

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

RUÍNA DE LAJES DE CONCRETO ARMADO COM EFEITO
DE MEMBRANA E REDUÇÃO GRADATIVA DA ARMADURA

RUTÊNIO GURGEL BASTOS

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1977

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

RUÍNA DE LAJES DE CONCRETO ARMADO COM EFEITO
DE MEMBRANA E REDUÇÃO GRADATIVA DE ARMADURA

ENGº RUTÊNIO GURGEL BASTOS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Telemaco van Langendonck

Prof. Dr. Ilio Montanari

Prof. Dr. Dante A. O. Martinelli

(Orientador)

Prof. Dr. Péricles B. Fusco

(Suplente)

Prof. Dr. Regis L. R. Lima

(Suplente)

SÃO CARLOS, DEZEMBRO DE 1977

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dante A. O. Martinelli, pela o rientação do trabalho e, sobretudo, pela decisiva formação profissional dedicada ao autor.

A Sêrgio Flávio Padilha, companheiro de tantos ensaios, que lado a lado soube sentir as dificuldades e as satisfações da experimentação.

Aos têcnicos Rui Roberto Casale, Wagner de Ca margo, Valdir Carlos de Lucca, Caetano Nicola Spaziano, Jor ge R. Brabo, Guarino Zambon Jr., pela boa vontade e perĩcia com que executaram os trabalhos de laboratõrio.

A Dauro R. Silva, responsável pela precisão das medidas.

A Athail R. Pulino Filho, Toshiaki Takeya e Jorge C. Ferreira, pelos valiosos comentãrios e sugestões ao trabalho e, as vezes pela ajuda espontânea nos ensaios.

A Antonio Raul Lopes, Dona Wilma e, outra vez, a Rui Roberto Casale, pelos cuidadosos trabalhos de datilografia. A equipe de desenhistas Josê Carlos Marrara e David R. Silva.

A Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo constante apoio, sem o qual este trabalho não teria sido realizado.

RESUMO

Este trabalho divide-se essencialmente em quatro partes. Na primeira, apresenta-se uma introdução ao estudo das lajes de concreto armado em regime elasto-plástico, com particular ênfase no cálculo de lajes com redução gradativa da armadura e com ação de membrana. Com relação a esses dois aspectos, estendem-se as teorias existentes para o caso de laje retangular submetida a carga concentrada.

A segunda parte do trabalho descreve o estudo experimental desenvolvido para verificar a ruína de lajes retangulares simplesmente apoiadas em todo o contorno, com redução gradativa da armadura e com ação de membrana. O carregamento adotado foi o de carga concentrada única aplicada no centro da laje.

Na terceira parte do trabalho, apresentam-se os resultados de cálculo referentes aos modelos ensaiados. Esses resultados foram divididos em: teóricos e teórico-experimentais. Os primeiros foram obtidos exclusivamente a partir da teoria descrita na parte inicial do trabalho, isto é, pela teoria das charneiras plásticas, ao passo que os resultados teórico-experimentais foram calculados levando em conta as configurações de ruína obtidas nos ensaios.

Finalmente, na quarta parte, englobando as três anteriores, apresentam-se as conclusões do trabalho realizado, observando-se principalmente as influências do efeito de membrana e da redução gradativa da armadura na ruína das lajes ensaiadas. E para dar prosseguimento a pesquisa, sugerem-se alguns temas a serem desenvolvidos em futuros trabalhos.

SUMMARY

This work is essentially divided into four parts. In the first one, an introduction to the study of reinforced concrete slabs in elastic-plastic range is given, with gradual reduction of the reinforcement and with membrane action. The existent theories related to these two aspects are extended to the case of rectangular slabs subjected to a concentrated load.

The second part describes the experimental research developed to study the collapse of rectangular slabs supported on the whole boundary, with gradual reduction of the reinforcement and with membrane action. Throughout the research, the loading was a single point load at the slab center.

In the third part, the tested models are analysed, from a "theoretical" and "experimental-theoretical" point of view. The former proceeds exclusively from the theory described in the first part, i.e., from the yield-line theory, while the "experimental-theoretical" analysis was done considering the collapse mechanisms resulting from the tests.

Finally, in the fourth part, the conclusions of the whole work carried out are shown considering specially the influences of the membrane action and of the gradual reduction of the reinforcement in the collapse of the tested slabs. Some subjects are suggested for further research.

ÍNDICE

	Pág.
1. <u>INTRODUÇÃO</u>	1-1 a 1-57
1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	1-1
1.2. OBJETIVOS	1-3
1.3. AS LAJES EM REGIME ELASTO-PLÁSTICO	1-3
1.3.1. Generalidades	1-3
1.3.2. Conceitos Básicos da Teoria das Charneiras Plásticas	1-9
1.4. RUÍNA DE LAJES RETANGULARES SOB A AÇÃO DE CARGA CONCENTRADA	
1.4.1. Generalidades, Carga Concentrada e o Efeito de Punção	1-22
1.4.2. Laje Simplesmente Apoiada com a Armadura Iguamente Distribuída em toda a sua Extensão	1-27
1.4.3. Laje com a Armadura Interrompida - Supressão Parcial e Redução Gradativa da Armadura	1-28
1.5. <u>EFEITO DE MEMBRANA</u>	
1.5.1. Revisão do Problema	
1.5.2. Método de Park	1-48
1.5.3. Extensão do Método Park	1-52
2. <u>OS MODELOS E OS ENSAIOS</u>	2-1 a 2-19
2.1. OS MODELOS	2-1
2.1.1. Descrição e Características Geométricas cas	2-1

2.1.2.	Pré-dimensionamento	2-1
2.1.3.	Composição da Argamassa	2-10
2.1.4.	Características das Armaduras	2-11
2.1.5.	Confecção dos Modelos	2-12
2.2.	OS ENSAIOS	2-15
2.2.1.	Características dos Ensaios	2-15
2.2.2.	Dispositivos de Apoio	2-15
2.2.3.	Sistema de Carga	2-15
2.2.4.	Medidas Registradas	2-17
3.	<u>RESULTADOS DOS ENSAIOS</u>	3-1 a 3-68
3.1.	APRESENTAÇÃO	3-1
3.2.	LAJES DO GRUPO 1	3-3
3.3.	LAJES DO GRUPO 2	3-16
3.4.	LAJES DO GRUPO 3	3-32
3.5.	LAJES COM ARMADURA UNIFORME.....	3-44
3.6.	PRIMEIRA COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS	3-50
3.7.	FAIXAS	3-61
3.8.	CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS MATERIAIS.....	3-61
4.	<u>RESULTADOS TEÓRICOS</u>	4-1 a 4-7
4.1.	MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO	4-1
4.2.	CARGAS DE RUÍNA	4-3
5.	<u>RESULTADOS TEÓRICO-EXPERIMENTAIS</u>	5-1 a 5-7
5.1.	Momentos de Plastificação Correspondente às Faixas Ensaçadas	5-1
5.2.	Cargas Associadas às Configurações de Ruína Obtidas nos Ensaios	5-3

5.2.1. Descrição do Processo de Cálculo	5-3
5.2.2. Resultados Obtidos	5-6
6. <u>CONCLUSÕES</u>	6-1 a 6-6
6.1. COMPARAÇÃO ENTRE AS CARGAS DE RUÍNA OBSERVADAS E AS DE CÁLCULO	6-1
6.2. CONSIDERAÇÕES FINAIS	6-2
6.3. PROSSEGUIMENTO DA PESQUISA	6-3
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	B-1 a B-5

APÊNDICE

I. CONFIGURAÇÕES DE RUÍNA	A-1 a A-20
II. CARGAS DE RUÍNA TEÓRICO-EXPERIMENTAIS	A-21 a A-32
III. ASPECTOS FOTOGRÁFICOS DOS ENSAIOS	A-33 a A-38

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A concepção e o cálculo de uma estrutura visam garantir adequada margem de segurança contra a ruína, e que em serviço ela seja capaz de resistir a todas as solicitações previstas, sem que ocorram deformações prejudiciais ou mesmo anti-estéticas, durante a sua utilização.

Para satisfazer as condições acima é necessário haver, pois, certa ponderação na escolha dos métodos de cálculo apropriados para cada tipo de estrutura. Tratando-se especificamente de lajes de concreto armado, os processos de cálculo que possibilitam análise mais racional do comportamento estrutural por ocasião da ruína, são os baseados na Teoria da Plasticidade. Por exemplo, o Método das Linhas de Ruptura de JOHANSEN [7]^(*) (que deu origem à chamada Teoria das Charneiras Plásticas), é um dos métodos que possibilitam, com relativa simplicidade e com boa aproximação, o cálculo de lajes na fase de ruína, além de proporcionar dimensionamento mais econômico do que por outros processos, exatos ou aproximados, baseados na Teoria da Elasticidade.

A principal vantagem da teoria das charneiras plásticas é que, através dela pode-se prever com suficiente precisão não só a maneira como ocorrerá a ruína (configuração de ruína), como também a carga capaz de provocá-la (carga de ruína). O conceito de ruína aqui estabelecido refere-se à perda total da capacidade resistente da estrutura; diferente portanto, do conceito clássico de ruína num ponto, o qual é adotado quando analisam-se as estruturas em regime elástico.

(*) Os números entre colchetes indicam as referências bibliográficas.

Por outro lado, a teoria da elasticidade não deve ser abandonada, pois sem ela não seria possível uma análise de deformações e de tensões quando da atuação das cargas úteis. Todavia foge do propósito deste trabalho uma discussão mais aprofundada a esse respeito.

Até 1931 bem pouco se conhecia sobre o comportamento de lajes de concreto armado na fase de ruína. Diversos trabalhos publicados até então, notadamente os de Bach (1890), Moersch (1916), Suenson (1916) e Ingerslev (1921), contribuíram parcialmente para explicar alguns casos particulares nos quais suas teorias poderiam ser aplicadas [1, 7, 9]. Todavia, não existia ainda uma teoria única e mais ampla, que satisfizesse a casos mais gerais.

Somente a partir desse ano (1931) é que a questão foi retomada e resolvida pelo engenheiro dinamarquês K.W. JOHANSEN, a quem se deve a Teoria das Charneiras Plásticas, cujas hipóteses são hoje aceitas e corroboradas por numerosos ensaios realizados em diversos países.

A partir de 1932, quando foi publicado o trabalho de Johansen, nas Memórias da Association Internationale des Ponts e Charpentiers [7], o assunto começou a tomar impulso, seguindo-se as contribuições dadas por Gvozdev na U.R.S.S., do próprio Johansen na Dinamarca e de Chamecki [1] no Brasil.

Depois de 1950, a teoria das charneiras plásticas teve um grande avanço com inúmeras publicações, podendo-se destacar, dentre outros, os trabalhos de Wood [36] na Inglaterra e os de Langendonck [12, 13, 14, 15, 16] e Zagottis [37, 38] no Brasil. Ultimamente há uma tendência cada vez mais generalizada para o cálculo de lajes de pontes utilizando os processos baseados na teoria das charneiras plásticas, é o se reflete nos trabalhos de Polilo [29], Langendonck [13] e Montanari [20].

1.2. OBJETIVOS

É sabido que a teoria das charneiras plásticas de Johansen não prevê, com suficiente precisão, a carga de ruína de lajes de concreto armado nas quais as influências de forças de membrana sejam consideráveis (efeito de membrana). Sabe-se também que a configuração de ruína depende da maneira como é distribuída a armadura na laje.

Tendo em vista estes dois aspectos, pretende-se com este trabalho verificar, através de uma análise experimental, quais as discrepâncias provenientes do efeito de membrana (de tração), para o caso de laje retangular submetida a carga concentrada única aplicada no seu centro, e cuja armadura é reduzida gradativamente, isto é, parte da armadura é suprimida em determinadas zonas afastadas da região central onde se localiza a carga.

1.3. AS LAJES EM REGIME ELASTO-PLÁSTICO

1.3.1. Generalidades

Entende-se como regime elasto-plástico o estado de solicitação no qual parte da estrutura se comporta elasticamente, estando determinadas regiões já plastificadas.

Nas lajes de concreto armado, admitindo-as sub-armadas, a plastificação inicia-se quando, em determinada região, evidentemente já fissurada, a tensão no aço da armadura tracionada atinge o limite de escoamento. Na região em que isto se dá, o momento fletor atinge o seu valor máximo, igual ao momento de plastificação, conforme se verá no item 1.3.2b.

Considere-se, por exemplo, uma laje retangular inteiramente apoiada no contorno, com armadura uniforme (Fig. 1.3-1a) e submetida a um carregamento (uniformemente distribuído em toda a laje) progressivamente crescente conforme mostra a Fig. 1.3-1b.

Inicialmente, para pequenos valores de p (trecho OA na Fig. 1.3-1b), a laje, considerada homogênea e isotrópica, comporta-se de acordo com a teoria das placas em regime elástico linear.

A partir do ponto A (Fig. 1.3-1b), inicia-se a fase de fissuração. O aparecimento das primeiras fissuras se dá quando o concreto nas seções mais solicitadas, não resistindo mais aos esforços de tração, fatura. Com o aumento do carregamento, as fissuras vão progredindo para o lado à medida que as seções não fissuradas vão sendo solicitadas por momentos fletores iguais aos que provocaram as primeiras fissuras. Enquanto isso, as seções já fissuradas anteriormente continuam a se deformar, embora com a armadura de tração ainda na fase elástica e as fissuras apresentando pequenas aberturas. Para o estudo do comportamento das lajes nessa fase, ainda é aplicável a teoria das placas em regime elástico, desde que se considere a redução da rigidez das seções fissuradas.

Com o crescimento dos momentos fletores nas seções mais solicitadas (seções contidas no plano B-B na Fig. 1.3-1a), a partir do ponto B da curva $p(\delta)$ (Fig. 1.3-1b), a laje entra em regime elasto-plástico devido à plastificação daquelas seções pelo escoamento do aço da armadura. Nas seções em que isto acontece, os momentos fletores permanecem praticamente constantes e iguais ao momento de plastificação. Em seguida, devido a uma redistribuição dos esforços solicitantes, os acréscimos dos momentos fletores, que se manifestariam nas seções plastificadas, são transferidos para as seções vizinhas até que estas se plastifiquem.

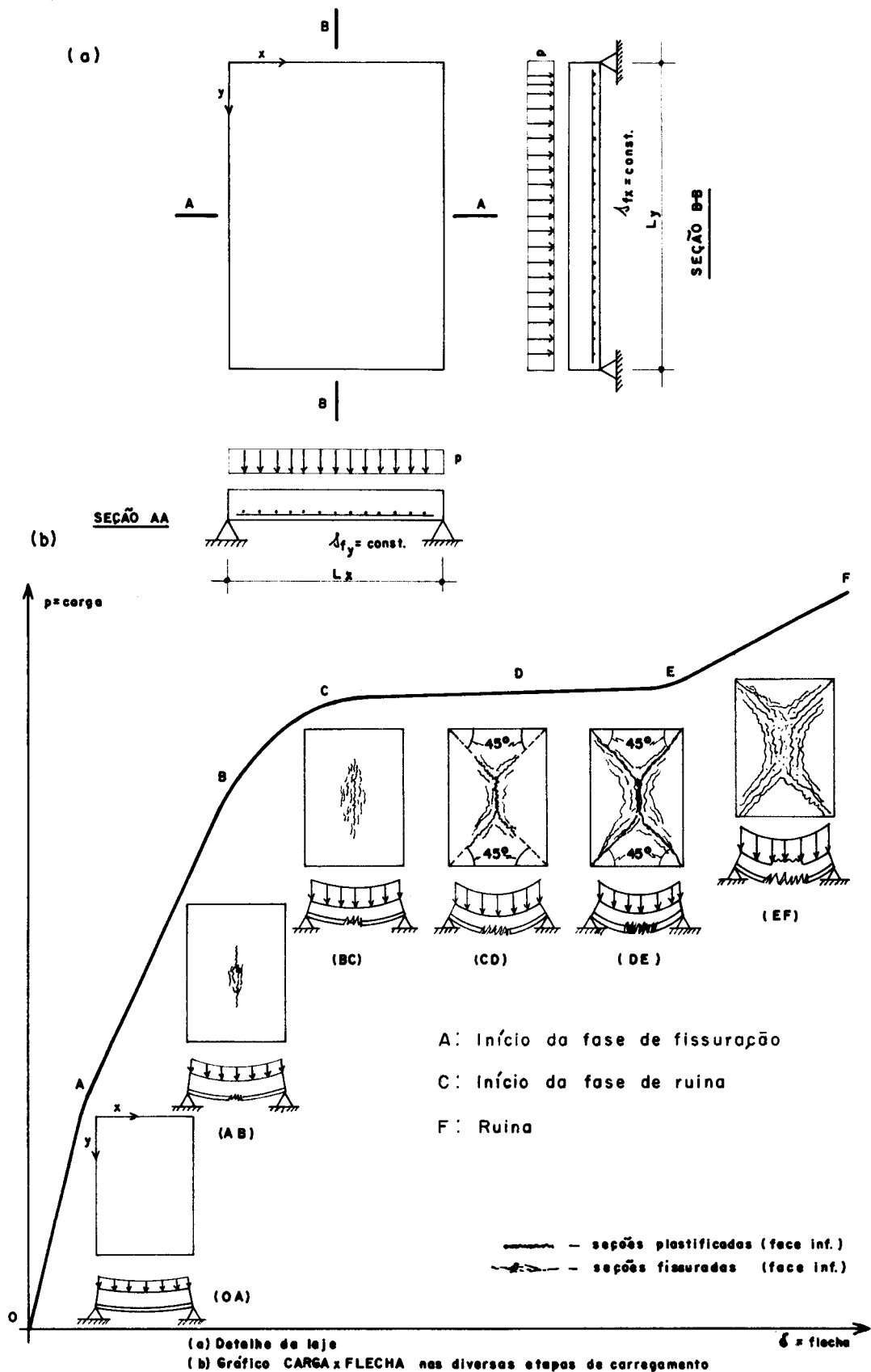


Fig 1.3.1- Comportamento de uma laje retangular de concreto armado submetida a carga uniformemente distribuída.

Este processo de redistribuição dos momentos continua, até que, com o aumento progressivo das cargas (trecho CD), a linha de plastificação bifurca-se (nas duas extremidades), alcançando os cantos de laje, formando com eles, praticamente, ângulos de 45° . A partir do ponto D, após o completo desenvolvimento das linhas de plastificação, a laje passa a se deformar quase livremente sem aumento substancial de carga, até que, nas seções plastificadas, com a subida da linha neutra, o concreto rompe por compressão. Nessas circunstâncias, diz-se que a laje está na fase crítica do regime elasto-plástico (fase de ruína), em que o seu comportamento se assemelha ao de uma estrutura hipostática, sendo desprezíveis as deformações elásticas em face das deformações plásticas. Nessa fase as linhas de plastificação funcionam como eixos de rotação relativa entre as diversas partes de laje não plastificadas. As linhas de plastificação são chamadas de charneiras plásticas, e a configuração apresentada por elas é a configuração de ruína.

Entretanto, mesmo após a completa formação das charneiras e apesar das deformações excessivas, o estado final de ruína não foi atingido, pois a laje ainda oferece uma considerável reserva de resistência (trecho EF na Fig. 1.3-1b). É que os deslocamentos provocados pelas rotações em torno das charneiras modificam a geometria da estrutura. Com isto surgem forças normais nas seções (efeito de membrana), o que dá à laje um comportamento de casca, aumentando sua capacidade de resistência [38]. Deve-se salientar que, mesmo nas lajes livremente apoiadas, o efeito de membrana de tração poderá ocorrer devido à formação de um "quadro" comprimido definido pelas faixas de laje que acompanham os apoios, o qual impede de certa forma os deslocamentos horizontais da região central da laje. Desse modo a laje ficará dividida em duas regiões: uma mais externa (comprimida) e outra central (tracionada) onde se dará a ação de membrana propriamente dita. Segundo Save e Massonnet 31, outro fator responsável por esse acréscimo de resistência, é o fenômeno de "endurecimento" do aço da armadura, que provoca um aumento da sua resistência após o limite de escoamento. Com a continuação do carregamento, acaba-se por a-

tingir o ponto F (Fig. 1.3-1b), que é o ponto em que se dá a ruína propriamente dita da laje.

Ao analisar as lajes em regime elasto-plástico é necessário caracterizar bem as fases de plastificação. Na fase anterior à de ruína, pelo fato de coexistirem zonas plastificadas, zonas fissuradas e zonas não fissuradas, sem que a estrutura se torne hipostática, a análise teórica torna-se bastante difícil [37].

Outra vantagem da teoria das charneiras plásticas, para o cálculo de lajes em regime elasto-plástico, consiste justamente no fato de se poder prever a ruína de uma laje, sem que para isso se tenha que recorrer à história do carregamento ou ao progresso da fissuração anterior à ruína, porém desprezando os efeitos da membrana. Entretanto, se se considerarem esses efeitos, deve-se recorrer a alguns processos que resolvem o problema para certos casos particulares.

Os efeitos de membrana podem se manifestar de duas maneiras distintas: (1) Pela ação de arqueamento (efeito de compressão); (2) com a formação da chamada membrana plástica tracionada (efeito de tração). Ambos podem ocorrer, por exemplo, em painéis interiores de laje contínua, nos quais os deslocamentos laterais são parcial ou totalmente impedidos pelas vigas e painéis adjacentes (Fig. 1.3-2).

