

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

**CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL  
PARA ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS  
DE EDIFÍCIOS ALTOS**

Eng.ª HELENA M. C. CARMO ANTUNES



SÃO CARLOS, NOVEMBRO DE 1978

CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL  
PARA ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS  
DE EDIFÍCIOS ALTOS

Eng<sup>d</sup> HELENA M.C. CARMO ANTUNES

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a  
obtenção do título de "Doutor em Engenharia - Área de Con-  
centração: Engenharia de Estruturas".

Orientador

Prof. Dr. TIOETURO YAGUI

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Dante A.O. Martinelli

Prof. Dr. Munir Rachid

Prof. Dr. Aluizio F. Margarido

Prof. Dr. Mario Franco

Prof. Dr. Tioeturo Yagui

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS



São Carlos, novembro de 1978

Ao Maurício, à Juliana  
e ao João Carlos.

## AGRADECIMENTO

ao Prof. Dr. Tioeturo Yagui que, com sua orientação segura, sua habitual dedicação e seu apoio constante, tornou possível a realização deste trabalho,

ao meu esposo, João Carlos, que com sua constante presença me deu a tranquilidade necessária para a conclusão deste trabalho,

ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) que me possibilitou, através da concessão de bolsa de estudos, realizar pesquisas na Universidade de Southampton, Inglaterra, onde foram dados os primeiros passos do desenvolvimento deste trabalho,

ao CPD (Centro de Processamento de Dados) da EESC-USP e ao CCE (Centro de Computação Eletrônica) da USP, cujos equipamentos foram por mim utilizados,

ã D<sup>a</sup> Wilma Provinciali Vall, que com paciência e cuidado datilografou o texto,

aos funcionários do Departamento de Estruturas da EESC, João Paulo Moretti e Fátima Aparecida Conçalves pelos trabalhos, respectivamente, de desenho e de organização da bi bliografia.

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo a determinação do carregamento crítico para a instabilidade elástica geral de estruturas tridimensionais de edifícios altos. Para essa análise, foram consideradas as estruturas constituídas por painéis de contraventamento que são formados por pilares e vigas rigidamente vinculados entre eles. Os pilares-paredes e os núcleos de concreto armado foram omitidos. Entretanto, foi previsto qualquer tipo de interconexão daqueles painéis, não havendo qualquer restrição quanto ao ângulo formado por eles, nem quanto aos tipos usuais de pilares que possam existir em suas intersecções.

As lajes do sistema de pisos foram consideradas como diafragmas completamente flexíveis transversalmente, porém, perfeitamente rígidos em seu plano.

Como parte do desenvolvimento do trabalho, foi analisado em segunda ordem, o comportamento de barras isoladas submetidas a esforços de extremidade e apresentando característica tridimensional. Chegou-se com isto, a resultados práticos bastante razoáveis para os tipos usuais de seções transversais.

Para comprovar a validade do processo apresentado, exemplos simples de análise de estruturas tridimensionais, já considerados por outros autores, foram abordados e estão apresentados no Capítulo IV. Também outros exemplos mais complexos visando apenas demonstrar a potencialidade do processo foram tratados nesse capítulo.

No final do trabalho é apresentado um programa para computador, em linguagem FORTRAN, que automatiza as soluções pesquisadas.

## ABSTRACT

The aim of this work is to determine critical parameters for overall elastic instability of three dimensional structures of tall buildings. In this analysis structures consisting of two dimensional panels, which are plane frames, linked by floor slabs were considered. The treatment of shear-walls or reinforced concrete cores was omitted. In the meantime, any type of intersection between the panels was foreseen, and there is no restriction with respect to the angle between them or to the usual types of columns on the intersections.

The floor slabs were assumed to be rigid diaphragms with an infinite in-plane stiffness and zero transverse stiffness.

As a step of the development of the work, it was analyzed, at a second order theory, the behavior of an isolated member under end forces. For usual shapes of cross-sections, the results got from this analysis were quite reasonable.

To check the validity of the process, simple cases, already presented by other authors, were worked out and are shown in Chapter IV. More complex examples, intending only to show the potentiality of the process, were treated and are shown in the same chapter.

At the end of the work it is presented a computer programme, in FORTRAN language. With this programme the process gets automatic.

## SUMÁRIO

### CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1 - GENERALIDADES .....	1
2 - SITUAÇÃO DO PROBLEMA .....	2

### CAPÍTULO II - CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL PARA ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS DE EDIFÍ- CIOS ALTOS

1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	6
2 - HIPÓTESES .....	7
2.1 - LAJES .....	7
2.2 - PAINÉIS .....	7
2.3 - PILARES INDIVIDUAIS .....	7
2.4 - SISTEMA ESTRUTURAL .....	8
2.5 - CARGAS .....	8
3 - NOTAÇÃO .....	8
4 - SISTEMAS DE REFERÊNCIA .....	13
4.1 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA O SISTEMA ESTRU- TURAL .....	13
4.2 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA OS PILARES INDI- VIDUAIS .....	13
4.3 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA OS PAINÉIS .....	14
4.4 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA OS PILARES DE UM PAINEL GENÉRICO $j$ .....	15
4.5 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA AS VIGAS DE UM PAINEL $j$ .....	15
5 - DESLOCAMENTOS .....	15
5.1 - DESLOCAMENTOS DO SISTEMA ESTRUTURAL .....	15

5.2 - DESLOCAMENTOS DOS PILARES INDIVIDUAIS .....	16
5.3 - DESLOCAMENTOS DOS PAINÉIS .....	19
6 - MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PILARES INDIVIDUAIS .....	19
6.1 - FORMULAÇÃO GERAL .....	20
6.1.1 - Esforços de extremidade de barra ...	20
6.1.2 - Deslocamentos dos centros de torção e de gravidade .....	21
6.1.3 - Equações de equilíbrio .....	22
6.1.4 - Equações das elásticas do centro de torção .....	23
6.2 - PARTICULARIZAÇÃO PARA BARRAS CUJAS SEÇÕES POSSUEM UM EIXO DE SIMETRIA .....	24
6.2.1 - Solução da equação independente ....	25
6.2.2 - Solução das equações dependentes ...	29
6.3 - PARTICULARIZAÇÃO PARA BARRAS CUJAS SEÇÕES POSSUEM DOIS EIXOS DE SIMETRIA .....	48
6.4 - PARTICULARIZAÇÃO PARA BARRAS CUJAS SEÇÕES POSSUEM $I_{\omega} = 0$ .....	48
6.4.1 - Seções sem eixos de simetria .....	48
6.4.2 - Seções com um eixo de simetria .....	65
6.4.3 - Seções com dois eixos de simetria ..	65
6.5 - CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ .....	65
7 - MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PAINÉIS .....	70
7.1 - MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PILARES .....	70
7.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DAS VIGAS .....	71
7.3 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO PAINEL .....	71
7.4 - MATRIZ DE RIGIDEZ REDUZIDA .....	73
8 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA ESTRUTURAL .....	77
9 - DETERMINAÇÃO DO CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL .....	79
9.1 - CÁLCULO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DA ES- TRUTURA .....	79



9.2 - PROCESSO DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS .....	79
9.3 - VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DA ESTRUTURA SUBMETIDA A UM CERTO CARREGAMENTO .....	80
9.4 - CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL.	81
CAPÍTULO III - FLUXOGRAMA DA PROGRAMAÇÃO PARA COMPUTADOR	
1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	88
2 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO .....	89
CAPÍTULO IV - EXEMPLOS NUMÉRICOS	
1 - INTRODUÇÃO .....	97
2 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	97
CONCLUSÕES .....	114
BIBLIOGRAFIA .....	116
APÊNDICE .....	120

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1 - GENERALIDADES

Usualmente, as estruturas dos edifícios altos são constituídas pelos chamados painéis de contraventamento que, por sua vez, são formados por vigas e pilares rigidamente conectados entre si. Alguns desses painéis se interceptam, transmitindo através de suas intersecções, esforços de interação. Quando estes painéis são dispostos em planos ortogonais, os que se situam a barlavento e a sotavento são denominados comumente de painéis de flange, enquanto que aqueles situados em planos paralelos à direção do vento são chamados de painéis de alma, de modo a caracterizarem o comportamento tridimensional da estrutura sob a ação de cargas horizontais. Todos esses painéis são travados horizontalmente pelos sistemas de pisos que por se apresentarem, via de regra, complementados na sua parte superior por uma laje de concreto relativamente delgada, podem ser considerados como se fossem diafragmas rígidos no seu plano, porém, completamente flexíveis transversalmente. Estes sistemas de pisos são então responsáveis pela transmissão aos painéis de contraventamento, de todas as cargas principais atuantes na estrutura, mesmo aquelas resultantes da ação do vento.

De um modo geral, os edifícios altos são caracterizados pela pequena largura relativa à sua altura. Como consequência, os seus pilares componentes ficam normalmente submetidos a grandes esforços normais, principalmente resultantes da ação do vento no edifício. Essas estruturas sob a ação de um carregamento geral, isto é, composto pelas car-

gas gravitacionais permanentes e vivas e pelas cargas horizontais resultantes da ação do vento, poderão se deformar excessivamente. As condições de equilíbrio dos seus elementos constituintes, na posição deformada, podem ser bastante diferentes daquelas consideradas na posição indeformada, devido ao aparecimento de esforços adicionais resultantes dessa deformação. A análise desse efeito, conhecido como "efeito  $P-\Delta$ ", tem sido objeto de inúmeros trabalhos de pesquisa, principalmente com o desenvolvimento de computadores e de técnicas matriciais de cálculo de estruturas, que viabilizaram a extensão da análise a estruturas bastante complexas, planas ou tridimensionais.

Basicamente, a determinação do carregamento crítico de instabilidade geral das estruturas dos edifícios altos, pode ser feita através da análise dos seus elementos barras à luz do "efeito  $P-\Delta$ ", utilizando técnicas matriciais.

A análise desses elementos, pesquisando o seu equilíbrio na posição deslocada, leva a conclusões interessantes quanto aos parâmetros de rigidez associados a eles. Assim, para barras essencialmente comprimidas tudo se passa como se houvesse uma degenerescência de rigidez, ocorrendo o inverso para as barras tracionadas.

No caso de edifícios altos, com pilares bastante comprimidos, é de se esperar então, em função da degeneração de rigidez dos pilares, a existência de degeneração da rigidez global da estrutura durante o processo de carregamento, levando inclusive à situação de instabilidade.

## 2 - SITUAÇÃO DO PROBLEMA

A análise do "efeito  $P-\Delta$ " em estruturas lineares, ou análise em segunda ordem dessas estruturas, tem sido tratada basicamente segundo duas técnicas. A primeira delas, recorrendo por exemplo ao processo dos deslocamentos e prevendo um certo número de coordenadas externas para a estru-

tura, parte da idéia de que a matriz de rigidez global da estrutura afetada por um certo carregamento pode ser considerada como resultante de duas outras: a matriz de rigidez elástica e a matriz de rigidez geométrica. Estarão computados nesta última os esforços adicionais, segundo as coordenadas externas, provocados por deslocamentos unitários segundo cada uma das coordenadas. Pela análise dessa matriz de rigidez total, associada à estrutura carregada, pode se pesquisar eventual singularidade que implicará em instabilidade da estrutura.

Essa técnica foi utilizada por NAIR<sup>(1)</sup>, na análise de estruturas tridimensionais constituídas por painéis planos verticais, travados horizontalmente pelas lajes consideradas como diafragmas rígidos em seu plano. Apenas os deslocamentos horizontais das lajes como corpos rígidos foram analisados. Foi considerada a resposta elástica da estrutura, caracterizada pela matriz de rigidez elástica, constante e igual à correspondente à da estrutura descarregada e indeformada. A matriz de rigidez geométrica foi linearizada passando a corresponder à variação de esforços, função de deslocamentos admitidos com variação linear.

A outra técnica, mais difundida, envolve a utilização dos processos da estática clássica, considerando os carregamentos aplicados em acréscimos sucessivos, cada um deles com um certo valor afetando a estrutura. Em função desse carregamento, são determinados os parâmetros característicos de rigidez para os elementos uma vez que eles ficam submetidos aos esforços dele resultantes. Conhecidos os parâmetros de rigidez dos elementos, tem-se condição de montar a matriz de rigidez para coordenadas convenientes sobre a estrutura. A pesquisa de uma possível singularidade dessa matriz de rigidez durante o carregamento progressivo caracterizaria a procura da instabilidade da estrutura sob o carregamento correspondente.

Essas duas técnicas são equivalentes e envolvem sempre a análise mais ou menos aproximada do comportamento dos elementos constituintes da estrutura.

Dada a maior simplicidade da segunda técnica e principalmente pela possibilidade de tratar o "efeito P- $\Delta$ " nos elementos, caracterizando as alterações resultantes das solicitações de extremidade como alteração de rigidez desses elementos, optou-se por essa técnica.

O desenvolvimento da análise de barras submetidas a esforços de extremidade é clássico, no caso de comportamento plano, tendo sido tratado por diversos autores<sup>(2-9)</sup>. Cabe ressaltar o trabalho de organização desenvolvido por BLEICH<sup>(2)</sup>, onde os parâmetros de rigidez da estática clássica são afetados por certos coeficientes, ditos funções de instabilidade. Essas funções têm sido aproveitadas para a análise de algumas estruturas tridimensionais. Por exemplo, FIGUEIREDO<sup>(10)</sup>, considerou a existência de painéis planos absolutamente independentes uns dos outros, ou conectados, sem considerar, entretanto, a interação de vigas na junção, e idealizando um pilar de intersecção como se tivesse comportamento independente nas duas direções. Nesse trabalho foi pressuposto que a instabilidade por torção desse pilar só ocorreria posteriormente a qualquer instabilidade por flexão.

A análise mais geral entretanto, envolve o tratamento da barra como elemento tridimensional. Até agora foram somente desenvolvidas as análises de casos particulares de barras, considerando a hipótese de as seções manterem-se com a forma original. Assim é que, TIMOSHENKO<sup>(11)</sup> apresentou algumas soluções com condições particulares de extremidade. MORINO<sup>(12)</sup> analisou perfis abertos, sem bimoto, em seções bissimétricas. Apresentou a solução para os coeficientes de rigidez em função de solução numérica utilizando polinômios de interpolação do 5º grau ou então diferenças finitas. O seu trabalho não é diretamente voltado a edifícios ainda que tenha resolvido alguns exemplos de pórticos tridimensionais de um único andar. RACHID<sup>(13)</sup> enfrentou as equações diferenciais, considerando a flexo-torção segundo a teoria de Vlassov e com a instabilidade ocor

rendo por torção e por flexão, sendo esta em um plano definido. A solução apresentada é numérica e considera o bimoto. RENTON<sup>(14)</sup> tratou o problema de barras com um eixo de simetria, com momento setorial de inércia  $I_{\omega} = 0$ . Isto particulariza demais os tipos de perfis utilizados que se resumirão a cantoneiras, perfis em cruz, e perfil T, no máximo. Para este caso a solução é analítica.

No presente trabalho, parte-se do mesmo equacionamento descrito por RENTON<sup>(14)</sup>, resolvendo-se analiticamente o problema de barras com  $I_{\omega} = 0$  e  $I_{\omega} \neq 0$  para casos mais gerais.

Em termos de avanço no tratamento do problema, considerou-se a instabilidade geral, admitindo-se pilares individuais não pertencentes a qualquer organização de painéis. Com isto, será possível admitir-se painéis que se interceptem segundo uma prumada de pilares, mesmo não sendo ortogonais.

## CAPÍTULO II

### CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL PARA ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS DE EDIFÍCIOS ALTOS

#### 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

A análise aqui apresentada prende-se apenas a estruturas de edifícios constituídas por pilares e vigas travados horizontalmente pelas lajes aos níveis dos pisos, omitindo qualquer consideração quanto aos pilares paredes ou núcleos formados por paredes delgadas.

O desenvolvimento matricial é feito com base no processo dos deslocamentos, prevendo a possibilidade de consideração de diversos tipos de subestruturas, tais como prumadas de pilares individuais, sequência de vigas num mesmo plano vertical e também a composição de vários tipos de painéis caracterizados como pórticos planos. Será possível interconectar estes painéis segundo quaisquer ângulos e inclusive prever nas conexões, prumadas de pilares individuais com comportamento não associado a qualquer dos planos dos painéis.

Na análise da instabilidade geral do edifício é levada em conta a influência da força axial nos pilares de formados, caracterizada como efeito  $P-\Delta$ .

Os carregamentos a serem considerados, serão classificados segundo a natureza das cargas e serão admitidos como variáveis proporcionalmente a um parâmetro somente aqueles compostos pelas cargas vivas. As demais cargas, as permanentes e as resultantes da ação do vento, serão mantidas com os seus valores constantes de conformidade com as normas existentes.

## 2 - HIPÓTESES

### 2.1 - LAJES

Será admitido que o comportamento das lajes seja tal que funcione como um diafragma horizontal infinitamente rígido em seu plano e com rigidez transversal desprezível, ficando apenas como elemento de transmissão de forças horizontais entre os pilares e painéis verticais.

### 2.2 - PAINÉIS

Se um conjunto de pilares e vigas constitui um pórtico plano, e se esses elementos apresentam rigidezes desprezíveis à torção e à flexão, sendo esta no plano transversal ao do pórtico, ele poderá ser classificado como um painel. Estes painéis poderão se apresentar com interrupções em qualquer nível, e neste caso, os elementos faltantes serão apenas representados por barras fictícias de rigidez nula. São desprezadas as deformações axiais nas vigas, em coerência com a hipótese admitida para o comportamento das lajes. Por outro lado, as deformações axiais são levadas em conta nos pilares. São também consideradas desprezíveis as deformações provocadas por esforço cortante.

### 2.3 - PILARES INDIVIDUAIS

Prevê-se um comportamento tridimensional para pilares que não puderem ser enquadrados como elementos de um painel plano. Neste caso, desprezam-se apenas as deformações produzidas por esforço cortante.



## 2.4 - SISTEMA ESTRUTURAL

O conjunto de painéis e pilares individuais travados horizontalmente pelas lajes aos níveis dos pisos caracteriza o sistema estrutural. Esses painéis poderão se interceptar formando qualquer ângulo e nesta intersecção poderá existir ou não prumada de pilar.

## 2.5 - CARGAS

As cargas atuantes na estrutura deverão ser substituídas por cargas equivalentes aplicadas segundo as coordenadas deslocamentos do sistema estrutural.

Na análise a ser desenvolvida serão considerados três tipos de cargas:

a) Cargas permanentes, constituindo um carregamento fixo e incluindo o peso próprio da estrutura, peso dos sistemas de piso, forro e vedação;

b) cargas de vento, de acordo com as normas, constituindo também um carregamento fixo;

c) cargas vivas, supostas uniformemente distribuídas sobre as lajes. Essas cargas serão definidas a menos de um parâmetro de proporcionalidade  $W$ , variável, para o qual se procurará um valor crítico  $W_{cr}$  correspondente à instabilidade geral da estrutura.

## 3 - NOTAÇÃO

Serão utilizadas as seguintes variáveis:

X, Y, Z ..... sistema de referência para o sistema estrutural

- $x_i, y_i, z_i$  ..... sistema de referência para a prumada de pilares individuais i
- $x_p, y_p, z_p$  ..... sistema de referência para o painel p
- $\alpha_i$  ..... ângulo que relaciona  $x_i, y_i, z_i$  com X, Y, Z
- $\alpha_p$  ..... ângulo que relaciona  $x_p, y_p, z_p$  com X, Y, Z
- $x, y, z$  ..... sistema de referência para as barras
- $\{V\}, \{R\}, [K]$  ..... deslocamentos, esforços e matriz de rigidez do sistema estrutural, respectivamente
- $\{\bar{D}_p\}_a^i, \{\bar{F}_p\}_a^i, [\bar{S}_p]_a^i$  . deslocamentos, esforços e matriz de rigidez do pilar abaixo da laje a, pertencente à prumada de pilares individuais i, respectivamente
- $\{\bar{D}\}^i, \{\bar{F}\}^i, [\bar{S}]^i$  .... deslocamentos, esforços e matriz de rigidez da prumada de pilares individuais i, respectivamente
- $\{D\}_c^j$  ..... deslocamentos da prumada de pilares c do painel j
- $\{D\}_H^j$  ..... deslocamentos do painel j aos níveis das lajes
- $\{D\}^j, \{F\}^j, [S]^j$  .... deslocamentos, esforços e matriz de rigidez do painel j, respectivamente
- $\{D_p\}_{c,a}^j, \{F_p\}_{c,a}^j, [S_p]_{c,a}^j$  deslocamentos, esforços e matriz

de rigidez do tramo de pilar da prumada c pertencente ao painel j, abaixo da laje a, respectivamente

$\{D_{V,c,a}\}^j, \{F_{V,c,a}\}^j, [S_{V,c,a}]^j$  deslocamentos, esforços e matriz de rigidez, respectivamente, relativos ao tramo de viga situado no nível da laje a e à direita da prumada de pilares c pertencente ao painel j.

$\{\bar{D}_{p,T}\}_a^i, \{\bar{F}_{p,T}\}_a^i, [\bar{S}_{p,T}]_a^i$  deslocamentos, esforços e matriz de rigidez de um tramo de pilar situado abaixo da laje a e pertencente à prumada de pilares individuais i, respectivamente, segundo as coordenadas deslocamentos locadas nos centros de torção das seções extremas A e B

$[S^*]^j$  ..... matriz de rigidez reduzida do painel j

$[\bar{B}_p]_a^i$  ..... matriz de transformação dos deslocamentos da prumada de pilares individuais i para os deslocamentos do pilar abaixo da laje a e pertencente à mesma prumada

$[\bar{b}_{p,T}]_a^i$  ..... matriz de transformação dos deslocamentos dos centros de gravidade para os deslocamentos dos centros de torção das seções extremas A e B de um tramo de pilar situado abaixo da laje a e pertencente à prumada de pilares individuais i

$[B_p]_{c,a}^j$  ..... matriz que relaciona os deslocamentos do painel j, com os deslocamentos

do pilar pertencente à prumada c do mesmo painel, abaixo da laje a

- $[B_v]_{c,a}^j$  ..... matriz que relaciona os deslocamentos do painel j, com os deslocamentos da viga do mesmo painel, situada à direita da prumada c e no nível da laje a
- $[B_E^*]^j$  ..... matriz que relaciona os deslocamentos do sistema estrutural com os deslocamentos externos do painel j
- $[\bar{B}]^i$  ..... matriz que relaciona os deslocamentos do sistema estrutural com os deslocamentos da prumada i de pilares individuais
- f ..... número de andares
- $n_i$  ..... número de prumadas de pilares individuais
- $n_p$  ..... número de painéis
- b ..... número de tramos do painel
- $n_c$  ..... número de prumadas de pilares do painel
- $M_y, M_z$  ..... momentos fletores em relação aos eixos y e z, respectivamente
- $M_{yA}, M_{yB}, M_{zA}, M_{zB}$  ..... momentos fletores nas extremidades A e B
- $M_x$  ..... momento torçor em relação ao eixo x
- $M_{xA}, M_{xB}$  ..... momentos torçores nas extremidades A e B, respectivamente

- $\bar{M}_x$  ..... momento torçor em relação a um eixo paralelo a x passando pelo centro de torção
- $\bar{M}_{xA}, \bar{M}_{xB}$  ..... momento torçor nas extremidades A e B, respectivamente
- P ..... força axial de compressão
- $R_y, R'_z$  ..... esforços em relação aos eixos y e z, respectivamente
- $R_{yA}, R_{yB}, R_{zA}, R_{zB}$  ..... esforços nas extremidades A e B
- $\bar{R}_y, \bar{R}_z$  ..... esforços no centro de torção em relação aos eixos y e z, respectivamente
- $\bar{R}_{yA}, \bar{R}_{yB}, \bar{R}_{zA}, \bar{R}_{zB}$  ..... esforços nas extremidades A e B
- $y_o, z_o$  ..... coordenadas, segundo y e z, do centro de torção em relação ao centro de gravidade da secção
- v, w ..... deslocamentos do centro de torção, segundo y e z, respectivamente
- $\phi$  ..... rotação em relação ao centro de torção
- $v_c, w_c$  ..... deslocamentos do centro de gravidade, segundo y e z, respectivamente
- $\phi_x, \theta_y, \theta_z$  ..... rotações em relação aos eixos x, y e z, respectivamente
- $\phi_{xA}, \phi_{xB}, \theta_{yA}, \theta_{yB}, \theta_{zA}, \theta_{zB}$  ..... rotações nas extremidades A e B
- $I_y, I_z$  ..... momentos de inércia da seção transversal em relação aos eixos principais y e z, respectivamente

J	.....	momento de inércia da seção transversal, à torção livre
$I_{\omega}$	.....	momento setorial de inércia da seção transversal
E	.....	módulo de elasticidade
G	.....	módulo de elasticidade transversal
$r_o$	.....	raio de giração polar
L	.....	comprimento das barras
$s, c, m, \bar{s}, \bar{c}, \bar{m}, s^*, c^*, m^*$		funções de instabilidade

#### 4 - SISTEMAS DE REFERÊNCIA

##### 4.1 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA O SISTEMA ESTRUTURAL

Para o sistema estrutural serão adotados, para referência, os eixos cartesianos X, Y, Z, com origem O num ponto qualquer do plano da base do edifício. O eixo X, vertical, será orientado da base para o topo. Os eixos Y e Z pertencentes ao plano da base, terão orientações arbitrárias, (Fig. II-1).

##### 4.2 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA OS PILARES INDIVIDUAIS

Para a prumada de pilares individuais  $i$ , serão adotados, para referência, os eixos cartesianos  $x_i, y_i, z_i$  com origem  $O_i$  na base da prumada. O eixo  $x_i$  terá a mesma orientação de X, passando pelos centróides das seções. Os

eixos  $y_i$  e  $z_i$  serão coincidentes com os eixos principais de inércia da seção transversal. A relação entre o sistema de referência  $X, Y, Z$  e  $x_i, y_i, z_i$  será definida através do ângulo  $\alpha_i$  formado pelos eixos  $Y$  e  $y_i$ , medido a partir do primeiro no sentido de  $X$ , (Fig. II-1).

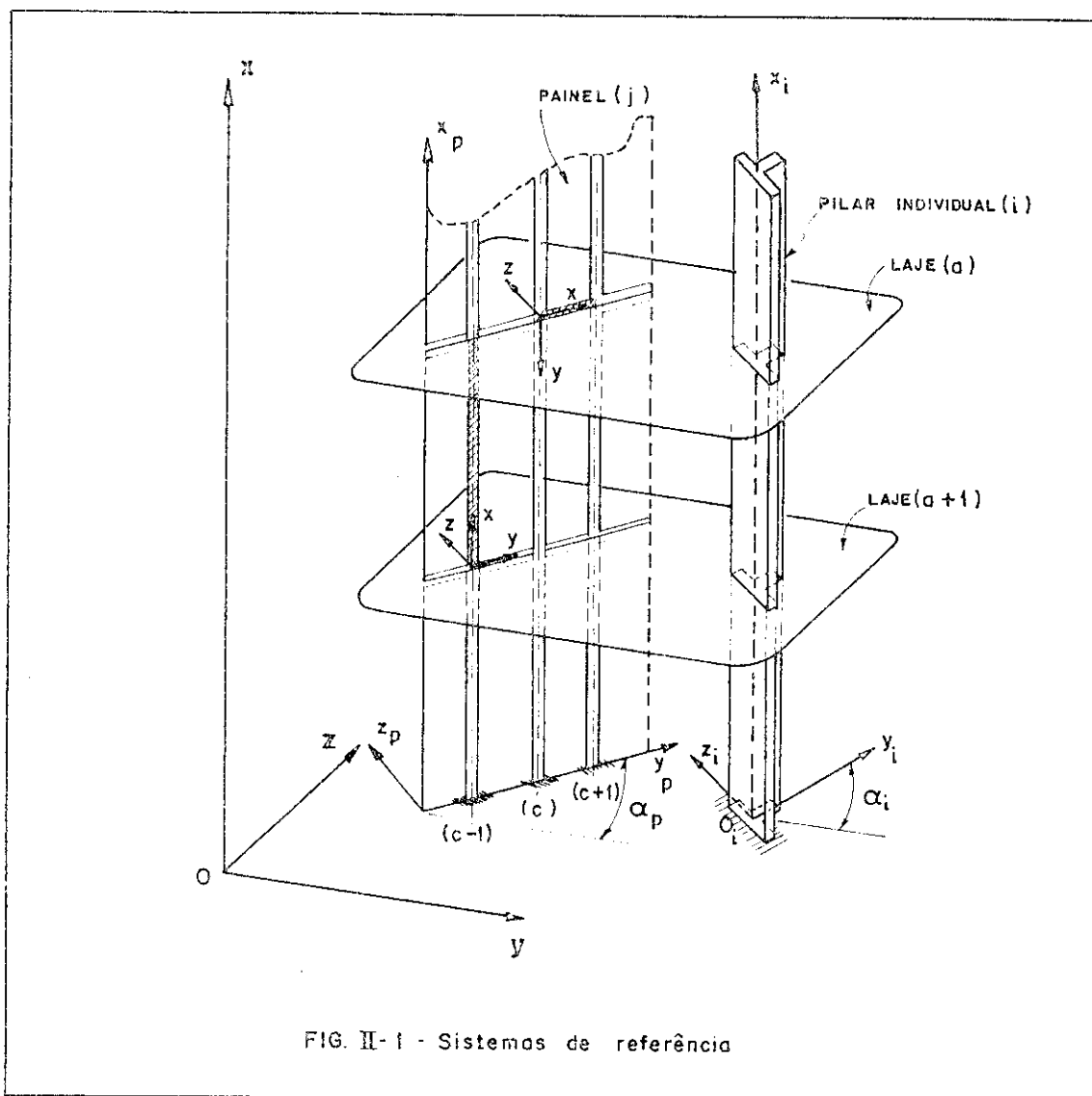


FIG. II-1 - Sistemas de referência

#### 4.3 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA OS PAINÉIS

Para o painel  $j$ , serão adotados para referência, os eixos cartesianos  $x_p, y_p, z_p$  com origem  $O_p$  na sua base e em uma de suas bordas adotada como início do painel. O eixo  $x_p$  terá a mesma orientação de  $X$ . O eixo  $y_p$ , contido no pla-

no do painel, terá o sentido positivo do início para o fim desse painel. O eixo  $z_p$  é perpendicular a esse plano. Para facilitar a referência aos seus elementos estabelecer-se-á que o painel será visto de forma que a sua extremidade inicial esteja à esquerda e a final à direita. A relação entre o sistema de referência  $X, Y, Z$  e  $x_p, y_p, z_p$  será definida através do ângulo  $\alpha_p$  formado pelos eixos  $Y$  e  $y_p$ , medido a partir do primeiro no sentido de  $X$ , (Fig. II-1).

#### 4.4 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA OS PILARES DE UM PAINEL GENÉRICO $j$

Para o pilar  $(c-1, a)$ , pertencente à prumada de pilares  $c-1$  e situado logo abaixo da laje  $a$ , serão adotados como referência os eixos cartesianos  $x, y, z$ , com a origem na laje  $a+1$ . O eixo  $x$  será paralelo a  $x_p$  e passará pelos centróides das seções, os eixos  $y$  e  $z$  serão paralelos a  $y_p$  e  $z_p$ , respectivamente, (Fig. II-1).

#### 4.5 - SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA AS VIGAS DE UM PAINEL $j$

Para a viga  $(c, a)$ , que está à direita da prumada de pilares  $c$  e no nível da laje  $a$ , serão adotados como referência os eixos cartesianos  $x, y, z$ , com a origem na prumada de pilares  $c$ . O eixo  $x$  será paralelo a  $y_p$  e passará pelos centróides das seções. Os eixos  $y$  e  $z$  serão paralelos a  $x_p$  e  $z_p$ , respectivamente, (Fig. II-1).

### 5 - DESLOCAMENTOS

#### 5.1 - DESLOCAMENTOS DO SISTEMA ESTRUTURAL

Considerando sempre a existência de uma prumada de pilares individuais nas intersecções dos painéis, mesmo



que ela seja constituída de pilares fictícios com características geométricas e elásticas nulas, e chamando de nãos as intersecções das lajes com os pilares individuais, ter-se-á ao nível de cada laje a as seguintes coordenadas deslocamentos:

a) Para cada nã, as rotações segundo os eixos  $y_i$  e  $z_i$  e a translação segundo o eixo  $x_i$ . Os deslocamentos nessas coordenadas estarão contidos no vetor  $\{V\}_a^N$  que é de ordem  $3n_i \times 1$ , onde  $n_i$  é o número de prumadas de pilares individuais.

b) Deslocamentos da laje como um corpo rígido em seu plano, correspondendo a translações segundo os eixos Y e Z e rotação segundo o eixo X. Os deslocamentos nessas coordenadas estarão contidos no vetor  $\{V\}_a^L$  que é de ordem  $3 \times 1$ .

O conjunto dos deslocamentos dos nãos formará o vetor  $\{V\}^N$  tal que

$$\{V\}^N = \{ \{V\}_1^N \quad \{V\}_2^N \quad \dots \quad \{V\}_a^N \quad \dots \quad \{V\}_f^N \}^T$$

O conjunto de deslocamentos das lajes como corpo rígido formará o vetor  $\{V\}^L$  tal que

$$\{V\}^L = \{ \{V\}_1^L \quad \{V\}_2^L \quad \dots \quad \{V\}_a^L \quad \dots \quad \{V\}_f^L \}^T$$

Os deslocamentos do sistema serão finalmente representados pelo vetor  $\{V\}$  de ordem  $3f(n_i+1) \times 1$  tal que

$$\{V\} = \{ \{V\}^N \quad \{V\}^L \}^T \quad \dots \quad (1)$$

## 5.2 - DESLOCAMENTOS DOS PILARES INDIVIDUAIS

Ao nível de cada laje a as coordenadas deslocamentos da prumada de pilares individuais i serão, na se-

quência, a rotação segundo  $y_i$ , a rotação segundo  $z_i$ , a translação segundo  $x_i$ , a translação segundo  $y_i$ , a translação segundo  $z_i$  e a rotação segundo  $x_i$ . Esses deslocamentos estarão contidos no vetor  $\{\bar{D}\}_a^i$ , de ordem  $6 \times 1$ . Para a prumada  $i$  os seus deslocamentos serão representados pelo vetor  $\{\bar{D}\}^i$  tal que

$$\{\bar{D}\}^i = \{ \{\bar{D}\}_1^i \ \{\bar{D}\}_2^i \ \dots \ \{\bar{D}\}_a^i \ \dots \ \{\bar{D}\}_f^i \}^T \ \dots \quad (2)$$

de ordem  $6f \times 1$ .

Para cada trecho de pilar compreendido entre as lajes  $a$  e  $a+1$  as coordenadas deslocamentos em número de 12 estão representadas na Fig. II-2. Esses deslocamentos estarão contidos no vetor  $\{\bar{D}_p\}_a^i$ , de ordem  $12 \times 1$ .

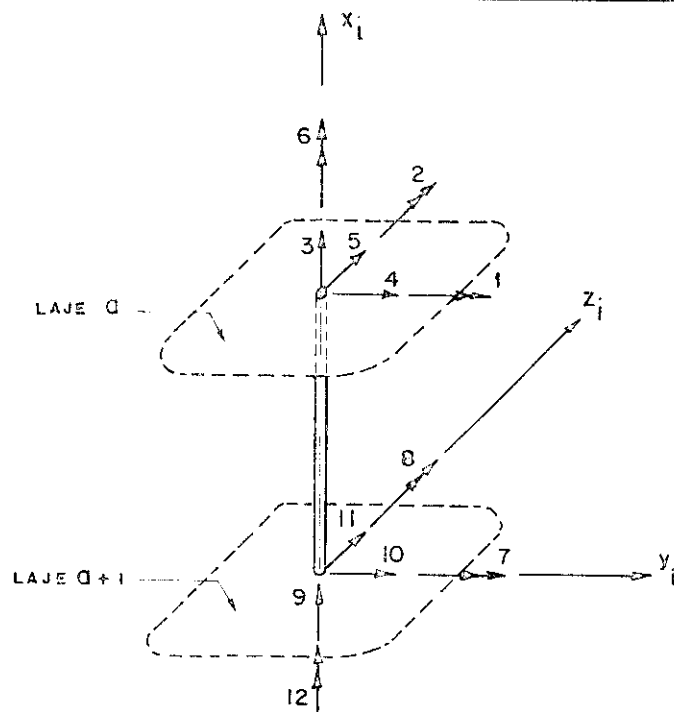
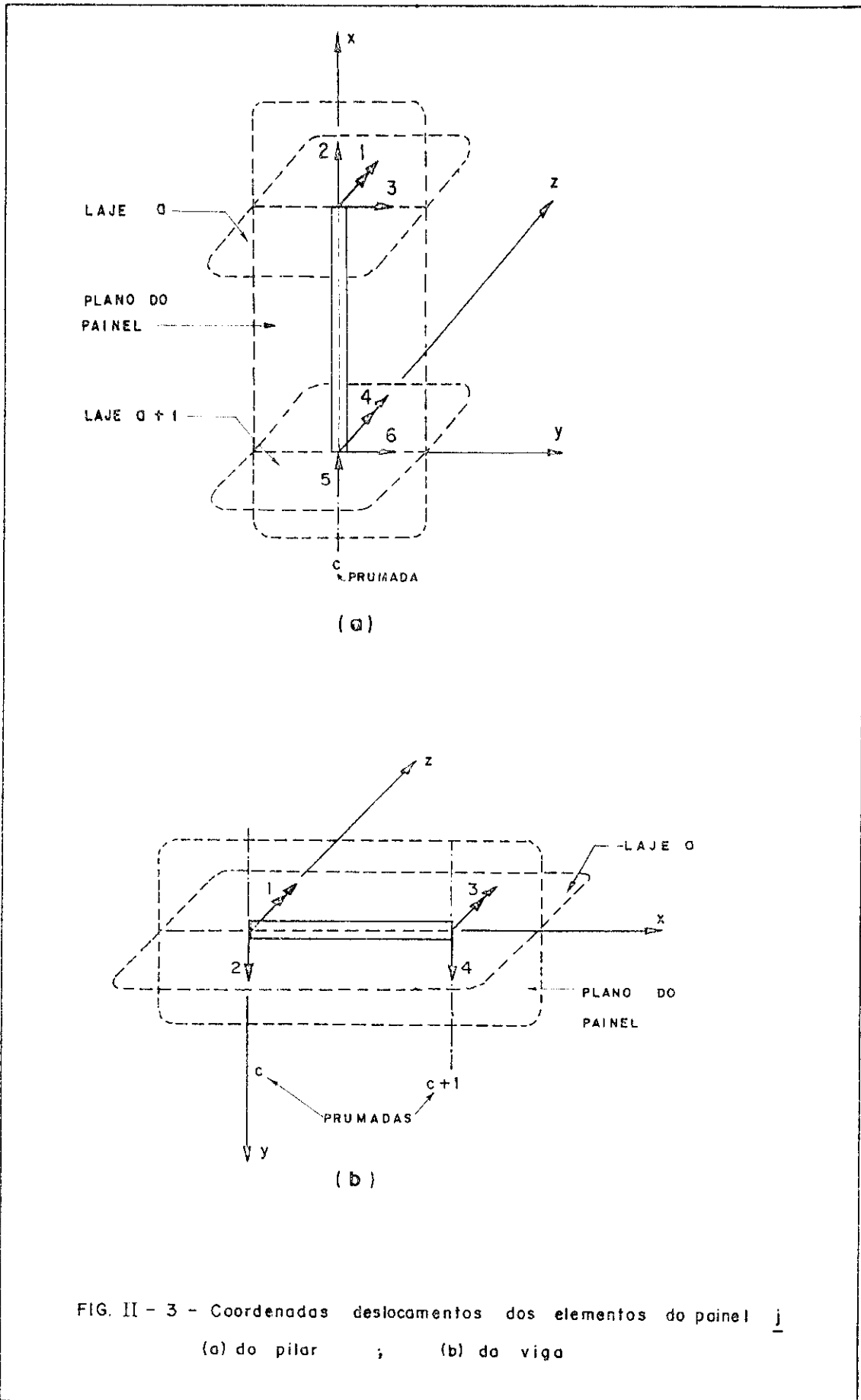


FIG. II- 2 - Coordenadas deslocamentos de um elemento da prumada de pilares individuais  $i$ .



### 5.3 - DESLOCAMENTOS DOS PAINÉIS

Para o painel  $\underline{j}$  serão adotadas como coordenadas deslocamentos aquelas que indicam a rotação segundo  $z_p$  e a translação segundo  $x_p$ , de cada nó, e a translação de cada andar segundo  $y_p$ .

A rotação e a translação vertical de cada nó pertencente a uma prumada  $\underline{c}$  de pilares, serão numeradas de cima para baixo e da esquerda para a direita. Elas serão reunidas no vetor  $\{D\}_c^j$ , de ordem  $2f \times 1$ . As translações horizontais dos andares serão numeradas de cima para baixo e reunidas no vetor  $\{D\}_H^j$ , de ordem  $f \times 1$ . Assim os deslocamentos do painel  $\underline{j}$  estarão contidos no vetor  $\{D\}^j$ , de ordem  $f(2nc+1) \times 1$ , tal que

$$\{D\}^j = \{ \{D\}_1^j \{D\}_2^j \dots \{D\}_c^j \dots \{D\}_{nc}^j \{D\}_H^j \}^T \dots (3)$$

Para o pilar da prumada  $\underline{c}$  e situado abaixo da laje  $\underline{a}$ , as coordenadas deslocamentos estão representadas na Fig. II-3. Os deslocamentos serão representados pelo vetor  $\{D\}_{c,a}^j$ , de ordem  $6 \times 1$ .

Para a viga  $\tilde{a}$  direita da prumada  $\underline{c}$  e situada no nível da laje  $\underline{a}$  as coordenadas deslocamentos adotadas estão representadas na Fig. II-3. Os deslocamentos serão representados pelo vetor  $\{D\}_{v,c,a}^j$ , de ordem  $4 \times 1$ .

### 6 - MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PILARES INDIVIDUAIS

Para a análise do comportamento das barras que constituem os pilares individuais, serão previstas, de início, seções transversais típicas bastante gerais, incluindo aquelas dos perfis de paredes delgadas. Como características do caso geral a ser introduzido tem-se:

a) Os centros de torção (C.T.) e gravidade (C.G.) das seções não são necessariamente coincidentes.

b) Não é prevista a aplicação de carga externa ao longo das barras.

c) Não há distorção da seção transversal no seu plano.

d) As barras são prismáticas.

e) O material é elástico.

f) A redução das rigidezes à flexão e à torção é causada unicamente pela força axial nas barras.

### 6.1 - FORMULAÇÃO GERAL

#### 6.1.1 - Esforços de extremidade de barra

Uma barra AB de extremidade inicial A e final B tem os esforços de extremidade indicados na Fig. II-4, sendo suposto que a força normal esteja aplicada no C.G.

