7) (8) (9) (10) (11). Procura-se, aqui, tratá-la de modo sistemático seguindo de perto a mesma orientação dada por STAMATO (12) no estudo de painéis de contraventamento sujeitos à ação estática.

Apenas três tipos básicos de painéis de contraventamento são aqui abordados:

- a) Painel rígido à força cortante, deformável apenas ao momento fletor e que reproduz, aproximadamente, o comportamento das paredes usuais.
- b) Painel rígido ao momento fletor, deformável apenas à força cortante e que reproduz, aproximadamente, o comportamento dos pórticos usuais.
- c) Painel deformável ao momento fletor e à força cortante e que reproduz, aproximadamente, as

associações planas de p \ddot{o} rticos e paredes, bem como associações planas de paredes por lin-t \ddot{e} is.

(momento fletor e força cortante no painel tem aqui o mes-mo significado dado na Resist \hat{e} ncia dos Materiais tomando o painel como um consolo vertical).

Os tipos de pain \acute{e} is deform \acute{a} veis por momento fle-tor e força cortante, item c), t \hat{e} m comportamento descrito por equa \tilde{c} ões diferenciais similares, fato que levou MANCI-NI (14) a individualiz \acute{a} -los como um tipo de painel denomi-nando-os por Painel Geral.

As vibra \tilde{c} ões livres dos pain \acute{e} is em seus pr \ddot{o} -prios planos s \ddot{a} o analisadas apenas no tocante aos movimen-tos horizontais. Conv \hat{e} m salientar que os movimentos hori-zontais, em geral, predominam sobre os demais nos primei-ros modos de vibra \tilde{c} ão.

2.2. Vibra \tilde{c} ões Livres de Paredes

O assunto em quest \ddot{a} o consiste no cl \acute{a} ssico estu-do das vibra \tilde{c} ões livres de uma barra com uma das extreni-dades engastadas e a outra livre, cujo tratamento encon-tra-se fartamente na literatura t \acute{e} cnic \acute{a} (15) (16) (17) (18). As paredes s \ddot{a} o supostas de se \tilde{c} ão constante ao longo da altura ($j_p = EJ = \text{cte.}$); o mesmo acontecendo com a mas-sa por unidade de comprimento ($m = \text{cte.}$). Dessa forma, com

os sentidos positivos indicados na figura II-1, têm-se as seguintes relações:

$$\frac{dM_P}{dz} = M_P^I = -Q_P$$

$$Q_P^I = m \ddot{u}_P \quad \dots\dots\dots (II.1)$$

$$M_P = j_P \ddot{u}_P^{II}$$

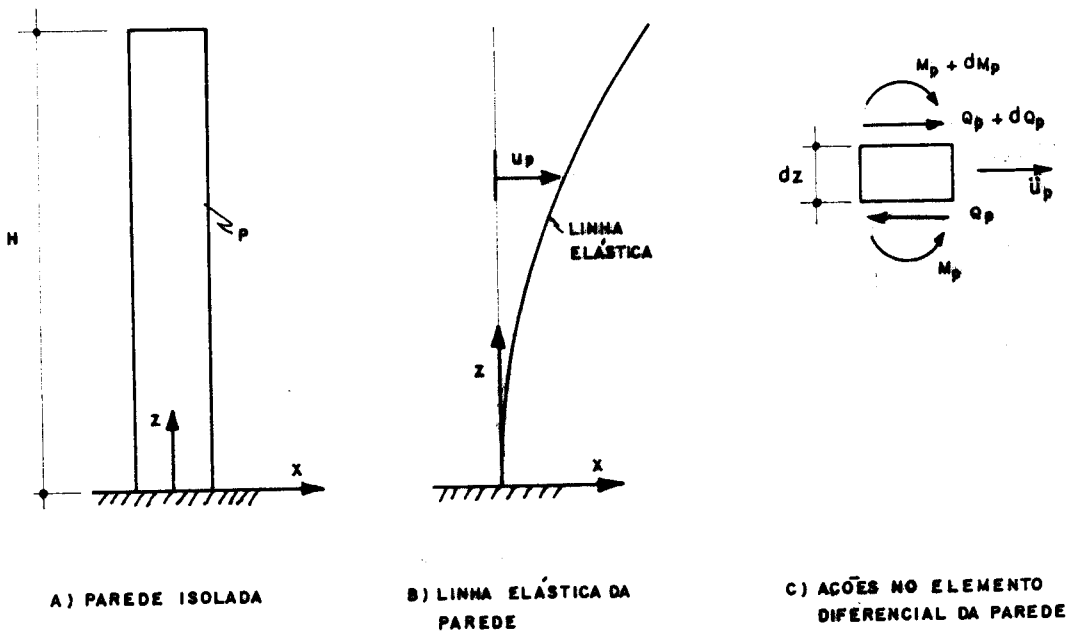


FIG. II - 1 - PAREDE ISOLADA

As equações (II.1) permitem escrever a equação de movimento para a parede:

$$u_p^{IV}(z,t) + \frac{m}{J_p} u_p''(z,t) = 0 \quad \dots\dots\dots (II.2)$$

Como se sabe, em se tratando de um modo livre de vibração, a equação (II.2) apresenta solução do tipo:

$$u_p(z,t) = u_p(z) \left(A \text{sen}(\omega t) + B \text{cos}(\omega t) \right) \quad \dots (II.3)$$

onde:

$u_p(z)$ = função exclusiva da coordenada z

A, B = constantes determinadas de modo a satisfazer condições prescritas na variável tempo.

Substituindo $u_p(z,t)$ dado pela equação (II.3) na equação (II.2) tem-se, finalmente, a equação das vibrações livres:

$$u_p^{IV}(z) - \frac{m\omega^2}{J_p} u_p(z) = 0 \quad \dots\dots\dots (II.4)$$

sendo u_p , agora, função exclusiva da coordenada z .

As condições de fronteira a serem satisfeitas pelas soluções da equação (II.4) são:

$$u_p(0) = 0$$

$$u_p^I(0) = 0$$

$$u_p^{II}(H) = \frac{M_p(H)}{j_p} = 0 \quad \dots\dots\dots (II.5)$$

$$u_p^{III}(H) = \frac{-Q_p(H)}{j_p} = 0$$

Essas condições expressas nas equações (II.5) provêm do fato de serem nulos o deslocamento e a rotação do painel na base (z=0) e também serem nulos o momento fletor e a força cortante no topo (z=H).

A solução geral da equação (II.4) tem a forma:

$$u_p(z) = C_1 \sinh(\alpha z) + C_2 \cosh(\alpha z) + C_3 \sin(\alpha z) + C_4 \cos(\alpha z) \quad \dots\dots (II.6)$$

onde:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{j_p}} \quad \dots\dots\dots (II.7)$$

Substituindo $u_p(z)$ pela solução geral dada pela equação (II.6) nas equações (II.5) têm-se:

$$C_2 + C_4 = 0$$

$$C_1 + C_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (II.8)$$

$$C_1 \sinh(\alpha H) + C_2 \cosh(\alpha H) - C_3 \sin(\alpha H) - C_4 \cos(\alpha H) = 0$$

$$C_1 \cosh(\alpha H) + C_2 \sinh(\alpha H) - C_3 \cos(\alpha H) + C_4 \sin(\alpha H) = 0$$

..... (II.8)

cont.

A solução não trivial das equações (II.8) nas constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 implica em:

$$\det. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\alpha H) & \cosh(\alpha H) & -\sin(\alpha H) & -\cos(\alpha H) \\ \cosh(\alpha H) & \sinh(\alpha H) & -\cos(\alpha H) & \sin(\alpha H) \end{vmatrix} = 0$$

..... (II.9)

O desenvolvimento do determinante expresso na equação (II.9) conduz a:

$$\cosh(\alpha H) \cos(\alpha H) + 1 = 0 \quad \text{.....(II.10)}$$

A equação transcendente (II.10) apresenta, como é sabido, as seguintes soluções:

$$\alpha H = 1,875 \quad \text{para } i = 1$$

$$\alpha H = 4,694 \quad \text{para } i = 2$$

..... (II.11)

$$\alpha H = 7,855 \quad \text{para } i = 3$$

$$\alpha H \approx \frac{2i-1}{2} \pi \quad \text{para } i > 3$$

As soluções expressas nas equações (II.11) junto com a equação (II.7) fornecem a expressão dos correspondentes períodos de vibração:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_i} = a_i H^2 \sqrt{\frac{m}{j_p}} \dots\dots\dots (II.12)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,80 & (i=1) \\ a_2 &= 0,28 & (i=2) \\ a_3 &= 0,10 & (i=3) \\ a_i &= \frac{8}{(2i-1)^2 \pi} & (i>3) \end{aligned} \dots\dots\dots (II.13)$$

As soluções dadas nas equações (II.11) levadas nas equações (II.8) permitem determinar, por exemplo, os valores das constantes C_1 , C_2 e C_3 em função do valor da constante C_4 . Assumindo $C_4 = -1$, os correspondentes modos de vibração são expressos na forma:

$$u_p = \cosh(\alpha z) - \cos(\alpha z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} \left(\sen(\alpha z) - \sinh(\alpha z) \right) \dots\dots (II.14)$$

Na figura II-2 estão mostrados os tres primeiros modos de vibração das paredes ($i = 1, 2, 3$), onde indicam-se também os correspondentes períodos.

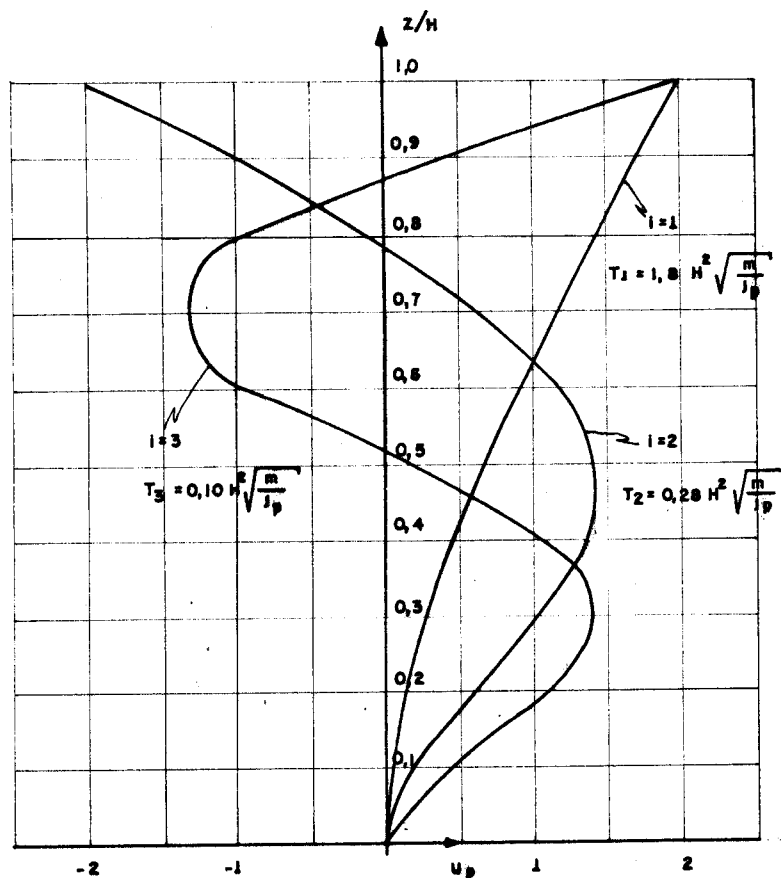


FIG II-2- MODOS DE VIBRAÇÃO DE PAREDES

2.3. Vibrações Livres de Pórticos

A análise das vibrações livres de pórticos pela técnica do meio contínuo tem restrito tratamento na literatura técnica (7). Os pórticos são supostos possuírem rigidez constante do longo da altura (alguma variação de rigidez sempre ocorre na base e no topo dos pórticos (12), porém constata-se que tal fato não perturba o comportamento dos mesmos como um todo). Assim sendo, com os sentidos po-

sitivos indicados na figura II-3, e assumindo também constante ao longo da altura a massa por unidade de altura ($m = \text{cte}$), têm-se as seguintes relações:

$$H_f^I = -Q_f$$

$$Q_f^I = m\ddot{u}_f \quad \dots\dots\dots (II.15)$$

$$u_f^I = \frac{Q_f}{s_f}$$

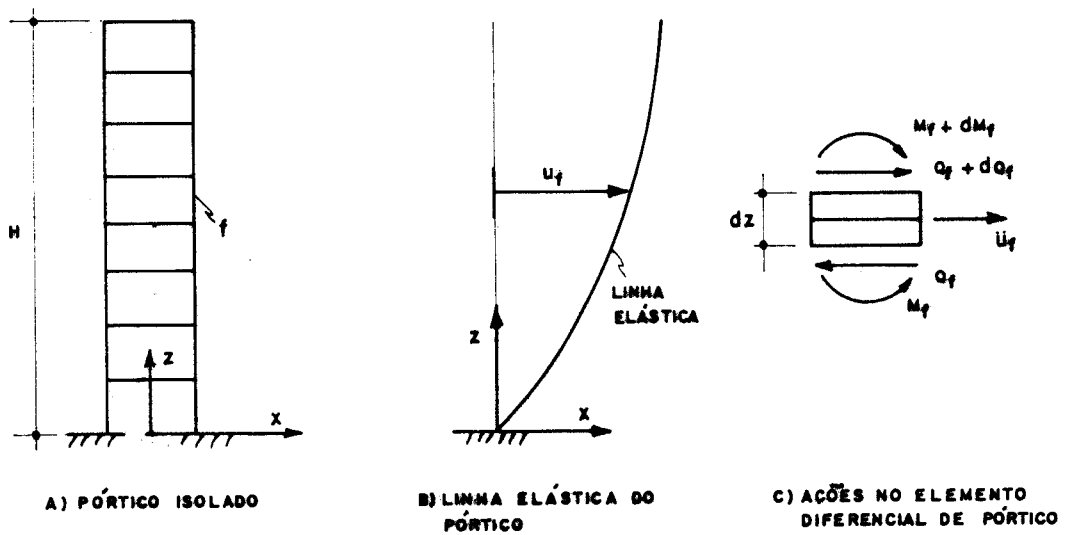


FIG. II-3 - PÓRTICO ISOLADO

Para p \ddot{o} rticos regulares (onde a rigidez dos pilares n \tilde{a} o \tilde{e} exageradamente maior do que a das vigas, o que permite, a menos de pequenas discrep \hat{a} ncias, admitir momentos fletores nulos nos centros dos v \tilde{a} os de vigas e pilares) o valor da rigidez s_f pode ser dado (12) por:

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_1^{na} K_{pn} \frac{\sum_1^{nv} K}{\sum_1^{nb} K} \dots\dots\dots (II.16)$$

onde:

K = rela \tilde{c} o J/ ℓ do tramo de viga ou pilar considerado - ℓ = v \tilde{a} o

K_{pn} = rela \tilde{c} o J/ ℓ do tramo do pilar logo abaixo do n \tilde{o} considerado - ℓ = v \tilde{a} o

na = n \ddot{u} mero de n \tilde{o} s no andar considerado

nv = n \ddot{u} mero de vigas que concorrem no n \tilde{o} considerado ($nv = 1$ ou 2)

nb = n \ddot{u} mero de barras (vigas e pilares) que concorrem no n \tilde{o} considerado ($nb = 2, 3$ ou 4)

Uma explica \tilde{c} o sucinta da express \tilde{a} o (II.16) \tilde{e} fornecida no anexo I.

As equa \tilde{c} oes (II.15) permitem exprimir a equa \tilde{c} o de movimento para o p \ddot{o} rtico:

$$u_f^{II}(z,t) - \frac{m}{s_f} \ddot{u}_f(z,t) = 0 \quad \dots\dots\dots (II.17)$$

A solução da equação (II.17) possui a mesma forma expressa na equação (II.3). Assim sendo, a equação (II.17) permite escrever a equação de vibrações livres para os pórticos:

$$u_f^{II}(z) + \frac{m\omega^2}{s_f} u_f(z) = 0 \quad \dots\dots\dots (II.18)$$

As condições de fronteira a serem obedecidas pelas soluções da equação (II.18) são:

$$\begin{aligned} u_f(0) &= 0 \\ u_f^I(H) &= \frac{Q_f(H)}{s_f} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (II.19)$$

As condições expressas nas equações (II.19) provêm do fato de ser nulo o deslocamento na base do pórtico e também ser nula a força cortante no topo.

A solução geral da equação (II.18) é expressa por:

$$u_f(z) = C_1 \text{sen}(\alpha z) + C_2 \text{cos}(\alpha z) \quad \dots\dots\dots (II.20)$$

onde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega^2}{s_f}} \quad \dots\dots\dots (II.21)$$

Levando a solução geral expressa na equação (II.20) nas equações (II.19) têm-se:

$$C_2 = 0 \dots\dots\dots (II.22)$$

$$C_1 \cos(\alpha H) - C_2 \sin(\alpha H) = 0$$

A solução não trivial das equações (II.22) nas constantes C_1 e C_2 conduz à:

$$\det. \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\alpha H) & -\sin(\alpha H) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots (II.23)$$

O desenvolvimento do determinante expresso na equação (II.23) implica em:

$$\cos(\alpha H) = 0 \dots\dots\dots (II.24)$$

A equação trigonométrica (II.24) possui, como se sabe, as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} \alpha H &= \frac{\pi}{2} && \text{para } i = 1 \\ \alpha H &= \frac{3\pi}{2} && \text{para } i = 2 \\ &&& \dots\dots\dots (II.25) \\ \alpha H &= \frac{5\pi}{2} && \text{para } i = 3 \\ \alpha H &= \frac{2i-1}{2} \pi && \text{para } i \text{ qualquer} \end{aligned}$$

As soluções expressas nas equações (II.25) juntamente com a equação (II.21) permitem exprimir os correspondentes períodos de vibração:

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_i} = a_i \sqrt{\frac{mH^2}{s_f}} \dots\dots\dots (II.26)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4,00 & (i=1) \\ a_2 &= 1,33 & (i=2) \\ & & \dots\dots\dots (II.27) \\ a_3 &= 0,80 & (i=3) \\ a_i &= \frac{4}{2i-1} & (i \text{ qualquer}) \end{aligned}$$

As soluções expressas nas equações (II.25) levadas nas equações (II.22) permitem determinar os correspondentes nodos de vibração de pórtico. Por exemplo, assumindo $C_1 = 1$ tem-se

$$u_f = \text{sen}(az) \dots\dots\dots (II.28)$$

Na figura II-4 mostram-se os tres primeiros nodos de vibração dos pórticos, indicando-se também os correspondentes períodos.

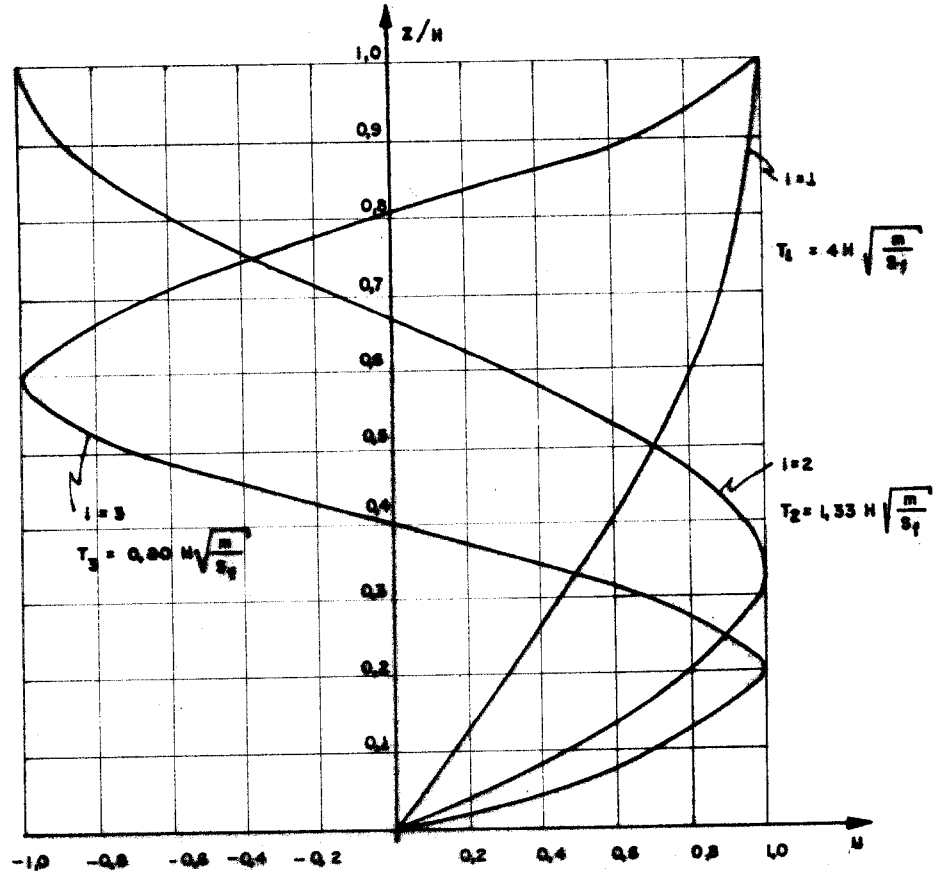


FIG. II-4 - MODOS DE VIBRAÇÃO DE PÓRTICOS

2.4. Vibrações Livres da Associação Contínua de Pórticos e Paredes

A análise das vibrações livres da associação de pórticos e paredes pela técnica do meio contínuo tem recebido muito pouco tratamento na literatura técnica (7). Admite-se constante ao longo da altura a rigidez do pórtico e da parede ($s_f = \text{cte.}$, $j_p = \text{cte.}$), o mesmo acontecendo com a massa do conjunto por unidade de altura ($m = \text{cte.}$). Des-

sa forma, com os sentidos positivos mostrados na figura II-5 e impondo-se que a elástica do conjunto seja respeitada pelo pórtico e pela parede ($u_f = u_p = u_{pf}$), têm-se as seguintes relações:

$$Q_{pf} = Q_p + Q_f$$

$$Q_{pf}^I = m \ddot{u}_{pf}$$

$$u_{pf}^{II} = \frac{M_p}{J_p} \dots \dots \dots (II.29)$$

$$u_{pf}^I = \frac{Q_f}{s_f}$$

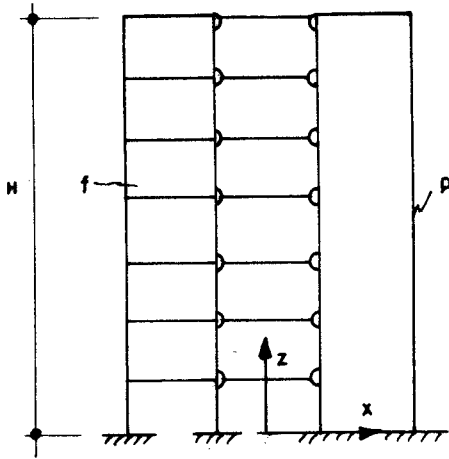
$$M_p^I = -Q_p$$

As equações (II.29) permitem escrever a equação de movimento para o conjunto:

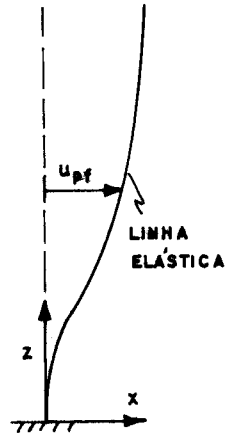
$$u_{pf}^{IV}(z,t) - \frac{s_f}{J_p} u_{pf}^{II}(z,t) + \frac{m}{J_p} \ddot{u}_{pf}(z,t) = 0 \quad (II.30)$$

A solução da equação (II.30) é também análoga à expressa na equação (II.3); podendo, pois, escrever a equação das vibrações livres da associação de pórtico e parede na forma:

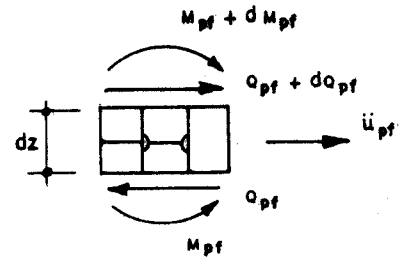
$$u_{pf}^{IV}(z) - \frac{s_f}{J_p} u_{pf}^{II}(z) - \frac{m\omega^2}{J_p} u_{pf}(z) = 0 \quad \dots (II.31)$$



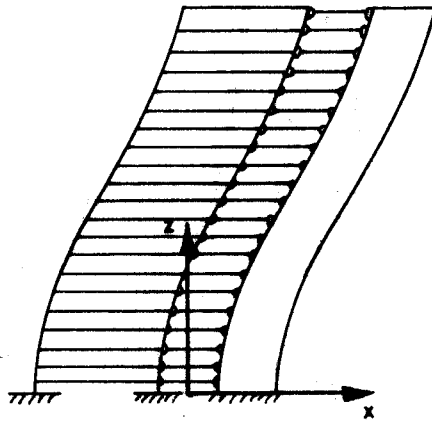
a) ASSOCIAÇÃO CONTÍNUA DE PÓRTICOS E PAREDES



b) LINHA ELÁSTICA DO CONJUNTO



c) AÇÕES NO ELEMENTO DIFERENCIAL DO CONJUNTO



d) ELÁSTICA COMUM PARA PÓRTICO E PAREDE

FIG. II.5 — ASSOCIAÇÃO CONTÍNUA DE PÓRTICOS E PAREDES

As condições de fronteira a serem obedecidas pelas soluções da equação (II.31) são:

$$\begin{aligned}
 u_{pf}(0) &= 0 \\
 u_{pf}^I(0) &= 0 \\
 &\dots\dots\dots (II.32) \\
 u_{pf}^{II}(H) &= \frac{M_p(H)}{J_p} = 0 \\
 u_{pf}^{III}(H) - \frac{s_f}{J_p} u_{pf}^I(H) &= \frac{-Q_{pf}(H)}{J_p} = 0
 \end{aligned}$$

As condições de fronteira expressas nas equações (II.32) provêm do fato de serem nulos na base ($z=0$) o deslocamento e o giro (respeitando a vinculação da parede $u_{pf}^I = u_p^I = 0$) e que também são nulos no topo ($z=H$) o momento na parede e a força cortante no conjunto. A quarta das equações (II.32) indica haver um intercâmbio por força concentrada entre o pórtico e a parede no topo, pois, sob outra forma, a tal equação indica ser $Q_p(H) = -Q_f(H)$. Uma discussão mais detalhada sobre esse fato pode ser encontrada em STAMATO (12).

A solução geral da equação (II.31) tem a forma:

$$u_{pf}(z) = C_1 \sinh(\alpha z) + C_2 \cosh(\alpha z) + C_3 \sin(\beta z) + C_4 \cos(\beta z)$$

..... (II.33)

onde:

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{s_f}{2j_p}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{j_p}} + \frac{s_f}{2j_p}} \dots\dots\dots (II.34)$$

$$\beta = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{s_f}{2j_p}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{j_p}} - \frac{s_f}{2j_p}}$$

Tomando os parâmetros adimensionais

$$\lambda_1 = \alpha H \dots\dots\dots (II.35)$$

$$\lambda_2 = \beta H$$

as equações (II.34) permitem escrever as relações

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \lambda^2 \dots\dots\dots (II.36)$$

$$\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{m\omega^2}{j_p} H^4 \dots\dots\dots (II.37)$$

onde:

$$\lambda = H \sqrt{\frac{s_f}{j_p}} \dots\dots\dots (II.38)$$

A equação (II.37) permite escrever a expressão dos períodos de vibração da associação de pórtico e parede:

$$T_{pf} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda_1 \lambda_2} H^2 \sqrt{\frac{m}{j_p}} \dots\dots\dots (II.39)$$

Levando a solução geral dada pela equação (II.33) nas equações (II.32), tendo em vista as equações (II.35), têm-se:

$$C_2 + C_4 = 0$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (II.40)$$

$$\lambda_1^2 \operatorname{senh}(\lambda_1) C_1 + \lambda_1^2 \operatorname{cosh}(\lambda_1) C_2 - \lambda_2^2 \operatorname{sen}(\lambda_2) C_3 - \lambda_2^2 \operatorname{cos}(\lambda_2) C_4 = 0$$

$$\lambda_2 \operatorname{cosh}(\lambda_1) C_1 + \lambda_2 \operatorname{senh}(\lambda_1) C_2 - \lambda_1 \operatorname{cos}(\lambda_2) C_3 + \lambda_1 \operatorname{sen}(\lambda_2) C_4 = 0$$

A solução não trivial das equações (II.40) nas constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 conduz a:

$$\det. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 \operatorname{senh}(\lambda_1) & \lambda_1^2 \operatorname{cosh}(\lambda_1) & -\lambda_2^2 \operatorname{sen}(\lambda_2) & -\lambda_2^2 \operatorname{cos}(\lambda_2) \\ \lambda_2 \operatorname{cosh}(\lambda_1) & \lambda_2 \operatorname{senh}(\lambda_1) & -\lambda_1 \operatorname{cos}(\lambda_2) & \lambda_1 \operatorname{sen}(\lambda_2) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (II.41)$$

O desenvolvimento do determinante expresso na equação (II.41) implica em:

$$2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \operatorname{cosh}(\lambda_1) \operatorname{cos}(\lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \operatorname{senh}(\lambda_1) \operatorname{sen}(\lambda_2) = 0 \quad \dots\dots (II.42)$$

As soluções da equação transcendente (II.42), para valores de λ variando de zero a dez, relativas aos tres primeiros modos de vibração, bem como os correspondentes valores de:

$$a_i = \frac{2\pi}{\lambda_1 \lambda_2} \dots\dots\dots (II.43)$$

encontram-se na tabela II-1. Os valores de a_i arroladas na tabela II-1 foram lançados nos gráficos da figura II-6.