Seja a laje contínua da Fig. 1.3-2, uniformemente carregada até que se formem as charneiras plásticas com a configuração da Fig. 1.3-2a. Para tanto, é necessário que as vigas sejam suficientemente rígidas de modo a evitar a formação de rótulas plásticas. Após a formação da configuração de ruína, se se aumentar a carga, as lajes, isoladas, continuarão se deformando plasticamente tendendo a se deslocarem lateralmente no contorno. Por exemplo, a laje I (Fig. 1.3-2b), que ao tender se deslocar horizontalmente nas bordas provoca uma compressão lateral nas vigas, e estas, por sua vez reagem em sentido contrário, desenvol

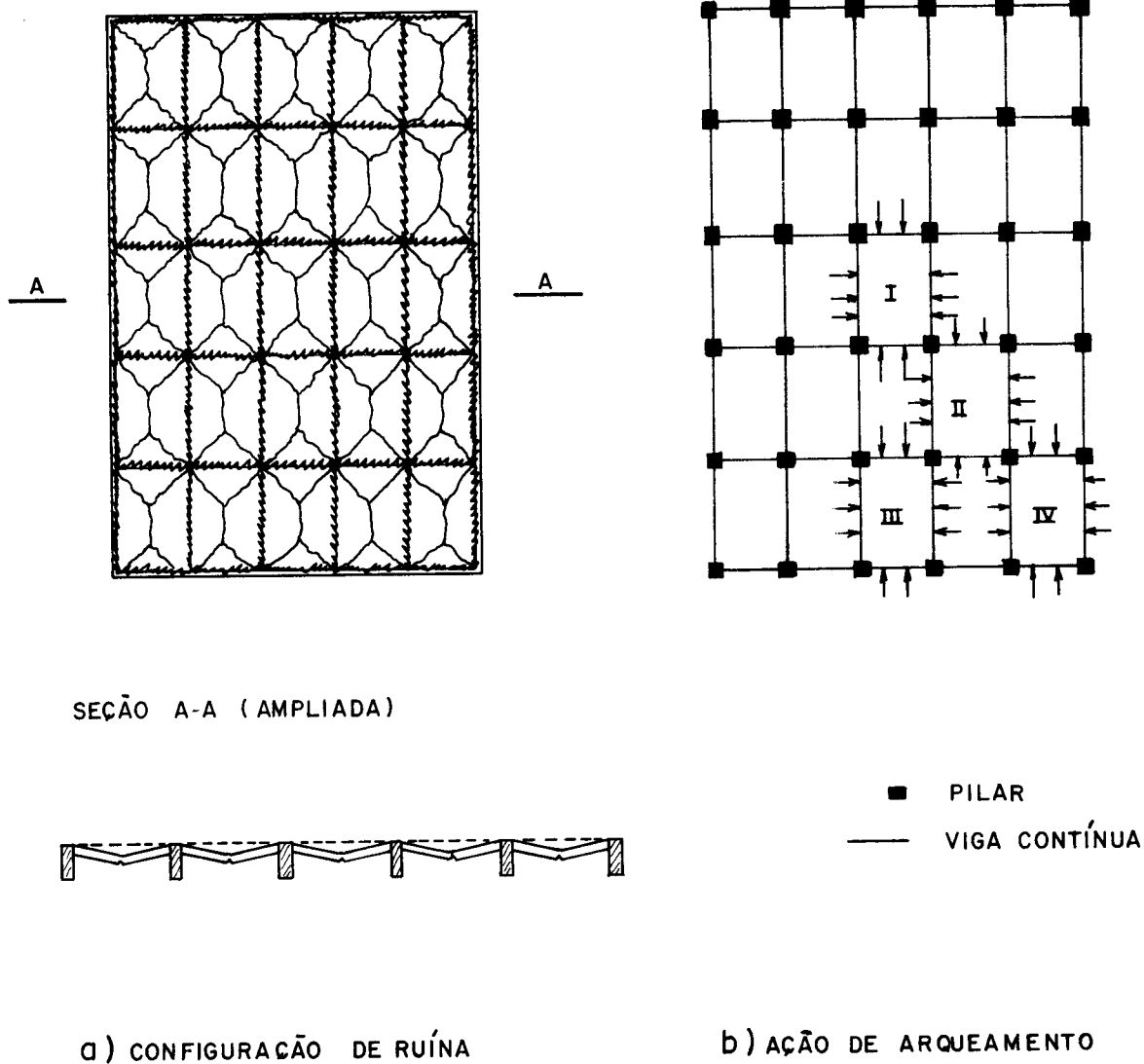


Fig 1.3-2

vendo na laje o efeito de arqueamento, conforme mostra a Fig. 1.3-3a. Pela Fig. 1.3-2b observa-se que a ação de arqueamento pode se dar, praticamente, numa só direção (Laje III), ou em duas simultaneamente (Laje I). Portanto, quanto mais interior seja o painel maior será a ação de arqueamento por causa da rigidez dos painéis circunvizinhos.

Park [28] observou a partir de resultados experimentais que, o comportamento (carga-flecha) de lajes com deslocamentos horizontais impedidos no contorno, tinha o aspecto indicado no gráfico da Fig. 1.3-3b. Nas diversas lajes ensaiadas, foi constatado que as cargas correspondentes aos pontos B (Fig. 1.3-3b) eram bem maiores do que as calculadas pela teoria das charneiras plásticas de Johansen. Esse aumento de carga ele atribuiu à influência do e-

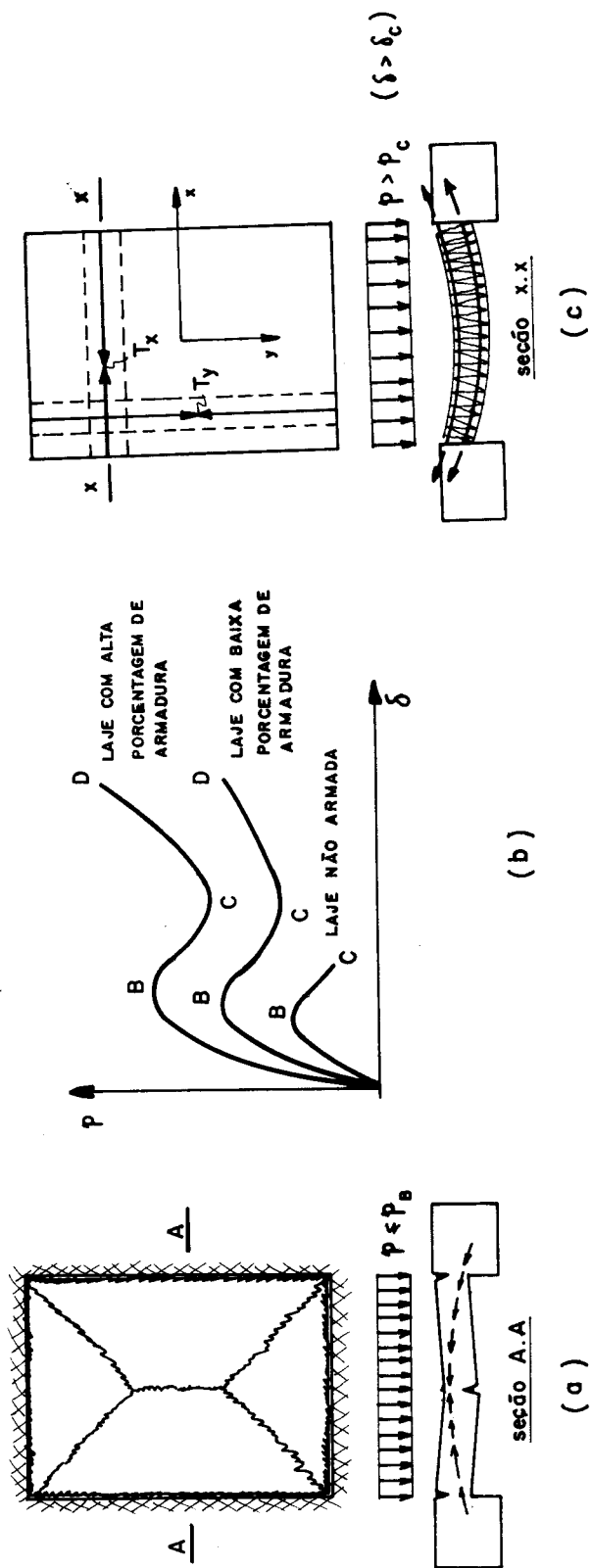


Fig. 1.3-3

feito de arqueamento. Park notou também que em lajes com elevada taxa de armadura, mesmo depois de cessado o efeito de arqueamento (a partir do C), ainda havia uma reserva de resistência que se pronunciava com a laje já bastante deformada (trecho CD na Fig. 1.3-3b). Esse acréscimo de carga ele atribuiu ao efeito de membrana de tração, que ocorre com a transformação da laje numa membrana plástica traçionada (Fig. 1.3-3c).

No ítem 1.5 são descritos alguns processos de cálculo que resolvem o problema para lajes com determinadas condições de contorno e de carregamento.

1.3.2. Conceitos básicos da teoria das charneiras plásticas.

1.3.2a. Generalidades. Hipóteses gerais

O cálculo de lajes de concreto armado pela teoria das charneiras plásticas consiste em determinar os momentos resistentes que se devem atribuir à laje em estudo de modo a garantir que sua ruína não se dê sob a ação de cargas inferiores às cargas úteis (de serviço), já multiplicadas pelos respectivos coeficientes de segurança.

A teoria é aplicável às lajes de espessura constante, com armadura distribuída uniformemente em duas direções, embora as áreas da armadura por unidade de largura das seções normais às direções das barras possam ser diferentes. Entretanto, a porcentagem de armadura tem que ser suficientemente pequena para que a plastificação se dê pelo escoamento do aço da armadura antes do rompimento do concreto por compressão (seções sub-armadas).

As hipóteses básicas da teoria das charneiras plásticas são as seguintes:

I) As retas normais ao plano médio da laje, antes da deformação, permanecem perpendiculares à superfície média da laje deformada.

II) A ruína da estrutura dá-se quando, pelo efeito da plastificação, ela se torna hipostática.

III) Na flexão simples, a laje pode ser considerada como um elemento estrutural de comportamento rígido-plástico perfeito. Isto equivale a admitir que, durante a ruína (Fig. 1.3-4), as deformações elásticas das regiões não plastificadas podem ser desprezadas em face das deformações plásticas que ocorrem ao longo das linhas de plastificação, nas quais os momentos fletores permanecem praticamente constantes e iguais aos respectivos momentos de plastificação (item 1.3.2b).

Dessa maneira, a laje inicialmente plana antes de se deformar, após a plastificação toma a forma de uma superfície poliédrica^(*), cujas arestas são as linhas de plastificação e as linhas de apoio que servem de eixos de rotação das diversas partes - supostas planas - em que fica dividida a laje. Por isso, as linhas de plastificação são chamadas de charneiras plásticas.

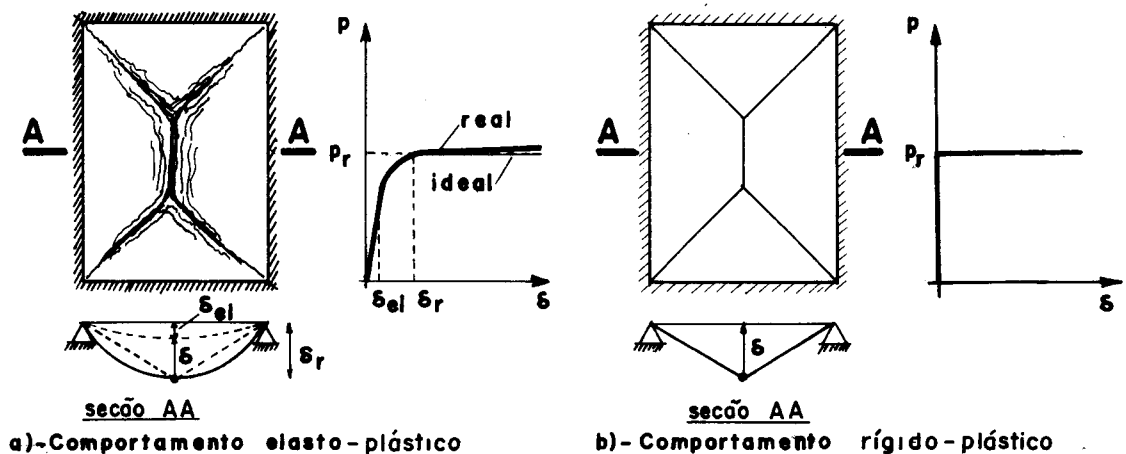


Fig. 1.3-4

(*) Em alguns casos, como o de carga concentrada, pode ocorrer que a ruína se dê com superfície cônica (vide item 1.4).

1.3.2b. Momentos de plastificação

Sabe-se que uma seção de concreto armado solicitada à flexão simples pode atingir o estado de ruína de duas maneiras distintas:

- 1) pelo escoamento, ou deformação plástica excessiva, do aço da armadura de tração, antes de o concreto romper por compressão ("peça sub-armada");
- 2) pela ruptura do concreto por compressão, antes de o aço da armadura entrar na sua fase plástica ("peça super-armada").

Na teoria das charneiras plásticas sã se considera a plastificação de acordo com o primeiro critério. Esta imposição provem do fato que, se as seções não forem sub-armadas, talvez não tenham suficiente capacidade de rotação para a formação das charneiras necessárias para a estrutura tornar-se hipostática.

A Fig. 1.3-5 mostra o comportamento típico de uma seção sub-armada solicitada predominantemente à flexão. Na Fig. 1.3-5a apresenta-se, de maneira simplificada, o comportamento momento-curvatura de acordo com a idealização elastoplástica, isto é, considerando-se as deformações elásticas. Na Fig. 1.3-5b mostra-se o diagrama adotado pela teoria das charneiras plásticas, no qual sã se consideram as deformações plásticas (comportamento rígido-plástico).

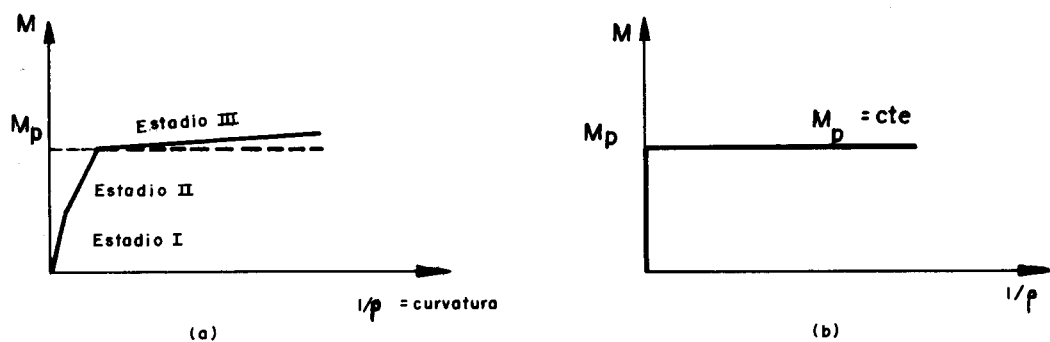


Fig. 1.3.5

Para efeito de cálculo, ambas as idealizações conduzem praticamente ao mesmo M_p . Porém, é mais vantajoso admitir-se a idealização rígido-plástica já que ela proporciona o estudo da estrutura deformada sem se preocupar com as deformações elásticas e elasto-plásticas.

O momento fletor M_p , que é considerado como momento de plastificação, pode ser obtido, por exemplo, a partir das equações de equilíbrio no estágio III. Assim, para a seção retangular da Fig. 1.3-6, admitida distribuição uniforme das tensões de compressão no concreto, obtém-se:

$$b_w y f_{ck} = A_s f_{yk} \quad \dots\dots\dots (1.3-1)$$

$$M_p = M_{ult} = A_s f_{yk} (d - \frac{y}{2}) \quad \dots\dots\dots (1.3-2)$$

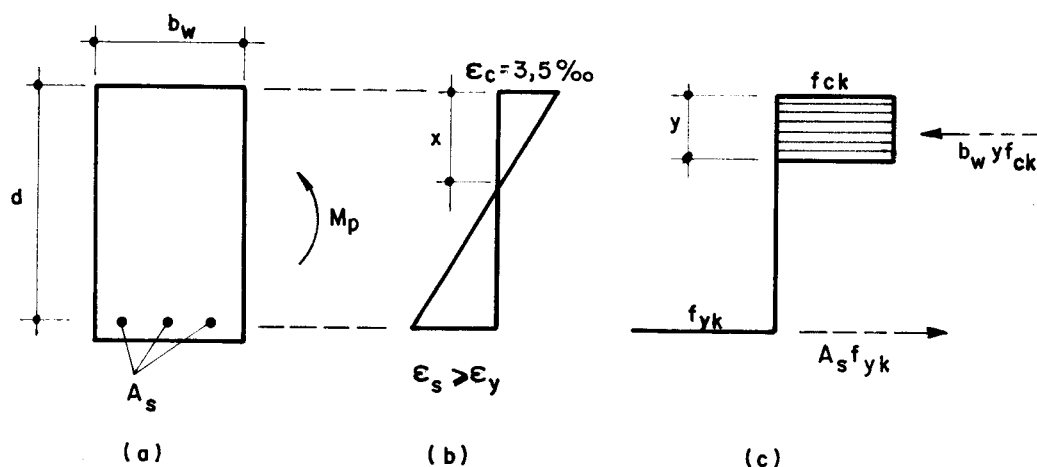


Fig. 1.3.6

Combinando-se as equações (1.3-1) e (1.3-2), tem-se:

$$M_p = A_s f_{yk} (d - \frac{A_s f_{yk}}{2 b_w f_{ck}}) \quad \dots\dots\dots (1.3-3)$$

Havendo armadura de compressão, pode ela ser levada em conta, introduzindo-se nas equações de equilíbrio (1.3-1 e 1.3-2) os efeitos da resultante das tensões de compressão naquela armadura.

Entretanto, deve-se salientar que, para efeito de projeto, o cálculo deve ser feito de acordo com os recentes conceitos de estado limite último, previsto na nova Norma Brasileira NB-1/78 (Ítem 4.1).

Para as lajes considera-se o momento de plastificação por unidade de largura, isto é, para as seções normais à direção das barras da armadura:

$$m = \frac{M_p}{b_w} = a_s f_{yk} \left(d - \frac{a_s f_{yk}}{2 f_{ck}} \right) \dots\dots\dots (1.3-3A)$$

onde

$$a_s = \frac{A_s}{b_w} \dots\dots\dots (1.3-3B)$$

Como a direção das barras da armadura não é obrigatoriamente perpendicular às seções plastificadas, há necessidade de conhecerem os momentos de plastificação correspondentes às charneiras inclinadas em relação às direções das barras.

Considere-se, por exemplo, a disposição da charneira ab (Fig. 1.3-7) e sejam m_1 e m_2 os momentos de plastificação correspondentes às seções normais às direções das barras (dispostas ortogonalmente)^(*). Desprezando-se os efeitos dos momentos volventes e dos momentos fletores agentes nas seções normais a direção da charneira considera-se da tem-se [15]:

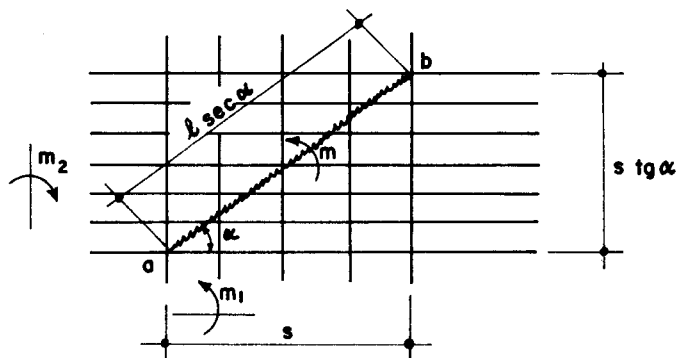


Fig 1.3-7

(*) Para o caso de armadura disposta em duas direções não ortogonais, pode-se recair no caso de barras ortogonais utilizando-se a Transformação de Langendonck [15].

$$m = m_1 \cos^2 \alpha + m_2 \sin^2 \alpha \dots\dots\dots (1.3-4)$$

Para o caso de lajes isótropas ($m_1 = m_2$), tem-se:

$$m = m_1 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = m_1 \dots\dots\dots (1.3-4A)$$

Isto é, os momentos de plastificação são iguais em quaisquer direções.

1.3.2c. Configurações de ruína

A posição e a orientação das charneiras plásticas dependem essencialmente das condições de apoio, da natureza e disposição das cargas, bem como da própria distribuição das armaduras na laje. Evidentemente, a configuração das charneiras que provoca a ruína da laje deve satisfazer a determinadas condições [15], para que a deformação que acompanha a ruína da laje seja geometricamente possível, tendo em vista que os elementos da laje delimitados pelas charneiras permanecerão planos, em face do que se disse na hipótese III. De todas as configurações de charneiras geometricamente possíveis, denominadas simplesmente de "configurações possíveis", somente uma, chamada de "configuração de ruína", é a que teoricamente vai se verificar.

Como ponto de partida para a determinação das configurações possíveis, pode-se seguir as seguintes regras básicas:

- Cargas distribuídas geralmente determinam charneiras retas; embora nem sempre a configuração determinada por elas seja a mais a desfavorável.
- Ao longo de contornos engastados formam-se charneiras negativas (Fig. 1.3-8b,e).

- Cada charneira passa pelo ponto de interseção dos eixos de rotação das partes de laje delimitadas por aquela charneira (Fig. 1.3-8a).
- Os eixos de rotação das diversas partes de laje divididas pelas charneiras coincidem com lados simplesmente apoiados (Fig. 1.3-8a), ou com lados engastados (Figs. 1.3-8b e 1.3-8c), ou passam pelos pontos de apoio isolados (Figs. 1.3-8c, 1.3-8d e 1.3-8f).

Pode-se observar pela Fig. 1.3-8 que, para cada caso, existe uma família de configurações possíveis caracterizadas por certas incógnitas. Por exemplo, no caso da Fig. 1.3-8a, as configurações possíveis dependem do ângulo α que define a orientação da charneira \underline{ab} , bem como da posição relativa das extremidades \underline{a} e \underline{b} na reta suporte.

Quando houver contorno curvilíneo (Fig. 1.3-9), este pode ser tratado como o limite de um contorno poligonal, cujos lados se tornam infinitamente pequenos. As charneiras que deveriam convergir para os vértices do polígono, ficarão encostadas umas às outras, formando uma superfície regradada, mas não plana, que se admite ser possível.

Todavia, para uma dada laje, conhecendo-se as diversas configurações possíveis, há necessidade de se determinar as respectivas cargas que as produzem*. Isto, porque pelo teorema cinemático da teoria de plasticidade, a menor carga (carga de ruína) irá corresponder a configuração de ruína, a qual é dentre todas as configurações possíveis a que mais se aproxima da real.

Reciprocamente, se se conhece o valor da carga de ruína, a configuração de ruína correspondente é aquela que conduz ao máximo valor do momento de plastificação, para o qual se vai dimensionar a peça.

(*) A teoria das charneiras plásticas trata somente de "cargas proporcionais", isto é, aquelas que crescem ou decrescem sempre se mantendo proporcionais entre si, e sem mudar de sentido [15].