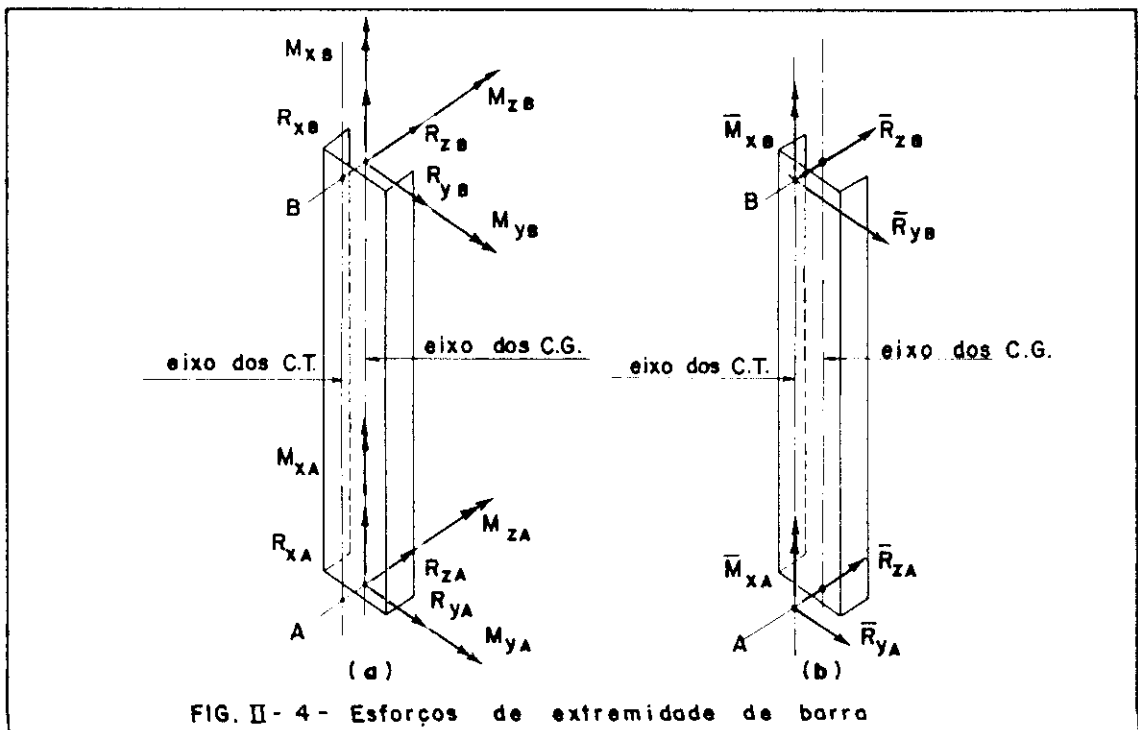
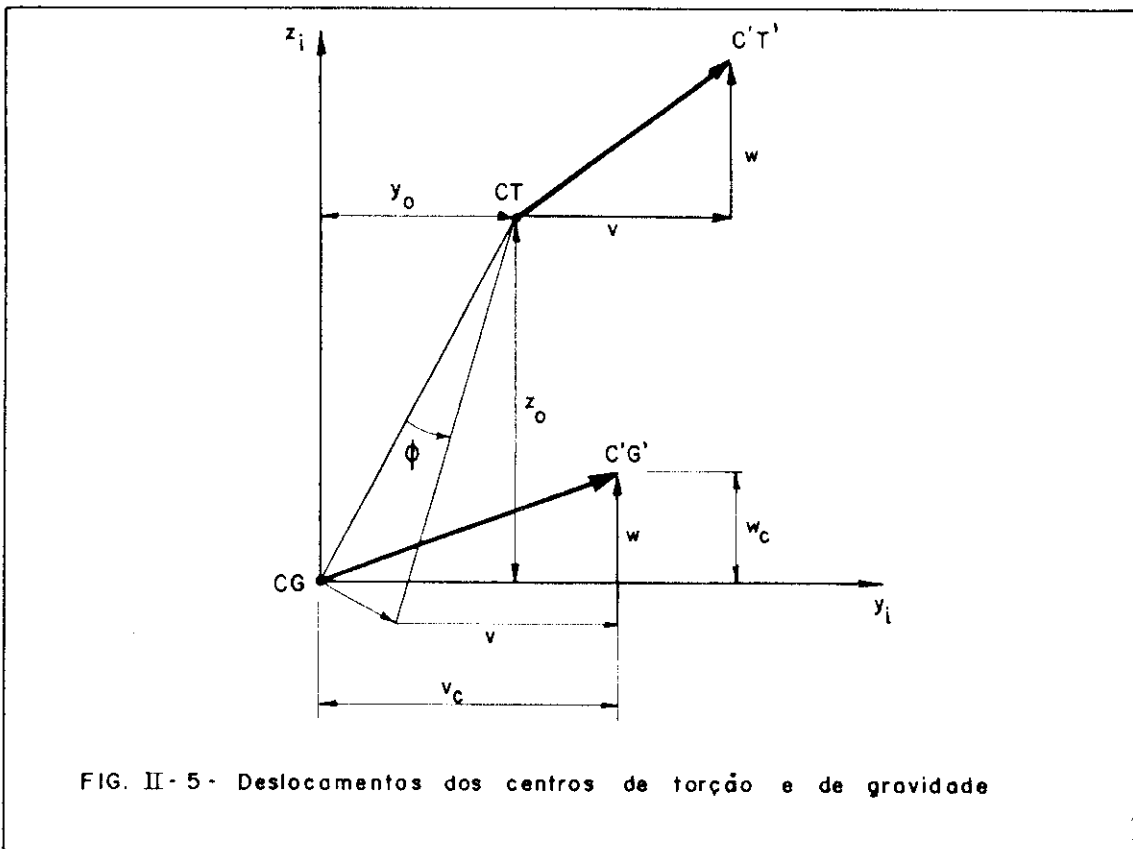


FIG. II-4 - Esforços de extremidade de barra

Os momentos torçores serão sempre relacionados com os centros de cisalhamento das seções, quando suas posições não forem coincidentes com as dos de gravidade (Fig. II-4.b).

### 6.1.2 - Deslocamentos dos centros de torção e de gravidade

Sendo  $v_c$  e  $w_c$  os deslocamentos do C.G. e sendo  $y_o$  e  $z_o$  as ordenadas do C.T. em relação ao C.G., conforme Fig. II-5, os deslocamentos gerais  $v$ ,  $w$  e  $\phi$  do C.T. da seção podem ser relacionados com os do C.G. através das relações (4) e (5).



$$v_c = v + \phi z_o \quad \dots (4)$$

$$w_c = w - \phi y_o \quad \dots (5)$$

### 6.1.3 - Equações de equilíbrio

Isolando o segmento de barra limitado pela extremidade A e o ponto de ordenada genérica  $x$  tem-se, na posição deformada, os esforços atuantes indicados na Fig. II-6.

As dependências entre esses esforços estarão expressas pelas relações (6) a (11).

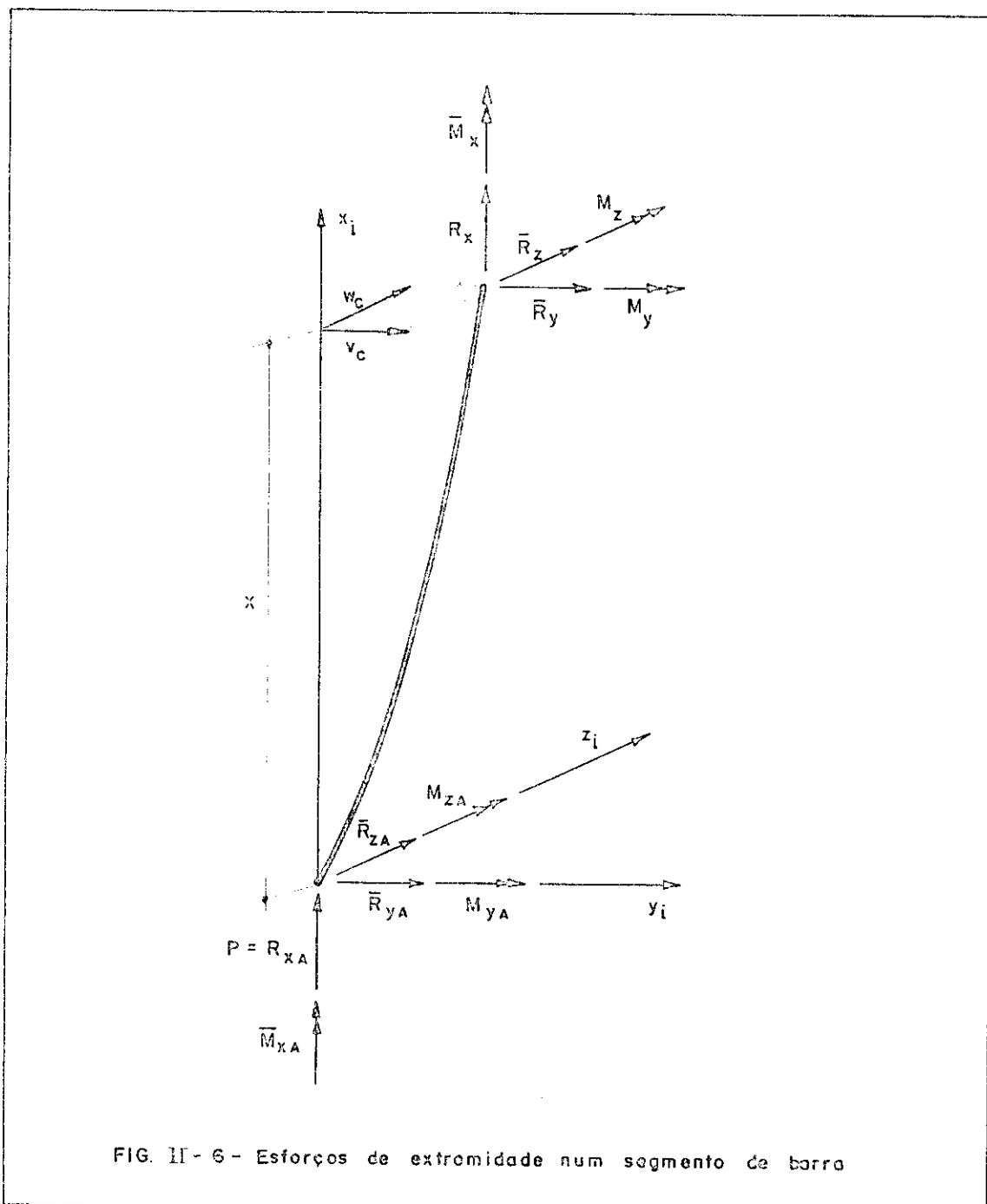


FIG. II-6 - Esforços de extremidade num segmento de barra

Chamando P o esforço de compressão na barra

$$R_x = -R_{xA} = -P \quad \dots (6)$$

$$\bar{R}_y = -\bar{R}_{yA} \quad \dots (7)$$

$$\bar{R}_z = -\bar{R}_{zA} \quad \dots (8)$$

$$M_y + M_{yA} + \bar{R}_{zA}x - Pw_c = 0 \quad \dots (9)$$

$$M_z + M_{zA} - \bar{R}_{yA}x + Pv_c = 0 \quad \dots (10)$$

$$\bar{M}_x + \bar{M}_{xA} = 0 \quad \dots (11)$$

#### 6.1.4 - Equações das elásticas do centro de torção

Sendo v, w,  $\phi$  deslocamentos do centro de torção pode-se escrever

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z = -M_{zA} + \bar{R}_{yA}x - Pv_c \quad \dots (12)$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = M_{yA} + \bar{R}_{zA}x - Pv_c \quad \dots (13)$$

$$\begin{aligned} -EI_\omega \frac{d^3 \phi}{dx^3} + (GJ - Pr_o^2) \frac{d\phi}{dx} - P(z_o \frac{dv}{dx} - y_o \frac{dw}{dx}) = \\ = \bar{M}_x = -\bar{M}_{xA} \quad \dots (14) \end{aligned}$$



Substituindo (4) e (5) em (12) e (13) e derivando as relações (12), (13) e (14) convenientemente obtêm-se

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} + Pz_o \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} - Py_o \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

$$EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dx^4} - (GJ - Pr_o^2) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Pz_o \frac{d^2 v}{dx^2} - Py_o \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

ou

$$\begin{cases} EI_z v'''' + Pv'' + Pz_o \phi'' = 0 \\ EI_y w'''' + Pw'' - Py_o \phi'' = 0 \\ EI_\omega \phi'''' - (GJ - Pr_o^2) \phi'' + Pz_o v'' - Py_o w'' = 0 \end{cases} \dots (15)$$

## 6.2 - PARTICULARIZAÇÃO PARA BARRAS CUJAS SEÇÕES POSSUEM UM EIXO DE SIMETRIA

Para as seções com um eixo de simetria, sendo z esse eixo, tem-se

$$y_o = 0$$

com as relações (15) se transformando em um sistema de equações em que uma delas é independente das outras.

$$EI_y w'''' + Pw'' = 0$$

$$\begin{cases} EI_z v'''' + Pv'' + Pz_o \phi'' = 0 \\ EI_\omega \phi'''' - (GJ - Pr_o^2) \phi'' + Pz_o v'' = 0 \end{cases}$$

6.2.1 - Solução da equação independente

$$EI_y w'''' + Pw'' = 0 \quad \dots (16)$$

Fazendo

$$k_y = \sqrt{\frac{|P|}{EI_y}} \quad \mu_y = \frac{L}{2} k_y$$

a solução geral para a equação diferencial (16) vale

a) Para  $P > 0$

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \frac{2\mu_y}{L} x + C_4 \sin \frac{2\mu_y}{L} x$$

Para translações e rotações genéricas nas extremidades as condições de contorno são:

Se  $x = 0$

$$w = w_{zA} \quad e \quad w' = \theta_{yA}$$

Se  $x = L$

$$w = w_{zB} \quad e \quad w' = \theta_{yB}$$

Com estas quatro condições e chamando

$$s^* = \mu_y \frac{1 - 2\mu_y \cotg 2\mu_y}{\text{tg} \mu_y - \mu_y}$$

$$c^* = \frac{2\mu_y - \text{sen} 2\mu_y}{\text{sen} 2\mu_y - 2\mu_y \cos 2\mu_y}$$

$$m^* = \frac{2s^*(1+c^*)}{2s^*(1+c^*) - 4\mu_y^2}$$

pode-se determinar os valores das constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  que são

$$C_1 = \frac{1}{4\mu_y^2} \left\{ \left[ s^*(1+c^*) - \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*} \right] w_{zA} + s^*(1+c^*)w_{zB} + \right. \\ \left. -s^*L\theta_{yA} - s^*c^*L\theta_{yB} \right\}$$

$$C_2 = \frac{1}{4\mu_y^2} \left[ \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*L} w_{zA} - \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*L} w_{zB} + s^*(1+c^*)\theta_{yA} + \right. \\ \left. + s^*(1+c^*)\theta_{yB} \right]$$

$$C_3 = \frac{1}{4\mu_y^2} \left[ s^*(1+c^*)w_{zA} - s^*(1+c^*)w_{zB} + s^*L\theta_{yA} + s^*c^*L\theta_{yB} \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{3\mu_y^3} \left[ -\frac{2s^*(1+c^*)}{m^*} w_{zA} + \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*} w_{zB} + \left[ s^*L(1+c^*) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2s^*L(1+c^*)}{m^*} \right] \theta_{yA} - c^*L(1+c^*)\theta_{yB} \right]$$

b) Para  $P < 0$

$$W = C_1 + C_2x + C_3 \cosh \frac{2\mu_y}{L} x + C_4 \sinh \frac{2\mu_y}{L} x$$

Com as mesmas condições de contorno anteriores e chamando

$$c^* = \mu_y \cdot \frac{1 - 2\mu_y \operatorname{cosech} 2\mu_y}{\operatorname{tgh} \mu_y - \mu_y}$$

$$s^* = \frac{2\mu_y - \sinh 2\mu_y}{\sinh 2\mu_y - 2\mu_y \cosh 2\mu_y}$$

$$m^* = \frac{2s^*(1+c^*)}{2s^*(1+c^*) + 4\mu_y^2}$$

pode-se determinar os valores das constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  que são

$$C_1 = \frac{1}{4\mu_y^2} \left\{ \left[ -s^*(1+c^*) + \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*} \right] w_{zA} - s^*(1+c^*) w_{zB} + s^* L \theta_{yA} + s^* c^* L \theta_{yB} \right\}$$

$$C_2 = \frac{1}{4\mu_y^2} \left[ -\frac{2s^*(1+c^*)}{m^* L} w_{zA} + \frac{2s^*(1+c^*)}{m^* L} w_{zB} - s^*(1+c^*) \theta_{yA} - s^*(1+c^*) \theta_{yB} \right]$$

$$C_3 = \frac{1}{4\mu_y^2} \left[ -s^*(1+c^*) w_{zA} + s^*(1+c^*) w_{zB} - s^* L \theta_{yA} - s^* c^* L \theta_{yB} \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{8\mu_y^3} \left\{ \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*} w_{zA} - \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*} w_{zB} - \left[ s^* L (1+c^*) + \frac{2s^* L (1+c^*)}{m^*} \right] \theta_{yA} + s^* L (1+c^*) \theta_{yB} \right\}$$

Com as constantes obtidas nos itens (a) e (b) calculam-se os esforços

$$M_{yA} = -EI_y w'' \Big|_{x=0}$$

$$M_{yB} = -EI_y w'' \Big|_{x=L}$$

$$\bar{R}_{zA} = -EI_y w''' \Big|_{x=0} - Pw' \Big|_{x=0}$$

$$\bar{R}_{zB} = -EI_y w''' \Big|_{x=L} - Pw' \Big|_{x=L}$$

obtendo-se

$$M_{yA} = -EI_y \left[ -\frac{s^*(1+c^*)}{L^2} w_{zA} + \frac{s^*(1+c^*)}{L^2} w_{zB} - \frac{s^*}{L} \theta_{yA} - \frac{s^*c^*}{L} \theta_{yB} \right] \quad \dots(17)$$

$$M_{yB} = EI_y \left[ -\frac{s^*(1+c^*)}{L^2} w_{zA} + \frac{s^*(1+c^*)}{L^2} w_{zB} + \frac{s^*c^*}{L} \theta_{yA} - \frac{s^*}{L} \theta_{yB} \right] \quad \dots(18)$$

$$\bar{R}_{zA} = -EI_y \left[ \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*L^3} w_{zA} - \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*L^3} w_{zB} + \frac{s^*(1+c^*)}{L^2} \theta_{yA} + \frac{s^*(1+c^*)}{L^2} \theta_{yB} \right] \quad \dots(19)$$

$$\bar{R}_{zB} = EI_y \left[ -\frac{2s^*(1+c^*)}{m^*L^3} w_{zA} + \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*L^3} w_{zB} - \frac{s^*(1+c^*)}{L^2} \theta_{yA} - \frac{s^*(1+c^*)}{L^2} \theta_{yB} \right] \quad \dots(20)$$

É interessante observar que as relações (17) a (20) valem para esforços axiais P de compressão (positivos) ou de tração (negativos) bastando para isso substituir  $s^*$ ,  $c^*$  e  $m^*$  pelos valores correspondentes.

Mais ainda, se P for nulo essas relações continuam válidas para

$$s^* = 4 \qquad c^* = 0,5 \qquad m^* = 1$$

6.2.2 - Solução das equações dependentes

$$\begin{cases} EI_z v'''' + Pv'' + Pz_o \phi'' = 0 \\ EI_\omega \phi'''' - (GJ - Pr_o^2) \phi'' + Pz_o v'' = 0 \end{cases} \dots (21)$$

Fazendo

$$k_z = \sqrt{\frac{|P|}{EI_z}} \qquad k_\omega = \sqrt{\frac{|P|}{EI_\omega}}$$

$$k = \sqrt{\frac{|GJ - Pr_o^2|}{EI_\omega}}$$

o sistema de equações (21) pode ser transformado em:

a) Para  $P > 0$  e  $GJ - Pr_o^2 \geq 0$

$$\begin{cases} v'''' + k_z^2 v'' + k_z^2 z_o \phi'' = 0 \\ \phi'''' - k^2 \phi'' + k_\omega^2 z_o v'' = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a <sup>(15)</sup>

$$\begin{cases} v'''' + k_z^2 v'' + k_z^2 z_o \phi'' = 0 \\ v^{VI} + (k_z^2 - k^2) v'''' - (k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) v'' = 0 \end{cases}$$

A equação independente em  $v$  tem como polinômio característico

$$r^2 \left[ r^4 + (k_z^2 - k^2) r^2 - (k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) \right] = 0$$

Sendo

$$-(k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) < 0$$

e

$$(k_z^2 - k^2)^2 + 4(k^2 k_z^2 + k^2 \omega^2 k_z^2 z_0^2) > 0$$

as raízes desse polinômio são

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$r_3 = -r_4 = \frac{\sqrt{-(k_z^2 - k^2) + \sqrt{(k_z^2 - k^2)^2 + 4(k^2 k_z^2 + k^2 \omega^2 k_z^2 z_0^2)}}}{2} = p$$

$$r_5 = -r_6 = i \frac{\sqrt{(k_z^2 - k^2) + \sqrt{(k_z^2 - k^2)^2 + 4(k^2 k_z^2 + k^2 \omega^2 k_z^2 z_0^2)}}}{2} = qi$$

Chamando

$$\mu = \frac{L}{2} p \qquad \eta = \frac{L}{2} q$$

a solução da equação diferencial em  $v$  é

$$v = C_1 \cosh \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sinh \frac{2\mu}{L} x + C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x + \\ + C_4 \sen \frac{2\eta}{L} x + C_5 + C_6 x$$

Como

$$\phi'' = - \frac{1}{k_z^2 z_0} v'''' - \frac{1}{z_0} v''$$

então

$$\phi = - \frac{4\mu^2 + L^2 k_z^2}{z_0 L^2 k_z^2} (C_1 \cosh \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sinh \frac{2\mu}{L} x) + \\ + \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_0 L^2 k_z^2} (C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x + C_4 \sen \frac{2\eta}{L} x) + C_7 + C_8 x$$

Para translações e rotações genéricas nas extremidades e supondo que os nós em uma estrutura são suficientemente rígidos para impedirem os empenamentos das seções, as condições de contorno são:

$$\text{Se } x = 0$$

$$v = v_{yA} \quad v' = \theta_{zA} \quad \phi = \phi_{xA} \quad \phi' = 0$$

$$\text{Se } x = L$$

$$v = v_{yB} \quad v' = \theta_{zB} \quad \phi = \phi_{xB} \quad \phi' = 0$$

Com estas oito condições e chamando

$$s = \mu \frac{1 - 2\mu \cot \text{th} 2\mu}{\text{tgh} \mu - \mu} \quad \bar{s} = \eta \frac{1 - 2\eta \cot g 2\eta}{\text{tg} \eta - \eta}$$

$$c = \frac{2\mu - \text{senh} 2\mu}{\text{senh} 2\mu - 2\mu \cosh 2\mu} \quad \bar{c} = \frac{2\eta - \text{sen} 2\eta}{\text{sen} 2\eta - 2\eta \cos 2\eta}$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) + 4\mu^2} \quad \bar{m} = \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{2\bar{s}(1+\bar{c}) - 4\eta^2}$$

$$\alpha = \frac{4\mu^2 + L^2 k^2}{4\eta^2 + 4\mu^2} \frac{z}{z}$$

$$\beta = \frac{4\eta^2 - L^2 k^2}{4\eta^2 + 4\mu^2} \frac{z}{z}$$

$$\gamma = \frac{z}{o} \frac{L^2 k^2}{z} \frac{z}{4\eta^2 + 4\mu^2}$$



pode-se determinar os valores das constantes  $C_1, C_2 \dots C_8$  que são:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)v_{yA} + s(1+c)v_{yB} - sL\theta_{zA} - scL\theta_{zB} \right] + \\
 &+ \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ s(1+c)\phi_{xA} - s(1+c)\phi_{xB} \right] \\
 C_2 &= \frac{\beta}{8\mu^3} \left\{ \frac{2s(1+c)}{m} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{m} v_{yB} - \left[ sL(1+c) + \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{2sL(1+c)}{m} \right] \theta_{zA} + sL(1+c)\theta_{zB} \right\} + \frac{\gamma}{8\mu^3} \left[ - \frac{2s(1+c)}{m} \phi_{xA} + \frac{2s(1+c)}{m} \phi_{xB} \right] \\
 C_3 &= \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} - \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} + \bar{s}L\theta_{zA} + \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \\
 &+ \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} - \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right] \\
 C_4 &= \frac{\alpha}{8\eta^3} \left\{ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yB} + \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) + \right. \right. \\
 &\left. \left. - \frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{zA} - \bar{s}L(1+\bar{c})\theta_{zB} \right\} + \frac{\gamma}{8\eta^3} \left[ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xB} \right] \\
 C_5 &= v_{yA} + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ s(1+c)v_{yA} - s(1+c)v_{yB} + sL\theta_{zA} + scL\theta_{zB} \right] + \\
 &+ \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \gamma \left\{ - \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \phi_{xA} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \phi_{xB} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_6 = & \frac{1}{L}(-v_{yA} + v_{yB}) + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -\frac{2s(1+c)}{L} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{L} v_{yB} + \right. \\
 & \left. -s(1+c)\theta_{zA} -s(1+c)\theta_{zB} \right] + \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yB} + \right. \\
 & \left. +\bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zA} +\bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \gamma \left\{ \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] \phi_{xA} - \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] \phi_{xB} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_7 = & \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ - \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yA} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yB} - \left[ \frac{sL}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} - \left[ \frac{scL}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}\bar{c}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \phi_{xA} \\
 & + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ s(1+c)\phi_{xA} -s(1+c)\phi_{xB} \right] + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} +\bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_8 = & \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yA} - \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yB} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \\
 & + \frac{1}{L}(-\phi_{xA} + \phi_{xB}) + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ -\frac{2s(1+c)}{L} \phi_{xA} + \frac{2s(1+c)}{L} \phi_{xB} \right] + \\
 & + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} \phi_{xA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} \phi_{xB} \right]
 \end{aligned}$$

b) Para  $P > 0$  e  $GJ - Pr_0^2 < 0$

$$\begin{cases} v'''' + k_z^2 v'' + k_z^2 z_0 \phi'' = 0 \\ \phi'''' + k^2 \phi'' + k_\omega^2 z_0 v'' = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a <sup>(15)</sup>

$$\begin{cases} v'''' + k_z^2 v'' + k_z^2 z_o \phi'' = 0 \\ v^{VI} + (k_z^2 + k^2) v'''' - (-k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) v'' = 0 \end{cases}$$

A equação independente em v tem como polinômio característico

$$r^2 \left[ r^4 + (k_z^2 + k^2) r^2 - (-k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) \right] = 0$$

Sendo

$$(k_z^2 + k^2)^2 + 4 (-k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) = (k_z^2 - k^2)^2 + 4 k_\omega^2 k_z^2 z_o^2 > 0$$

se

$$b.1) \quad -(-k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) < 0$$

as soluções são as mesmas do item (a) desde que

$$\mu = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{-(k_z^2 + k^2) + \sqrt{(k_z^2 + k^2)^2 + 4(-k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2)}}{2}}$$

$$\eta = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{(k_z^2 + k^2) + \sqrt{(k_z^2 + k^2)^2 + 4(-k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2)}}{2}}$$

$$b.2) \quad -(-k^2 k_z^2 + k_\omega^2 k_z^2 z_o^2) > 0$$

como

$$(k_z^2 + k^2) > 0$$

as raízes desse polinômio são:

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$r_3 = -r_4 = i \frac{\sqrt{(k_z^2 + k^2) - \sqrt{(k_z^2 + k^2)^2 + 4(-k^2 k_z^2 + k^2 k_z^2 z_o^2)}}}{2} = pi$$

$$r_5 = -r_6 = i \frac{\sqrt{(k_z^2 + k^2) + \sqrt{(k_z^2 + k^2)^2 + 4(-k^2 k_z^2 + k^2 k_z^2 z_o^2)}}}{2} = qi$$

Chamando

$$\mu = \frac{L}{2} p$$

$$\eta = \frac{L}{2} q$$

a solução da equação diferencial em  $v$  é

$$v = C_1 \cos \frac{2\mu}{L} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{2\mu}{L} x + C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x + C_4 \operatorname{sen} \frac{2\eta}{L} x + C_5 + C_6 x$$

Como

$$\phi'' = -\frac{1}{k_z^2 z_o} v'''' - \frac{1}{z_o} v''$$

$$\phi = \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} (C_1 \cos \frac{2\mu}{L} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{2\mu}{L} x) +$$

$$+ \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} (C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x + C_4 \operatorname{sen} \frac{2\eta}{L} x) + C_7 + C_8 x$$

Com as mesmas oito condições de contorno do item (a) anterior e chamando

$$s = \mu \frac{1 - 2\mu \operatorname{cotg} 2\mu}{\operatorname{tg} \mu - \mu}$$

$$\bar{s} = \eta \frac{1 - 2\eta \operatorname{cotg} 2\eta}{\operatorname{tg} \eta - \eta}$$

$$c = \frac{2\mu - \operatorname{sen} 2\mu}{\operatorname{sen} 2\mu - 2\mu \cos 2\mu}$$

$$\bar{c} = \frac{2\eta - \operatorname{sen} 2\eta}{\operatorname{sen} 2\eta - 2\eta \cos 2\eta}$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c)-4\mu^2} \qquad \bar{m} = \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{2\bar{s}(1+\bar{c})-4\eta^2}$$

$$\alpha = - \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

$$\beta = \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

$$\gamma = \frac{z \frac{L^2 k_z^2}{z}}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

pode-se determinar  $C_1, C_2 \dots C_8$  que valem

$$C_1 = \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ s(1+c)v_{yA} - s(1+c)v_{yB} + sL\theta_{zA} + scL\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)\phi_{xA} + s(1+c)\phi_{xB} \right]$$

$$C_2 = \frac{\beta}{8\mu^3} \left\{ - \frac{2s(1+c)}{m} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{m} v_{yB} + \left[ sL(1+c) + \right.$$

$$\left. - \frac{2sL(1+c)}{m} \right] \theta_{zA} - sL(1+c)\theta_{zB} \left\} + \frac{\gamma}{8\mu^3} \left[ \frac{2s(1+c)}{m} \phi_{xA} - \frac{2s(1+c)}{m} \phi_{xB} \right]$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} - \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} + \bar{s}L\theta_{zA} + \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] +$$

$$\frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} - \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right]$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{8\eta^3} \left\{ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yB} + \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) + \right.$$

$$- \frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \left[ \theta_{zA} - \bar{s}L(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \frac{\gamma}{8\eta^3} \left[ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xB} \right]$$

$$C_5 = v_{yA} + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)v_{yA} + s(1+c)v_{yB} - sL\theta_{zA} - s\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \gamma \left\{ \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \phi_{xA} - \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \phi_{xB} \right\}$$

$$C_6 = \frac{1}{L}(-v_{yA} + v_{yB}) + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ \frac{2s(1+c)}{L} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{L} v_{yB} + s(1+c)\theta_{zA} + s(1+c)\theta_{zB} \right] + \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yB} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \gamma \left[ - \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] \phi_{xA} + \gamma \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] \phi_{xB}$$

$$C_7 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yA} + \left[ - \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yB} + \left[ \frac{sL}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ \frac{s\bar{c}L}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}\bar{c}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \phi_{xA} + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)\phi_{xA} + s(1+c)\phi_{xB} \right] + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} + \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right]$$

$$C_8 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ - \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yA} + \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yB} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \Big] v_{yB} + \left[ - \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ - \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \Big\} + \\
 & + \frac{1}{L} \left( -\phi_{xA} + \phi_{xB} \right) + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ \frac{2s(1+c)}{L} \phi_{xA} - \frac{2s(1+c)}{L} \phi_{xB} \right] + \\
 & + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} \phi_{xA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} \phi_{xB} \right]
 \end{aligned}$$

$$b.3) -(-k^2 k_z^2 + k_z^2 k_z^2 z_o^2) = 0$$

as raízes desse polinômio são

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$$

$$r_5 = -r_6 = i \sqrt{(k_z^2 + k^2)} = qi$$

Chamando

$$\eta = \frac{L}{2} q$$

a solução da equação diferencial em  $v$  é

$$v = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x + C_4 \sen \frac{2\eta}{L} x + C_5 + C_6 x$$

Como

$$\phi'' = - \frac{1}{k_z^2 z_o} v'''' - \frac{1}{z_o} v''$$

$$\phi = - \frac{1}{z_o} (C_1 x^2 + C_2 x^3) + \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} (C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x +$$

$$+ C_4 \sen \frac{2\eta}{L} x) + C_7 + C_8 x$$

Com as mesmas oito condições de contorno do item (a) anterior e chamando

$$s = 4 \qquad \bar{s} = \eta \frac{1-2\eta \operatorname{cotg}2\eta}{\operatorname{tg}\eta-\eta}$$

$$c = \frac{1}{2} \qquad \bar{c} = \frac{2\eta - \operatorname{sen}2\eta}{\operatorname{sen}2\eta - 2\eta \operatorname{cos}2\eta}$$

$$m = 1 \qquad \bar{m} = \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{2\bar{s}(1+\bar{c}) - 4\eta^2}$$

$$\alpha = \frac{L^2 k^2}{4\eta^2}$$

$$\beta = \frac{4\eta^2 - L^2 k^2}{4\eta^2}$$

$$\gamma = \frac{z_0 L^2 k^2}{4\eta^2}$$

pode-se determinar  $C_1, C_2 \dots C_8$  que valem

$$C_1 = \beta \left[ -\frac{3}{L^2} v_{yA} + \frac{3}{L^2} v_{yB} - \frac{2}{L} \theta_{zA} - \frac{1}{L} \theta_{zB} \right] + \gamma \left[ \frac{3}{L^2} \phi_{xA} + \right. \\ \left. - \frac{3}{L^2} \phi_{xB} \right]$$

$$C_2 = \beta \left[ \frac{2}{L^3} v_{yA} - \frac{2}{L^3} v_{yB} + \frac{1}{L^2} \theta_{zA} + \frac{1}{L^2} \theta_{zB} \right] + \gamma \left[ -\frac{2}{L^3} \phi_{xA} + \right. \\ \left. + \frac{2}{L^3} \phi_{xB} \right]$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} - \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} + \bar{s}L\theta_{zA} + \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] +$$



$$+ \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} - \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right]$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{8\eta^3} \left\{ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yB} + \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{zA} - \bar{s}L(1+\bar{c})\theta_{zB} \right\} + \frac{\gamma}{8\eta^3} \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xB} \right]$$

$$C_5 = v_{yA} + \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \\ + \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})\theta_{xA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{xB} \right]$$

$$C_6 = \frac{\alpha}{4\eta^2} \left\{ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} v_{yB} - \left[ \bar{s}(1+\bar{c}) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right\} + \theta_{zA} + \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} \phi_{xA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} \phi_{xB} \right]$$

$$C_7 = \frac{\alpha\beta}{\gamma 4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \\ + \phi_{xA} + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} + \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right]$$

$$C_8 = \frac{\alpha\beta}{\gamma 4\eta^2} \left\{ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} v_{yB} + \left[ \bar{s}(1+\bar{c}) + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{zA} - \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right\} + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} \phi_{xA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} \phi_{xB} \right]$$

c) Para  $P < 0$  e  $GJ - Pr_o^2 > 0$

$$\begin{cases} v'''' - k_z^2 v'' - k_z^2 z_0 \phi'' = 0 \\ \phi'''' - k^2 \phi'' - k_z^2 z_0 v'' = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a <sup>(15)</sup>

$$\begin{cases} v'''' - k_z^2 v'' - k_z^2 z_0 \phi'' = 0 \\ v^{VI} - (k_z^2 + k^2) v'''' - (-k^2 k_z^2 + k_z^2 k_z^2 z_0^2) v'' = 0 \end{cases}$$

A equação independente em v tem como polinômio característico

$$r^2 \left[ r^4 - (k_z^2 + k^2) r^2 - (-k^2 k_z^2 + k_z^2 k_z^2 z_0^2) \right] = 0$$

Sendo

$$(k_z^2 + k^2)^2 + 4(-k^2 k_z^2 + k_z^2 k_z^2 z_0^2) = (k_z^2 - k^2)^2 + 4 k_z^2 k_z^2 z_0^2 > 0$$

e

$$-(-k^2 k_z^2 + k_z^2 k_z^2 z_0^2) > 0$$

as raízes desse polinômio são

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$r_3 = -r_4 = \frac{\sqrt{(k_z^2 + k^2) - \sqrt{(k_z^2 + k^2)^2 + 4(-k^2 k_z^2 + k_z^2 k_z^2 z_0^2)}}}{2} = p$$

$$r_5 = -r_6 = \frac{\sqrt{(k_z^2 + k^2) + \sqrt{(k_z^2 + k^2)^2 + 4(-k^2 k_z^2 + k_z^2 k_z^2 z_0^2)}}}{2} = q$$

Chamando

$$\mu = \frac{L}{2} p$$

$$\eta = \frac{L}{2} q$$

a solução da equação diferencial em  $v$  é

$$v = C_1 \cosh \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sinh \frac{2\mu}{L} x + C_3 \cosh \frac{2\eta}{L} x + \\ + C_4 \sinh \frac{2\eta}{L} x + C_5 + C_6 x$$

Como

$$\phi'' = \frac{1}{k_z^2 z_0} v'''' + \frac{1}{z_0} v''$$

então

$$\phi = \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_0 L^2 k_z^2} (C_1 \cosh \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sinh \frac{2\mu}{L} x) + \\ + \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_0 L^2 k_z^2} (C_3 \cosh \frac{2\eta}{L} x + C_4 \sinh \frac{2\eta}{L} x) + C_7 + C_8 x$$

Com as mesmas oito condições de contorno do item (a) anterior e chamando

$$s = \mu \frac{1 - 2\mu \operatorname{ctgh} 2\mu}{\operatorname{tgh} \mu - \mu}$$

$$\bar{s} = \eta \frac{1 - 2\eta \operatorname{ctgh} 2\eta}{\operatorname{tgh} \eta - \eta}$$

$$c = \frac{2\mu - \sinh 2\mu}{\sinh 2\mu - 2\mu \cosh 2\mu}$$

$$\bar{c} = \frac{2\eta - \sinh 2\eta}{\sinh 2\eta - 2\eta \cosh 2\eta}$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) + 4\mu^2}$$

$$\bar{m} = \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{2\bar{s}(1+\bar{c}) + 4\eta^2}$$

$$\alpha = - \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

$$\beta = \frac{4\eta^2 - L^2 k^2}{4\eta^2 - 4\mu^2} z$$

$$\gamma = \frac{z_o L^2 k^2}{4\eta^2 - 4\mu^2} z$$

pode-se determinar os valores das constantes  $C_1, C_2 \dots C_8$  que são

$$C_1 = \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)v_{yA} + s(1+c)v_{yB} - sL\theta_{zA} - scL\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ s(1+c)\phi_{xA} - s(1+c)\phi_{xB} \right]$$

$$C_2 = \frac{\beta}{8\mu^3} \left\{ \frac{2s(1+c)}{m} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{m} v_{yB} - \left[ sL(1+c) + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{2sL(1+c)}{m} \right] \theta_{zA} + sL(1+c)\theta_{zB} \left. \right\} + \frac{\gamma}{8\mu^3} \left[ -\frac{2s(1+c)}{m} \phi_{xA} + \frac{2s(1+c)}{m} \phi_{xB} \right]$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} + \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right]$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{8\eta^3} \left\{ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yB} - \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{zA} + \bar{s}L(1+\bar{c})\theta_{zB} \left. \right\} + \frac{\gamma}{8\eta^3} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \phi_{xB} \right]$$

$$C_5 = v_{yA} + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ s(1+c)v_{yA} - s(1+c)v_{yB} + sL\theta_{zA} + scL\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} - \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} + \bar{s}L\theta_{zA} + \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \gamma \left[ -\frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \right.$$

$$+ \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \phi_{xA} + \gamma \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \phi_{xB}$$

$$C_6 = \frac{1}{L} (-v_{yA} + v_{yB}) + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -\frac{2s(1+c)}{L} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{L} v_{yB} + \right. \\ \left. -s(1+c)\theta_{zA} -s(1+c)\theta_{zB} \right] + \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yB} + \right. \\ \left. -\bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zA} -\bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \gamma \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] \phi_{xA} + \\ + \gamma \left[ -\frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] \phi_{xB}$$

$$C_7 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ -\frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yA} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yB} + \left[ -\frac{sL}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ -\frac{scL}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}\bar{c}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \phi_{xA} + \\ + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ s(1+c)\phi_{xA} -s(1+c)\phi_{xB} \right] + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xA} -\bar{s}(1+\bar{c})\phi_{xB} \right]$$

$$C_8 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ -\frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yA} + \left[ -\frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yB} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \frac{1}{L} (-\phi_{xA} + \phi_{xB}) + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ -\frac{2s(1+c)}{L} \phi_{xA} + \frac{2s(1+c)}{L} \phi_{xB} \right] + \\ + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} \phi_{xA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} \phi_{xB} \right]$$

Com as constantes obtidas nos itens (a), (b) e (c) calculam-se os esforços

$$M_{zA} = EI_z v'' \Big|_{x=0}$$

$$M_{zB} = EI_z v'' \Big|_{x=L}$$

$$\bar{R}_{yA} = -EI_z v''' \Big|_{x=0} - Pv' \Big|_{x=0} - Pz_o \phi' \Big|_{x=0}$$

$$\bar{R}_{yB} = -EI_z v''' \Big|_{x=L} - Pv' \Big|_{x=L} - Pz_o \phi' \Big|_{x=L}$$

$$\bar{M}_{xA} = -EI_\omega \phi''' \Big|_{x=0} + (GJ - Pr_o^2) \phi' \Big|_{x=0} - Pz_o v' \Big|_{x=0}$$

$$\bar{M}_{xB} = -EI_\omega \phi''' \Big|_{x=L} + (GJ - Pr_o^2) \phi' \Big|_{x=L} - Pz_o v' \Big|_{x=L}$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} M_{zA} = EI_z \left\{ \beta \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} v_{yA} + \frac{s(1+c)}{L^2} v_{yB} - \frac{s}{L} \theta_{zA} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{sc}{L} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ -\frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yA} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yB} - \frac{\bar{s}}{L} \theta_{zA} - \frac{\bar{sc}}{L} \theta_{zB} \right] + \right. \\ \left. + \gamma \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \phi_{xA} + \gamma \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \phi_{xB} \dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{zB} = EI_z \left\{ \beta \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} v_{yA} - \frac{s(1+c)}{L^2} v_{yB} + \frac{sc}{L} \theta_{zA} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{s}{L} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yA} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yB} + \frac{\bar{sc}}{L} \theta_{zA} + \frac{\bar{s}}{L} \theta_{zB} \right] + \right. \\ \left. + \gamma \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \phi_{xA} + \gamma \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \phi_{xB} \dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{yA} = EI_z \left\{ \beta \left[ -\frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yB} + \right. \right. \\
 - \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zA} - \left. \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yB} + \right. \\
 - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zA} - \left. \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zB} \right] + \gamma \left[ \frac{2s(1+c)}{mL^3} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \right] \phi_{xA} + \\
 \left. + \gamma \left[ -\frac{2s(1+c)}{mL^3} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \right] \phi_{xB} \right\} \dots (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{yB} = EI_z \left\{ \beta \left[ -\frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yB} + \right. \right. \\
 - \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zA} - \left. \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yB} + \right. \\
 - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zA} - \left. \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zB} \right] + \gamma \left[ \frac{2s(1+c)}{mL^3} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \right] \phi_{xA} + \\
 \left. + \gamma \left[ -\frac{2s(1+c)}{mL^3} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \right] \phi_{xB} \right\} \dots (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{xA} = EI_z \left\{ \gamma \left[ \frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yB} + \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zA} + \right. \right. \\
 + \left. \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zB} \right] + \gamma \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yB} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zA} + \right. \\
 - \left. \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zB} \right] \left. \right\} + EI_\omega \left\{ \alpha \left[ -\frac{2s(1+c)}{mL^3} \phi_{xA} + \frac{2s(1+c)}{mL^3} \phi_{xB} \right] + \right. \\
 \left. + \beta \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \phi_{xA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \phi_{xB} \right] \right\} \dots (26)
 \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{xB} = EI_z \left\{ \gamma \left[ \frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{mL^3} v_{yB} + \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zA} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zB} \Big] + \gamma \left[ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} v_{yB} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zA} + \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zB} \right] + EI_{\omega} \left\{ \alpha \left[ - \frac{2s(1+c)}{mL^3} \phi_{xA} + \frac{2s(1+c)}{mL^3} \phi_{xB} \right] + \right. \\
 & \left. + \beta \left[ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \phi_{xA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L^3} \phi_{xB} \right] \right\} \dots (27)
 \end{aligned}$$

É interessante observar que as relações (22) a (27) valem para quaisquer valores de P e  $(GJ-Pr_o^2)$  bastando substituir os valores convenientes de s, c, m,  $\bar{s}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  definidos nos itens 6.2.2(a) a 6.2.2(c).