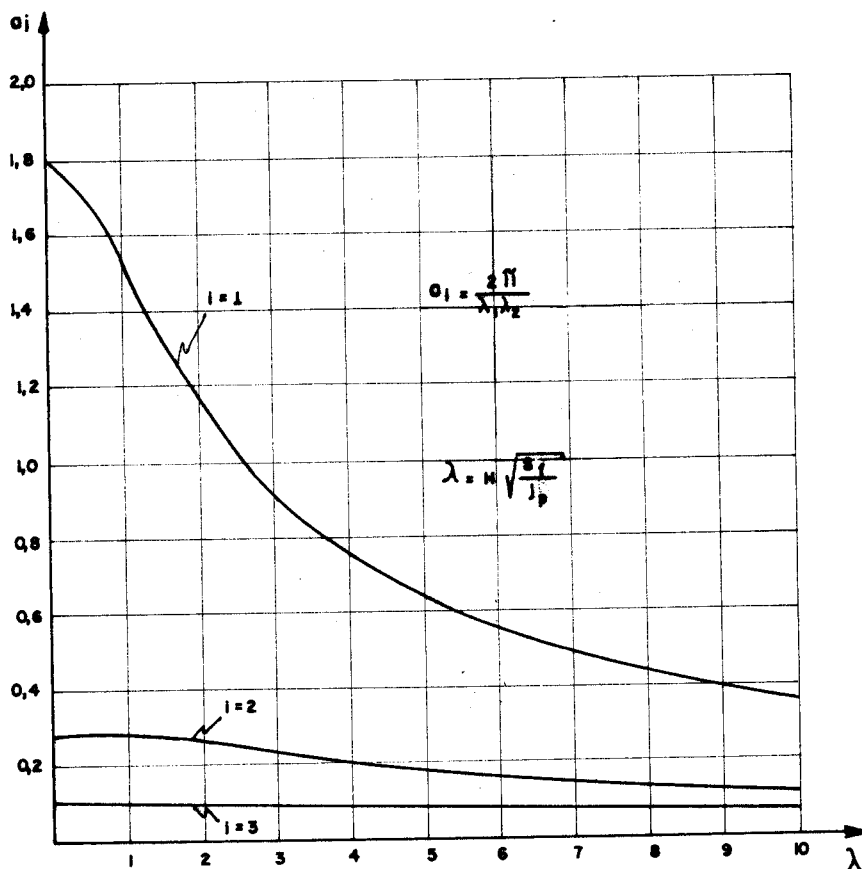


FIG. II - 6 - VALORES DE a_i (i=1,2,3)

TABELA II-1

VALORES DE λ_1 , λ_2 e a_i

λ	i = 1			i = 2			i = 3		
	λ_1	λ_2	a_1	λ_1	λ_2	a_2	λ_1	λ_2	a_3
0,0	1,87	1,87	1,80	4,69	4,69	0,286	7,85	7,85	0,102
0,5	1,94	1,88	1,72	4,73	4,70	0,283	7,85	7,86	0,102
1,0	2,16	1,91	1,52	4,81	4,71	0,277	7,92	7,86	0,101
1,5	2,44	1,93	1,33	4,97	4,74	0,267	8,01	7,87	0,0997
2,0	2,79	1,94	1,16	5,18	4,78	0,254	8,13	7,88	0,0981
2,5	3,16	1,94	1,02	5,43	4,82	0,240	8,29	7,90	0,0959
3,0	3,57	1,93	0,912	5,71	4,86	0,226	8,47	7,92	0,0937
3,5	3,99	1,92	0,820	6,02	4,90	0,213	8,68	7,94	0,0912
4,0	4,43	1,91	0,743	6,35	4,93	0,201	8,87	7,96	0,0894
4,5	4,88	1,89	0,681	6,70	4,96	0,189	9,17	7,99	0,0858
5,0	5,34	1,87	0,629	7,06	4,99	0,178	9,44	8,01	0,0831
5,5	5,80	1,85	0,586	7,44	5,01	0,169	9,73	8,03	0,0804
6,0	6,28	1,84	0,544	7,82	5,02	0,160	10,04	8,05	0,0777
6,5	6,75	1,81	0,514	8,22	5,03	0,152	10,36	8,07	0,0752
7,0	7,23	1,80	0,483	8,63	5,04	0,144	10,70	8,09	0,0726
7,5	7,71	1,79	0,455	9,04	5,05	0,138	11,05	8,11	0,0701
8,0	8,19	1,77	0,433	9,46	5,05	0,132	11,40	8,12	0,0679
8,5	8,68	1,76	0,411	9,98	5,05	0,126	11,77	8,14	0,0656
9,0	9,17	1,75	0,391	10,32	5,05	0,121	12,14	8,15	0,0635
9,5	9,66	1,74	0,374	10,76	5,05	0,116	12,52	8,16	0,0615
10,0	10,15	1,73	0,358	11,20	5,04	0,111	12,91	8,17	0,0596

Os modos de vibração correspondentes às soluções da equação (II.42) obtêm-se substituindo tais soluções nas equações (II-40). Assumindo, por exemplo, $C_4 = -1$ nas equações (II-40), têm-se:

$$u_{pf} = \frac{\lambda_1^2 \cosh(\lambda_1) + \lambda_2^2 \cos(\lambda_2)}{\lambda_1^2 \sinh(\lambda_1) + \lambda_1 \lambda_2 \sin(\lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin\left(\frac{\lambda_2 z}{H}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_1 z}{H}\right) \right) + \cosh\left(\frac{\lambda_1 z}{H}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_2 z}{H}\right) \dots\dots\dots (II.44)$$

A figura II-7 mostra os tres primeiros modos de vibração de uma associação de pòrtico e parede com $\lambda = 0, 5$ e 10 , indicando-se também os correspondentes períodos de vibração dados por:

$$T_{pf} = a_i H^2 \sqrt{\frac{\pi}{j_p}} \dots\dots\dots (II.45)$$

em virtude das equações (II-39) e (II-43). A figura mostra também os 3 primeiros modos de vibração de pòrtico.

Algumas relações interessantes são discutidas no que se segue.

Admitindo-se pòrtico e parede isolados, a relação entre os seus correspondentes períodos de vibração, supondo a mesma massa uniformemente distribuída em ambos os painéis, é dada por:

$$\rho_{p/f} = \frac{T_p}{T_f} = \frac{a_i(p)}{a_i(f)} \lambda \dots\dots\dots (II.46)$$

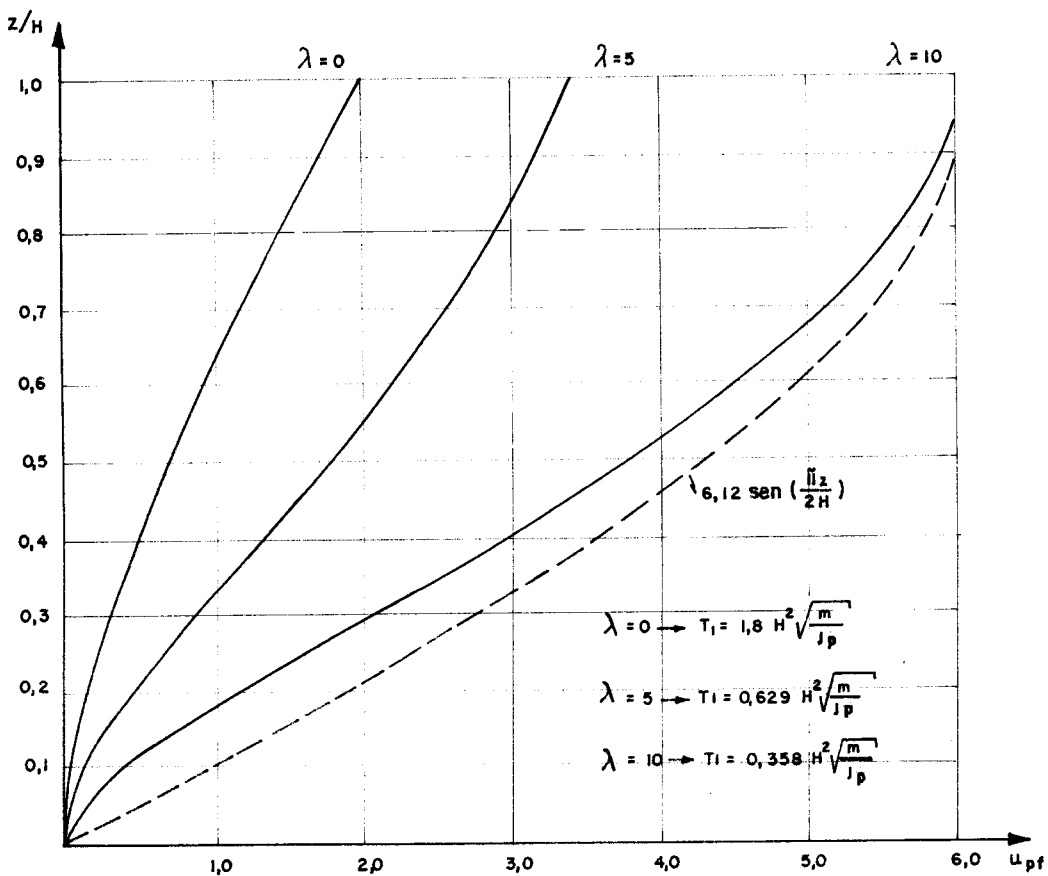


FIG. II - 7 a) PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO

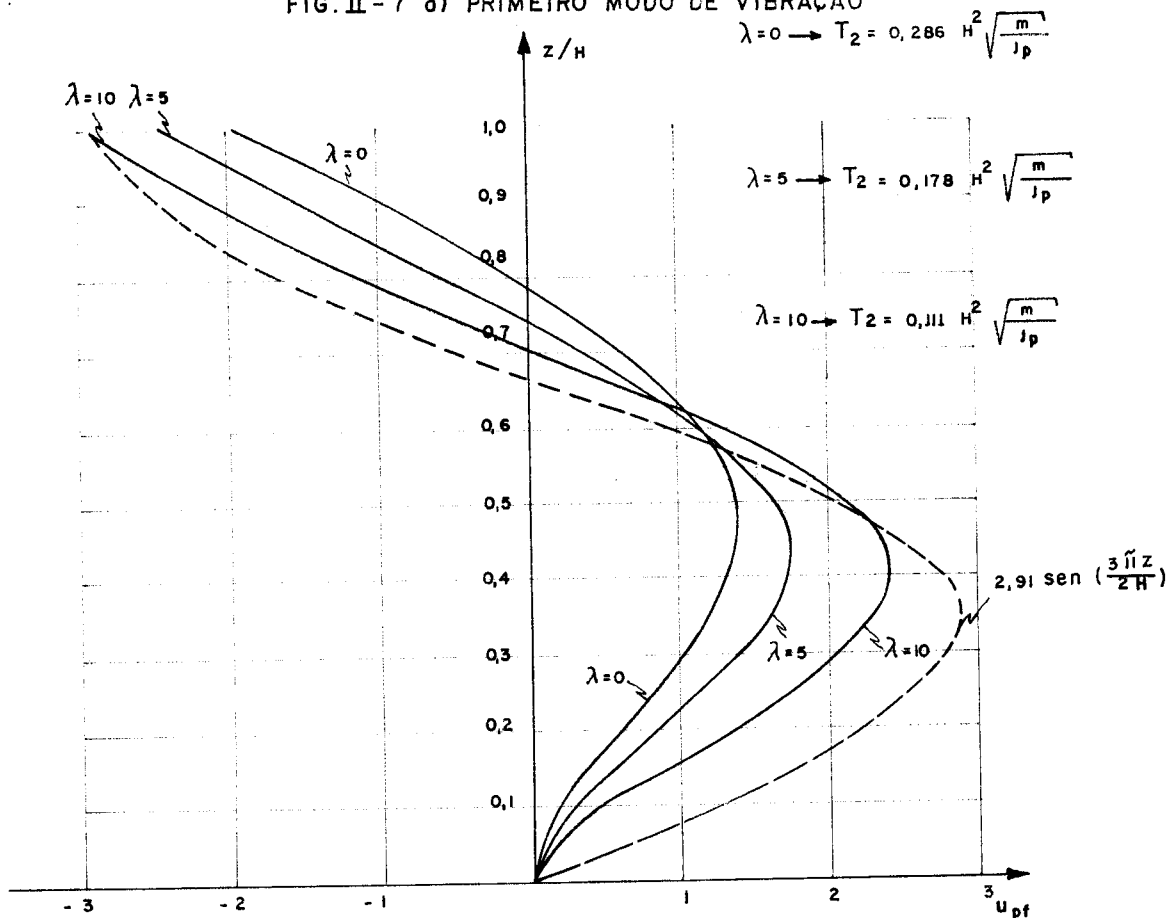


FIG. II - 7 - b) SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO

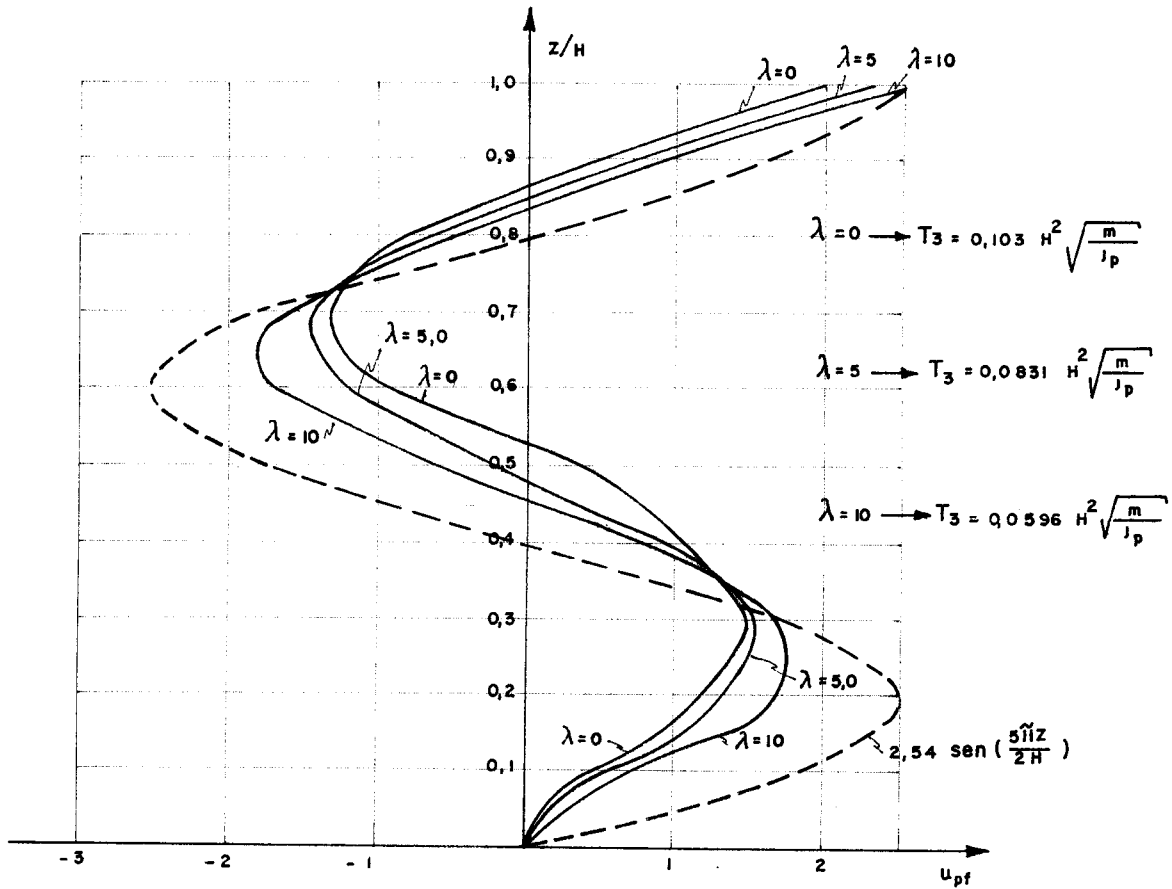


FIG. II-7-C) TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO

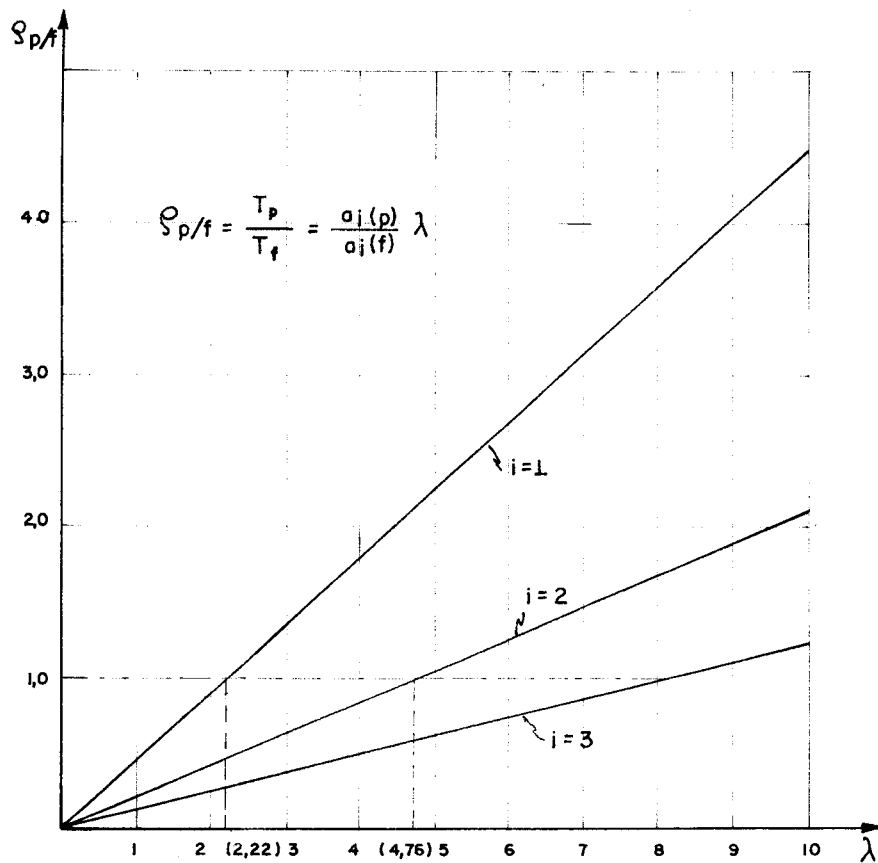


FIG II.8 - VALORES DE $\sigma_{p/f}$

Os valores da relação expressa na equação (II.46), para os três primeiros modos de vibração, foram lançados nos gráficos da figura II-8..

Os gráficos da figura II-8 exibem um aspecto interessante, ou seja, com o aumento de λ , parâmetro êsse que indica, de certa forma, uma relação entre a rigidez do pórtico e da parede (vide eq.(II.38)), aumenta-se, como era de se esperar, a relação expressa na equação (II.46). Indicam-se na figura II-8 os valores $\lambda = 2,22$ e $\lambda = 4,76$ que correspondem, respectivamente, a pórtico e parede com o mesmo primeiro período de vibração e a pórtico e parede com o mesmo segundo período de vibração. Tal fato ocorre também para o terceiro período de vibração com λ da ordem de 8,0. Convém salientar que nesses particulares valores de λ , que correspondem a pórtico e parede com o mesmo período de vibração, não ocorre, naturalmente, o mesmo modo de vibração (vide eqs.(II.14) e (II.28)).

A relação entre os períodos de vibração do pórtico suposto isolado, e da associação de pórtico e parede, admitindo a mesma massa por unidade de altura em ambos os painéis, é dada por:

$$\rho_{pf/f} = \frac{T_{pf}}{T_f} = \frac{a_{i(pf)}}{a_{i(f)}} \lambda \quad \dots\dots\dots (II.47)$$

Os valores da relação expressa na equação (II.47), correspondentes aos tres primeiros modos de vibração, foram lançadas nos gráficos da figura II-9.

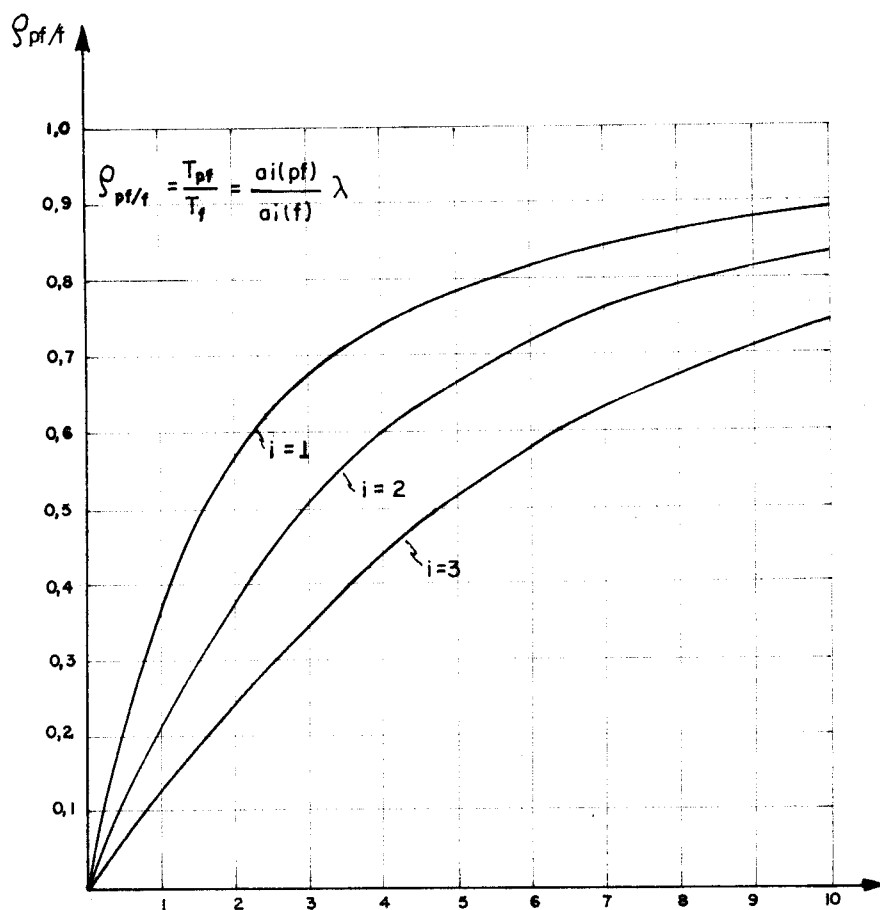


FIG. II - 9 - VALORES DE $\rho_{pf/f}$

Na figura II-9 verifica-se também um fato esperado. O aumento do valor de λ implica num aumento da relação entre os períodos de vibração $\rho_{pf/f}$, principalmente com relação ao primeiro período de vibração, no qual para λ acima de 4 verifica-se $\rho_{pf/f}$ próximo da unidade; ou seja, o primeiro período de vibração do pórtico suposto isolado é praticamente o mesmo da associação do pórtico à parede. Convém salientar que para valores grandes de λ a rigidez do pórtico predomina sobre a rigidez da parede, indicando, de certa forma, que a rigidez do conjunto tende

para a rigidez do pórtico; daí o comportamento observado nos gráficos da figura II-9 e também na figura II-7 (ver curva tracejada).

Finalmente, a relação entre os períodos de vibração da parede suposta isolada e da associação de pórtico e parede, assumindo a mesma massa por unidade de altura em ambos os painéis, é dada por:

$$\rho_{pf/p} = \frac{T_{pf}}{T_p} = \frac{a_i(pf)}{a_i(p)} \dots\dots\dots (II.48)$$

os valores da relação expressa na equação (II.48) correspondentes aos tres primeiros períodos de vibração foram lançados nos gráficos da figura II-10.

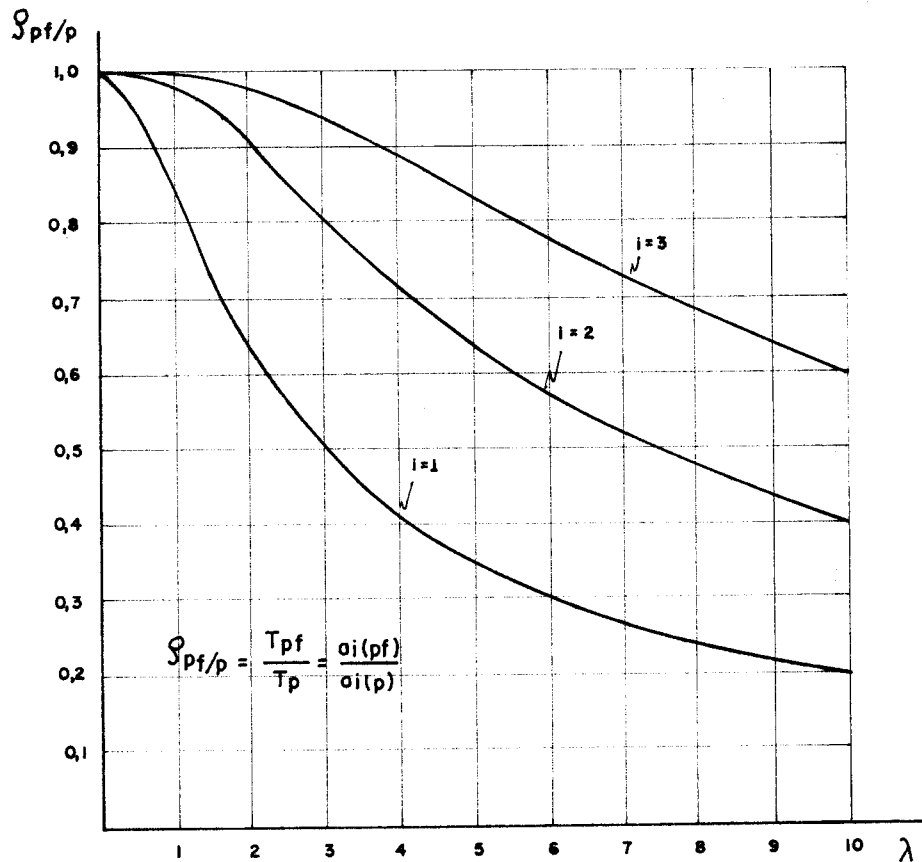


FIG. II-10 - VALORES DE $S_{pf/p}$

A figura II-10 indica que nos modos mais altos de vibração a relação ρ_{pf}/p permanece próxima da unidade para λ no intervalo de apresentado. Este fato pode ser mais facilmente explicado com as seguintes considerações:

" Para os modos mais altos de vibração, que correspondem a frequências angulares mais elevadas, pode se admitir:

$$\frac{m\omega^2}{j_p} + \left(\frac{s_f}{2j_p}\right)^2 = \frac{m\omega^2}{j_p} \dots\dots\dots (II.49)$$

Assim sendo, as equações (II.34) junto com as equações (II.35) permitem escrever

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{j_p}} = \lambda^* \dots\dots\dots (II.50)$$

Levando a expressão (II.50) na equação (II.42) tem-se finalmente:

$$\cosh(\lambda^*) \cos(\lambda^*) + 1 = 0 \dots\dots\dots (II.51)$$

Note-se que são idênticas as equações (II.51) e (II.10), ficando, assim, evidente que nos modos de vibração mais altos a parede suposta isolada e a associação de pórtico e parede possuem períodos de vibração muito próximos. Tal fato indica haver pouca contribuição do pórtico para o conjunto nos modos mais elevados de vibração "

A análise das vibrações livres da associação de pórticos e paredes do modo exposto é comum para diversos outros painéis deformáveis ao momento fletor e à força cortante como, por exemplo, os mostrados na figura II-11. Conforme já foi aventado, tais painéis têm comportamento descrito, na técnica do meio contínuo, por equações diferenciais similares.

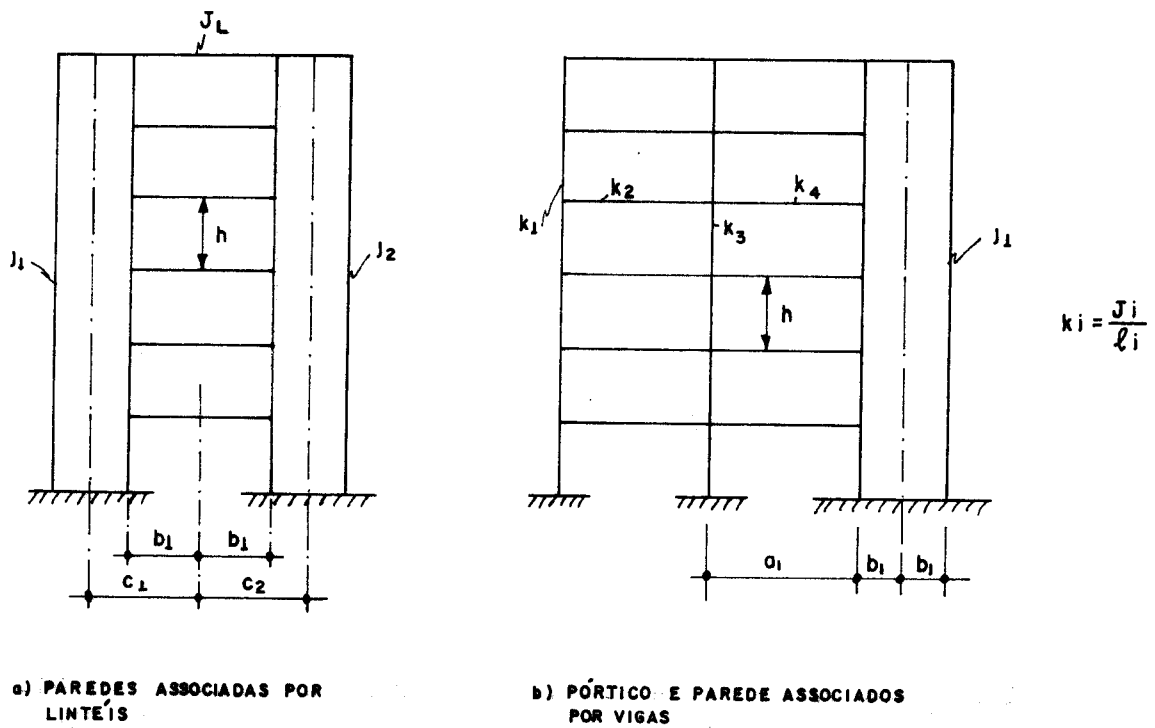


FIG. II. 11 - PAINÉIS DEFORMÁVEIS POR FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR.