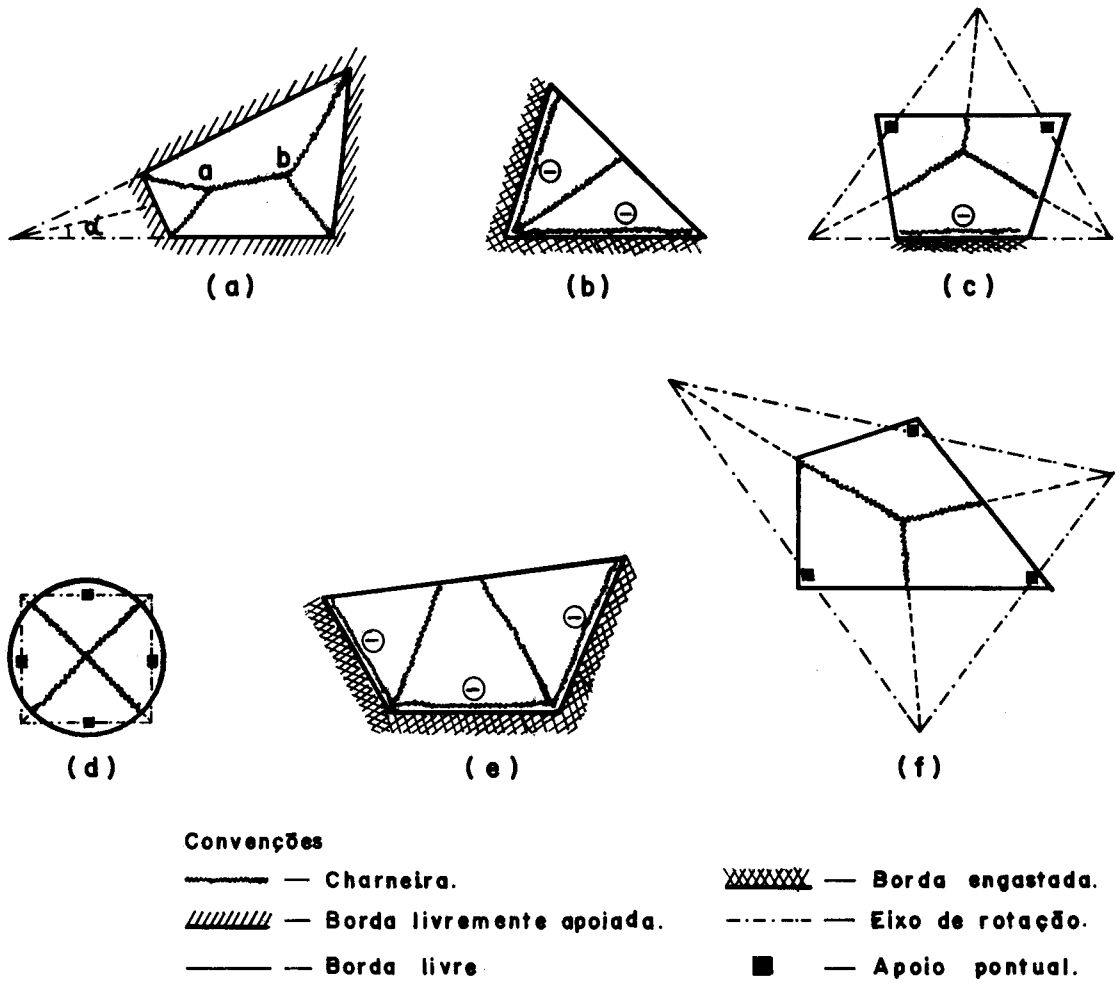


Fig.1.3.8 — Exemplos de configurações possíveis.

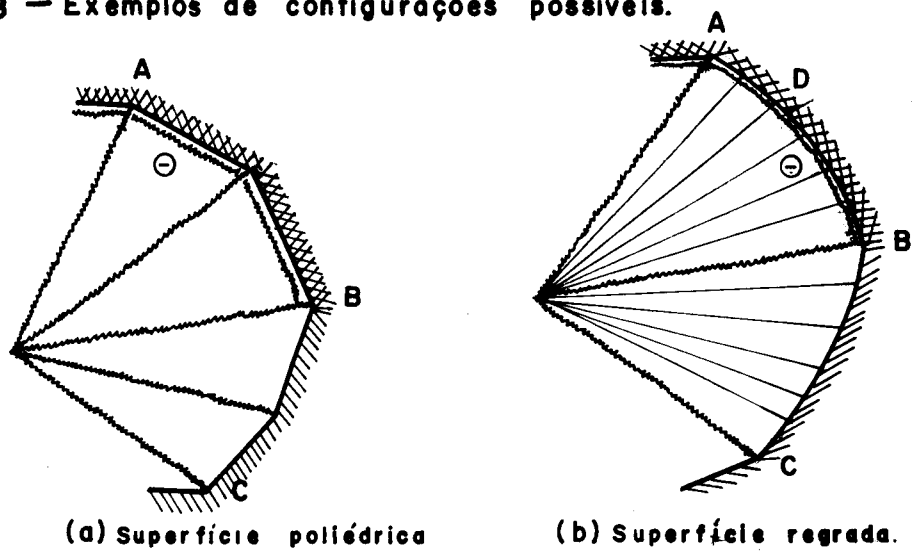


Fig.1.3.9 — Configurações de ruína de lajes com contornos poligonal (a) e curvilíneo (b).

Em qualquer caso deve-se levar em conta que a solução baseada no teorema cinemático ou é a verdadeira ou fica contra a segurança. Isto é, num problema de determinação de carga, obtem-se geralmente uma carga de ruína maior que a real. Entretanto, na prática procura-se obter a solução aparentemente mais desfavorável, deixando por conta do coeficiente de segurança a cobertura da eventual diferença que possa existir [15]. Além disso, há outras simplificações que proporcionam sempre uma segurança adicional; por exemplo:

- separar a carga em duas ou mais partes e somar os momentos de plastificação resultantes, obtendo-se assim um momento maior que o verdadeiro (Superposição de Efeitos);
- mudar a posição da carga por outra mais desfavorável, ou concentrar, em um ponto conveniente, carga distribuída em certa região [15].

1.3.2d. Energia e intensidade de carga

Define-se como carga de ruína a mínima carga capaz de transformar a laje numa estrutura hipostática.

Como se disse no item anterior (1.3.2c), dada uma laje solicitada por certo carregamento cujas cargas podem variar mantendo-se proporcionais entre si, a carga de ruína pode ser determinada aplicando-se o teorema cinemático (limite superior para as cargas) às diversas configurações possíveis; a configuração de ruína é aquela associada a menor carga.

A intensidade de carga correspondente a uma determinada configuração possível, pode ser obtida pelo Método da Energia ou pelo Processo das Forças Nodais [8]. Ambos conduzem à mesma intensidade de carga [9].

O Método da Energia consiste em igualar-se a energia desenvolvida pela carga durante o deslocamento inicial da laje, à energia exigida pelas charneiras para se deformarem na mesma ocasião. Ou seja, o trabalho das forças externas (W_e) é igual ao trabalho das forças internas (W_i):

$$W_e = W_i \dots\dots\dots (1.3-5)$$

O trabalho das forças externas devido a um deslocamento virtual $\delta(x,y)$ é dado por:

$$W_e = \sum_n \left(\iint_{S_n} p \delta(x,y) dS_n + \oint_{\ell} P \delta(s) ds + \sum_i P_i \delta_i \right) \dots (1.3-6)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$ indica o número das partes de lajes dividida pelas charneiras. As três parcelas da somatória representam, respectivamente, os trabalhos realizados pelas cargas de superfície, pelas cargas atuantes ao longo de uma linha e pelas cargas concentradas.

Durante o deslocamento virtual inicial os diversos elementos de laje sofrem rotações relativas. A energia necessária para produzir esses deslocamentos é calculada por:

$$W_i = \sum_n (m_j \theta_j \ell_j + m_k' \theta_k' \ell_k') \dots\dots\dots (1.3-7)$$

Isto é, em um dado elemento de laje (Fig. 1.3-10) a energia dissipada nas charneiras é obtida pelos trabalhos dos momentos de plastificação ao longo das charneiras. A esse trabalho são somados os trabalhos das outras partes da laje.

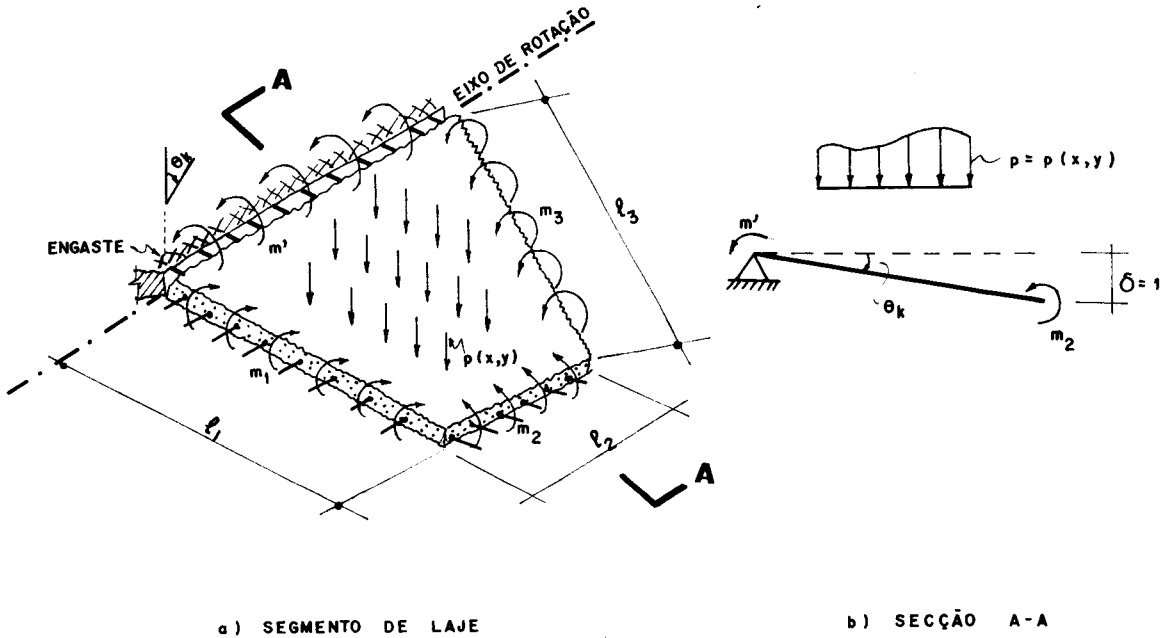


Fig 1.3-10

Na prática, ao invés de se calcular os valores de W_e e W_i pelas expressões (1.3-6) e (1.3-7) respectivamente, o que se faz é o seguinte:

Para o cálculo de W_e utiliza-se o princípio da superposição dos efeitos, pois conduz a resultados a favor da segurança, ou seja, superpõem-se os valores de W_e calculados para as respectivas configurações independentes:

$$W_e = W_e(P) + W_e(\bar{P}) + W_e(P) < W_e(p, \bar{P}, P) \dots (1.3-8)$$

Para o cálculo de W_i , multiplicando-se as rotações relativas (ângulo diedro), dos vários segmentos de laje, ao longo das charneiras pelos respectivos momentos de plastificação totais ($m_i \cdot l_i$), obtendo-se para cada configuração:

$$W_i = \sqrt{(m_j \cdot l_j \cdot \theta_j + m'_k \cdot l'_k \cdot \theta'_k)} \dots (1.3-9)$$

onde, os índices j e k referem-se, respectivamente, às charneiras positivas e negativas.

Para o caso de lajes isótropas a expressão (1.3-9) transforma-se em:

$$W_i = \sum^m \ell_j \theta_j + m' \sum \ell'_k \theta'_k \dots\dots\dots (1.3-10)$$

Quando se tratar de lajes ortótropas (Fig. 1.3-11a), elas podem ser transformadas [15], para efeito de cálculo, em lajes isótropas (com momentos de plastificação m e m') através de simples relações de afinidade; ou seja, multiplicando-se por $1/\sqrt{\lambda}$ todas as suas medidas na direção normal aos planos que resistem a λm e $\lambda m'$ (Fig. 1.3-9b). Se existirem cargas concentradas ou cargas lineares, pode-se imaginar que elas sejam distribuídas, respectivamente, numa pequena área ou sobre uma faixa muito estreita, porém com seus valores totais alterados na proporção de $1/\sqrt{\lambda}$.

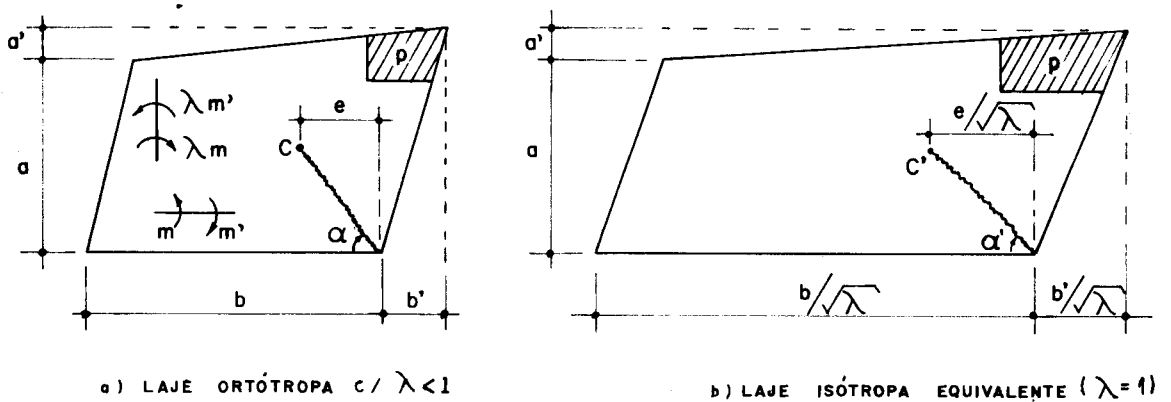


Fig. 1.3-II

Conhecidas as expressões de W_e e W_i , procura-se rearranjar os termos da expressão (1.3-5) conforme o tipo de problema. Isto é, se se tratar de problema de determinação de carga (cálculo de verificação), exprimem-se as intensidades das respectivas cargas de ruína em função de um ou mais parâmetros que definem a configuração possível. Assim

sendo, para uma dada laje, a expressão geral da carga que se procura tem a forma:

$$p = m \cdot f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r) \dots\dots\dots (1.3-11)$$

Os valores das incôgnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ podem ser determinados resolvendo-se o sistema de equações obtido a partir das equações (1.3-12):

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_r} = 0$$

..... (1.3-12)

Os valores de x_i assim calculados conduzem, pela expressão (1.3-11), ao mínimo valor de p .

Se se tratar de problema de dimensionamento procede-se analogamente, porém, procurando-se os valores de x_i que maximizam a expressão de m . Ou ainda, conhecendo-se os valores de x_i que tornam mínima a expressão de p , obtém-se o máximo valor de m por:

$$m = \frac{p}{f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r)} \dots\dots\dots (1.3-13)$$

1.4. RUÍNA DE LAJES RETANGULARES SOB A AÇÃO DE CARGA CONCENTRADA

1.4.1. Generalidades. Carga concentrada e o efeito de punção

Antes de serem abordadas as soluções do problema de lajes retangulares sob a ação de carga concentrada única (itens 1.4.2 e 1.4.3), apresentam-se a seguir alguns aspectos relacionados com o efeito de punção, o qual é intimamente ligado à ruína das lajes coqueleto (sem capitel), ou mesmo daquelas submetidas a elevadas forças concentradas francamente predominantes sobre as demais cargas (peso próprio da laje, etc.), como as aqui estudadas.

A ruína por punção é um fenômeno que ainda não está suficientemente esclarecido, permanecendo assim em aberto as discussões a esse respeito. Sabe-se porém que, em princípio, a resistência à punção depende dos seguintes fatores [31]:

- qualidade do concreto;
- armadura de flexão;
- distribuição dos momentos fletores nas vizinhanças da carga concentrada;
- relação entre a pequena área de aplicação da carga e a altura útil da laje.
- armadura especial para combater as tensões de cisalhamento.
- existência do efeito de arqueamento

Os métodos de cálculo comumente empregados para a determinação da resistência à punção, são baseados em fórmulas empíricas que levam em conta a existência, ou não, de armadura especial para combater as tensões de cisalhamento.

De acordo com as recentes modificações introduzidas na Norma Brasileira (NB-1/78; ítem 4.1.5), a necessidade de se armar as lajes contra a punção fica subordinada à verificação de uma tensão tangencial - suposta uniformemente distribuída - na superfície lateral de um prisma (ou cilindro) reto, cuja base é definida pelo contorno C' e cuja altura é igual a altura útil d da laje (Fig. 1.4-1). Isto é, para que somente o concreto colabore para resistência à punção, é necessário que a tensão tangencial obtida através de (1.4-1) não ultrapasse a metade de um valor limite (τ_{wu}) especificado pela Norma (ítem 5.3.1.2b), ou seja:

$$\tau = \frac{P}{ud} < \frac{\tau_{wu}}{2} \quad \dots\dots\dots (1.4-1)$$

onde, P é a carga de cálculo (já majorada pelo respectivo coeficiente de segurança) e u representa o perímetro do contorno C' (Fig. 1.4-1).

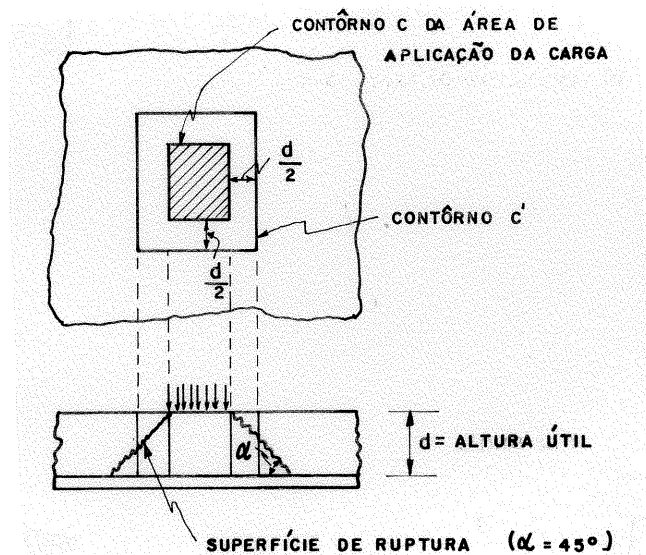


Fig. 1.4-1

Entretanto, se o valor de τ for superior à metade de τ_{wu} mas inferior a τ_{wu} , dever-se-á dispor uma armadura transversal capaz de absorver pelo menos 75% do valor de cálculo da força concentrada aplicada à laje.

Todavia, o critério de cálculo estabelecido acima é uma aproximação que conduz a bons resultados somente para o caso de não haver armadura especial para combater a punção. De certa forma esse critério baseia-se no fato de que, a ruína por punção é um fenômeno que ocorre por cisalhamen-

to puro ao longo de uma superfície piramidal (ou cônica se o contorno C for circular), cujas faces laterais estão inclinadas a 45° em relação ao plano da laje, conforme mostra a Fig. 1.4-1b.

Na realidade, tratando-se do caso em que existe armadura contra a punção, tem-se verificado que a superfície de ruptura pode ser bem mais abatida, principalmente nos casos em que a carga ocupa uma posição de simetria [3]. Alguns autores, Leonhardt [17], por exemplo, sugere que a superfície de ruptura deve ser considerada como a de um tronco de cone, cuja geratriz faz com o plano da laje um ângulo de aproximadamente 30° [Fig. 1.4-2].

Quanto a disposição da armadura especial contra a punção, Leonhardt [17] dá uma indicação que concorda praticamente com a proposição de outros autores, como por exemplo, a de Steinmann^(*).

Seguindo-se a orientação de Leonhardt [17], a armadura transversal, necessária para resistir à punção, deve ser distribuída numa zona da laje, próxima da região de aplicação da carga e limitada pela distância $b = d_s + 4h$, conforme indica a Fig. 1.4-2 (laje coqueiro sem capitel). Em geral, essa armadura pode ser constituída de estribos de pequeno diâmetro ($\phi \leq h/20$), igualmente espaçados o mais próximo possível ($a \leq h/2$) e suficientemente ancorados nas barras superiores e inferiores (Fig. 1.4-2).

Já a NB-1/78 (item 4.1.5.2) dá uma indicação pouco diferente. Isto é, a armadura transversal contra a punção deve estar disposta numa região limitada pelas distâncias $0,5d$ e $1,5d$ a partir do contorno da área de aplicação da carga (Fig. 1.4-2). Quanto ao diâmetro e ao afastamento das barras dessa armadura (estribos) a Norma não especifica explicitamente. Por outro lado, ela impõe um limite para a máxima tensão na armadura ($\sigma_s = f_{yd} < 3.000 \text{ kgf/cm}^2$), o que, de certa forma, faz com que se possa recair em pequenos diâmetros e pequenos espaçamentos das barras.

Quando se tratar de caso que justifique cálculo mais rigoroso, o dimensionamento das lajes contra a punção pode ser feito por outros métodos mais precisos, como os

(*) Proposta apresentada na "10ª Reunião Plenária" do CEB. - Londres, 1965 [3].

As unidades que devem ser empregadas na expressão (1.4-2) são: $F = \text{kgf}$ e $L = \text{cm}$.

Onde:

u : perímetro da área de aplicação da carga

h : altura útil da laje

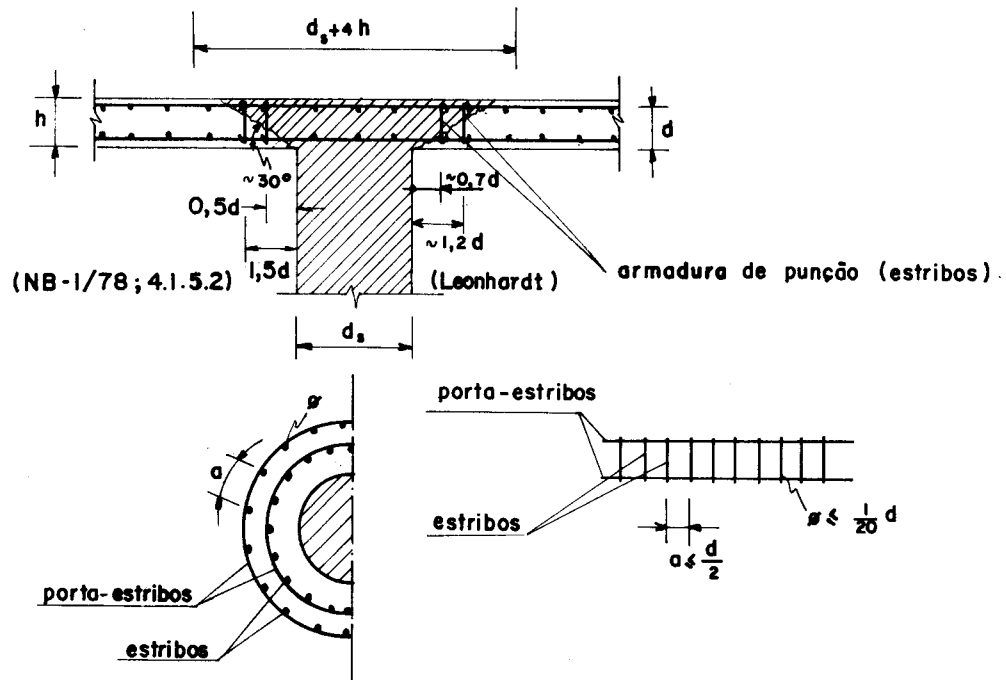


Fig.1.4-2

de Moe e Langendonck, ambos descritos em [3]. Resumidamente esses métodos são os seguintes:

- Método de Moe:

Para lajes sem armadura transversal, a carga de ruína por punção é dada por (1.4-2):

$$P_M = u h \sqrt{\sigma'_{br}} \left[\frac{4(1 - 0,075 \frac{d_s}{h})}{1 + 1,4 \left(\frac{u h \sqrt{\sigma'_{br}}}{p_f} \right)} \right] \dots \dots (1.4-2)$$

As unidades que devem ser empregadas na expressão (1.4-2) são: $F = \text{kgf}$ e $L = \text{cm}$.