Se o esforço axial P for nulo elas também serão válidas desde que

$$\mu = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{GJ}{EI_{\omega}}}$$

$$s = \mu \frac{1-2\mu \operatorname{cotgh} 2\mu}{\operatorname{tgh} \mu - \mu} \qquad \bar{s} = 4$$

$$c = \frac{2\mu - \operatorname{senh} 2\mu}{\operatorname{senh} 2\mu - 2\mu \operatorname{cosh} 2\mu} \qquad \bar{c} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) + 4\mu^2} \qquad \bar{m} = 1$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$



### 6.3 - PARTICULARIZAÇÃO PARA BARRAS CUJAS SEÇÕES POSSUEM DOIS EIXOS DE SIMETRIA

Para as seções com dois eixos de simetria tem-se

$$y_0 = 0$$

$$z_0 = 0$$

Basta substituir  $z_0$  nas soluções obtidas no item 6.2 apenas com um pequeno problema quando  $P > 0$  e  $GJ - Pr_0^2 = 0$ . Nesse caso, no item 6.2.2, sendo  $\mu = 0$ , os valores de  $s$ ,  $c$  e  $m$  são indeterminados. Essa indeterminação é eliminada com a regra de L'Hôpital obtendo-se

$$s = 4$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$m = 1$$

### 6.4 - PARTICULARIZAÇÃO PARA BARRAS CUJAS SEÇÕES POSSUEM $I_\omega = 0$

#### 6.4.1 - Seções sem eixos de simetria

Para essas seções as relações (15) se transformam em

$$\begin{cases} EI_z v'''' + Pv'' + Pz_0 \phi'' = 0 \\ EI_y w'''' + Pw'' - Py_0 \phi'' = 0 \\ -(GJ - Pr_0^2) \phi'' + Pz_0 v'' - Py_0 w'' = 0 \end{cases} \dots (28)$$

Fazendo

$$k_y = \sqrt{\frac{|P|}{EI_y}} \quad k_z = \sqrt{\frac{|P|}{EI_z}} \quad k = \sqrt{\frac{|P|}{|GJ - Pr_0^2|}}$$

o sistema de equações (28) pode ser transformado em

a) Para  $P > 0$  e  $GJ - Pr_0^2 > 0$

$$\begin{cases} w'''' + k_y^2 w'' - k_y^2 y_0 \phi'' = 0 \\ v'''' + k_z^2 v'' + k_z^2 z_0 \phi'' = 0 \\ -\phi'' + k_z^2 z_0 v'' - k_y^2 y_0 w'' = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a <sup>(15)</sup>

$$\begin{cases} v'''' + k_z^2 v'' + k_z^2 z_0 \phi'' = 0 \\ -\phi'' + k_z^2 z_0 v'' - k_y^2 y_0 w'' = 0 \\ v^{VI} + \left[ k_z^2 (1 + k_z^2 z_0^2) + k_y^2 (1 + k_y^2 y_0^2) \right] v'''' + k_y^2 k_z^2 (1 + k_z^2 z_0^2 + k_y^2 y_0^2) v'' = 0 \end{cases}$$

A equação independente em  $v$  tem como polinômio característico

$$r^2 \left\{ r^4 + \left[ k_z^2 (1 + k_z^2 z_0^2) + k_y^2 (1 + k_y^2 y_0^2) \right] r^2 + k_y^2 k_z^2 (1 + k_z^2 z_0^2 + k_y^2 y_0^2) \right\} = 0$$

Sendo

$$\begin{aligned} & \left[ k_z^2 (1 + k_z^2 z_0^2) + k_y^2 (1 + k_y^2 y_0^2) \right]^2 - 4 k_y^2 k_z^2 (1 + k_z^2 z_0^2 + k_y^2 y_0^2) = \\ & = \left[ k_z^2 (1 + k_z^2 z_0^2) - k_y^2 (1 + k_y^2 y_0^2) \right]^2 + 4 k^4 k_y^2 k_z^2 y_0^2 z_0^2 > 0 \end{aligned}$$

$$k_y^2 k_z^2 (1+k^2 z_o^2 + k^2 y_o^2) > 0$$

e

$$\left[ k_z^2 (1+k^2 z_o^2) + k_y^2 (1+k^2 y_o^2) \right] > 0$$

as soluções desse polinômio são:

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$r_3 = -r_4 = i \left( \frac{[k_z^2 (1+k^2 z_o^2) + k_y^2 (1+k^2 y_o^2)]}{2} + \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{[k_z^2 (1+k^2 z_o^2) - k_y^2 (1+k^2 y_o^2)]^2 + 4k^4 k_y^2 k_z^2 y_o^2 z_o^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = pi$$

$$r_5 = -r_6 = i \left( \frac{[k_z^2 (1+k^2 z_o^2) + k_y^2 (1+k^2 y_o^2)]}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{[k_z^2 (1+k^2 z_o^2) - k_y^2 (1+k^2 y_o^2)]^2 + 4k^4 k_y^2 k_z^2 y_o^2 z_o^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = qi$$

Chamando

$$\mu = \frac{L}{2} p$$

$$\eta = \frac{L}{2} q$$

a solução da equação diferencial em  $v$  é

$$v = C_1 \cos \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sen \frac{2\mu}{L} x + C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x +$$

$$+ C_4 \sen \frac{2\eta}{L} x + C_5 + C_6 x$$

Por substituições

$$w = - \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2 - L^2 k^2 k_z^2 z_o^2}{y_o z_o L^2 k^2 k_z^2} (C_1 \cos \frac{2\mu}{L} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{2\mu}{L} x) +$$

$$- \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2 - L^2 k^2 k_z^2 z_o^2}{y_o z_o L^2 k^2 k_z^2} (C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x + C_4 \operatorname{sen} \frac{2\eta}{L} x) + C_7 + C_8 x$$

$$\phi = \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} (C_1 \cos \frac{2\mu}{L} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{2\mu}{L} x) +$$

$$+ \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} (C_3 \cos \frac{2\eta}{L} x + C_4 \operatorname{sen} \frac{2\eta}{L} x) + C_9 + C_{10} x$$

Para translações e rotações genéricas nas extremidades as condições de contorno são:

Se  $x = 0$

$$v = v_{yA} \quad v' = \theta_{zA} \quad w = w_{zA} \quad w' = \theta_{yA} \quad \phi = \phi_{xA}$$

Se  $x = L$

$$v = v_{yB} \quad v' = \theta_{zB} \quad w = w_{zB} \quad w' = \theta_{yB} \quad \phi = \phi_{xB}$$

Com estas dez condições e chamando

$$s = \mu \frac{1 - 2\mu \cotg 2\mu}{\operatorname{tg} \mu - \mu} \quad \bar{s} = \eta \frac{1 - 2\eta \cotg 2\eta}{\operatorname{tg} \eta - \eta}$$

$$c = \frac{2\mu - \operatorname{sen} 2\mu}{\operatorname{sen} 2\mu - 2\mu \cos 2\mu} \quad \bar{c} = \frac{2\eta - \operatorname{sen} 2\eta}{\operatorname{sen} 2\eta - 2\eta \cos 2\eta}$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) - 4\mu^2} \quad \bar{m} = \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{2\bar{s}(1+\bar{c}) - 4\eta^2}$$

$$\alpha = \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2 - L^2 k_z^2 k_z^2 z_o^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

$$\beta = \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2 - L^2 k_z^2 k_z^2 z_o^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

$$\gamma = \frac{y_o z_o L^2 k_z^2 k_z^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

pode-se determinar  $C_1, C_2 \dots C_{10}$  que são

$$C_1 = \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ s(1+c)v_{yA} - s(1+c)v_{yB} + sL\theta_{zA} + scL\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ s(1+c)w_{zA} - s(1+c)w_{zB} + sL\theta_{yA} + scL\theta_{yB} \right]$$

$$C_2 = \frac{\beta}{8\mu^3} \left\{ -\frac{2s(1+c)}{m} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{m} v_{yB} + \left[ sL(1+c) + \right.$$

$$\left. -\frac{2sL(1+c)}{m} \right] \theta_{zA} - sL(1+c)\theta_{zB} \right\} + \frac{\gamma}{8\mu^3} \left\{ -\frac{2s(1+c)}{m} w_{zA} + \frac{2s(1+c)}{m} w_{zB} + \right.$$

$$\left. \left[ sL(1+c) - \frac{2sL(1+c)}{m} \right] \theta_{yA} - sL(1+c)\theta_{yB} \right\}$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}cL\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} - \bar{s}L\theta_{yA} - \bar{s}cL\theta_{yB} \right]$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{8\eta^3} \left\{ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yB} - \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) + \right.$$

$$\left. -\frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{zA} + \bar{s}L(1+\bar{c})\theta_{zB} \right\} + \frac{\gamma}{8\eta^3} \left\{ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} w_{zA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} w_{zB} + \right.$$

$$- \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) - \frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{yA} + \bar{s}L(1+\bar{c}) \theta_{yB}$$

$$C_5 = \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)v_{yA} + s(1+c)v_{yB} - sL\theta_{zA} - scL\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} - \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} + \bar{s}L\theta_{zA} + \bar{s}cL\theta_{zB} \right] + v_{yA} + \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)w_{zA} +$$

$$+ s(1+c)w_{zB} - sL\theta_{yA} - scL\theta_{yB} \right] + \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} - \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} + \bar{s}L\theta_{yA} +$$

$$+ \bar{s}cL\theta_{yB} \right]$$

$$C_6 = \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ \frac{2s(1+c)}{mL} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{mL} v_{yB} + s(1+c)\theta_{zA} +$$

$$+ s(1+c)\theta_{zB} \right] + \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} v_{yB} - \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zA} +$$

$$- \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ \frac{2s(1+c)}{L} w_{zA} - \frac{2s(1+c)}{L} w_{zB} + s(1+c)\theta_{yA} +$$

$$+ s(1+c)\theta_{yB} \right] + \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zB} - \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yA} +$$

$$- \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yB} \right]$$

$$C_7 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yA} - \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yB} +$$

$$+ \left[ \frac{sL}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ \frac{scL}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}cL}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ s(1+c)w_{zA} - s(1+c)w_{zB} +$$

$$+ sL\theta_{yA} + scL\theta_{yB} \right] + w_{zA} + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} - \bar{s}L\theta_{yA} - \bar{s}cL\theta_{yB} \right]$$

$$\begin{aligned}
 C_8 = & \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ -\frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yA} - \left[ -\frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yB} + \left[ -\frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ -\frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \\
 & + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ -\frac{2s(1+c)}{mL} w_{zA} + \frac{2s(1+c)}{mL} w_{zB} - s(1+c)\theta_{yA} - s(1+c)\theta_{yB} \right] + \\
 & + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} w_{zA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}L} w_{zB} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yB} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_9 = & -\frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ s(1+c)v_{yA} - s(1+c)v_{yB} + sL\theta_{zA} + \right. \\
 & \left. + scL\theta_{zB} \right] - \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}cL\theta_{zB} \right] + \\
 & - \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ s(1+c)w_{zA} - s(1+c)w_{zB} + sL\theta_{yA} + scL\theta_{yB} \right] + \\
 & - \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} - \bar{s}L\theta_{yA} - \bar{s}cL\theta_{yB} \right] + \phi_{xA}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{10} = & \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ \frac{2s(1+c)}{L} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{L} v_{yB} + \right. \\
 & \left. + s(1+c)\theta_{zA} + s(1+c)\theta_{zB} \right] - \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yB} + \right. \\
 & \left. + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ \frac{2s(1+c)}{L} w_{zA} - \frac{2s(1+c)}{L} w_{zB} + \right. \\
 & \left. + s(1+c)\theta_{yA} + s(1+c)\theta_{yB} \right] - \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zB} + \right. \\
 & \left. + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yB} \right] + \frac{1}{L} (-\phi_{xA} + \phi_{xB})
 \end{aligned}$$

b) Para  $P < 0$  e  $GJ - Pr_0^2 > 0$

$$\begin{cases} w'''' - k_y^2 w'' + k_y^2 y_0 \phi'' = 0 \\ v'''' - k_z^2 v'' - k_z^2 z_0 \phi'' = 0 \\ -\phi'' - k_z^2 z_0 v'' + k_y^2 y_0 w'' = 0 \end{cases}$$

que é equivalente a <sup>(15)</sup>

$$\begin{cases} v'''' - k_z^2 v'' - k_z^2 z_0 \phi'' = 0 \\ -\phi'' - k_z^2 z_0 v'' + k_y^2 y_0 w'' = 0 \\ v^{VI} + \left[ -k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2) - k_y^2 (1 - k_y^2 y_0^2) \right] v'''' + k_y^2 k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2 + \\ -k_y^2 y_0^2) v'' = 0 \end{cases}$$

A equação independente em  $v$  tem como polinômio característico

$$r^2 \left\{ r^4 + \left[ -k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2) - k_y^2 (1 - k_y^2 y_0^2) \right] r^2 + k_y^2 k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2 + -k_y^2 y_0^2) \right\} = 0$$

Sendo

$$\begin{aligned} & \left[ -k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2) - k_y^2 (1 - k_y^2 y_0^2) \right]^2 - 4k_y^2 k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2 - k_y^2 y_0^2) = \\ & = \left[ k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2) - k_y^2 (1 - k_y^2 y_0^2) \right]^2 + 4k^4 k_y^2 k_z^2 y_0^2 z_0^2 > 0 \end{aligned}$$

$$k_y^2 k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2 - k_y^2 y_0^2) > 0$$

e

$$-k_z^2 (1 - k_z^2 z_0^2) - k_y^2 (1 - k_y^2 y_0^2) < 0$$



as soluções desse polinômio são

$$r_1 = r_2 = 0$$

$$r_3 = -r_4 = \left( \frac{[k_z^2(1-k^2z_o^2) + k_y^2(1-k^2y_o^2)]}{2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{[-k_z^2(1-k^2z_o^2) - k_y^2(1-k^2y_o^2)]^2 - 4k_y^2k_z^2(1-k^2z_o^2 - k^2y_o^2)}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = p$$

$$r_5 = -r_6 = \left( \frac{[k_z^2(1-k^2z_o^2) + k_y^2(1-k^2y_o^2)]}{2} + \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{[-k_z^2(1-k^2z_o^2) - k_y^2(1-k^2y_o^2)]^2 - 4k_y^2k_z^2(1-k^2z_o^2 - k^2y_o^2)}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = q$$

Chamando

$$\mu = \frac{L}{2} p$$

$$\eta = \frac{L}{2} q$$

a solução da equação diferencial em  $v$  é

$$v = C_1 \cosh \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sinh \frac{2\mu}{L} x + C_3 \cosh \frac{2\eta}{L} x + \\ + C_4 \sinh \frac{2\eta}{L} x + C_5 + C_6 x$$

Por substituições

$$w = \frac{4\mu^2 - L^2k_z^2 + L^2k^2k_z^2z_o^2}{y_o z_o L^2 k^2 k_z^2} (C_1 \cosh \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sinh \frac{2\mu}{L} x) + \\ + \frac{4\eta^2 - L^2k_z^2 + L^2k^2k_z^2z_o^2}{y_o z_o L^2 k^2 k_z^2} (C_3 \cosh \frac{2\eta}{L} x + C_4 \sinh \frac{2\eta}{L} x) + C_7 + C_8 x$$

$$\phi = \frac{4\mu^2 - k_z^2 L^2}{z_0 L^2 k_z^2} (C_1 \cosh \frac{2\mu}{L} x + C_2 \sinh \frac{2\mu}{L} x) +$$

$$+ \frac{4\eta^2 - k_z^2 L^2}{z_0 L^2 k_z^2} (C_3 \cosh \frac{2\eta}{L} x + C_4 \sinh \frac{2\eta}{L} x) + C_9 + C_{10} x$$

Com as mesmas condições de contorno do item (a) anterior e chamando

$$s = \mu \frac{1 - 2\mu \operatorname{ctgh} 2\mu}{\operatorname{tgh} \mu - \mu}$$

$$\bar{s} = \eta \frac{1 - 2\eta \operatorname{ctgh} 2\eta}{\operatorname{tgh} \eta - \eta}$$

$$c = \frac{2\mu - \sinh 2\mu}{\sinh 2\mu - 2\mu \cosh 2\mu}$$

$$\bar{c} = \frac{2\eta - \sinh 2\eta}{\sinh 2\eta - 2\eta \cosh 2\eta}$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) + 4\mu^2}$$

$$\bar{m} = \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{2\bar{s}(1+\bar{c}) + 4\eta^2}$$

$$\alpha = \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2 + L^2 k_z^2 k_z^2 z_0^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

$$\beta = \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2 + L^2 k_z^2 k_z^2 z_0^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

$$\gamma = - \frac{y_0 z_0 L^2 k_z^2 k_z^2}{4\eta^2 - 4\mu^2}$$

pode-se determinar  $C_1, C_2 \dots C_{10}$  que valem

$$C_1 = \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)v_{yA} + s(1+c)v_{yB} - sL\theta_{zA} - scL\theta_{zB} \right] +$$

$$- \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ s(1+c)w_{zA} - s(1+c)w_{zB} + sL\theta_{yA} + scL\theta_{yB} \right]$$

$$C_2 = \frac{\beta}{8\mu^3} \left\{ \frac{2s(1+c)}{m} v_{yA} - \frac{2s(1+c)}{m} v_{yB} - \left[ sL(1+c) + \right. \right.$$

$$- \frac{2sL(1+c)}{m} \left] \theta_{zA} + sL(1+c)\theta_{zB} \right\} - \frac{\gamma}{8\mu^3} \left[ - \frac{2s(1+c)}{m} w_{zA} + \frac{2s(1+c)}{m} w_{zB} + \right. \\ \left. + \left[ sL(1+c) - \frac{2sL(1+c)}{m} \right] \theta_{yA} - sL(1+c)\theta_{yB} \right]$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} - \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} + \bar{s}L\theta_{zA} + \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] +$$

$$- \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} - \bar{s}L\theta_{yA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{yB} \right]$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{8\eta^3} \left[ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} v_{yB} + \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{zA} - \bar{s}L(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] - \frac{\gamma}{8\eta^3} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} w_{zA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} w_{zB} + \right.$$

$$\left. - \left[ \bar{s}L(1+\bar{c}) - \frac{2\bar{s}L(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right] \theta_{yA} + \bar{s}L(1+\bar{c})\theta_{yB} \right]$$

$$C_5 = v_{yA} + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ s(1+c)v_{yA} - s(1+c)v_{yB} + sL\theta_{zA} + s\bar{c}L\theta_{zB} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ s(1+c)w_{zA} - s(1+c)w_{zB} + sL\theta_{yA} + s\bar{c}L\theta_{yB} \right] + \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \right.$$

$$\left. + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} - \bar{s}L\theta_{yA} + \right.$$

$$\left. - \bar{s}\bar{c}L\theta_{yB} \right]$$

$$C_6 = \frac{1}{L}(v_{yA} - v_{yB}) + \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ - \frac{2s(1+c)}{L} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{L} v_{yB} + \right.$$

$$\left. - s(1+c)\theta_{zA} - s(1+c)\theta_{zB} \right] + \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ - \frac{2s(1+c)}{L} w_{zA} + \frac{2s(1+c)}{L} w_{zB} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -s(1+c)\theta_{yA} - s(1+c)\theta_{yB} \Big] + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yB} + \right. \\
 & \left. + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zB} + \right. \\
 & \left. + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yB} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_7 = & w_{zA} + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ -\frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yA} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] v_{yB} + \left[ -\frac{sL}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}L}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ -\frac{scL}{4\mu^2} + \frac{\bar{s}cL}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \\
 & + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ -s(1+c)w_{zA} + s(1+c)w_{zB} - sL\theta_{yA} - scL\theta_{yB} \right] + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ \bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} + \right. \\
 & \left. - \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} + \bar{s}L\theta_{yA} + \bar{s}cL\theta_{yB} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_8 = & \frac{1}{L}(-w_{zA} + w_{zB}) + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left\{ \left[ \frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yA} + \right. \\
 & \left. + \left[ -\frac{2s(1+c)}{L4\mu^2} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L4\eta^2} \right] v_{yB} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zA} + \left[ \frac{s(1+c)}{4\mu^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{4\eta^2} \right] \theta_{zB} \right\} + \frac{\alpha}{4\mu^2} \left[ \frac{2s(1+c)}{L} w_{zA} - \frac{2s(1+c)}{L} w_{zB} + s(1+c)\theta_{yA} + \right. \\
 & \left. + s(1+c)\theta_{yB} \right] + \frac{\beta}{4\eta^2} \left[ -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zB} - \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yA} + \right. \\
 & \left. - \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yB} \right]
 \end{aligned}$$

$$C_9 = \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ s(1+c)v_{yA} - s(1+c)v_{yB} + sL\theta_{zA} + scL\theta_{zB} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})v_{yA} + \bar{s}(1+\bar{c})v_{yB} - \bar{s}L\theta_{zA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{zB} \right] + \\
 & + \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ s(1+c)w_{zA} - s(1+c)w_{zB} + sL\theta_{yA} + s\bar{c}L\theta_{yB} \right] + \\
 & + \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ -\bar{s}(1+\bar{c})w_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})w_{zB} - \bar{s}L\theta_{yA} - \bar{s}\bar{c}L\theta_{yB} \right] + \phi_{xA} \\
 \\
 & C_{10} = \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\beta}{4\mu^2} \left[ -\frac{2s(1+c)}{L} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{L} v_{yB} + \right. \\
 & \left. -s(1+c)\theta_{zA} - s(1+c)\theta_{zB} \right] + \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\alpha}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yA} + \right. \\
 & \left. -\frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} v_{yB} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zA} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{zB} \right] + \frac{4\mu^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\mu^2} \left[ + \right. \\
 & \left. -\frac{2s(1+c)}{L} w_{zA} + \frac{2s(1+c)}{L} w_{zB} - s(1+c)\theta_{yA} - s(1+c)\theta_{yB} \right] + \\
 & + \frac{4\eta^2 - L^2 k_z^2}{z_o L^2 k_z^2} \frac{\gamma}{4\eta^2} \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L} w_{zB} + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yA} + \right. \\
 & \left. + \bar{s}(1+\bar{c})\theta_{yB} \right] + \frac{1}{L} (-\phi_{xA} + \phi_{xB})
 \end{aligned}$$

Com as constantes obtidas nos itens (a) e (b) calculam-se os esforços

$$M_{yA} = -EI_y w'' \Big|_{x=0}$$

$$M_{yB} = -EI_y w'' \Big|_{x=L}$$

$$\bar{R}_{zA} = -EI_y w''' \Big|_{x=0} - Pw' \Big|_{x=0} + Py_o \phi' \Big|_{x=0}$$

$$\bar{R}_{zB} = -EI_y w''''|_{x=L} - Pw'|_{x=L} + Py_0 \phi'|_{x=L}$$

$$M_{zA} = EI_z v''|_{x=0}$$

$$M_{zB} = EI_z v''|_{x=L}$$

$$\bar{R}_{yA} = -EI_z v''''|_{x=0} - Pv'|_{x=0} - Pz_0 \phi'|_{x=0}$$

$$\bar{R}_{yB} = -EI_z v''''|_{x=L} - Pv'|_{x=L} - Pz_0 \phi'|_{x=L}$$

$$\bar{M}_{xA} = (GJ - Pr_0^2) \phi'|_{x=0} - Pz_0 v'|_{x=0} + Py_0 w'|_{x=0}$$

$$\bar{M}_{xB} = (GJ - Pr_0^2) \phi'|_{x=L} - Pz_0 v'|_{x=L} + Py_0 w'|_{x=L}$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} M_{yA} = EI_y \left\{ \alpha \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} w_{zA} + \frac{s(1+c)}{L^2} w_{zB} - \frac{s}{L} \theta_{yA} + \right. \right. \\ \left. - \frac{sc}{L} \theta_{yB} \right] + \beta \left[ \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} w_{zA} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} w_{zB} + \frac{\bar{s}}{L} \theta_{yA} + \frac{\bar{sc}}{L} \theta_{yB} \right] \left. \right\} + \\ + EI_z \gamma \left\{ \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] v_{yA} - \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] v_{yB} + \left[ \frac{s}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\bar{s}}{L} \right] \theta_{zA} + \left[ \frac{sc}{L} - \frac{\bar{sc}}{L} \right] \theta_{zB} \right\} \dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{yB} = EI_y \left\{ \alpha \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} w_{zA} - \frac{s(1+c)}{L^2} w_{zB} + \frac{sc}{L} \theta_{yA} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{s}{L} \theta_{yB} \right] + \beta \left[ -\frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} w_{zA} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} w_{zB} - \frac{\bar{sc}}{L} \theta_{yA} - \frac{\bar{s}}{L} \theta_{yB} \right] \left. \right\} + \\ + EI_z \gamma \left\{ \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] v_{yA} - \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] v_{yB} + \left[ -\frac{sc}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{sc}}{L} \right] \theta_{zA} + \left[ -\frac{s}{L} + \frac{\bar{s}}{L} \right] \theta_{zB} \right\} \dots (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{zA} = EI_y \left\{ \alpha \left[ \frac{2s(1+c)}{L^3} w_{zA} - \frac{2s(1+c)}{L^3} w_{zB} + \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{yA} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{yB} \right] + \beta \left[ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} w_{zA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} w_{zB} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{yA} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{yB} \right] \right\} + \frac{P}{L} (w_{zA} - w_{zB}) + \frac{Py_0}{L} (-\phi_{xA} + \phi_{xB}) + EI_z \gamma \left\{ \left[ - \frac{2s(1+c)}{L^3} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} \right] v_{yA} - \left[ - \frac{2s(1+c)}{L^3} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} \right] v_{yB} + \left[ - \frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{zA} + \right. \\
 \left. + \left[ - \frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{zB} \right\} \dots (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{zB} = EI_y \left\{ \alpha \left[ \frac{2s(1+c)}{L^3} w_{zA} - \frac{2s(1+c)}{L^3} w_{zB} + \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{yA} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{yB} \right] + \beta \left[ - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} w_{zA} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} w_{zB} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{yA} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{yB} \right] \right\} + \frac{P}{L} (w_{zA} - w_{zB}) + \frac{Py_0}{L} (-\phi_{xA} + \phi_{xB}) + EI_z \gamma \left\{ \left[ - \frac{2s(1+c)}{L^3} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} \right] v_{yA} - \left[ - \frac{2s(1+c)}{L^3} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} \right] v_{yB} + \left[ - \frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{zA} + \right. \\
 \left. + \left[ - \frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{zB} \right\} \dots (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{zA} = EI_z \left\{ \beta \left[ - \frac{s(1+c)}{L^2} v_{yA} + \frac{s(1+c)}{L^2} v_{yB} - \frac{s}{L} \theta_{zA} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{sc}{L} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yA} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yB} + \frac{\bar{s}}{L} \theta_{zA} + \frac{\bar{s}\bar{c}}{L} \theta_{zB} \right] \right\} + \\
 + EI_z \gamma \left\{ \left[ - \frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] w_{zA} - \left[ - \frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] w_{zB} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \left[ -\frac{s}{L} + \frac{\bar{s}}{L} \right] \theta_{yA} + \left[ -\frac{sc}{L} + \frac{\bar{s}\bar{c}}{L} \right] \theta_{yB} \quad \dots (33)$$

$$\begin{aligned} M_{zB} = EI_z \left\{ \beta \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} v_{yA} - \frac{s(1+c)}{L^2} v_{yB} + \frac{sc}{L} \theta_{zA} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{s}{L} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ -\frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yA} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} v_{yB} - \frac{\bar{s}\bar{c}}{L} \theta_{zA} - \frac{\bar{s}}{L} \theta_{zB} \right] \right\} + \\ + EI_z \gamma \left\{ \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] w_{zA} - \left[ \frac{s(1+c)}{L^2} - \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] w_{zB} + \left[ \frac{sc}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\bar{s}\bar{c}}{L} \right] \theta_{yA} + \left[ \frac{s}{L} - \frac{\bar{s}}{L} \right] \theta_{yB} \right\} \quad \dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{yA} = EI_z \left\{ \beta \left[ -\frac{2s(1+c)}{L^3} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{L^3} v_{yB} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zA} - \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} v_{yB} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zA} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zB} \right] \right\} + \frac{P}{L} (v_{yA} - v_{yB}) + \frac{Pz_o}{L} (\phi_{xA} - \phi_{xB}) + \\ + EI_z \gamma \left\{ \left[ -\frac{2s(1+c)}{L^3} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} \right] w_{zA} - \left[ -\frac{2s(1+c)}{L^3} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} \right] w_{zB} + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{yA} + \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{yB} \right\} \quad \dots (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{yB} = EI_z \left\{ \beta \left[ -\frac{2s(1+c)}{L^3} v_{yA} + \frac{2s(1+c)}{L^3} v_{yB} - \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zA} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{s(1+c)}{L^2} \theta_{zB} \right] + \alpha \left[ \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} v_{yA} - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} v_{yB} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zA} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \theta_{zB} \right] \right\} + \frac{P}{L} (v_{yA} - v_{yB}) + \frac{Pz_o}{L} (\phi_{xA} - \phi_{xB}) + EI_z \gamma \left\{ \left[ -\frac{2s(1+c)}{L^3} + \right. \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} w_{zA} - \left[ -\frac{2s(1+c)}{L^3} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{L^3} \right] w_{zB} + \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{yA} + \left[ -\frac{s(1+c)}{L^2} + \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \right] \theta_{yB} \} \dots (36)
 \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{xA} = \frac{Pz_0}{L} (v_{yA} - v_{yB}) + \frac{Py_0}{L} (w_{zA} - w_{zB}) + \frac{P}{Lk^2} (-\phi_{xA} + \phi_{xB}) \dots (37)$$

$$\bar{M}_{xB} = \frac{Pz_0}{L} (v_{yA} - v_{yB}) + \frac{Py_0}{L} (w_{zA} - w_{zB}) + \frac{P}{Lk^2} (-\phi_{xA} + \phi_{xB}) \dots (38)$$

As relações (29) a (36) também são válidas para  $P = 0$ , desde que

$$s = 4 \qquad \bar{s} = 4$$

$$c = \frac{1}{2} \qquad \bar{c} = \frac{1}{2}$$

$$m = 1 \qquad \bar{m} = 1$$

$$\alpha = -1$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

Para esse valor de  $P$  as relações (37) e (38) se transformam em

$$M_{xA} = \frac{GJ}{L} (-\phi_{xA} + \phi_{xB})$$

$$M_{xB} = \frac{GJ}{L} (-\phi_{xA} + \phi_{xB})$$

#### 6.4.2 - Seções com um eixo de simetria

Para as seções com  $I_{\omega} = 0$  e considerando  $z$  o eixo de simetria tem-se

$$y_0 = 0$$

As expressões resultantes são as mesmas do item 6.4.1, bastando substituir o valor de  $y_0$  por zero.

#### 6.4.3 - Seções com dois eixos de simetria

Para as seções com  $I_{\omega} = 0$  e com dois eixos de simetria tem-se

$$y_0 = 0$$

$$z_0 = 0$$

Basta substituir  $y_0$  e  $z_0$  nas soluções obtidas no item 6.4.1.

### 6.5 - CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Com os esforços de extremidade de barra indicados nas relações (17) a (20) e (22) a (27) ou (29) a (38) pode-se obter a matriz de rigidez de cada tramo de pilar entre as lajes  $a$  e  $a+1$ . Essa matriz,  $\left[ \bar{S}_{P,T} \right]_a^i$  de ordem  $12 \times 12$ , mostrada em (39) ou (40) pode ser gerada para os deslocamentos do centro de torção, bastando para isto, impor, um por vez, deslocamentos unitários segundo cada uma das coordenadas, mantendo-se fixas as demais. Por exemplo, a 2<sup>a</sup> coluna dessa matriz de rigidez é encontrada fazendo  $\theta_{zB} = 1$  e todos os outros deslocamentos nulos.

0	$-\frac{EI_y}{L^2} s^*(1+c^*)$	0
$(1+c)+\alpha\bar{s}(1+\bar{c})$	0	$-\frac{EI_z Y}{L^2} [s(1+c)-\bar{s}(1+\bar{c})]$
0	0	0
$\frac{s(1+c)}{m} + \alpha \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}}$	0	$-\frac{EI_z Y}{L^3} \left[ -\frac{2s(1+c)}{m} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right]$
0	$-\frac{EI_y}{L^3} \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*}$	0
$+c) - \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}}$	0	$-\frac{EI_\omega}{L^3} \left[ \alpha \frac{2s(1+c)}{m} + \beta \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right]$
0	$-\frac{EI_y}{L^2} s^*(1+c^*)$	0
$+c)+\alpha\bar{s}(1+\bar{c})$	0	$-\frac{EI_z Y}{L^2} [s(1+c)-\bar{s}(1+\bar{c})]$
0	0	0
$+c) + \alpha \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}}$	0	$\frac{EI_z Y}{L^3} \left[ -\frac{2s(1+c)}{m} + \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right]$
	$-\frac{EI_y}{L^3} \frac{2s^*(1+c^*)}{m^*}$	0
		$\frac{EI_\omega}{L^3} \left[ \alpha \frac{2s(1+c)}{m} + \beta \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{\bar{m}} \right]$

... (39)

7

$\frac{EI_z Y}{L^2} [-s(1+c) + \bar{s}(1+\bar{c})]$	$\frac{EI_y}{L^2} [\alpha s(1+c) - \beta \bar{s}(1+\bar{c})]$	0
$\frac{EI_z}{L^2} [\beta s(1+c) - \alpha \bar{s}(1+\bar{c})]$	$\frac{EI_z Y}{L^2} [s(1+c) - \bar{s}(1+\bar{c})]$	0
0	0	0
$\frac{EI_z}{L^3} [-\beta 2s(1+c) + \alpha 2\bar{s}(1+\bar{c})] + \frac{P}{L}$	$\frac{EI_z Y}{L^3} [-2s(1+c) + 2\bar{s}(1+\bar{c})]$	$EI_z \frac{k_z^2 z_o}{L}$
$\frac{EI_z}{L^3} [-2s(1+c) + 2\bar{s}(1+\bar{c})]$	$\frac{EI_y}{L^3} [\alpha 2s(1+c) - \beta 2\bar{s}(1+\bar{c})] + \frac{P}{L}$	$-EI_y \frac{k_y^2 y_o}{L}$
$EI_z \frac{k_z^2 z_o}{L}$	$-EI_y \frac{k_y^2 y_o}{L}$	$-EI_z \frac{k_z^2}{k^2 L}$
$\frac{EI_z Y}{L^2} [-s(1+c) + \bar{s}(1+\bar{c})]$	$\frac{EI_y}{L^2} [\alpha s(1+c) - \beta \bar{s}(1+\bar{c})]$	0
$\frac{EI_z}{L^2} [\beta s(1+c) - \alpha \bar{s}(1+\bar{c})]$	$\frac{EI_z Y}{L^2} [s(1+c) - \bar{s}(1+\bar{c})]$	0
0	0	0
$\frac{EI_z}{L^2} [\beta 2s(1+c) - \alpha 2\bar{s}(1+\bar{c})] - \frac{P}{L}$	$\frac{EI_z Y}{L^3} [2s(1+c) - 2\bar{s}(1+\bar{c})]$	$-EI_z \frac{k_z^2 z_o}{L}$
	$\frac{EI_y}{L^3} [-\alpha 2s(1+c) + \beta 2\bar{s}(1+\bar{c})] - \frac{P}{L}$	$EI_y \frac{k_y^2 y_o}{L}$
		$EI_z \frac{k_z^2}{k^2 L}$

... (40)

Os deslocamentos do centro de gravidade podem ser relacionados com os do centro de torção através da matriz  $[\bar{b}_{p,T}]_a^i$  de ordem 12 x 12, como segue:

$$\{\bar{D}_{p,T}\}_a^i = [\bar{b}_{p,T}]_a^i \{\bar{D}_p\}_a^i$$

onde

$$\{\bar{D}_{p,T}\}_a^i = \{0 \quad y_B^\theta \quad z_B^u \quad x_B^v \quad y_B^w \quad z_B^\phi \quad x_B^\theta \quad y_A^\theta \quad z_A^u \quad x_A^v \quad y_A^w \quad z_A^\phi \quad x_A\}^T$$

A matriz de transformação  $[\bar{b}_{p,T}]_a^i$  vale

$$[\bar{b}_{p,T}]_a^i = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [b] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [b] \end{bmatrix}$$

onde

$$[b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_o \\ 0 & 1 & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e  $[I]$  é a matriz identidade de ordem 3 x 3.

A matriz de rigidez  $[\bar{S}_p]_a^i$  correspondente, de ordem 12 x 12, relativa às coordenadas mostradas na Fig. II-2, poderá ser obtida pela relação:

$$[\bar{S}_p]_a^i = [\bar{b}_{p,T}]_a^{iT} [\bar{S}_{p,T}]_a^i [\bar{b}_{p,T}]_a^i$$

Os esforços  $\{\bar{F}_p\}_a^i$ , de extremidade de barra, serão obtidos através da relação:

$$\{\bar{F}_p\}_a^i = [\bar{S}_p]_a^i \{\bar{D}_p\}_a^i$$

Os deslocamentos  $\{\bar{D}\}_i^i$  da prumada de pilares individuais  $i$  podem ser relacionados com os do tramo entre as lajes  $a$  e  $a+1$  através da relação

$$\{\bar{D}_p\}_a^i = [\bar{B}_p]_a^i \{\bar{D}\}_i^i$$

A matriz de transformação  $[\bar{B}_p]_a^i$  de ordem  $12 \times 6f$ , para todos os andares exceto o inferior, é constituída pela submatriz identidade de ordem  $12 \times 12$  locada a partir da  $[6(a-1)+1]$ -ésima coluna, com todas as demais submatrizes nulas, isto é

$$[\bar{B}_p]_a^i = \left[ \underbrace{[0] \dots [0]}_{6(a-1)\text{colunas}} \quad [I] \quad [0] \dots [0] \right]$$

Para o andar inferior, em lugar da submatriz identidade, aparecem, locadas na extremidade direita, apenas as seis primeiras colunas dessa submatriz.

A matriz de rigidez  $[\bar{S}]^i$  de ordem  $6f \times 6f$  será obtida através da relação:

$$[\bar{S}]^i = \sum_{a=1}^f [\bar{B}_p]_a^i T \quad [\bar{S}_p]_a^i \quad [\bar{B}_p]_a^i$$

Os esforços  $\{\bar{F}\}_i^i$  serão obtidos pela relação:

$$\{\bar{F}\}_i^i = [\bar{S}]^i \{\bar{D}\}_i^i$$

7 - MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PAINÉIS

7.1 - MATRIZ DE RIGIDEZ DOS PILARES

Para um pilar (c,a) da prumada  $\underline{c}$  e abaixo da laje  $\underline{a}$ , que terá dois eixos de simetria por pertencer a um pórtico plano, basta fazer  $z_0 = 0$  nas relações (22), (23), (24) e (25) obtendo-se para as coordenadas correspondentes às da Fig. II-3.a, a matriz de rigidez  $[S_p]_{c,a}^j$  de ordem 6 x 6 mostrada na relação (41)

$$[S_p]_{c,a}^j = \begin{bmatrix} EI_z \frac{\bar{s}}{L} & 0 & -EI_z \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} & EI_z \frac{\bar{s}\bar{c}}{L} & 0 & EI_z \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} \\ \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 \\ EI_z \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{mL^3} & -EI_z \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} & 0 & -EI_z \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{mL^3} & 0 & 0 \\ EI_z \frac{\bar{s}}{L} & 0 & 0 & EI_z \frac{\bar{s}(1+\bar{c})}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 \\ EI_z \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{mL^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_z \frac{2\bar{s}(1+\bar{c})}{mL^3} \end{bmatrix}$$

Simétrico

.... (41)

Os esforços  $\{F_p\}_{c,a}^j$  serão tais que

$$\{F_p\}_{c,a}^j = [S_p]_{c,a}^j \{D_p\}_{c,a}^j$$

7.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ DAS VIGAS

Para uma viga (c,a) à direita da prumada de pilares c e no nível da laje a, do painel j, a matriz de rigidez  $[S_v]_{c,a}^j$  de ordem 4 x 4 correspondente às coordenadas apresentadas na Fig. II-3.b é mostrada na relação (42). Seus elementos, conforme hipóteses do item (2.1), não serão afetadas pelo esforço axial P.

$$[S_v]_{c,a}^j = \begin{pmatrix} EI_z \frac{4}{L} & EI_z \frac{6}{L^2} & EI_z \frac{2}{L} & -EI_z \frac{6}{L^2} \\ \text{Simétrico} & EI_z \frac{12}{L^3} & EI_z \frac{6}{L^2} & -EI_z \frac{12}{L^3} \\ & & EI_z \frac{4}{L} & EI_z \frac{6}{L^2} \\ & & & EI_z \frac{12}{L^3} \end{pmatrix} \dots (42)$$

Os esforços  $\{F_v\}_{c,a}^j$  serão tais que

$$\{F_v\}_{c,a}^j = [S_v]_{c,a}^j \{D_v\}_{c,a}^j$$

7.3 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO PAINEL

Os deslocamentos  $\{D_p\}_{c,a}^j$  do pilar (c,a) e  $\{D_v\}_{c,a}^j$  da viga (c,a) são relacionados aos deslocamentos  $\{D\}_{c,a}^j$ , do painel j, através das relações

$$\{D_p\}_{c,a}^j = [B_p]_{c,a}^j \{D\}_{c,a}^j$$

e

$$\{D_v\}_{c,a}^j = [B_v]_{c,a}^j \{D\}_{c,a}^j$$



As matrizes de transformação  $[B_p]_{c,a}^j$  de ordem  $6 \times f(2nc+1)$  e  $[B_v]_{c,a}^j$  de ordem  $4 \times f(2nc+1)$  são compostas da seguinte forma

$$[B_p]_{c,a}^j = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{f(c-1)+a \text{ colunas}} \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} [0] & \dots & [I] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ [0] & \dots & [0] & [I] & \dots & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \underbrace{0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0}_{f \times nc + a \text{ colunas}} \end{array} \right] \end{array}$$

$$[B_v]_{c,a}^j = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{f(c-1)+a \text{ colunas}} \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \underbrace{0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0}_{fc+a \text{ colunas}} \end{array} \right] \end{array}$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade de ordem  $2 \times 2$ .