De acordo com MANCINI (14) os parâmetros s_f e j_p para os painéis mostrados na figura II-11, cujo tratamento encontra-se sucintamente exposto nos anexos II e III deste trabalho, são:

a) Associação de Paredes por Lintéis

$$s_f = \frac{3E}{h} \left[J_L \frac{(C_1 + C_2)^2}{b_1^3} \right]$$

$$j_p = j_1 + j_2 \quad \dots\dots\dots (II.52)$$

onde (vide notação na fig. II-11 a)):

J_L = momento de inércia da seção transversal do lintel.

b) Pórtico e Parede Associados por Vigas

$$s_f = p_1 + p_2$$

$$j_p = j_1 \quad \dots\dots\dots (II.53)$$

onde (vide notação na fig. II-11 b))

$$p_1 = \frac{EK}{h} \left[4 + 2\beta + \frac{3b_1}{a_1} \left(2 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) \right]$$

$$p_2 = \frac{12E}{h} \left[K_1(1-\alpha) + K_3(1-\beta) \right] \quad \dots\dots\dots (II.54)$$

com

$$\alpha = \frac{12(K_3 - K_1 \theta) - 2K_4(1 + 3b_1/2a_1)}{2K_2 - \theta(12K_1 + 4K_2)}$$

$$\beta = \frac{12K_1 - \phi[12K_3 - 2K_4(1 + 3b_1/2a_1)]}{2K_2 - \phi(12K_3 + 4K_2 + 4K_4)}$$

..... (II.54)

$$\theta = \frac{12K_3 + 4K_2 + 4K_4}{2K_2}$$

cont.

$$\phi = \frac{12K_1 + 4K_2}{2K_2}$$

CAPÍTULO III

VIBRAÇÕES LIVRES DA ASSOCIAÇÃO CONTÍNUA DE PAINÉIS
DE CONTRAVENTAMENTO

3.1. INTRODUÇÃO

A aplicação da técnica do meio contínuo à análise das vibrações livres da associação tridimensional de painéis de contraventamento conduz a um sistema de equações diferenciais lineares. A solução desse sistema de equações é imediata nos casos de associação só contendo pórticos, ou só contendo paredes, ou, também, nos casos onde a simetria da associação permite uma diagonalização do sistema de equações. Nos demais casos, a solução daquele sistema de equações não é imediata, e, além disso, uma solução exata apresenta remotas possibilidades de ser alcançada. Sugere-se para tais casos uma solução aproximada fazendo uso das séries de potências, cuja grande vantagem consiste no fato de permitir uma avaliação do erro cometido (15). Soluções aproximadas podem também ser obtidas aplicando-se os métodos RITZ-GALERKIN (16) e STODOLA-VIANELLO (17), que são também apropriados para os casos em questão.

A associação tridimensional de painéis de contraventamento pode conter eventuais paredes de seção aberta como a mostrada na figura III-1a). Uma parede de seção a-

berta pode ser substituída por duas paredes planas independentes (fig. III-1b) passando pelo centro de torção C_t , e-
quivalentes no que respeita à flexão, orientadas segundo os eixos principais da seção, possuindo produtos de inércia j_1 e j_2 correspondentes aos momentos principais de inércia. A essas paredes planas deve se acrescentar, ainda, uma "mola" que recebe torção possuindo coeficientes de rigidez j_t e j_{ft} obtidos, respectivamente, pela teoria de Saint-Venant e pela teoria de flexo-torção (19).

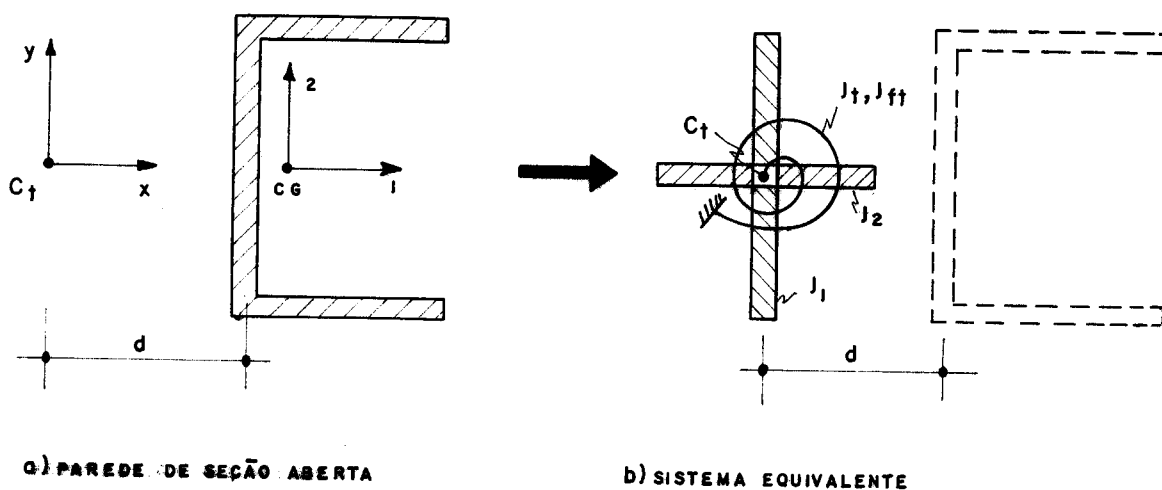


FIG. III - 1 - PAREDE DE SEÇÃO ABERTA E SISTEMA EQUIVALENTE

3.2. Hipóteses e Convenções

A figura III-2 esquematiza em planta a estrutura de um edifício obtida pela associação de diversos tipos básicos de painéis. Admite-se que a disposição dos painéis em planta repete-se identicamente em todas os andares. Admite-se também que os painéis possuam rigidez constante ao longo da altura. Omitem-se naquela figura as eventuais paredes de seção aberta supondo-as já substituídas pelos sistemas estruturais equivalentes mencionados no parágrafo anterior.

Ligando os vários painéis supõe-se existir uma infinidade de diafragmas horizontais desprovidas de rigidez transversal, porém rígidas em seus planos, uniformemente distribuídas ao longo da altura. Tais diafragmas simulam, na técnica do meio contínuo, o número discreto de lajes existentes na estrutura real. Percebe-se facilmente que esse procedimento conduz a melhores resultados quando o número de andares é bastante elevado.

Um sistema de referência dextrorso $OXYZ$ é adotado com os eixos horizontais OX e OY na base do edifício. A posição do centro de massa em cada nível é caracterizada pelas suas coordenadas a e b , respectivamente, segundo os eixos OX e OY , supostas constantes ao longo da altura. Para caracterizar a posição de cada painel é convencionalmente (fig. III-2) um versor horizontal no plano do painel. Tal versor, por outro lado, caracteriza-

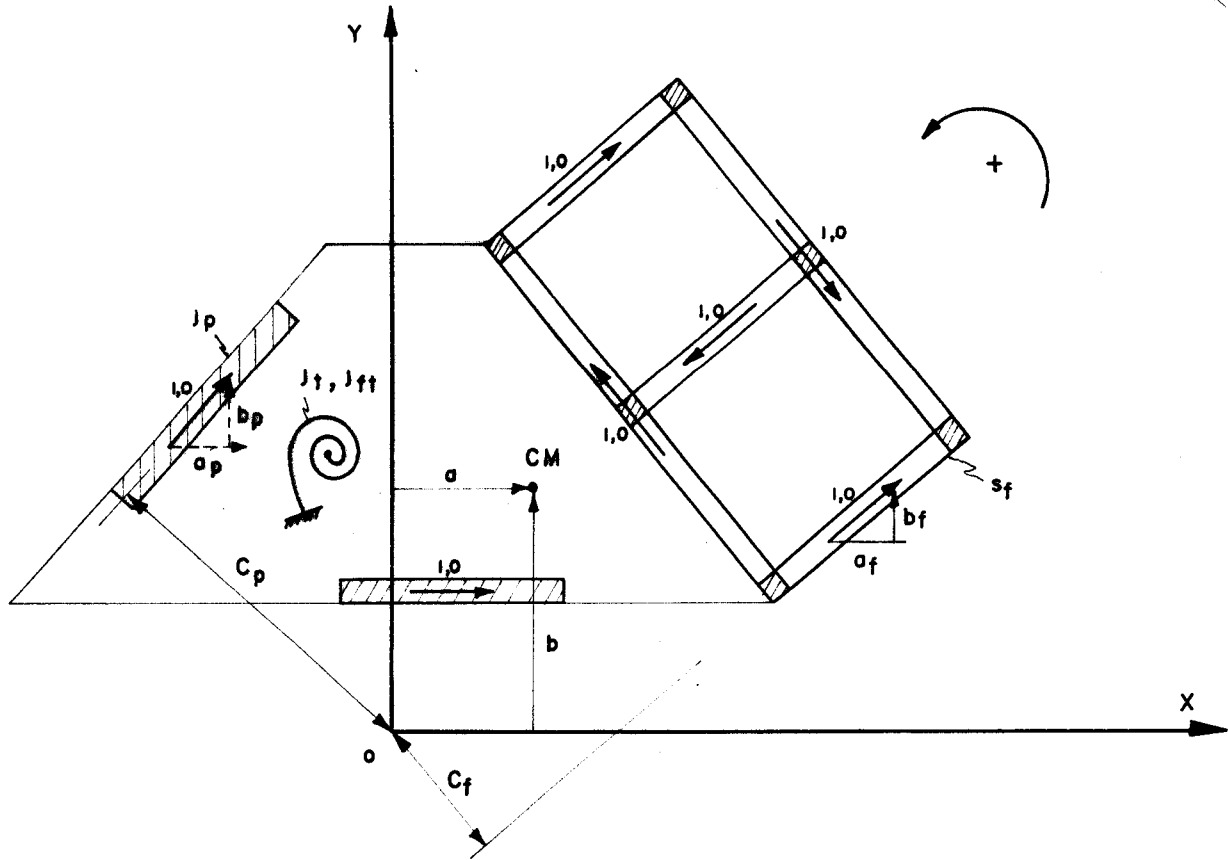


FIG. III - 2 - ASSOCIAÇÃO GERAL DE TIPOS BÁSICOS DE PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

-se pelas suas coordenadas a , b e c , indexadas conforme tratar-se de parede ou pórtico, sendo a e b componentes do versor, respectivamente, segundo os eixos OX e OY e c a distância do versor ao eixo OZ , convencionada positiva se for dextrorso o momento do versor em relação ao eixo OZ .

No plano do painel usa-se um sistema local de referência oxz com o eixo horizontal ox na base do painel,

coincidindo em direção e sentido com o versor convencional para o painel. Os esforços e deslocamentos no plano do painel seguem no sistema de referência oxz as mesmas convenções já estabelecidas no capítulo II.

No sistema global de referência $OXYZ$, o eixo vertical OZ encontra o diafragma genérico de cota Z em um ponto O_z . Os deslocamentos incógnitos do diafragma genérico são as seguintes funções de Z :

u = deslocamento de O_z segundo OX

V = deslocamento de O_z segundo OY

W = rotação do diafragma genérico em torno de OZ
(positiva no sentido dextrorso).

3.3. Equações Básicas

As relações existentes entre os deslocamentos do conjunto U, V e W (sistema de referência $OXYZ$) e os deslocamentos dos painéis u ou w (sistema de referência oxy), indicadas conforme tratar-se de parede, pórtico ou "mola" de torção, respeitando a indeformabilidade dos diafragmas em seus planos, são expressas por:

$$u_f = a_f U + b_f V + c_f W$$

$$u_p = a_p U + b_p V + c_p W \quad \dots\dots\dots (III.1)$$

$$w_t = W$$

A força cortante no pórtico e na parede, de acordo com o exposto no capítulo II, é dada, respectivamente, por:

$$Q_f = s_f u_f^I$$

$$Q_p = -j_p u_p^{III}$$

..... (III.2)

O momento torçor na "mola" de torção é obtido, somando-se o momento de torção livre M_t (Saint-Venant) ao momento de flexo-torção M_{ft} (teoria da flexo-torção), ou seja:

$$T_t = M_t + M_{ft} \quad \text{..... (III.3)}$$

onde, de acordo com a teoria de torção de Saint-Venant e a teoria de flexo-torção, têm-se, respectivamente:

$$M_t = j_t w_t^I$$

$$M_{ft} = -j_{ft} w_t^{III}$$

..... (III.4a)

Sendo:

$$j_t = GJ_t$$

$$j_{ft} = EJ_{ft}$$

..... (III.4b)

Os esforços solicitantes no conjunto estão relacionados com os esforços solicitantes nos painéis por meio das expressões (vide figura III-3):

$$\begin{aligned}
 Q_X &= \sum_f Q_f a_f + \sum_p Q_p a_p \\
 Q_Y &= \sum_f Q_f b_f + \sum_p Q_p b_p \quad \dots\dots\dots (III.5) \\
 M_Z &= \sum_f Q_f c_f + \sum_p Q_p c_p + \sum_t T_t
 \end{aligned}$$

onde as somatórias são estendidas a todos os pórticos, paredes ou "molas" de torção do conjunto, conforme indica-se, respectivamente, por f, p ou t.

Levando as equações (III.1) nas equações (III.2) e (III.4a) têm-se:

$$\begin{aligned}
 Q_f &= s_f (a_f U^I + b_f V^I + c_f W^I) \\
 Q_p &= -j_p (a_p U^{III} + b_p V^{III} + c_p W^{III}) \\
 M_t &= j_t V^I \\
 M_{ft} &= -j_{ft} U^{III} \quad \dots\dots\dots (III.6)
 \end{aligned}$$

Levando, agora, as equações (III.6) nas equações (III.5) resulta a seguinte equação matricial:

$$\{Q\} = -[J] \{D^{III}\} + [S] \{D^I\} \dots\dots\dots (III.7)$$

onde:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III.8)$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III.9)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} \\ J_{ab} & J_{bb} & J_{bc} \\ J_{ac} & J_{bc} & J_{cc}^* \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.10)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} \\ S_{ab} & S_{bb} & S_{bc} \\ S_{ac} & S_{bc} & S_{cc}^* \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.11)$$

com:

$$J_{k\ell} = \sum_p j_p^k j_p^\ell \dots\dots\dots (III.12)$$

$$S_{kl} = \sum_f s_{f f}^{k l} \dots \dots \dots (III.13)$$

sendo k e l qualquer uma das coordenadas a, b ou c usadas para caracterizar a posição dos painéis. E sendo:

$$J_{cc}^* = J_{cc} + \sum_t j_{ft} \dots \dots \dots (III.14)$$

$$S_{cc}^* = S_{cc} + \sum_t j_t \dots \dots \dots (III.15)$$

Os deslocamentos do centro de massa em um dado nível, U_{CM} e V_{CM} , estão relacionados com os deslocamentos do conjunto U, V e W, no mesmo nível, através das expressões:

$$\begin{aligned} U_{CM} &= U - Wb \\ &\dots \dots \dots (III.16) \\ V_{CM} &= V + Wa \end{aligned}$$

A equação (III.7) permite escrever as equações de movimento do conjunto, que em forma matricial são expressas por (vide equação II-1):

$$\{Q^I\} = -\{J\}\{D^{IV}\} + \{S\}\{D^{II}\} = m \{ \ddot{D}_{CM} \} \quad (III.17)$$

onde

$$\{\ddot{D}_{CM}\} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{U}_{CM} \\ \ddot{V}_{CM} \\ \frac{J_m}{m} \ddot{W} - \ddot{U}_{CM} b + \ddot{V}_{CM} a \end{array} \right\} \dots\dots\dots (III.18)$$

Substituindo \ddot{U}_{CM} e \ddot{V}_{CM} dados pelas equações (III.16) nos elementos da matriz \ddot{D}_{CM} , dada na equação (III.18), pode-se, ainda, escrever:

$$\{\ddot{D}_{CM}\} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{U} - \ddot{W} b \\ \ddot{V} + \ddot{W} a \\ (\frac{J_m}{m} + a^2 + b^2) \ddot{U} - \ddot{U} b + \ddot{V} a \end{array} \right\} \dots\dots\dots (III.19)$$

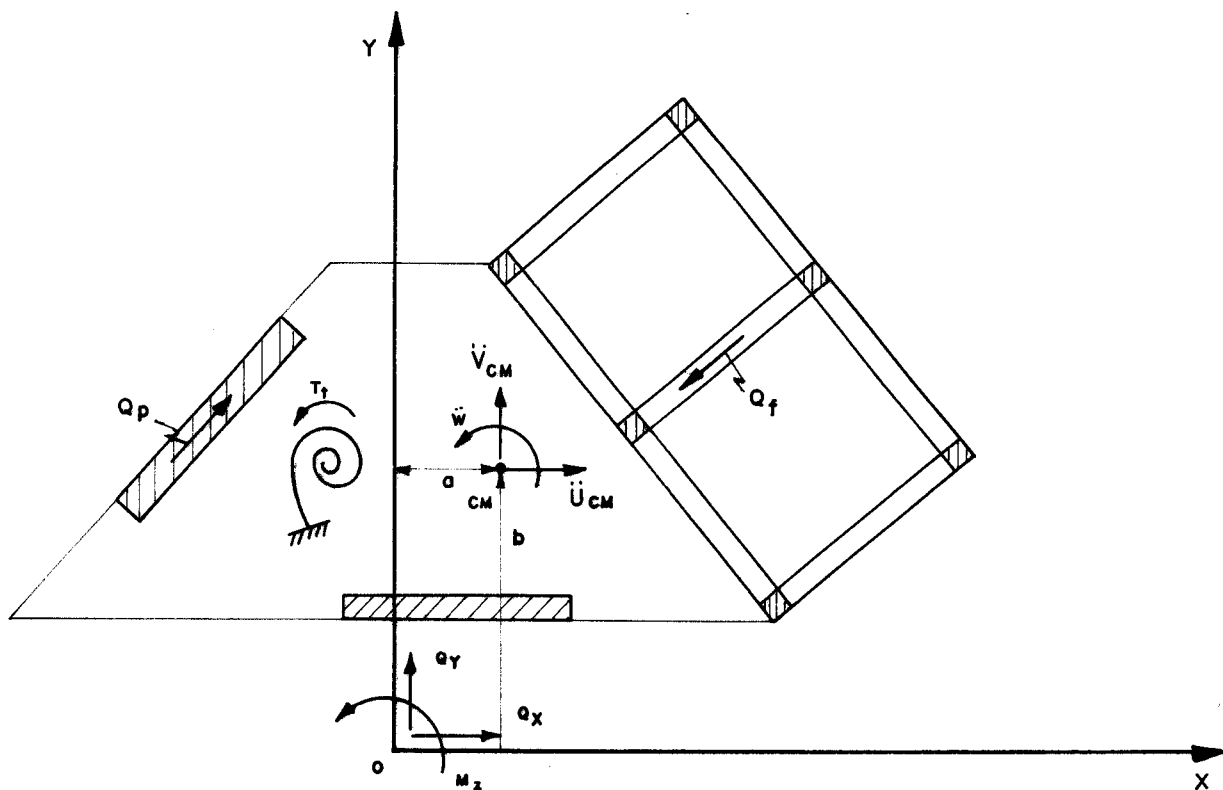


FIG. III-3 - ESFORÇOS EM EQUILÍBRIO DINÂMICO

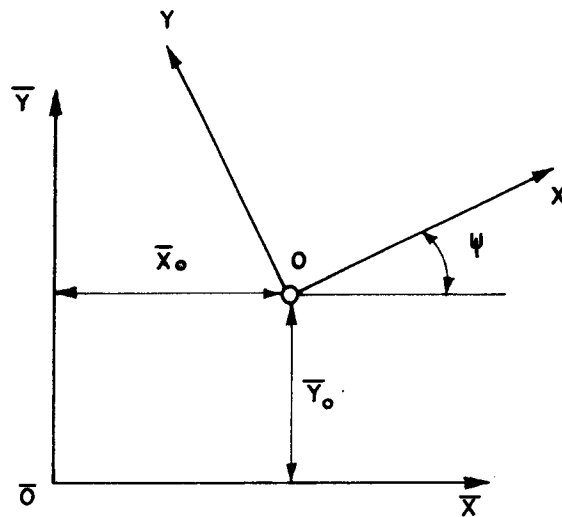


FIG. III. 4. MUDANÇA DE COORDENADAS

Convém ressaltar que os deslocamentos nessas equações são funções da coordenada Z e do tempo t . Adotando-se soluções análogas \tilde{a} da equação (II.3), obtêm-se equações análogas \tilde{a} (II.4), ou seja:

$$[J][D^{IV}] - [S][D^{II}] - \sigma [D_{CH}] = [0] \dots (III.29)$$

onde:

$$\sigma = m\omega^2 \dots\dots\dots (III.21)$$

e

$$\{D_{CH}\} = \left\{ \begin{array}{l} U - Wb \\ v - Wa \\ Wd^2 - Ub + Va \end{array} \right\} \dots\dots\dots (III.22)$$

sendo:

$$d = \sqrt{\frac{J}{m} + a^2 + b^2} \dots\dots\dots (III.23)$$

Os deslocamentos na equação (III.20) são funções somente da coordenada Z.

As condições de fronteira a serem satisfeitas pelas soluções da equação (III.20), nos casos onde não há degeneração do conjunto de paredes, ($\det [J] \neq 0$), são:

$$\begin{aligned} \{D(0)\} &= \{0\} \\ \{D^I(0)\} &= \{0\} \\ \{D^{II}(H)\} &= \{0\} \\ [J]\{D^{III}(H)\} - [S]\{D^I(H)\} &= \{0\} \end{aligned} \dots\dots\dots (III.24)$$

Convém salientar que a degeneração do conjunto de paredes, $\det [J] = 0$, acontece quando as mesmas estão contidas em planos de uma só jazetura, pois, assim sendo, o conjunto de paredes não recebe torção se a jazetura for própria, ou não recebe carga numa dada direção se a jazetura for imprópria (paredes contidas em planos paralelos).

As condições de fronteira expressas nas equações (III.24) provêm dos seguintes fatos:

- a) Deslocamentos nulos na base (1a. das eqs. (III.24)).
- b) Engastamento das paredes na base ($u_p^I(0) = 0$, 2a. das eqs.(III.24)).
- c) Momentos fletores nulos no topo das paredes ($M_p^I(H) = -j_p u_p^{II} = 0$, 3a. das eqs.(III.24)).
- d) Esforços cortantes e torçores nulos no topo do conjunto (4a. das eqs.(III.24) - vide eq.(III.7)).

As soluções da equação (III.20) possuem, como se sabe, 12 constantes de integração. Substituindo tais soluções nas equações (III.24) tem-se um sistema de equações homogêneo naquelas 12 constantes de integração. Esse sistema de equações homogêneo, por sua vez, permite determinar os auto-valores σ_i , e, daí, as frequências angulares ω_i , com os correspondentes períodos de vibração dados por:

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \dots\dots\dots (III.25)$$

Uma vez determinados os auto-valores σ_i , os correspondentes modos de vibração $\{D\}_i$ podem ser encontrados pelas equações (III.24), deixando 11 constantes de integração em função de apenas uma delas, cujo valor pode ser previamente estabelecido.

3.4. Vibrações Livres de Associação sô Contendo Pórticos

Na associação sô contendo pórticos, por serem nulos os termos $J_{k,l}$ (eq.(III.12)), o que implica em $[J] = [0]$, equação (III.10), a equação (III.20) assume a forma:

$$[S] \{D^{II}\} + \sigma \{D_{GH}\} = \{0\} \dots\dots\dots (III.26)$$

As condições de fronteira (eqs.(III.24)), por outro lado, se reduzem a:

$$\begin{aligned} \{D(0)\} &= \{0\} \\ &\dots\dots\dots (III.27) \\ \{D^I(H)\} &= \{0\} \end{aligned}$$

Conforme salienta STAMATO (12), a matriz $[S]$ pode ser diagonalizada mediante a escolha de um conveniente sistema de referência OXYZ. A origem desse particular sis

tema de referência é dada por (origem referida a um sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ arbitrariamente escolhido - vide figura III-4).

$$\bar{x}_o = \frac{S_{aa}S_{bc} - S_{ab}S_{ac}}{S_{aa}S_{bb} - S_{ab}S_{ab}} \dots\dots\dots(III.28)$$

$$\bar{y}_o = \frac{-S_{bb}S_{ac} + S_{ab}S_{bc}}{S_{aa}S_{bb} - S_{ab}S_{ab}}$$

sendo as direções dos eixos OX e OY, do citado sistema de referência, dadas por:

$$2\psi = \text{arc. tg.} \frac{2S_{ab}}{S_{aa} - S_{bb}} \dots\dots\dots(III.29)$$

onde o ângulo ψ é medido positivamente no sentido dextrorso.

Adotando o sistema de referência que diagonaliza a matriz [S], a equação (III.26) passa a escrever-se:

$$S_{aa}U^{II} + \sigma(U-Wb) = 0$$

$$S_{bb}V^{II} + \sigma(V+Wb) = 0 \dots\dots\dots(III.30)$$

$$S_{cc}W^{II} + \sigma(Wd^2 - Ub + Va) = 0$$

As equações (III.27) ficam satisfeitas tomando-se (16), (20):

$$U = C_1 \text{sen}(\alpha z)$$

$$V = C_2 \text{sen}(\alpha z) \dots\dots\dots \text{(III.31)}$$

$$W = C_3 \text{sen}(\alpha z)$$

onde

$$\alpha = \frac{2i-1}{2H} \pi \dots\dots\dots \text{(III.32)}$$

com $i = 1, 2, 3 \dots$

Substituindo os deslocamentos das equações (III.31) nas equações (III.30), tem-se:

$$(\sigma - S_{aa} \alpha^2) C_1 + (-\sigma b) C_3 = 0$$

$$(\sigma - S_{bb} \alpha^2) C_2 + (\sigma a) C_3 = 0 \dots\dots \text{(III.33)}$$

$$(-\sigma b) C_1 + (\sigma a) C_2 + (\sigma d^2 - S_{cc} \alpha^2) C_3 = 0$$

A solução não trivial das equações (III.33) nas constantes C_1 , C_2 e C_3 obtêm-se, tomando:

$$\text{det.} \begin{vmatrix} (\sigma - S_{aa} \alpha^2) & (0) & (-\sigma b) \\ (0) & (\sigma - S_{bb} \alpha^2) & (\sigma a) \\ (-\sigma b) & (\sigma a) & (\sigma d^2 - S_{cc} \alpha^2) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots \text{(III.34)}$$

O desenvolvimento do determinante expresso na equação (III.34) conduz à equação cúbica em σ :

$$(d^2 - a^2 - b^2)\sigma^3 + [S_{bb}(b^2 - d^2) + S_{aa}(a^2 - d^2) - S_{cc}]\alpha^2\sigma^2 + (S_{aa}S_{bb}d^2 + S_{aa}S_{cc} + S_{bb}S_{cc})\alpha^4\sigma - S_{aa}S_{bb}S_{cc}\alpha^6 = 0 \quad \dots (III.35)$$

A equação do terceiro grau em σ expressa na equação (III.35) possui sempre três raízes reais devido a simetria da matriz presente na equação (III.34). No anexo IV apresentam-se as fórmulas de CARDAN (23) que fornecem as raízes de uma equação cúbica.

Uma vez determinados os valores de σ pela equação (III.35), sendo tres valores de σ para cada α dado na equação (III.32), a equação (III.33) permite determinar, por exemplo, as constantes C_1 e C_2 em função de C_3 , que levadas nas equações (III.31) fornecem os correspondentes mo dos de vibração. Assumindo $C_3 = 1,0$ têm-se:

$$U = \frac{\sigma_b}{\sigma - S_{aa}\alpha^2} \text{ sen } (\alpha z)$$

$$V = \frac{\sigma_a}{S_{bb}\alpha^2 - \sigma} \text{ sen } (\alpha z) \quad \dots \dots \dots (III.36)$$

$$W = \text{sen } (\alpha z)$$

Convém observar que nos casos onde são nulos a e b , os movimentos U , V e W são independentes, e, por conseguinte, são independentes também os correspondentes modos de vibração. Em outras palavras, não existem, nesses casos, nenhuma relação entre as constantes C_1 , C_2 e C_3 . Nos casos onde somente a ou b for nulo, existe relação apenas entre as constantes C_1 e C_3 ou C_2 e C_3 respectivamente; tendo-se assim modos múltiplos de vibração nos movimentos U e W ou nos movimentos V e W , respectivamente.

1º EXEMPLO NUMÉRICO

A figura III-5 mostra em planta a estrutura de um edifício de 10 andares idênticos, igualmente espaçados por pês direito de 3,0m. Os pilares em todos os andares possuem seção de 0,3m x 0,3m. As vigas repetem-se em todos os andares com seção de 0,12m x 0,40m. Adota-se o módulo de elasticidade $E = 100\text{tf/cm}^2$ em todas as vigas e pilares. Admite-se em todas os andares uma carga distribuída $q = 1,0\text{tf/m}^2$.

Os painéis de contraventamento, todos pórticos, encontram-se numerados na figura III-5 com números dentro de pequenos círculos acompanhados do sentido adotado para o versor que caracteriza a posição do painel. Dada a simetria da estrutura, os eixos OX e OY indicados conduzem à diagonalização da matriz $[S]$.