Onde:

u : perímetro da área de aplicação da carga

h : altura útil da laje

\underline{d}_s : lado do quadrado ou diâmetro do círculo onde é aplicada a carga^(*);

σ'_{br} : resistência à compressão do concreto, obtida em corpos de prova cilíndricos;

P_f : carga de ruína por flexão, determinada pela teoria das charneiras plásticas;

- Método de Langendonck

Tratando-se de lajes com armadura transversal, Langendonck sugere que a carga de ruína por punção pode ser obtida pela soma de dois termos P_b e P_a . O primeiro termo (P_b) representa a contribuição do concreto e o segundo termo (P_a) representa a contribuição da armadura transversal. Ou seja:

$$P = P_b + P_a \quad \dots\dots\dots (1.4-3)$$

O valor de P_b pode ser obtido, por exemplo, através da expressão (1.4-1). E o valor de P_a , pela seguinte expressão:

$$P_a = \left(\frac{3}{4} \frac{\sqrt{A_t}}{h} \right) (A_t \sigma_{te} \text{sen} \alpha) \quad \dots\dots\dots (1.4-4)$$

Onde:

A_t : área total da armadura transversal;

σ_{te} : tensão de escoamento de cálculo do aço da armadura transversal;

α : inclinação, sobre o plano da laje, das barras da armadura transversal.

h : altura útil da laje.

(*) Esta particularidade, deve-se ao fato de a fórmula (1.4-2) ter sido originalmente obtida a partir de resultados de ensaios em lajes coqueleto, nas quais, a carga concentrada proveniente da reação do pilar, era suposta distribuída numa pequena área circular ou quadrada.

1.4.2 - Laje simplesmente apoiada com armadura igualmente distribuída em toda sua extensão

A ruína por flexão, de lajes retangulares simplesmente apoiadas, com carga concentrada no centro e cuja armadura seja igualmente distribuída em toda a sua extensão, pode ocorrer segundo uma das seguintes configurações (Fig. 1.4-3):

- Sem charneiras negativas e com charneiras positivas coincidentes com as diagonais do retângulo (Fig. 1.4-3a). À essa configuração corresponde a seguinte carga de ruína:

$$P = \frac{8m}{\text{sen}2\alpha} \dots\dots\dots (1.4-5)$$

- Com quatro leques de charneiras positivas dirigindo-se do centro para os cantos e quatro charneiras negativas próximas aos vértices do retângulo (Fig. 1.4-3b). Para essa configuração a carga de ruína correspondente é dada por:

$$P = 8m' \left(\frac{\text{sen}2\psi_0 - 2\psi_0 + 0,5\pi}{1 - \text{cos}2\psi_0} \right) \dots\dots\dots (1.4-6)$$

- Com duas charneiras negativas circulares acompanhadas de dois leques de charneiras positivas (Fig. 1.4-3c), sendo $\text{sen}\psi_1 = \sqrt{1-\mu} \geq a/b$, isto é, se $m' \leq m(\text{tg}^2\alpha - 1)$, pois do contrário não se poderá formar o leque dentro da laje. A expressão que fornece a carga de ruína para esse caso é dada pela (1.4-7):

$$P = 2(m+m')A_\mu \dots\dots\dots (1.4-7)$$

onde: $A_\mu = 2\sqrt{\mu(1-\mu)} + 2\text{arc cos } \sqrt{\mu} \dots\dots\dots (1.4-8)$

$$\mu = m'/(m+m')$$

- Com as charneiras positivas formando uma superfície cônica com vértice no ponto de aplicação da carga (Fig. 1.4-3d), para a qual a carga de ruína é dada pela expressão (1.4-9):

$$P = 2\pi m \dots\dots\dots (1.4-9)$$

Dependendo do valor de μ , a configuração de ruína definitiva será aquela correspondente à menor carga.

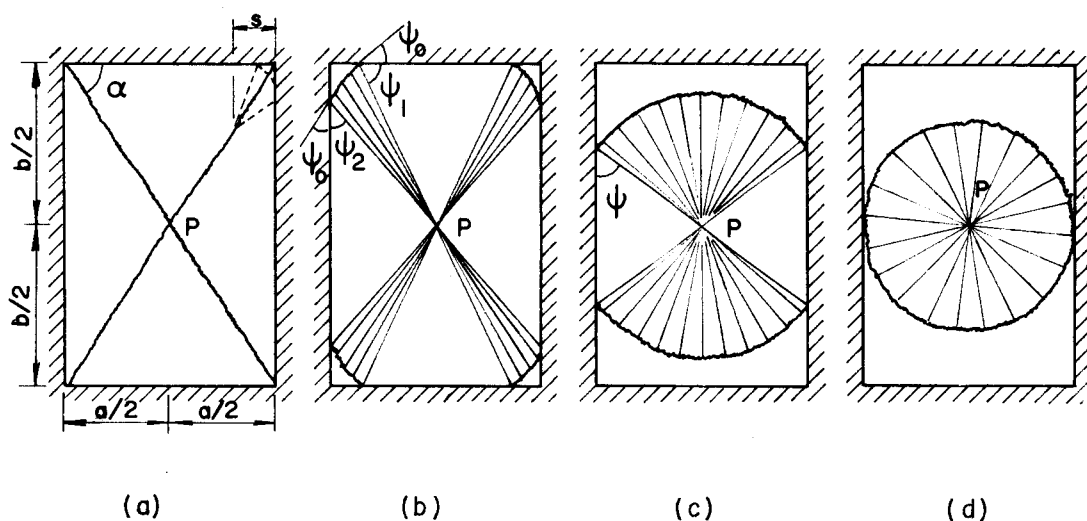


Fig.1.4-3

1.4.3 - Laje com armadura interrompida - redução gradativa da armadura

1.4.3a - Critérios para a supressão parcial das armaduras

Tudo o que se disse nos itens anteriores a respeito da ruína de lajes de concreto armado referia-se à condição de laje igualmente armada em toda sua extensão. Entretanto, há casos, como o de carga concentrada fixa, em que a armadura necessária para resistir a essa carga não precisa estender-se sobre toda a laje. Isto é, há zonas da laje nas quais as armaduras podem ser reduzidas ou mesmo

suprimidas, sem que a laje venha sofrer diminuição de sua resistência.

Um dos critérios para reduzir ou suprimir parte da armadura sem que a laje fique menos resistente, refere-se ao caso em que a carga concentrada não é predominante sobre as demais cargas atuantes. Neste caso, imagina-se uma região da laje completamente isolada do restante e arma-se só essa parte como se a linha de separação das duas regiões constituísse borda livre de laje. É o caso, por exemplo, de carga junto a canto encastrado em ângulo reto (Fig. 1.4-4). Supondo que o ponto de aplicação da carga se encontre sobre a bissetriz do ângulo reto (Fig. 1.4-4a), a região que se deve armar (somente para m') fica delimitada pelo quadrado de lados $(a+x)$, sendo x dado pela expressão (1.4-10), conforme é demonstrado em [15] (*). Desse modo, admitindo-se $m' = P/2\pi$, para que não ocorra ruína local, isto é, para que a configuração de ruína não se dê em forma de cone de base circular, tem-se, para a configuração de ruína da Fig. 1.4-4a, a seguinte expressão:

$$\frac{P}{2m'} = \frac{\bar{q}}{4} + \frac{x}{a} - 0,05\left(\frac{x}{a}\right)^2 \dots\dots\dots (1.4-10)$$

ou, reciprocamente, se se fixar m' , o valor de x que conduz ao mínimo consumo de aço será dada por [15]:

$$x = a \left(10 - \sqrt{115,7 - 10P/m'} \right) \dots\dots\dots (1.4-11)$$

Quando o ponto de aplicação da carga não se acha muito próximo das bordas (Fig. 1.4-4b) o processo anterior não pode ser aplicado, mesmo que a carga concentrada ainda

(*) Para a carga fora da bissetriz, a região a ser armada deve ser tratada como laje ortótropa com momentos de plastificação m' e $\lambda m'$, correspondentes, respectivamente, às duas direções ortogonais.

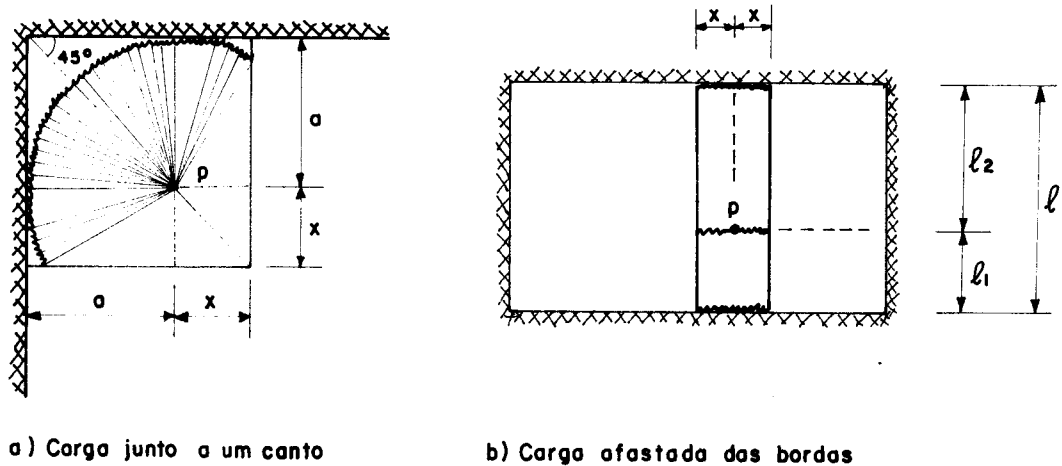


Fig 1.4-4

não seja predominante em relação às demais cargas atuantes na laje. Assim, por exemplo, para a laje indicada na Fig. 1.4-4b, para efeito de cálculo, isola-se do resto da laje uma faixa retangular de largura $2x$ e faz-se o cálculo como se se tratasse de uma viga bi-engastada. Obtendo-se para a carga a seguinte expressão:

$$P = 2xm' \cdot \frac{1}{\ell_1} + 2xm \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right) + 2xm' \cdot \frac{1}{\ell_2} \dots (1.4-12)$$

ou, simplificando:

$$\frac{P}{m+m'} = 2x \left(\frac{\ell}{\ell_1 \ell_2} \right) \dots \dots \dots (1.4-13)$$

Para se ter o menor valor de x possível, que é uma solução economicamente favorável, deve-se usar a máxima armadura construtivamente admissível, isto é, adotar os maiores m ou m' permitidos. Se os apoios não forem engastados é mais econômico adotar sô armadura inferior. Isto corresponde a fazer-se $m' = 0$ na expressão (1.4-13). Em todo caso, para que se possa utilizar a solução indicada aci-

ma, deve-se ter $m' \ll m$, de modo que a configuração de ruína se dê com a formação de charneiras negativas retas e acompanhando os apoios [15].

Um segundo critério para se suprimir parte da armadura, refere-se ao caso em que o efeito da carga concentrada \bar{e} predominante em relação ao das outras cargas. Neste caso, os processos anteriores não devem ser aplicados por causa da fissuração que poderá ocorrer na situação de serviço. Portanto, ao invés de armar-se somente parte da laje, supondo-a isolada do restante, admite-se que toda a laje possa colaborar na resistência à carga, embora com parte da armadura suprimida.

Considere-se, por exemplo, o caso de laje retangular inteiramente engastada no contorno e com carga no centro (Fig. 1.4-5). Se a laje for calculada supondo a armadura igualmente distribuída em toda a sua extensão (Fig. 1.4-5a), a solução que se obtém para o caso da laje isotrópica \bar{e} dada por (1.4-14):

$$\frac{P}{m+m'} = 2\pi \dots\dots\dots (1.4-14)$$

Entretando, como a correspondente configuração de ruína restringe-se à região central da laje, há zonas afastadas da charneira negativa circular (Fig. 1.4-5a), nas quais as armaduras podem ser reduzidas sem que a laje fique menos resistente [15]. Isto pode ser feito, admitindo-se que a configuração de ruína assume a forma indicada na Fig. 1.4-5b, ao invés da forma cônica (Fig. 1.4-5a) que \bar{e} o caso de laje com a armadura constante em toda a sua extensão.

Tratando-se de cálculo de dimensionamento, o problema consiste em saber: 1) quais os valores que se devem atribuir aos momentos de plastificação, $m_1 < m$ e $m'_1 < m'$, correspondentes às regiões de armadura mais fraca (zonas pontilhadas da Fig. 1.4-5b); 2) a largura da faixa de laje mais armada (região definida pela distância $2a$), sobre a qual se estendem as armaduras correspondentes aos momentos

de plastificação m e m' , já determinados previamente de modo a satisfazer a condição (1.4-15)

$$(m+m') \geq \frac{P}{2\pi} \dots\dots\dots (1.4-15)$$

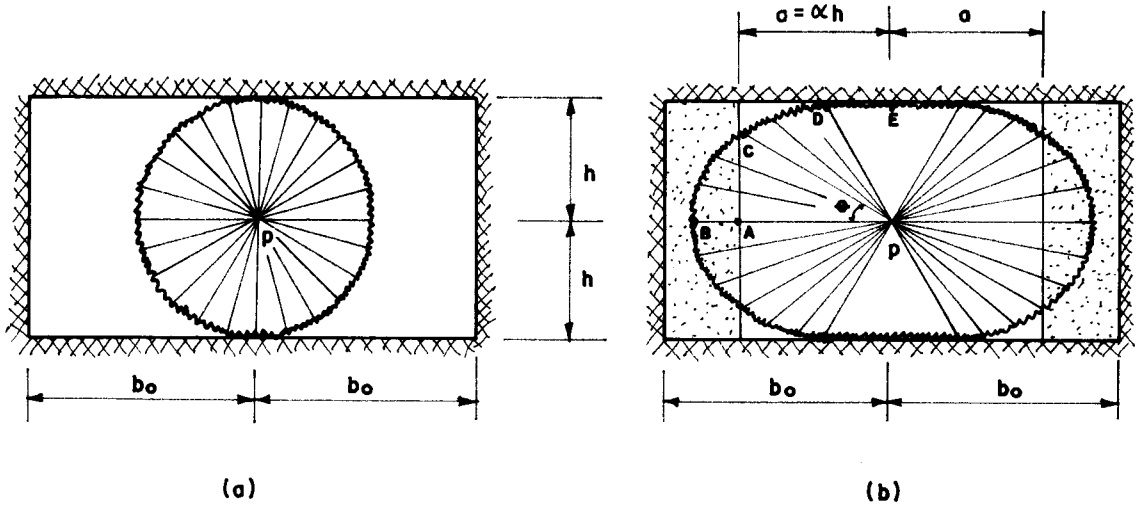


Fig 1. 4-5

Supondo que a configuração de ruína \bar{e} da Fig. 1.4-5b, conclui-se, a partir de cálculos aproximados [15], que o ângulo θ mais desfavorável pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$\theta \cong \frac{2}{3}(\alpha-1) \dots\dots\dots (1.4-16)$$

Onde:

$$\alpha = \frac{a}{h} \dots\dots\dots (1.4-17)$$

Sejam P_a e P_b , parcelas da carga P , correspondentes, respectivamente, às charneiras CDE e BC (inclusive as positivas de leque PBCDP), tais que, por simetria:

$$P = 4(P_a+P_b) \dots\dots\dots (1.4-18)$$

e, ainda a partir dos cálculos que conduziram à expressão (1.4-16), tem-se:

$$\frac{P_a}{m+m'} \cong \frac{\pi}{2} - \frac{2}{9} (\alpha-1) (7-4\alpha) \dots\dots\dots (1.4-19)$$

$$\frac{P_b}{m+m'} = K\theta \dots\dots\dots (1.4-20)$$

onde K é um coeficiente que leva em conta a redução da armadura, sendo, portanto, função de α , μ_1 e μ . Segundo Langendonck [15], pode-se tomar para K o valor dado pelas igualdades (1.4-21):

$$K = \frac{m_1 + c_1(m - m_1) + m_1'}{m + m'} = (1 - c_1 + c_1\mu_1)k + c_1(1 - \mu) \dots\dots (1.4-21)$$

onde: c_1 , μ_1 , μ e k , são definidos pelas seguintes expressões:

$$c_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \dots\dots\dots (1.4-22)$$

$$\mu_1 = \frac{m_1'}{m_1 + m_1'} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{m'}{m + m'} \dots\dots\dots (1.4-23)$$

$$k = \frac{m_1 + m_1'}{m + m'} \dots\dots\dots (1.4-24)$$

Para que a laje, no conjunto, tenha a mesma resistência daquela igualmente armada em toda a sua extensão com m e m' , isto é, para que:

$$\frac{P}{m+m'} = \frac{4(P_a + P_b)}{m+m'} = 2\pi, \dots\dots\dots (1.4-25)$$

deve-se ter, combinando-se (1.4-16), (1.4-19), (1.4-20) e (1.4-25):

$$K = \frac{1}{3} (7-4\alpha) \dots\dots\dots (1.4-26)$$

Portanto, igualando-se (1.4-21) e (1.4-26), conclui-se que, fixando-se m_1 e m_1' , existe um único valor de α que satisfaz a condição (1.4-25), e vice versa.

Por exemplo, se se mantiver a mesma armadura inferior ($m_1 = m$), tem-se, de (1.4-21):

$$k = \frac{1-\mu}{1-\mu_1} \dots\dots\dots (1.4-27)$$

Igualando (1.4-26) e (1.4-27), obtem-se:

$$\frac{1-\mu}{1-\mu_1} = \frac{1}{3} (7-4\alpha) \dots\dots\dots (1.4-28)$$

$$\alpha = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{1-\mu}{1-\mu_1} \right) \dots\dots\dots (1.4-29)$$

Na Fig. 1.4-6, apresenta-se um gráfico onde se pode obter α em função de μ_1 , para diversos valores de μ .

Do gráfico da Fig. 1.4-6 conclui-se que, fixando-se um valor de α compatível com as dimensões da laje em estudo e adotando-se um valor para $\mu^{(*)}$, obtem-se diretamente o valor de μ_1 correspondente a α e μ . E através da primeira expressão de (1.4-23), com $m_1 = m$, tem-se:

$$\frac{m_1'}{m_1} = \frac{m_1'}{m} = \left(\frac{\mu_1}{1-\mu_1} \right) \dots\dots\dots (1.4-30)$$

(*) Em geral procura-se adotar para μ , valores próximos dos que se obteriam com o cálculo em regime elástico. Isto é, μ entre 0,5 e 0,6, os quais correspondem a m'/m entre 1 e 1,5.

Se se tratar de problema inverso, isto é, caso se queira determinar α , com μ_1 prefixado, o procedimento é semelhante; nesse caso, deve ser escolhida uma das curvas correspondentes a μ , a qual conduza a um valor de α que justifique a redução da armadura. (*)

Um dos casos particulares desse problema, é o de laje "sem" a armadura inferior e com a superior sujeita a redução. Embora este caso não seja empregado na prática corrente, é interessante abordá-lo para mostrar a grande flexibilidade que a teoria das charneiras plásticas oferece para o dimensionamento das lajes.

Considere-se, portanto, os de valores de μ e μ_1 dados por (1.4-23). Substituindo êsses valores em (1.4-29) e fazendo $m_1 = m$, tem-se:

$$\alpha = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{m+m_1'}{m+m_1} \right) \dots\dots\dots (1.4-31)$$

Fazendo-se $m \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \alpha = \alpha^* = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{m_1'}{m_1} \right) \dots\dots\dots (1.4-32)$$

A expressão (1.4-32) representa a equação de uma reta com α^* em função da relação m_1'/m_1 (Fig. 1.4-6). Uma conclusão que se pode tirar a partir dos limites de m_1'/m_1 é que, mesmo usando sô armadura superior, esta ainda pode ser reduzida até a condição de $m_1' = 0$ ($\alpha = 1,75$). Entretanto, essa redução sô se justifica no caso de laje bastante alongada (Fig. 1.4-7).

(*) Uma outra alternativa seria pesquisar-se o valor de α que conduzisse ao menor consumo teórico da armadura, para μ e μ_1 , prefixados [15].