Para os pilares do andar inferior  $[B_p]_{c,f}^j$  de ordem  $3 \times f(2nc+1)$ , vale

$$[B_p]_{c,f}^j = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{fc \text{ colunas}} \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} [0] & \dots & [I] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \underbrace{0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0}_{f(nc+1) \text{ colunas}} \end{array} \right] \end{array}$$

Com isso a matriz de rigidez  $[S]^j$  do painel  $\underline{j}$ , de ordem  $f(2nc+1) \times f(2nc+1)$ , será

$$[S]^j = \sum_{c=1}^{nc} \sum_{a=1}^f [B_p]_{c,a}^{jT} [S_p]_{c,a}^j [B_p]_{c,a}^j + \sum_{c=1}^{nc-1} \sum_{a=1}^f [B_v]_{c,a}^{jT} [S_v]_{c,a}^j [B_v]_{c,a}^j$$

Os esforços  $\{F\}^j$  serão tais que

$$\{F\}^j = [S]^j \{D\}^j$$

#### 7.4 - MATRIZ DE RIGIDEZ REDUZIDA

Os painéis serão classificados em 3 tipos, (Fig. II-7), dependendo da existência ou não de pilares nas suas extremidades.

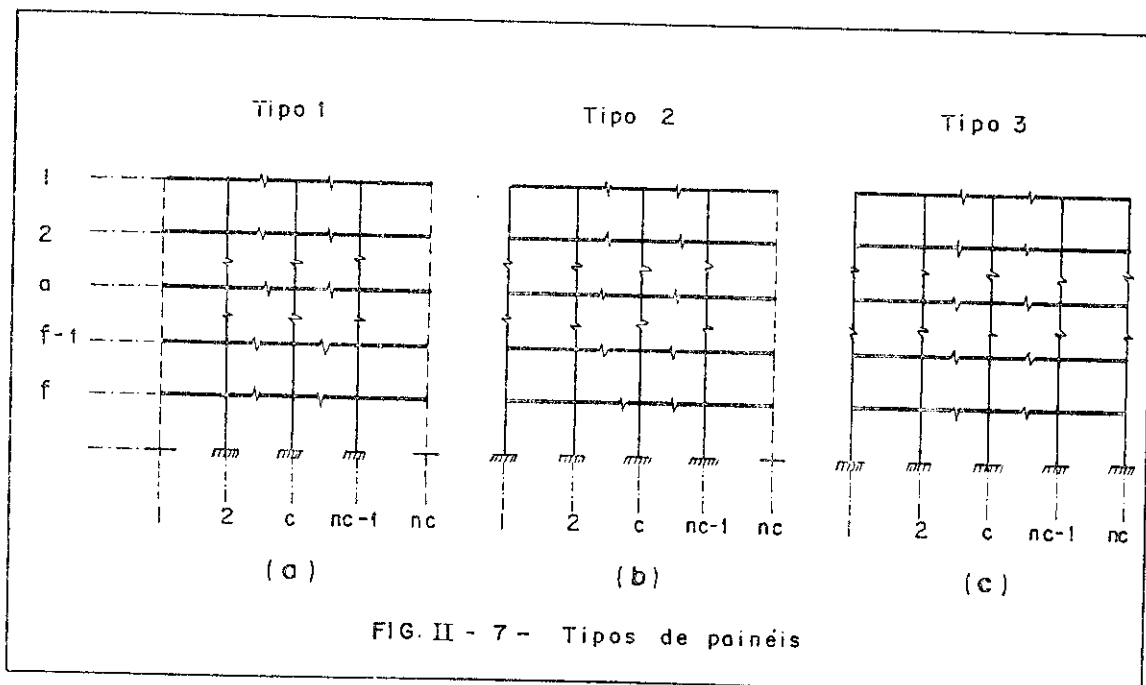


FIG. II - 7 - Tipos de painéis

Os deslocamentos  $\{D\}^j$  serão reorganizados em deslocamentos externos (E) e internos (I).

Para os painéis do tipo (1):

$$\{D_E\}^j = \{ \{D\}_1^j \quad \{D\}_{nc}^j \quad \{D\}_H^j \}^T$$

$$\{D_I\}^j = \{ \{D\}_2^j \quad \{D\}_3^j \quad \dots \quad \{D\}_{nc-1}^j \}^T$$

Para os painéis do tipo (2):

$$\{D_E\}^j = \{ \{D\}_{nc}^j \quad \{D\}_H^j \}^T$$

$$\{D_I\}^j = \{ \{D\}_1^j \quad \{D\}_2^j \quad \dots \quad \{D\}_{nc-1}^j \}^T$$

Para os painéis do tipo (3):

$$\{D_E\}^j = \{D\}_H^j$$

$$\{D_I\}^j = \{ \{D\}_1^j \quad \{D\}_2^j \quad \dots \quad \{D\}_{nc}^j \}^T$$

Com os deslocamentos rearranjados dessa forma é possível adaptar as matrizes  $[S]^j$  e  $\{F\}^j$  através de trocas de linhas e colunas, até se obter<sup>(16)</sup>

$$\begin{bmatrix} [S_{II}]^j & [S_{IE}]^j \\ [S_{EI}]^j & [S_{EE}]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\}^j \\ \{D_E\}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\}^j \\ \{F_E\}^j \end{Bmatrix} \dots (43)$$

Os deslocamentos internos  $\{D_I\}^j$  podem ser calculados como soma de dois outros,  $\{D_I^o\}^j$  e  $\{D_I^*\}^j$ . O primeiro,  $\{D_I^o\}^j$ , contendo os deslocamentos internos provocados pelos esforços internos  $\{F_I\}^j$  quando se impõe que todos os deslo

camentos  $\{D_E\}^j$  sejam nulos, aplicando segundo essas coordenadas externas esforços  $\{F_E^0\}^j$ ; o outro,  $\{D_I^*\}^j$ , contendo os deslocamentos internos devidos à superposição dos esforços externos  $\{F_E\}^j$  com  $(-1) \cdot \{F_E^0\}^j$ . Assim, os deslocamentos  $\{D\}^j$  ficarão:

$$\{D\}^j = \begin{Bmatrix} \{D_I\}^j \\ \{D_E\}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{D_I^0\}^j \\ \{0\}^j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{D_I^*\}^j \\ \{D_E\}^j \end{Bmatrix} \dots (44)$$

Os esforços  $\{F\}^j$  correspondentes serão:

$$\{F\}^j = \begin{Bmatrix} \{F_I\}^j \\ \{F_E\}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\}^j \\ \{F_E^0\}^j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\}^j \\ \{F_E^*\}^j \end{Bmatrix} \dots (45)$$

Os quatro vetores introduzidos,  $\{D_I^0\}^j$ ,  $\{D_I^*\}^j$ ,  $\{F_E^0\}^j$  e  $\{F_E^*\}^j$  podem ser determinados substituindo (44) e (45) em (43).

Para deslocamentos externos nulos:

$$\begin{bmatrix} [S_{II}]^j & [S_{IE}]^j \\ [S_{EI}]^j & [S_{EE}]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I^0\}^j \\ \{0\}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\}^j \\ \{F_E^0\}^j \end{Bmatrix}$$

donde

$$\{D_I^0\}^j = [S_{II}]^{j-1} \{F_I\}^j \dots (46)$$

$$\{F_E^0\}^j = [S_{EI}]^j [S_{II}]^{j-1} \{F_I\}^j \dots (47)$$

Para a outra parcela dos deslocamentos

$$\begin{bmatrix} [S_{II}]^j & [S_{IE}]^j \\ [S_{EI}]^j & [S_{EE}]^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I^*\}^j \\ \{D_E\}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\}^j \\ \{F_E^*\}^j \end{Bmatrix}$$

donde

$$\{D_I^*\}^j = - [S_{II}]^{j-1} [S_{IE}]^j \{D_E\}^j \dots (48)$$

$$\{F_E^*\}^j = [S_{EI}]^j \{D_I^*\}^j + [S_{EE}]^j \{D_E\}^j \dots (49)$$

Substituindo a relação (48) na (49) tem-se:

$$\{F_E^*\}^j = \left( [S_{EE}]^j - [S_{EI}]^j [S_{II}]^{j-1} [S_{IE}]^j \right) \{D_E\}^j$$

Chamando  $[S^*]^j$  matriz de rigidez reduzida do painel j

$$[S^*]^j = [S_{EE}]^j - [S_{EI}]^j [S_{II}]^{j-1} [S_{IE}]^j \dots (50)$$

ter-se-á, sinteticamente

$$\{F_E^*\}^j = [S^*]^j \{D_E\}^j \dots (51)$$

Da relação (45), já substituindo o valor de  $\{F_E^0\}^j$  de (47), tem-se:

$$\{F_E^*\}^j = \{F_E\}^j - [S_{EI}]^j [S_{II}]^{j-1} \{F_I\}^j \dots (52)$$

De (44), substituindo os valores obtidos em (46) e (48) tem-se:

$$\{D_I\}^j = [S_{II}]^{j-1} \{F_I\}^j - [S_{II}]^{j-1} [S_{IE}]^j \{D_E\}^j \dots (53)$$

### 8 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA ESTRUTURAL

Os deslocamentos  $\{\bar{D}\}^i$  e  $\{V\}$  podem ser relacionados através da matriz de transformação  $[\bar{B}]^i$  de ordem  $6f \times 3f(ni+1)$ , tal que

$$\{\bar{D}\}^i = [\bar{B}]^i \{V\}$$

onde

$$[\bar{B}]^i = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ [0] & [R] & [0] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [I] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [R] & \dots & [0] & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & \dots & [0] & [R] \end{bmatrix}$$

sendo  $[I]$  a matriz identidade de ordem  $3 \times 3$  e

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & (Y_i \sin\alpha_i - Z_i \cos\alpha_i) \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & (Y_i \cos\alpha_i + Z_i \sin\alpha_i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo, os deslocamentos  $\{D_E\}^j$  e  $\{V\}$  podem ser relacionados através da matriz de transformação  $[B_E^*]^j$  de ordem  $5f \times 3f(ni+1)$ , tal que:

$$\{D_E\}^j = [B_E^*]^j \{V\}$$

onde

$$[B_E^*]^j = \begin{bmatrix} [b_1] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & [0] \\ [0] & [b_1] & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & \cdot \\ [0] & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & [b_1] & [0] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [b_2] & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & [0] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & [0] \\ \cdot & [0] & \cdot & \cdot & \cdot & [0] & [0] & \cdot & [b_2] \end{bmatrix}$$

3nif columnas

sendo

$$[b_1] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\alpha_p - \alpha_i) & \text{cos}(\alpha_p - \alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[b_2] = \begin{bmatrix} \text{cos}\alpha_p & \text{sen}\alpha_p & (-Z_i \text{cos}\alpha_p + Y_i \text{sen}\alpha_p) \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez  $[K]$  de ordem  $3f(ni+1) \times 3f(ni+1)$ , do sistema estrutural, vale:

$$[K] = \sum_{i=1}^{ni} [\bar{B}]^i T [\bar{S}]^i [\bar{B}]^i + \sum_{j=1}^{np} [B_E^*]^j T [S^*]^j [B_E^*]^j$$

Sendo  $\{R\}$  os esforços nas coordenadas do sistema estrutural

$$\{R\} = [K] \{V\}$$

## 9 - DETERMINAÇÃO DO CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL

### 9.1 - CÁLCULO DOS ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS DA ESTRUTURA

A solução do modelo estrutural pelo processo dos deslocamentos permite determinar os deslocamentos nas coordenadas externas da estrutura a partir de sua matriz de rigidez e das cargas externas. Com esses deslocamentos poderão ser determinados os demais nas coordenadas internas e os correspondentes esforços internos, conforme formulação dos itens 6 a 8. Entretanto, os elementos dessa matriz de rigidez dependem de valores desses esforços internos, isto é, dos esforços axiais nos pilares, que são incógnitos. A solução direta, portanto, é inviável. Este fato sugere a utilização de um processo de aproximações sucessivas.

### 9.2 - PROCESSO DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

A determinação dos esforços axiais reais nos elementos da estrutura, correspondentes a um determinado carregamento sobre a mesma, pode ser feita iterativamente. Supondo inicialmente nulos seus esforços axiais, determinam-se as matrizes de rigidez dos elementos, em seguida as das subestruturas e finalmente a matriz de rigidez da estrutura toda. Com essa matriz de rigidez e com o carregamento, determinam-se os deslocamentos da estrutura e com eles os deslocamentos externos das subestruturas. Com estes, determinam-se os deslocamentos internos das subestruturas e em seguida os deslocamentos dos elementos. Com esses deslocamentos calculam-se os esforços nos elementos, em particular os esforços axiais. Com esses esforços axiais, recalculam-se as matrizes de rigidez dos elementos, repe-



tindo-se todo o processo, obtendo, para o mesmo carregamento, um novo conjunto de esforços axiais nos elementos. Esse cálculo de novos esforços axiais nos elementos, a partir dos obtidos numa etapa anterior, deve ser repetido diversas vezes. O processo será interrompido quando os esforços axiais obtidos numa etapa forem, dentro de uma precisão pré-definida, coincidentes com os da etapa anterior. Terão sido calculados, então, com a precisão desejada, os esforços axiais reais nos elementos.

Com isso, tem-se condições de determinar as matrizes de rigidez dos elementos, com estas as das subestruturas e finalmente a matriz de rigidez da estrutura toda, afetada pelo carregamento externo imposto.

### 9.3 - VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DA ESTRUTURA SUBMETIDA A UM CERTO CARREGAMENTO

Uma estrutura será considerada estável sob um certo carregamento se sua matriz de rigidez for positiva definida<sup>(17)</sup>.

Se a matriz é positiva definida, é possível expressá-la através de uma transformação linear sobre as linhas e colunas, correspondente a uma mudança de base, na forma de uma matriz diagonal ainda positiva definida<sup>(18)</sup>.

Os autovalores dessa matriz de rigidez diagonalizada, de ordem  $n \times n$ , são em número de  $n$  e correspondem exatamente aos termos da diagonal. A cada autovalor negativo ou nulo corresponde um modo de flambagem. Desta forma, para um carregamento definido, o número de elementos negativos ou nulos na diagonal é igual ao número de graus de liberdade que tem o modo de flambagem para esse carregamento.

No caso presente, a transformação linear será orientada pela técnica de Gauss, por pivotamento, visando zerar os elementos abaixo da diagonal. O pivotamento poderá ser interrompido ao constatar a existência do primeiro elemento negativo ou nulo na diagonal, o que já detectaria

a existência de flambagem com pelo menos um grau de liberdade, caracterizando a instabilidade da estrutura.

#### 9.4 - CARREGAMENTO CRÍTICO DE INSTABILIDADE GERAL

A determinação do carregamento crítico para a estrutura submetida às cargas permanentes, de vento e cargas vivas afetadas por um parâmetro de proporcionalidade  $W$ , será feita em três etapas, a seguir:

1<sup>a</sup> etapa: - Verificar se a estrutura é estável sob a ação das cargas permanentes e de vento. Sendo estável, passa-se à etapa seguinte. Não o sendo, interrompe-se o processo.

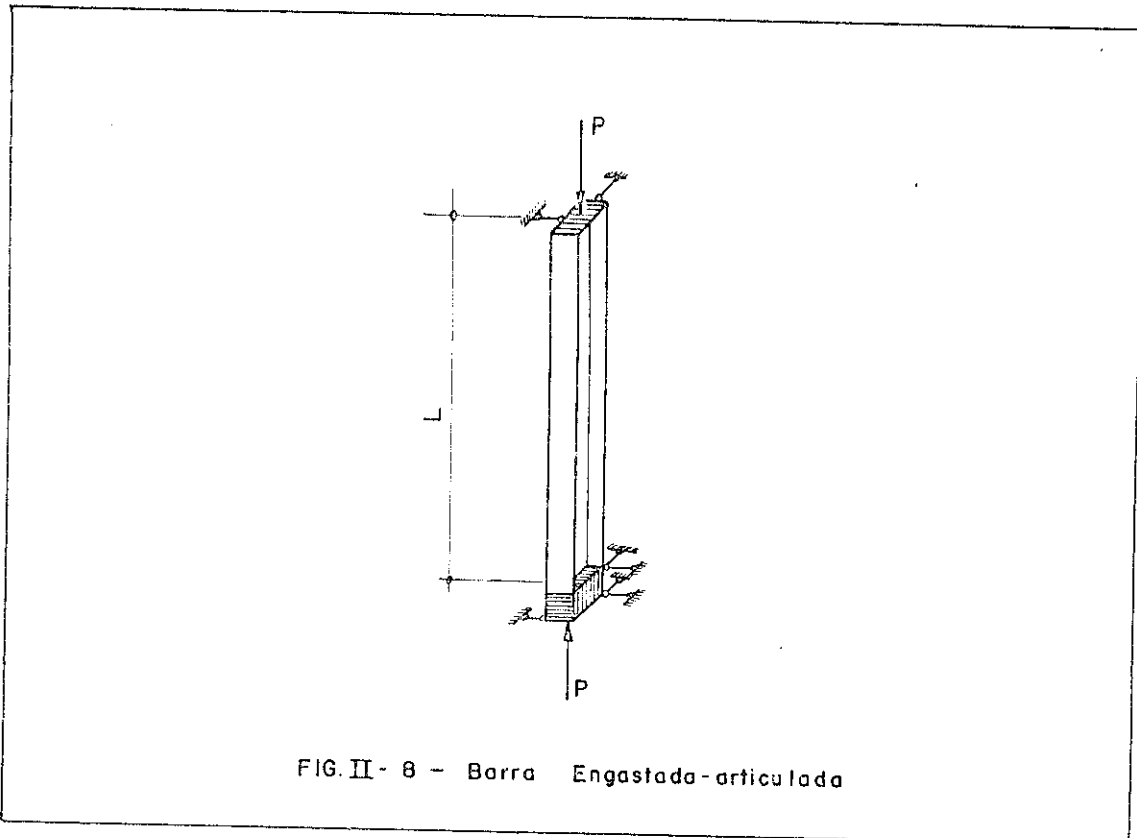
2<sup>a</sup> etapa: - Determinar o valor  $W_{cr}$ , para o parâmetro de proporcionalidade  $W$ . A pesquisa desse valor será feita dando ao parâmetro  $W$  acréscimos sucessivos  $\Delta W$ , inicialmente adotado de valor unitário. Se a estrutura é estável sob a ação do conjunto de cargas permanentes, de vento, e cargas vivas afetadas pelo parâmetro  $W$ , o novo acréscimo será considerado.

Se se constatar a instabilidade, subtrai-se de  $W$  o valor de  $\Delta W$  e adota-se um novo acréscimo  $\Delta \bar{W}$  igual à metade do anterior e prossegue-se com os acréscimos ao parâmetro. Esse processo de subdivisão do acréscimo será executado até cinco vezes.

3<sup>a</sup> etapa: - Verificar se realmente o valor  $W_{cr}$  obtido é um número no qual se pode confiar, analisando o comportamento do determinante da matriz de rigidez durante o processo de carregamento.

Observa-se, mesmo num exemplo simples de uma barra comprimida, que ao aumentar o carregamento além do primeiro valor crítico é possível a barra "recobrar a estabilidade", propiciando o aparecimento de uma série de valores críticos que não interessam em absoluto. Seja por exemplo

a barra da Fig. II-8 com seção transversal com dois eixos de simetria, comprimida por uma carga P crescente a partir de zero.



A matriz de rigidez correspondente aos três giros da extremidade superior é matriz diagonal que tem a forma seguinte:

$$[s] = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix}$$

com

$$s_{11} = \frac{EI_y s^*}{L}$$

$$s_{22} = \frac{EI_z \bar{s}}{L}$$

$$s_{33} = \frac{EI_{\omega} 2s(1+c)}{mL^3}$$

A matriz de rigidez deixará de ser positiva definida quando o primeiro dos  $s_{jj}$  se anular, em  $P = P_{cr}$ .

Lançando essas funções  $s_{jj}$  em gráfico, por exemplo, para barra com 3m de comprimento e perfil I 8" (27,38 kg/m), tem-se para elas o comportamento mostrado na Fig. II-9.

As curvas nas regiões hachuradas da figura correspondem a intervalos de carga onde se tem matriz de rigidez positiva definida, e para cada um desses intervalos se tem uma carga crítica, no caso  $P_{c1}$ ,  $P_{c2}$ ,  $P_{c3}$ , ... etc. Destas, a única que realmente interessa é a primeira, isto é,  $P_{cr} = P_{c1}$ .

Analisando uma estrutura mais complexa é possível evitar, sem prejuízo quanto à procura de  $W_{cr}$ , as descontinuidades em coeficientes de rigidez, limitando a pesquisa apenas ao intervalo onde  $\mu_y$ ,  $\mu$  e  $\eta$  são todos menores que  $\pi$ , nas barras comprimidas. Isso equivale a estabelecer que um limite superior para o parâmetro crítico associado à estrutura toda é aquele associado à estrutura suposta indeslocável e com todas as rotações dos nós impedidas. Nestas condições, basta analisar um conjunto de barras bi-engastadas comprimidas ou tracionadas, interessando apenas o comportamento à compressão e verificar se cada uma delas é estável.

Uma barra isolada, considerada bi-engastada, Fig. II-10, pode ser analisada impondo condições de contorno convenientes às relações (15), para o caso de  $I_{\omega} \neq 0$ . A solução não trivial para os deslocamentos ocorre com:

$$\mu_y = \frac{L}{2} k_y \quad \dots (54)$$

$$\eta = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{(k_z^2 - k^2) + \sqrt{(k_z^2 + k^2)^2 + 4k_{\omega}^2 k_z^2 z_o^2}}{2}} \quad \dots (55)$$

$$\mu = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{-(k_z^2 + k^2) + \sqrt{(k_z^2 - k^2)^2 + 4k_{\omega}^2 k_z^2 z_o^2}}{2}} \quad \dots (56)$$

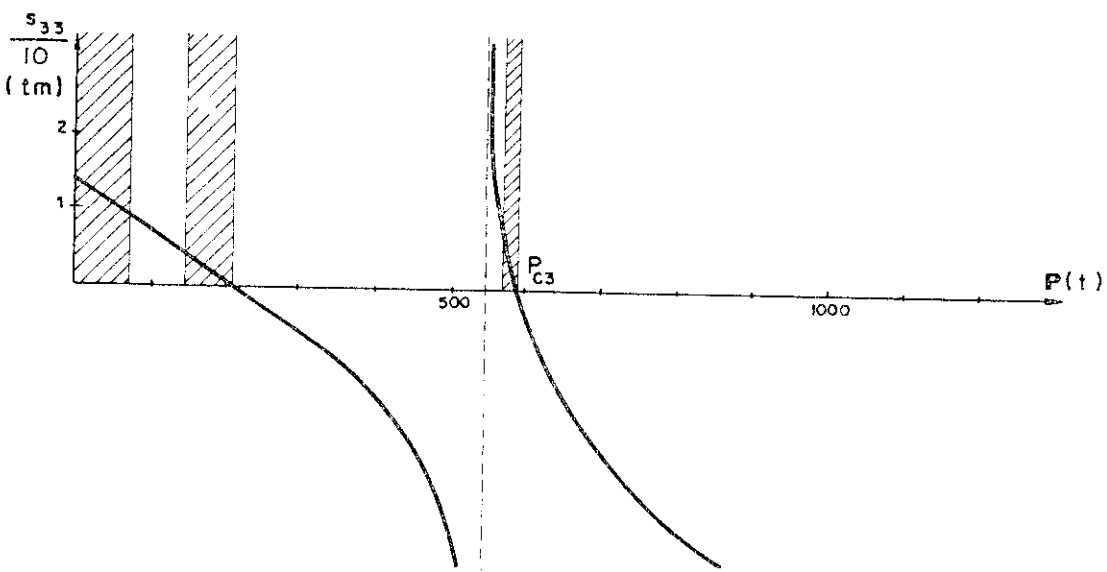
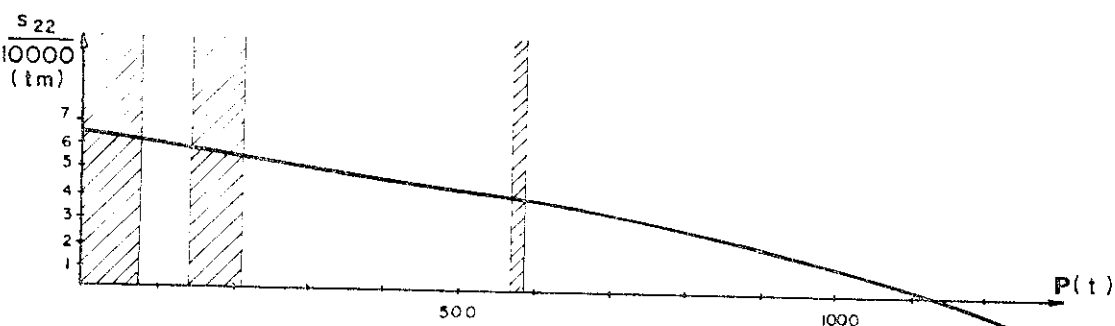
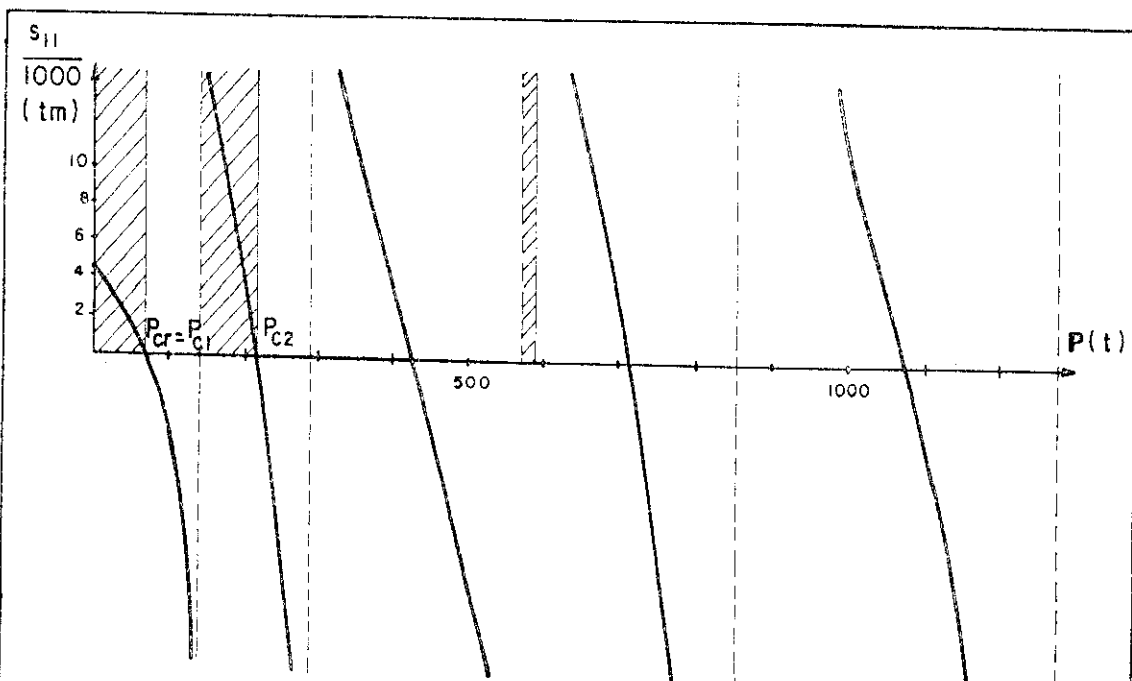


FIG.II-9 - Comportamento de barra Engastada-Articulada

onde  $\mu_y$ ,  $\eta$  e  $\mu$  são iguais a  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ ,  $4\pi$ , ... etc. Substituindo  $k$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $k_\omega$  sai um primeiro conjunto de três cargas críticas possíveis para a barra,  $P_{c1}$ ,  $P_{c2}$  e  $P_{c3}$ , correspondentes todos a  $\mu_y$ ,  $\eta$  e  $\mu$  iguais a  $\pi$ . A menor delas será a crítica e corresponderá ao primeiro dentre os valores  $\mu_y$ ,  $\eta$  e  $\mu$  que atinge o valor  $\pi$ .

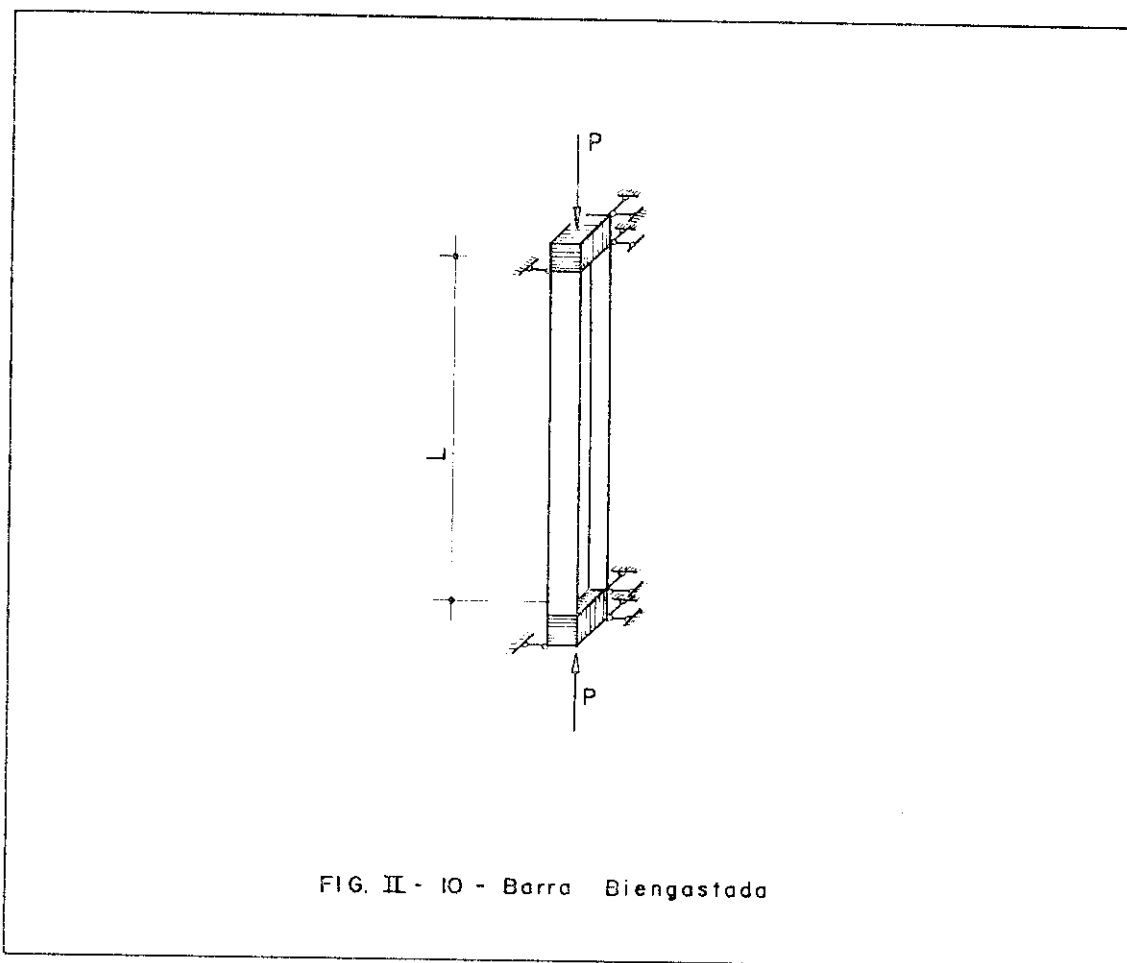


FIG. II - 10 - Barra Biengastada

Para barras cujas secções possuem dois eixos de simetria as expressões (54) a (56) são bastante simples e correspondem a:

$$P_{c1} = \frac{4\pi^2 EI_y}{L^2}$$

$$P_{c2} = \frac{4\pi^2 EI_z}{L^2}$$

$$P_{c3} = \frac{GJ}{r_o^2} + \frac{4\pi^2 EI \omega}{r_o^2}$$

jã calculadas por diversos autores<sup>(11)</sup> e permitindo conclusões semelhantes.

Para barras com  $I_\omega = 0$  e sem eixos de simetria na secção transversal, as expressões (54) a (56) se reduzem a apenas duas:

$$\mu = \frac{L}{2} \left( \frac{\left[ k_z^2 (1+k^2 z_o^2) + k_y^2 (1+k^2 y_o^2) \right]}{2} + \sqrt{\frac{\left[ k_z^2 (1+k^2 z_o^2) - k_y^2 (1+k^2 y_o^2) \right]^2 + 4k^4 k_y^2 k_z^2 y_o^2 z_o^2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta = \frac{L}{2} \left( \frac{\left[ k_z^2 (1+k^2 z_o^2) + k_y^2 (1+k^2 y_o^2) \right]}{2} + \sqrt{\frac{\left[ k_z^2 (1+k^2 z_o^2) - k_y^2 (1+k^2 y_o^2) \right]^2 + 4k^4 k_y^2 k_z^2 y_o^2 z_o^2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Neste caso é possível introduzir mais uma limitação para o esforço de compressão em cada barra impondo que  $(GJ - Pr_o^2)$  deve ser sempre positivo pois caso contrário, conforme equação (28), se terá instabilidade da barra independentemente das vinculações com o resto da estrutura.

A introdução destes limites para  $\mu_y$ ,  $\eta$  e  $\mu$  garante a continuidade de todos os coeficientes que compõem a matriz de rigidez da estrutura, e consequentemente da função "determinante" dessa matriz. Não garante, entretanto, a inexistência de mais que um valor nulo para esse determinante mesmo dentro do intervalo considerado.

Para constatar a confiabilidade do resultado final  $W_{cr}$  para o parâmetro de proporcionalidade  $W$ , este valor poderá ser dividido em cinco (ou mais) intervalos. Os

determinantes das matrizes de rigidez correspondentes aos carregamentos compostos pelas cargas permanentes, de vento e cargas vivas multiplicadas pelos valores do parâmetro  $W$  nos extremos desses intervalos poderão ser lançados em gráfico. Deste modo será possível detectar alguma eventual anomalia de comportamento, como por exemplo a existência de um valor nulo para o determinante com  $W < W_{cr}$ .



## CAPÍTULO III

### FLUXOGRAMA DA PROGRAMAÇÃO PARA COMPUTADOR

#### 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

A pesquisa de parâmetros críticos para carregamentos variáveis em estruturas tridimensionais envolve, além da análise em segunda ordem do comportamento das barras da estrutura, também a solução dessas estruturas como um todo a partir de coeficientes conhecidos para as barras. Essa segunda parte foi orientada conforme formulação matricial desenvolvida no Capítulo II, itens 6 a 8, formulação essa apropriada para a programação para computador. Assim sendo, elaborou-se um programa em linguagem FORTRAN, que automatiza todo o cálculo, levando diretamente ao valor crítico desejado para o problema.

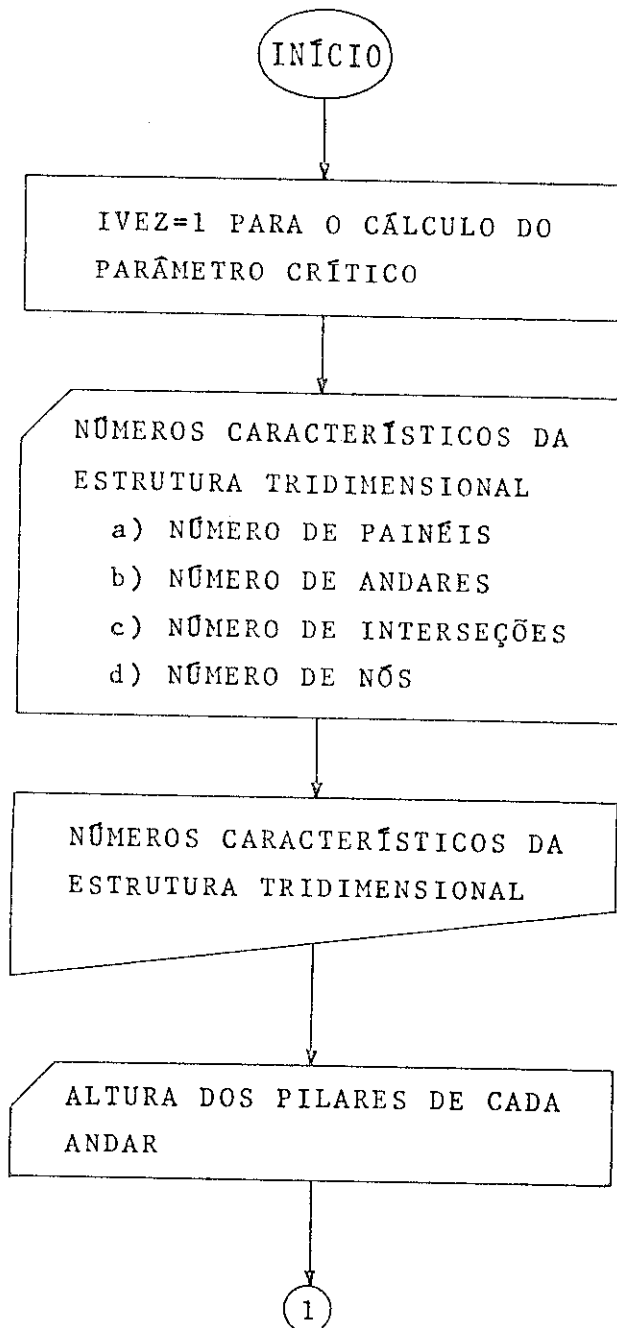
No desenvolvimento da programação, visando principalmente a redução de memórias no armazenamento das matrizes envolvidas, simétricas em geral, optou-se pela montagem dessas matrizes na forma de vetores.

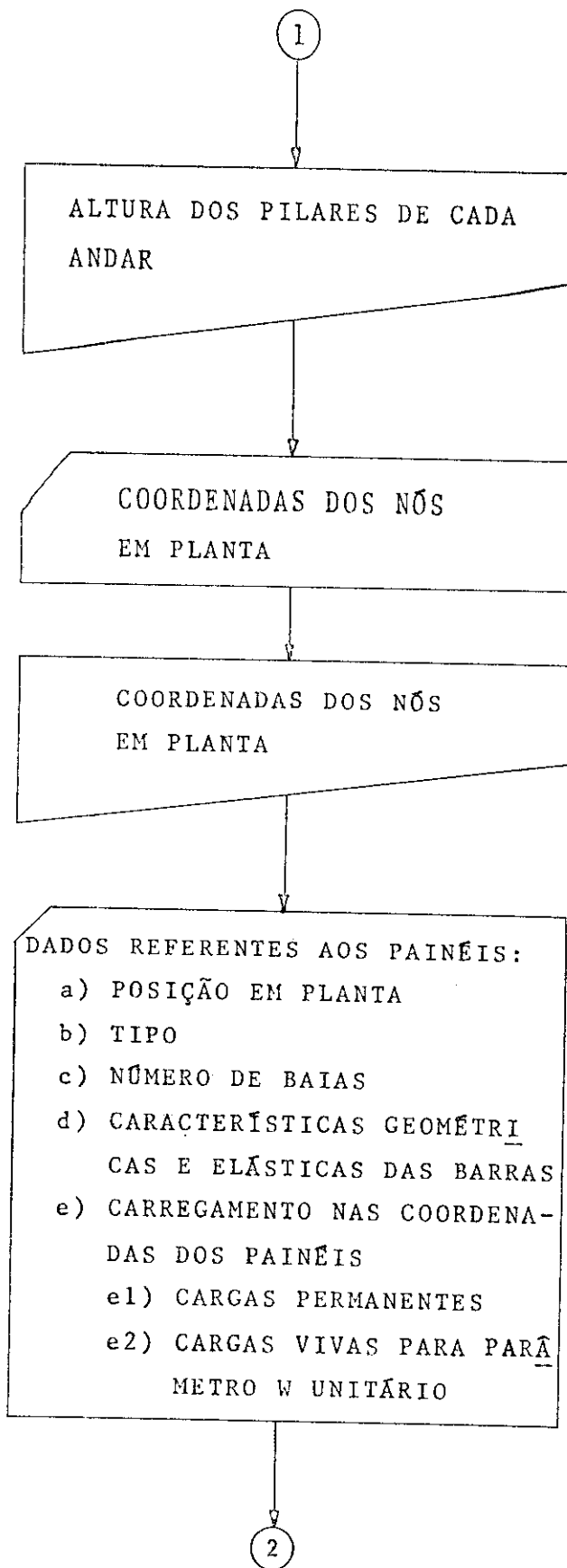
Em termos de técnica de programação do cálculo da estrutura pelo processo dos deslocamentos convém ressaltar também a utilização de um algoritmo<sup>(19)</sup> interessante para o cálculo da matriz de rigidez de uma subestrutura, reduzida às coordenadas externas. Este cálculo poderia ser feito através da relação (50) do Capítulo II. A inversão de uma matriz e o triplo produto matricial implícitos nessa relação foram evitados e substituídos apenas por um pivotamento parcial da matriz de rigidez da subestrutura, pivotamento este típico do processo de Gauss.