As características dos pórticos ①, ②, ③ e ④ são:

$$J_{pil} = \frac{30 \times 30^3}{12} = 6,75 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 \quad K_{pil} = \frac{J_{pil}}{300} = 2,25 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$$

$$J_{vig} = \frac{12 \times 40^3}{12} = 6,40 \cdot 10^4 \text{ cm}^4 \quad K_{vig} = \frac{J_{vig}}{400} = 1,60 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$$

$$s_f = \frac{12 \times 100}{300} (2,11 \times 10^2) = 844 \text{ tf} \quad (\text{vide eq. (II.16)})$$

Para os pórticos ⑤, ⑥ e ⑦ encontra-se:

$$s_f = \frac{12 \times 100}{300} (3,05 \times 10^2) = 1220 \text{ tf}$$

As características do edifício são:

$$m = \frac{1,0 \times 8,0 \times 12,0}{10 \times 3,0} = 3,2 \text{ t/m}$$

(adota-se aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/seg}^2$)

$$J_m = \frac{1}{3 \times 10} \left(\frac{8 \times 12^3}{12} + \frac{12 \times 8^3}{12} \right) = 55,47 \text{ tm}$$

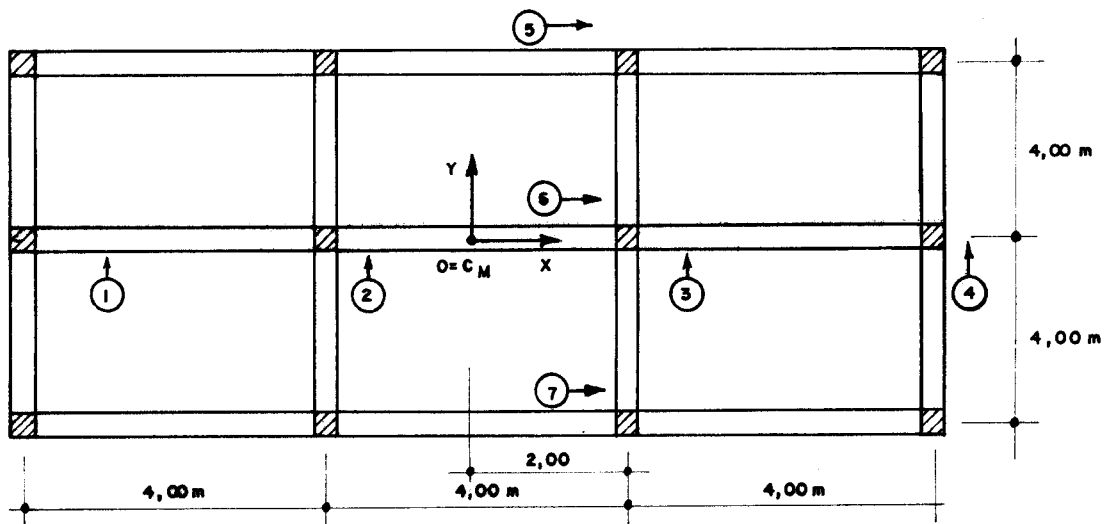
$$d^2 = \frac{J_m}{m} = 17,33 \text{ m}^2$$

$$a = b = 0 \text{ m}$$

$$S_{aa} = 3 \times 1220 = 3660 \text{ tf}$$

$$S_{bb} = 4 \times 844 = 3380 \text{tf}$$

$$S_{cc} = 2 [844(2^2 + 6^2) + 1220 \times 4^2] = 106560 \text{tf.m}^2$$



TODOS OS PILARES : 0,30 m x 0,30 m

TODAS AS VIGAS : 0,12 m x 0,40 m

FIG. III-5 - PLANTA DE UM EDIFÍCIO DE 10 ANDARES (1º EXEMPLO)

Levando esses valores na equação (III.34) tem-se:

$$(\sigma - 3660\alpha^2)(\sigma - 3380\alpha^2)(17,33\sigma - 106560\alpha^2) = 0$$

com

$$\alpha = \frac{2i-1}{2 \times 30} \pi \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Resolvendo essa equação em σ têm-se:

i = 1	i = 2	i = 3
$\sigma_1 = 10,03$	$\sigma_1 = 90,29$	$\sigma_1 = 250,85$
$\sigma_2 = 9,26$	$\sigma_2 = 83,38$	$\sigma_2 = 231,66$
$\sigma_3 = 16,85$	$\sigma_3 = 151,69$	$\sigma_3 = 421,44$

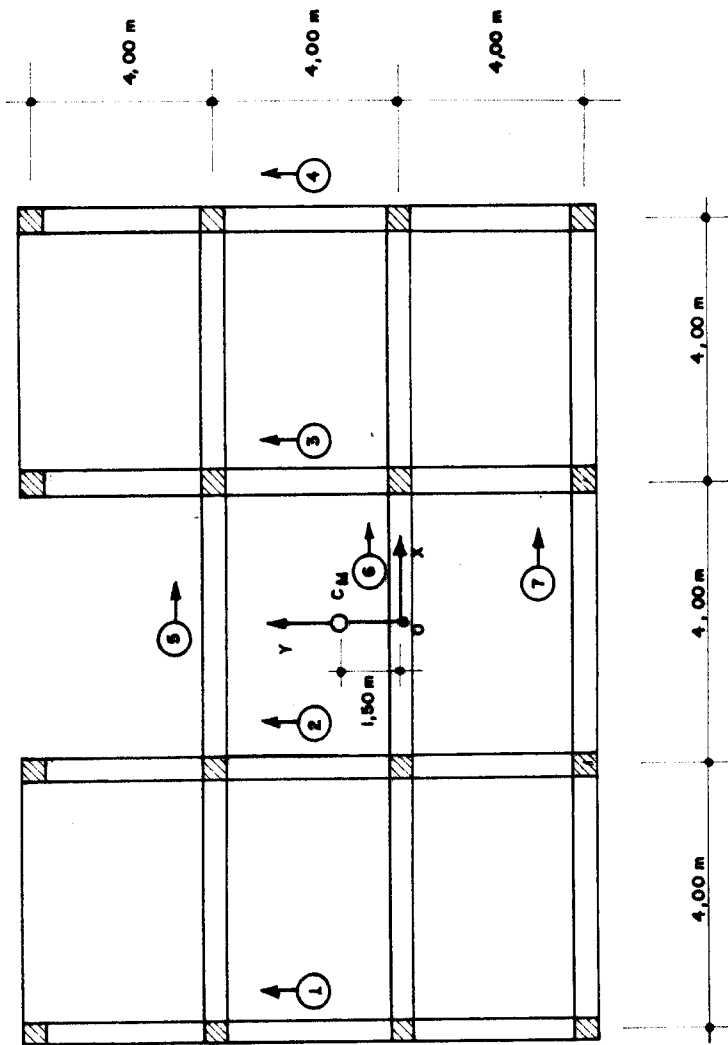
Como as coordenadas do centro de massa são nulas ($a = b = 0$) os três movimentos do edifício U, V e W são independentes, com modos de vibração senoidais. Os três primeiros períodos de vibração relativos aos movimentos U, V e W são:

	i = 1	i = 2	i = 3
para U	$T_1 = 3,55 \text{ seg}$	$T_2 = 1,18 \text{ seg}$	$T_3 = 0,71 \text{ seg}$
para V	$T_1 = 3,69 \text{ seg}$	$T_2 = 1,23 \text{ seg}$	$T_3 = 0,74 \text{ seg}$
para W	$T_1 = 2,74 \text{ seg}$	$T_2 = 0,91 \text{ seg}$	$T_3 = 0,55 \text{ seg}$

Esses resultados mostram ocorrer na ordem decrescente de períodos (ou crescente de frequências) primeiro o movimento horizontal V depois o movimento horizontal U e, por fim, a rotação W.

2º EXEMPLO NUMÉRICO

O edifício deste exemplo possui 10 andares de planta igual à mostrada na figura III-6. Os painéis, todos



TODOS OS PILARES : 0,30 m x 0,30 m

TODAS AS VIGAS : 0,12 m x 0,40 m

FIG. III . 6 - PLANTA DE UM EDIFÍCIO DE 10 ANDARES (2º EXEMPLO)

pórticos, são iguais aos de quatro prumadas de pilares presentes na estrutura do exemplo anterior. Adotam-se, também, módulo de elasticidade $E = 100\text{tf/cm}^2$ e carga distribuída nos andares $q = 1,0\text{tf/m}^2$.

Dada a particular distribuição dos painéis em planta, os eixos, OX e OY indicados tornam a matriz [S] diagonal.

As características do edifício são:

$$m = \frac{1,0 \times 128}{10 \times 3,0} = 4,27\text{t/m} \quad (g = 10\text{m/seg}^2)$$

$$J_m = \frac{1}{10 \times 3} (3125) = 104,18\text{t.m}$$

$$a = 0 \quad b = 1,5\text{m}$$

$$d^2 = \frac{J_m}{m} + b^2 = 26,65\text{m}^2$$

$$S_{aa} = 3 \times 1220 = 3660\text{tf}$$

$$S_{bb} = 4 \times 1220 = 4880\text{tf}$$

$$S_{cc} = 2 \times 1220 (2^2 + 4^2 + 6^2) = 136640\text{tf.m}^2$$

Esses valores levados na equação (III.34) permitem escrever:

$$(\sigma - 4880\alpha^2) [(\sigma - 3660\alpha^2) (26,65\sigma - 136640\alpha^2) - 2,25\sigma^2] = 0$$

sendo

$$\alpha = \frac{2i-1}{2 \times 30} \pi \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

O exemplo em questão possui movimentos múltiplos em U e W e movimento V independente (a = 0, b = 1,5 - vide eq.(III.33)). Os resultados de σ para i = 1, 2 e 3 são (os valores entre parênteses são os obtidos supondo b = 0):

	i = 1	i = 2	i = 3
Para V (independente)	$\sigma_1 = 13,38$	$\sigma_2 = 120,41$	$\sigma_3 = 334,47$
Para W e V (múltiplo)	$\sigma_1 = 17,51$ (15,34 p/W)	$\sigma_2 = 157,63$ (138,06)	$\sigma_2 = 437,93$ (351,15)
	$\sigma_1 = 8,79$ (10,03 p/V)	$\sigma_2 = 79,13$ (90,31)	$\sigma_2 = 219,84$ (250,85)

Os correspondentes períodos de vibração são:

	i = 1	i = 2	i = 3
Para V (independente)	$T_1 = 3,55$ seg	$T_2 = 1,18$ seg	$T_3 = 0,71$ seg
Para W e V (múltiplo)	$T_1 = 3,10$ seg (3,31 p/W)	$T_2 = 1,03$ seg (1,10)	$T_3 = 0,62$ seg (0,69)
	$T_1 = 4,38$ seg (4,10 p/V)	$T_2 = 1,46$ seg (1,37)	$T_3 = 0,87$ seg (0,82)

Os correspondentes modos de vibração são (vide eqs.(III.31) e (III.36)), adotando-se $C_2 = 1$ e $C_3 = 1$:

$$V = \text{sen}(\alpha z) \quad \} \quad (\text{movimento independente})$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\sigma b}{\sigma - S_{aa} \alpha^2} \text{sen}(\alpha z) \\ W &= \text{sen}(\alpha z) \end{aligned} \right\} \text{movimentos múltiplos}$$

onde:

$$\text{Para } i = 1, \frac{\sigma b}{\sigma - S_{aa} \alpha^2} = \begin{cases} 3,51 \quad (\sigma = 17,51) \\ -10,63 \quad (\sigma = 8,79) \end{cases}$$

$$\text{Para } i = 2, \frac{\sigma b}{\sigma - S_{aa} \alpha^2} = \begin{cases} 3,51 \quad (\sigma = 157,63) \\ -10,63 \quad (\sigma = 79,13) \end{cases}$$

$$\text{Para } i = 3, \frac{\sigma b}{\sigma - S_{aa} \alpha^2} = \begin{cases} 3,51 \quad (\sigma = 437,93) \\ -10,63 \quad (\sigma = 219,84) \end{cases}$$

Os modos múltiplos de vibração da estrutura em questão, nos movimentos U e W, que, para movimentos positivos de W, correspondem movimentos positivos e negativos de U, constitui fato já constatado no estudo das vibrações livres de barras de seção delgada (16), (20). Convém observar a grande predominância do movimento horizontal U sobre a rotação W num dos modos múltiplos de vibração (o de sinal contrário ao de W).

Os resultados evidenciam que, neste exemplo a excentricidade do centro de massa em relação do eixo ver

tical 0Z, expressa por $b = 1,5m$, apresenta reduzida influência nos períodos de vibração (discrepâncias da ordem de 6% a 7% entre os valores encontrados e os obtidos fazendo $b = 0$ - valores entre parênteses).

3º EXEMPLO NUMÉRICO

Como terceiro exemplo numérico estuda-se um edifício já analisado por HURTY e RUBINSTEIN (18), com o objetivo de se compararem resultados obtidos através do procedimento ora apresentado com os obtidos pelos citados autores.

A figura III-7 reproduz, em planta e em elevação, o edifício em questão. As medidas são todas dadas em pés e polegadas e os perfis metálicas indicados conforme notação americana (21). A rigidez dos pórticos à força constante s_f são determinadas tomando-se por base o 8º e o 9º andar. Tal arbitrariedade prende-se ao fato de que, no procedimento ora apresentado, supõe-se que a rigidez dos painéis seja constante ao longo da altura e isso não sucede com os painéis do edifício em consideração.

HURTY e RUBINSTEIN estudaram somente as vibrações livres correspondentes ao movimento horizontal U (segundo OX) considerando quatro hipóteses diferentes:

- a) admitindo nula a rotação dos nós;

- b) admitindo igual rotação para todos os nós de um dado andar;
- c) admitindo igual rotação para todos os nós de um dado pórtico em um dado andar;
- d) nenhuma restrição para as rotações dos nós.

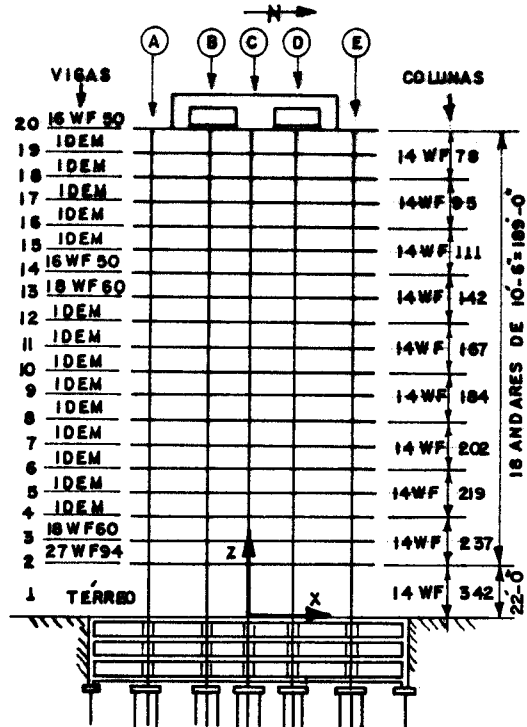
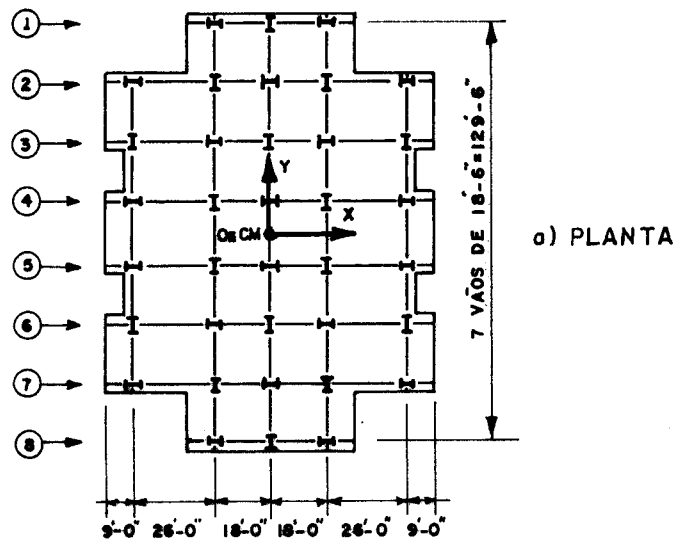


FIG. III. 7 - EDIFÍCIO ANALISADO POR RUBINSTEIN

Dessas hipóteses, a mais próxima da adotada na técnica do meio contínuo é, naturalmente, a hipótese c) (vide anexo I).

Dada a simetria da estrutura, os eixos OX e OY indicados conduzem à diagonalização da matriz [S], e, além disso, tornam nulas as coordenadas do centro de massa, resultando, assim, movimentos U, V e W independentes. Em conformidade com HURTY e RUBINSTEIN, estudam-se apenas as vibrações livres correspondentes ao movimento horizontal U.

As características dos painéis, no caso todos pórticos metálicos, são (já efetuada a conversão de unidades):

a) Pórticos ① e ⑧

$$s_f = \frac{12 \times 2100}{320} \times 2 (32, 33+22, 23) = 8595tf$$

b) Pórticos ②, ④, ⑤ e ⑦

$$s_f = \frac{12 \times 2100}{320} \times 2 (32, 33+44, 47+29, 15) = 16687tf$$

c) Pórticos ③ e ⑥

$$s_f = \frac{12 \times 2100}{320} \times 2 (27, 58+58, 30+22, 23) = 17029tf$$

As características do edifício, no que interessa ao movimento U, são:

$$S_{aa} = 2 (8595 + 2 \times 16687 + 17029) = 117996 \text{tf}$$

$$H = 64,3 \text{m}$$

$$m = \frac{560,27}{10 \times 3,2} = 17,51 \text{t/m} \quad (g = 10 \text{m/seg}^2)$$

Com esses dados numéricos, tendo em vista a equação (III.34), resultam os seguintes valores de σ :

$$\text{Para } i = 1 \quad \sigma_1 = 70,42$$

$$\text{Para } i = 2 \quad \sigma_2 = 633,76$$

$$\text{Para } i = 3 \quad \sigma_3 = 1760,46$$

A seguir comparam-se os resultados obtidos para a frequência angular ω com os já encontrados por HURTY e RUBINSTEIN.

ω em rd/seg

Tec. Meio Contínuo:		$\omega_1 = 2,00$	$\omega_2 = 6,02$	$\omega_3 = 10,03$
HURTY	a)	$\omega_1 = 3,83$	$\omega_2 = 9,90$	$\omega_3 = 16,73$
	b)	$\omega_1 = 1,93$	$\omega_2 = 5,29$	$\omega_3 = 9,07$
RUBINSTEIN	c)	$\omega_1 = 1,93$	$\omega_2 = 5,27$	$\omega_3 = 9,06$
	d)	$\omega_1 = 1,84$	$\omega_2 = 5,00$	$\omega_3 = 8,55$

Esses resultados comparados evidenciam o fato de que a técnica do meio contínuo conduz a resultados da mesma ordem de grandeza dos obtidos por meio de técnicas matriciais já consagradas. Convém salientar, entretanto, que esses resultados comparados não são adequados no sentido de se analisarem discrepâncias entre eles, pois, como já foi mencionado, a rigidez dos painéis, no presente exemplo, varia do longo da altura, e esse fato levou a se tomar, no procedimento ora apresentado, a rigidez de um dado andar como sendo também a dos demais.

Na figura III-8 comparam-se os três primeiros modos de vibração correspondentes ao movimento horizontal U obtidos.

3.5. Vibrações Livres de Associação Sô Contendo Paredes

Na associação sô contendo paredes tem-se $S_{k,l} = 0$ (eq.(III.13)) implicando em $[S] = [0]$ (eq.(III.11)). Assim sendo, a equação (III.20) se reduz a:

$$[J]\{D^{IV}\} - \sigma\{D_{CM}\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (III.37)$$

A matriz $[J]$, conforme salienta também STAMATO (12), pode ser diagonalizada mediante a escolha de um conveniente sistema de referência OXYZ. As coordenadas da origem desse sistema de referência, num outro sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ arbitrariamente adotado, são dadas por:

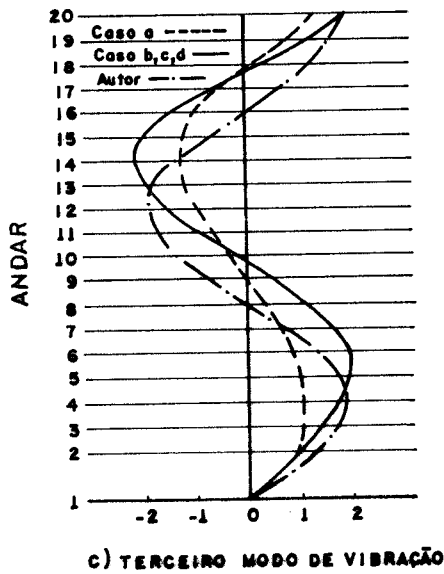
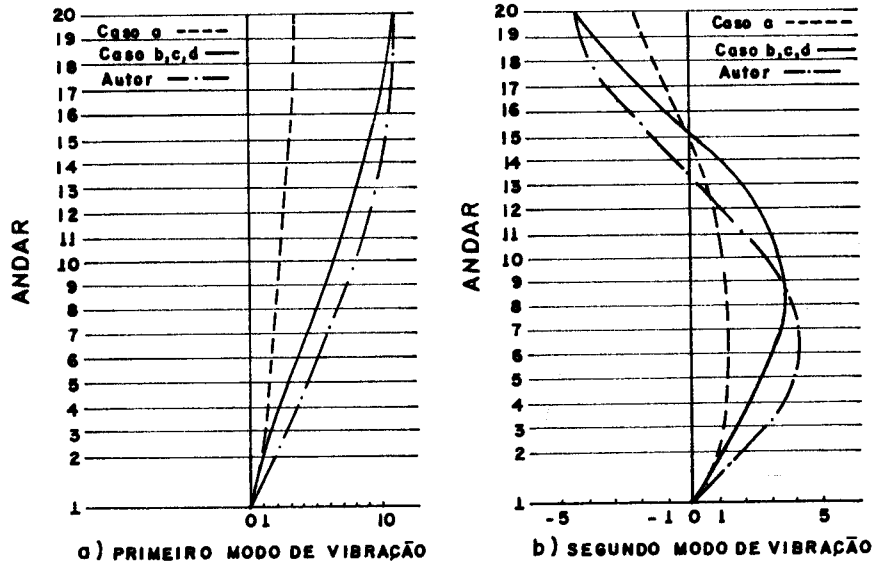


FIG. III . 8 - MODOS DE VIBRAÇÃO DO 3º EXEMPLO NUMÉRICO

$$\bar{X}_o = \frac{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{b}\bar{c}} - J_{\bar{a}\bar{b}}J_{\bar{a}\bar{c}}}{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{b}\bar{b}} - J_{\bar{a}\bar{b}}J_{\bar{a}\bar{b}}} \dots\dots\dots (III.38)$$

$$\bar{Y}_o = \frac{-J_{\bar{b}\bar{b}}J_{\bar{a}\bar{c}} + J_{\bar{a}\bar{b}}J_{\bar{b}\bar{c}}}{J_{\bar{a}\bar{a}}J_{\bar{b}\bar{b}} - J_{\bar{a}\bar{b}}J_{\bar{a}\bar{b}}}$$

sendo as direções dos eixos OX e OY dadas por:

$$2\psi = \text{arc.tg.} \frac{2J_{\bar{a}\bar{b}}}{J_{\bar{a}\bar{a}} - J_{\bar{b}\bar{b}}} \dots\dots\dots (III.39)$$

Nesse particular sistema de referência OXYZ a equação (III.37) passa a escrever-se:

$$\begin{aligned} J_{\bar{a}\bar{a}}U^{IV} - \sigma(U-WL) &= 0 \\ J_{\bar{b}\bar{b}}V^{IV} - \sigma(V+Wa) &= 0 \dots\dots\dots (III.40) \\ J_{\bar{c}\bar{c}}W^{IV} - \sigma(Wd^2 - Ub + Va) &= 0 \end{aligned}$$

As condições de fronteira a serem obedecidas pelas soluções das equações (III.40) são (vide eq.(III.24)):

$$\begin{aligned} \{D(0)\} &= 0 \\ \{D^I(0)\} &= 0 \\ \{D^{II}(H)\} &= 0 \\ \{D^{III}(H)\} &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (III.41)$$

As equações (III.41) ficam satisfeitas tomando-se para U, V e W as seguintes funções (vide eq.(II.14)):

$$\begin{aligned}
 U &= C_1 \left[\cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z)) \right] \\
 V &= C_2 \left[\cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z)) \right] \\
 W &= C_3 \left[\cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z)) \right] \\
 & \dots \quad (III.42)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1,875}{H} \quad \text{para } i = 1 \\
 \alpha &= \frac{4,694}{H} \quad \text{para } i = 2 \quad \dots \dots \dots (III.43) \\
 \alpha &= \frac{7,855}{H} \quad \text{para } i = 3 \\
 \alpha &\approx \frac{2i-1}{2H} \pi \quad \text{para } i > 3
 \end{aligned}$$

As equações (III.42) levadas nas equações(III.40) permitem escrever:

$$\begin{aligned}
 (\sigma - J_{aa} \alpha^4) C_1 - (\sigma b) C_3 &= 0 \\
 (\sigma - J_{bb} \alpha^4) C_2 + (\sigma a) C_3 &= 0 \quad \dots \dots \dots (III.44) \\
 -(\sigma b) C_1 + (\sigma a) C_2 + (\sigma d^2 - J_{cc} \alpha^4) C_3 &= 0
 \end{aligned}$$

A solução não trivial das equações (III.44) nas constantes C_1 , C_2 e C_3 conduz a:

$$\det. \begin{vmatrix} (\sigma - J_{aa} \alpha^4) & (0) & (-\sigma b) \\ (0) & (\sigma - J_{bb} \alpha^4) & (\sigma a) \\ (-\sigma b) & (\sigma a) & (\sigma d^2 - J_{cc} \alpha^4) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (\text{III.45})$$

O desenvolvimento do determinante expresso na equação (III.45) leva a:

$$\begin{aligned} (d^2 - a^2 - b^2) \sigma^3 + \left[J_{bb} (b^2 - d^2) + J_{aa} (a^2 - d^2) - J_{cc} \right] \sigma^2 \alpha^4 + \\ + (J_{aa} J_{bb} d^2 + J_{aa} J_{cc} + J_{bb} J_{cc}) \sigma \alpha^8 - J_{aa} J_{bb} J_{cc} \alpha^{12} = 0 \\ \dots \quad (\text{III.46}) \end{aligned}$$

A semelhança entre as equações que descrevem as vibrações livres de associação sô contendo paredes e sô contendo pòrticos conduz às mesmas observações já levadas a efeito em 3.4.

Os valores de σ , determinados pela equação (III.46), levados na equação (III.44), permitem determinar os correspondentes modos de vibração. Determinam-se, por exemplo, os valores de C_1 e C_2 em função de C_3 , tendo-se, então, as funções U , V e W dadas pelas equações (III.42) também como função de C_3 . Assumindo $C_3 = 1,0$, têm-se:

$$U = \frac{\sigma_b}{\sigma - J_{aa}} \alpha^4 \left[\cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} \cdot \right. \\ \left. \cdot (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z)) \right]$$

$$V = \frac{\sigma_a}{\sigma - J_{bb}} \alpha^4 \left[\cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} \cdot \right. \\ \left. \cdot (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z)) \right] \quad \dots \quad (\text{III.47})$$

$$W = \cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} \cdot \\ \cdot (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z))$$

4º EXEMPLO NUMÉRICO

A figura III-9 mostra em planta um edifício de 20 andares igualmente espaçados por pés direito de 3,0m. A estrutura do edifício é constituída de uma associação de 6 paredes. O módulo de elasticidade é assumido como sendo $E = 100 \text{tf/cm}^2$ e admite-se uma carga uniformemente distribuída nos andares $q = 1,0 \text{tf/m}^2$.

As características das paredes são (vide fig.

III-9):

a) Paredes de (1) a (4)

$$j_p = 100 \times 10^4 \left(\frac{0,2 \times 3^3}{12} \right) = 4,5 \cdot 10^5 \text{tf.m}^2$$

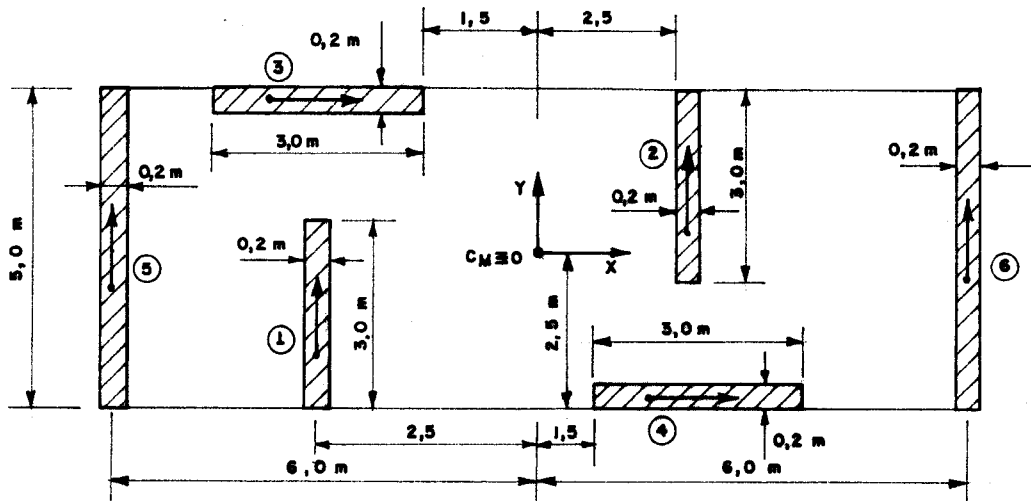


FIG. III.9 - PLANTA DE UM EDIFÍCIO DE 20 ANDARES (4º EXEMPLO NUMÉRICO)

b) Paredes (5) e (6)

$$j_p = 100 \times 10^4 \left(\frac{0,2 \times 5^3}{12} \right) = 20,810^5 \text{ tf.m}^2$$

As características do edifício são:

$$J_{aa} = 2 \times 4,510^5 = 9,010^5 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{bb} = 2(20,810^5 + 4,510^5) = 50,610^5 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{cc} = 2(2 \times 2,5^2 \times 4,510^5 + 6^2 \times 20,810^5) = 161010^5 \text{ tf.m}^4$$

$$H = 20 \times 3 = 60,0 \text{ m}$$

$$m = \frac{1 \times 12 \times 5}{10 \times 3} = 2,0 \text{ t/m} \quad (g = 10 \text{ m/seg}^2)$$

$$J_m = \frac{1}{3 \times 10} \left(\frac{5 \times 12^3}{12} + \frac{12 \times 5^3}{12} \right) = 28,17 \text{ t.m}$$

$$a = b = 0 \text{ m}$$

$$d^2 = \frac{J_m}{m} = \frac{28,17}{2,0} = 14,84 \text{ m}^2$$

Com esses valores numéricos, a equação (III.46) fica:

$$(\sigma - 9,01 \cdot 10^5 \alpha^4) (\sigma - 50,61 \cdot 10^5 \alpha^4) (14,84 \sigma - 1610 \cdot 10^5 \alpha^4) = 0$$

sendo α dado pelas equações (III.43)

Os valores de σ , para o exemplo em questão, são:

		i = 1	i = 2	i = 3
movimentos independen tes (a=b=0)	Para U	$\sigma_1 = 0,858$	$\sigma_2 = 33,713$	$\sigma_3 = 264,38$
	Para V	$\sigma_1 = 4,825$	$\sigma_2 = 189,54$	$\sigma_3 = 1486,4$
	Para W	$\sigma_1 = 10,346$	$\sigma_2 = 406,40$	$\sigma_3 = 3186,9$

Os três primeiros períodos de vibração correspondentes a cada um dos três movimentos independentes U, V e W são:

	i = 1	i = 2	i = 3
Para U	$T_1 = 9,59 \text{ seg}$	$T_2 = 1,53 \text{ seg}$	$T_3 = 0,55 \text{ seg}$
Para V	$T_1 = 4,04 \text{ seg}$	$T_2 = 0,64 \text{ seg}$	$T_3 = 0,23 \text{ seg}$
Para W	$T_1 = 2,69 \text{ seg}$	$T_2 = 0,43 \text{ seg}$	$T_3 = 0,16 \text{ seg}$

Os correspondentes modos de vibração são similares do mostrado na figura II-2 (vide eqs. (III.42) e (II.14)).

59 EXEMPLO NUMÉRICO

O exemplo numérico em questão consiste num edifício de 20 andares de pês direito de 3,0m. A estrutura do edifício é constituída pela associação de 6 paredes dispostas em planta como mostra a figura III-10. Admite-se módulo de elasticidade $E = 100 \text{tf/cm}^2$ e uma carga uniforme mente distribuída nos andares $q = 1,0 \text{tf/m}^2$.