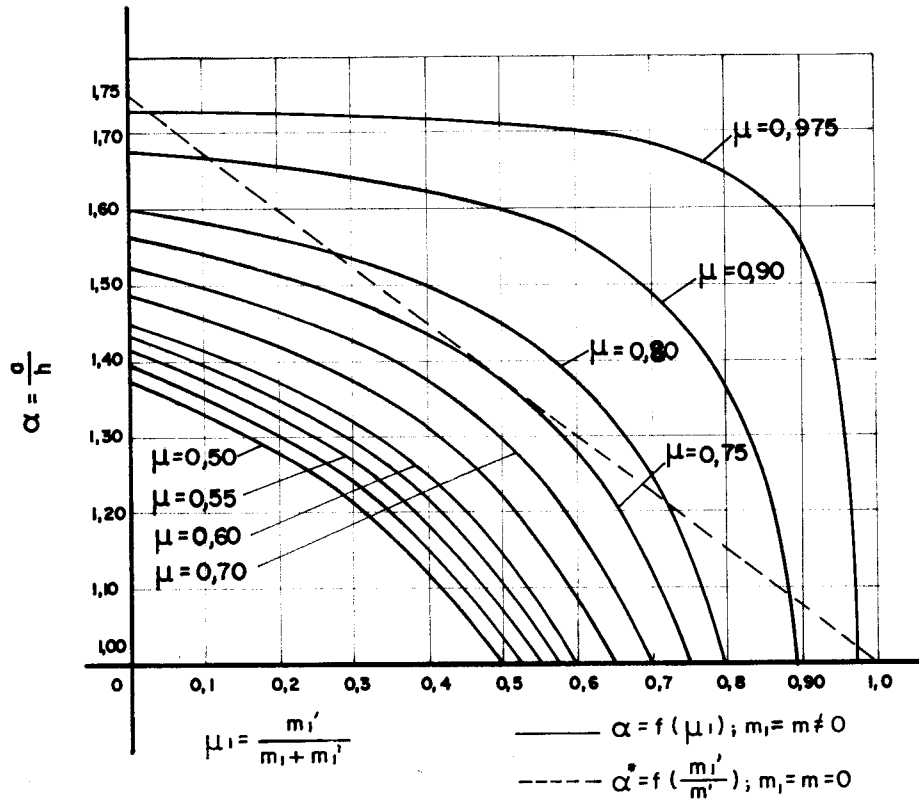


Fig. 1.4.6

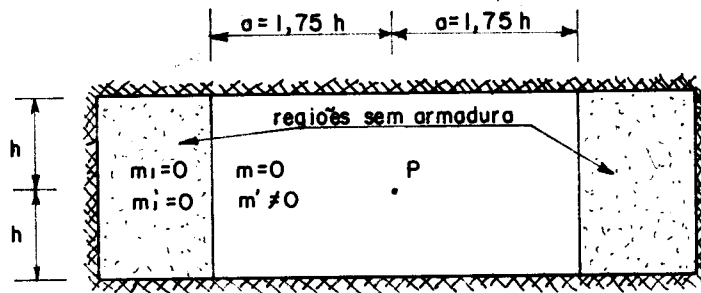


Fig. 1.4.7

Um outro problema interessante, que também pode ser estendido às lajes simplesmente apoiadas, se refere ao caso em que se deseja reduzir as armaduras de modo que a razão entre elas permaneça constante ($m'_1/m_1 = m'/m$). A solução que se obtém neste caso é análoga à do problema anterior, bastando para isso se fazer $\mu_1 = \mu$ na expressão (1.4-21) e combinar com (1.4-23), (1.4-24) e (1.4-26); ou seja, já simplificando, tem-se:

$$\frac{k_1 + c_1(1 - k_1) + k'_1}{1 + k'} = \frac{7 - 4\alpha}{3} \dots\dots\dots (1.4-33)$$

onde: $k_1 = \frac{m_1}{m}$; $k'_1 = \frac{m'_1}{m}$ e $k' = \frac{m'}{m}$ (1.4-34)

Com a condição de $m'_1/m_1 = m'/m$, obtém-se de (1.4-34) as seguintes relações:

$$\frac{k'_1}{k_1} = \frac{m'_1}{m_1} = \frac{m'}{m} = k' \dots\dots\dots (1.4-35)$$

$$\therefore k'_1 = k_1 \cdot k' \dots\dots\dots (1.4-36)$$

Substituindo-se (1.4-22) e (1.4-36) em (1.4-33), tem-se:

$$k_1 + \left(\frac{1 - k_1}{1 + k'_1}\right) \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{7 - 4\alpha}{3} \dots\dots\dots (1.4-37)$$

ou, em termos de μ :

$$k_1 + \frac{(1 - k_1)(1 - \mu)}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{7 - 4\alpha}{3} \dots\dots\dots (1.4-38)$$

Portanto, conhecendo-se o valor de k'_1 ou μ e fixando-se α , é possível determinar-se o correspondente valor de $k_1 = m_1/m$; ou vice-versa: se se fixar um valor pa

ra k_1 , pode-se obter o valor de α correspondente, através de (1.4-38). Para se analisar melhor a variação de α com k_1 e μ , apresenta-se na Fig. 1.4-8 um gráfico contendo várias curvas de α em função de k_1 , para diversos valores de μ .

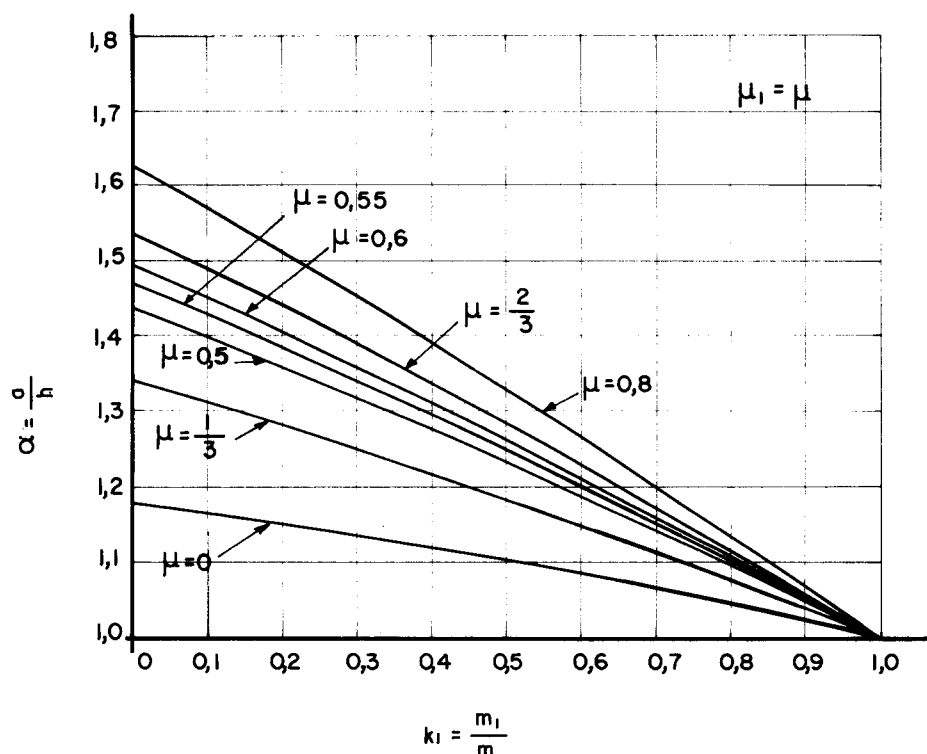


Fig 1.4-8

Quanto às lajes simplesmente apoiadas, sabe-se que se for feito o dimensionamento com a armadura uniformemente distribuída em toda a extensão da laje, é mais econômico adotar-se $\mu = 0,15$. Portanto, se se desejar reduzir a armadura correspondente à carga concentrada, a solução que se obtém é a mesma da laje engastada com $m' = 0$. O procedimento que se deve adotar será então o mesmo seguido para a laje engastada com $\mu_1 = \mu$, só que com a particularidade de $\mu = 0$. Dessa maneira, o gráfico

da Fig. 1.4-8 poderá ser utilizado, bastando para isso, es colher a curva correspondente a $\mu = 0$.

Para um cálculo menos rigoroso pode-se adotar, ao invés da expressão (1.4-38) ou o gráfico da Fig. 1.4-8, a seguinte fórmula aproximada.

$$\alpha = a_{\mu} + (1-a_{\mu})k_1 ; 0 < k_1 < 1 \quad \dots\dots (1.4-39)$$

onde:

$$a_{\mu} = 0,577\mu + 1,161 \quad \dots\dots\dots (1.4-40)$$

1.4.3b. Cálculo aproximado de verificação de lajes retangulares com armaduras interrompidas.

Este problema poderá surgir quando se desejar sa ber a carga de ruína de determinada laje na qual se suprimiu parte da armadura.

Considere-se, por exemplo, uma laje retangular como a da Fig. 1.4-9, a qual teve a sua armadura reduzida em determinadas regiões (regiões pontilhadas da Fig. 1.4-9). Supõe-se que a laje tenha em cada região a mesma resistência nas duas direções ortogonais, porém com $m_1 < m$ e $m'_1 < m'$.

Adotando-se como configuração de ruína a configuração indicada na Fig. 1.4-9, tem-se, em coordenadas polares, as seguintes equações:

- Trecho DC (espiral logarítmica):

$$\rho_1 = \frac{h}{\text{sen}\gamma} e^{c(\phi-\phi_0)} ; \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_0 + \beta \quad \dots\dots (1.4-41)$$

$$\rho'_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial \phi_1} = \frac{ch}{\text{sen}\gamma} e^{c(\phi-\phi_0)} \quad \dots\dots\dots (1.4-42)$$

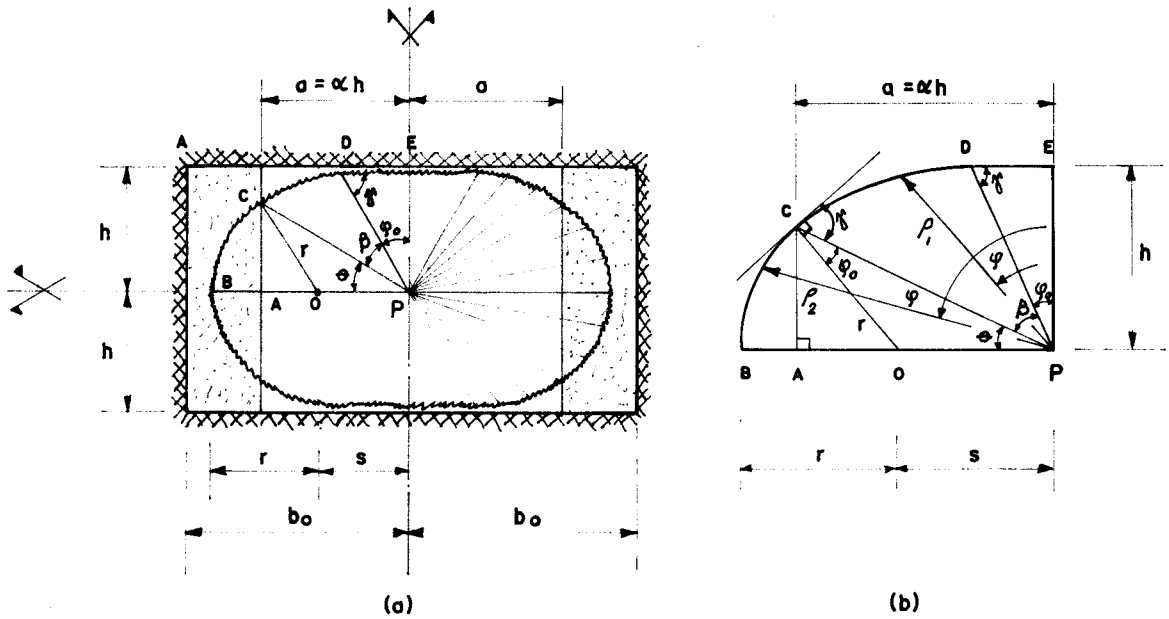


Fig 1.4 9

onde:

$$c = \cot\gamma = \text{constante} \dots\dots\dots (1.4-43)$$

- Trecho CB (arco de círculo com centro em 0)

$$\rho_2 = s \cdot \sin\phi + \sqrt{r^2 - s^2} \cos\phi \quad ; \quad \phi_0 + \beta \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \dots\dots (1.4-44)$$

$$\rho_2' = \frac{\partial \rho_2}{\partial \phi} = \frac{\rho_2 s \cos\phi}{\sqrt{r^2 - s^2} \cos\phi} \dots\dots\dots (1.4-45)$$

Chamando de P_a a parcela de P correspondente às charneiras do trecho CDE (inclusive as positivas do leque PCD), tem-se [15]:

$$\frac{P_a}{m+m'} = \cot\gamma + (1 + \cot^2\gamma) \beta = c + (1 + c^2) \beta \dots\dots\dots (1.4-46)$$

Pela Fig. 1.4-9b tem-se que:

$$a = \overline{PC} \cos \theta \quad \dots\dots\dots (1.4-47)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - (\beta + \phi_0) = \frac{\pi}{2} - \left[\beta + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \right] \quad \dots\dots (1.4-48)$$

$$\therefore \theta = \gamma - \beta \quad \dots\dots\dots (1.4-49)$$

O valor de \overline{PC} pode ser obtido através da equação (1.4-41) da espiral logarítmica, ou seja:

Para $\phi = \phi_0 + \beta$, tem-se:

$$\overline{PC} = \rho_1 = \frac{h}{\text{sen} \gamma} e^{c\beta} \quad \dots\dots\dots (1.4-50)$$

Substituindo (1.4-50) em (1.4-47), tem-se:

$$e^{c\beta} (c \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta) = \frac{a}{h} = \alpha \quad \dots\dots\dots (1.4-51)$$

Para se ter o mínimo valor de P_a , que é a condição mais desfavorável, deve-se anular a derivada de (1.4-51) em relação a c , obtendo-se:

$$1 + 2c\beta + (1 + c^2) \frac{d\beta}{dc} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.4-52)$$

Por hipótese, no cálculo de verificação o valor de α é um valor constante já conhecido; portanto, diferenciando (1.4-51), obtem-se:

$$\frac{d\beta}{dc} = - \frac{c\beta + \beta \text{tg} \beta + 1}{c^2 + 1} \quad \dots\dots\dots (1.4-53)$$

Substituindo (1.4-53) em (1.4-52), tem-se:

$$\beta(c - \text{tg} \beta) = 0 \quad \dots\dots\dots (1.4-54)$$

cujas soluções são $\beta = 0$ (charneira ED ao longo de todo o apoio, portanto, menos desfavorável que $\beta \neq 0$) e $c = \text{tg}\beta$ (condição mais desfavorável), ou seja:

$$c = \text{cotg}\gamma = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) = \text{tg}\beta \quad \dots\dots (1.4-55)$$

$$\therefore \phi_0 = \beta \quad \dots\dots\dots (1.4-56)$$

Substituindo o valor de c dado (1.4-55) em (1.4-51), tem-se:

$$\alpha = 2e^{\beta \text{tg}\beta} \text{sen}\beta \quad \dots\dots\dots (1.4-57)$$

donde obtem-se com boa aproximação (para $1,0 \leq \alpha \leq 1,5$):

$$\beta \cong 0,265\alpha + 0,164 \quad \dots\dots\dots (1.4-58)$$

Como, $\theta = \pi/2 - (\phi_0 + \beta)$, tem-se:

$$\theta \cong -0,530\alpha + 1,243 \quad \dots\dots\dots (1.4-59)$$

Levando os valores de β de θ dados acima, em (1.4-49), tem-se:

$$\gamma \cong -0,265\alpha + 1,407 \quad \dots\dots\dots (1.4-60)$$

Portanto, conhecendo-se γ e β a parcela P_a de P dada por (1.4-46) fica determinada por:

$$P_a \cong (m+m') \left[\text{cotg}\gamma + \beta \text{cossec}^2\gamma \right] \quad \dots\dots\dots (1.4-61)$$

A outra parcela de P , correspondente ao trecho PCB (Fig. 1.4-3), pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

$$P_b \cong (m_1+m'_1)\theta + c_1(m-m_1)\theta \quad \dots\dots\dots (1.4-62)$$

ou ainda;

$$\frac{P_b}{m+m'} = K\theta \quad \dots\dots\dots (1.4-63)$$

onde o coeficiente K é o mesmo adotado para o cálculo de dimensionamento, ou seja:

$$K = \frac{m_1 + (m - m_1)c_1 + m_1'}{m + m'} = (1 - c_1 + c_1\mu_1)k + (1 - \mu)c_1 \quad \dots\dots (1.4-64)$$

com, c_1 de (1.4-22)

Finalmente, o valor de P deve satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{P}{m+m'} = \frac{4(P_a + P_b)}{m+m'} \leq 2\pi \quad \dots\dots\dots (1.4-65)$$

1.4.3c. Exemplo

Considere-se uma laje retangular isótropa inteiramente encastrada no contorno e submetida a uma carga concentrada no centro. Supondo que a laje tenha sido dimensionada para condição de armadura uniformemente distribuída em toda sua extensão, deseja-se saber:

- 19) Qual a possível redução das armaduras (superior e inferior), admitindo $m' = 2m$ e $k = 1/3$, para a condição de $\mu_1 = \mu$.
- 20) Após conhecidos os valores de m_1 , m_1' e α com as condições acima, qual o valor da carga de ruína. Isto é, fazer o cálculo de verificação com o critério estabelecido no item 1.4.3b.

10) Para $m' = 2\hat{m}$, tem-se:

$$\mu = \frac{m'}{m+m'} = \frac{2}{3}$$

Como $u_1 = \mu$, obtem-se de (1.4-23) e (1.4-24):

$$k = k_1 \left(\frac{1-\mu}{1-\mu_1} \right) = k_1 = \frac{m_1}{m}$$

ou seja:

$$m_1 = 0,333m$$

Do dimensionamento com armadura uniforme:

$$m+m' = P/2\pi = 0,159P$$

para $m' = 2m$:

$$m = 0,053P \quad , \quad m' = 0,106P$$

com

$$k = \frac{m_1+m'_1}{m+m'}$$

tem-se:

$$m_1+m'_1 = 0,054P$$

$$m_1 = 0,018P \quad \text{e} \quad m'_1 = 0,036P$$

O valor de α pode ser obtido diretamente do gráfico da Fig. 1.4-8. Ou seja, entrando $k_1 = 1/3$ e $\mu = 2/3$, tem-se:

$$\alpha \cong 1,365$$

29) De acordo com o critério estabelecido no ítem 1.4.3b, para $\alpha = 1,365$, tem-se:

$$\text{de (1.4-58) : } \beta \cong 0,5257 \text{ rad} \cong 30,12^\circ$$

$$\text{de (1.4-59) : } \theta \cong 0,5195 \text{ rad} \cong 29,77^\circ$$

$$\text{de (1.4-60) : } \gamma \cong 1,0453 \text{ rad} \cong 59,89^\circ$$

$$\text{de (1.4-61) : } \frac{P_a}{m+m'} = 1,282$$

$$\text{de (1.4-22) : } c_1 = 0,807$$

$$\text{de (1.4-64) : } K = 0,513$$

$$\text{de (1.4-63) : } \frac{P_b}{m+m'} = 0,266$$

$$\frac{P}{m+m'} = 4 \left(\frac{P_a + P_b}{m+m'} \right) \cong 6,20 \cong 2\pi$$

1.5. EFEITO DE MEMBRANA

1.5.1. Revisão do Problema

Quando se analisa o comportamento das lajes, desde o início do carregamento até à ruína, geralmente admite-se que a geometria da laje permanece invariável. Este facto, entretanto, pode não concordar muito bem com a realidade em certos casos, onde a mudança de geometria pode gerar forças de membrana capazes de aumentar consideravelmente a capacidade resistente da laje.

Para pequenos deslocamentos ($w \leq 0,2h$) normais ao plano médio da laje, a Teoria das Placas (Kirchhoff), embora desprezando tais forças de membrana, conduz a bons resultados mesmo tratando-se de lajes de concreto armado. Entretanto, à medida que os deslocamentos ultrapassam certo nível ($w \geq 0,30h$), as deformações são acompanhadas por um

estiramento da superfície média da laje. As forças de membrana produzidas por esse estiramento é que conferem à laje maior capacidade de carga. Quando os deslocamentos atingem um limite mais avançado ($w \approx h$) o efeito de membrana é da ordem de grandeza da flexão que se manifesta desde o início do carregamento. Acima desse limite ($w > h$) e após a formação das charneiras plásticas, somente o efeito de membrana é preponderante [33].

É o caso, por exemplo, de lajes simplesmente apoiadas e engastadas submetidas a carga uniformemente distribuída (Fig. 1.5-1)

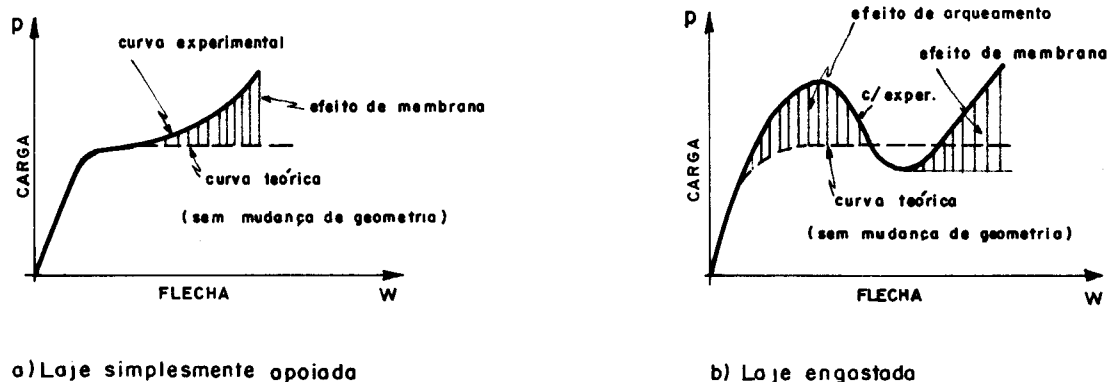
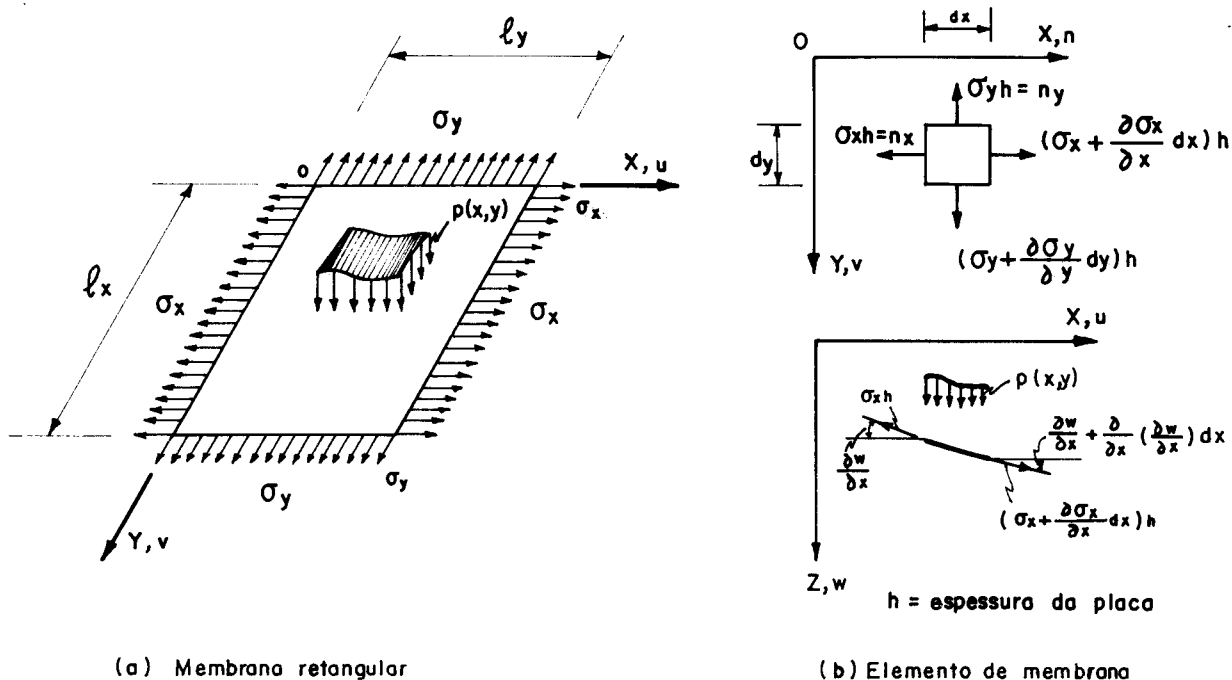


Fig. 1.5-1

Muitas tentativas já foram feitas para se estabelecer um modelo matemático que representasse o comportamento real das lajes de concreto armado, nas quais se desenvolvem forças de membrana.

Para a fase elástica existem duas teorias: a teoria de pequenas deformações e a teoria de grandes deformações. Na primeira, admitindo que as tensões tangenciais sejam desprezíveis, o equilíbrio é mantido somente pelas forças de membrana. Assim, para o caso de membrana retangular (Fig. 1.5-2a), obtém-se:



(a) Membrana retangular

(b) Elemento de membrana

Fig 1.5-2

Considerando um elemento de membrana $dx dy$, a condição de equilíbrio de forças na direção z (Fig. 1.5-2b) fornece, desprezando-se os termos que envolvem derivada de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{n_y}{n_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p(x,y)}{n_x} \dots\dots\dots (1.5-1)$$

onde, n_x e n_y são forças de membrana por unidade de comprimento da laje.