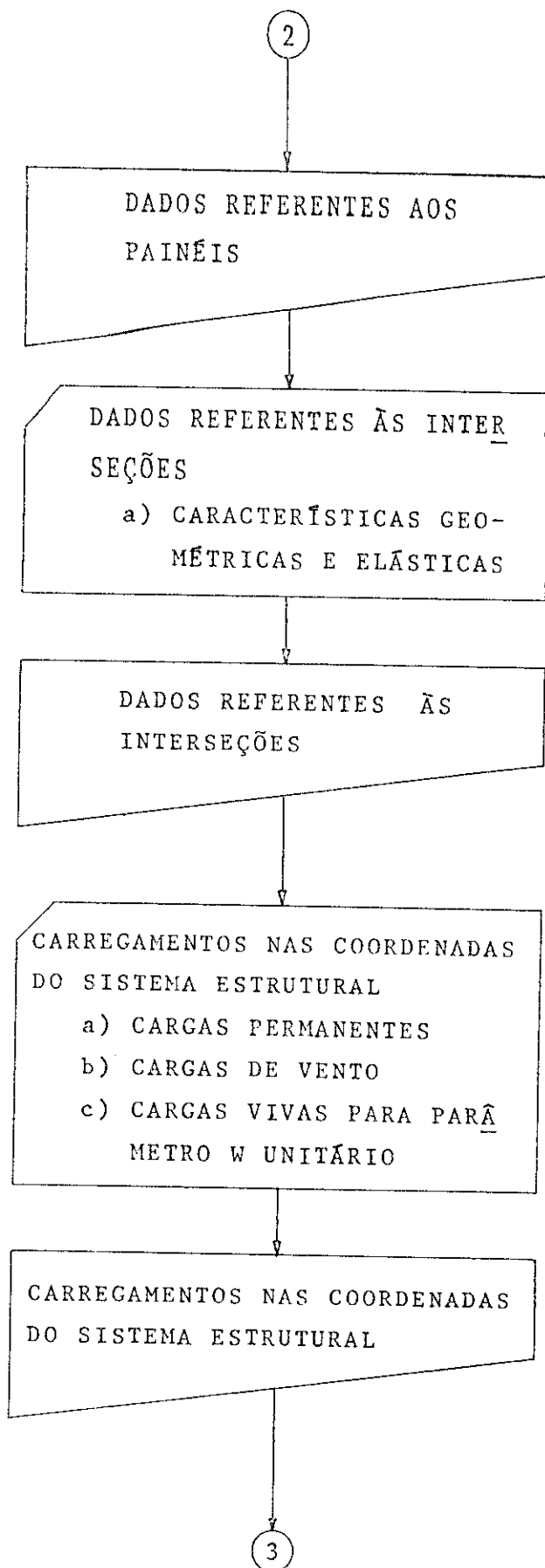
A programação para o computador foi elaborada de

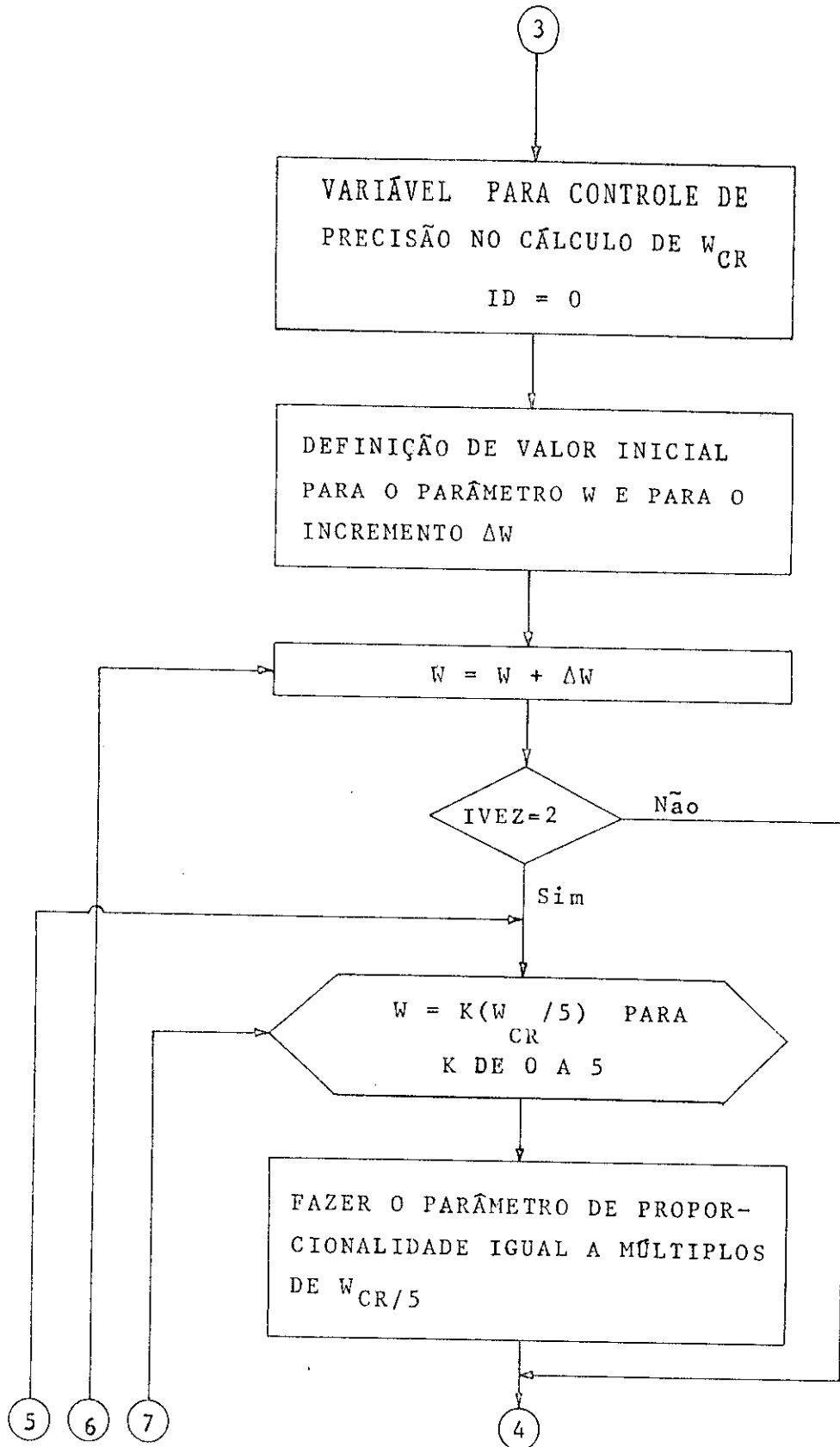
forma a se obter um programa razoavelmente flexível em termos de alterações, isolando as diversas fases de cálculo em sub-rotinas, que seriam solicitadas por um programa principal relativamente reduzido.

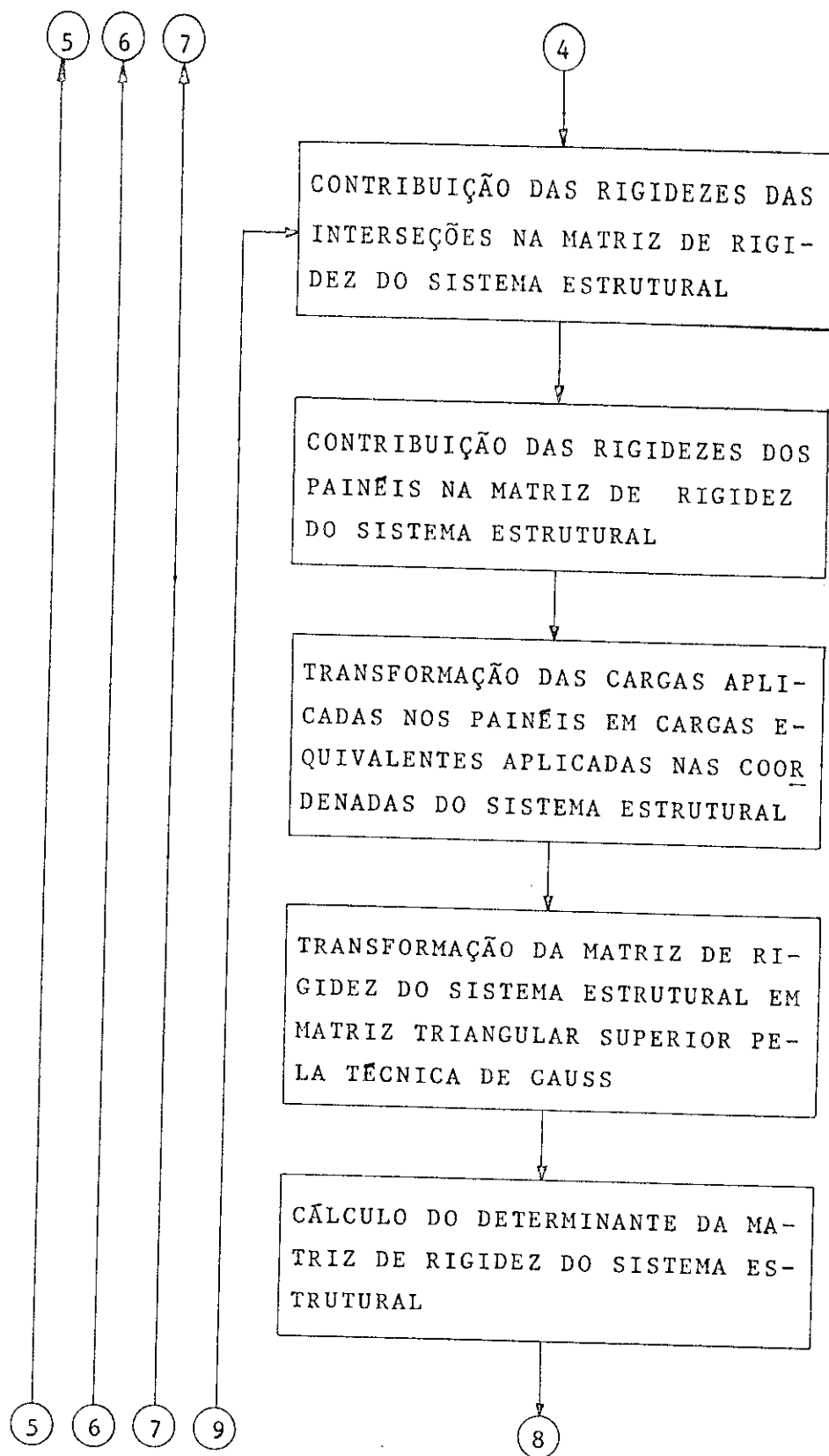
2 - FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO

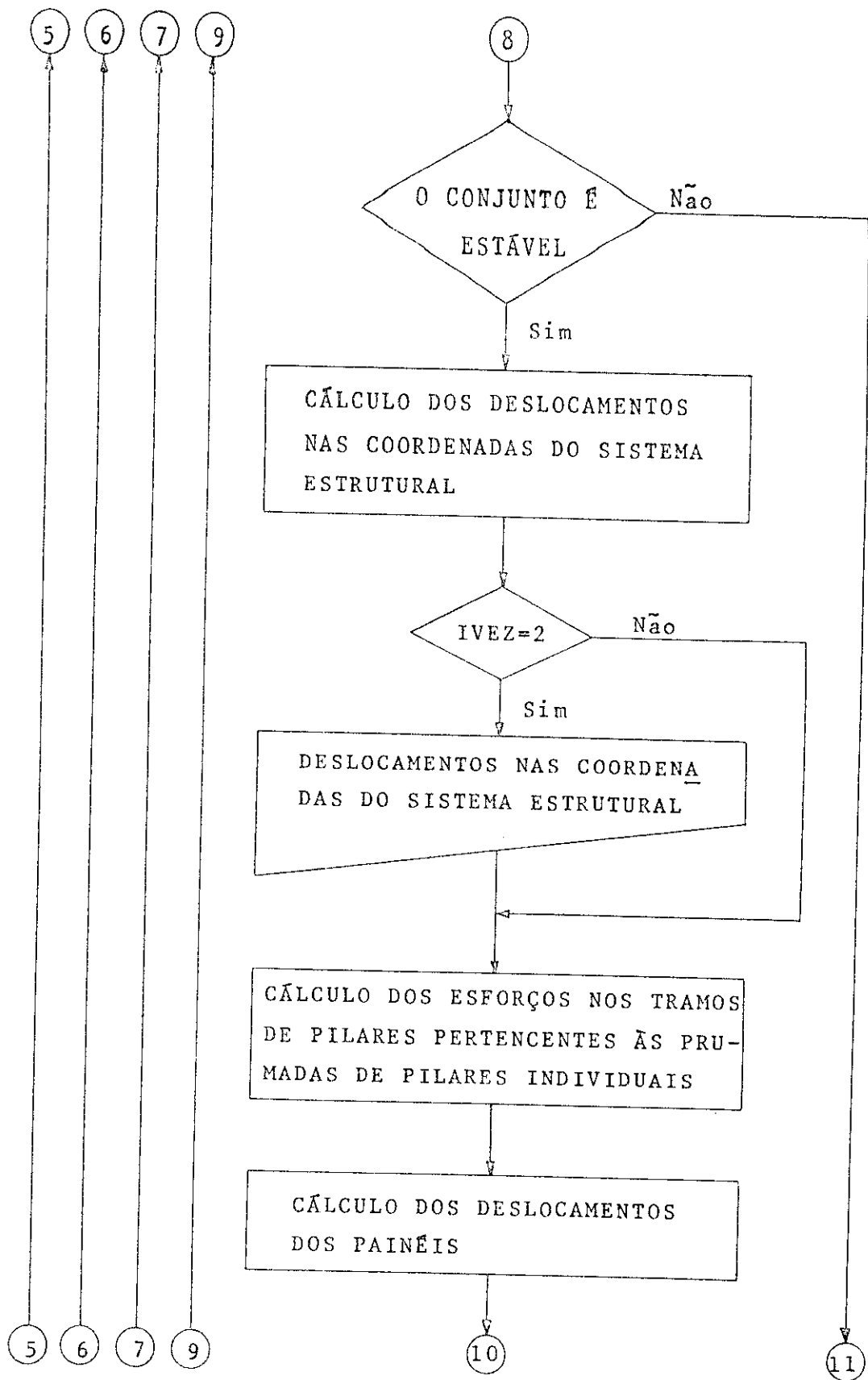


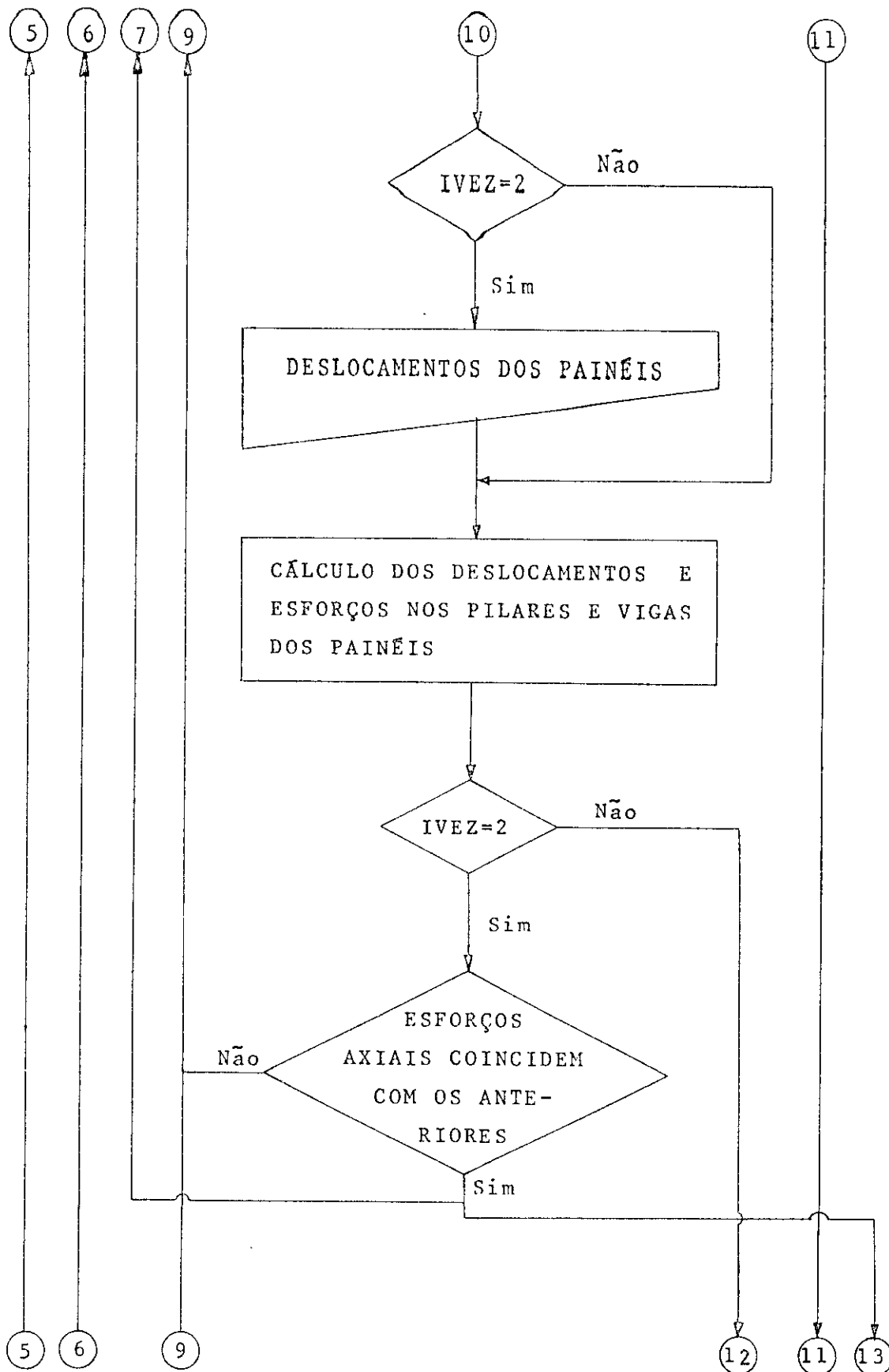




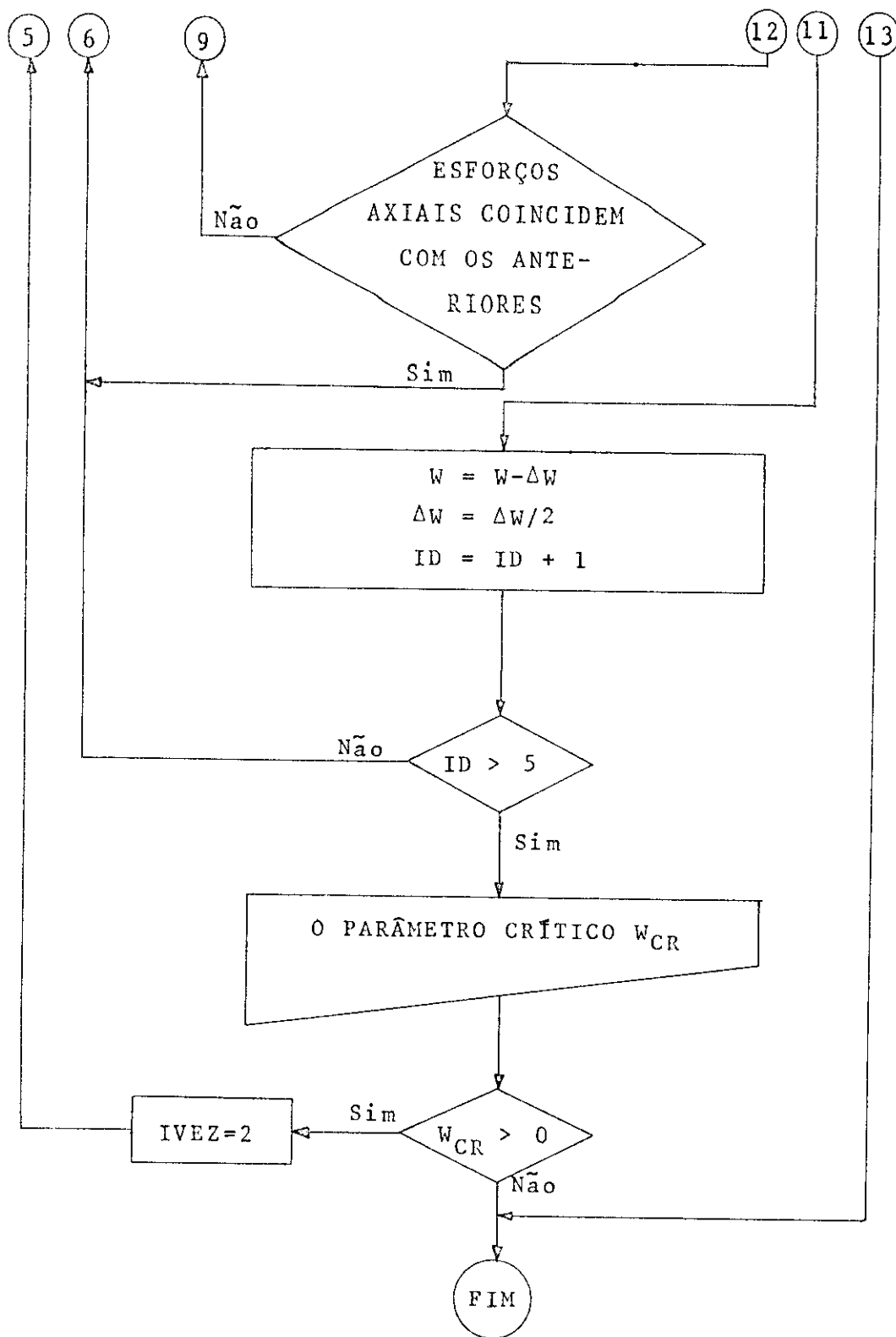












## CAPÍTULO IV

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

#### 1 - INTRODUÇÃO

O programa para computador, descrito no Capítulo III e listado no Apêndice, foi utilizado na solução de uma série de problemas relativos à determinação de parâmetros críticos para carregamentos atuando sobre estruturas tridimensionais.

Alguns dos exemplos mais simples a serem apresentados terão como objetivo a comparação de resultados com os obtidos por outros autores, utilizando hipóteses iguais ou semelhantes. Outros, mais complexos, procurarão evidenciar a potencialidade das técnicas utilizadas na solução de problemas reais. Exemplos mais complexos ainda poderiam ser desenvolvidos e só não o foram devido à restrita disponibilidade de tempo na utilização de computadores.

#### 2 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

##### 1º EXEMPLO

A estrutura tem um único andar e é constituída por quatro pilares e quatro vigas travados horizontalmente por uma laje, em seu plano.

O perfil utilizado tanto para as vigas como para os pilares é do tipo WF com as seguintes características geométricas

$$A_x = 10,08 \text{ in}^2$$

$$J = 0,215 \text{ in}^4$$

$$I_y = 173,5 \text{ in}^4$$

$$I_z = 34,18 \text{ in}^4$$

$$I_\omega = 786,4 \text{ in}^6$$

A estrutura é apresentada em planta na Fig. IV-1, onde constam a numeração dos nós, o posicionamento dos perfis, os painéis considerados e os sistemas de referência.

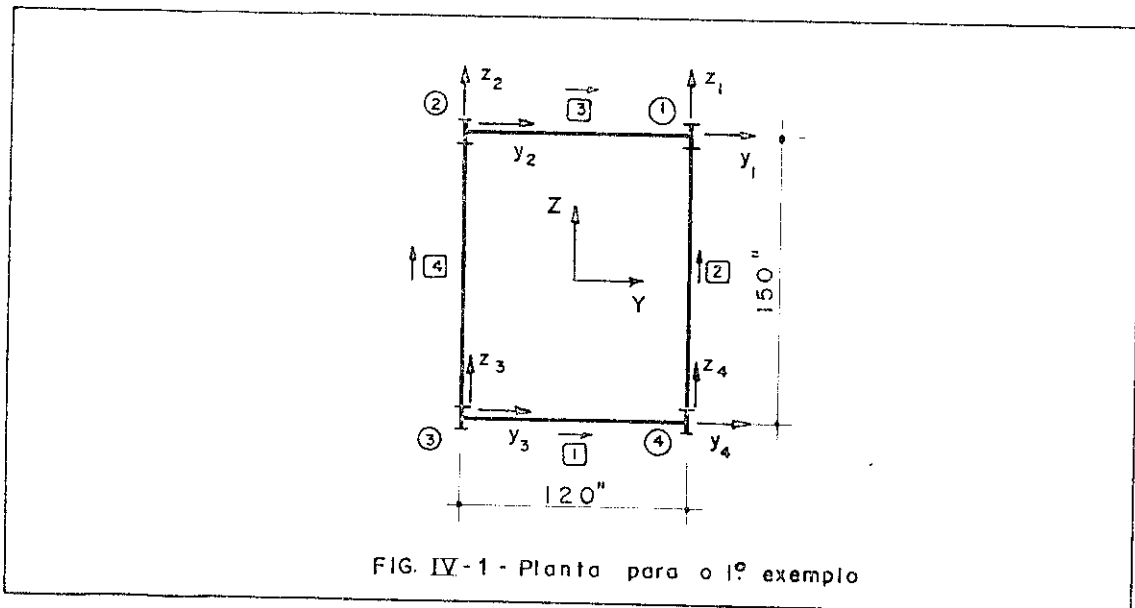


FIG. IV-1 - Planta para o 1º exemplo

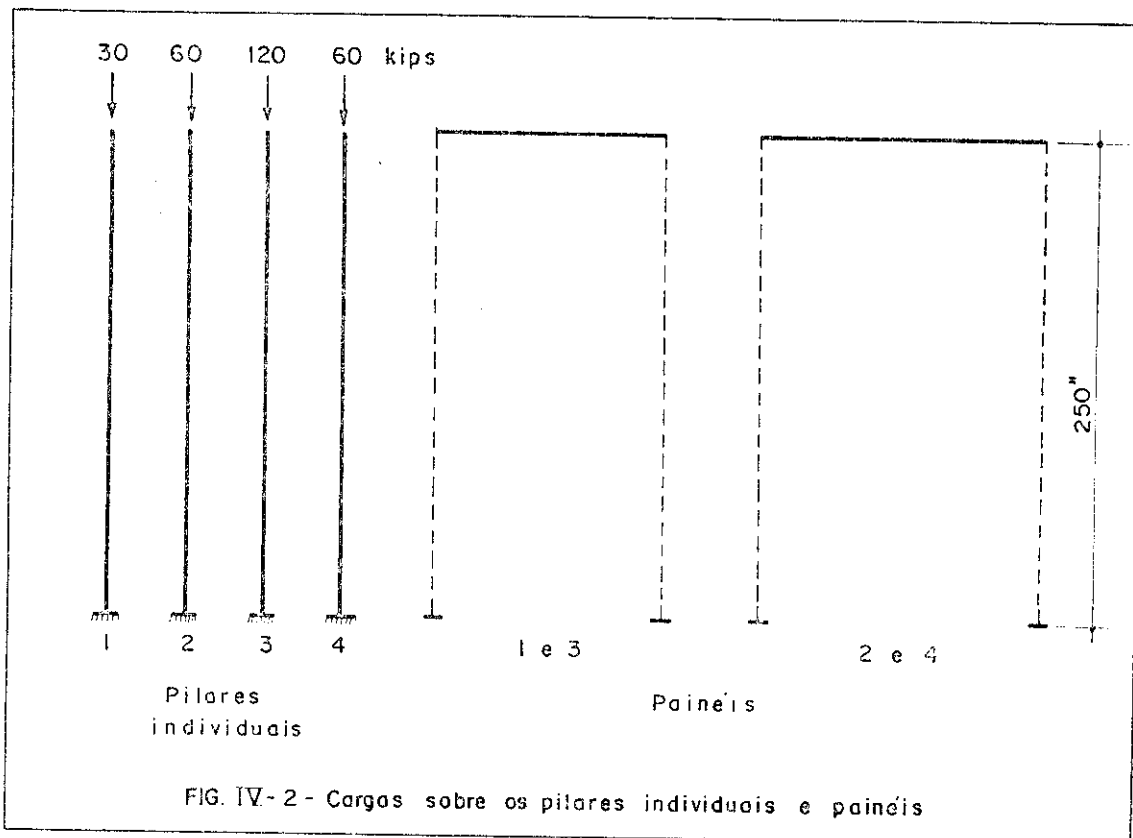
O carregamento é constituído apenas por cargas concentradas sobre os pilares. As cargas são consideradas como cargas vivas e constam da Fig. IV-2.

Aplicado o processo apresentado, foi obtido para o parâmetro  $W$  um valor crítico

$$W_{cr} = 2,156$$

O mesmo problema foi resolvido por MORINO<sup>(12)</sup> que, sem considerar a existência da laje, obteve como resultado

$$W_{cr} = 2,155$$



A coincidência de resultados, pelo menos em ordem de grandeza, era esperada, dada a relativa rigidez horizontal do quadro formado pelas vigas, rigidez essa não afetada pelo esforço axial.

#### 29 EXEMPLO

A estrutura tem três andares e é constituída por quatro prumadas iguais de pilares, de seções transversais com dois eixos de simetria, com dimensões variáveis de andar para andar. No nível das lajes existem vigas, iguais em cada nível.

Para efeito de comparação com resultado já existente, o exemplo foi resolvido substituindo a estrutura tridimensional por outra fictícia constituída por quatro painéis planos verticais trabalhando independentemente. Omitiram-se as condições de compatibilidade de deslocamentos nas intersecções entre os painéis e também a contribuição da rigidez à torção nos pilares de intersecção.

A estrutura é apresentada em planta na Fig. IV-3, onde constam a numeração dos nós e dos painéis, e o sistema de referência.

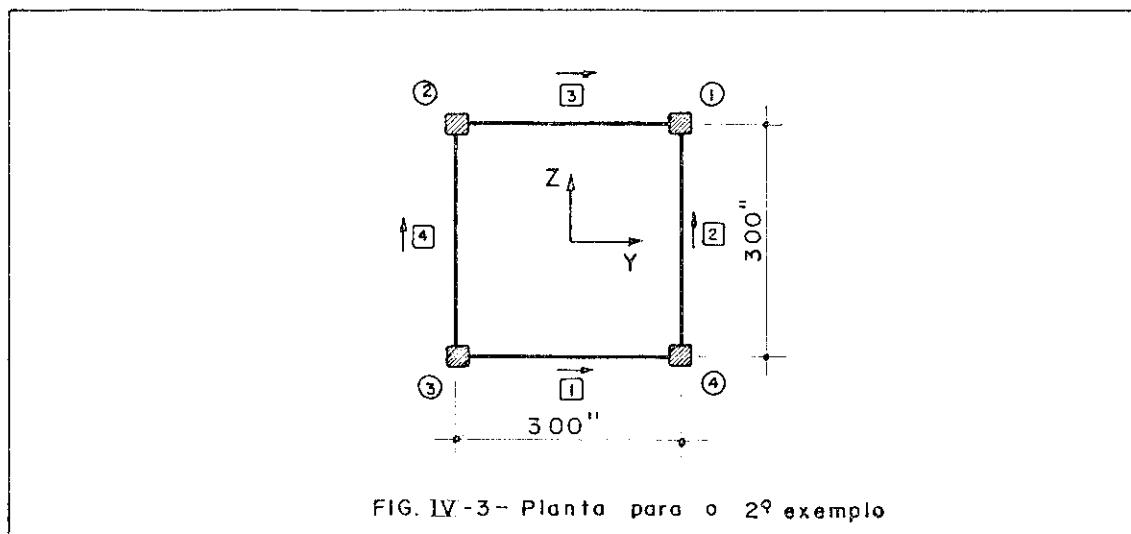
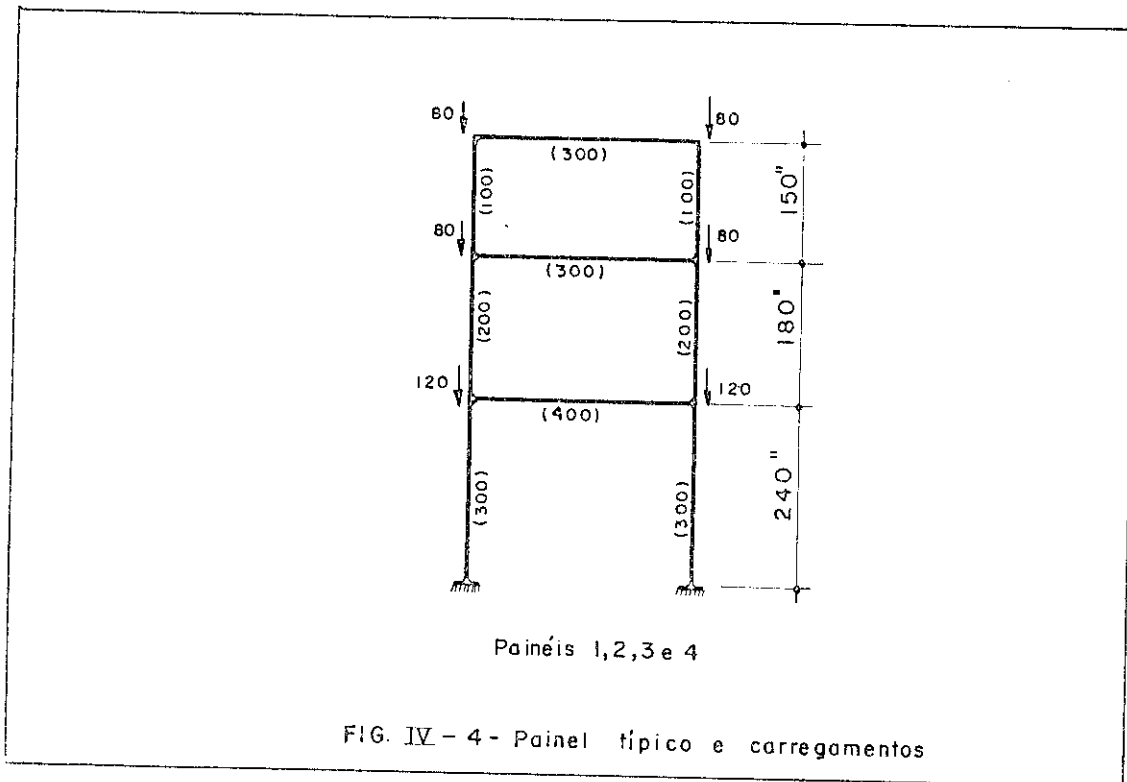


FIG. IV-3- Planta para o 2º exemplo

O carregamento é constituído apenas por cargas concentradas aplicadas aos pilares no nível das lajes. Essas cargas serão consideradas como cargas vivas. Por coerência com a simplificação adotada, cada uma das cargas sobre os pilares é considerada em ambos os painéis que se interceptam.

Na Fig. IV-4 consta o painel típico, igual para as quatro faces do edifício. Os momentos de inércia das barras, em  $\text{in}^4$ , são apresentados entre parêntesis. Na mesma figura estão indicadas as cargas vivas com parâmetro unitário.



As seções transversais de todos os elementos apresentam áreas de  $10 \text{ in}^2$ . Analisada a estrutura segundo as considerações iniciais, foi obtido um valor para o parâmetro crítico igual a

$$W_{cr} = 1,75$$

O valor encontrado por FIGUEIREDO<sup>(10)</sup> foi

$$W_{cr} = 1,79$$

### 3º EXEMPLO

Este exemplo corresponde a um edifício de quinze andares, com distância entre lajes consecutivas igual a 3 m. As prumadas de pilares são iguais e constituídas por perfis 10 WF 60 nos cinco andares inferiores, 10 WF 45 nos cinco seguintes e 10 WF 29 nos cinco superiores. As vigas são todas em perfil 10 WF 29.

O edifício é apresentado em planta na Fig. IV-5, onde constam a numeração dos nós e dos painéis, o posicionamento dos perfis e os sistemas de referência.

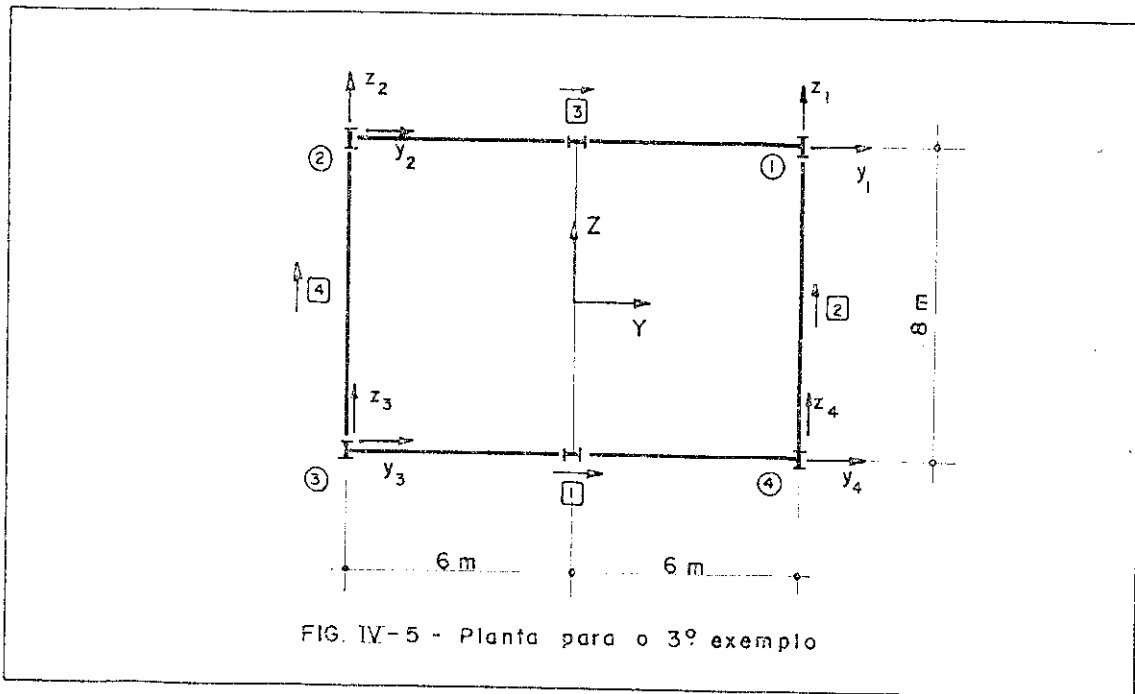


FIG. IV-5 - Planta para o 3º exemplo

Foram consideradas cargas permanentes de  $0,5 \text{ t/m}^2$  de laje em todos os andares, exceto no superior, com  $0,25 \text{ t/m}^2$ , e peso de vedação nas faces externas igual a  $0,10 \text{ t/m}^2$ .

As cargas horizontais de vento foram consideradas atuando na face maior do edifício, estando de acordo com as normas, e foram substituídas por cargas diretamente aplicadas às lajes.

As cargas vivas foram consideradas como uniformemente distribuídas igualmente em todas as lajes exceto na superior. Para carga viva com parâmetro unitário foi adotada a correspondente a  $0,5 \text{ t/m}^2$  na laje superior e  $1 \text{ t/m}^2$  nas demais.

Os diversos painéis e prumadas de pilares individuais estão esquematizados na Fig. IV-6, juntamente com as

cargas nodais resultantes das cargas permanentes (valores à esquerda dos nós) e das cargas vivas para parâmetro unitário (valores à direita dos nós).

As resultantes das cargas de vento atuando sobre as lajes na direção e sentido de Z constam da Fig. IV-6.d.

Resolvendo a estrutura de acordo com as hipóteses introduzidas no Capítulo II, foi obtido um parâmetro crítico

$$W_{cr} = 1,031$$

O mesmo exemplo foi resolvido considerando a estrutura como constituída por quatro painéis planos, correspondentes às faces do edifício, completamente independentes, isto é, sem compatibilização dos deslocamentos nas suas intersecções e sem consideração da rigidez à torção dos pilares de intersecção. O valor crítico encontrado para o parâmetro W, que seria aquele obtido com as técnicas de FIGUEIREDO<sup>(10)</sup> ou NAIR<sup>(1)</sup> é

$$W_{cr} = 1,906$$

Convém ressaltar a grande diferença dos resultados obtidos, mais ainda pelo fato de a técnica simplificada utilizada pelos referidos autores conduzir a resultados contra a segurança. Mesmo em edifícios com pequeno número de andares ocorre uma diferença considerável, ainda que menor que a observada neste exemplo.

Na Fig. IV-7 está lançada em gráfico a relação entre o determinante da matriz de rigidez da estrutura carregada e o da descarregada, durante o processo de carregamento com as cargas vivas.



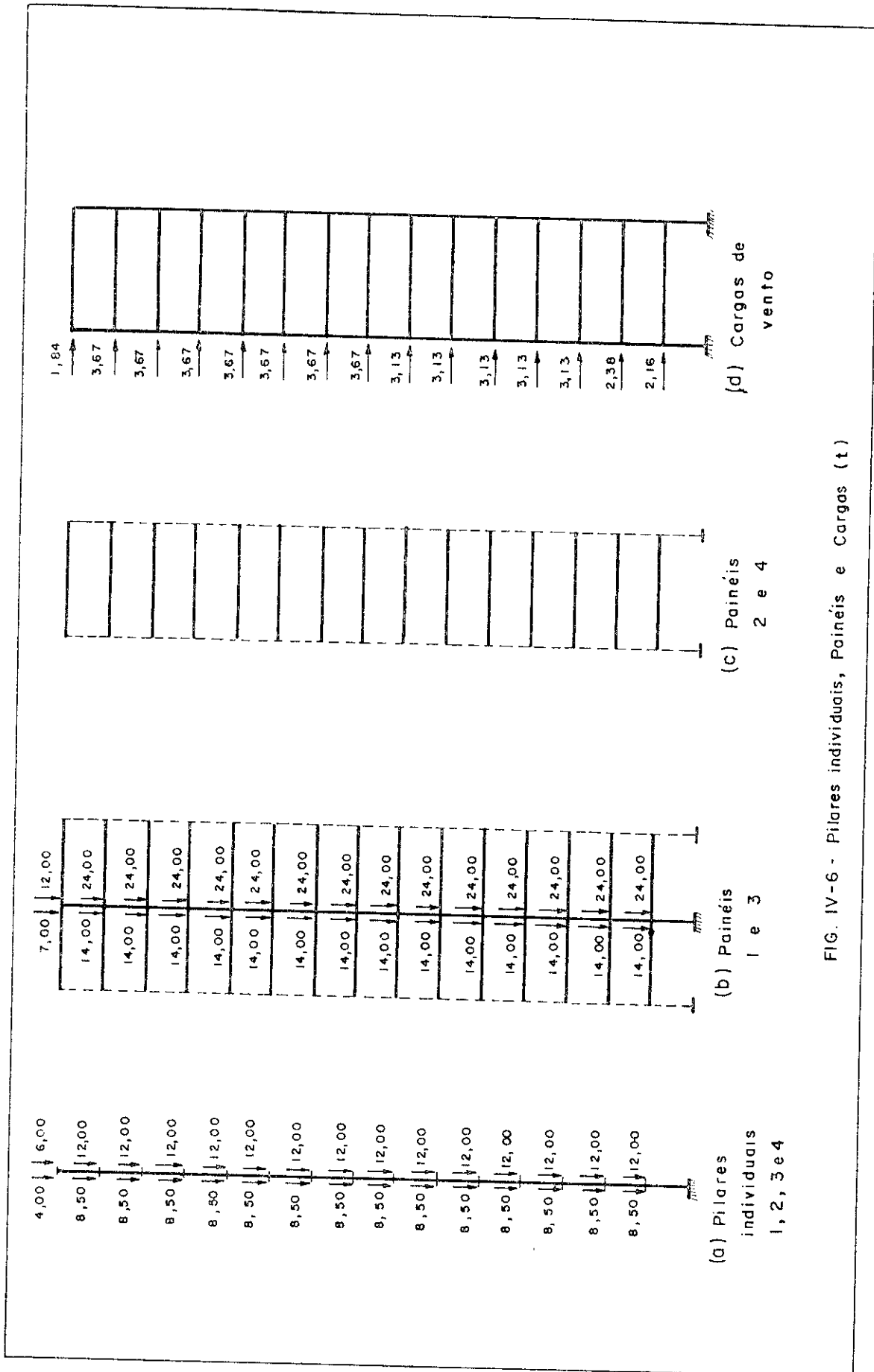
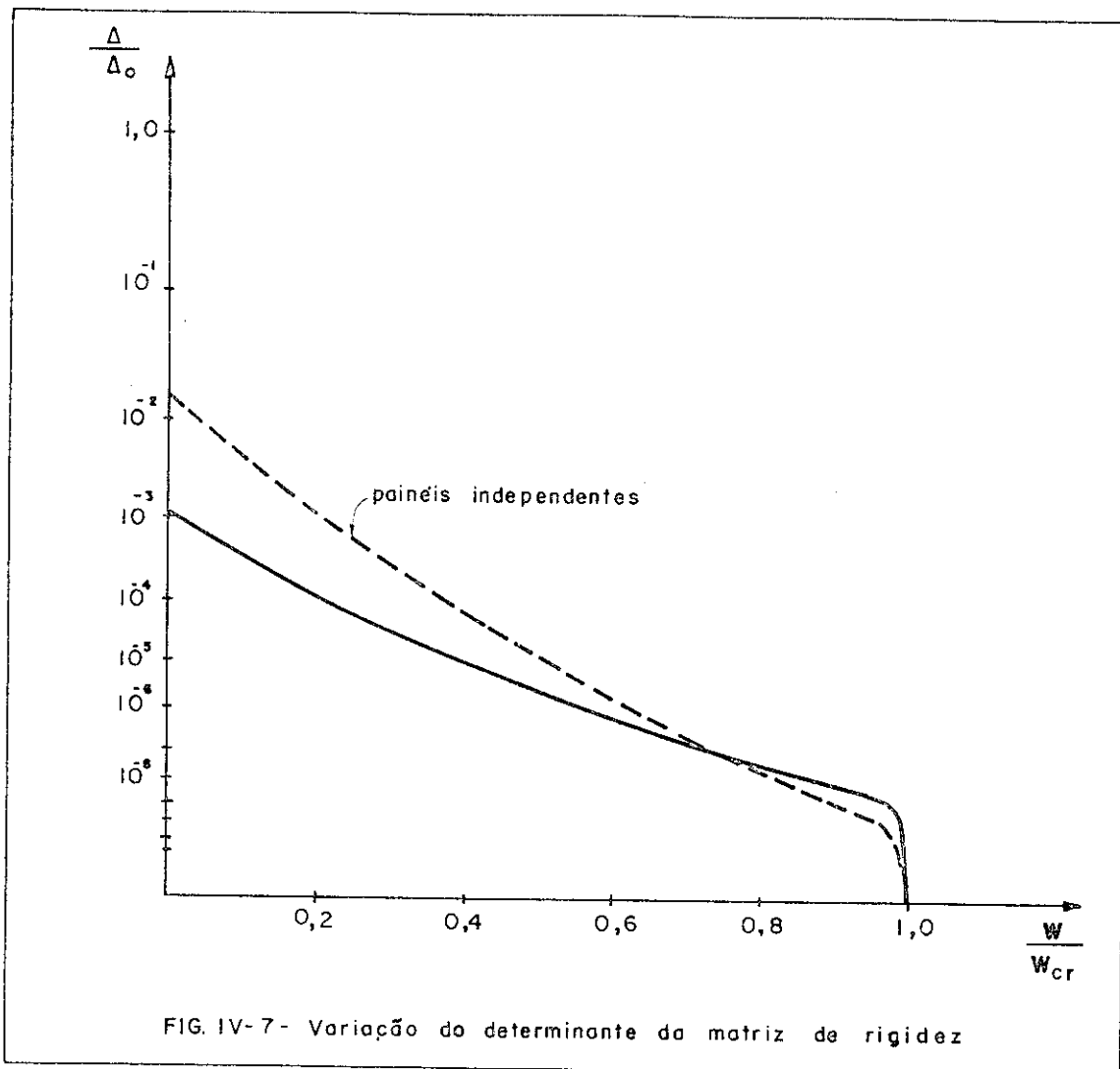


FIG. IV-6 - Pilares individuais, Painéis e Cargas ( t )



#### 49 EXEMPLO

Este exemplo corresponde à análise de um edifício de doze andares, com distância entre lajes constante e igual a 4m. As prumadas de pilares são constituídas por perfis 10 WF 60 nos quatro andares inferiores, 10 WF 45 nos quatro seguintes e 10 WF 29 nos quatro superiores. Os pilares de canto foram construídos utilizando os mesmos perfis adotados para os demais pilares dos níveis correspondentes, cortando a alma de forma a resultar um perfil T com 8" de

altura e soldando dois desses perfis orthogonalmente pelas extremidades cortadas.