As características das paredes, neste exemplo, são as mesmas das do edifício estudado no exemplo anterior.

Dada a distribuição assimétrica das paredes em planta, procura-se de início o sistema de referência OXYZ que diagonaliza a matriz [J]. Para tanto, adota-se arbitrariamente um sistema de referência $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ (vide fig. III-10). Nesse sistema de referência as características do edifício são:

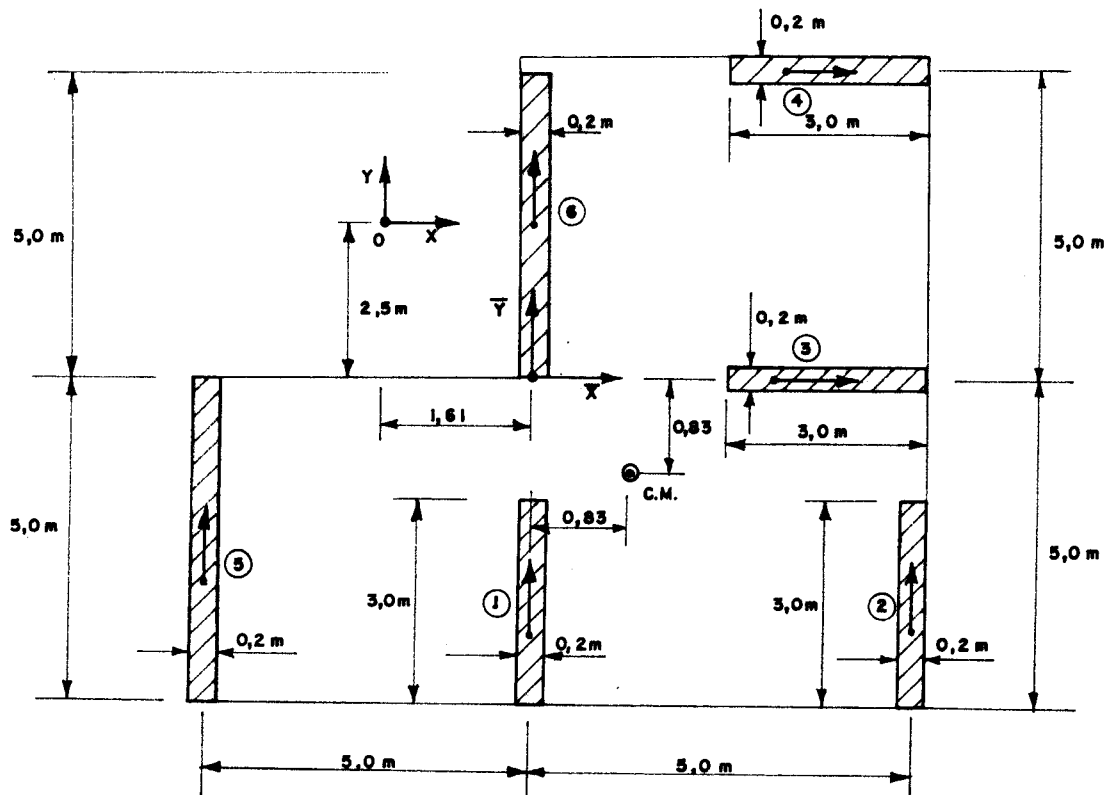


FIG. III.10- PLANTA DE UM EDIFÍCIO DE 20 ANDARES (5º EXEMPLO NUMÉRICO)

$$J_{aa}^- = 2 \times 4,5 \cdot 10^5 = 9,0 \cdot 10^5 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{bb}^- = 2(20,8 \cdot 10^5 + 4,5 \cdot 10^5) = 50,6 \cdot 10^5 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{cc}^- = 20,8 \cdot 10^5 \times 5^2 + 2 \times 4,5 \cdot 10^5 \times 5^2 = 745 \cdot 10^5 \text{ tf.m}^4$$

$$J_{ab}^- = 0,0 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{ac}^- = -4,5 \cdot 10^5 \times 5 = -22,5 \cdot 10^5 \text{ tfm}^3$$

$$J_{bc}^- = 4,5 \cdot 10^5 \times 5 - 20,8 \cdot 10^5 \times 5 = -81,5 \cdot 10^5 \text{ tfm}^3$$

Esses valores numéricos levados nas equações (III.38) e (III.39) conduzem a:

$$\bar{X}_o = \frac{9,0 \cdot 10^5 \times (-81,5 \cdot 10^5)}{9,0 \cdot 10^5 \times 50,6 \cdot 10^5} = -1,61 \text{ m}$$

$$\bar{Y}_o = \frac{-50,6 \cdot 10^5 (-22,5 \cdot 10^5)}{9,0 \cdot 10^5 \times 50,6 \cdot 10^5} = +2,5 \text{ m}$$

$$2\psi = \text{arc.tg. } 0 \quad \psi = \begin{cases} 0^\circ \\ 90^\circ \end{cases}$$

No sistema de referência OXYZ as características do edifício são:

$$J_{aa} = J_{aa}^- = 9,0 \cdot 10^5 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{bb} = J_{bb}^- = 50,6 \cdot 10^5 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{cc} = 10^5 [20,8(3,39^2 + 1,61^2) + 4,5(2 \times 2,5^2 + 1,61^2 + 6,61^2)] = 557,47 \cdot 10^5 \text{ tf.m}^2$$

$$a = 2,44 \text{ m} \quad b = -3,33 \text{ m}$$

$$J_m = \frac{1}{3 \times 10} \left[2 \left(\frac{10 \times 5^3}{12} + 10 \times 5 \times 1,67^2 + \frac{5 \times 5^3}{12} + 5 \times 5 \times 3,33^2 \right) \right] = 38,19 \text{ tm}$$

$$m = \frac{75 \times 1}{3 \times 10} = 2,5 \text{ t/m}$$

$$d^2 = \frac{38,19}{2,5} + 2,44^2 + 3,33^2 = 32,32 \text{ m}^2$$

Com esses valores numéricos a equação (III.46)

fica:

$$\sigma^3 - 122,32 \cdot 10^5 \alpha^4 \sigma^2 + 3104,56 \cdot 10^{10} \alpha^8 \sigma - 16614,64 \cdot 10^{15} \alpha^{12} = 0$$

sendo α dado pelas equações (III.43)

Os valores de σ para $i = 1, 2$ e 3 são:

Modos Múltiplos em U, V e W	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
	$\sigma_1 = 0,702 (0,859 \text{ p/U})$	$\sigma_2 = 27,58 (33,71)$	$\sigma_3 = 216,25 (264,33)$
	$\sigma_1 = 2,40 (1,65 \text{ p/W})$	$\sigma_2 = 94,21 (64,62)$	$\sigma_3 = 738,66 (506,63)$
	$\sigma_1 = 8,57 (4,83 \text{ p/V})$	$\sigma_2 = 336,4 (189,55)$	$\sigma_3 = 2637,4 (1486,12)$

onde os valores entre parênteses são obtidos supondo nulos os valores de a e b (negligenciando-se a excentricidade do centro de massa).

Os nove primeiros períodos correspondentes aos modos múltiplos de vibração nos movimentos U, V e W são:

$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$T_1 = 11,86 (10,72 \text{ p/U})$	$T_2 = 1,89 (1,71)$	$T_2 = 0,676 (0,611)$
$T_1 = 6,41 (7,73 \text{ p/W})$	$T_2 = 1,02 (1,24)$	$T_3 = 0,366 (0,441)$
$T_1 = 3,39 (4,52 \text{ p/V})$	$T_2 = 0,542 (0,722)$	$T_3 = 0,193 (0,256)$

Os correspondentes modos de vibração são dados por (vide eq.(III.47)):

$$U = \frac{\sigma_b}{\sigma - J_{aa} \alpha^4} \left[\cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} \cdot (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha H)) \right]$$

$$V = \frac{\sigma_a}{\sigma - J_{bb} \alpha^4} \left[\cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} \cdot (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z)) \right]$$

$$W = \cosh(\alpha Z) - \cos(\alpha Z) + \frac{\cosh(\alpha H) + \cos(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) + \sin(\alpha H)} \cdot (\sin(\alpha Z) - \sinh(\alpha Z))$$

onde, para os valores de σ determinados, têm-se:

a) primeiro modo múltiplo ($i = 1, 2, 3 \dots$)

$$\frac{\sigma_b}{\sigma - J_{aa} \alpha^4} = 14,89 \quad \frac{\sigma_a}{\sigma - J_{bb} \alpha^4} = -0,415$$

b) segundo modo múltiplo ($i = 1, 2, 3 \dots$)

$$\frac{\sigma_b}{\sigma - J_{aa} \alpha^4} = -5,19 \quad \frac{\sigma_a}{\sigma - J_{bb} \alpha^4} = -2,41$$

c) terceiro modo múltiplo ($i = 1, 2, 3 \dots$)

$$\frac{\sigma_b}{\sigma - J_{aa} \alpha^4} = -3,70 \quad \frac{\sigma_a}{\sigma - J_{bb} \alpha^4} = +5,59$$

Os resultados deste exemplo mostram haver uma razoável influência da excentricidade do centro de massa. Discrepâncias da ordem de até 30% pode ser observadas entre os períodos encontrados e os determinados supondo excentricidade nula ($a = b = 0$ - valores entre parênteses).

No primeiro modo múltiplo de vibração, para movimento W positivo, o movimento U é também positivo e V é negativo, havendo nítida predominância do movimento U sobre o V . No segundo modo múltiplo, para movimento W positivo os movimentos U e V são negativos, havendo ainda predominância do movimento U sobre o V . Finalmente, no terceiro modo múltiplo de vibração, para movimento W positivo tem-se movimento positivo também para V e movimento negativo para U , ocorrendo, agora, predominância do movimento V sobre o U .

3.6. Vibrações Livres de Associação com Disposição Simétrica de Pórticos e Paredes

A associação com disposição simétrica de pórticos e paredes, como por exemplo a mostrada na figura III-11, permite diagonalizar a equação matricial (III.20), tomando-se o sistema de referência $OXYZ$ segundo os planos de simetria da estrutura. Assim sendo, e supondo nula a excentricidade do centro de massa ($a = b = 0$), a equação (III.20) passa a escrever-se:

$$\begin{aligned}
 J_{aa} U^{IV} - S_{aa} U^{II} - m\omega^2 U &= 0 \\
 J_{bb} V^{IV} - S_{bb} V^{II} - m\omega^2 V &= 0 \quad \dots\dots\dots (III.48) \\
 J_{cc}^* W^{IV} - S_{cc}^* W^{II} - J_m \omega^2 W &= 0
 \end{aligned}$$

As condições do fronteira expressas nas equações (III.24) ficam:

$$\begin{aligned}
 U(0) = V(0) &= 0 \\
 U^I(0) = V^I(0) = W(0) &= 0 \\
 U^{II}(H) = V^{II}(H) = W^I(0) &= 0 \\
 W^{II}(H) &= 0 \quad \dots\dots\dots (III.49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{aa} U^{III}(H) - S_{aa} U^I(H) &= 0 \\
 J_{bb} V^{III}(H) - S_{bb} V^I(H) &= 0 \\
 J_{cc}^* W^{III}(H) - S_{cc}^* W^I(H) &= 0
 \end{aligned}$$

As **soluções** das equações (III.48) nos movimentos independentes U, V e W, satisfazendo as condições de fronteira (III.49), são as mesmas já expostas no parágrafo 2.4, ou seja:

a) para o movimento U

$$\lambda = \sqrt{\frac{S_{aa} H^2}{J_{aa}}} \quad \frac{\text{FIG. II-6}}{\text{TAB. II-1}} \rightarrow T_i = a_i H^2 \sqrt{\frac{m}{J_{aa}}}$$

b) para o movimento V

$$\lambda = \sqrt{\frac{S_{bb} H^2}{J_{aa}}} \quad \frac{\text{FIG. II-6}}{\text{TAB. II-1}} \rightarrow T_i = a_i H^2 \sqrt{\frac{m}{J_{bb}}}$$

c) para o movimento W

$$\lambda = \sqrt{\frac{S_{cc}^* H^2}{J_{cc}^*}} \quad \frac{\text{FIG. II-6}}{\text{TAB. II-1}} \rightarrow T_i = a_i H^2 \sqrt{\frac{J_m}{J_{cc}^*}}$$

Os modos de vibração nos movimentos U, V e W são dados pela equação (II.44) (vide fig. II-7).

6º EXEMPLO NUMÉRICO

A figura III-11 mostra a planta da estrutura de um edifício de 20 andares igualmente espaçados por pés-direito de 3m. Admite-se módulo de elasticidade $E = 100 \text{tf/cm}^2$ e uma carga vertical uniformemente distribuída nos andares $q = 1,0 \text{tf/m}^2$.

Os pórticos são iguais aos de 4 prumadas de pilares presentes nos exemplos anteriores exceto no número de andares. As características da parede de seção aberta são:

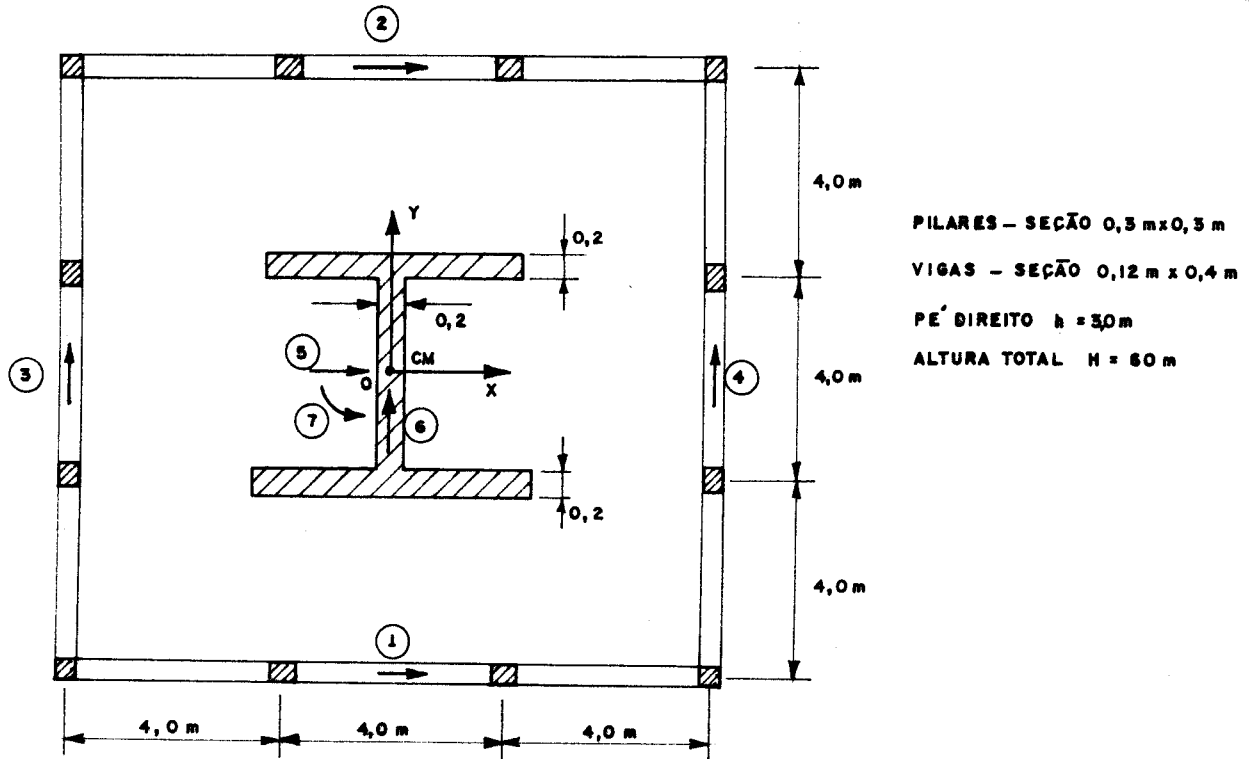


FIG. III . 11 - PLANTA DE UM EDIFÍCIO DE 20 ANDARES (6º EXEMPLO NUMÉRICO)

$$j_x = EJ_x = 10^6 \left[2 \left(\frac{4 \times 0,2^3}{12} + 4 \times 0,2 \times 1,9^2 \right) + \frac{0,2 \times 3,6^3}{12} \right] = 6,56 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^2$$

$$j_y = EJ_y = 10^6 \left[2 \times \frac{0,2 \times 4^3}{12} + 3,6 \times \frac{0,2^3}{12} \right] = 2,14 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^2$$

$$j_t = GJ_t = \frac{10^6}{2(1+0,2)} \left[\frac{1}{3} \times 0,2^3 \times 11,8 \right] = 0,013 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^2$$

(Coeficiente de Poisson $\mu = 0,2$)

$$j_{ft} = EJ_{ft} = 10^6 \left[\frac{0,2 \times 4^3 \times 3,8^2}{24} \right] = 7,70 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^4$$

As características do edifício são:

$$J_{aa} = j_y = 2,14 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{bb} = j_x = 6,56 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^2$$

$$J_{cc}^* = j_{ft} = 7,70 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^4$$

$$S_{aa} = 2 \times 0,122 \cdot 10^4 = 2,44 \cdot 10^3 \text{ tf}$$

$$S_{bb} = 2 \times 0,122 \cdot 10^4 = 2,44 \cdot 10^3 \text{ tf}$$

$$S_{cc}^* = 4 \times 0,122 \cdot 10^4 \times 6^2 + j_t = 0,189 \cdot 10^6 \text{ tf.m}^2$$

$$J_m = 2 \times \frac{12 \times 12^3}{12} \times \frac{1}{3 \times 10} = 115 \text{ t.m} \quad (g = 10 \text{ m/seg}^2)$$

$$m = \frac{1 \times 12 \times 12}{3 \times 10} = 4,8 \text{ t/m}$$

Com esses valores numéricos, têm-se:

a) para o movimento U (segundo OX)

$$\lambda = \sqrt{\frac{60^2 \times 2,44 \times 10^3}{2,14 \cdot 10^6}} = 2,03 \rightarrow \begin{array}{l} T_1 = 6,9 \text{ seg} \\ T_2 = 1,4 \text{ seg} \\ T_3 = 0,53 \text{ seg} \end{array}$$

b) para o movimento V (segundo OY)

$$\lambda = \sqrt{\frac{60^2 \times 2,44 \times 10^3}{6,56 \cdot 10^6}} = 1,15 \rightarrow \begin{array}{l} T_1 = 4,6 \text{ seg} \\ T_2 = 0,86 \text{ seg} \\ T_3 = 0,31 \text{ seg} \end{array}$$

c) para o movimento W (rotação segundo OZ)

$$\lambda = \sqrt{\frac{60^2 \times 0,18910^6}{7,70106}} = 9,40 \longrightarrow \begin{array}{l} T_1 = 5,2 \text{ seg} \\ T_2 = 1,61 \text{ seg} \\ T_3 = 0,855 \text{ seg} \end{array}$$

Os resultados encontrados neste exemplo mostram um fato interessante, pois a ordem crescente de períodos do primeiro modo não é mantida nos demais. De fato, temos:

para o 1º modo: $T_U > T_W > T_V$

para o 2º e 3º modos: $T_W > T_U > T_V$

Convém notar que o procedimento apresentado aplica-se também ao estudo das vibrações livres de peças de seção delgada com dupla simetria na seção, engastada numa extremidade e livre na outra (20). Para tanto toma-se:

$$J_{aa} = EJ_y \quad J_{bb} = EJ_x \quad J_{cc}^* = EJ_{ft}$$

$$S_{aa} = 0 \quad S_{bb} = 0 \quad S_{cc}^* = GJ_t$$

7º EXEMPLO NUMÉRICO

Estuda-se agora um edifício de 20 andares igualmente espaçados por pés direito de 3,1m, cuja planta mostra-se na figura III-12. A estrutura desse edifício é composta de 6 painéis obtidos pela associação de duas paredes

planas (seção 0,2mx6,0m) por lintéis (seção 0,2mx0,4m) mais uma parede de seção aberta. Admite-se módulo de elasticidade $E = 150tf/cm^2$ e uma massa uniformemente distribuída ao longo da altura $m = 4,17t/m$. COULL (11) analisou esse edifício apenas no tocante ao movimento V (segundo OY) e o mesmo faz-se aqui no intuito de comparar os resultados.

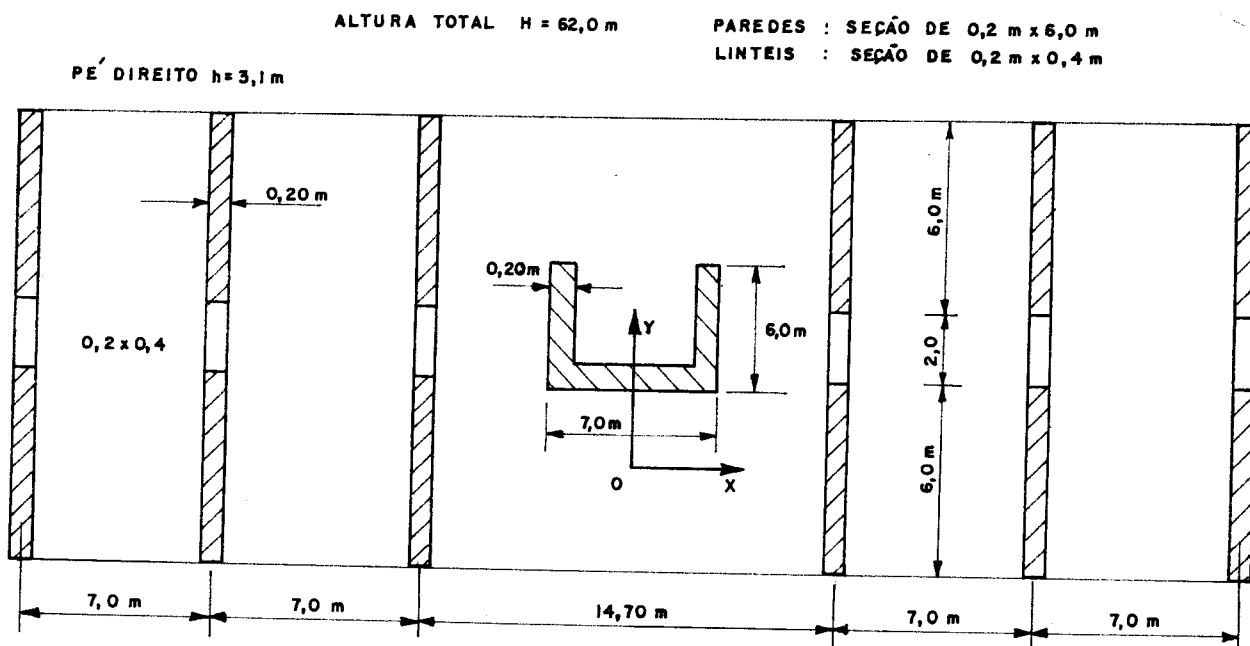


FIG. III.12 - PLANTA DE UM EDIFÍCIO DE 20 ANDARES (7º EXEMPLO NUMÉRICO)

As características da associação de paredes por lintéis são (vide eqs.(II-51)):

$$j = 2 \times 5,410^6 = 10,810^6 \text{ tf} \cdot \text{m}^2$$

$$s_f = \frac{3 \times 1,610^3}{2 \times 3,1} \left(\frac{8^2}{3} \right) = 49,55 \cdot 10^3 \text{ tf}$$

As características da parede de seção aberta são:

$$j_p = 21,5610^6 \text{ tf.m}^2$$

As características do edifício no tocante do movimento V são:

$$J_{bb} = 12 \times 5,410^6 + 21,5610^6 = 86,3610^6 \text{ tf.m}^2$$

$$S_{bb} = 6 \times 49,55.10^3 = 297,3010^3 \text{ tf}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{62^2 \times 297,3010^3}{86,3610^6}} = 3,64$$

Com $\lambda = 3,64$ no gráfico da figura II-6 (ou tabela II-1) têm-se os valores de a_i que, levados na expressão (II.45), fornecem: $T_1 = 0,68$ seg, $T_2 = 0,16$ seg e $T_3 = 0,076$ seg. No quadro a seguir comparam-se os resultados encontrados com os obtidos por COULL (11) e também os obtidos segundo MURASHEV, SIGALOV e BAIKOV (7):

	T_1	T_2	T_3
Autor	0,68	0,16	0,076
COULL	2,04	0,33	0,086
MURASHEV e OUTROS	0,93	0,21	0,080

A discrepância observada entre os resultados obtidos por COULL (11) e os obtidos segundo o procedimento ora proposto e também os obtidos segundo procedimento proposto por MURASHEV e outros (7), não deve causar estranheza pois COULL (11) analisou o edifício pela técnica aproximada de RITZ-GALERKIN, adotando para o movimento V uma função do tipo:

$$V = \sum_{j=1,2,..} C_j \left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2} Z\right) \right] \quad \text{com } k = 2j-1$$

Sabe-se, contudo, que a técnica de RITZ-GALERKIN não oferece meios "teóricos" de se conhecer a ordem do erro cometido.

A discrepância entre os resultados pode também ser vista nos modos correspondentes de vibração mostrados na figura III-13. Convém observar principalmente o segundo modo de vibração obtido por COULL, pois o mesmo não satisfaz a condição de ortogonalidade (ver anexo V) com o primeiro, ou seja:

$$\int_0^H m V_1 V_2 dz \neq 0$$

Esse fato já evidencia um erro contido na solução aproximada sugerida por COULL (11). Convém salientar que MURASHEV (7) e COUL (11) levam em consideração também os movimentos verticais.

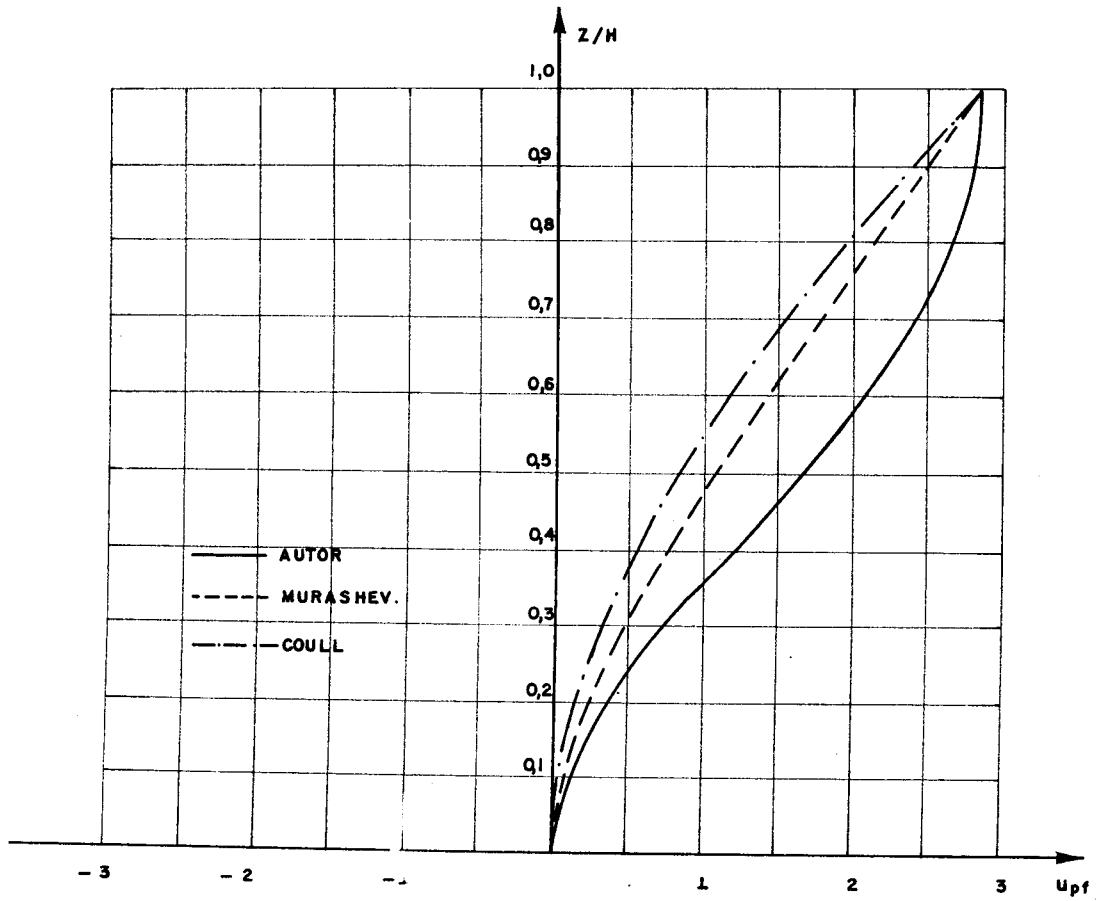


FIG. III -13 - a) PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO

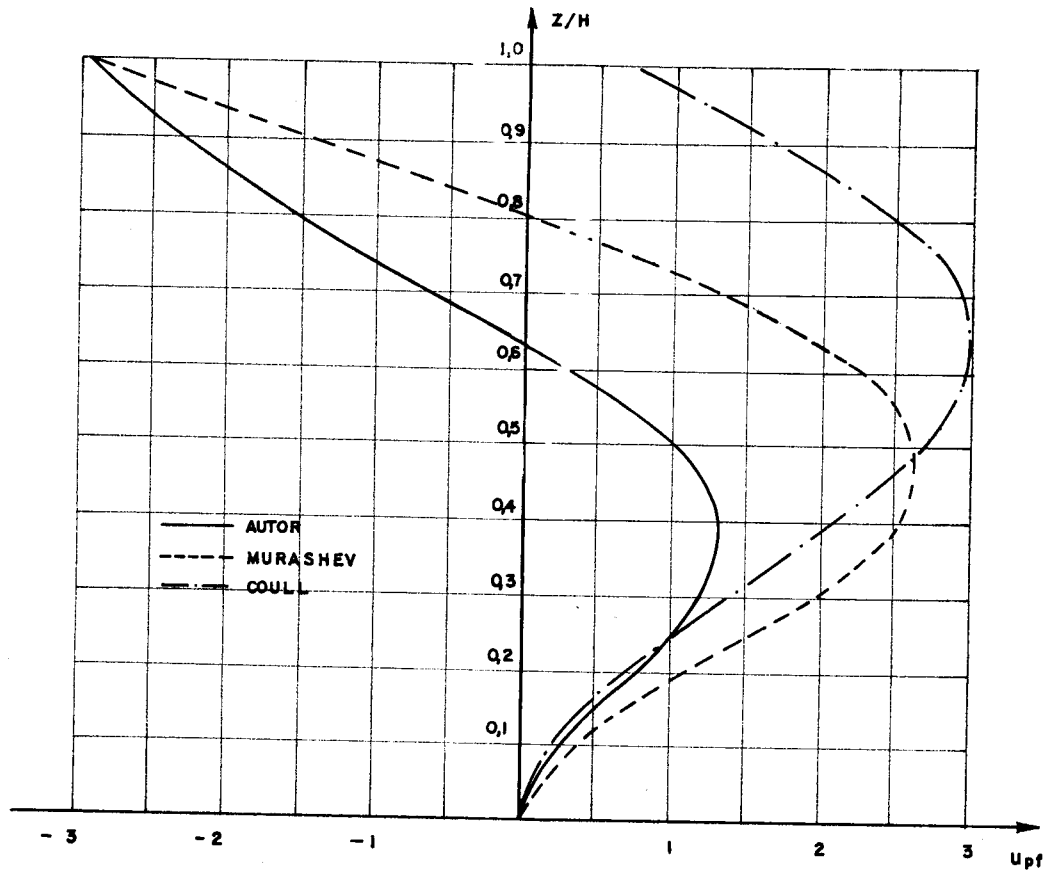
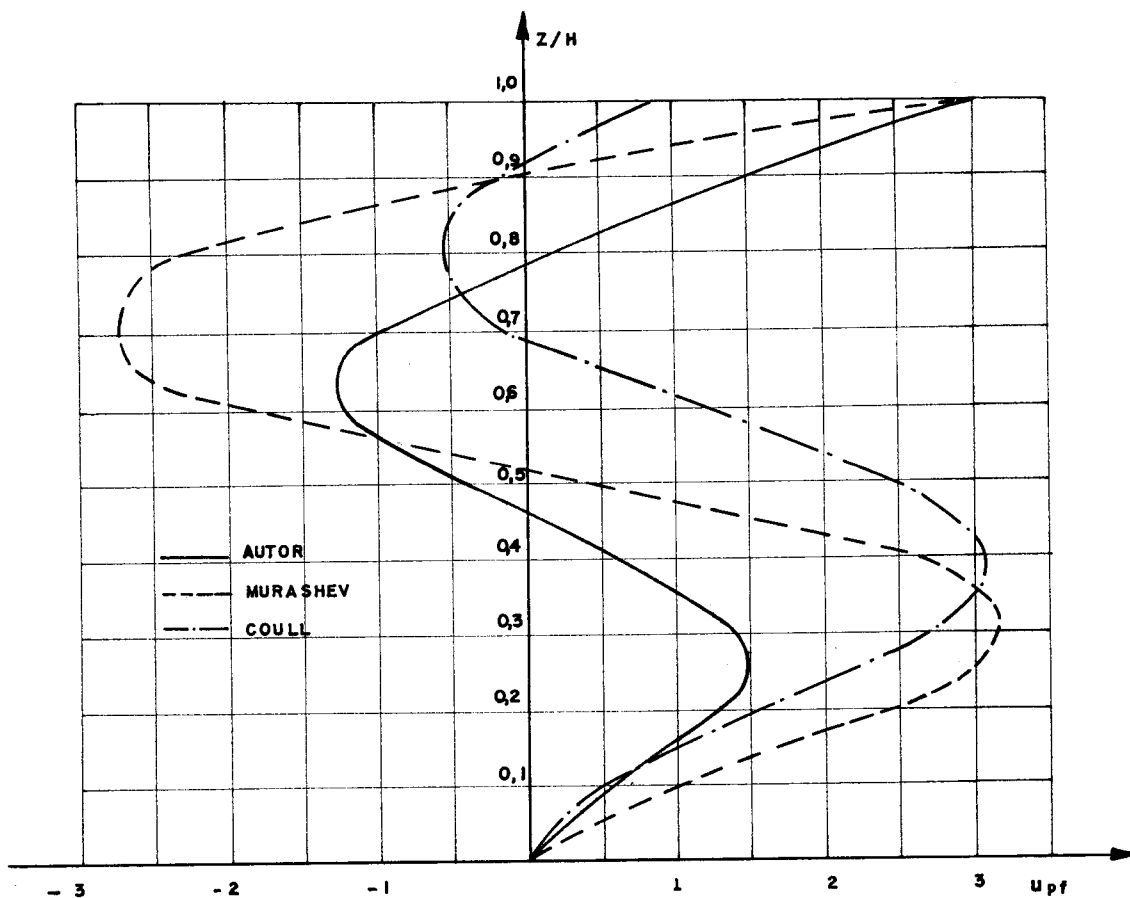