Admitindo que as deformações sejam suficientemente pequenas (p.ex; $(w_{max}/h)^2$ desprezível em relação à unidade [33]) tem-se: $\sigma_x h = \sigma_y h = n_y = n_x$. Dessa maneira, a equação (1.5-1) transforma-se na equação de membrana simples (1.5-2):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p(x,y)}{n_x} \dots\dots\dots (1.5-2)$$

Ao soluções de (1.5.1) e (1.5.2), podem ser obtidas através de processos "exatos" ou aproximados. Dentre os primeiros, pode-se citar o método de Navier, o qual consiste em expressar $p(x,y)$ como uma série de Fourier que, substituída em (1.5.1) ou (1.5.2), fornece a expressão de $w(x,y)$. Uma solução desse tipo é apresentada no item 1.5.3, para o caso de carga parcialmente distribuída.

Ainda dentro da teoria de pequenas deformações pode-se estudar também a ação conjunta de membrana e flexão. Entretanto, a solução exata do problema recai numa equação diferencial de difícil solução; salvo para casos muito particulares, por exemplo, o de placas circulares.

Quanto à teoria de grandes deformações em regime elástico, sua aplicação às lajes de concreto armado torna-se bastante imprecisa, por causa da fissuração que poderá advir quando os deslocamentos são da ordem de grandeza da espessura da laje. Além disso, mesmo que sejam estimadas as reduções de rigidez, provocadas pela fissuração, a solução perderá sentido se ocorrer a plastificação em algum ponto da laje.

Atualmente a tendência do estudo do efeito de membrana está sendo dirigida para uma análise mais geral baseada nos conceitos de equilíbrio limite, da Teoria da Plasticidade [5, 11, 22, 23, 32]. Nesse sentido, tem-se desenvolvido alguns métodos de cálculo que resolvem o problema para certos casos particulares, tanto de forma como de carregamento (ver Quadro I).

Além dos métodos dos autores indicados no Quadro I, existe um outro, o método de PARK [24, 25, 26, 27, 28] que explica o efeito de membrana em casos como o de lajes com contorno perfeitamente encastrado.

Quadro I - Relação de autores e características das lajes empregadas para a análise do efeito de membrana

AUTOR (Ano)	TIPO DE LAJE (Armadura)	CONDIÇÕES DE APOIO E DE CARREGAMENTO (*)
WOOD [36] (1961)	CIRCULAR (Isótropa)	SIMPLESMENTE APOIADAS E ENGASTADAS (1)
SAMCZUK [32] (1963)	RETANGULAR (Isótropa)	SIMPLESMENTE APOIADAS (1)
TAYLOR [34] (1965)	QUADRADA (Isótropa)	SIMPLESMENTE APOIADAS (1)
KEMP [11] (1967)	QUADRADA (Isótropa)	SIMPLESMENTE APOIADAS (1)
MORLEY [22] (1967)	POLIGONAL (Isótropa)	SIMPLESMENTE APOIADAS ENGASTADAS (1)
HAYES [5] (1968)	RETANGULAR (Ortótropa)	SIMPLESMENTE APOIADAS
MOY [23] (1972)	RETANGULAR (Ortótropa)	SIMPLESMENTE APOIADAS E ENGASTADAS (1), (2)

1.5.2 - Método de PARK

Este método aplica-se às lajes retangulares, uniformemente carregadas em toda a sua extensão e com apoios capazes de impedir deslocamentos transversais e horizontais ao longo do contorno. A armadura, constante em toda a laje, pode, entretanto, ser diferente nas duas direções ortogonais.

Como o efeito de membrana só é relevante com a laje já bastante deformada e suficientemente plastificada, isto é, com as linhas de plastificação ocupando quase to-

(*) Os números (1) e (2) referem-se, respectivamente, aos casos de carga uniformemente distribuída em toda a extensão da laje e o de carga concentrada.

da a laje, PARK [24, 26] desenvolveu seu método baseado nas seguintes hipóteses:

- 1a.) Que o concreto esteja totalmente fissurado, e que as fissuras penetrem toda espessura da laje.
- 2a.) Que toda a armadura tenha atingido a tensão de escoamento e não se considere o fenômeno de "endurecimento" do aço.
- 3a.) Que somente a armadura contribua para a membrana.

Nessas circunstâncias, a "laje" funciona como uma membrana plástica tracionada, cujo comportamento se assemelha ao de malha pênsl, com o concreto servindo apenas de elemento de distribuição das cargas. Fazendo uma analogia com o comportamento de membrana em regime elástico (teoria de pequenas deformações), PARK [24] deduziu a seguinte equação diferencial (1.5.3) para a membrana plástica:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{T_y}{T_x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{w}{T_x} \quad \dots\dots\dots (1.5-3)$$

onde, na notação de PARK [24], z representa o deslocamento transversal de um ponto genérico (x,y) , w é a carga transversal uniformemente distribuída em toda a extensão da laje e, T_x e T_y são forças de escoamento da armadura por unidade de comprimento nas direções x e y , respectivamente (Fig. 1.5-3a).

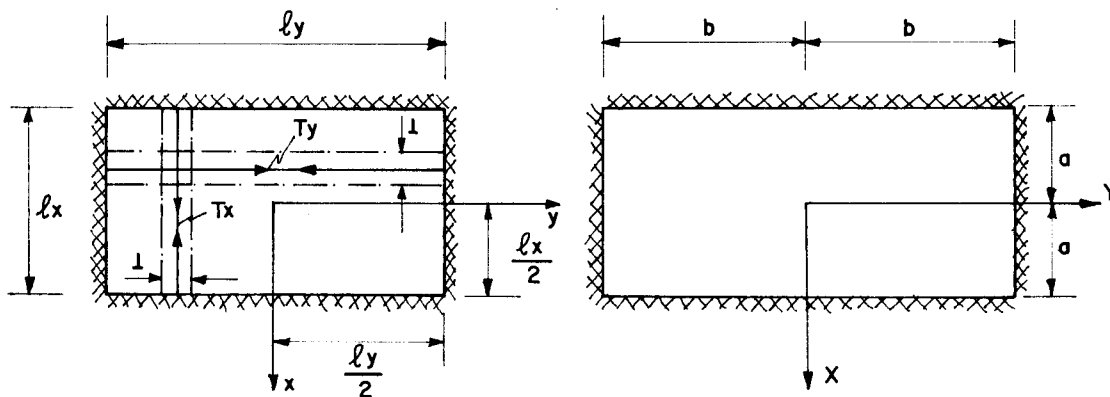
Para resolver a equação (1.5-3), PARK imaginou uma mudança de variáveis (1.5-4) que a transforma numa equação de membrana simples (1.5-5). Isto é, fazendo:

$$Y = y \sqrt{\frac{T_x}{T_y}} \quad \dots\dots\dots (1.5-4)$$

e substituindo em (1.5-3), tem-se:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{w}{T_x} \dots\dots\dots (1.5-5)$$

A expressão (1.5-5) representa a equação de uma membrana simples equivalente (com $T_x = T_y$) conforme mostra a Fig. 1.5-3b.



a) Membrana plástica real ($T_x \neq T_y$)

b) Membrana plástica equivalente ($T_x = T_y$)

Fig. 1.5-3

Na membrana da Fig. 1.5-3b, tem-se, de acordo com a transformação dada por (1.5-4):

$$a = \frac{l_x}{2} \dots\dots\dots (1.5-6)$$

$$b = \frac{l_y}{2} \sqrt{\frac{T_x}{T_y}} \dots\dots\dots (1.5-7)$$

Timoshenko [35], mostra que a solução da equação (1.5-5), admitindo $z = 0$ no contorno é dada por:

$$z = \frac{16wa^2}{T_x \pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh \frac{n\pi Y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{2a} \dots (1.5-8)$$

Substituindo-se os valores de \underline{Y} , \underline{a} e \underline{b} dados, respectivamente, pelas expressões (1.5-4), (1.5-6) e (1.5-7), na expressão (1.5-8), tem-se:

para $x = 0$ e $y = 0$:

$$\frac{w \ell_x^2}{T_x \Delta} = \frac{\pi^3}{4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{\cosh \left(\frac{n\pi \ell_y}{2 \ell_x} \sqrt{\frac{T_x}{T_y}} \right)} \right)} \dots (1.5-9)$$

onde, $\underline{\Delta}$ é o valor de \underline{z} no ponto central da laje

Portanto, para um determinado valor de T_x/T_y , é possível determinar-se através de (1.5-9) o valor de \underline{w} em função de $\underline{\Delta}$.

Para efeito de comparação com resultados de ensaios com carga uniformemente distribuída, PARK [24] fornece um gráfico carga-flecha (Fig. 1.5-4), onde se nota que os valores de \underline{w} obtidos com a expressão (1.5-9) são menores do que constatados experimentalmente, porém existe uma certa coerência entre curva experimental e a teórica no trecho onde se processa o efeito de membrana.

PARK observou também que o efeito de membrana é tanto mais pronunciado quanto maior for a quantidade de armadura, o que aliás, concorda com a teoria. À medida que T_x cresce, maior será o coeficiente angular da reta dada pela expressão (1.5-9).

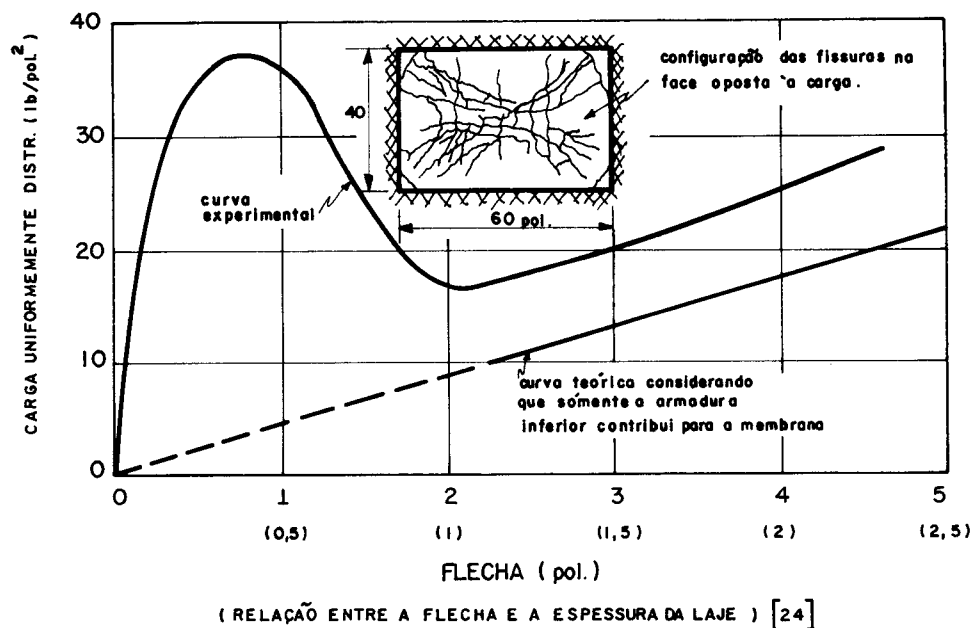


Fig 1.5-4

1.5.3. Extensão do método de PARK

Como se disse no item anterior, o método de PARK se aplica somente às lajes sujeitas à carga uniformemente distribuída em toda a laje. Para o caso de carga uniforme parcialmente distribuída em determinada região da laje, a equação diferencial (1.5-3) que rege o equilíbrio de membrana com $T_x \neq T_y$, não pode ser reduzida à equação (1.5-5) nor simples transformação de coordenadas como a dada por (1.5-4).

A solução da equação (1.5-5) pode, entretanto, ser obtida pelo método de Navier. Retomando a notação empregada na teoria de pequenas deformações (item 1.5-1) tem-se, fazendo, $n_x = T_x$ e $n_y = T_y$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{T_y}{T_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p(x,y)}{T_x} \dots\dots\dots (1.5-10)$$

Expressando a carga transversal $p(x,y)$ como uma s\u00e9rie de Fourier da forma abaixo:

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \text{sen } \frac{m\pi x}{l_x} \cdot \text{sen } \frac{n\pi y}{l_y} \dots\dots (1.5-11)$$

onde, P_{mn} \u00e9 um coeficiente que depende da forma do carregamento, e que \u00e9 obtido atrav\u00e9s da seguinte express\u00e3o:

$$P_{mn} = \frac{4}{l_x l_y} \iint p(x,y) \text{sen } \frac{m\pi x}{l_x} \cdot \text{sen } \frac{n\pi y}{l_y} dx dy \dots\dots (1.5-12)$$

Para o caso da Fig. 1.5-5, o valor de P_{mn} \u00e9 obtido extendendo-se a integral, dada por (1.5-12), na regi\u00e3o de aplica\u00e7\u00e3o da carga.

$$P_{mn} = \frac{4P}{l_x l_y} \int_{x_0 - (t_x/2)}^{x_0 + (t_x/2)} \int_{y_0 - (t_y/2)}^{y_0 + (t_y/2)} \text{sen } \frac{m\pi x}{l_x} \cdot \text{sen } \frac{n\pi y}{l_y} dx dy \dots\dots (1.5-13)$$

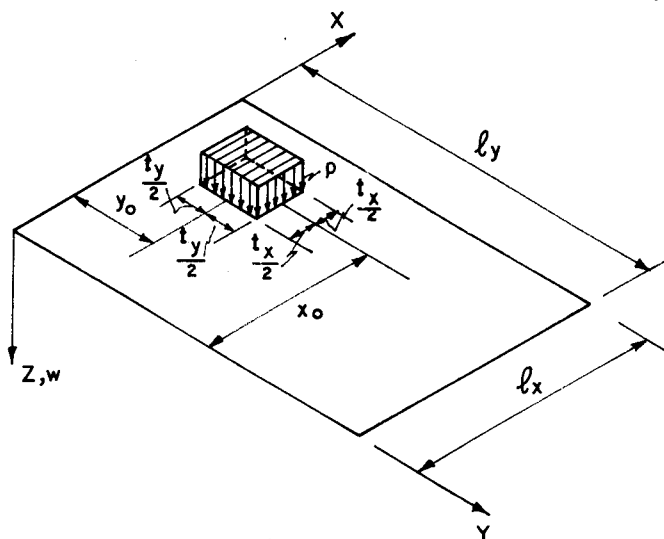


Fig. 1.5 - 5

Resolvendo-se a integral indicada em (1.5-2), obtem-se:

$$P_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_0}{l_x} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi y_0}{l_y} \cdot \operatorname{sen} \frac{m\pi t_x}{l_x} \operatorname{sen} \frac{n\pi t_y}{l_y} \dots (1.5-14)$$

Expressando os deslocamentos transversais de maneira análoga ao que se fez com $p(x,y)$, isto é, considerando,

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l_x} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{l_y} \quad (1.5-15)$$

tem-se, após a substituição de (1.5-15) e (1.5-11) (para valores específicos de m e n) na equação diferencial (1.5-10):

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^2 T_x \left[\left(\frac{m}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{l_y} \right)^2 \frac{T_y}{T_x} \right]} \dots (1.5-16)$$

Dessa maneira, substituindo-se (1.5-16) em (1.5-15), pode-se determinar o deslocamento de qualquer ponto da laje em função da carga p e das características geométricas da laje.

Para analisar-se o comportamento carga-flecha, substituem-se $x = l_x/2$ e $y = l_y/2$ em (1.5-14) e obtem-se:

$$\delta = w(l_x/2, l_y/2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \dots (1.5-17)$$

Introduzindo em (1.5-17) o valor de W_{mn} , tem-se, após simplificar e rearranjar os termos, a seguinte expressão adimensional:

$$\frac{p\ell_x^2}{T_x\delta} = \frac{\pi^4}{16\chi^2 \left[\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{mk_x\pi}{2} \sin \frac{nk_y\pi}{2}}{mn \left(m^2 \chi^2 + \frac{T_y}{T_x} n^2 \right)} \right]} \dots (1.5-18)$$

onde: $\chi = \frac{\ell_y}{\ell_x}$, $k_x = \frac{t_x}{\ell_x}$ e $k_y = \frac{t_y}{\ell_y}$ (ver Fig. 1.5-5)

Para o caso de homotetia entre o retângulo de carga e o contorno ($k_x = k_y = k$) a expressão (1.5-18) transforma-se em:

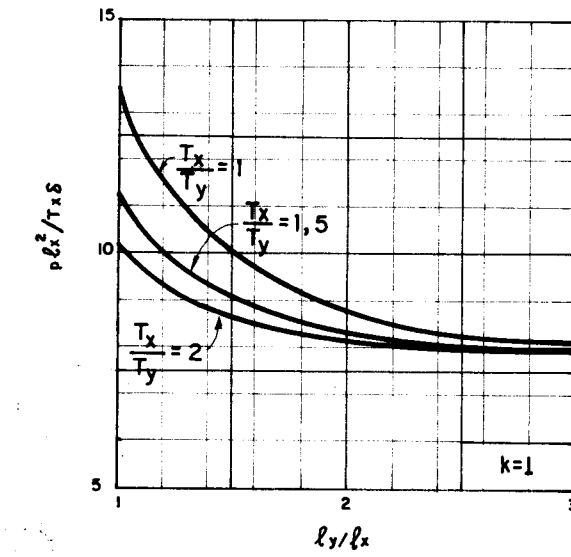
$$\frac{p\ell_x^2}{T_x\delta} = \frac{\pi^4}{16\chi^2 \left[\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{mk\pi}{2} \sin \frac{mk\pi}{2}}{mn \left(m^2 \chi^2 + \frac{T_y}{T_x} n^2 \right)} \right]} \dots (1.5-19)$$

Na Fig. 1.5.6 apresentam-se gráficos de $p\ell_x^2/T_x\delta$ em função ℓ_y/ℓ_x , cujos valores foram obtidos a partir expressão (1.5-19). Para efeito de comparação foram adotados três valores para k ($k = 1,0$, $k = 1/10$ e $k = 1/20$), onde em cada um deles foram traçadas três curvas para diferentes valores de T_x/T_y .

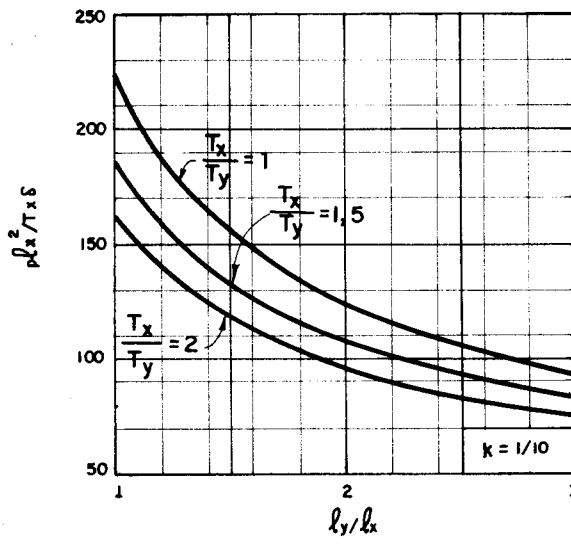
É interessante notar que para o caso de carga uniformemente distribuída em toda a extensão da laje (Fig. 1.5-6a), os valores indicados pelo gráfico, coincidem perfeitamente com os que se obtêm através do método de PARK pela expressão (1.5-9).

Ainda analisando os gráficos da Fig. 1.5.6, observa-se que os valores de p , capazes de serem resistidos são pelo efeito de membrana, será tanto menor quanto maior for a relação l_y/l_x . Isto indica que a contribuição da membrana, na direção y para lajes muito alongadas é muito pequena, principalmente para lajes uniformemente carregadas em toda a sua extensão.

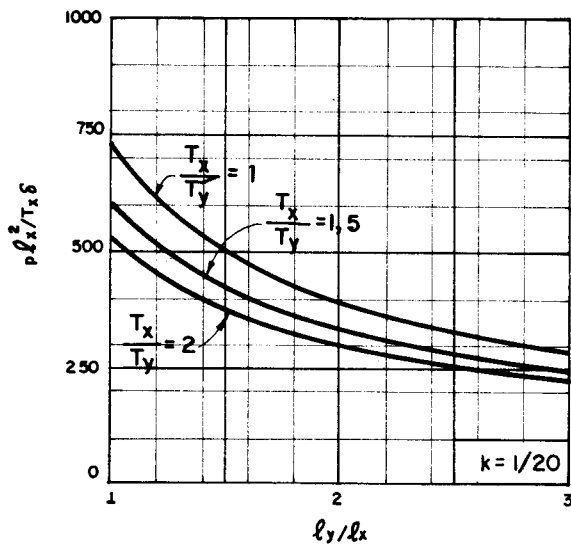
Portanto, mesmo após a completa formação das charneiras plásticas é possível analisar, com o auxílio da expressão (1.5-19), o comportamento carga-flecha de lajes retangulares submetidas à carga parcial e uniformemente distribuída.



a) Caso de carga uniformemente distribuída em toda a extensão da laje ($k=1$)



(b) Caso de carga uniforme e parcialmente distribuída ($k=1/10$)



(c) Caso de carga uniforme, distribuída em área muito pequena ($k=1/20$)

Fig. 1.5-6

2. OS MODELOS E OS ENSAIOS

2.1. OS MODELOS

2.1.1. Descrição e características geométricas

Na primeira fase do trabalho experimental foram ensaiados um total de 36 modelos, sendo 18 lajes e 18 vigas. Tendo em vista os fenômenos a serem observados - efeitos de membrana e redução gradativa de armadura - os modelos foram classificados conforme mostra a Fig. 2.1-1.

Para a avaliação dos efeitos de membrana, foram adotados dois tipos de laje (SA e CA), cuja diferença fundamental consistia somente no tipo de vinculação dos apoios. As lajes do tipo SA eram apoiadas bilateralmente em todo o contorno; isto é, com apoios capazes de impedir somente deslocamentos verticais, podendo a laje girar e deslocar-se horizontalmente ao longo do contorno (Fig. 2.1-2). Por sua vez, as lajes do tipo CA, eram vinculadas em apoios que, além de impedirem deslocamentos verticais, impediam também deslocamentos horizontais (Fig. 2.1-3).

A divisão dos modelos em grupos (Fig. 2.1-1), foi feita de modo a se poder observar as possíveis influências da redução gradativa da armadura positiva. A diferença básica entre os três grupos de modelos consistia apenas na extensão da região mais armada, situada na região central da laje, a qual é caracterizada pela distância $2a$ (Figs. 2.1-2 e 2.1-3), ou melhor, pelo coeficiente adimensional $\alpha = 2a/Lx$ (o mesmo definido no item 1.4.3 - pag. 1-32).