O edifício é representado pela sua planta típica na Fig. IV-8, onde constam a numeração dos nós e dos painéis, o posicionamento dos perfis e os sistemas de referência.

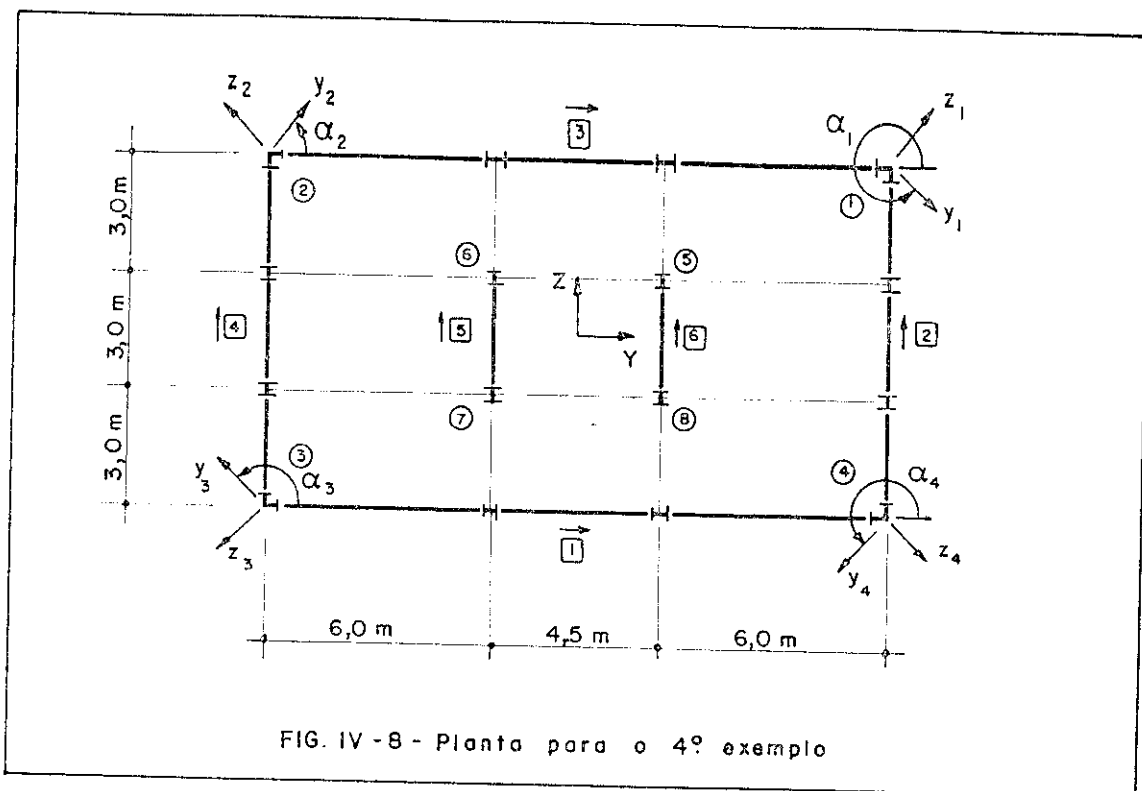


FIG. IV - 8 - Planta para o 4º exemplo

Foram consideradas cargas permanentes correspondentes às lajes de  $0,25 \text{ t/m}^2$  na superior e  $0,50 \text{ t/m}^2$  nas demais. Os elementos de vedação foram computados com o peso de  $0,10 \text{ t/m}^2$ . Foram também considerados os pesos próprios dos pilares e das vigas principais.

As cargas de vento, de acordo com as normas, foram supostas aplicadas na face maior do edifício e substituídas pelas cargas equivalentes atuando nos níveis das lajes.

Para as cargas vivas com parâmetro W unitário, foram adotadas cargas uniformemente distribuídas sobre as lajes, de  $0,5 \text{ t/m}^2$  na superior e  $1,0 \text{ t/m}^2$  nas demais.

Nas Figs. IV-9 e IV-10 estão esquematizados os elementos, painéis e pilares individuais, da estrutura. Sobre esses mesmos elementos estão representados os carregamentos nodais equivalentes ao carregamento permanente (valores anotados à esquerda dos nós) e às cargas vivas com parâmetro unitário (valores anotados à direita dos nós).

A Fig. IV-10.c contém os resultantes das cargas de vento sobre cada laje do edifício, com a direção e sentido do eixo Z.

Aplicado o processo de análise apresentado, foi encontrado o valor do parâmetro crítico

$$W_{cr} = 6,72$$

Apesar de os perfis utilizados neste exemplo serem semelhantes aos utilizados no exemplo anterior, obteve-se um parâmetro crítico muito maior, devido à maior rigidez dos painéis laterais, com maior número de pilares, e também à introdução de pilares de canto bastante rígidos em ambas as direções.

Na Fig. IV-11 está lançada em gráfico a variação do determinante da matriz de rigidez da estrutura durante o processo de carregamento, dividido pelo determinante da mesma matriz correspondente à estrutura descarregada.

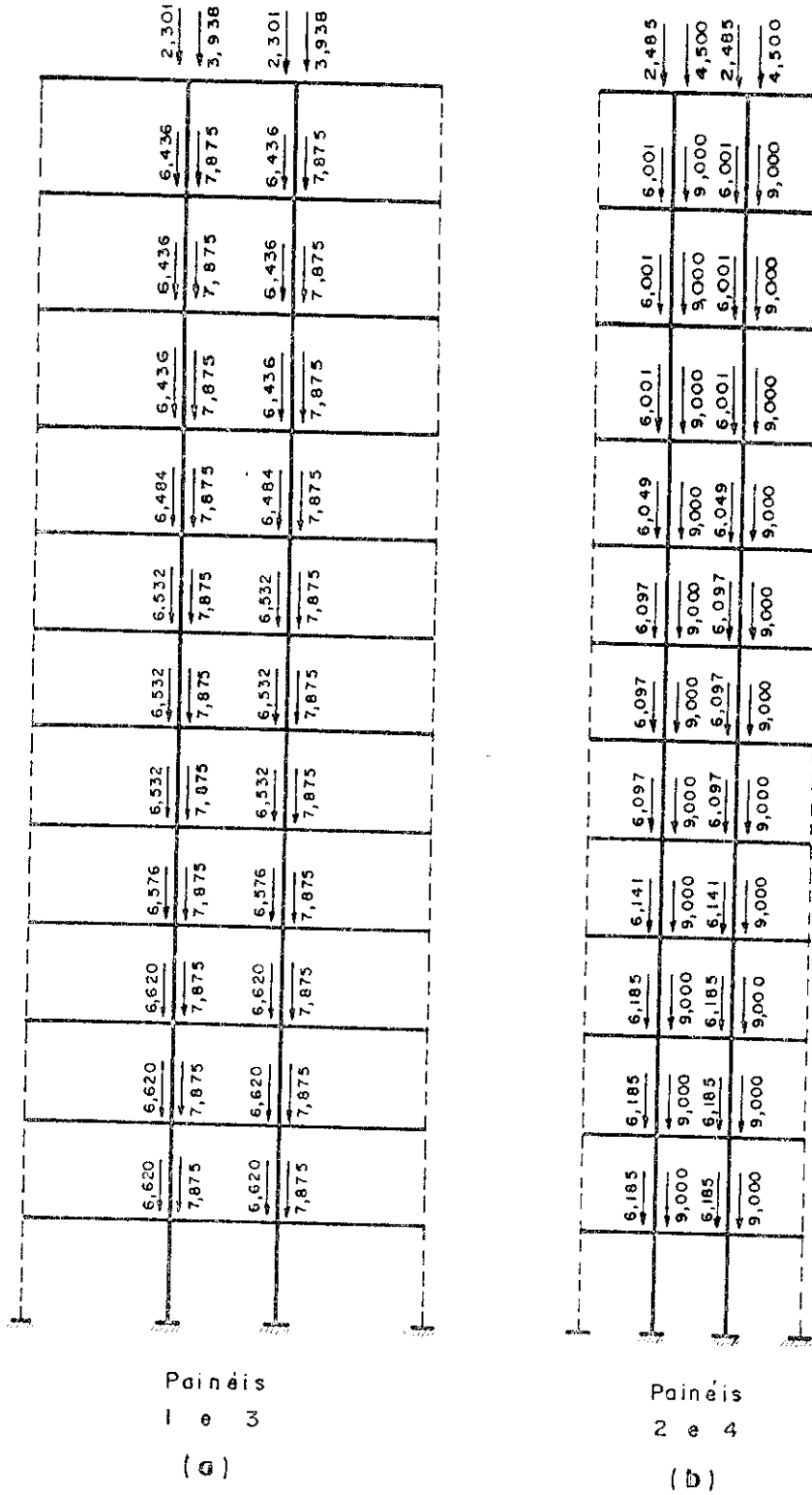


FIG. IV-9- Painéis e Cargas (t)

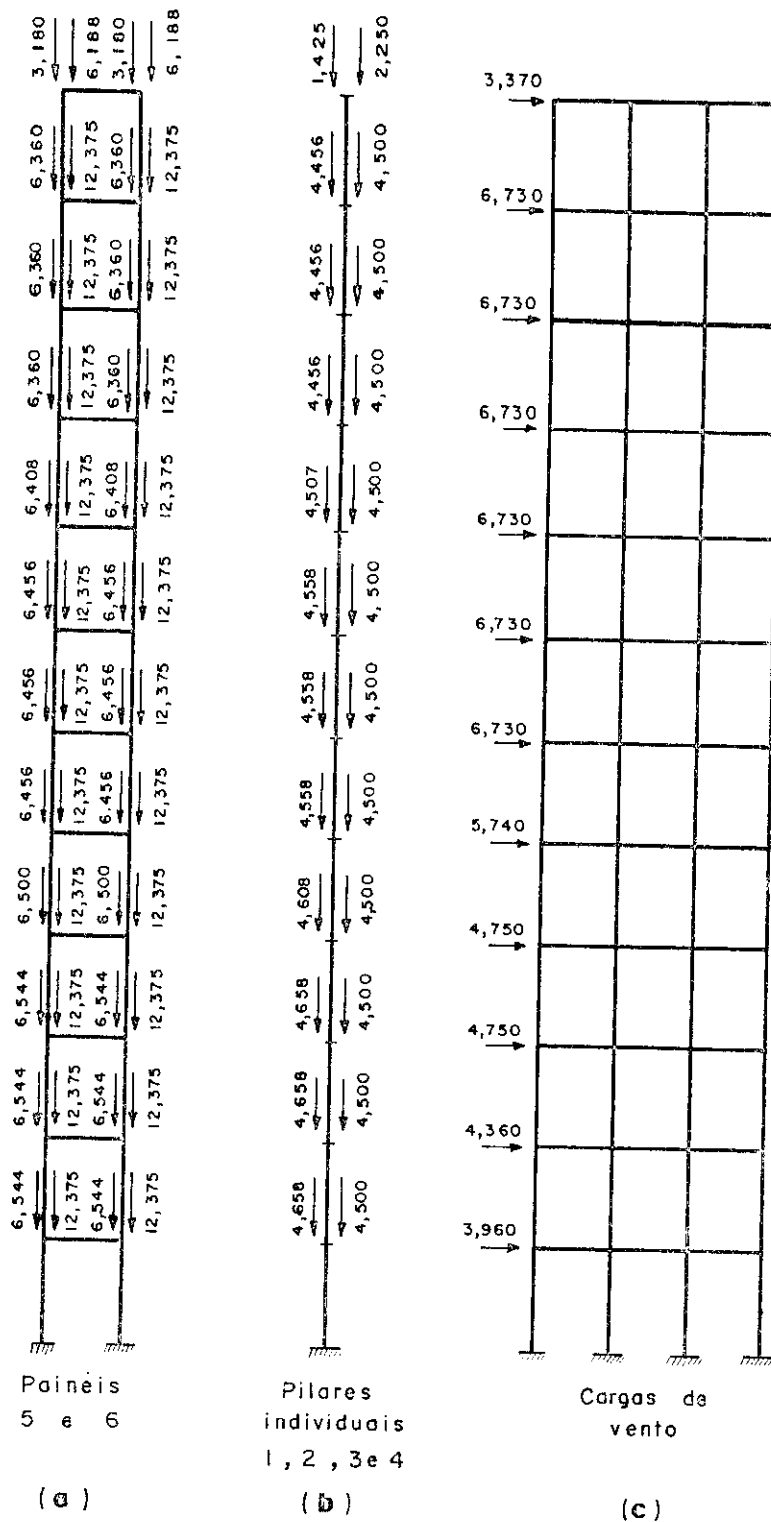
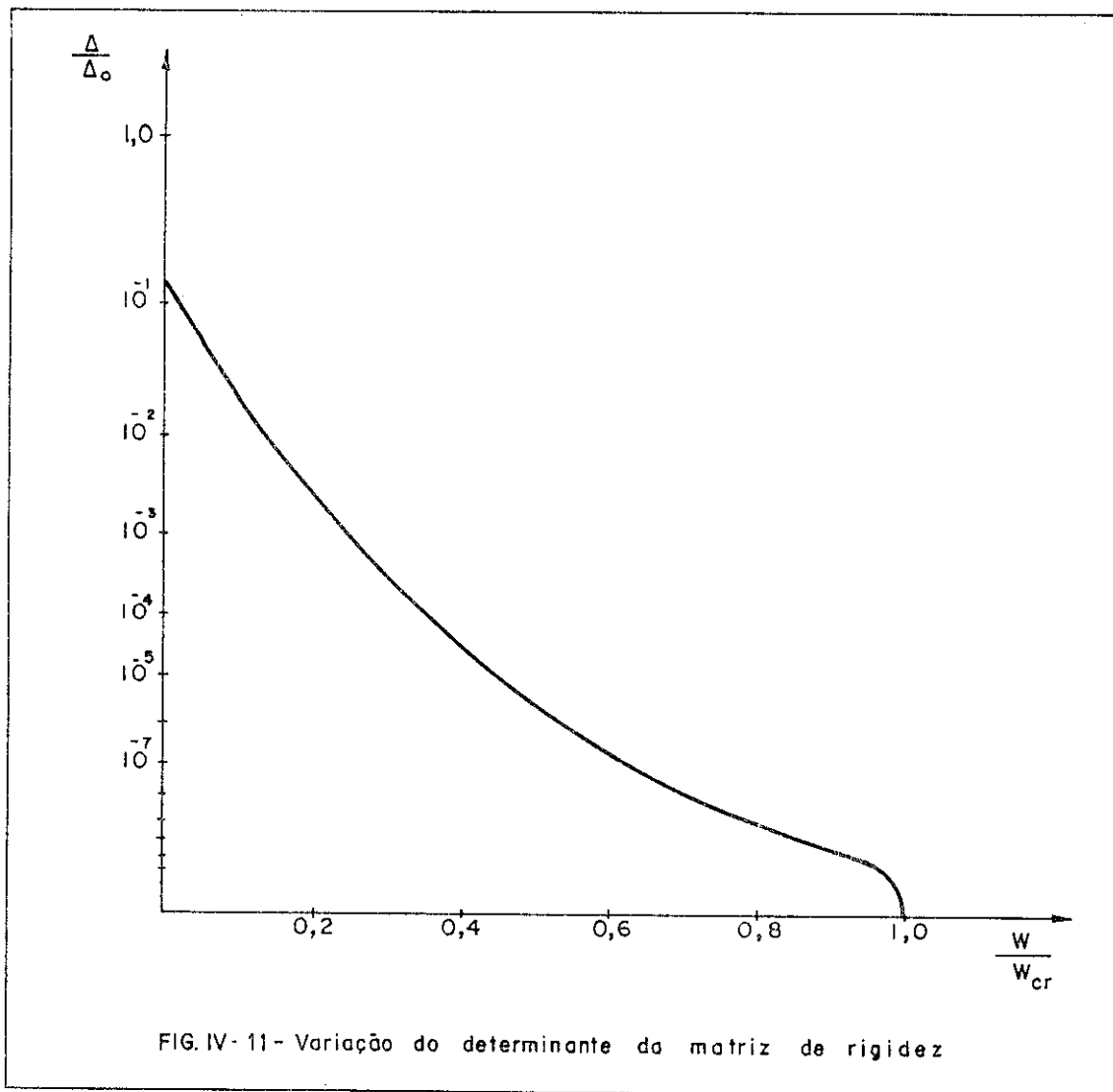


FIG. IV - 10 - Pilares individuais, painéis e cargas ( t )



5º EXEMPLO

O edifício é representado pela sua planta típica na Fig. IV-12, onde constam a numeração dos nós e dos painéis, e os sistemas de referência. Esse edifício é o mesmo considerado no 4º exemplo, com as mesmas cargas, com uma única diferença correspondente à supressão do painel 6. Com isto, considerando o vigeamento secundário esquematizado na mesma Fig. IV-12, haverá uma redistribuição das cargas permanentes e vivas pelos diversos elementos da estrutura.

Nas Fig. IV-13 e Fig. IV-14.a e b, estão esquema-

tizados os diversos elementos, painéis e pilares individuais, da estrutura. Sobre esses elementos estão representados os carregamentos nodais equivalentes ao carregamento permanente (valores anotados à esquerda dos nós) e às cargas vivas com parâmetro unitário (valores anotados à direita dos nós).

Na Fig. IV-14.c estão representadas as resultantes das cargas de vento sobre cada laje do edifício, com a direção e sentido do eixo Z.

Aplicado o processo de análise desenvolvido, foi encontrado o valor do parâmetro crítico

$$W_{cr} = 6,41$$

A retirada, em relação ao exemplo anterior, de um painel central, para criar uma estrutura assimétrica, pouco alterou o resultado obtido para as cargas críticas, já que as mesmas devem estar, de certa forma, associadas principalmente ao comportamento dos painéis das faces do edifício.

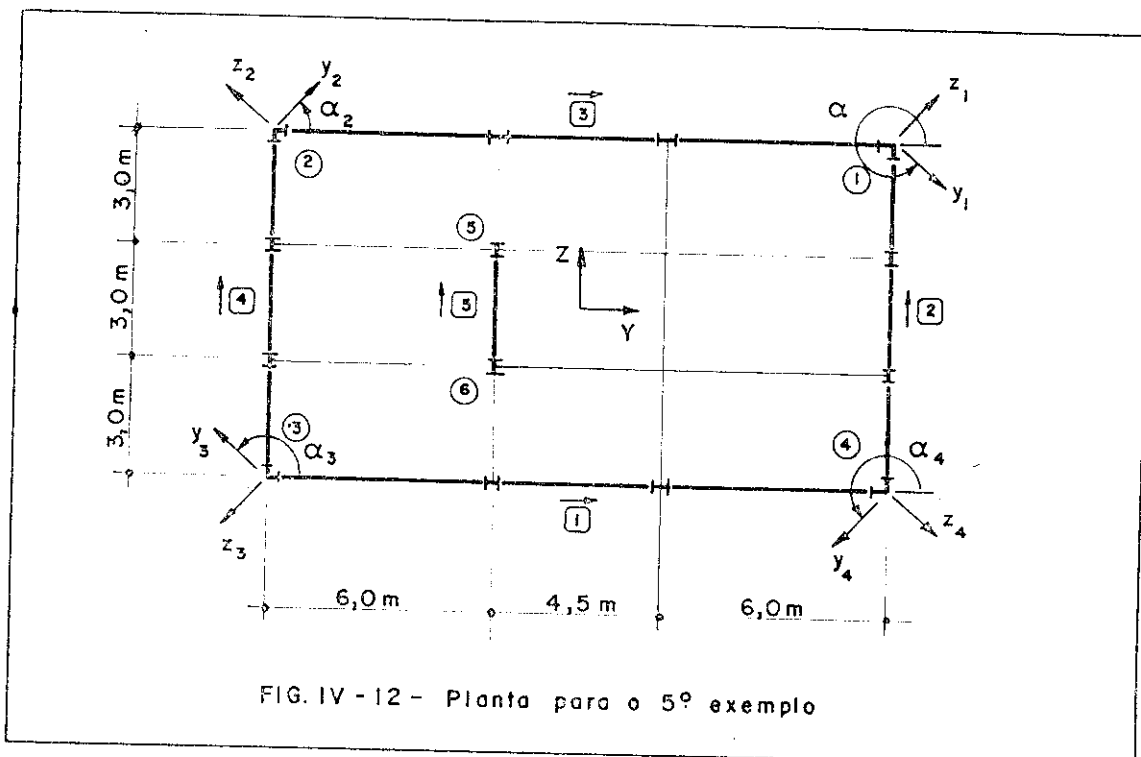


FIG. IV - 12 - Planta para o 5º exemplo



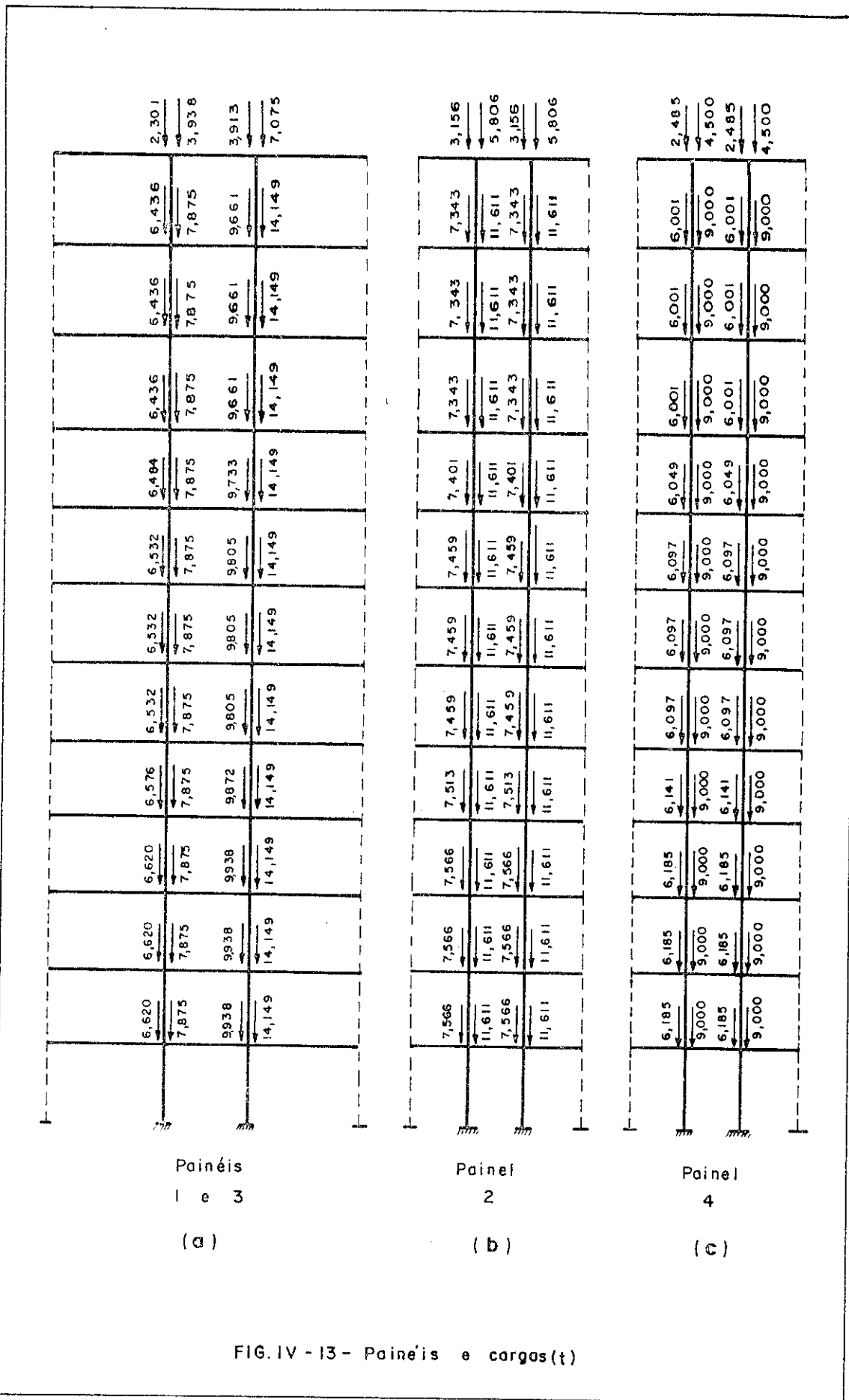


FIG. IV - 13 - Painéis e cargas(t)

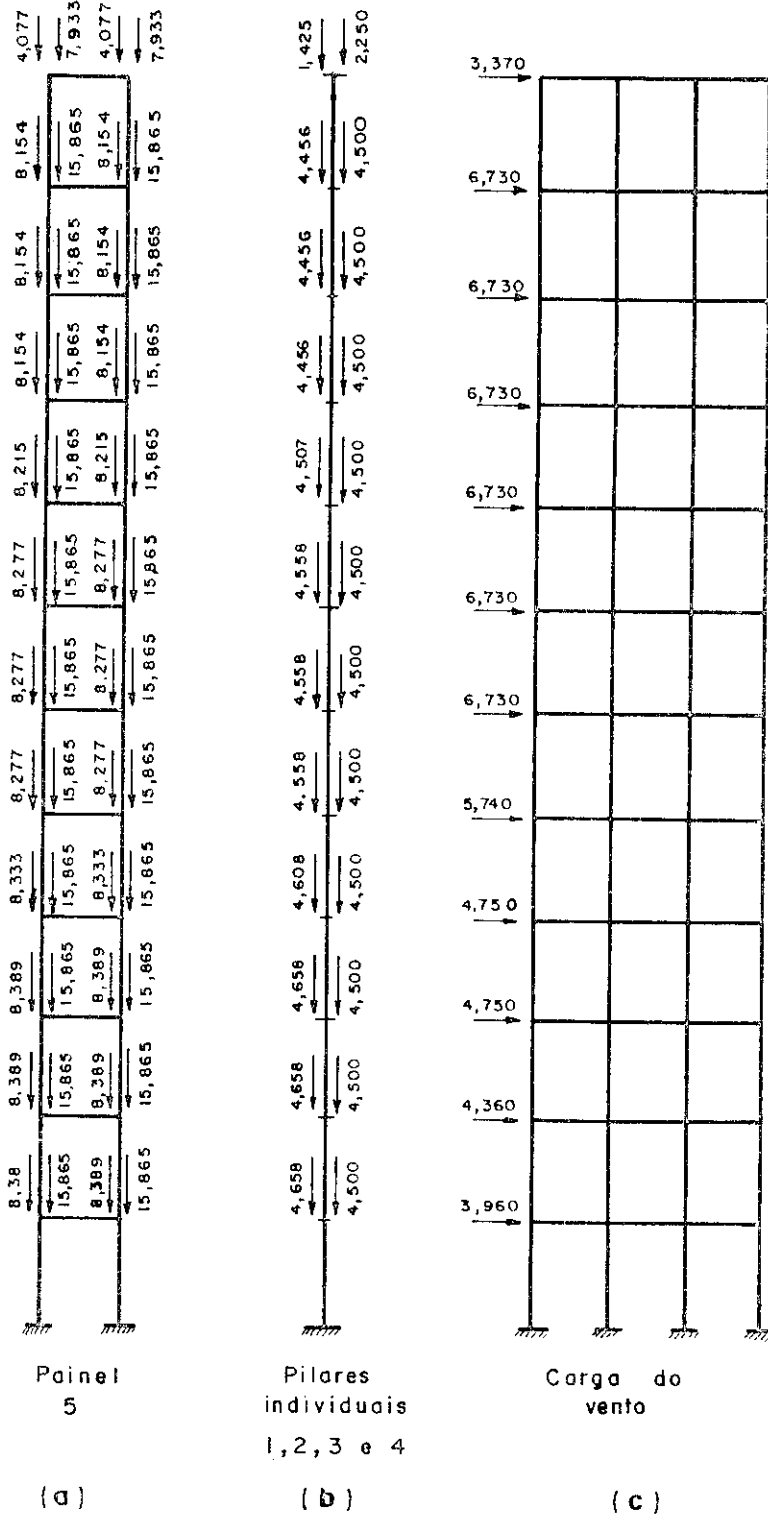


FIG. IV - 14 - Pilares individuais, paineis e cargas (t)

## CONCLUSÕES

Convém ressaltar neste trabalho, em termos de contribuição adicional, quatro pontos:

- O primeiro deles a solução e discussão do sistema de equações diferenciais para barras no espaço tridimensional para algo além das soluções usuais na bibliografia, que partem de seções muito particulares, com dupla simetria e consequentemente com centros de torção coincidentes com os de gravidade. Chegou-se a analisar barras cujas seções têm um único eixo de simetria e também, para o caso de  $I_{\omega} = 0$ , barras sem qualquer eixo de simetria. Conseguiu-se organizar as soluções obtidas em termos de funções de instabilidade, em tudo semelhantes às obtidas para o caso de análise plana, chegando-se a expressões bastante sintéticas e com grande semelhança formal entre os diversos efeitos que caracterizam o comportamento tridimensional, isolando bem os possíveis comportamentos planos e as interferências que se teriam no caso espacial. O caminho para a solução do caso geral, de barras com  $I_{\omega} \neq 0$  e sem eixos de simetria, está aberto, tudo levando a crer que dentro da sistemática utilizada se chegue a uma solução análoga. Esta solução foi omitida neste trabalho devido ao menor interesse que teriam os perfis correspondentes em termos de utilização em estruturas usuais de edifícios.
- O segundo ponto a ressaltar é quanto à própria constituição do edifício, em termos de análise estática; as soluções correntes na bibliografia tratam os diversos painéis de contraventamento sem permitir que se interceptem a menos que sejam ortogonais, e os eventuais pilares de interseção deverão apresentar seções bissimétricas com suas direções principais de inércia coincidindo com as dire-

ções dos painéis. Essas soluções não incluem condições de compatibilidade de deformações de flexão nas intersecções. O presente trabalho envolve o tratamento dos tipos usuais de intersecção entre painéis, contendo ou não pilares nesta intersecção e sem condicionar as direções principais de inércia da seção transversal do pilar aos planos dos painéis. Considera também a deformabilidade axial dos pilares e a compatibilidade de deslocamentos verticais nas intersecções entre painéis.

- O terceiro ponto a ressaltar seria em função da utilização conjunta das soluções obtidas na análise de estruturas tridimensionais um pouco mais gerais em termos de organização de painéis levando em conta a rigidez à torção dos pilares e a influência de solicitações combinadas atuando sobre os mesmos. Em um dos exemplos de estruturas analisado, o 3º do Capítulo IV, resolve-se um edifício com painéis se interceptando ortogonalmente e considerando a análise "correta" dos pilares de intersecção e também, idealizando as intersecções conforme técnicas antes utilizadas por NAIR<sup>(1)</sup>, FIGUEIREDO<sup>(10)</sup> e outros. Para o edifício analisado, de 15 andares, chegou-se a um resultado para o parâmetro crítico bastante inferior ao que seria obtido pelos autores citados; a simplificação superestimou a rigidez global da estrutura levando a resultados contra a segurança, mesmo em exemplos com pequeno número de andares.
- O quarto ponto a ressaltar corresponde à possibilidade de se tratar, no processo introduzido, carregamentos mais reais, compostos de cargas fixas (permanentes e de vento) e cargas vivas proporcionais a um parâmetro para o qual se procura um valor crítico. Os carregamentos usuais na bibliografia correspondem a um único carregamento proporcional a um certo parâmetro.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - NAIR, S.R. - Overall elastic stability of multistory buildings. *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 101(12):2487 - 2503, Dec., 1975.
- 2 - BLEICH, F. - *Buckling strength of metal structures*. New York, McGraw-Hill, 1952. 508p.
- 3 - MATHESON, J.A.L. - *Hyperstatic structures*. London, Butterworths Scientific Publications, 1959. V.1.
- 4 - McMINN, S.J. - *Matrices for structural analysis*. New York, John Wiley, 1962. 210p.
- 5 - GREGORY, M.S. - *Elastic instability: analysis of buckling modes and loads of framed structures*. London, Spon, 1967. 354p.
- 6 - GREGORY, M.S. - *Framed structures: the instability problem*. s.i.
- 7 - HORNE, M.R. & MERCHANT, W. - *The stability of frames*. London, Pergamon, 1965. 179p.
- 8 - ANTUNES, H.M.C.C. - *Instabilidade elástica de estruturas lineares planas usuais*. São Carlos, EESC-USP, 1972. 99p.
- 9 - KORN, A. - Bounding of frame buckling loads. *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 96(8):1639-1655, Aug., 1970.
- 10 - FIGUEIREDO, R.G. de - *Sobre a instabilidade elástica de pórticos tridimensionais de edifícios*. São Carlos, EESC-USP, 1976. 160p.

- 11 - TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M. - *Theory of elastic stability*. 2<sup>a</sup> ed. New York, McGraw-Hill, 1961. 541p.
- 12 - MORINO, S. & Wu Lu, L. - *Analysis of space frames*. Bethlehem, Penn., Lehigh University, 1971. 231p. (Fritz Engineering Laboratory Report n<sup>o</sup> 331-13).
- 13 - RACHID, M. - *Instabilidade de barras de secção delgada*. São Carlos, EESC-USP, 1975. 119p.
- 14 - RENTON, J.D. - Stability of space frames by computer analysis. *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 88(4):81-103, Aug., 1962.
- 15 - KREIDER, D.L.; KULLER, R.G. & OSTBERG, D.R. - *Elementary differencial equations*. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1968. 492p. (Addison-Wesley series in Mathematics).
- 16 - PRZEMIENIECKI, J.S. - *Theory of matrix structural analysis*. New York, McGraw-Hill, 1968. 467p.
- 17 - RUBINSTEIN, M.F. - *Matrix computer analysis of structures*. Englewood cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1966. 402p.
- 18 - GEL'FAND, I.M. - *Lectures on linear algebra*. New York, Interscience, 1961. 185p.
- 19 - RUBINSTEIN, M.F. & ROSEN, R. - Substructure analysis by matrix decomposition. *Journal of Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 96(3):663-670, Mar., 1970.
- 20 - ADAMS, P.F. - Stability of three-dimensional building frames. *Technical Committee n<sup>o</sup> 16 - Stability*. State of Art Report n<sup>o</sup> 4. p.79-93.

- 21 - WEAVER, W. & NELSON, M.F. - Three-dimensional analysis of tier buildings. *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 92(6):385-404, Dec., 1966.
- 22 - WYNHOVEN, J.H. & ADAMS, P.F. - Analysis of three-dimensional structures. *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 98(1):233-248, Jan., 1972.
- 23 - WYNHOVEN, J.H. & ADAMS, P.F. - Behavior of structures under loads causing torsion. *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 98(7):1361-1376, Jul., 1972.
- 24 - NAIR, R.S. - Linear structural analysis of multistory building. *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, New York, 101(3):551-565, Mar., 1975.
- 25 - STAMATO, M.C. & LUCCHESI, J.A. - *Cargas do vento nas construções: Normas*. São Carlos, EESC-USP, 1966. 35p.
- 26 - STAMATO, M.C. & SMITH, B.S. - *Análise aproximada de estruturas tridimensionais de edifícios elevados*. São Carlos, EESC-USP, 1968. 23p.
- 27 - GALAMBOS, T.V. - *Structural members and frames*. Englewood cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1968. 373p. (Structural analysis and design series).
- 28 - MEEK, J.L. - *Matrix structural analysis*. New York, McGraw-Hill, 1971. 628p.
- 29 - VENANCIO FILHO, F. - *Análise matricial de estruturas: estática, estabilidade, dinâmica*. Rio de Janeiro, Almeida Neves, 1975. 256p.
- 30 - MOREIRA, D.F. - *Análise matricial das estruturas*. São Paulo, EDUSP, 1977. 390p.

- 31 - SANTANA, M.J.; RACHID, M.; MORI, D.D. - *Características geométricas para o estudo da flexão, flexo-torção e instabilidade de barras com secção delgada.* São Carlos, EESC-USP, 1978. (Relatório à FAPESP, nº 1).



## APÊNDICE

### PROGRAMA EM LINGUAGEM FORTRAN

#### 1 - ENTRADA DE DADOS

Para a solução de um determinado problema, o carregamento deve se enquadrar nas condições descritas no Capítulo II, item 2.5, e a estrutura deve ser organizada conforme o item 4 do mesmo capítulo, tomando o cuidado de numerar os nós em planta de forma a considerar inicialmente os correspondentes a prumadas de pilares individuais, incluindo as intersecções de painéis. Os diversos sistemas de referência, bem como as relações entre eles, devem ser definidos.

Os dados numéricos serão sempre introduzidos ocupando, cada um, dez colunas do cartão de dados, em formato I10, se inteiros, ou em formato F10.0, se reais.

Os dados correspondentes ao problema poderão ser organizados em uma série de conjuntos, que serão esquemtizados a seguir.

##### 1.1 - CONJUNTO (a) - NÚMEROS CARACTERÍSTICOS DO PROBLEMA

Em um cartão deverão ser indicados o número de painéis, o número de andares, o número de prumadas de pilares individuais incluindo qualquer intersecção entre painéis, e o número de nós não correspondentes a prumadas de pilares individuais.

## 1.2 - CONJUNTO (b) - ALTURA DOS ANDARES

Indicação das alturas dos diversos andares, de cima para baixo, oito valores por cartão.

## 1.3 - CONJUNTO (c) - COORDENADAS DOS NÓS E LOCAÇÃO DO SISTEMA DE REFERÊNCIA PARA OS PILARES INDIVIDUAIS

Indicação, em um cartão por nó, da sua numeração, suas coordenadas segundo Y e Z, e o ângulo  $\alpha_1$  se o nó corresponder a uma prumada de pilares individuais.

## 1.4 - CONJUNTO (d) - DADOS REFERENTES AOS PAINÉIS

Para cada um dos painéis indicar os seguintes subconjuntos

Conjunto ( $d_1$ ) - Números característicos do painel

Em um cartão deverão ser indicados o número do painel, o tipo, o nó inicial, o nó final e o número de tramos.

Conjunto ( $d_2$ ) - Semelhança com outro painel já introduzido.

Em um cartão indicar dois valores. O primeiro é o número de outro painel já introduzido e com as mesmas características geométricas e elásticas. O segundo, o número de um painel de mesmo tipo e número de tramos, com os mesmos carregamentos.

Se não existir um desses números, ou ambos, deixar o espaço correspondente em branco.

Conjunto ( $d_3$ ) - Características elásticas do material

Em um cartão, indicar o módulo de elasticidade constante para o painel.

Conjunto ( $d_4$ ) - Largura dos tramos

Indicar em sequência a partir do início do painel as larguras dos tramos do painel, oito valores por cartão.

Conjunto ( $d_5$ ) - Áreas das seções transversais dos pilares

Para cada prumada de pilares, indicar as áreas das seções transversais em cada nível, de cima para baixo, fornecendo oito valores por cartão e nas seguintes condições, dependendo do tipo de painel.

Se o painel é tipo 1, indicar da segunda a penúltima prumada.

Se o painel é tipo 2, indicar da primeira a penúltima prumada.

Se o painel é tipo 3, indicar da primeira a última prumada.

Conjunto ( $d_6$ ) - Momentos de inércia dos pilares

Para cada prumada de pilares, indicar os momentos de inércia em cada nível, de cima para baixo, fornecendo oito valores por cartão e nas mesmas condições do item anterior, dependendo do tipo de painel.

Conjunto ( $d_7$ ) - Momentos de inércia das vigas

Indicar os momentos de inércia dos tramos de cada viga, oito valores por cartão. Iniciar pela viga do nível superior.

Conjunto ( $d_8$ ) - Números característicos dos carregamentos sobre os painéis

Indicar, em um cartão, o número de nós carregados com cargas permanentes e vivas, momentos ou cargas verticais, e o número de andares carregados horizontalmente.

Conjunto ( $d_9$ ) - Cargas nos nós

Para cada nó carregado indicar em um cartão, o número da prumada de pilares, o número do andar, o momento e a carga vertical permanentes aplicados e o momento e a carga vertical, correspondentes às cargas vivas com parâmetro unitário, aplicados.

Conjunto ( $d_{10}$ ) - Cargas horizontais no nível dos andares

Para cada andar carregado horizontalmente indicar, em um cartão, o número do andar e a carga horizontal.