FIG. III -13 b) SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO



c) TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO

FIG. III.13 - MODOS DE VIBRAÇÃO (7º EXEMPLO NUMÉRICO)

3.7 - Análise Aproximada das Vibrações Livres da Associação de Pórticos e Paredes

Conforme já foi salientado, uma solução "exata" do caso geral de associação de pórticos e paredes não é imediata, apresentando, além disso, remotas possibilidades de ser alcançada. Contudo, soluções aproximadas, fazendo uso das séries de potências, são bastante sugestivas, pois permitem conhecer a ordem do erro cometido(22). Soluções aproximadas interessantes são obtidas também, a-

plificando-se os métodos de RITZ-GALERKIN (16) e de STODOLA-VIANELLO (17). A seguir apresentam-se as formulações dessas soluções aproximadas para o caso em questão.

3.7.1 - SOLUÇÃO POR SÉRIE DE POTÊNCIAS

Adotando, por exemplo, como solução aproximada para os movimentos U, V e W um desenvolvimento em série de potências até o sétimo grau, tem-se (15):

$$\begin{aligned} \{D\} = \{D_o\} + \{D_o^I\} z + \{D_o^{II}\} \frac{z^2}{2} + \{D_o^{III}\} \frac{z^3}{6} + \{D_o^{IV}\} \frac{z^4}{24} + \\ + \{D_o^V\} \frac{z^5}{120} + \{D_o^{VI}\} \frac{z^6}{720} + \{D_o^{VII}\} \frac{z^7}{5040} \dots \text{(III.50)} \end{aligned}$$

onde o índice inferior "o" indica ser o valor dos movimentos e de suas derivadas tomadas na base (Z = 0).

Uma estimativa do erro cometido nos deslocamentos ao se admitir a solução aproximada expressa na expressão (III.50), segundo a fórmula de LAGRANGE (22), pode ser dada por:

$$\{\varepsilon\} = \frac{H^8}{362880} \{D_o^{VIII}\} \dots \text{(III.51)}$$

onde:

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_U \\ \varepsilon_V \\ \varepsilon_W \end{pmatrix}$$

sendo ϵ_U , ϵ_V e ϵ_W as estimativas dos erros cometidos, respectivamente, nos movimentos U, V e W.

As condições de fronteira expressas na equação (III.24) são:

$$\begin{aligned} \{D_0\} &= \{0\} \\ \{D_0^I\} &= \{0\} \dots\dots\dots (III.52) \\ \{D_H^{II}\} &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\{J\}\{D_H^{III}\} - \{S\}\{D_H^I\} = \{0\}$$

onde o índice inferior "H" indica ser o valor das derivadas dos movimentos tomado no topo (Z = H).

A equação (III.20) pode ser escrita na forma:

$$\{J\}\{D^{IV}\} = \{S\}\{D^{II}\} + \sigma \{K\}\{D\} \dots\dots (III.53)$$

onde:

$$\{K\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \\ -b & a & d^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (III.54)$$

As derivadas dos movimentos $\{D\}$ do quarto ao oitavo grau podem ser obtidas em função dos movimentos $\{D\}$ e de suas derivadas até o terceiro grau através da expressão (III.53). Na base, portanto, têm-se:

$$\begin{aligned} \{D_o^{IV}\} &= [A]\{D_o^{II}\} + \sigma [B]\{D_o\} \\ \{D_o^V\} &= [A]\{D_o^{III}\} + \sigma [B]\{D_o^I\} \\ \{D_o^{VI}\} &= [A]\{D_o^{IV}\} + \sigma [B]\{D_o^{II}\} \quad \dots\dots (III.55) \\ \{D_o^{VII}\} &= [A]\{D_o^V\} + \sigma [B]\{D_o^{III}\} \\ \{D_o^{VIII}\} &= [A]\{D_o^{VI}\} + \sigma [B]\{D_o^{IV}\} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} [A] &= [J]^{-1} [S] \\ &\dots\dots\dots (III.56) \\ [B] &= [J]^{-1} [K] \end{aligned}$$

Levando as duas primeiras condições (III.52) nas equações (III.55) têm-se:

$$\begin{aligned} \{D_o^{IV}\} &= [A]\{D_o^{II}\} \\ \{D_o^V\} &= [A]\{D_o^{III}\} \\ \{D_o^{VI}\} &= ([A][A] + \sigma [B])\{D_o^{II}\} \quad \dots\dots (III.57) \\ \{D_o^{VII}\} &= ([A][A] + \sigma [B])\{D_o^{III}\} \\ \{D_o^{VIII}\} &= \left[[A][A][A] + 2\sigma([B][A]) \right]\{D_o^{II}\} \end{aligned}$$

Levando as equações (III.57) na equação (III.50)

tem-se

$$\begin{aligned}
 \{D\} = & \left[\{I\} \frac{z^2}{2} + \{A\} \frac{z^4}{24} + (\{A\} \{A\} + \sigma \{B\}) \frac{z^6}{720} \right] \{D_o^{II}\} + \\
 & + \left[\{I\} \frac{z^3}{6} + \{A\} \frac{z^5}{120} + (\{A\} \{A\} + \sigma \{B\}) \frac{z^7}{5040} \right] \{D_o^{III}\} \\
 & \dots \text{ (III.58) }
 \end{aligned}$$

A equação (III.58) permite determinar, de modo a proxímado, as derivadas do primeiro ao terceiro grau dos movimentos $\{D\}$ no topo, resultando as seguintes expressões:

$$\{D_H^I\} = (\{E\} + \sigma \{F\}) \{D_o^{II}\} + (\{G\} + \sigma \{H\}) \{D_o^{III}\}$$

$$\{D_H^{II}\} = (\{L\} + \sigma \{M\}) \{D_o^{II}\} + (\{E\} + \sigma \{F\}) \{D_o^{III}\}$$

$$\{D_H^{III}\} = (\{N\} + \sigma \{P\}) \{D_o^{II}\} + (\{L\} + \sigma \{M\}) \{D_o^{III}\}$$

onde:

$$\{E\} = \{I\} H + \{A\} \frac{H^3}{6} + \{A\} \{A\} \frac{H^5}{120}$$

$$\{F\} = \{B\} \frac{H^5}{120}$$

$$\{G\} = \{I\} \frac{H^2}{2} + \{A\} \frac{H^4}{24} + \{A\} \{A\} \frac{H^6}{720}$$

$$\{H\} = \{B\} \frac{H^6}{720} \dots \text{ (III.60) }$$

$$[L] = [I] + [A] \frac{H^2}{2} + [A][A] \frac{H^4}{24}$$

$$[M] = [B] \frac{H^4}{24} \dots\dots\dots (III.60) \text{ cont.}$$

$$[N] = [A] H + [A][A] \frac{H^3}{6}$$

$$[P] = [B] \frac{H^3}{6}$$

Levando as equações (III.59) nas duas últimas das equações (III.52) tem-se, finalmente:

$$\begin{bmatrix} ([L] + \sigma[M]) & ([E] + \sigma[F]) \\ ([R_1] + \sigma[T_1]) & ([R_2] + \sigma[T_2]) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_o^{II}\} \\ \{D_o^{III}\} \end{Bmatrix} = \{0\} \dots (III.61)$$

onde:

$$[R_1] = [J][N] - [S][E]$$

$$[T_1] = [J][P] - [S][F]$$

\dots\dots\dots (III.62)

$$[R_2] = [J][L] - [S][G]$$

$$[T_2] = [J][H] - [S][H]$$

A solução não trivial em $\{D_o^{II}\}$ e $\{D_o^{III}\}$ na equação (III.61) conduz a seguinte equação do 6º grau em σ :

$$\det. \begin{vmatrix} ([L] + \sigma[M]) & ([E] + \sigma[F]) \\ ([R_1] + \sigma[T_1]) & ([R_2] + \sigma[T_2]) \end{vmatrix} = 0 \dots (III.63)$$

As soluções σ_i da equação (III.63) levadas na equação (III.61) permitem determinar cinco das derivadas dos movimentos em função de apenas uma delas, cujo valor pode ser arbitrariamente escolhido. Com as derivadas $\left\{ D_o^{II} \right\}$ e $\left\{ D_o^{III} \right\}$ determinadas, a equação (III.58) permite determinar os correspondentes modos de vibração.

3.7.2 - Solução Pelo Método de RITZ-GALERKIN

O método de RITZ-GALERKIN (16) consiste em se tomar como solução aproximada para os movimentos funções do tipo:

$$\{D\} = [C] \{\phi\} \dots \dots \dots (III.64)$$

onde:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (III.65)$$

$|C|$ = matriz de constantes indeterminadas de ordem $(3 \times n)$

sendo $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ funções arbitrárias da ordenada Z .

Levando a equação (III-64) nas equações (III.24)

têm-se:

$$|C| \{ \phi_0 \} = \{ 0 \}$$

$$|C| \{ \phi_0^I \} = \{ 0 \}$$

..... (III.66)

$$|C| \{ \phi_H^{II} \} = \{ 0 \}$$

$$[J] (|C| \{ \phi_H^{III} \}) - [S] (|C| \{ \phi_H^I \}) = \{ 0 \}$$

As equações (III.66) permitem determinar 12 das constantes indeterminadas em função das outras $(3n-12)$ constantes.

Levando, agora, a equação (III.64) na equação (III.20) tem-se (onde $[K]$ é dada por (III.54)):

$$[J] (|C| \{ \phi^{IV} \}) - [S] (|C| \{ \phi^{II} \}) - \sigma [K] (|C| \{ \phi \}) = \{ \epsilon \} \quad (III.67)$$

sendo

$$\{ \epsilon \} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_U \\ \epsilon_V \\ \epsilon_W \end{array} \right\} \quad \text{..... (III.68)}$$

uma matriz de resíduos, pois $[C] \{ \phi \}$, naturalmente, não constitui a solução exata da equação (III.20). Convém salientar que esses resíduos representam esforços uniformemente distribuídos ao longo da altura que dependem de $(3n-12)$ constantes, contendo, ainda, expressões em σ .

Para determinar as $(3n-12)$ constantes ainda indeterminadas, admite-se nulo o trabalho virtual dos resíduos nas variações dos movimentos correspondentes, ou seja:

$$\int_0^H (\epsilon_U \frac{\partial U}{\partial C_j} + \epsilon_V \frac{\partial V}{\partial C_j} + \epsilon_W \frac{\partial W}{\partial C_j}) dz = 0 \quad \dots (III.69)$$

com $j = 1, 2, 3, \dots, (3n-12)$

A equação (III.69) conduz a um sistema de equações homogêneo nas $(3n-12)$ constantes do tipo:

$$[\bar{K}] [C] = 0 \quad \dots (III.70)$$

A solução não trivial da equação (III.70) implica em $\det. [\bar{K}] = 0$, que, por sua vez, permite determinar os valores de σ_i . Cada valor de σ_i levados na equação (III.69) permite determinar $(3n-13)$ constantes em função de apenas uma delas, cujo valor pode ser arbitrariamente adotado. Determinados os valores das constantes, a equação (III.64) permite determinar os correspondentes modos de vibração.

3.7.3. Solução Pelo Método de STODOLA-VIANELLO

O método de STODOLA-VIANELLO (17) consiste, também, em se tomar como solução aproximada para os movimentos funções do tipo:

$$\{D\}_1 = |C| \{\phi\} \dots\dots\dots (III.71)$$

porém:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (III.72)$$

$|C|$ = matriz de constantes indeterminadas de ordem (3x5)

sendo $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_5$ funções arbitrárias da ordenada Z.

Levando a equação (III.71) nas equações (III.24),

têm-se:

$$\begin{aligned} |C| \{\phi_0\} &= \{0\} \\ |C| \{\phi_0\} &= \{0\} \dots\dots\dots (III.73) \\ |C| \{\phi_H^{II}\} &= \{0\} \\ [J] \{\phi_H^{III}\} - [S] \{\phi_H^I\} &= \{0\} \end{aligned}$$

As equações (III.73) permitem determinar 12 das constantes indeterminadas em função de apenas 3 delas.

A equação (III.20) pode ser escrita na forma:

$$\{D^{IV}\} = [A] \{D^{II}\} + \sigma[B] \{D\} \dots\dots\dots (III.74)$$

onde [A] e [B] são dadas por (III-56)

Levando, agora, a equação (III.71) no segundo membro da equação (III.74), obtêm-se:

$$\{D^{IV}\} = [A] (|C| \{\phi^{II}\}) + \sigma[B] (|C| \{\phi\})$$

Integrando quatro vezes, obtêm-se uma segunda aproximação para os deslocamentos:

$$\begin{aligned} \{D\}_2 = [A] \left\{ |C| \left(\iint \{\phi\} dz dz \right) \right\} + \\ + \sigma[B] \left\{ |C| \left(\iiint \{\phi\} dz^4 \right) \right\} + |C_1| \{Z\} \\ \dots\dots\dots (III.75) \end{aligned}$$

onde

$$\{Z\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (III.76)$$

$|C_1|$ = Matriz de constantes de integração de ordem (3x4)

A equação (III.75) levada nas equações (III.73) permite determinar as constantes de integração $|C_1|$ em função, ainda, daquelas 3 constantes indeterminadas presentes na matriz $|C|$ da equação (III.75).

Sendo aproximada a solução expressa na equação (III.71) tem-se, naturalmente:

$$[D]_1 \neq [D]_2 \dots\dots\dots (III.77)$$

No método de STODOLA-VIANELLO, admite-se igual, em média, os movimentos $[D]_1$ e $[D]_2$, ou seja:

$$\int_0^H [D]_1 dZ = \int_0^H [D]_2 dZ \dots\dots\dots (III.78)$$

A equação (III.78), tendo em vista as equações (III.71) e (III.75), pode ser escrita na forma:

$$|C| \left(\int_0^H \{\phi\} dZ \right) = [A] \left\{ |C| \left(\int_0^H \left(\iint \{\phi\} dZ dZ \right) dZ \right) \right\} + \\ + \sigma [B] \left\{ |C| \left(\int_0^H \left(\iiint \{\phi\} dZ^4 \right) dZ \right) \right\} + |C_1| \left\{ \int_0^H [Z] dZ \right\} \\ \dots\dots\dots (III.79)$$

A equação (III.79) conduz a um sistema de equações homogêneo nas três constantes ainda não determinadas do tipo:

$$[\bar{K}] \{C\} = \{0\} \dots\dots\dots (III.80)$$

A solução não trivial da equação (III.80), nas três constantes ainda não determinadas, implica em $\det. [\bar{K}] = 0$, que, por sua vez, conduz a uma equação do terceiro grau em σ . Determinados os valores de σ , ficam, por conseguinte, determinados os correspondentes modos de vibração que podem ser dados ou por (III.71), ou por (III.75).

Percebe-se, facilmente, que o procedimento aqui apresentado é iterativo, partindo-se agora da aproximação para $\{D\}_2$ dada pela equação (III.75). O número de iterações pode ser determinado dependendo da precisão desejada, cuja verificação pode ser observada, por exemplo, na desigualdade (III.77).

Os modos mais altos de vibração podem ser obtidos, de modo aproximado, tomando-se na equação (III.71) uma solução (ver anexo V) do tipo:

$$\{D_2\}_1 = \{D^*\} - \{D\}_1 \int_0^H \{D\}_1^T [K] \{D^*\} dz \quad \dots (III.81)$$

onde $\{D^*\}$ contém funções arbitrárias. Torna-se necessário, além disso, escolher convenientes constantes contidas em $\{D\}_1$ de modo a se satisfazer a condição de ortogonalidade:

$$\int_0^H \{D\}_1^T [K] \{D_2\}_1 dz = 0 \quad \dots \dots \dots (III.82)$$

A equação (III.81) permite, por recorrência, obter os outros modos mais altos de vibração

8º EXEMPLO NUMÉRICO

Estuda-se agora o edifício de 10 andares visto em planta na figura III-14. Tal edifício possui andares idênticos igualmente espaçados por pês direito de 3,0m. Admite-se módulo de elasticidade $E = 100\text{tf/cm}^2$ e uma carga vertical uniformemente distribuída nos andares $q = 1,0\text{tf/m}^2$.

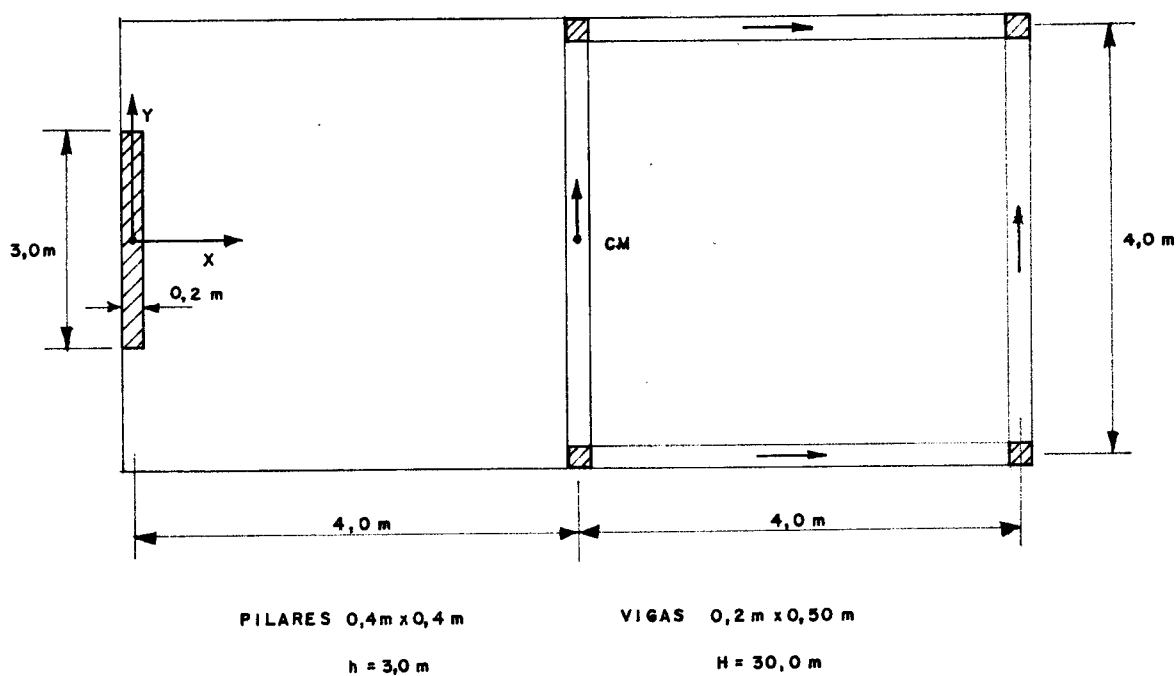


FIG. III . 14 - PLANTA DE UM EDIFÍCIO DE 10 ANDARES

As características dos painéis são:

$$s_f = 1,52 \cdot 10^3 \text{tf} \quad (\text{pórticos})$$

$$j_p = 0,4510^6 \text{tf.m}^2 \quad (\text{parede})$$

As características do edifício para o sistema de referência indicado na figura III-14 são:

$$S_{aa} = 2 \times 1,5210^3 = 3,0410^3 \text{tf}$$

$$S_{bb} = 2 \times 1,5210^3 = 3,0410^3 \text{tf}$$

$$S_{cc} = 2 \times 1,5210^3 \times 2^2 + 1,5210^3 (4^2 + 8^2) = 133,7610^3 \text{tfm}^2$$

$$S_{bc} = 1,5210^3 (4+8) = 18,2410^3 \text{tf.m}$$

$$J_{bb} = 0,4510^6 \text{tf.m}^2$$

$$a = 4,0\text{m} \quad ; \quad b = 0$$

$$m = \frac{1 \times 4 \times 8}{3 \times 10} = 1,07 \text{t/m} \quad (g = 10 \text{m/seg}^2)$$

$$J_m = \frac{1}{3 \times 10} \left[\frac{8 \times 4^3}{12} + \frac{4 \times 8^3}{12} \right] = 7,11 \text{t.m}$$

$$d^2 = \frac{7,11}{1,07} + 4^2 = 22,25 \text{m}^2$$

Com esses valores numéricos a equação (III.20)

fica:

$$10^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U^{IV} \\ V^{IV} \\ W^{IV} \end{Bmatrix} - 10^3 \begin{vmatrix} 3,04 & 0 & 0 \\ 0 & 3,04 & 18,24 \\ 0 & 18,24 & 133,76 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U^{II} \\ V^{II} \\ W^{II} \end{Bmatrix} - \sigma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 22,25 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

As condições de fronteira, expressas nas equações (III.24), com os valores numéricos adotados e, tendo em vista a degeneração do conjunto de paredes ($\det.[J] = 0$), ficam:

$$U_o = V_o = 0$$

$$U_H^I = V_o^I = W_o = 0$$

$$V_H^{II} = 0$$

$$0,45 \cdot 10^6 V_H^{III} - 3,04 \cdot 10^3 V_H^I - 18,24 \cdot 10^3 W_H^I = 0$$

$$18,24 \cdot 10^3 V_H^I + 133,76 \cdot 10^3 W_H^I = 0$$

Dada a simetria do edifício em relação ao plano que contém os eixos OX e OZ, o movimento U (segundo OX) é independente, apresentando os seguintes períodos de vibração (vide eqs.(II.26) e (II.27)):

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{1,07 \times 30^2}{3,04 \cdot 10^3}} = 2,25 \text{ seg}$$

$$T_2 = 1,33 \sqrt{\frac{1,07 \times 30^2}{3,0410^3}} = 0,748 \text{ seg}$$

$$T_3 = 0,80 \sqrt{\frac{1,07 \times 30^2}{3,0410^3}} = 0,450 \text{ seg}$$

Como aplicação das soluções aproximadas apresentadas estudam-se, em seguida, os nodos múltiplos de vibração nos movimentos V e W, levando-se em consideração que a degeneração do conjunto de paredes do edifício em questão torna indefinida a matriz $[J]^{-1}$. Contudo, as modificações a serem introduzidas são de pequena monta e dispensam explicações adicionais.