As lajes foram moldadas em séries de duas, sendo uma do tipo SA e outra do tipo CA, entre as quais a única diferença consistia nas condições de apoio. Inicialmente foram ensaiadas 3 séries correspondentes ao Grupo 1. Nas três séries as lajes tinham a mesma distribuição de armadu

ra, a qual era caracterizada pelo coeficiente $\alpha = 1,0$ (vide Figs. 2.1-2 e 2.1-3). Em seguida foram ensaiados mais dois grupos de modelos - Grupo 2 ($\alpha = 1,2$) e Grupo 3 ($\alpha = 1,4$) - cada um com 3 séries.

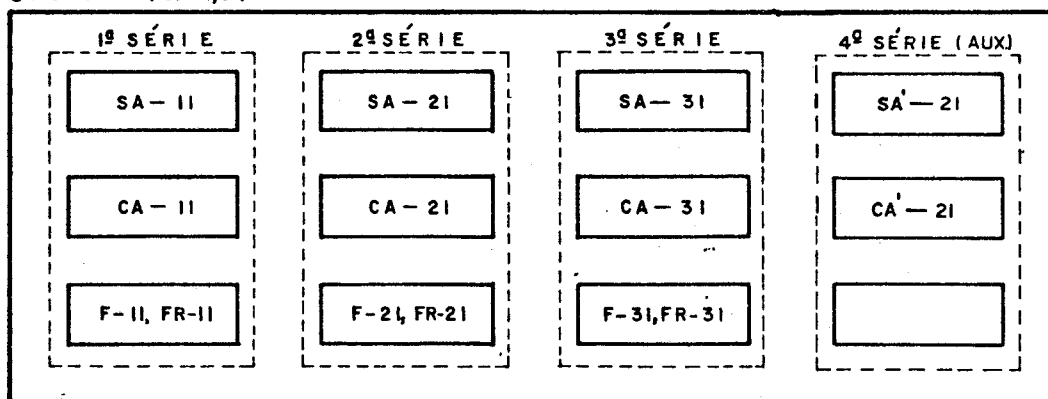
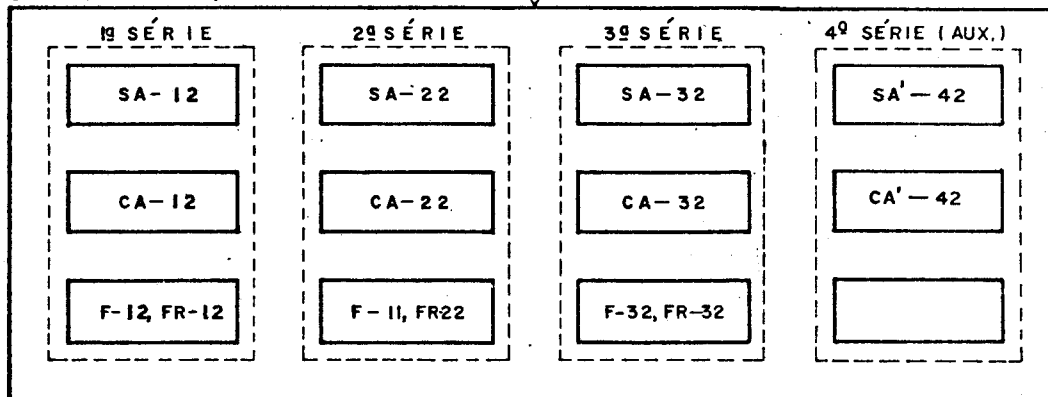
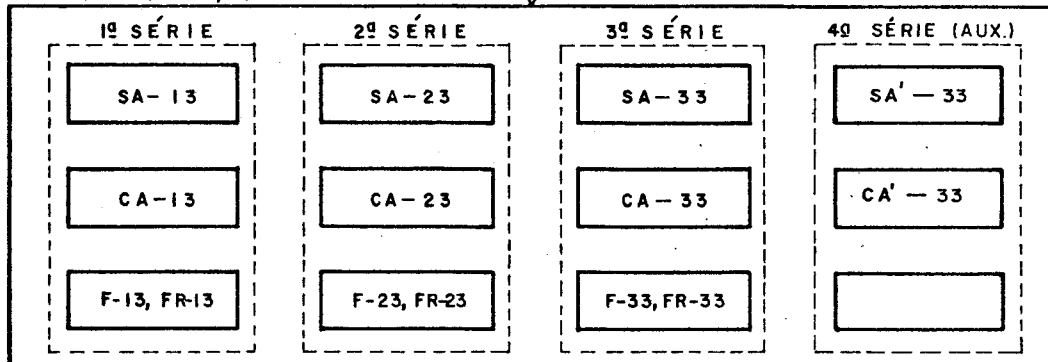
Juntamente com as lajes, em cada série, foram moldadas duas vigas^(*), sendo uma do tipo F e outra do tipo FR (Fig. 2.1-4). As do tipo F serviram para a determinação experimental do momento de plastificação correspondente à região mais armada (região central). As faixas do tipo FR representavam as regiões onde as armaduras eram parcialmente suprimidas (vide Figs. 2.1-2 e 2.1-3).

Posteriormente, foram confeccionadas mais 6 lajes auxiliares, divididas em três novas séries, correspondendo cada uma, respectivamente, aos Grupos 1, 2 e 3. Os modelos destas séries são diferentes das anteriores pelos comprimentos de ancoragem da armadura de punção (estribos), os quais foram maiores nestas (vide Figs. 2.1-2 e 2.1-3). Esta repetição serviu para substituir algumas séries anteriores (2a. Série - Grupo 1; 3a. Série - Grupo 3), em cujos modelos foram constatadas trincas prematuras por ocasião das montagens, ou mesmo porque, em alguns deles, os estribos não estavam suficientemente ancorados. Os modelos destas séries estão designados por SA' e CA'. Dessa maneira, o Grupo 2 ficou com uma série a mais, cujas lajes são chamadas de SA'-42 e CA'-42.

Além dos modelos descritos acima, ainda se incluem neste trabalho, alguns resultados de ensaio referentes a lajes semelhantes porém com as armaduras não suprimidas parcialmente; isto é, com armadura constante em toda a extensão da laje (vide Item 3.5).

Quanto ao carregamento, adotou-se a carga concentrada única aplicada no centro da laje, numa área de 2,5 x 5,0cm (vide Figs. 2.1-2 e 2.1-3).

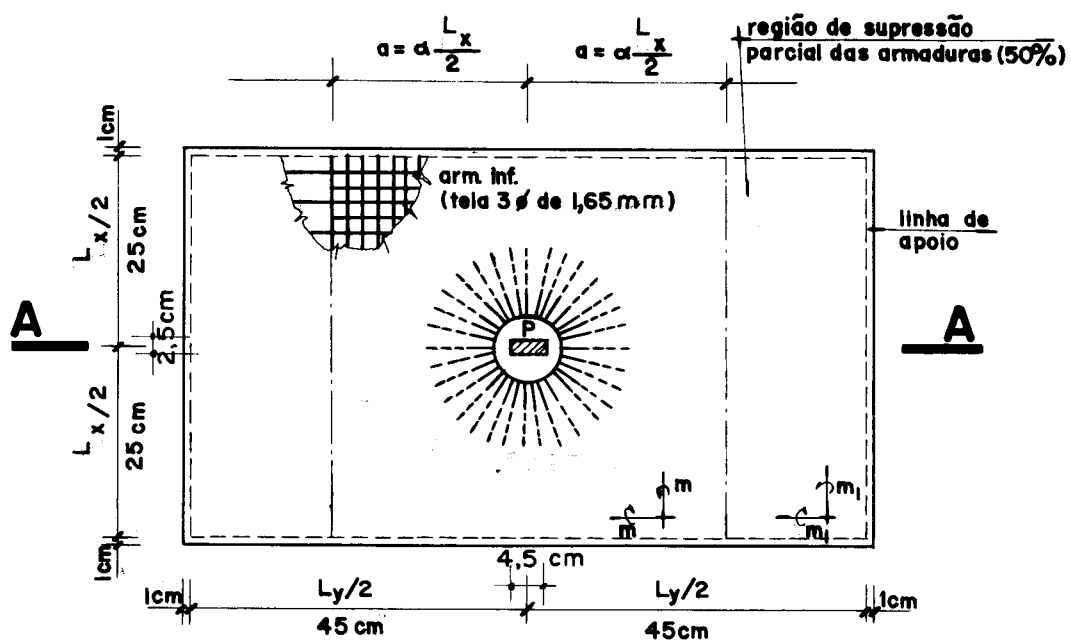
(*) No decorrer deste trabalho serão chamadas de "faixas". Isto porque as vigas são amostras de faixas de laje.

GRUPO 1 ($\alpha=1,0$)GRUPO 2 ($\alpha=1,2$)GRUPO 3 ($\alpha=1,4$)

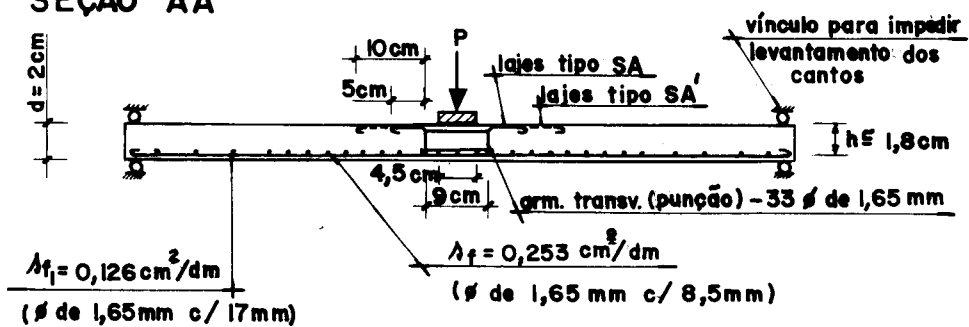
DESIGNAÇÃO

- SA-1j : modelo i, grupo j, simplesmente apoiada
- CA-1j : modelo i, grupo j, com deslocamento horizontal impedido
- F-1j : faixa correspondente à região central do loje 1j
- FR-1j : faixa correspondente à região de redução da armadura do loje 1j

Fig. 2.1-1 - Classificação dos modelos



SEÇÃO AA



GRUPO	α
1	1,0
2	1,2
3	1,4

Fig. 2.1-2 - Características geométricas das lajes tipo SA

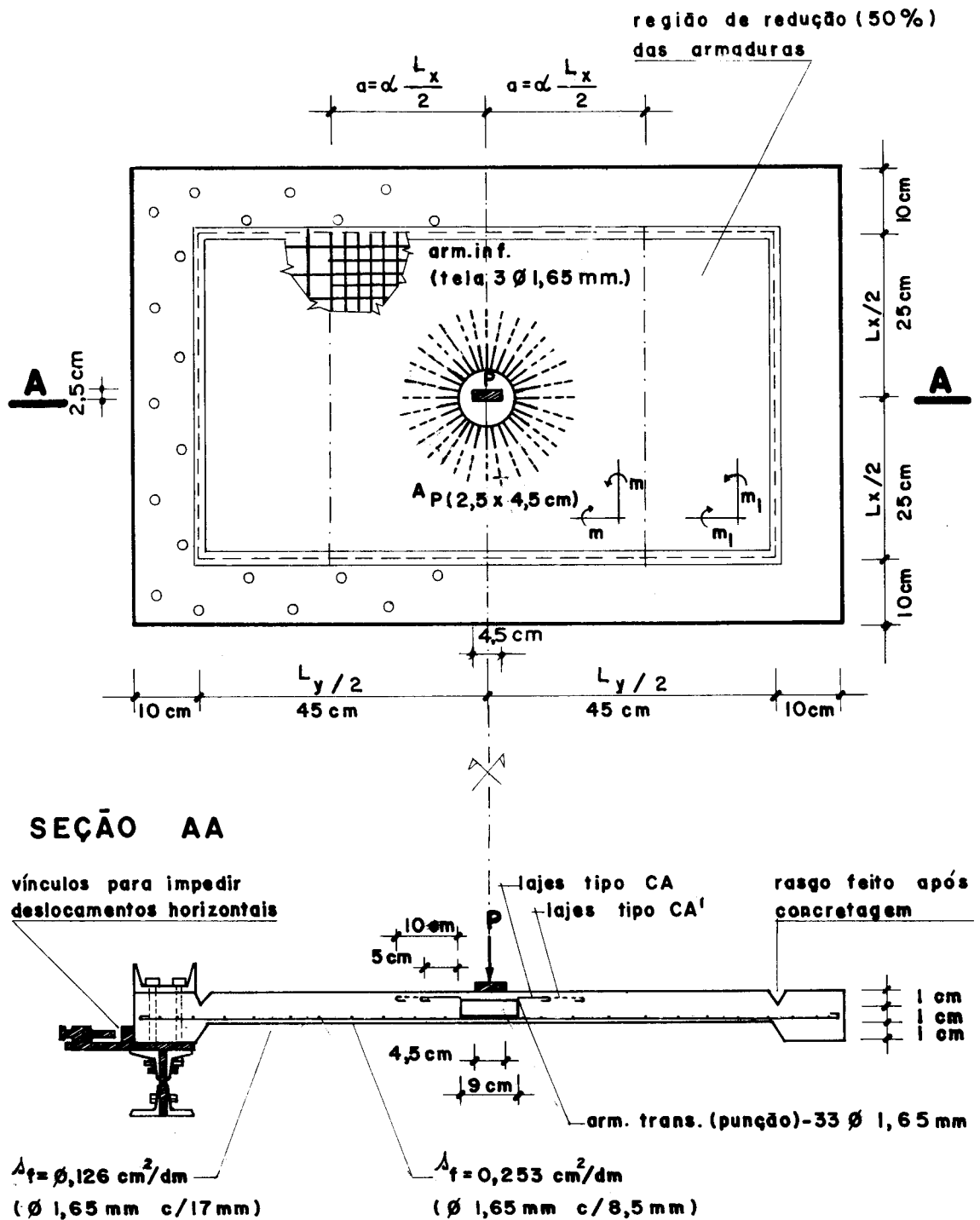
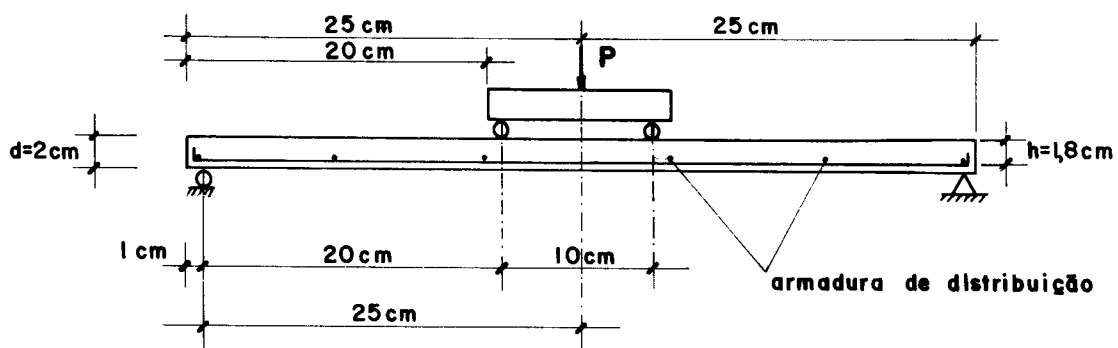
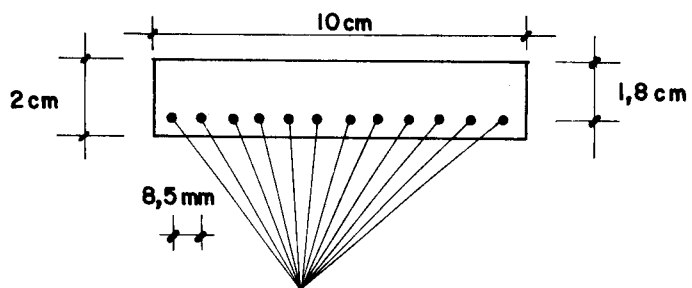


Fig. 2.1.3—Características geométricas das lajes tipo CA

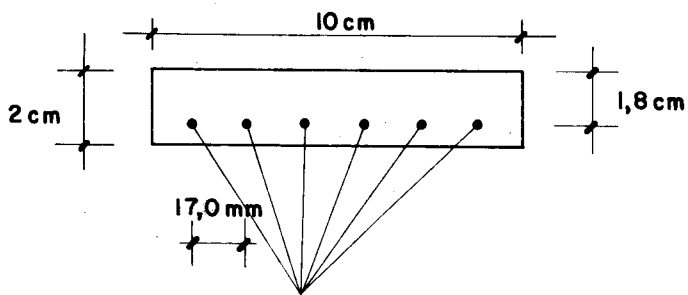


SEÇÃO FAIXAS TIPO "F"



$$S_f = 25,3\text{ mm}^2 (12 \varnothing 1,65\text{ mm})$$

SEÇÃO FAIXAS TIPO "FR"



$$S_{f_1} = 12,6\text{ mm}^2 (6 \varnothing 1,65\text{ mm})$$

Fig. 2.1-4 - Características geométricas e sistema de carregamento das faixas.

2.1.2. Pré-dimensionamento

2.1.2a. Dimensões dos modelos

As dimensões dos modelos foram inicialmente fixadas tendo-se em vista o reaproveitamento de um aparelhamento de ensaio disponível no LE-EESC^(*), o qual se adaptava bem às características dos ensaios realizados. Isto porque, em princípio, não se pretendia ensaiar modelos reduzidos propriamente ditos, ou seja: modelos que representassem fielmente, em escala reduzida, o protótipo de uma determinada laje.

A partir daí foram adotadas para as lajes e faixas as seguintes dimensões efetivas:

- LAJES (SA e CA) : 50cm x 90cm x 2cm (Figs. 2.1-2 e 2.1-3)
- FAIXAS (F e FR) : 50cm x 10cm x 2cm (Fig. 2.1-4)

2.1.2b. Armadura de flexão

Os principais fatores que intervieram na escolha das armaduras de flexão foram os seguintes: ordem de grandeza da carga concentrada e necessidade de alta porcentagem de armadura. Dessas duas condições, dependia a utilização de dinamômetros elétricos construídos e testados no LE-EESC (vide item 2.2.3). Como os dinamômetros que estavam disponíveis na época dos ensaios eram de baixa capacidade nominal (1.000 a 2.500kgf), a escolha mais adequada do tipo de armadura foi a tela de aço galvanizado (vide item 2.1.4), conforme demonstra-se em cálculo efetuado abaixo. A necessidade de alta porcentagem de armadura se pren-

(*) Todos os modelos foram confeccionados e ensaiados no LE-EESC - Laboratório de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

de ao fato de que o efeito de membrana se manifesta mais intensamente em lajes fortemente armadas [24], e que, com isso seria possível uma melhor redução gradativa da armadura.

O cálculo da armadura de flexão foi baseado numa estimativa da carga de ruína de modo a satisfazer aos dois fatores citados acima. Para isso, foi suposto que as lajes deveriam romper por flexão com a carga de 1.000kgf (carga de ruína). Admitindo-se a condição de armadura uniformemente distribuída em toda a extensão da laje, deveria se ter para momento resistente (Estádio III), o valor do momento de plastificação^(*), ou seja:

$$m = \frac{P}{2\pi} = \frac{1.000}{2\pi} \approx 160 \text{kgf.dm/dm} = 1.600 \text{kgf.cm/dm}$$

Supondo a argamassa com resistência à compressão simples da ordem $200 \text{kgf/cm}^2 (f_{ck})$ e o arame da tela com tensão de escoamento de $3.500 \text{kgf/cm}^2 (f_{yk})$, tem-se da expressão (4.1-1) (pág. 4-1)

$$a_s = \frac{2f_{ck}f_{yk} \pm (2f_{yk}f_{ck}d)^2 - 8f_{yk}f_{ck}m}{2f_{yk}^2} \dots (2.1-1)$$

que, para $d \approx 1,8 \text{cm}$ (altura útil), fornece como único valor possível (vide expressão 4.1-1):

$$a_s = 0,0297 \text{cm}^2/\text{cm} = 0,297 \text{cm}^2/\text{dm}$$

A partir desse valor foi escolhida a tela que melhor satisfazia as condições acima. Portanto, adotou-se como armadura, a tela indicada na Fig. 2.1-5.

(*) Como as lajes são do tipo simplesmente apoiada, foi adotado somente armadura inferior, tendo-se, portanto, $m' = 0$.

Quanto à redução da armadura, por simplicidade e facilidade de execução, optou-se pela redução de 50%. Isto foi conseguido, simplesmente interrompendo-se alternadamente os fios da tela, a partir da distância $a = \underline{0,5\alpha l_x}$. (Figs. 2.1-2 e 2.1-3).

2.1.2c. Armadura de punção

A armadura especial para combater a punção, foi estimada a partir do método de Langendonck 16. Sendo adotado:

$$\sigma_{te} = f_{yk} = 3.500 \text{kgf/cm}^2$$

$$\sigma'_{br} = f_{ck} = 200 \text{kgf/cm}^2$$

$$d = 1,8 \text{ cm}$$

$$d_s = 4,5 \text{ cm (dimensão característica do retângulo de carga)}$$

$$u = 14 \text{ cm (perímetro do retângulo de carga)}$$

$P \cong 880 \text{kgf.cm/cm}$ (valor recalculado pela teoria das charneiras plásticas com $a_s \cong 0,025 \text{cm}^2/\text{cm}$ da tela adotada: $\phi 1,65 \text{mm c/ } 8,5 \text{mm}$).

Para o cálculo da parcela da carga P_b , correspondente à contribuição do concreto, foi adotada a fórmula de Moe^(*) (descrita em [3]) correspondente ao caso de laje sem armadura para resistir à punção:

$$P_b = 14 \times 1,8 \times 200 \times \frac{4(1 - 0,075 \times \frac{4,5}{1,8})}{1 + 1,4 \left(\frac{14 \times 1,8 \times 200}{880} \right)}$$

$$P_b \cong 740 \text{ kgf}$$

(*) Fórmula empírica obtida experimentalmente (compatível com as unidades empregadas acima).

Quanto a obtenção da parcela correspondente a armadura transversal, foram feitas várias tentativas de modo que se tivesse uma boa margem de segurança contra a punção. Dessa maneira adotou-se como armadura, estribos verticais, ancorados inferiormente na tela e superiormente na própria argamassa. A disposição das barrinhas dessa armadura está indicada nas Figs. 2.1-2 e 2.1-3. Assim, foram obtidos os seguintes resultados:

Com, $A_t = 0,706 \text{ cm}^2$ (33 ϕ 1,65mm igualmente espaçados ao longo de um anel de 9cm de diâmetro),

$$P_a = 0,75 \times \frac{\sqrt{0,706}}{1,8} \times 0,706 \times 3.500 \times 1,0 \approx 860 \text{ kgf}$$

Portanto, $P_L \approx 740 + 860 = 1.600 \text{ kgf}$

$$\frac{P_L}{P} = \frac{1.600}{880} \approx 1,8$$

2.1.3. Composição da argamassa

Todas as lajes e faixas ensaiadas foram confeccionadas empregando-se argamassa, em vez de concreto comum, por causa das reduzidas dimensões dos modelos.