#### 1.5 - CONJUNTO (e) - DADOS REFERENTES À PRUMADA DE PILARES INDIVIDUAIS

Se o número de prumadas de pilares individuais é nulo, passar diretamente para o conjunto (f). Caso contrário, para cada uma dessas prumadas indicar os seguintes sub-conjuntos.

Conjunto ( $e_1$ ) - Semelhança com outra prumada já introduzida e existência do pilar

Em um cartão indicar dois valores. O primeiro é o número de outra prumada já introduzida e com as mesmas características geométricas e elásticas, ou zero se não existir esse número. O segundo, um número que é igual a zero, se não existir pilar nessa intersecção, ou um, caso contrário.

Conjunto ( $e_2$ ) - Características elásticas das prumadas de pilares, para cada prumada em sequência

Indicar, de cima para baixo, com oito valores por cartão, cada uma das seguintes características:  $A_x$ ,  $J$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_w$ ,  $r_o$ ,  $y_o$ ,  $z_o$ .

1.6 - CONJUNTO (f) - NÚMEROS CARACTERÍSTICOS DOS CARREGAMENTOS ATUANDO NAS LAJES E NAS INTERSECÇÕES DELAS COM PRUMADAS DE PILARES INDIVIDUAIS

Indicar o número de nós carregados e o número de lajes carregadas.

1.7 - CONJUNTO (g) - CARGAS NOS NÓS

Para cada nó carregado indicar em um cartão, o número da prumada, o número do andar, as cargas permanentes  $M_{yi}$ ,  $M_{zi}$  e  $R_{xi}$  e as cargas vivas  $M_{yi}$ ,  $M_{zi}$  e  $R_{xi}$  para parâmetro unitário.

1.8 - CONJUNTO (h) - CARGAS NA LAJE

Para cada laje carregada indicar, em um cartão, o número da laje e as cargas de vento  $R_Y$ ,  $R_Z$  e  $M_X$ .

1.9 - CONJUNTO (i) - VALORES INICIAIS PARA O PARÂMETRO  $W$  E PARA O ACRÉSCIMO  $\Delta W$

Indicar, em um cartão,  $W$  e  $\Delta W$ .

1.10 - CONJUNTO (j) - DEFINIÇÃO DA PRECISÃO NO  
CÁLCULO DE  $W_{CR}$

Indicar, em um cartão, o número de divisões que de  
verão ser feitas no acréscimo  $\Delta W$ .

2 - LISTAGEM DO PROGRAMA

(Ver páginas seguintes)

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 001

```
C   CARREGAMENTO CRITICO DE INSTABILIDADE GERAL PARA ESTRUTURAS TRIDI
C   MENSIONAIS DE EDIFICIOS ALTOS
C
FILE 1=PAINEL,UNIT=DISK,RECORD=491 ,AREA=10
FILE 2=CARTAO,UNIT=READER
FILE 3=FORCAS,UNIT=DISK,RECORD=690 ,AREA=10
FILE 4=AXIAIS,UNIT=DISK,RECORD=165 ,AREA=10
FILE 5=PAPEL,UNIT=PRINTER
FILE 6=RIGID,UNIT=DISK,RECORD=10000 ,AREA=10
FILE 7=FP,UNIT=DISK,RECORD=60 ,AREA=4
FILE 8=FIAT,UNIT=DISK,RECORD=225 ,AREA=2
REAL IZP(11,15),IZV(11,15)
REAL IXI(4,15),IYI(4,15),IZI(4,15),IWI(4,15)
INTEGER FP(10),TIPO(10)
DIMENSION VET(345),F(225),FV(225)
DIMENSION T(10),AXP(11,15)
DIMENSION H(15),YI(20),ZI(20)
DIMENSION ALFAI(20)
DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10),NB(10)
DIMENSION AXI(4,15),P(11,15)
DIMENSION DP(345)
DIMENSION RO(4,15),YO(4,15),ZO(4,15)
COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP
COMMON/ELAST/AXP,IZP,IZV,T
COMMON/STIF1/S(10000)
COMMON/STIF2/ST(30000)
COMMON/ELASI/AXI,IXI,IYI,IZI,IWI,RO,YO,ZO,EI,GI
WRITE(5,200)
200 FORMAT(1H1)
   IVEZ=1
   READ(2,1)NP,NA,NI,NE
   1 FORMAT(4I10)
   WRITE(5,201)NP,NA,NI
201 FORMAT(1X,17HNUMERO DE PAINES,53X,12,/,1X,17HNUMERO DE ANDARES,53
   *X,12,/,1X,36HNUMERO DE INTERSECCOES ENTRE PAINES,34X,12)
   READ(2,5)(H(I),I=1,NA)
   5 FORMAT(8F10.0)
   WRITE(5,204)
204 FORMAT(1X,///,1X,18HALTURA DOS ANDARES,/,1X,5HANDAR,19X,6HALTURA)
   DO 208 I=1,NA
208 WRITE(5,209)I,H(I)
209 FORMAT(1X,13,E29.4)
   WRITE(5,202)
202 FORMAT(1X,///,1X,28HCOORDENADAS DAS INTERSECCOES,/,1X,2HNO,19X,7H
   *COORD Y,19X,7HCOORD Z,16X,5HALFAI)
   NT=NI+NE
   DO 101 I=1,NT
   READ(2,3)K,YI(K),ZI(K),ALFAI(K)
101 WRITE(5,203)K,YI(K),ZI(K),ALFAI(K)
203 FORMAT(1X,12,2X,2E26.4,E21.3)
   3 FORMAT(110,3F10.0)
   DO 80 K=1,NP
   READ(2,6)IPAIN,TIPO(IPAIN),IP(IPAIN),FP(IPAIN),NB(IPAIN)
   6 FORMAT(5I10)
   IA=IP(IPAIN)
   IB=FP(IPAIN)
   AUX1=YI(IA)
   AUX2=YI(IB)
   AUX3=ZI(IA)
   AUX4=ZI(IB)
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 002

```
IAU=NB(IPAIN)+1
ITIPO=TIPO(IPAIN)
GO TO(10,20,30),ITIPO
10 CALL PAIN1(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,IAU)
GO TO 80
20 CALL PAIN2(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,IAU)
GO TO 80
30 CALL PAIN3(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,IAU)
80 CONTINUE
LB=3*NI*NA+3*NA
WRITE(5,200)
IF(NI)400,400,401
401 CALL INTER(NA,NI)
GO TO 420
400 DO 410 K=1,LB
FV(K)=0.
410 F(K)=0.
READ(2,6)NAC
IF(NAC)428,428,421
421 DO 422 K=1,NAC
READ(2,423)JA,A1,A2,A3
ICA=3*JA
F(ICA-2)=A1
F(ICA-1)=A2
F(ICA)=A3
423 FORMAT(110,3F10.0)
422 CONTINUE
428 WRITE(8'1')(F(K),K=1,LB)
WRITE(8'2')(FV(K),K=1,LB)
WRITE(5,15)
15 FORMAT(1X,51HCARGAS PERMANENTES E DE VENTO NO SISTEMA ESTRUTURAL)
WRITE(5,8)(F(K),K=1,LB)
WRITE(5,16)
16 FORMAT(1X,34HCARGAS VIVAS NO SISTEMA ESTRUTURAL)
WRITE(5,8)(FV(K),K=1,LB)
420 ID=0
READ(2,5)DELTA,DW
READ(2,6)NDIV
ICTD=0
394 IF(ID)2001,2000,2001
2001 ICTD=ICTD+1
2000 DELTA=DELTA+DW
IF(ICTD-2)2003,377,2003
2003 CONTINUE
GO TO 888
999 IVEZ=2
WCRIT=DELTA
DO 777 III=1,6
DELTA=(III-1)*WCRIT/5
WRITE(5,9)DELTA
888 CONTINUE
NIT=0
375 NUM=0
WRITE(5,8)DELTA,DW
NIT=NIT+1
READ(8'1')(F(K),K=1,LB)
READ(8'2')(FV(K),K=1,LB)
IF(NI)490,491,490
490 LBAUX=LB-3*NA
DO 395 K=1,LBAUX
```



\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 003

```
395 F(K)=F(K)+FV(K)*DELTA
    DO 900 I=1,L
491 L=(LB*LB+LB)/2
900 ST(I)=0.
    IH=0
    IF(NI)402,402,403
403 CALL MON5(NA,NI,H,YI,ZI,ALFAI,IH)
    IF(IH)377,402,377
402 CONTINUE
    DO 700 I=1,NP
    IPAIN=I
    IAU=NB(IPAIN)+1
    CALL MRP(H,IAU,IH)
    IF(IH)377,780,377
780 NAUX=2*IAU*NA+NA
    L=(NAUX*NAUX+NAUX)/2
    IF(TIPO(IPAIN)-2)601,602,603
601 IAU=2*NA
    NT=NAUX-3*NA
    IF(IAUX-NT)328,608,328
328 CALL TRUCA(NAUX,IAUX,NT)
    L5=NAUX-5*NA
    GO TO 605
602 L5=NAUX-3*NA
    GO TO 605
603 L5=NAUX-NA
605 CALL MATDE(NAUX,L5,VET,S)
608 WRITE(6,IPAIN)(S(K),K=1,L)
    CALL MOH4(NAUX,NI,YI,ZI)
    IF(TIPO(IPAIN)-2)606,607,612
606 CALL MON1(NAUX,NI,ALFAI)
607 CALL MON2(NAUX,NI,ALFAI)
    CALL MON3(NAUX,NI,YI,ZI,ALFAI)
612 CONTINUE
700 CONTINUE
    8 FORMAT(1X,8E14.5)
    L=(LB*LB+LB)/2
    DO 378 I=1,NP
    IPAIN=I
    IAU=NB(IPAIN)+1
378 CALL CONTFP(NI,IAU,YI,ZI,ALFAI,F,DELTA)
    LB1=LB-1
    CALL MATDE(LB,LB1,F,ST)
    CALL DETER(LB,ST)
    DO 380 K=1,LB
    L=K*(K-1)/2+K
    IF(ST(L))377,377,380
380 CONTINUE
    CALL BACK(LB,F,ST)
    IF(IVEZ-2)1001,1000,1001
1000 WRITE(5,379)
379 FORMAT(1X,35HDESLOCAMENTOS NO SISTEMA ESTRUTURAL)
    WRITE(5,8)(F(K),K=1,LB)
1001 CONTINUE
    IF(NI)404,404,405
405 CALL ESF1(NI,NA,YI,ZI,ALFAI,H,F,NUM,NIT)
404 CONTINUE
    DO 450 I=1,NP
    IPAIN=I
    IAU=NB(IPAIN)+1
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 004

```
CALL DESLPA(IAU,YI,ZI,ALFAI,F,DP,NI,DELTA,IVEZ)
CALL ESF2(IAU,H,DP,NUM,NIT)
450 CONTINUE
  IF(IVEZ-2)666,444,666
444 IF(NUM)375,777,375
777 CONTINUE
  GO TO 555
666 CONTINUE
  IF(NUM)375,440,375
377 DELTA=DELTA-DW
  CALL ZERO(NI,NA,NP,NB)
  CW=DW/2
  ICTD=C
  ID=ID+1
440 IF(ID-NDIV)750,750,751
750 GO TO 394
751 WRITE(5,432)DELTA
432 FORMAT(1X,24HO PARAMETRO CRITICO VALE,E14.5)
  GO TO 555
  IF(DELTA)555,555,222
222 GO TO 999
555 CONTINUE
  STOP
  END
```

C

```
  SUBROUTINE CONTFP(NI,NPP,YI,ZI,ALFAI,F,DELTA)
```

C

```
  CALCULA AS CARGAS NAS COORDENADAS EXTERNAS DA ESTRUTURA,EQUIVALEN  
  TES AS CARGAS NAS COORDENADAS INTERNAS DOS PAINES
```

C

```
  INTEGER TIPO(10),FP(10)  
  DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10),S(60000),F(225),FPA(345),ALFA  
  *I(20)
```

C

```
  DIMENSION YI(20),ZI(20),FVPA(345)  
  COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP  
  NAUX=2*NA*NPP+NA
```

C

```
  L=(NAUX*NAUX+NAUX)/2  
  READ(6*IPAIN)(S(K),K=1,L)  
  READ(3*IPAIN)(FPA(K),K=1,NAUX),(FVPA(K),K=1,NAUX)  
  NAUX1=NAUX-NA
```

```
  DO 490 K=1,NAUX1  
490 FPA(K)=FPA(K)+FVPA(K)*DELTA  
  IF(TIPO(IPAIN)-2)10,20,30
```

```
 10 L5=NAUX-5*NA  
  IF(L5)40,50,40
```

```
 40 JAU=NAUX-3*NA-1  
  IAU=2*NA
```

```
  DO 6 J=1,IAU  
  TEMP=FPA(J)
```

```
  DO 7 J=1,IAU  
70 FPA(J)=FPA(J+1)  
  FPA(JAU+1)=TEMP
```

```
 60 CONTINUE  
  GO TO 80
```

```
 20 L5=NAUX-3*NA  
  GO TO 80
```

```
 30 L5=NAUX-NA
```

```
 80 CALL FOWARD(L5,FPA,S)
```

```
 50 CONTINUE  
  JAU=L5+1
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 005

```
DO 100 I=JAUX,NAUX
L=I*(I-1)/2
TEMP=FPA(I)
DO 200 K=1,L5
L=L+1
200 TEMP=TEMP-S(L)*FPA(K)
FPA(I)=TEMP
100 CONTINUE
DO 505 J=1,NA
K1=2*NA*NPP+J
J4=3*NI*NA+3*J-2
J5=J4+1
J6=J5+1
L=IP(IPAIN)
AB=-Z(L)*CALFP(IPAIN)+YI(L)*SALFP(IPAIN)
F(J4)=F(J4)+FPA(K1)*CALFP(IPAIN)
F(J5)=F(J5)+FPA(K1)*SALFP(IPAIN)
F(J6)=F(J6)+FPA(K1)*AB
505 CONTINUE
IF(TIPO(IPAIN)-3)300,301,300
300 ICNT=0
L=FP(IPAIN)
M1=NAUX-3*NA
302 ALF=ALFA(L)
COF1=CALFP(IPAIN)*COS(ALF)+SALFP(IPAIN)*SIN(ALF)
SEF1=SALFP(IPAIN)*COS(ALF)-CALFP(IPAIN)*SIN(ALF)
DO 501 J=1,NA
K1=M1+2*J-1
K2=K1+1
J1=(J-1)*3*NI+3*L-2
J2=J1+1
J3=J2+1
F(J1)=F(J1)-SEF1*FPA(K1)
F(J2)=F(J2)+COF1*FPA(K1)
F(J3)=F(J3)+FPA(K2)
501 CONTINUE
IF(ICNT)301,303,301
303 IF(TIPO(IPAIN)-1)301,304,301
304 L=IP(IPAIN)
M1=NAUX-5*NA
ICNT=ICNT+1
GO TO 302
301 CONTINUE
RETURN
END
C
SUBROUTINE ZERO(NI,NA,NP,NB)
DIMENSION P(11,15),NB(10)
C
C ZERA UMA MATRIZ RETANGULAR
C
IF(NI)11,10,11
11 DO 945 I=1,NI
DO 575 K=1,NA
575 P(I,K)=0.
WRITE(7,'I')(P(I,K),K=1,NA)
945 CONTINUE
10 DO 700 I=1,NP
NPP=NB(I)+1
DO 518 K=1,NPP
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 006

```
DO 518 J=1,NA
518 P(K,J)=0.
WRITE(4'I)((P(K,J),J=1,NA),K=1,NPP)
700 CONTINUE
RETURN
END
C
SUBROUTINE FOWARD(N,F,B)
C
C SOLUCAO DE UM SISTEMA DE EQUACOES NO QUAL A MATRIZ DOS COEFICIEN
C TES E TRIANGULAR INFERIOR
C
DIMENSION F(1),B(1)
DO 1 I=1,N
TEMP=F(I)
IF(I-1)11,21,11
11 J=I-1
DO 2 K=1,J
L=I*(I-1)/2+K
2 TEMP=TEMP-B(L)*F(K)
21 F(I)=TEMP
1 CONTINUE
RETURN
END
C
SUBROUTINE BACK(N,F,B)
DIMENSION F(1),B(1)
C
C SOLUCAO DE UM SISTEMA DE EQUACOES NO QUAL A MATRIZ DOS COEFICIEN
C TES E TRIANGULAR SUPERIOR
C
J=N+1
DO 1 I=1,N
J=J-1
TEMP=F(J)
IF(J-N)11,21,11
21 F(J)=TEMP
GO TO 1
11 J1=J+1
DO 2 K=J1,N
L=K*(K-1)/2+J
2 TEMP=TEMP-B(L)*F(K)
F(J)=TEMP
1 CONTINUE
RETURN
END
C
SUBROUTINE TROCA(NAUX,IAUX,NT)
C
C REARRANJA AS COORDENADAS DE UM PAINEL SEPARANDO AS COORDENADAS EX
C TERNAS DAS INTERNAS
C
COMMON/STIF1/B(10000)
COMMON/STIF2/ST(30000)
DO 720 K8=1,IAUX
NTA=NT-1
DO 350 I=1,NTA
IP=I+1
L=IP+1
DO 300 J=L,NAUX
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 007

```
IAU=J*(J-1)/2+I
JAU=J*(J-1)/2+IP
TEMP=B(IAU)
B(IAU)=B(JAU)
B(JAU)=TEMP
300 CONTINUE
IAU=I*(I-1)/2+I
JAU=IP*(IP-1)/2+IP
TEMP=B(IAU)
B(IAU)=B(JAU)
B(JAU)=TEMP
IF(I-1)400,350,400
400 K=I-1
DO 70 J=1,K
IAU=I*(I-1)/2+J
JAU=IP*(IP-1)/2+J
TEMP=B(IAU)
B(IAU)=B(JAU)
B(JAU)=TEMP
70 CONTINUE
350 CONTINUE
720 CONTINUE
RETURN
END
```

C

SUBROUTINE MRP(H,NPP,IH)

C

MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM PAINEL

C

C

```
REAL IZP(11,15),IZV(11,15)
INTEGER TIPO(10),FP(10)
DIMENSION AXP(11,15),ND(6),RIG(21),T(10),H(15)
DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10)
DIMENSION P(11,15)
COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP
COMMON/ELAST/AXP,IZP,IZV,T
COMMON/STIF1/S(10000)
COMMON/STIF2/B(30000)
NNOS=NA*NPP
NAUX=2*NA*NPP+NA
N=NPP-1
L=(NAUX*NAUX+NAUX)/2
READ(1*IPAIN)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1,
*NPP),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N),((T(I),I=1,N)
READ(4*IPAIN)((P(K,J),J=1,NA),K=1,NPP)
DO 327 J=1,L
327 S(J)=0.
DO 70 J=1,N
AUX1=T(J)
DO 70 K=1,NA
AUX2=IZV(J,K)
NI=K+(J-1)*NA
NF=K+J*NA
ND(1)=2*NI-1
ND(2)=2*NI
ND(3)=2*NF-1
ND(4)=2*NF
CALL RIG1(E,AUX2,AUX1,RIG)
LI=ND(1)*(ND(1)-1)/2+ND(1)
S(LI)=S(LI)+RIG(1)
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 008

```
DO 8) M=2,4
L2=(M-1)*M/2
L3=L2+1
L4=M*(M+1)/2
DO 90 IPROP=L3,L4
NS=IPROP-L2
JL=ND(NS)
JC=ND(M)
JT=JC*(JC-1)/2+JL
S(JT)=S(JT)+RIG(IPROP)
90 CONTINUE
80 CONTINUE
70 CONTINUE
IF(TIPD(IPAIN)-2)60,61,62
60 IF(NPP-2)64,64,65
65 INI=2
   IFI=NPP-1
   GO TO 68
61 INI=1
   IFI=NPP-1
   GO TO 68
62 INI=1
   IFI=NPP
68 DO 2 K=1,NA
   AUX1=H(K)
   ND(3)=2*NNDS+K
   ND(6)=2*NNCS+K+1
   DO 2 J=INI,IFI
   AUX2=AXP(J,K)
   AUX3=IZP(J,K)
   NI=K+(J-1)*NA
   NF=K+(J-1)*NA+1
   ND(1)=2*NI-1
   ND(2)=2*NI
   ND(4)=2*NF-1
   ND(5)=2*NF
   AUX4=P(J,K)
   CALL RIG2(E,AUX2,AUX3,AUX1,AUX4,RIG,IH)
   IF(IH)551,550,551
550 L1=ND(1)*(ND(1)-1)/2+ND(1)
   S(L1)=S(L1)+RIG(1)
   IF(K-NA)20,30,20
30 LAU=3
   GO TO 40
20 LAU=6
40 DO 5 M=2,LAU
   L2=(M-1)*M/2
   L3=L2+1
   L4=M*(M+1)/2
   DO 6 IPROP=L3,L4
   NS=IPROP-L2
   JL=ND(NS)
   JC=ND(M)
   IF(JL-JC)10,10,11
10 JT=JC*(JC-1)/2+JL
   GO TO 12
11 JT=JL*(JL-1)/2+JC
12 S(JT)=S(JT)+RIG(IPROP)
6 CONTINUE
5 CONTINUE
```

2 CONTINUE  
64 CONTINUE  
551 RETURN  
END

C  
C  
C  
C  
C

SUBROUTINE INTER(NA,NI)

LE AS CARACTERISTICAS ELASTICAS E GEOMETRICAS DOS PILARES INDIVIDUAIS

REAL IXI(4,15),IYI(4,15),IZI(4,15),IWI(4,15)  
DIMENSION F(225),FV(225)  
DIMENSION AXI(4,15),P(11,15)  
DIMENSION RC(4,15),YC(4,15),ZO(4,15)  
COMMON/ELASI/AXI,IXI,IYI,IZI,IWI,RC,YO,ZO,EI,GI  
5 FORMAT(8F10.0)  
WRITE(5,943)  
943 FORMAT(1X,32HCHARACTERISTICAS DAS INTERSECCOES,/,1X,16HINTER- MOM.  
\* IN.,5X,8HMOM. IN.,5X,8HMOM. IN.,5X,6HAREA SE.,5X,6HCONST.,/,1X,14  
\*HSECCAO A TORC.,8X,3HIYI,10X,3HIZI,8X,7HTR. AXI,6X,8HEMP. IWI)  
READ(2,5)EI,GI  
DO 945 I=1,NI  
READ(2,41C)IGE,IGZ  
IF(IGE)101,100,101  
101 DO 105 K=1,NA  
AXI(I,K)=AXI(IGE,K)  
IXI(I,K)=IXI(IGE,K)  
IYI(I,K)=IYI(IGE,K)  
IZI(I,K)=IZI(IGE,K)  
IWI(I,K)=IWI(IGE,K)  
RC(I,K)=RC(IGE,K)  
YC(I,K)=YC(IGE,K)  
105 ZO(I,K)=ZO(IGE,K)  
GO TO 102  
100 IF(IGZ)110,111,110  
111 DO 112 K=1,NA  
AXI(I,K)=0.  
IXI(I,K)=0.  
IYI(I,K)=0.  
IZI(I,K)=0.  
IWI(I,K)=0.  
RC(I,K)=0.  
YC(I,K)=0.  
112 ZO(I,K)=0.  
GO TO 102  
110 READ(2,5)(AXI(I,K),K=1,NA)  
READ(2,5)(IXI(I,K),K=1,NA)  
READ(2,5)(IYI(I,K),K=1,NA)  
READ(2,5)(IZI(I,K),K=1,NA)  
READ(2,5)(IWI(I,K),K=1,NA)  
READ(2,5)(RC(I,K),K=1,NA)  
READ(2,5)(YC(I,K),K=1,NA)  
READ(2,5)(ZO(I,K),K=1,NA)  
102 DO 575 K=1,NA  
WRITE(5,942)I,K,IXI(I,K),IYI(I,K),IZI(I,K),AXI(I,K),IWI(I,K),RC(I,  
\*K),YC(I,K),ZO(I,K)  
942 FORMAT(1X,I2,1H-,I1,8E13.4)  
575 P(I,K)=0.  
WRITE(7\*I)(P(I,K),K=1,NA)  
945 CONTINUE

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 010

```
LB=3*NI*NA+3*NA
DO 400 I=1, LB
  FV(I)=0.
400 F(I)=0.
  READ(2,410)NIC,NAC
  IF(NIC)402,402,401
401 DO 403 ICCNT=1,NIC
  READ(2,411)J1,JA,A1,A2,A3,A4,A5,A6
411 FORMAT(2I1C,6F10.0)
410 FORMAT(2I10)
  IAU=3*(JA-1)*NI+3*JI
  F(IAU-2)=A1
  F(IAU-1)=A2
  F(IAU)=A3
  FV(IAU-2)=A4
  FV(IAU-1)=A5
  FV(IAU)=A6
403 CONTINUE
402 IF(NAC)405,405,406
406 DO 407 ICONT=1,NAC
  READ(2,412)JA,A1,A2,A3
  IAU=3*NI*NA+3*JA
  F(IAU-2)=A1
  F(IAU-1)=A2
  F(IAU)=A3
412 FORMAT(11C,3F10.0)
407 CONTINUE
405 CONTINUE
  WRITE(8'1')(F(I),I=1, LB)
  WRITE(8'2')(FV(I),I=1, LB)
  WRITE(5,15)
15 FORMAT(1X,51HCARGAS PERMANENTES E DE VENTO NO SISTEMA ESTRUTURAL)
  WRITE(5,8)(F(K),K=1, LB)
  WRITE(5,16)
16 FORMAT(1X,34HCARGAS VIVAS NO SISTEMA ESTRUTURAL)
  WRITE(5,8)(FV(K),K=1, LB)
  8 FORMAT(1X,8E14.5)
  RETURN
  END
C
  SUBROUTINE DETER(LB,ST)
C
C   CALCULA O DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DIAGONAL
C
  DIMENSION ST(1)
  IEXP=0
  DET=1.
  ISIG=1
  DO 110 I=1, LB
  II=1*(I-1)/2+1
  DET=DET*ST(II)
  IF(DET)101,111,102
101 DET=-DET
  ISIG=-ISIG
102 IF(DET-1.)106,103,103
103 DO 104 K=1,100
  DET=DET/10
  IF(DET-1.)105,104,104
104 CONTINUE
105 IEXP=IEXP+K
```



\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 011

```
GO TO 110
106 IF(DET-C.1)107,110,110
107 DO 108 K=1,100
    DET=DET*10
    IF(DET-C.1)108,109,109
108 CONTINUE
109 IEXP=IEXP-K
110 CONTINUE
    DET=DET*ISIG
    GO TO 112
111 IEXP=0
112 WRITE(5,113)DET,IEXP
113 FORMAT(1X,25H0 VALOR DO DETERMINANTE E,E17.7,9HELEVADO A,16)
    RETURN
    END
```

C  
C  
C  
C

```
    SUBROUTINE ESF1(NI,NA,YI,ZI,ALFAI,H,F,NUM,NIT)
    CALCULA OS ESFORÇOS DE EXTREMIDADE DE UM PILAR TRIDIMENSIONAL
    REAL IXI(4,15),IYI(4,15),IZI(4,15),IWI(4,15)
    DIMENSION P(11,15),D(12),ESF(12),RIG(78),H(15),F(225),YI(20),ZI(20
*)
    DIMENSION ALFAI(20),AXI(4,15)
    DIMENSION RO(4,15),YO(4,15),ZO(4,15),ROT(3,3)
    COMMON/ELASI/AXI,IXI,IYI,IZI,IWI,RO,YO,ZO,EI,GI
    DO 795 I=1,NI
795 READ(7*I)(P(I,J),J=1,NA)
    DO 300 I=1,NI
    AUX6=YI(I)
    AUX7=ZI(I)
    ALF=ALFAI(I)
    A1=AUX6*SIN(ALF)-AUX7*COS(ALF)
    B1=AUX6*COS(ALF)+AUX7*SIN(ALF)
    DO 938 J=1,NA
    AUX1=IXI(I,J)
    AUX2=IYI(I,J)
    AUX3=IZI(I,J)
    AUX4=AXI(I,J)
    AUX5=H(J)
    AUX11=IWI(I,J)
    AUX11=P(I,J)
    AUX12=RO(I,J)
    AUX15=YO(I,J)
    AUX16=ZO(I,J)
    J1=(J-1)*3*NI+3*I-2
    J2=J1+1
    J3=J2+1
    J4=3*NI*NA+3*J-2
    J5=J4+1
    J6=J5+1
    D(1)=F(J1)
    D(2)=F(J2)
    D(3)=F(J3)
    D(4)=F(J4)*COS(ALF)+F(J5)*SIN(ALF)+F(J6)*A1
    D(5)=F(J5)*COS(ALF)-F(J4)*SIN(ALF)+F(J6)*B1
    D(6)=F(J6)
    IF(J-NA)301,302,301
302 DO 303 M1=7,12
303 D(M1)=0.
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 012

```
GO TO 304
301 K1=3*N1*J+3*I-2
    K2=K1+1
    K3=K2+1
    K4=3*N1*NA+3*(J+1)-2
    K5=K4+1
    K6=K5+1
    D(7)=F(K1)
    D(8)=F(K2)
    D(9)=F(K3)
    D(10)=F(K4)*COS(ALF)+F(K5)*SIN(ALF)+F(K6)*A1
    D(11)=F(K5)*COS(ALF)-F(K4)*SIN(ALF)+F(K6)*B1
    D(12)=F(K6)
304 IF(AUX10-C.0000001)1000,1000,1001
1000 CALL RIG4(EI,GI,AUX4,AUX1,AUX2,AUX3,AUX5,AUX12,AUX15,AUX16,AUX11,I
    *H,RIG)
    GO TO 1002
1001 CALL RIG3(EI,GI,AUX4,AUX1,AUX2,AUX3,AUX10,AUX5,AUX12,AUX16,AUX11,I
    *H,RIG)
1002 CONTINUE
    ROT(1,1)=1.
    ROT(1,2)=0.
    ROT(1,3)=-AUX16
    ROT(2,1)=0.
    ROT(2,2)=1.
    ROT(2,3)=AUX15
    ROT(3,1)=0.
    ROT(3,2)=0.
    ROT(3,3)=1.
    CALL R00A(ROT,RIG)
    DO 310 M1=1,12
    ESF(M1)=0.
    DO 310 M2=1,12
    IF(M1-M2)400,400,401
400 L=M2*(M2-1)/2+M1
    GO TO 310
401 L=M1*(M1-1)/2+M2
310 ESF(M1)=ESF(M1)+RIG(L)*D(M2)
    IF(NIT-1)480,490,480
490 NUM=1
    GO TO 350
480 IF(ABS(P(I,J))-0.00001)350,350,470
470 IF(ABS(P(I,J)-ESF(9))-ABS(C.05*P(I,J)))350,350,360
360 NUM=1
350 P(I,J)=ESF(9)
938 CONTINUE
    WRITE(7*I)(P(I,M1),M1=1,NA)
300 CONTINUE
    RETURN
    END

C
SUBROUTINE ESF2(NPP,H,DP,NUM,NIT)
C
C
C
REAL IZP(11,15),IZV(11,15)
INTEGER TIPO(10),FP(10)
DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10),T(10),P(11,15),AXP(11,15)
DIMENSION DP(345),D(6),H(15),RIG(21),ESF(6)
COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 013

```
N=NPP-1
READ(1'IPAIN)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1,
*NPP),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N),T(I),I=1,N)
READ(4'IPAIN)((P(K,J),J=1,NA),K=1,NPP)
DO 511 J=1,NPP
DO 511 K=1,NA
NIN=K+(J-1)*NA
J1=2*NIN-1
J2=J1+1
JA=2*NPP*NA+K
D(1)=DP(J1)
D(2)=DP(J2)
D(3)=DP(JA)
IF(K-NA)530,531,530
531 D(4)=0.
D(5)=0.
D(6)=0.
GO TO 532
530 NFI=NIN+1
K1=2*NFI-1
K2=K1+1
KA=JA+1
D(4)=DP(K1)
D(5)=DP(K2)
D(6)=DP(KA)
532 AUX1=AXP(J,K)
AUX2=IZP(J,K)
AUX3=H(K)
AUX4=P(J,K)
IH=C
CALL RIG2(E,AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,RIG,IH)
DO 520 I=1,6
ESF(I)=0.
DO 520 M=1,6
IF(I-M)700,700,701
700 L=M*(M-1)/2+1
GO TO 520
701 L=1*(1-1)/2+M
520 ESF(I)=ESF(I)+RIG(L)*D(M)
IF(NIT-1)480,490,480
490 NUM=1
GO TO 360
480 IF(ABS(P(J,K))-0.00001)360,360,470
470 IF(ABS(P(J,K)-ESF(5))-ABS(0.05*P(J,K)))360,360,350
350 NUM=1
360 P(J,K)=ESF(5)
511 CONTINUE
DO 512 J=1,N
AUX2=T(J)
DO 512 K=1,NA
NIN=(J-1)*NA+K
NFI=J*NA+K
J1=2*NIN-1
J2=J1+1
K1=2*NFI-1
K2=K1+1
D(1)=DP(J1)
D(2)=DP(J2)
D(3)=DP(K1)
D(4)=DP(K2)
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 014

```
AUX1=IZV(J,K)
CALL RIG1(E,AUX1,AUX2,RIG)
DO 523 I=1,4
ESF(I)=0.
DO 523 M=1,4
IF(I-M)600,600,601
600 L=M*(M-1)/2+I
GO TO 523
601 L=I*(I-1)/2+M
523 ESF(I)=ESF(I)+RIG(L)*D(M)
ESF(2)=-ESF(2)
ESF(4)=-ESF(4)
512 CONTINUE
WRITE(4*IPAIN)((P(K,J),J=1,NA),K=1,NPP)
RETURN
END
C
SUBROUTINE DESLPA(NPP,YI,ZI,ALFAI,F,DP,NI,DELTA,IVEZ)
C
C   CALCULA OS DESLOCAMENTOS NAS COORDENADAS DE UM PAINEL
C
INTEGER FP(10),TIPO(10)
DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10),ALFAI(20),YI(20),ZI(20)
DIMENSION F(225),DP(345),FPA(345),FVPA(345)
COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP
COMMON/STIF1/S(10000)
COMMON/STIF2/B(30000)
I=IPAIN
L=IP(I)
DO 505 J=1,NA
K1=2+NPP*NA+J
J1=3*NI*NA+3*J-2
J2=J1+1
J3=J2+1
AB=-ZI(L)*CALFP(I)+YI(L)*SALFP(I)
DP(K1)=F(J1)*CALFP(I)+F(J2)*SALFP(I)+F(J3)*AB
505 CONTINUE
IF(TIPO(I)-3)10,20,10
10 ICONT=0
M1=(NPP-1)*2*NA
L=FP(I)
303 ALF=ALFAI(L)
COFI=CALFP(I)*COS(ALF)+SALFP(I)*SIN(ALF)
SEFI=SALFP(I)*COS(ALF)-CALFP(I)*SIN(ALF)
DO 501 J=1,NA
K1=M1+2*J-1
K2=K1+1
J1=(J-1)*3*NI+3*L-2
J2=J1+1
J3=J2+1
DP(K1)=-F(J1)*SEFI+F(J2)*COFI
DP(K2)=F(J3)
501 CONTINUE
IF(ICONT)305,306,305
306 IF(TIPO(I)-1)305,307,305
307 M1=(NPP-2)*2*NA
L=IP(I)
ICONT=ICONT+1
GO TO 303
305 CONTINUE
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 015

```
20 NAUX=2*NA*NPP+NA
   L=(NAUX*NAUX+NAUX)/2
   READ(6,'IPAIN')(S(K),K=1,L)
   READ(3,'IPAIN')(FPA(K),K=1,NAUX),(FVPA(K),K=1,NAUX)
   NAUX1=NAUX-NA
   DO 490 K=1,NAUX1
490 FPA(K)=FPA(K)+FVPA(K)*DELTA
   IF(TIPO(1)-2)100,200,300
100 L5=NAUX-5*NA
   IF(L5)40,50,40
   40 JAUX=NAUX-3*NA-1
   IAUX=2*NA
   DO 60 K=1,IAUX
   TEMP=FPA(1)
   DO 70 J=1,JAUX
   70 FPA(J)=FPA(J+1)
   FPA(JAUX+1)=TEMP
   60 CONTINUE
   GO TO 80
200 L5=NAUX-3*NA
   GO TO 80
300 L5=NAUX-NA
   80 CALL FWARD(L5,FPA,S)
   DO 750 J=1,L5
   L=(J-1)*J/2+J
   DP(J)=FPA(J)/S(L)
730 CONTINUE
   LAUX=L5+1
   DO 750 J=1,L5
   TEMP=0
   DO 760 K=LAUX,NAUX
   L=(K-1)*K/2+J
760 TEMP=TEMP+S(L)*DP(K)
   DP(J)=DP(J)-TEMP
750 CONTINUE
   CALL BACK(L5,DP,S)
   IF(TIPO(IPAIN)-1)50,810,50
810 DO 820 K=1,IAUX
   TEMP=DP(1)
   DO 830 J=1,JAUX
830 DP(J)=DP(J+1)
   DP(JAUX+1)=TEMP
820 CONTINUE
50 CONTINUE
   IF(IVEZ-2)1001,1000,1001
1000 WRITE(5,800)IPAIN
800 FORMAT(1X,23HDESLUCAMENTOS NO PAINEL,13)
   WRITE(5,8)(DP(K),K=1,NAUX)
8 FORMAT(1X,8E14.5)
1001 CONTINUE
   RETURN
   END
C
C SUBROUTINE MATDE(N,M,F,B)
C
C RESOLVE UM SISTEMA DE EQUACDES PELO PROCESSO DE GAUSS
C
C DIMENSION F(1)
C DIMENSION B(1)
C*****B=MATRIZ SIMETRICA ARMAZENADA SOB A FORMA DE VETOR
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 016

```
C*****N=ORDEM DA MATRIZ
C*****M=NUMERO DE LINHAS CUJO ELEMENTO DIAGONAL SERA UNITARIO ,SE N=M
C*****ADOTAR M=N-1
      DO 205 I=1,M
        J=(I-1)*I/2+I
        AUX=B(J)
        IF(ABS(AUX)-1.E-20)221,221,300
300    ICONT=I+1
      50 K=(ICONT-1)*ICONT/2+I
        AUX=-B(K)/B(J)
        JL=ICONT
        F(ICONT)=F(ICONT)+AUX*F(I)
        DO 10 JC=ICONT,N
          K=(JC-1)*JC/2+I
          L=(JC-1)*JC/2+JL
          B(L)=B(L)+AUX*B(K)
      10 CONTINUE
        ICONT=ICONT+1
        IF(ICONT-N)50,50,205
205    CONTINUE
      DO 20 I=1,M
        J=I*(I-1)/2+I
        JAU=I+1
        DO 20 L=JAU,N
          K=L*(L-1)/2+I
          B(K)=B(K)/B(J)
      20 CONTINUE
        IF(M-N+1)700,100,700
100    CONTINUE
      DO 500 I=1,N
        K=I*(I-1)/2+I
500    F(I)=F(I)/B(K)
        GO TO 700
221    WRITE(5,2)
      2 FORMAT(1X,35HELEMENTO NULO NA DIAGONAL PRINCIPAL)
700    CONTINUE
      RETURN
      END
```

C

SUBROUTINE MCN1(NAUX,NI,ALFAI)

C

SUBROTINA UTILIZADA PARA LEVAR A CONTRIBUICAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO PAINEL PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

C

```
INTEGER FP(10),TIPO(10)
DIMENSION AUX(6)
DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10),ALFAI(20)
COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP
COMMON/STIF1/S(10000)
COMMON/STIF2/B(30000)
KAUX=NAUX-NA+1
JI=IP(IPAIN)
JF=FP(IPAIN)
ALF1=ALFAI(JI)
ALF2=ALFAI(JF)
AUX(1)=-SALFP(IPAIN)*COS(ALF1)+CALFP(IPAIN)*SIN(ALF1)
AUX(2)=CALFP(IPAIN)*COS(ALF1)+SALFP(IPAIN)*SIN(ALF1)
AUX(3)=1.
AUX(4)=-SALFP(IPAIN)*COS(ALF2)+CALFP(IPAIN)*SIN(ALF2)
AUX(5)=CALFP(IPAIN)*COS(ALF2)+SALFP(IPAIN)*SIN(ALF2)
```

C

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 017

```
AUX(6)=1.
LAUX=KAUX-4*NA-2
DO 100 KM=1,NA
LAUX=LAUX+2
K1=3*JF-3
JAUX=KAUX-2*NA-2
DO 200 KN=1,NA
JAUX=JAUX+2
L1=(JAUX-1)*JAUX/2+LAUX
L2=(JAUX+1)*JAUX/2+LAUX
DO 50 K=4,5
K1=K1+1
J1=(KM-1)*3*NI+3*JI-3
DO 60 N=1,2
J1=J1+1
IF(K1-J1)350,351,351
351 M=(K1-1)*K1/2+J1
GO TO 352
350 M=(J1-1)*J1/2+K1
352 B(M)=B(M)+S(L1)*AUX(K)*AUX(N)
60 CONTINUE
J1=J1+1
IF(K1-J1)360,361,361
361 M=(K1-1)*K1/2+J1
GO TO 362
360 M=(J1-1)*J1/2+K1
362 B(M)=B(M)+S(L1+1)*AUX(K)*AUX(3)
50 CONTINUE
K1=K1+1
J1=(KM-1)*3*NI+3*JI-3
DO 80 I=1,2
J1=J1+1
IF(K1-J1)370,371,371
371 M=(K1-1)*K1/2+J1
GO TO 372
370 M=(J1-1)*J1/2+K1
372 B(M)=B(M)+S(L2)*AUX(I)*AUX(6)
80 CONTINUE
J1=J1+1
IF(K1-J1)380,381,381
381 M=(K1-1)*K1/2+J1
GO TO 382
380 M=(J1-1)*J1/2+K1
382 B(M)=B(M)+S(L2+1)*AUX(3)*AUX(6)
K1=K1+3*NI-3
200 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END
```

C  
C  
C  
C  
C

SUBROUTINE MON2(NAUX,NI,ALFAI)

SUBROTINA UTILIZADA PARA LEVAR A CONTRIBUICAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO PAINEL PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

INTEGER FP(10),TIPO(10)  
DIMENSION AUX(3)  
DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10),ALFAI(20)  
COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP  
COMMON/STIFI/S(10000)

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 018