A) Solução Por Série De Potências

Adotam-se como soluções aproximadas para os movimentos V e W os desenvolvimentos em séries de potências:

$$V = V_0 + V_0^I Z + \frac{1}{2} V_0^{II} Z^2 + \frac{1}{6} V_0^{III} Z^3 + \frac{1}{24} V_0^{IV} Z^4 + \frac{1}{120} V_0^V Z^5 + \frac{1}{720} V_0^{VI} Z^6 + \\ + \frac{1}{5040} V_0^{VII} Z^7$$

$$W = W_0 + W_0^I Z + \frac{1}{2} W_0^{II} Z^2 + \frac{1}{6} W_0^{III} Z^3 + \frac{1}{24} W_0^{IV} Z^4 + \frac{1}{120} W_0^V Z^5$$

As equações das vibrações livres nos movimentos V e W podem ser escritas na forma (no sistema de equações

original, substituiu-se, na equação correspondente ao movimento V , a expressão de W^{II} dada pela equação correspondente ao movimento W):

$$V^{IV} = 1,228.10^{-3} V^{II} + 1,005.10^{-6} \sigma V + 2,149.10^{-6} \sigma W$$

$$W^{II} = -136,4.10^{-3} V^{II} - 30,04.10^{-6} \sigma V - 166,3.10^{-6} \sigma W$$

Essas equações permitem determinar as derivadas de ordem superior em função das de ordem inferior. Tendo em vista as condições de fronteira da base ($Z=0$) têm-se:

$$V_o^{IV} = 1,228.10^{-3} V_o^{II}$$

$$W_o^{II} = -136,4.10^{-3} V_o^{II}$$

$$V_o^V = 1,228.10^{-3} V_o^{III} + 2,149.10^{-6} \sigma W_o^I$$

$$W_o^{III} = -136,4.10^{-3} V_o^{III} - 166,3.10^{-6} \sigma W_o^I$$

$$V_o^{VI} = (1,508 + 0,712\sigma) 10^{-6} V_o^{II}$$

$$W_o^{IV} = (-167,5 - 7,36\sigma) 10^{-6} V_o^{II}$$

$$V_o^{VII} = (1,508 + 0,712\sigma) 10^{-6} V_o^{III} + \\ + (2,639\sigma - 0,3574\sigma^2) 10^{-9} W_o^I$$

$$W_o^V = (-167,5 - 7,36\sigma)10^{-6}V_o^{III} +$$

$$+ (-293,1\sigma + 27,65\sigma^2)10^{-9}W_o^I$$

$$V_o^{VIII} = (1,852 - 1,748\sigma - 0,01582\sigma^2)10^{-9}V_o^{II}$$

$$W_o^{VI} = (-205,7 - 106,2\sigma + 1,224\sigma^2)10^{-9}V_o^{II}$$

As condições de fronteira do topo ($Z=H$) implicam em:

$$\begin{vmatrix} (1,604 + 0,02403\sigma) & (35,83 + 0,1442\sigma) & (102,1\sigma - 0,7238\sigma^2)10^{-4} \\ (-1,98 + 3,572\sigma) & (3991,0 + 28,254\sigma) & (-40,53 + 3,982\sigma - 0,04744\sigma^2) \\ (0,29 - 0,0987\sigma) & (1,44 - 0,9564\sigma) & (7,333 - 0,546 + 0,006481\sigma^2) \end{vmatrix} \times \begin{Bmatrix} V_o^{II} \\ V_o^{III} \\ W_o^{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A solução não trivial em V_o^{II} , V_o^{III} e W_o^I conduz a uma equação do quarto grau em σ possuindo duas raízes reais e duas complexas. As raízes reais são:

$$\sigma_1 = 17 \quad T_1 = 1,58 \text{ seg}$$

$$\sigma_2 = 62 \quad T_2 = 0,825 \text{ seg}$$

Assumindo $W_o^I = 1$, encontram-se:

a) primeiro modo múltiplo de vibração ($\sigma_1 = 17$)

$$V = (12,41z^2 - 0,4472z^3 + 1,27 \cdot 10^{-3}z^4 + 0,277 \cdot 10^{-3}z^5 + 0,4692 \cdot 10^{-6}z^6 - 0,0188 \cdot 10^{-6}z^7) \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_V = +0,011$$

$$W = z - 1,693 \cdot 10^{-3}z^2 - 0,4102 \cdot 10^{-3}z^3 - 0,3026 \cdot 10^{-6}z^4 + 0,0316 \cdot 10^{-6}z^5$$

$$\varepsilon_W = -0,0416$$

b) segundo modo múltiplo de vibração ($\sigma = 62$)

$$V = -0,0607z^2 + 0,763 \cdot 10^{-4}z^3 - 0,621 \cdot 10^{-5}z^4 + 1,12 \cdot 10^{-6}z^5 + 0,769 \cdot 10^{-8}z^6 - 0,236 \cdot 10^{-9}z^7$$

$$\varepsilon_V = -0,097$$

$$W = z + 8,27 \cdot 10^{-3}z^2 - 1,73 \cdot 10^{-3}z^3 + 3,15 \cdot 10^{-6}z^4 + 0,732 \cdot 10^{-6}z^5$$

$$\varepsilon_W = +0,256$$

B) Solução Pelo Método De RITZ-GALERKIN

Aditem-se, como solução aproximada para os movimentos V e W as seguintes funções:

$$\begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{Bmatrix}$$

Impondo-se as condições de fronteira a essa solução têm-se:

$$C_{11} = 0$$

$$C_{21} = C_{12} = 0$$

$$C_{14} = -0,02568 C_{13}$$

$$C_{15} = 24,2810^{-5} C_{13}$$

$$C_{23} = 0,03838 C_{13} - 0,01667 C_{22}$$

Os movimentos V e W, por conseguinte, ficam expressos por:

$$V = (24,2810^{-5} z^4 - 0,02568 z^3 + z^2) C_{13}$$

$$W = (-0,03838 z^2) C_{13} + (-0,01667 z^2 + z) C_{22}$$

Levando essas soluções dos movimentos V e W nas equações das vibrações livres, têm-se os resíduos:

$$\epsilon_V = [-2057,8 + 468,4Z - 8,857Z^2 + (-0,8465Z^2 + 0,02568Z^3 - 2,428 \cdot 10^{-4} Z^4)\sigma] C_{13} + [608,12 + (-4Z + 0,06667Z^2)\sigma] C_{22}$$

$$\epsilon_W = [53,14Z^2 - 2810,4Z + 26211,8 + (9,712 \cdot 10^{-4} Z^4 - 0,1027Z^3 + 3,146Z^2)\sigma] C_{13} + [-4458,7 + (-0,3708Z^2 + 22,25Z)\sigma] C_{22}$$

As variações dos movimentos são:

$$\frac{\partial V}{\partial C_{13}} = 24,2810^{-5} Z^4 - 0,02568Z^3 + Z^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial C_{13}} = -0,03838Z^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial C_{22}} = -0,01667Z^2 + Z$$

Admitindo nulo o trabalho virtual dos resíduos ϵ_V e ϵ_W nas variações dos movimentos correspondentes tem-se:

$$10^{-6} \left[\int_0^{30} (\epsilon_V \frac{\partial V}{\partial C_{13}} + \epsilon_W \frac{\partial W}{\partial C_{13}}) dz \right] = (20,697 - 1,144\sigma) C_{13} + (4,569 - 0,3659\sigma) C_{22} = 0$$

$$10^{-5} \left[\int_0^{30} \epsilon_W \frac{\partial W}{\partial C_{22}} dz \right] = (-14,87 + 1,585\sigma) C_{13} +$$

$$+ (-13,38 + 0,801\sigma) C_{22} = 0$$

A solução não trivial desse sistema nas constantes C_{13} e C_{22} implica em:

$$\sigma_1 = 14,63 \quad \therefore \quad T_1 = 1,70$$

$$\sigma_2 = 42,44 \quad \therefore \quad T_2 = 0,998$$

Admitindo $C_{22} = 1,0$ têm-se os seguintes modos de vibração:

a) Primeiro modo múltiplo ($\sigma = 14,63$)

$$V = 4,8110^{-5} Z^4 - 5,0810^{-3} Z^3 + 0,193 Z^2$$

$$W = -0,0242 Z^2 + Z$$

b) Segundo modo múltiplo ($\sigma = 42,44$)

$$V = -9,5510^{-5} Z^4 + 0,0101 Z^3 - 0,394 Z^2$$

$$W = -1,5610^{-3} Z^2 + Z$$

C) Solução Pelo Método De STODOLA-VIANELLO

Admitem-se como solução aproximada para os movimentos V e W as seguintes funções que satisfazem as condições de fronteira:

$$V_1 = (24,2810^{-5}Z^4 - 0,02568Z^3 + Z^2)C_{13}$$

$$W_1 = (-0,03838Z^2)C_{13} + (-0,01667Z^2 + Z)C_{22}$$

A equação das vibrações livres nos movimentos V e W pode ser escrita na forma:

$$V^{IV} = 6,755.10^{-3}V^{II} + 0,04053W^{II} + 2,222.10^{-6}\sigma V + 8,889.10^{-6}\sigma W$$

$$W^{II} = -0,1364V^{II} - 0,1663.10^{-3}\sigma W - 2,99.10^{-5}\sigma V$$

Levando a solução aproximada no segundo membro dessas equações e integrando quatro vezes a primeira e duas vezes a segunda, ambos os membros, têm-se:

$$V_2 = [0,434.10^{-3}Z^4 - 8,67.10^{-6}Z^5 + 5,47.10^{-8}Z^6 + \sigma(0,616.10^{-5}Z^6 - 0,678.10^{-10}Z^7 + 0,321.10^{-12}Z^8)] C_{13} + [6,72.10^{-3}Z^3 - 5,63.10^{-6}Z^4 + \sigma(0,741.10^{-7}Z^5 - 0,412.10^{-9}Z^6)] C_{22}$$

$$+ 0,167\bar{c}_{14}z^3 + 0,500\bar{c}_{13}z^2 + \bar{c}_{12}z + \bar{c}_{11}$$

$$W_2 = [-0,136z^2 + 3,49 \cdot 10^{-3}z^3 - 3,30 \cdot 10^{-5}z^4 + \\ + \sigma(-0,196 \cdot 10^{-5}z^4 + 3,84 \cdot 10^{-8}z^5 - 2,42 \cdot 10^{-10}z^6)] c_{13} \\ + [\sigma(-0,277 \cdot 10^{-4}z^3 + 0,231 \cdot 10^{-6}z^4)] c_{22} + \\ + \bar{c}_{22}z + \bar{c}_{21}$$

Impondo as condições de fronteira a estas novas soluções V_2 e W_2 , têm-se:

$$\bar{c}_{11} = 0$$

$$\bar{c}_{12} = \bar{c}_{21} = 0$$

$$\bar{c}_{13} = (-0,4468 + 0,1218\sigma)c_{13} + (-0,4637 + 0,03718\sigma)c_{22}$$

$$\bar{c}_{14} = (-0,02926 - 0,00655\sigma)c_{13} + \\ (-0,004810 - 0,002239\sigma)c_{22}$$

$$\bar{c}_{22} = (3,248 - 0,06907\sigma)c_{13} + (0,5339 + 0,002479\sigma)c_{22}$$

Assim sendo, V_1 , W_1 , V_2 e W_2 dependem apenas das constantes c_{13} e c_{22} . Fazendo, agora:

$$\int_0^{30} V_1 dZ = \int_0^{30} V_2 dZ$$

$$\int_0^{30} W_1 dZ = \int_0^{30} W_2 dZ$$

tem-se:

$$\begin{vmatrix} (-6829,8+338,4\sigma) & (-1154,6+99,48\sigma) \\ (1127,9-36,7\sigma) & (-59,72-3,37\sigma) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} C_{13} \\ C_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A solução não trivial nas constantes C_{13} e C_{22} implica em:

$$\sigma_1 = 14,98 \quad T_1 = 1,68 \text{ seg}$$

$$\sigma_2 = 45,50 \quad T_2 = 0,963 \text{ seg}$$

Assumindo $C_{22} = 1$, têm-se os seguintes modos de vibração:

a) Primeiro modo múltiplo ($\sigma = 14,98$)

$$V_1 = 4,64 \cdot 10^{-5} Z^4 - 4,90 \cdot 10^{-3} Z^3 + 0,191 Z^2$$

$$V_2 = -0,0918 \cdot 10^{-11} Z^8 + 0,194 \cdot 10^{-9} Z^7 - 0,0161 \cdot 10^{-6} Z^6 - \\ - 0,55 \cdot 10^{-6} Z^5 + 0,0259 \cdot 10^{-3} Z^4 - 3,64 \cdot 10^{-3} Z^3 + 0,178 Z^2$$

$$W_1 = -0,024Z^2 + Z$$

$$W_2 = -6,9210^{-10}Z^6 + 10,9810^{-8}Z^5 - 0,84610^{-5}Z^4 + \\ + 0,25310^{-3}Z^3 - 0,026Z^2 + 0,994Z$$

b) Segundo modo múltiplo ($\sigma = 45,50$)

$$V_1 = -9,5710^{-5}Z^4 + 10,1210^{-3}Z^3 - 0,394Z^2$$

$$V_2 = 0,57510^{-11}Z^8 - 1,21710^{-9}Z^7 + 0,087810^{-6}Z^6 + \\ + 6,7810^{-6}Z^5 - 0,11510^{-3}Z^4 + 0,0105Z^3 - 0,391Z^2$$

$$W_1 = -1,5410^{-3}Z^2 + Z$$

$$W_2 = 43,3810^{-10}Z^6 - 68,8210^{-8}Z^5 + 5,8710^{-5}Z^4 - \\ - 2,6410^{-3}Z^3 + 0,0536Z^2 + 0,606Z$$

A seguir são comparadas os resultados obtidos pelos três processos aproximados sugeridos. Os modos de vibração são mostrados na figura III-15.

	T_1	T_2
S. Potências	1,58 seg	0,825 seg
GALERKIN	1,70 seg	0,998 seg
STODOLA	1,68 seg	0,963 seg

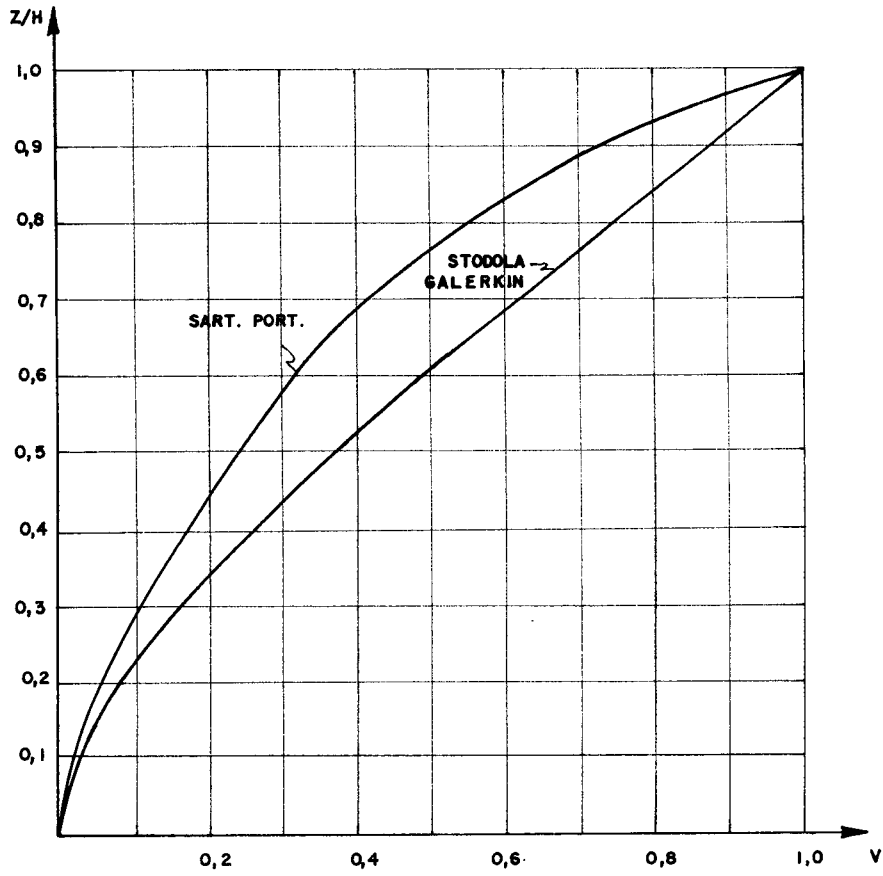


FIG. III - 15 a) PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO EM V

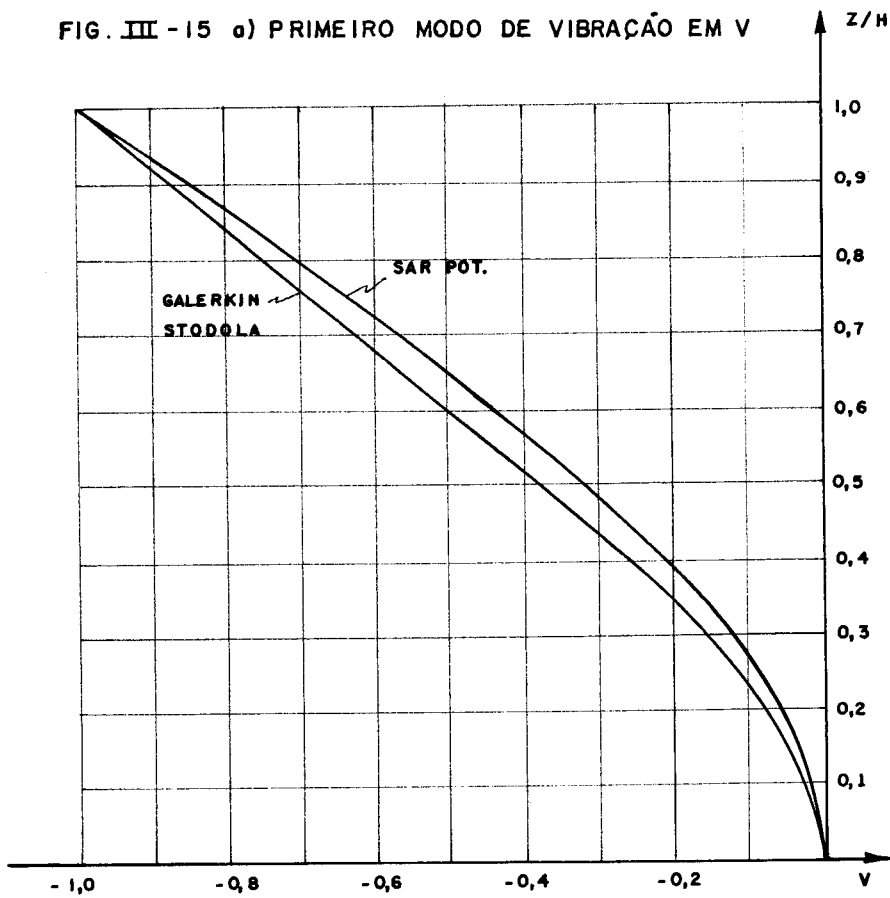


FIG. III - 15 b) SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO EM V

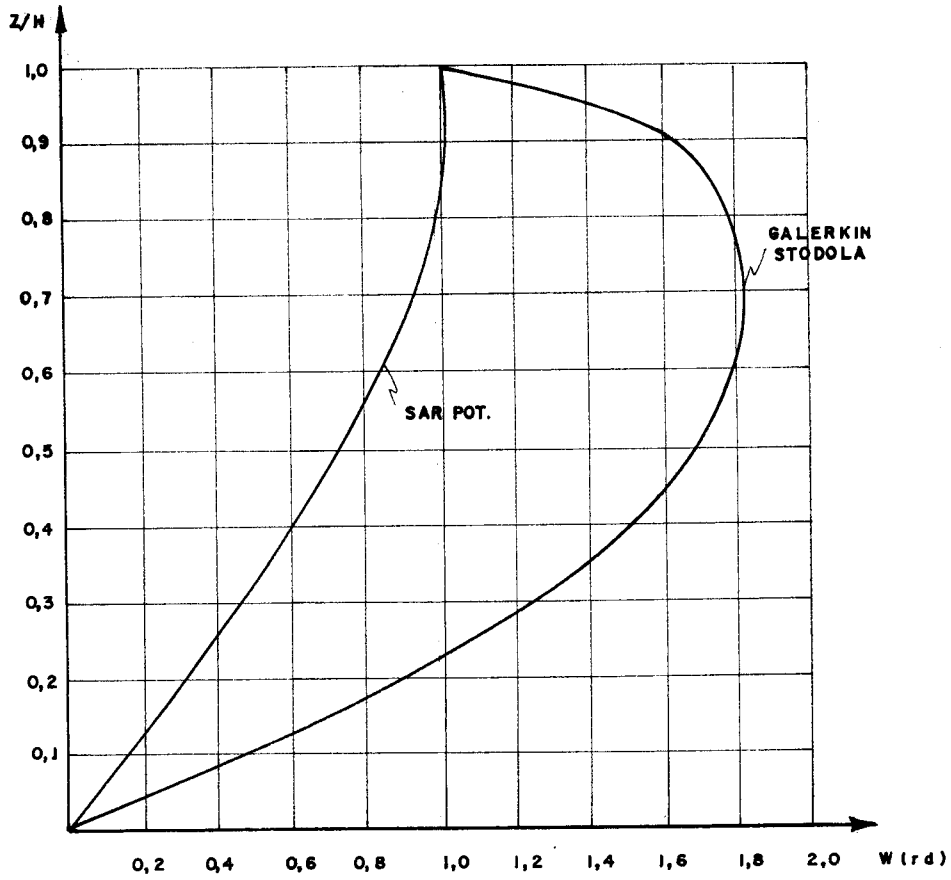


FIG. III - 15 c) PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO EM W

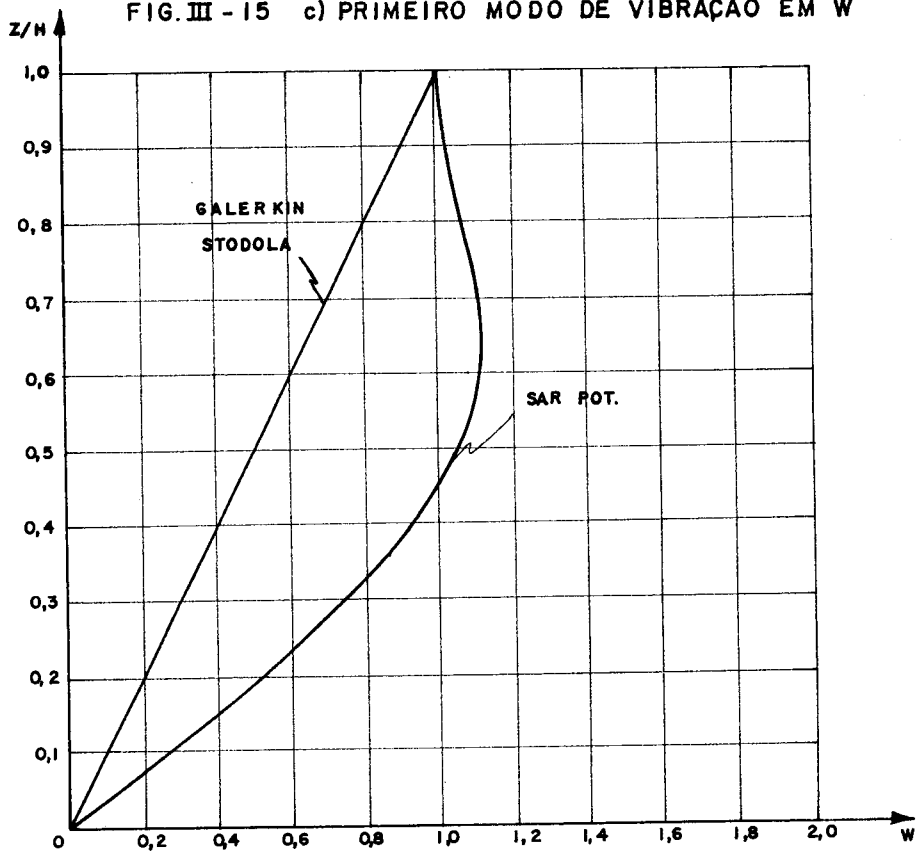


FIG. III - 15 d) SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO EM W

Os resultados comparados exibem pouca discrepância. Os modos de vibração encontrados para o movimento V exibem comportamento típico de paredes (vide fig. II-2); por outro lado, os modos de vibração no movimento W apresentam comportamento próximo de pórticos (vide fig. II-4).

Convém ressaltar que, na aplicação numérica dos métodos aproximados apresentados, as soluções aproximadas foram adotadas tendo em vista obter apenas os dois primeiros modos múltiplos de vibração nos movimentos V e W. Desenvolvidos em série de potências com termos de maior grau, e polinômios de ordem mais elevada na técnica de RITZ-GALERKIN, permitem obter um número maior de modos de vibração, melhorando a precisão nos modos mais baixos. Por outro lado, o método de STODOLA-VIANELLO melhora a precisão dos primeiros modos de vibração com um número maior de iterações.

CAPÍTULO IV

OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

A técnica do meio contínuo, admitida a regularidade da estrutura em planta e em elevação, descreve o comportamento de conjunto da estrutura em função de um número reduzido de parâmetros elásticos e geométricos permitindo, por conseguinte, uma melhor visualização desse comportamento e da maneira como a variação daqueles parâmetros influi nos resultados. Por outro lado, as técnicas matriciais (discretas) são mais gerais e permitem tratar estruturas de geometria mais variada, quer em planta, quer em elevação; entretanto, exigem sempre (25) um elevado número de parâmetros.

Percebe-se facilmente que a técnica do meio contínuo, do modo proposto, pode ser generalizada de modo a se levar em consideração, por exemplo, as interações verticais entre os painéis que se intersectam, a variação da rigidez do longo da altura e fundações elásticas. Do ponto de vista dinâmico, pode se levar em consideração, por exemplo, os movimentos verticais, a variação da massa ao longo da altura, bem como a variação do centro de massa. Contudo, tais considerações aumentam consideravelmente o número de parâmetros necessários à análise e, além disso, o sistema de equações resultante torna-se de difícil solução, mesmo nos casos mais simples.

A consideração de fundações elásticas tem sido feita em alguns casos planos (7) (8) (9), considerando-se, também, em alguns trabalhos, os movimentos verticais (8), sen, contudo, complicar demasiadamente a solução. Entretanto, nos casos tridimensionais aquela consideração introduz complicações adicionais já na análise estática (26), pois tornam-se necessários alguns artifícios analíticos de modo a compatibilizar as rotações dos painéis na base da estrutura.

As interações verticais entre os painéis que se interseptam elevam o número de equações resultantes (14) e, por conseguinte, complicam a resolução. A consideração dos movimentos verticais exige, de início, um critério estranho à técnica do meio contínuo para a distribuição da massa do andar segundo esses movimentos.

A aplicação da técnica do meio contínuo, da maneira exposta, conduz a soluções bastante simples para a maioria dos casos usuais, pois é bastante frequente a existência de edifícios de grande altura com estruturas regulares e simétricas em relação a dois planos verticais ortogonais (25).

As soluções aproximadas sugeridas para os casos onde a estrutura não respeita condições de simetria e seja constituída pela associação de diversos tipos de painéis, apesar de algumas dificuldades de ordem numérica, tendo em vista cálculo manual, resolvem satisfatoriamente o problema, inclusive permitindo, algumas delas, uma avaliação do

erro contido na análise. A esse respeito, convém ressaltar que é bastante comum, em soluções aproximadas, uma convergência mais acentuada nos auto-valores (no caso frequências naturais) que nas auto-funções (modos de vibração), onde se conhece a ordem de grandeza do erro cometido.

Os resultados comparados mostram haver uma razoável coincidência entre os valores aqui obtidos e aqueles obtidos por técnicas já consagradas.

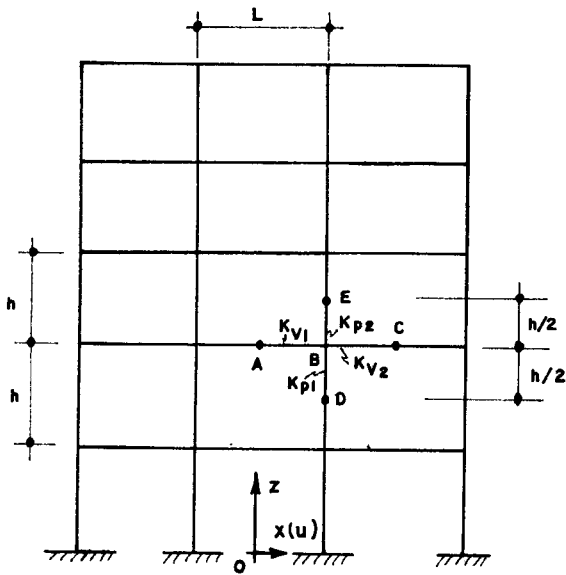
A solução pela técnica do meio contínuo, assim como os demais modelos matemáticos e mesmo a experimentação em modelos de escala conveniente (27), propostos para a análise das vibrações livres de estruturas de edifícios altos, tem por objetivo, naturalmente, prever o comportamento real. Entretanto, como é sabido, nenhum modelo permite prever o comportamento real com absoluta precisão(27). Evidentemente, cada modelo proposto possui, dependendo das circunstâncias e do que se pretende, um campo de aplicação.

ANEXO I

RIGIDEZ DO PÓRTICO À FORÇA CORTANTE

Em pórticos regulares, onde a rigidez dos pilares não é exageradamente maior que a das vigas, pode-se admitir momento fletor nulo no centro dos vãos de vigas e pilares. Segundo GRINTER (24), no andar térreo, o ponto de momento fletor nulo, nos pilares, situa-se à $0,55h$ (vide fig. AI-1) acima da base, podendo também situar-se a $0,60h$, ou mesmo $0,65h$, quando as vigas do primeiro andar são pouco rígidas. Nas vigas o ponto de momento nulo no vão extremo ocorre em torno de $0,55L$ do pilar externo; nos vãos centrais a variação já é menor sendo em torno de $0,52L$ para um lado ou para o outro.

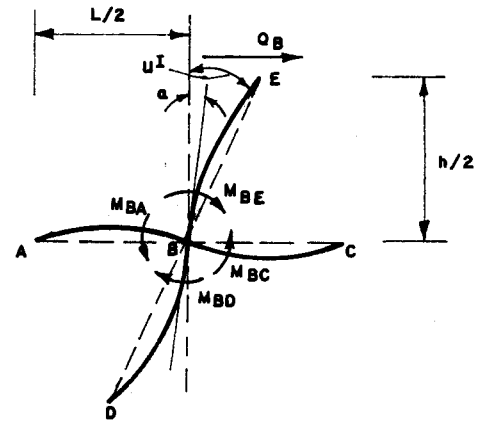
A figura AI-1a) mostra um pórtico genérico e um sistema de coordenadas oxz situado na base com eixo oz vertical. Admitindo indeformáveis, no sentido axial, vigas e pilares, na situação deformada (impondo um estado de deslocamento horizontal $u = u(z)$), as barras que concorrem em um dado nó apresentam a configuração mostrada na figura AI-1b). Na técnica do meio contínuo admite-se que o giro da corda do pilar tenha o mesmo valor da derivada do deslocamento horizontal u ao nível do andar considerado (convém salientar que o deslocamento u refere-se ao conjunto).



a) PÓRTICO GENÉRICO

$$k_{pi} = \frac{J_{pi}}{h_i}$$

$$k_{vj} = \frac{J_{vj}}{L_j}$$



b) CONFIGURAÇÃO APÓS A DEFORMAÇÃO

FIG. AI-1 - PÓRTICO GENÉRICO E DEFORMAÇÃO TÍPICA

Tendo em vista a notação e os sentidos dos momentos atuantes no nó B, mostrados na figura AI-1b), tem-se as seguintes expressões:

$$M_{BE} = 6EK_{P2}(u^I - a)$$

$$M_{BD} = 6EK_{P2}(u^I - a)$$

..... (AI-1)

$$M_{BA} = 6EK_{V1}(a)$$

$$M_{BC} = 6EK_{V2}(a)$$

O equilíbrio dos momentos aplicados ao nó B implica em:

$$a = \frac{K_{P1} + K_{P2}}{K_{P1} + K_{P2} + K_{V1} + K_{V2}} u^I \quad \dots\dots\dots (AI-II)$$

A força cortante no pilar (Q_B) é dada por:

$$Q_B = \frac{2M_{BE}}{h} \quad \dots\dots\dots (AI-III)$$

Levando a equação (AI-II) na primeira das equações (AI-I) e posteriormente na equação (AI-III) tem-se:

$$Q_B = \frac{12E}{h} K_{P2} \frac{\sum_{n.v.} K}{\sum_{n.b.} K} u^I \quad \dots\dots\dots (AI-IV)$$

onde n.v. e n.b. indicam ser a somatória estendida, respectivamente, a todas as vigas e a todas as barras (vigas e pilares) que concorrem no nó considerado (vide eq. (AI-II)).

A força cortante no pórtico obtém-se somando a contribuição de todos os pilares, ou seja:

$$Q = \frac{12E}{h} \sum_{n.a.} K_{P.n.} \frac{\sum_{n.v.} K}{\sum_{n.b.} K} u^I \quad \dots\dots\dots (AI-V)$$

onde n.a. indica ser a somatória estendida a todos os nós no andar considerado e $K_{P.n.}$ a relação J/l do pilar logo acima do nó considerado.