```
COMMON/STIF2/8(30000)
ICONT=0
KAUX=NAUX-NA+1
IA=2
J=FP(IPAIN)
303 ALF=ALFAI(J)
AUX(1)=-SALFP(IPAIN)*COS(ALF)+CALFP(IPAIN)*SIN(ALF)
AUX(2)=CALFP(IPAIN)*COS(ALF)+SALFP(IPAIN)*SIN(ALF)
AUX(3)=1.
JA=-2
LAUX=KAUX-IA*NA-2
DO 100 KM=1,NA
LAUX=LAUX+2
JA=JA+2
LEI2=JA
K1=(KM-1)*3*NI+3*J-3
JAUX=KAUX-IA*NA-2+LEI2
DO 200 KN=KM,NA
JAUX=JAUX+2
L1=(JAUX-1)*JAUX/2+LAUX
L2=(JAUX+1)*JAUX/2+LAUX
DO 50 K=1,2
K1=K1+1
J1=(KM-1)*3*NI+3*J-3
DO 60 N=1,2
J1=J1+1
IF(K1-J1)60,30,30
30 M=(K1-1)*K1/2+J1
B(M)=B(M)+S(L1)*AUX(K)*AUX(N)
60 CONTINUE
J1=J1+1
IF(K1-J1)50,70,70
70 M=(K1-1)*K1/2+J1
B(M)=B(M)+S(L1+1)*AUX(K)*AUX(3)
50 CONTINUE
K1=K1+1
J1=(KM-1)*3*NI+3*J-3
DO 80 I=1,2
J1=J1+1
M=(K1-1)*K1/2+J1
B(M)=B(M)+S(L2)*AUX(I)*AUX(3)
80 CONTINUE
J1=J1+1
M=(K1-1)*K1/2+J1
B(M)=B(M)+S(L2+1)*AUX(3)*AUX(3)
K1=K1+3*NI-3
200 CONTINUE
100 CONTINUE
IF(ICONT)300,301,300
301 ITIPO=TIPG(IPAIN)
IF(ITIPO-1)300,302,300
302 J=IP(IPAIN)
IA=4
ICONT=ICONT+1
GO TO 303
300 CONTINUE
RETURN
END
```

C

SUBROUTINE MON3(NAUX,NI,Y,Z,ALFAI)



C  
C  
C  
C

SUBROTINA UTILIZADA PARA LEVAR A CONTRIBUICAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO PAINEL PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA

```
INTEGER FP(10),TIPO(10)
DIMENSION AUX(6)
DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10),ALFAI(20)
DIMENSION Y(20),Z(20)
COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP
COMMON/STIF1/S(10000)
COMMON/STIF2/B(30000)
ICONT=0
J=IP(IPAIN)
AB=-CALFP(IPAIN)*Z(J)+SALFP(IPAIN)*Y(J)
AUX(4)=CALFP(IPAIN)
AUX(5)=SALFP(IPAIN)
AUX(6)=AB
KAUX=NAUX-NA+1
IA=2
J=FP(IPAIN)
20 LEI=0
ALF=ALFAI(J)
AUX(1)=-SALFP(IPAIN)*COS(ALF)+CALFP(IPAIN)*SIN(ALF)
AUX(2)=CALFP(IPAIN)*COS(ALF)+SALFP(IPAIN)*SIN(ALF)
AUX(3)=1.
DO 200 KM=KAUX,NAUX
IAUX=KAUX-IA*NA-2
DO 300 KN=1,NA
IAUX=IAUX+2
L=(KM-1)*KM/2+IAUX
JL=(KN-1)*3*NI+3*J-3
DO 400 I=1,2
JL=JL+1
JC=3*NI*NA+LEI
DO 400 K=4,6
JC=JC+1
M=(JC-1)*JC/2+JL
B(M)=B(M)+S(L)*AUX(I)*AUX(K)
400 CONTINUE
JL=JL+1
JC=3*NI*NA+LEI
DO 500 K=4,6
JC=JC+1
M=(JC-1)*JC/2+JL
B(M)=B(M)+S(L+1)*AUX(3)*AUX(K)
500 CONTINUE
300 CONTINUE
LEI=LEI+3
200 CONTINUE
IF(ICONT)40,50,40
50 ITIPO=TIPO(IPAIN)
IF(ITIPO-1)40,30,40
30 J=IP(IPAIN)
IA=4
ICONT=ICONT+1
GO TO 20
40 CONTINUE
RETURN
END
```

C

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 020

```
C SUBROUTINE MON4(NAUX,NI,Y,Z)
C
C SUBROTINA UTILIZADA PARA LEVAR A CONTRIBUICAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C DO PAINEL PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA
C
  INTEGER FP(10),TIPO(10)
  DIMENSION AUX(3)
  DIMENSION IP(10),CALFP(10),SALFP(10)
  DIMENSION Y(20),Z(20)
  COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,CALFP,SALFP
  COMMON/STIF1/S(10000)
  COMMON/STIF2/B(30000)
  J=IP(IPAIN)
  AB=-CALFP(IPAIN)*Z(J)+SALFP(IPAIN)*Y(J)
  AUX(1)=CALFP(IPAIN)
  AUX(2)=SALFP(IPAIN)
  AUX(3)=AB
  KAUX=NAUX-NA+1
  LEI1=0
  JA=-3
  DO 200 KM=KAUX,NAUX
  JA=JA+3
  LEI2=JA
  DO 300 KN=KM,NAUX
  JL=3*NI*NA+LEI1
  L=(KN-1)*KN/2+KM
  DO 400 I=1,3
  JL=JL+1
  JC=3*NI*NA+LEI2
  DO 400 J=1,3
  JC=JC+1
  IF(JC-JL)400,500,500
500 M=(JC-1)*JC/2+JL
  B(M)=B(M)+S(L)*AUX(I)*AUX(J)
400 CONTINUE
  LEI2=LEI2+3
300 CONTINUE
  LEI1=LEI1+3
200 CONTINUE
  RETURN
  END
C
C SUBROUTINE MON5(NA,NI,H,YI,ZI,ALFAI,IH)
C
C LEVA A CONTRIBUICAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA PRUMADA DE PILARES IN
C DIVIDUAIS PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA
C
  REAL IXI(4,15),IYI(4,15),IZI(4,15),IWI(4,15)
  DIMENSION P(11,15),ND(12),H(15),AXI(4,15),YI(20),ZI(20),ALFAI(20),
  *RIG(78)
  DIMENSION RC(4,15),YO(4,15),ZC(4,15),ROT(3,3)
  COMMON/STIF1/B(10000)
  COMMON/STIF2/S(30000)
  COMMON/ELASI/AXI,IXI,IYI,IZI,IWI,RO,YO,ZO,EI,GI
  DO 2 K=1,NI
  AUX7=YI(K)
  AUX8=ZI(K)
  AUX9=ALFAI(K)
  READ(7,K)(P(K,L),L=1,NA)
  DO 2 J=1,NA
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 021

```

NC(1)=3*(J-1)*NI+3*K-2
NC(2)=NC(1)+1
NC(3)=NC(2)+1
NC(4)=3*NI*NA+3*J-2
NC(5)=NC(4)+1
NC(6)=NC(5)+1
NC(7)=3*NI*J+3*K-2
NC(8)=NC(7)+1
NC(9)=NC(8)+1
NC(10)=3*NI*NA+3*(J+1)-2
NC(11)=NC(10)+1
NC(12)=NC(11)+1
AUX1=AXI(K,J)
AUX2=IXI(K,J)
AUX3=IYI(K,J)
AUX4=IZI(K,J)
AUX5=IWI(K,J)
AUX6=H(J)
AUX10=RC(K,J)
AUX15=YC(K,J)
AUX16=ZC(K,J)
AUX11=P(K,J)
IF(AUX5-C.CCCOCC1)150,150,151
151 CALL RIG3(EI,GI,AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,AUX5,AUX6,AUX10,AUX16,AUX11,IM
*,RIG)
GC TO 152
150 CALL RIG4(EI,GI,AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,AUX6,AUX10,AUX15,AUX16,AUX11,I
*,RIG)
152 IF(IM)100,110,100
110 RCT(1,1)=1.
RCT(1,2)=C.
RCT(1,3)=-AUX16
RCT(2,1)=C.
RCT(2,2)=1.
RCT(2,3)=AUX15
RCT(3,1)=C.
RCT(3,2)=C.
RCT(3,3)=1.
CALL RODA(RCT,RIG)
RCT(1,1)=COS(AUX9)
RCT(1,2)=SIN(AUX9)
RCT(1,3)=AUX7*SIN(ALX9)-AUX8*COS(AUX9)
RCT(2,1)=-SIN(ALX9)
RCT(2,2)=COS(AUX9)
RCT(2,3)=AUX7*COS(ALX9)+AUX8*SIN(AUX9)
CALL RODA(RCT,RIG)
L1=NC(1)*(NC(1)-1)/2+ND(1)
S(L1)=S(L1)+RIG(1)
IF(J-NA)20,30,20
30 LAU=6
GC TO 40
20 LAU=12
40 DO 5 M=2,LAU
L2=(M-1)*M/2
L3=L2+1
L4=M*(M+1)/2
DO 6 IPROP=L3,L4
NS=IPROP-L2
JL=ND(NS)
JC=ND(M)

```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 022

```
IF(JL-JC)10,10,11
10 JT=JC*(JC-1)/2+JL
GO TO 12
11 JT=JL*(JL-1)/2+JC
12 S(JT)=S(JT)+RIG(IPROP)
6 CONTINUE
5 CONTINUE
2 CONTINUE
100 RETURN
END
```

C

SUBROUTINE RIG1(E,IZ,COMP,RIGV)

C

MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA VIGA

C

```
REAL IZ
DIMENSION RIGV(21)
AUX1=4.*E*IZ/COMP
AUX2=1.5*AUX1/COMP
AUX3=2.*AUX2/COMP
AUX4=2.*E*IZ/COMP
RIGV(1)=AUX1
RIGV(2)=-AUX2
RIGV(3)=AUX3
RIGV(4)=AUX4
RIGV(5)=-AUX2
RIGV(6)=AUX1
RIGV(7)=AUX2
RIGV(8)=-AUX3
RIGV(9)=AUX2
RIGV(10)=AUX3
RETURN
END
```

C

SUBROUTINE RIG2(E,AX,IZ,COMP,P,RIGP,IH)

C

MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM PILAR DE PAINEL

C

```
REAL IZ,MIZ
DIMENSION RIGP(21)
PI=3.1416
IF(IZ-0.000001)50,50,51
50 DO 60 I=1,21
60 RIGP(I)=0.
GO TO 22
51 MIZ=COMP*SQRT(ABS(P)/(E*IZ))/2.
IF(P)1,2,2
2 IF(MIZ-PI)20,21,21
20 CALL FUNT(MIZ,A1,A2,A3)
GO TO 6
1 CALL FUNH(MIZ,A1,A2,A3)
6 AUX1=E*AX/COMP
AUX2=E*IZ*A1/COMP
AUX3=E*IZ*(A1+A2)/COMP**2
AUX4=E*IZ*A3/COMP**3
AUX5=E*IZ*A2/COMP
RIGP(1)=AUX2
RIGP(2)=0.
RIGP(3)=AUX1
RIGP(4)=-AUX3
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 023

```
RIGP(5)=0.  
RIGP(6)=AUX4  
RIGP(7)=AUX5  
RIGP(8)=0.  
RIGP(9)=-AUX3  
RIGP(10)=AUX2  
RIGP(11)=0.  
RIGP(12)=-AUX1  
RIGP(13)=0.  
RIGP(14)=0.  
RIGP(15)=AUX1  
RIGP(16)=AUX3  
RIGP(17)=0.  
RIGP(18)=-AUX4  
RIGP(19)=AUX3  
RIGP(20)=0.  
RIGP(21)=AUX4  
GO TO 22  
21 IH=IH+1  
22 RETURN  
END
```

C  
C  
C  
C  
C

```
      SUBROUTINE RIG3(E,G,AX,IX,IY,IZ,IW,COMP,RO,ZO,P,IH,RIGI)  
      MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM PILAR TRIDIMENSIONAL COM IW DIFE  
      RENTE DE ZERO  
  
      REAL IX,IY,IZ,IW  
      REAL MIX,MIY,MIZ,K,KY,KZ,KW,MI  
      DIMENSION RIGI(78)  
      PI=3.1416  
      IF(IZ=0.000001)50,50,51  
50 DO 60 I=1,78  
60 RIGI(I)=0.  
      GO TO 22  
51 KZ=ABS(P)/(E*IZ)  
      KW=ABS(P)/(E*IW)  
      KY=ABS(P)/(E*IY)  
      K=ABS(G*IX-P*RO**2)/(E*IW)  
      MIY=COMP*SQRT(KY)/2.  
      IF(P)1,2,2  
2 IF(MIY-PI)20,21,21  
20 CALL FUNT(MIY,A1,A2,A3)  
      AUX=G*IX-P*RO**2  
      IF(AUX)80,81,81  
81 R1=(K+KZ)**2+4.*(KW*KZ*ZO**2)  
      R1=SQRT(R1)  
      R2=KZ-K  
      MI=COMP*SQRT(ABS(R1-R2)/2.)/2.  
      ETA=COMP*SQRT(ABS(R1+R2)/2.)/2.  
      IF(ETA-PI)30,21,21  
30 CALL FUNH(MI,B1,B2,B3)  
      CALL FUNT(ETA,C1,C2,C3)  
      R3=KZ*COMP**2  
      R4=R3*ZO  
      R5=4.*(ETA**2+MI**2)  
      ALFA=(4.*MI**2+R3)/R5  
      BETA=(4.*ETA**2-R3)/R5  
      GAMA=R4/R5  
      GO TO 100
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 024

```
80 AUX=K*KZ-KW*KZ*ZC**2
   IF(AUX)90,90,91
91 R1=4.*(KW*KZ*ZC**2)+(KZ-K)**2
   R1=SQRT(ABS(R1))
   R2=KZ+K
   MI=COMP*SQRT(ABS(R2-R1)/2.)/2.
   IF(MI-PI)92,21,21
92 ETA=COMP*SQRT(ABS(R2+R1)/2.)/2.
   IF(ETA-PI)93,21,21
93 CALL FUNT(MI,B1,B2,B3)
   CALL FUNT(ETA,C1,C2,C3)
   R3=KZ*COMP**2
   R4=R3*ZC
   R5=4.*(ETA**2-MI**2)
   ALFA=(R3-4.*MI**2)/R5
   BETA=(4.*ETA**2-R3)/R5
   GAMA=R4/R5
   GO TO 100
90 R1=4.*(KW*KZ*ZC**2)+(KZ-K)**2
   R1=SQRT(R1)
   R2=K+KZ
   MI=COMP*SQRT(ABS(R1-R2)/2.)/2.
   ETA=COMP*SQRT(ABS(R1+R2)/2.)/2.
   IF(ETA-PI)94,21,21
94 CALL FUNH(MI,B1,B2,B3)
   CALL FUNT(ETA,C1,C2,C3)
   R3=KZ*COMP**2
   R4=R3*ZC
   R5=4.*(MI**2+ETA**2)
   ALFA=(4.*MI**2+R3)/R5
   BETA=(4.*ETA**2-R3)/R5
   GAMA=R4/R5
   GO TO 100
1  CALL FUNH(MIY,A1,A2,A3)
   R1=4.*(KW*KZ*ZC**2)+(KZ-K)**2
   R1=SQRT(ABS(R1))
   R2=K+KZ
   MI=COMP*SQRT(ABS(R2-R1)/2.)/2.
   ETA=COMP*SQRT(ABS(R2+R1)/2.)/2.
   CALL FUNH(MI,B1,B2,B3)
   CALL FUNH(ETA,C1,C2,C3)
   R3=KZ*COMP**2
   R4=R3*ZC
   R5=4.*(ETA**2-MI**2)
   ALFA=(R3-4.*MI**2)/R5
   BETA=(4.*ETA**2-R3)/R5
   GAMA=R4/R5
100 CONTINUE
   CY1=E*IY/COMP
   CY2=E*IY/COMP**2
   CY3=E*IY/COMP**3
   CZ1=E*IZ/COMP
   CZ2=E*IZ/COMP**2
   CZ3=E*IZ/COMP**3
   CW3=E*IW/COMP**3
   DO 200 I=1,78
200 RIGI(I)=0.
   RIGI(1)=CY1*A1
   RIGI(3)=CZ1*(BETA*B1+ALFA*C1)
   RIGI(6)=E*AX/COMP
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 025

```
RIGI(8)=-CZ2*(BETA*(B1+B2)+ALFA*(C1+C2))
RIGI(10)=CZ3*(BETA*B3+ALFA*C3)
RIGI(11)=CY2*(A1+A2)
RIGI(15)=CY3*A3
RIGI(17)=CZ2*GAMA*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(19)=CZ3*GAMA*(-B3+C3)
RIGI(21)=CW3*(ALFA*B3+BETA*C3)
RIGI(22)=CY1*A2
RIGI(26)=CY2*(A1+A2)
RIGI(28)=CY1*A1
RIGI(30)=CZ1*(BETA*B2+ALFA*C2)
RIGI(32)=-CZ2*(BETA*(B1+B2)+ALFA*(C1+C2))
RIGI(34)=CZ2*GAMA*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(36)=CZ1*(BETA*B1+ALFA*C1)
RIGI(39)=-E*AX/COMP
RIGI(45)=E*AX/COMP
RIGI(47)=CZ2*(BETA*(B1+B2)+ALFA*(C1+C2))
RIGI(49)=-CZ3*(BETA*B3+ALFA*C3)
RIGI(51)=CZ3*GAMA*(B3-C3)
RIGI(53)=CZ2*(BETA*(B1+B2)+ALFA*(C1+C2))
RIGI(55)=CZ3*(BETA*B3+ALFA*C3)
RIGI(56)=-CY2*(A1+A2)
RIGI(59)=-CY3*A3
RIGI(62)=-CY2*(A1+A2)
RIGI(66)=CY3*A3
RIGI(68)=-CZ2*GAMA*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(70)=-CZ3*GAMA*(-B3+C3)
RIGI(72)=-CW3*(ALFA*B3+BETA*C3)
RIGI(74)=-CZ2*GAMA*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(76)=CZ3*GAMA*(-B3+C3)
RIGI(78)=CW3*(ALFA*B3+BETA*C3)
GO TO 22
21 CONTINUE
IH=IH+1
22 RETURN
END
C
SUBROUTINE RIG4(E,G,AX,IX,IY,IZ,COMP,RO,YO,ZO,P,IH,RIGI)
C
C MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM PILAR TRIDIMENSIONAL COM IW IGUAL
C A ZERO
C
REAL IX,IY,IZ,K,KY,KZ,MI
DIMENSION RIGI(78)
PI=3.1416
IF(IZ=0.000001)50,50,51
50 DO 60 I=1,78
60 RIGI(I)=0
GO TO 22
51 AUX=G*IX-P*RO**2
IF(AUX)21,21,10
10 KY=ABS(P)/(E*IY)
KZ=ABS(P)/(E*IZ)
K=ABS(P)/AUX
IF(P)1,2,3
1 R1=(KZ*(1.-K*ZO**2)-KY*(1.-K*YO**2))**2+4.*K**2*KY*KZ*YO**2*ZO**2
R1=SQRT(R1)
R2=(KZ*(1.-K*ZO**2)+KY*(1.-K*YO**2))
MI=COMP*SQRT(ABS(R1+R2)/2.)/2.
ETA=COMP*SQRT(ABS(R2-R1)/2.)/2.
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 026

```
CALL FUNH(MI,B1,B2,B3)
CALL FUNH(ETA,C1,C2,C3)
R3=-KZ*COMP**2+K*KZ*COMP**2*Z0**2
R4=Y0*Z0*K*KZ*COMP**2
R5=4.*(ETA**2-MI**2)
ALFA=(4.*MI**2+R3)/R5
BETA=(4.*ETA**2+R3)/R5
GAMA=-R4/R5
GO TO 75
2 MI=0.
ETA=0.
CALL FUNH(MI,B1,B2,B3)
CALL FUNH(ETA,C1,C2,C3)
ALFA=-1.
BETA=0.
GAMA=0.
GO TO 75
3 R1=(KZ*(1.+K*Z0**2)-KY*(1.+K*Y0**2))**2+4.*K**2*KY*KZ*Y0**2*Z0**2
R1=SQRT(R1)
R2=KZ*(1.+K*Z0**2)+KY*(1.+K*Y0**2)
MI=COMP*SQRT(ABS(R2-R1)/2.)/2.
ETA=COMP*SQRT(ABS(R2+R1)/2.)/2.
CALL FUNH(MI,B1,B2,B3)
CALL FUNH(ETA,C1,C2,C3)
R3=KZ*COMP**2+K*KZ*COMP**2*Z0**2
R4=Y0*Z0*K*KZ*COMP**2
R5=4.*(ETA**2-MI**2)
ALFA=(4.*MI**2-R3)/R5
BETA=(4.*ETA**2-R3)/R5
GAMA=R4/R5
75 DO 138 I=1,78
138 RIGI(I)=0.
WRITE(5,8)MI,ETA,B1,B2,B3,C1,C2,C3,ALFA,BETA,GAMA
8 FORMAT(1X,11F10.3)
CY1=E*IY/COMP
CY2=E*IY/COMP**2
CY3=-IY/COMP**3
CZ1=E*IZ/COMP
CZ2=E*IZ/COMP**2
CZ3=-IZ/COMP**3
RIGI(1)=CY1*(-ALFA*B1+BETA*C1)
RIGI(2)=CZ1*GAMA*(-B1+C1)
RIGI(3)=CZ1*(BETA*B1-ALFA*C1)
RIGI(6)=E*AX/COMP
RIGI(7)=CZ2*GAMA*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(8)=CZ2*(-BETA*(B1+B2)+ALFA*(C1+C2))
RIGI(10)=CZ3*(BETA*2*(B1+B2)-ALFA*2*(C1+C2))-P/COMP
RIGI(11)=CY2*(-ALFA*(B1+B2)+BETA*(C1+C2))
RIGI(12)=CZ2*GAMA*(-B1-B2+C1+C2)
RIGI(14)=CZ3*GAMA*2.*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(15)=CY3*2.*(-ALFA*(B1+B2)+BETA*(C1+C2))-P/COMP
RIGI(19)=-CZ1*KZ*Z0
RIGI(20)=CY1*KY*Y0
RIGI(21)=AUX/COMP
RIGI(22)=CY1*(-ALFA*B2+BETA*C2)
RIGI(23)=CZ1*(-B2+C2)*GAMA
RIGI(25)=CZ2*(B1+B2-C1-C2)*GAMA
RIGI(26)=CY2*(-ALFA*(B1+B2)+BETA*(C1+C2))
RIGI(28)=CY1*(-ALFA*B1+BETA*C1)
RIGI(29)=CZ1*GAMA*(-B2+C2)
```



\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```
RIGI(30)=CZ1*(BETA*B2-ALFA*C2)
RIGI(32)=CZ2*(-BETA*(B1+B2)+ALFA*(C1+C2))
RIGI(33)=CZ2*GAMA*(-B1-B2+C1+C2)
RIGI(35)=CZ1*(-B1+C1)*GAMA
RIGI(36)=CZ1*(BETA*B1-ALFA*C1)
RIGI(39)=-E*AX/COMP
RIGI(45)=E*AX/COMP
RIGI(46)=CZ2*GAMA*(-B1-B2+C1+C2)
RIGI(47)=CZ2*(BETA*(B1+B2)-ALFA*(C1+C2))
RIGI(49)=CZ3*2*(-BETA*(B1+B2)+ALFA*(C1+C2))+P/COMP
RIGI(50)=CZ3*GAMA*2*(-B1-B2+C1+C2)
RIGI(51)=CZ1*KZ*ZO
RIGI(52)=CZ2*GAMA*(-B1-B2+C1+C2)
RIGI(53)=CZ2*(BETA*(B1+B2)-ALFA*(C1+C2))
RIGI(55)=CZ3*2*(BETA*(B1+B2)-ALFA*(C1+C2))-P/COMP
RIGI(56)=CY2*(ALFA*(B1+B2)-BETA*(C1+C2))
RIGI(57)=CZ2*GAMA*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(59)=CZ3*GAMA*2*(-B1-B2+C1+C2)
RIGI(60)=CY3*2*(ALFA*(B1+B2)-BETA*(C1+C2))+P/COMP
RIGI(61)=-CY1*KY*YO
RIGI(62)=CY2*(ALFA*(B1+B2)-BETA*(C1+C2))
RIGI(63)=CZ2*GAMA*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(65)=CZ3*GAMA*2*(B1+B2-C1-C2)
RIGI(66)=CY3*2*(-ALFA*(B1+B2)+BETA*(C1+C2))-P/COMP
RIGI(70)=CZ1*KZ*ZO
RIGI(71)=-CY1*KY*YO
RIGI(72)=-AUX/COMP
RIGI(76)=-CZ1*KZ*ZO
RIGI(77)=CY1*KY*YO
RIGI(78)=AUX/COMP
WRITE(5,8)(RIGI(JT2),JT2=1,78)
GO TO 22
21 IH=IH+1
22 RETURN
END
C
SUBROUTINE FUNH(MI,A1,A2,A3)
C
C   CALCULA AS FUNCOES DE INSTABILIDADE COM FUNCOES HIPERBOLICAS
C
REAL MI
IF(MI-0.05)10,10,20
10 A1=4.
A2=2.
A3=12.
GO TO 30
20 SENO=SINH(2.*MI)
COSE=COSH(2.*MI)
AUX=COSE-MI*SENO-1.
A1=-MI*(2.*MI*COSE-SENO)/AUX
A2=-MI*(SENO-2.*MI)/AUX
A3=2.*(A1+A2)+4.*MI**2
30 RETURN
END
RUN TESTE
DATA
END JOB
C
SUBROUTINE FUNT(MI,A1,A2,A3)
C
```

```
C      CALCULA AS FUNCOES DE INSTABILIDADE COM FUNCOES TRIGONOMETRICAS
C
      REAL MI
      IF(MI-0.05)10,10,20
10  A1=4.
      A2=2.
      A3=12.
      GO TO 30
20  SENO=SIN(2.*MI)
      COSE=COS(2.*MI)
      AUX=COSE+MI*SENO-1.
      A1=MI*(2.*MI*COSE-SENO)/AUX
      A2=MI*(SENO-2.*MI)/AUX
      A3=2.*(A1+A2)-4.*MI**2
30  RETURN
      END

C
      SUBROUTINE RODA(R,RIGI)
C
C      TRANSFORMA A MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM PILAR TRIDIMENSIONAL REFERIDA
C      AO CENTRO DE TORCAO NA REFERIDA AO CENTRO DE GRAVIDADE
C
      DIMENSION R(3,3),RIGI(78),AUX(3),BAUX(3,3)
      DO 210 I=1,9
        J1=45+I
        J2=55+I
        J3=60+I
        AUX(1)=RIGI(J1)
        AUX(2)=RIGI(J2)
        AUX(3)=RIGI(J3)
        DO 220 J=1,3
          TEMP=C.
          DO 230 L=1,3
230  TEMP=TEMP+AUX(L)*R(L,J)
          L1=(J+8)*(J+9)/2+I
220  RIGI(L1)=TEMP
210  CONTINUE
        DO 60 I=1,3
          J1=6+I
          J2=1+I
          J3=15+I
          AUX(1)=RIGI(J1)
          AUX(2)=RIGI(J2)
          AUX(3)=RIGI(J3)
          DO 70 J=1,3
            TEMP=C.
            DO 80 K=1,3
80  TEMP=TEMP+AUX(K)*R(K,J)
            L1=(J+2)*(J+3)/2+I
70  RIGI(L1)=TEMP
60  CONTINUE
          JC=6
          DO 200 IT=1,2
            DO 110 I=4,6
              JC=JC+1
              J1=(JC-1)*JC/2+4
              J2=J1+1
              J3=J2+1
              AUX(1)=RIGI(J1)
              AUX(2)=RIGI(J2)
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 029

```
AUX(3)=RIGI(J3)
DO 120 J=1,3
TEMP=0.
DO 130 K=1,3
130 TEMP=TEMP+AUX(K)*R(K,J)
L1=(JC-1)*JC/2+3+J
120 RIGI(L1)=TEMP
110 CONTINUE
JC=9
200 CONTINUE
K1=3
DO 1 I1=1,2
DO 2 I1=1,3
DO 2 I2=1,3
I=I1+K1
J=I2+K1
IF(J-I)3,4,4
4 J1=J*(J-1)/2+I
GO TO 2
3 J1=I*(I-1)/2+J
2 BAUX(I1,I2)=RIGI(J1)
DO 10 I=1,3
AUX(1)=BAUX(I,1)
AUX(2)=BAUX(I,2)
AUX(3)=BAUX(I,3)
DO 11 K=1,3
TEMP=C.
DO 12 L=1,3
12 TEMP=TEMP+AUX(L)*R(L,K)
BAUX(I,K)=TEMP
11 CONTINUE
10 CONTINUE
DO 13 I=1,3
AUX(1)=BAUX(1,I)
AUX(2)=BAUX(2,I)
AUX(3)=BAUX(3,I)
DO 14 K=1,3
TEMP=0.
DO 15 L=1,3
15 TEMP=TEMP+AUX(L)*R(L,K)
BAUX(K,I)=TEMP
14 CONTINUE
13 CONTINUE
DO 16 I1=1,3
DO 16 I2=1,3
I=I1+K1
J=I2+K1
IF(J-I)16,17,17
17 J1=J*(J-1)/2+I
RIGI(J1)=BAUX(I1,I2)
16 CONTINUE
K1=9
1 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C SUBROUTINE PAIN1(YI,YF,ZI,ZF,NPP)
C
C LEITURA DAS CARACTERISTICAS ELASTICAS E GEOMETRICAS DOS PAINES
C E CARREGAMENTO SOBRE ELES
```

C

```
REAL IZP(11,15),IZV(11,15)
INTEGER FP(10),TIPO(10)
DIMENSION P(11,15),T(10),AXP(11,15),IP(10),C(10),S(10),F(345)
DIMENSION FV(345)
COMMON/PAINEI/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,C,S
COMMON/ELAST/AXP,IZP,IZV,T
Q1=(YF-YI)/SQRT((YF-YI)**2+(ZF-ZI)**2)
Q2=(ZF-ZI)/SQRT((YF-YI)**2+(ZF-ZI)**2)
C(IPAIN)=Q1
S(IPAIN)=Q2
N=NPP-1
2 FORMAT(8F10.0)
READ(2,1)IGE,IGC
IF(IGE)700,701,700
700 READ(1,IGE)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1,NP
*P),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N), (T(I),I=1,N)
GO TO 702
701 READ(2,2)E
READ(2,2)(T(I),I=1,N)
IF(NPP-2)50,50,51
51 DO 300 I=2,N
300 READ(2,2)(AXP(I,K),K=1,NA)
DO 310 I=2,N
310 READ(2,2)(IZP(I,K),K=1,NA)
50 DO 400 I=1,NA
400 READ(2,2)(IZV(K,I),K=1,N)
DO 600 I=1,NA
AXP(I,I)=C.
IZP(I,I)=C.
AXP(NPP,I)=C.
600 IZP(NPP,I)=0.
1 FORMAT(8I10)
702 WRITE(1,IPAIN)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1
*,NPP),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N), (T(I),I=1,N)
NAUX=2*NPP*NA+NA
DO 800 I=1,NAUX
FV(I)=0.
800 F(I)=0.
IF(IGC)705,704,705
705 READ(3,IGC)(F(I),I=1,NAUX), (FV(I),I=1,NAUX)
GO TO 706
704 READ(2,1)NNC,NAC
IF(NAC)810,811,810
810 DO 801 I=1,NNC
READ(2,3)NV,NH,A1,A2,A3,A4
NI=(NV-1)*NA+NH
J1=2*NI-1
J2=J1+1
F(J1)=A1
F(J2)=A2
FV(J1)=A3
FV(J2)=A4
3 FORMAT(2I10,4F10.0)
801 CONTINUE
811 IF(NAC)815,816,815
815 DO 802 I=1,NAC
READ(2,4)NAN,A3
4 FORMAT(11C,F10.0)
J3=2*NPP*NA+NAN
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 031

```

F(J3)=A3
802 CONTINUE
816 CONTINUE
706 DO 518 K=1,NPP
    DO 518 J=1,NA
518 P(K,J)=C.
    WRITE(3,IPAIN)(F(I),I=1,NAUX),(FV(I),I=1,NAUX)
    WRITE(4,IPAIN)((P(K,J),J=1,NA),K=1,NPP)
    I=IPAIN
    WRITE(5,220)
220 FORMAT(1H1)
    WRITE(5,221)I,N,IP(I),FP(I),TIPO(I),C(I),S(I),E
221 FORMAT(1X,10HPAINEL NO.,I30,///,1X,12HNDO. DE BAIAS,I28,/,1X,10HNO
*INICIAL,I30,/,1X,8HNO FINAL,I32,/,1X,4HTIPO,I36,/,1X,16HCOSSENO DE
* ALFAP,E24.4,/,1X,16HSENO DE ALFAP,E24.4,/,1X,22HMODULO DE ELAS
*TICIDADE,E18.4,///,1X,17HLARGURA DAS BAIAS,/,1X,4HBAIA,I6X,7HLARGU
*RA)
    DO 500 K=1,N
500 WRITE(5,501)K,T(K)
501 FORMAT(1X,I4,E25.4)
    WRITE(5,223)
223 FORMAT(1X,///,1X,27HCARACTERISTICAS DOS PILARES,/,1X,5HPILAR,15X,2
*2HMODULO DE INERCIA IZP,9X,20HAREA SECAO TRANS AXP)
    DO 510 K=1,NPP
    DO 510 J=1,NA
510 WRITE(5,511)K,J,IZP(K,J),AXP(K,J)
511 FORMAT(1X,I2,1H-,I2,E24.4,E31.4)
    WRITE(5,224)
224 FORMAT(1X,///,1X,25HCARACTERISTICAS DAS VIGAS,/,1X,4HVIGA,16X,22HM
*ODULO DE INERCIA IZV)
    DO 515 K=1,N
    DO 515 J=1,NA
515 WRITE(5,516)K,J,IZV(K,J)
516 FORMAT(1X,I2,1H-,I2,E29.4)
    WRITE(5,840)
840 FORMAT(1X,26HCARGAS PERMANENTES E VENTO)
    WRITE(5,841)(F(I),I=1,NAUX)
841 FORMAT(1X,8E14.5)
    WRITE(5,842)
842 FORMAT(1X,12HCARGAS VIVAS)
    WRITE(5,841)(FV(I),I=1,NAUX)
    RETURN
    END
C
    SUBROUTINE PAIN2(YI,YF,ZI,ZF,NPP)
C
C    LEITURA DAS CARACTERISTICAS ELASTICAS E GEOMETRICAS DOS PAINELS
C    E CARREGAMENTO SOBRE ELAS
C
    REAL IZP(11,15),IZV(11,15)
    INTEGER FP(10),TIPO(10)
    DIMENSION P(11,15),T(10),AXP(11,15),IP(10),C(10),S(10),F(345)
    DIMENSION FV(345)
    COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,C,S
    COMMON/ELAST/AXP,IZP,IZV,T
    Q1=(YF-YI)/SQRT((YF-YI)**2+(ZF-ZI)**2)
    Q2=(ZF-ZI)/SQRT((YF-YI)**2+(ZF-ZI)**2)
    C(IPAIN)=Q1
    S(IPAIN)=Q2
    N=NPP-1

```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

PAGINA 032

```
2 FORMAT(8F10.0)
  READ(2,1)IGE,IGC
  IF(IGE)700,701,700
700 READ(1,IGE)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1,NP
  *P),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N),(T(I),I=1,N)
  GO TO 702
701 READ(2,2)E
  READ(2,2)(T(I),I=1,N)
  DO 300 I=1,N
300 READ(2,2)(AXP(I,K),K=1,NA)
  DO 310 I=1,N
310 READ(2,2)(IZP(I,K),K=1,NA)
  DO 400 I=1,NA
400 READ(2,2)(IZV(K,I),K=1,N)
  DO 600 I=1,NA
  AXP(NPP,I)=0.
  IZP(NPP,I)=0.
  1 FORMAT(8I10)
702 WRITE(1,IPAIN)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1
  *,NPP),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N),(T(I),I=1,N)
  NAUX=2*NPP*NA+NA
  DO 800 I=1,NAUX
  FV(I)=0.
800 F(I)=0.
  IF(IGC)705,704,705
705 READ(3,IGC)(F(I),I=1,NAUX),(FV(I),I=1,NAUX)
  GO TO 706
704 READ(2,1)NMC,NAC
  IF(NMC)810,811,810
810 DO 81 I=1,NMC
  READ(2,3)NV,NH,A1,A2,A3,A4
  NI=(NV-1)*NA+NH
  J1=2*NI-1
  J2=J1+1
  F(J1)=A1
  F(J2)=A2
  FV(J1)=A3
  FV(J2)=A4
  3 FORMAT(2I10,4F10.0)
801 CONTINUE
811 IF(NAC)815,816,815
815 DO 802 I=1,NAC
  READ(2,4)NAN,A3
  4 FORMAT(I10,F10.0)
  J3=2*NPP*NA+NAN
  F(J3)=A3
802 CONTINUE
816 CONTINUE
706 DO 518 K=1,NPP
  DO 518 J=1,NA
518 P(K,J)=0.
  WRITE(3,IPAIN)(F(I),I=1,NAUX),(FV(I),I=1,NAUX)
  WRITE(4,IPAIN)((P(K,J),J=1,NA),K=1,NPP)
  I=IPAIN
  WRITE(5,220)
220 FORMAT(1H1)
  WRITE(5,221)I,N,IP(I),FP(I),TIPO(I),C(I),S(I),E
221 FORMAT(1X,16HPAINEL NO.,I30,/,/,1X,12HNG. DE BAIAS,I28,/,1X,10HNO
  * INICIAL,I30,/,1X,8HNO FINAL,I32,/,1X,4HTIPO,I36,/,1X,16HCOSSENO DE
  * ALFAP,E24.4,/,1X,16HSENO DE ALFAP,E24.4,/,1X,22HMODULO DE ELAS
```

\*\* LISTAGEM DO DECK \*\*

```

*VICIDADE,E18.4,///,1X,17HLARGURA DAS BAIAS,/,1X,4HBAIA,16X,7HLARGU
*RA)
  DO 500 K=1,N
500 WRITE(5,501)K,T(K)
501 FORMAT(1X,I4,E25.4)
  WRITE(5,223)
223 FORMAT(1X,///,1X,27HCHARACTERISTICAS DOS PILARES,/,1X,5HPILAR,15X,2
#2HMOMENTO DE INERCIA IZP,9X,20HAREA SECAO TRANS AXP)
  DO 510 K=1,NPP
  DO 510 J=1,NA
510 WRITE(5,511)K,J,IZP(K,J),AXP(K,J)
511 FORMAT(1X,I2,1H-,I2,E24.4,E31.4)
  WRITE(5,224)
224 FORMAT(1X,///,1X,25HCHARACTERISTICAS DAS VIGAS,/,1X,4HVIGA,16X,22HM
#OMENTO DE INERCIA IZV)
  DO 515 K=1,N
  DO 515 J=1,NA
515 WRITE(5,516)K,J,IZV(K,J)
516 FORMAT(1X,I2,1H-,I2,E29.4)
  WRITE(5,840)
840 FORMAT(1X,26HCARGAS PERMANENTES E VENTO)
  WRITE(5,841)(F(I),I=1,NAUX)
841 FORMAT(1X,8E14.5)
  WRITE(5,842)
842 FORMAT(1X,12HCARGAS VIVAS)
  WRITE(5,841)(FV(I),I=1,NAUX)
  RETURN
  END
C
  SUBROUTINE PAIN3(YI,YF,ZI,ZF,NPP)
C
C   LEITURA DAS CARACTERISTICAS ELASTICAS E GEOMETRICAS DOS PAINES
C   E CARREGAMENTO SOBRE ELAS
C
  REAL IZP(11,15),IZV(11,15)
  INTEGER FP(10),TIPO(10)
  DIMENSION P(11,15),T(10),AXP(11,15),IP(10),C(10),S(10),F(345)
  DIMENSION FV(345)
  COMMON/PAINEL/NA,IPAIN,TIPO,IP,FP,C,S
  COMMON/ELAST/AXP,IZP,IZV,T
  Q1=(YF-YI)/SQRT((YF-YI)**2+(ZF-ZI)**2)
  Q2=(ZF-ZI)/SQRT((YF-YI)**2+(ZF-ZI)**2)
  C(IPAIN)=Q1
  S(IPAIN)=Q2
  N=NPP-1
  2  FORMAT(8F10.0)
  READ(2,1)IGE,IGC
  IF(IGE)700,701,700
700 READ(1,IGE)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1,NP
*P),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N),T(I),I=1,N)
  GO TO 702
701 READ(2,2)E
  READ(2,2)(T(I),I=1,N)
  DO 300 I=1,NPP
300 READ(2,2)(AXP(I,K),K=1,NA)
  DO 310 I=1,NPP
310 READ(2,2)(IZP(I,K),K=1,NA)
  DO 400 I=1,NA
400 READ(2,2)(IZV(K,I),K=1,N)
  1  FORMAT(8I10)

```

```
702 WRITE(1'IPAIN)E,((AXP(I,K),K=1,NA),I=1,NPP),((IZP(I,K),K=1,NA),I=1
*,NPP),((IZV(I,K),K=1,NA),I=1,N),(T(I),I=1,N)
NAUX=2*NPP*NA+NA
DO 800 I=1,NAUX
FV(I)=0.
800 F(I)=0.
IF(IGC)705,704,705
705 READ(3'IGC)(F(I),I=1,NAUX),(FV(I),I=1,NAUX)
GO TO 706
704 READ(2,1)NNC,NAC
IF(NNC)810,811,810
810 DO 801 I=1,NNC
READ(2,3)NV,NH,A1,A2,A3,A4
NI=(NV-1)*NA+NH
J1=2*NI-1
J2=J1+1
F(J1)=A1
F(J2)=A2
FV(J1)=A3
FV(J2)=A4
3 FORMAT(2I10,4F10.0)
801 CONTINUE
811 IF(NAC)815,816,815
815 DO 802 I=1,NAC
READ(2,4)NAN,A3
4 FDRMAT(I10,F10.0)
J3=2*NPP*NA+NAN
F(J3)=A3
802 CONTINUE
816 CONTINUE
706 DO 518 K=1,NPP
DO 518 J=1,NA
518 P(K,J)=C.
WRITE(3'IPAIN){F(I),I=1,NAUX},{FV(I),I=1,NAUX}
WRITE(4'IPAIN)((P(K,J),J=1,NA),K=1,NPP)
I=1PAIN
WRITE(5,220)
220 FORMAT(1H1)
WRITE(5,221)I,N,IP(I),FP(I),TIPO(I),C(I),S(I),E
221 FORMAT(1X,10HPAINEL NO.,130,///,1X,12HNC. DE BAIAS,128,/,1X,10HNO
*INICIAL,130,/,1X,8HNO FINAL,132,/,1X,4HTIPO,136,/,1X,16HCOSSENO DE
* ALFAP,E24.4,/,1X,16HSENG DE ALFAP,E24.4,/,1X,22HMODULO DE ELAS
*ICIDADE,E10.4,///,1X,17HLARGURA DAS BAIAS,/,1X,4HBAIA,16X,7HLARGU
*RA)
DO 500 K=1,N
500 WRITE(5,501)K,T(K)
501 FORMAT(1X,14,E25.4)
WRITE(5,223)
223 FORMAT(1X,///,1X,27HCHARACTERISTICAS DOS PILARES,/,1X,5HPILAR,15X,2
*2HMOMENTO DE INERCIA IZP,9X,20HAREA SECAO TRANS AXP)
DO 510 K=1,NPP
DO 510 J=1,NA
510 WRITE(5,511)K,J,IZP(K,J),AXP(K,J)
511 FORMAT(1X,12,1H-,12,E24.4,E31.4)
WRITE(5,224)
224 FORMAT(1X,///,1X,25HCHARACTERISTICAS DAS VIGAS,/,1X,4HVIGA,16X,22HM
*OMENTO DE INERCIA IZV)
DO 515 K=1,N
DO 515 J=1,NA
515 WRITE(5,516)K,J,IZV(K,J)
```