A equação (AI-V) permite escrever:

$$Q = s_f u^I \dots\dots\dots (AI-VI)$$

onde:

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a.} K_{p.n.} \frac{\sum_{n.v.}^K}{\sum_{n.b.}^K} \dots\dots\dots (AI-VII)$$

ANEXO II

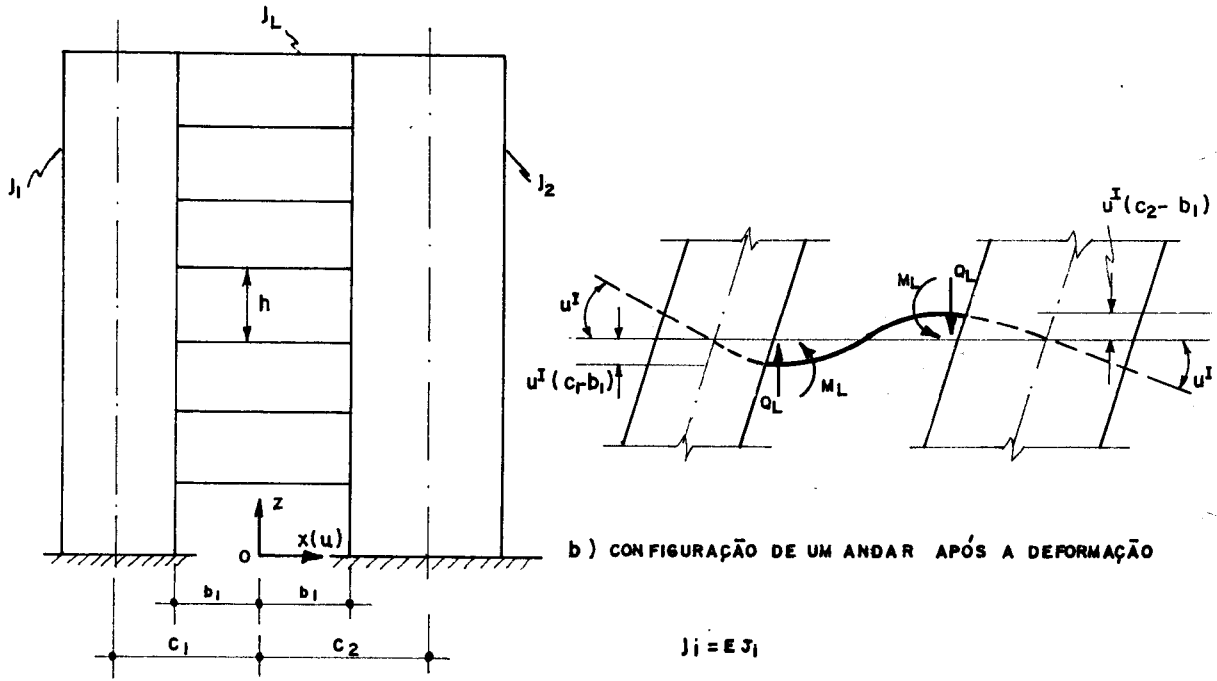
COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA ASSOCIAÇÃO DE
PAREDES POR LINTÊIS

Na associação de paredes por lintéis, dada a grande rigidez ao momento fletor das paredes, é lícito admitir os lintéis engastados nas mesmas. No presente estudo, admite-se, também, indeformável axialmente lintéis e paredes, bem como desprezível a contribuição no deslocamento horizontal da deformação por força cortante nas paredes. Convém ressaltar que a deformação axial das paredes assume importância significativa quando o painel possui um número elevado de andares.

A figura AII-1a) mostra a associação de duas paredes por lintéis, onde indica-se também um sistema de coordenadas oxz , com o eixo oz vertical. A configuração de um andar, impondo-se um estado de deslocamentos horizontais u , tem o aspecto mostrado na figura AII-1b). Seguindo a notação e os sentidos expostos na figura AII-1, têm-se as seguintes relações:

$$M_L = \left[\frac{6j_L}{2b_1} + \frac{6j_L}{4b_1^2} (C_1 + C_2 - 2b_1) \right] u' = \frac{3j_L}{2b_1} \left[2 + \frac{C_1 + C_2 - 2b_1}{b_1} \right] u'$$
$$Q_L = \left[\frac{12j_L}{8b_1^3} (C_1 + C_2 - 2b_1) + \frac{12j_L}{4b_1^2} \right] u' = \frac{3j_L}{2b_1^3} (C_1 + C_2) u'$$

..... (AII.1)



a) ASSOCIAÇÃO DE PAREDES POR LINTÉIS

FIG. A II-1. ASSOCIAÇÃO DE PAREDES POR LINTÉIS E DEFORMAÇÃO CARACTERÍSTICA

Na técnica do meio contínuo, os esforços de interação entre as paredes e o lintel (M_L e Q_L), concentrados ao nível dos andares, são supostos uniformemente distribuídos na altura h , ou seja (vide figura AII-2):

$$q_1 = \frac{Q_L}{h}$$

..... (AII.2)

$$q_2 = \frac{M_L}{h}$$

É fácil notar que tal procedimento conduz a uma simulação mais aproximada do problema real quanto maior for o número de andares.

A figura AII-2 mostra um elemento diferencial da associação de paredes por lintéis, indicando-se os esforços de interação entre os lintéis e as paredes já uniformemente distribuídas ao longo da altura dz . Posto isso, com a notação e os sentidos positivos indicados na figura AII-2, as equações de equilíbrio nas paredes são dadas por:

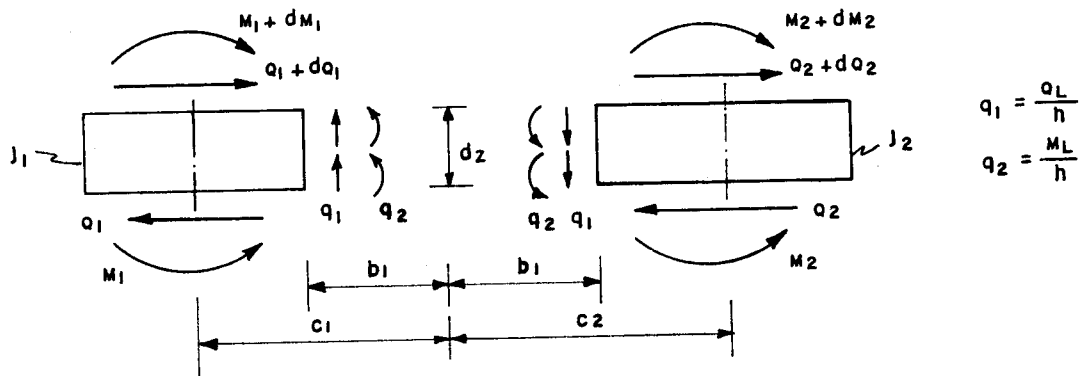


FIG. A II-2 - ELEMENTO DIFERENCIAL DA ASSOCIAÇÃO DE PAREDES POR LINTÉIS - MEIO CONTÍNUO

$$M_1^I + Q_1 - q_1(C_1 - b_1) - q_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (AII.3)$$

$$M_2^I + Q_2 - q_1(C_2 - b_1) - q_2 = 0$$

Combinando as duas equações (AII-3), e tendo em vista a relação entre momento e curvatura, ($M = ju^{II}$), tem-se:

$$(j_1 + j_2)u^{III} + Q - q_1(C_1 + C_2 - 2b_1) - 2q_2 = 0 \quad \dots (AII.4)$$

onde Q é a força cortante no conjunto ($Q = Q_1 + Q_2$).

As equações (AII-1), (AII-2) e (AII-4) permitem, finalmente, escrever:

$$Q = -(j_1 + j_2)u^{III} + \frac{3j_L}{2h} \left[\frac{(C_1 + C_2)^2}{b_1^3} \right] u^I \quad \dots (AII.5)$$

A equação (AII.5) pode ser escrita, ainda, na forma:

$$Q = -j_p u^{III} + s_f u^I \quad \dots\dots\dots (AII.6)$$

onde: $j_p = j_1 + j_2$

$$\dots\dots\dots (AII.7)$$

$$s_f = \frac{3j_L}{2j} \left[\frac{(C_1 + C_2)^2}{b_1^3} \right]$$

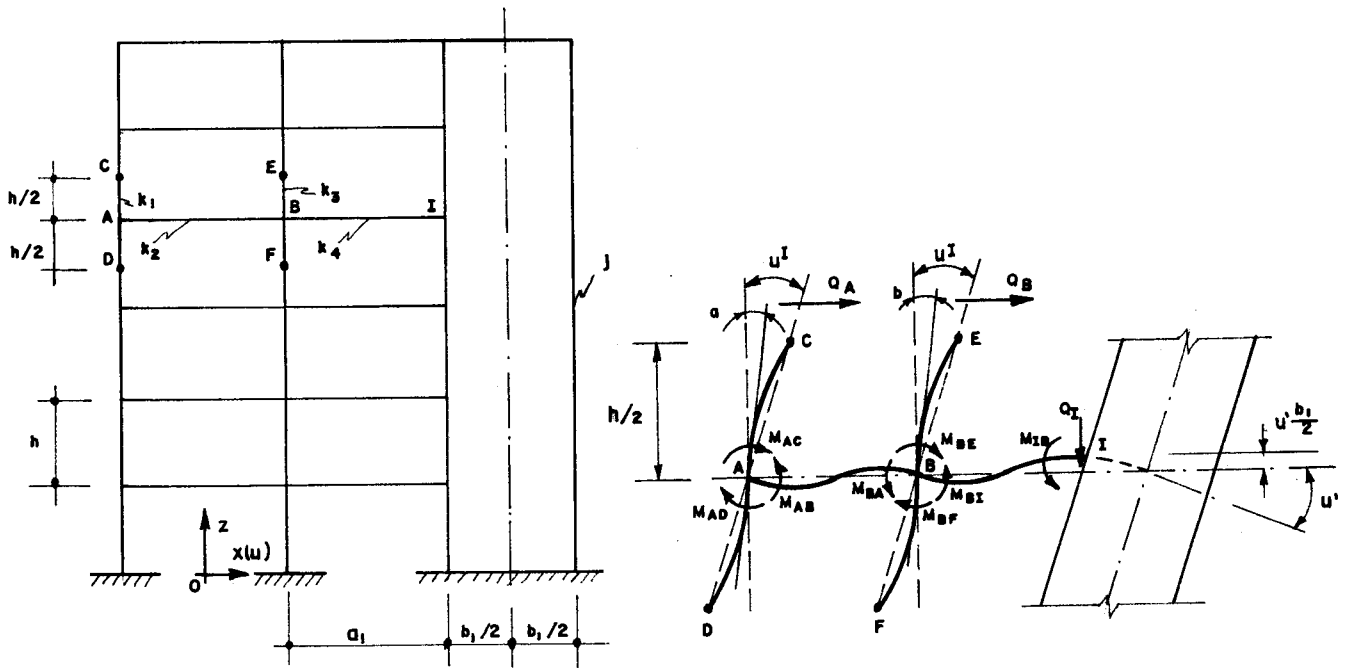
Deduções análogas podem ser feitas para um número maior de paredes na associação em estudo, sem, contudo, alterar o aspecto formal das equações (AII.6) e (AII.7).

ANEXO III

COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA ASSOCIAÇÃO DE
PÔRTICO E PAREDE POR VIGAS

Na associação de p \ddot{o} rtico e parede por vigas, admitem-se as vigas engastadas na parede. Tal fato justifica-se tendo em vista ser a rigidez ao momento fletor da parede muito superior a das vigas que conectam o p \ddot{o} rtico à parede. Admitem-se, também, indeformáveis axialmente pilares, vigas e parede. A deformação da parede por força cortante é negligenciada em virtude de sua desprezível contribuição para o deslocamento horizontal do conjunto. A deformação axial dos pilares e da parede pode assumir importância considerável quando o painel possuir um número grande de andares.

A figura AIII-1a) mostra uma associação de p \ddot{o} rtico e parede por vigas, onde aparece também um sistema de coordenadas oxz com o eixo oz vertical. A configuração de um andar, impondo-se um estado de deslocamentos horizontais u (segundo ox), tem o aspecto mostrado na figura AIII-1b). Na presente análise, admite-se momento fletor nulo no centro dos vãos dos pilares; nas vigas, assumem-se as rotações nos nós A e B, respectivamente, iguais a a e b (vide fig. AIII-1b)). Com a notação e os sentidos mostrados na figura AIII-1, têm-se as seguintes expressões:



$$k_i = \frac{J_i}{L_i} \quad L_i = \text{VÃO} \quad j = E J$$

b) CONFIGURAÇÃO DE UM ANDAR APÓS A DEFORMAÇÃO

c) PAREDE E PÓRICO ASSOCIADOS POR VIGAS

FIG. A III - 1 - ASSOCIAÇÃO DE PÓRICO E PAREDE POR VIGAS E DEFORMAÇÃO CARACTERÍSTICA

$$M_{AC} = M_{AD} = 6EK_1(u^I - a)$$

$$M_{AB} = 2EK_2(2a + b)$$

$$M_{BE} = M_{BF} = 6EK_3(u^I - b)$$

..... (AIII.1)

$$M_{BA} = 2EK_2(2b + a)$$

$$M_{BI} = 2EK_4 \left[2b + u^I \left(1 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right]$$

$$M_{IB} = 2EK_4 \left[b + u^I \left(2 + \frac{3b_1}{2a_1} \right) \right]$$

O equilíbrio de momentos nos nós A e B implica, respectivamente, em:

$$\begin{aligned} (12K_1+4K_2)a + 2K_2b &= 12K_1u^I \\ 2K_2a+(12K_3+4K_2+4K_4)b &= \left[12K_3-2K_4\left(1 + \frac{3b_1}{2a_1}\right)\right]u^I \end{aligned}$$

..... (AIII.2)

Resolvendo o sistema de equações (AIII.2) nas incógnitas a e b (giro dos nós A e B), têm-se:

$$\begin{aligned} a &= \alpha u^I \\ b &= \beta u^I \end{aligned}$$

..... (AIII.3)

onde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{12(K_3-K_1\theta)-2K_4\left(1 + \frac{3b_1}{2a_1}\right)}{2K_2-\theta(12K_1+4K_2)} \\ \beta &= \frac{12K_1-\phi\left[12K_3-2K_4\left(1 + \frac{3b_1}{2a_1}\right)\right]}{2K_2-\phi(12K_3+4K_2+4K_4)} \end{aligned}$$

..... (AIII.4)

com θ e ϕ sendo dados por:

$$\theta = \frac{12K_3 + 4K_2 + 4K_4}{2K_2} \dots\dots\dots (AIII.5)$$

$$\phi = \frac{12K_1 + 4K_2}{2K_2}$$

A força cortante nos pilares, Q_A e Q_B , são dadas por:

$$Q_A = \frac{2M_{AC}}{h} \dots\dots\dots (AIII.6)$$

$$Q_B = \frac{2M_{BE}}{h}$$

As equações (AIII.6), tendo em vista as equações (AIII.3) e (AIII.1), podem ser escritas na forma:

$$Q_A = \frac{12EK_1}{h} (1-\alpha)u^I \dots\dots\dots (AIII.7)$$

$$Q_B = \frac{12EK_3}{h} (1-\beta)u^I$$

Os esforços de interação entre o pórtico e a parede (M_{IB} , Q_I), concentrados ao nível dos andares, na técnica do meio contínuo são supostos uniformemente distribuídos na altura h , ou seja:

$$q_1 = \frac{Q_I}{h} \dots\dots\dots (AIII.8)$$

$$q_2 = \frac{M_{IB}}{h}$$

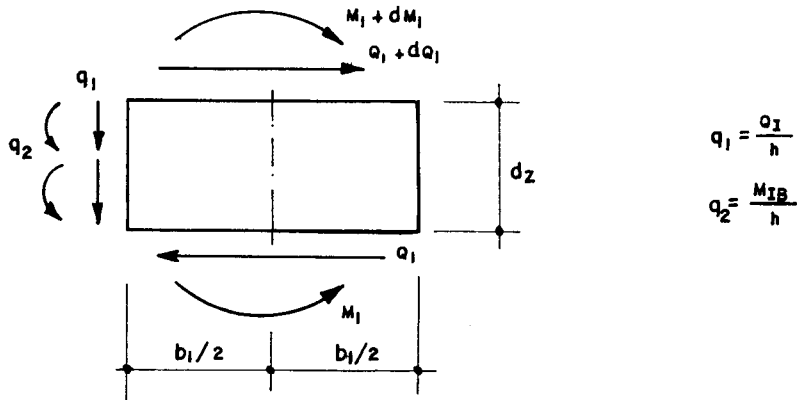


FIG. A III - 2 - ELEMENTO DIFERENCIAL DA PAREDE ISOLADA - MEIO CONTÍNUO.

Tendo em vista as equações (AIII-3) e (AIII.1), e ainda que:

$$Q_I = \frac{M_{BI} + M_{IB}}{a_1} \dots \dots \dots (AIII.9)$$

têm-se:

$$q_1 = \frac{6EK_4}{ha_1} \left(1 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) u^I \dots \dots \dots (AIII.10)$$

$$q_2 = \frac{2EK_4}{h} \left(2 + 2\beta + \frac{3b_1}{2a_1} \right) u^I$$

A figura AIII-2 mostra um elemento diferencial da parede, indicando-se os esforços de interação entre a viga e a parede agora uniformemente distribuídos na altura dz. Assim sendo, com a notação e os sentidos positivos indicados na figura AIII-2, a equação de equilíbrio na parede é dada por:

$$M_1^I + Q_1 - q_1 \frac{b_1}{2} - q_2 = 0 \quad \dots\dots\dots \text{(AIII.11)}$$

As equações (AIII.10) juntamente com a relação entre momento e curvatura ($M = ju^{II}$) levados na equação (AIII.11) permitem escrever:

$$Q_1 = -ju^{III} + p_1 u^I \quad \dots\dots\dots \text{(AIII.12)}$$

onde:

$$p_1 = \frac{EK_4}{h} \left[4 + 2\beta + \frac{3b_1}{a_1} \left(2 + \beta + \frac{b_1}{a_1} \right) \right] \quad \dots\dots \text{(AIII.13)}$$

A força cortante no conjunto é expressa por:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_1 \quad \dots\dots\dots \text{(AIII.14)}$$

Levando as equações (AIII.12) e (AIII.7) na equação (AIII.14), tem-se, finalmente:

$$Q = -ju^{III} + (p_1 + p_2)u^I \quad \dots\dots\dots \text{(AIII.15)}$$

onde

$$P_2 = \frac{12E}{h} [K_1(1-\alpha) + K_3(1-\beta)] \dots\dots\dots (AIII.16)$$

A equação (AIII-15) pode ser, ainda, colocada na forma:

$$Q = -j_p u^{III} + s_f u^I \dots\dots\dots (AIII.17)$$

onde:

$$j_p = j \dots\dots\dots (AIII.18)$$

$$s_f = p_1 + p_2$$

Associações do tipo estudado contendo maior número de pórticos e paredes podem ser analisados da maneira exposta, chegando-se a expressões com o mesmo aspecto formal das equações (AIII.17) e (AIII.18).

ANEXO IV

RAIZES DA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Dada uma equação do terceiro grau na forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

as raízes, segundo a fórmula de CARDAN (23), são dadas por:

$$x_1 = y_1 - a/3$$

$$x_2 = y_2 - a/3$$

$$x_3 = y_3 - a/3$$

onde:

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$y_2 = \theta \sqrt[3]{A} + \theta^2 \sqrt[3]{B}$$

$$y_3 = \theta^2 \sqrt[3]{A} + \theta \sqrt[3]{B}$$

sendo:

$$\theta = -0,5 + 0,5 \sqrt{3} i$$

$$A = \frac{-D}{2} + \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{F^3}{27}}$$

$$B = \frac{-D}{2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{F^3}{27}}$$

com:

$$D = c - \frac{ba}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

$$F = b - \frac{a^2}{3}$$

As equações do terceiro grau encontradas no presente trabalho possuem, como já foi assinalado, sempre três raízes reais. Assim sendo, A e B são números complexos, ou seja:

$$A = Q + Ri$$

$$B = Q - Ri$$

sendo:

$$Q = \frac{-D}{2}$$

$$R = \sqrt{-\frac{D^2}{4} - \frac{F^3}{27}}$$

Na forma polar A, B e θ são dados por:

$$A = \rho [\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha)i]$$

$$B = \rho [\cos(-\alpha) + \text{sen}(-\alpha)i]$$

$$\theta = 1 [\text{sen}(120^\circ) + \cos(120^\circ)i]$$

onde

$$\alpha = \text{arc.tg.} \frac{R}{Q}$$

$$\rho = \sqrt{Q^2 + R^2}$$

O quadrante do ângulo α pode ser visto no plano de GAUSS como mostrado na figura AIV-1

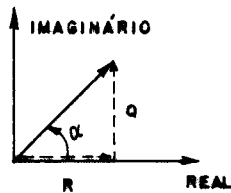


FIG. A IV-1- PLANO DE GAUSS

Na forma polar os valores de y_1 , y_2 e y_3 são, finalmente, dados por:

$$y_1 = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$y_2 = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos\left(120^\circ - \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$y_3 = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos\left(120^\circ + \frac{\alpha}{3}\right)$$

ANEXO V

FÓRMULA DE RECORRÊNCIA PARA OS MODOS MAIS ALTOS DE VIBRAÇÃO

(STODOLA-VIANELLO)

1. ORTOGONALIDADE DAS SOLUÇÕES

O sistema de equações diferenciais expresso por:

$$[J] \{D^{IV}\} - [S] \{D^{II}\} = \sigma [K] \{D\} \quad \dots\dots\dots (AV-1)$$

com soluções obedecendo as condições de fronteira:

$$\{D_o\} = \{0\}$$

$$\{D_o^I\} = \{0\}$$

$$\{D_H^{II}\} = \{0\}$$

..... (AV-2)

$$[J] \{D_H^{III}\} - [S] \{D_H^I\} = \{0\}$$

possue soluções ortogonais, ou seja: dadas duas soluções $\{D\}_1$ e $\{D\}_2$, tem-se (matrizes $[J]$, $[S]$ e $[K]$ simétricas):

$$\int_0^H \{D\}^T [K] \{D\}_1 dz = 0 \quad \dots\dots\dots (AV-3)$$

Tal propriedade pode ser facilmente demonstrada.

A equação (AV.1) permite escrever:

$$[J] \{D^{IV}\}_1 - [S] \{D^{II}\}_1 = \sigma_1 [K] \{D\}_1$$

..... (AV-4)

$$[J] \{D^{IV}\}_2 - [S] \{D^{II}\}_2 = \sigma_2 [K] \{D\}_2$$

Multiplicando a primeira das equações (AV-4) por $\{D\}_2^T$ e a segunda por $\{D\}_1^T$, e subtraindo membro a membro uma da outra, tem-se:

$$\begin{aligned} \{D\}_2^T ([J] \{D^{IV}\}_1 - [S] \{D^{II}\}_1) - \{D\}_1^T ([J] \{D^{IV}\}_2 - [S] \{D^{II}\}_2) = \\ = (\sigma_1 - \sigma_2) \{D\}_2^T [K] \{D\}_1 \end{aligned}$$

..... (AV-5)

Integrando por partes o primeiro membro da equação (AV-5) de 0 a H, tem-se:

$$\begin{aligned} \{D\}_2^T ([J] \{D^{III}\}_1 - [S] \{D^I\}_1) \Big|_0^H - \{D\}_1^T ([J] \{D^{III}\}_2 - [S] \{D^I\}_2) \Big|_0^H + \\ + \int_0^H \{D^{II}\}_2^T ([J] \{D^{II}\}_1 - [S] \{D\}_1) dz - \{D\}_1^T ([J] \{D^{III}\}_2 - [S] \{D^I\}_2) \Big|_0^H + \\ + \{D\}_1^T ([J] \{D^{II}\}_2 - [S] \{D\}_2) \Big|_0^H - \int_0^H \{D^{II}\}_1^T ([J] \{D^{II}\}_2 - [S] \{D\}_2) dz = \\ = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^H \{D\}_2^T [K] \{D\}_1 dz \end{aligned}$$

..... (AV-6)

Tendo em vista as condições de fronteira (AV-2) a equação (AV-6) permite escrever:

$$\begin{aligned} & \left(\{D^I\}_2^T [S] \{D\}_1 - \{D^I\}_1^T [S] \{D\}_2 \right) \Big|_0^H + \int_0^H \left(\{D^{II}\}_1^T [S] \{D\}_2 - \right. \\ & \left. - \{D^{II}\}_2^T [S] \{D\}_1 \right) dz = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^H \{D\}_2^T [K] \{D\}_1 dz \end{aligned} \quad \dots (AV-7)$$

A equação (AV-7) permite escrever:

$$\begin{aligned} & \left(\{D^I\}_2^T [S] \{D\}_1 - \{D^I\}_1^T [S] \{D\}_2 \right) \Big|_0^H + \left(\{D^I\}_1^T [S] \{D\}_2 - \{D^I\}_2^T [S] \{D\}_1 \right) \Big|_0^H \\ & - \int_0^H \left(\{D^I\}_1^T [S] \{D^I\}_2 - \{D^I\}_2^T [S] \{D^I\}_1 \right) dz = \\ & = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^H \{D\}_2^T [K] \{D\}_1 dz \quad \dots (AV-8) \end{aligned}$$

Naturalmente o primeiro membro da equação (AV-8) é nulo; o que implica em:

$$0 = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^H \{D\}_2^T [K] \{D\}_1 dz$$

Sendo $\{D\}_1$ e $\{D\}_2$ duas soluções distintas, σ_1 é diferente de σ_2 ficando, pois, evidente a propriedade mencionada.

2. FÓRMULA DE RECORRÊNCIA PARA OS MODOS MAIS ALTOS DE VIBRAÇÃO

Sejam dois estados de deslocamentos $\{D\}_1$ e \bar{D} e um terceiro expresso por:

$$\{D\}_2 = \{\bar{D}\} - \{D\}_1 \int_0^H \{D\}_1^T [K] \{\bar{D}\} dz$$

sendo $[K]$ uma matriz simétrica. Impondo a condição de ortogonalidade entre $\{D\}_1$ e $\{D\}_2$, pode-se escrever:

$$\int_0^H \{D\}_1^T [K] \{D\}_2 dz = \int_0^H \{D\}_1^T [K] (\{\bar{D}\} - \{D\}_1 \int_0^H \{D\}_1^T [K] \{\bar{D}\} dz) dz = 0$$

..... (AV-9)

Chamando:

$$K^* = \int_0^H \{D\}_1^T [K] \{\bar{D}\} dz \quad \text{..... (AV-10)}$$

a equação (AV-9) fica:

$$0 = K^* - \int_0^H \{D\}_1^T [K] \{D\}_1 K^* dz$$

ou ainda

$$\int_0^H \{D\}_1^T [K] \{D\}_1 dz = 1 \quad \text{..... (AV-11)}$$

No método de STODOLA-VIANELLO, a solução $\{D\}_1$ possui apenas uma constante indeterminada. Assim sendo, a ortogonalidade expressa na equação (AV-9) fica satisfeita assumindo para aquela constante um valor de modo a se satisfazer a equação (AV-11).

BIBLIOGRAFIA

- 1) - VENANCIO Fo., F. - "Formulações Matriciais para o Cálculo de Frequências de Vibrações de Estruturas" - XVII Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural e V Simpósio Panamericano de Estruturas - Caracas, Venezuela - Dez/1975.
- 2) - RAVARA, A. - "Aplicações dos Computadores ao Cálculo Dinâmico de Estruturas" - II Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Rio de Janeiro - São Paulo, Ago./1967.
- 3) - ROBERTSON, L.E. - "On Tall Buildings" - Tall Buildings, Londres, 1967.
- 4) - CHUANG, F.K. - "Psychophysiological Aspects of Man - Structure Interaction" - Planning and Design of Tall Buildings, V.Ia, New York, 1972.
- 5) - CHEN, P.W. e ROBERTSON, L.E. - "Human Perception Thresholds of Horizontal Motion" - J.Struct. Div., ASCE, V. 98, N. ST8, Aug./1972, pp. 1681-1965.
- 6) - CHUANG, F.K. - "Human Response to Motions in Tall Buildings" - J.Struct. Div., ASCE, V.99, N. ST6, Jun./1973, p.p. 1259-1272.
- 7) - MURASHEV, V.; SIGALOV, E. e BAIKOV, V. - "Design of Reinforced Concrete Structures" - Mir Publ., Moscou, 2a. Ed./1972.

- 16) - TIMOSHENKO, S. e YOUNG, D.H. - "Problemas de Vibración en Ingeniería" - Comp. Ed. Continental S.A., México, D.F., 3a. Ed., Out./1960.
- 17) - ROGERS, G.L. - "Dynamics of Framed Structures" - John W. & Sons, Inc., 1959.
- 18) - HURTY, W.C. e RUBINSTEIN, M.F. - "Dynamics of Structures" - Prentice-Hall, India, 1a. Ed./1967.
- 19) - STAMATO, M.C. e MANCINI, E. - "Paredes de Seção Aberta Associadas e Pórticos Planos" - Rev. Bras. Tecnologia, Vol. 3, Nº 3, Set./1972, p.p. 139-146.
- 20) - VLASSOV, B.Z. - "Pieces Longues en Voiles Minces" - Ed. Eyrolles, 2a. Ed./1962.
- 21) - CATÁLOGO DE PERFIS - "Shapes and Plates" - U.S.STEEL/1960.
- 22) - COURANT, R. - "Cálculo Diferencial e Integral" - Ed. Globo, R. Janeiro, Vol. I, 1a. Ed./1963.
- 23) - UPENSKY, J.V. - "Theory of Equations" - McGraw-Hill, 2a. Ed./1948.
- 24) - GRINTER, L.E. - "Theory of Modern Steel Structures" - The MacMillan Co., N.York, ed. rev. 1949, Vol. I.
- 25) - STAMATO, M.C. - "Estado Atual da Análise de Estruturas Tridimensionais de Edifícios Altos" - Esc. Eng. S.Carlos, Publ. N. 163, 1972.

- 8) - MUKHERJEE, P.R. e COULL, A. - "Free Vibrations of Coupled Shear Walls on Flexible Bases" - Proc. Inst. Civ. Engrs., Part 2, N. 57, Sept./1974, p.p. 493-511.
- 9) - POLLNER, E. - "Periods of Vibration of Multistorey Buildings" - XVII Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural e V Simpósio Panamericano de Estruturas, Caracas, Venezuela, Dez./1975.
- 10) - TSO, W.K. e BISWAS, J.K. - "An Approximate Seismic Analysis of Coupled Shear Walls" - McMaster University, Canadá, Rep. 71-17, Sept./1971.
- 11) - COULL, A. - "Free Vibrations of Regular Symmetrical Shear Wall Buildings" - Building Science, V. 10, N. 2, Jul./1975, p.p. 127-133.
- 12) - STAMATO, M.C. - "Associação Contínua de Painéis de Contraventamento", Publ. N. 157, Esc. Eng. S.Carlos, U.S.P., Abr./1972.
- 13) - FRANCO, M. - "Alguns Problemas Relativos à Ação do Vento em Edifícios de Grande Altura" - Esc. Politécnica, U.S.P. (Tese de Doutorado), 1966.
- 14) - MANCINI, E. - "Análise Contínua de Estruturas de Edifícios Elevados Sujeitos à Ação do Vento" - Publ.nº 184, Esc. Eng. S.Carlos, U.S.P., Dez./1973.
- 15) - LEIGHTON, W. - "Equações Diferenciais Ordinárias" - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., Rio de Janeiro, 1970, p.p. 142-164.

- 26) - STAMATO, M.C. e MANCINI, E. - "Edifícios de Paredes Planas com Engastamentos Elásticos" - Rev. Bras. Tecnologia, Vol. 3, N. 4, Dez./72, p.p. 211-218.
- 27) - KRICK, E.V. - "Introdução à Engenharia" - Ao Livro Técnico, R. Janeiro/1970.