Para a fixação do traco tivemos duas opções quanto à escolha da areia. A primeira delas seria adotarmos uma de granulometria predeterminada, porém esta foi abandonada porque não se pretendia representar rigorosamente em escala reduzida, as características granulométricas dos agregados de um concreto comum. Portanto, preferimos como outra opção, adquirir duas quantidades suficientes de areia fina e média, as quais foram misturadas em partes iguais. A areia assim obtida apresentou as seguintes características, conforme mostra a Tabela 2.1-1:

Tabela 2.1-1 - Características granulométricas da areia

Peneira (mm)	Pêso Retido (g)	% Retida	% Acumulada
9,5	0,0	0,0	0,0
4,8	0,0	0,0	0,0
2,4	0,0	0,0	0,0
1,2	96,0	8,07	8,07
0,6	420,7	35,35	43,42
0,3	623,0	52,35	95,77
0,15	40,5	3,40	99,17
resíduo	9,6	0,83	100,00

Amostra = 1.190g

Diâmetro máximo = 2,4mm

Módulo de finura = 2,46

Com essa areia experimentamos vários traços, até chegarmos a um, que desse uma argamassa cuja resistência à compressão simples fosse satisfatória. Finalmente adotamos o traço 1:2; 0,45 (cimento: areia; relação água/cimento). A partir desse traço obtivemos uma argamassa cujas resistências à compressão simples estão indicadas na Tabela 3.8-1.

2.1.4. Características das armaduras

Para a escolha das armaduras, inicialmente pensou-se em confeccionar as malhas manualmente com fios de arame recozido. Porém, esta solução foi abandonada pela dificuldade de execução, pois o sistema de solda a ponto disponível no Laboratório não seria suficiente por causa do diâmetro dos fios ($\phi = 1,65\text{mm}$). Portanto, foi preferível armar os modelos com telas pré-fabricadas de arame galvanizado e de malha quadrada, cujas características estão indicadas na Figura 2.1-5.

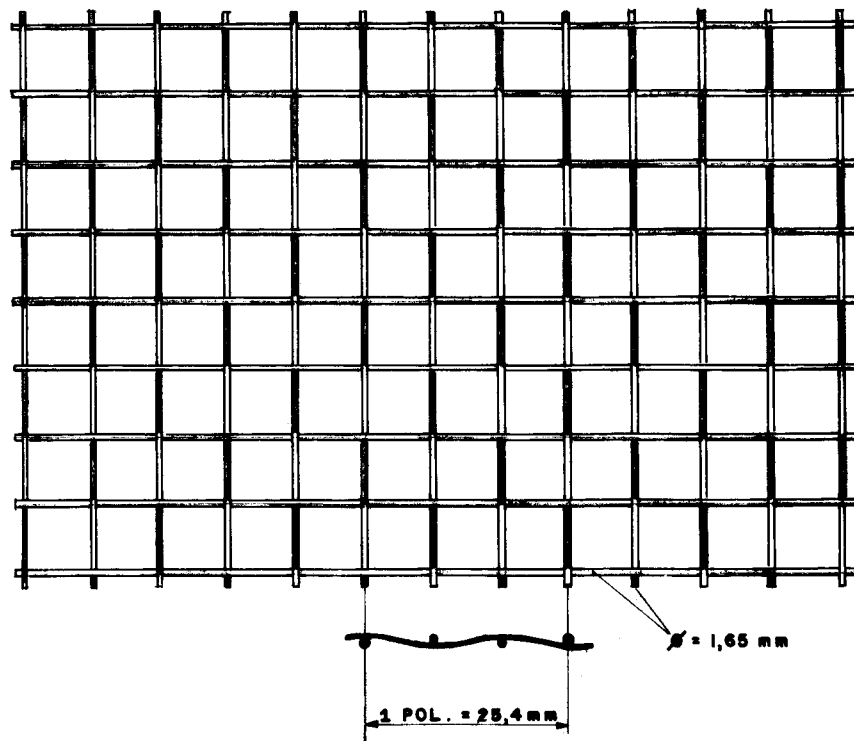


Fig 2.1-5—Detalhe da tela empregada como armadura

As principais vantagens obtidas com o emprego das telas foram as seguintes: boa aderência, isotropia e facilidade na confecção dos modelos.

2.1.5. Confecção dos modelos

A Fig. 2.1-6 apresenta as características geométricas das formas para as lajes e para as faixas. Note-se que as formas para as lajes do tipo SA (Fig. 2.1-6a) têm como dimensões úteis: 92 x 52 x 2cm; os 2cm a mais, na largura e no comprimento, correspondem a 1cm de balanço ao longo das linhas de apoio, ficando a laje com dimensões efetivas de 50 x 90 x 2cm. O comprimento de 10cm a mais de contorno da forma para as lajes do tipo CA (Fig.

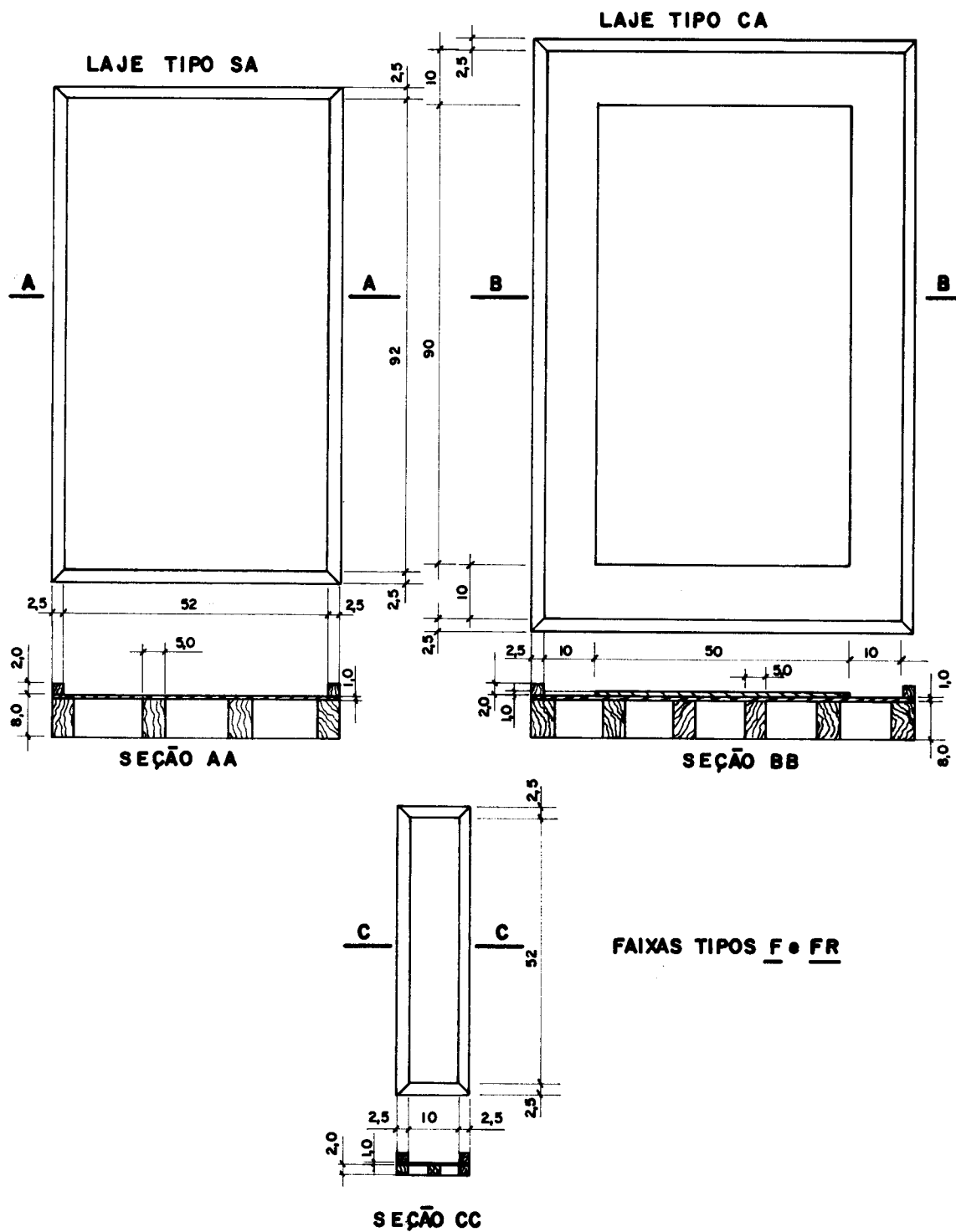


Fig 2.1-6 - Detalhes das formas

2.1-6b) foi imaginado para caracterizar os v̄nculos horizontais ao longo dos apoios das lajes, sendo que as dimens̄ões efetivas s̄ão 50 x 90cm. As formas para as faixas foram duas, iguais às que se mostram na Fig. 1.2-6c.

A armaç̄ão das lajes e das faixas foi feita com tela pr̄e-fabricada. A tela, ap̄os ter sido cortada nas dimens̄ões convenientes, era assentada em contacto com o fundo da forma.

A argamassa era preparada manualmente de modo a tornar a mistura homoḡenea, o que n̄o se conseguia com aux̄ilio de betoneira, devido à grande porcentagem de finos da areia.

A moldagem dos modelos era feita por s̄erie; isto ̄e, sendo moldados por vez, uma laje tipo SA, uma laje tipo CA e duas faixas (F e FR). De cada moldagem era retirado um lote de corpos de prova que aos 14 dias eram ensaiados à compress̄ão simples. Nas primeiras s̄eries o lote era composto em m̄edia por 12 C.P. e nas ūltimas, por 32.

Quanto ao adensamento, este foi feito inicialmente com aux̄ilio de um vibrador de imers̄ão (ou de agulha), cuja ponta era apoiada em uma base de madeira que era encostada em v̄rios pontos da superf̄icie do modelo. Este processo, embora eficiente, foi substituído por outro melhor, que consistia em adensar os modelos com aux̄ilio de um vibrador de mesa, com o qual se conseguia um adensamento mais uniforme. Os corpos de prova eram adensados de acordo com o MB-1 (item 47, al̄inea b).

Ap̄os a pega, os modelos eram curados molhando-se periodicamente as superf̄icies dos mesmos, at̄e eles adquirirem resist̄encia suficiente de modo a possibilitar a retirada da forma. Depois de retiradas as formas, os modelos eram imersos em um tanque com água at̄e tr̄es dias antes dos ensaios. Depois do per̄iodo de cura, vinha a fase de montagem e preparaç̄ão da instrumentaç̄ão.

2.2. OS ENSAIOS

2.2.1. Características do tipo de ensaio

Todos os ensaios realizados foram do tipo estático, com o carregamento aplicado progressivamente durante intervalos de tempo mais ou menos regulares. Após atingida certa carga, havia um tempo necessário (aproximadamente 2 minutos) para estabilizar as respectivas leituras de carga e de deformação, sã então eram registrados os seus valores.

Nesses ensaios, devido ao pequeno intervalo de tempo entre um estágio de carga e outro subsequente, tanto a deformação lenta da argamassa quanto a fluência da armadura, foram consideradas desprezíveis.

2.2.2. Dispositivos de apoio

Para as lajes sujeitas a ações de arqueamento (lajes tipo CA), foi construído um quadro rígido com um sistema de bloqueamento de deslocamentos verticais e horizontais no contorno. Esse quadro serviu também de base para os roletes de apoio das lajes simplesmente apoiadas (lajes tipo SA), conforme mostram as Figuras 2.1-3 e 2.2-1.

2.2.3. Sistema de carga

As cargas eram aplicadas por um macaco mecânico, ao qual era acoplado um dinamômetro elétrico, previamente calibrado, com precisão de 0,01kcf, com capacidade de carga útil de 2.000kcf.

Para os primeiros modelos (1a. e 2a. Sêries do Grupo 1) a estrutura de reação adotada foi a indicada na Fig. 2.2-2a. Já para os modelos das sêries restantes, os

ensaios foram realizados na estrutura da Fig. 2.2-2b. Esta última tinha a vantagem de maior espaço livre, tornando assim mais cômoda a observação - principalmente o progresso da fissuração.

2.2.4. Medidas registradas

Durante os ensaios as medidas efetuadas foram as seguintes: carça concentrada aplicada no centro da laje e respectiva flecha (deslocamento vertical do ponto central da face inferior).

As cargas foram medidas indiretamente, na maioria dos ensaios, com auxílio de uma Ponte de Leitura do tipo Tepic-Huggenberger, de sensibilidade igual a 5×10^{-6} unidades de deformação. Em outros ensaios empregou-se uma Ponte de Leitura Bruel-Kjaer (Strain Gage Apparatus, n. 1516) de mesma sensibilidade do Tepic.

A partir das leituras efetuadas nos aparelhos de medida, os valores das cargas foram determinados com a expressão:

$$P_i = \left[(LP)_i - (LP)_0 \right] K_{din} \dots\dots\dots (2.2-1)$$

onde:

$(LP)_i$ e $(LP)_0$ = leituras do indicador do aparelho, correspondentes respectivamente ao estágio de carga i e ao inicial 0 ;

K_{din} = constante do dinamômetro (kgf/unidade de leitura) ;

P_i = carga correspondente ao estágio de carga i.

As medidas das flechas foram feitas através de defletômetro mecânico, com precisão de centésimo de milímetro.

Os valores das flechas foram calculados pela seguinte expressão:

$$\delta_i = (LD)_i - (LD)_0 \quad \dots\dots\dots (2.2-2)$$

onde:

$(LD)_i$ e $(LD)_0$ = leituras no defletômetro, em centímetros, correspondentes às cargas P_i e P_0 respectivamente;

δ_i = flecha (em centímetros) relativa à carga P_i .

QUADRO PARA EQUIPAMENTO DE APOIO DAS LAJES E FAIXAS

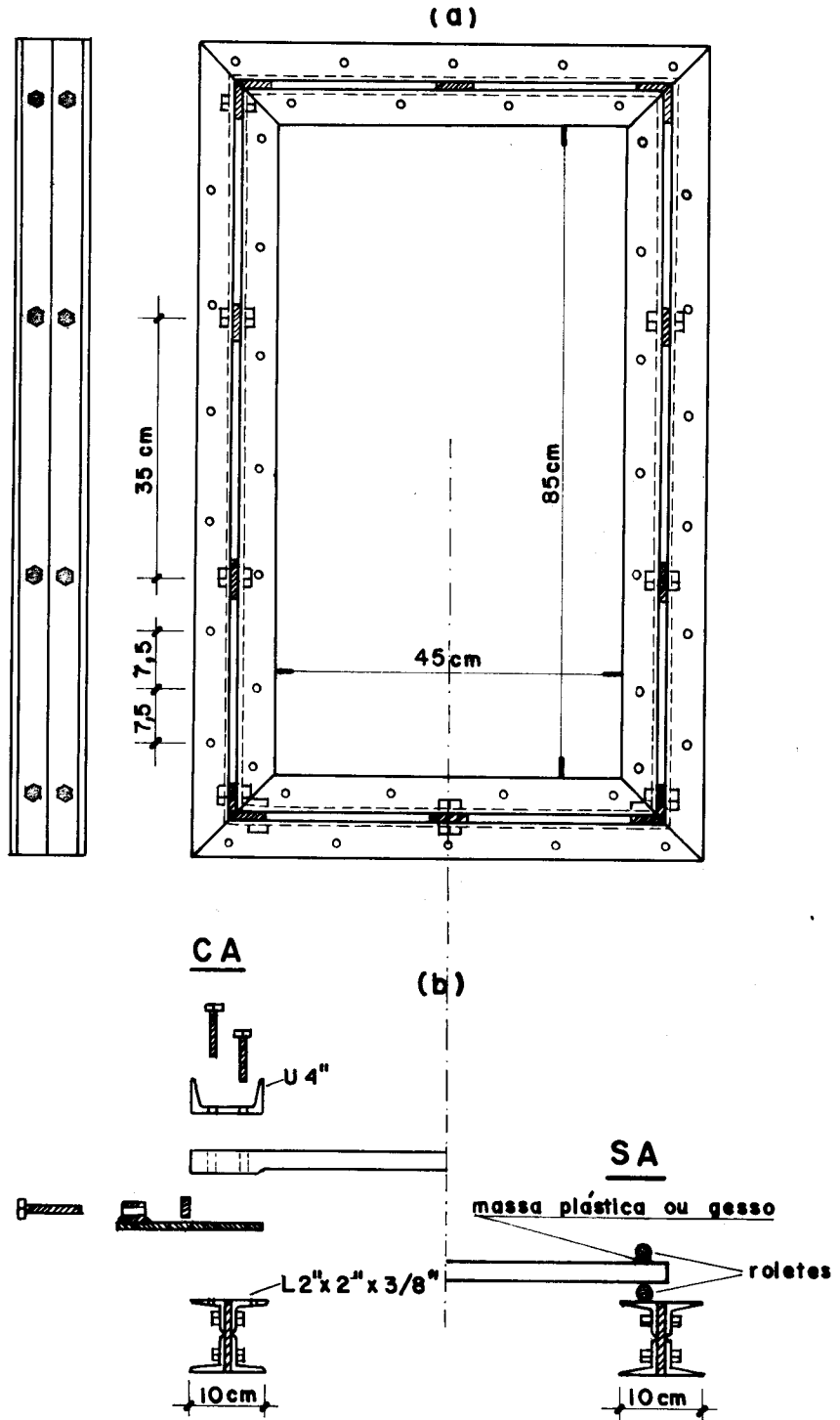
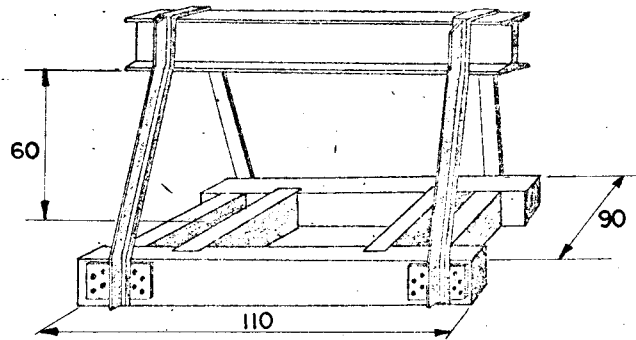


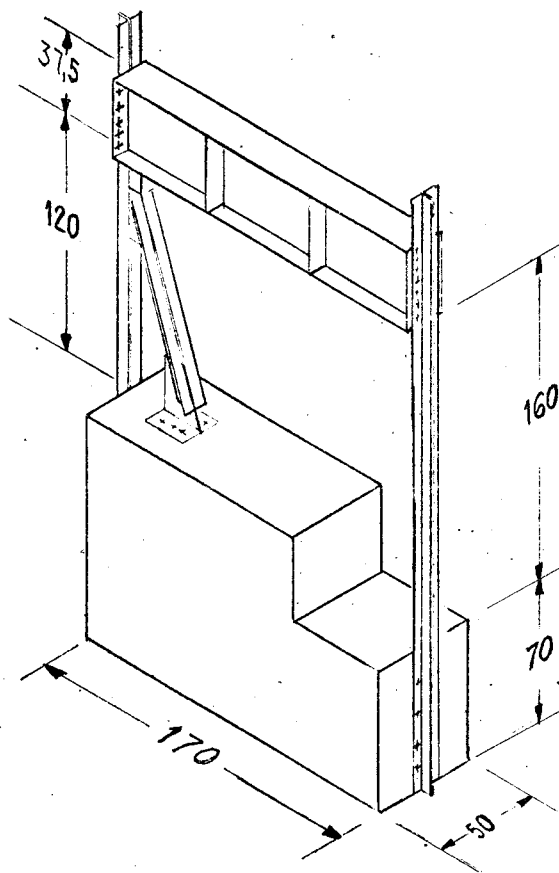
Fig. 2.2-1 -

a) Quadro de apoio dos modelos.

b) Sistemas de apoio (CA e SA).



(a)



(b)

Fig 2.2- 2 - Estruturas de reação

3. RESULTADOS DOS ENSAIOS

3.1. APRESENTAÇÃO

De acordo com a classificação das lajes (vide ítem 2.1.1), os resultados dos ensaios estão dispostos em grupos (1, 2 e 3) conforme o valor do coeficiente α . Os resultados que constam em cada grupo são os seguintes:

I) Principais cargas e flechas - é um apanhado dos valores mais importantes das cargas e respectivas flechas observadas nos ensaios e que correspondem a três principais estágios de carga (ver, por exemplo, a Fig. 1.3.1, pag. 1-5):

1º) Início da fase de fissuração - estágio correspondente ao aparecimento das primeiras fissuras visíveis.

2º) Início da fase de ruína - estágio correspondente ao estado da plastificação no qual a laje passa a se de formar sem aumento substancial de carga. Nos modelos ensaiados, observou-se que este estágio de carga ocorria após a completa formação das charneiras negativas, estando as positivas já bastante desenvolvidas. Entendem-se aqui por charneiras negativas o conjunto das fissuras mais externas da face superior, exceto as dos cantos (ver, por exemplo, Fig. 3.2-6; pág. 3-10). (*)

3º) Ruína - estágio correspondente à máxima carga suportada pela laje.

II) Gráficos carga-flecha - através deles, pode-se observar as diferenças de comportamento entre as lajes do tipo

(*) A caracterização desse estágio de carga serve, em primeira aproximação, para se definir o estado de plastificação correspondente ao início da fase de grandes deformações, na qual o efeito de membrana passa a ser considerável.

SA e as do tipo CA. Esta comparação é feita em todas as Séries de cada Grupo, dos quais obtêm-se, separadamente, as respectivas curvas médias.

- III) Configurações de ruína - além de servirem para dar uma visualização de como se deu a ruína, a partir delas foram obtidos os valores das cargas teórico-experimentais.
- IV) Progresso de fissuração - durante os ensaios, à medida em que as fissuras iam aparecendo, elas eram numeradas em ordem crescente (vide configurações de ruína - Ítens 3.2, 3.3 e 3.4) de maneira a poder-se observar o comportamento das lajes, quanto à fissuração, na fase anterior à de ruína.

Além dos resultados dos ensaios das lajes mostrados nos Ítens 3.2, 3.3 e 3.4, apresentam-se no item 3.5 outros gráficos carga-flecha correspondentes às três séries de lajes com armadura distribuída uniformemente (sem supressão parcial^(*)). Esses resultados serviram de subsídios para uma melhor comparação entre os resultados experimentais obtidos nos Grupos 1, 2 e 3.

No item 3.7 apresentam-se as curvas carga-flecha correspondentes aos ensaios das faixas F e FR. Com auxílio do gráfico foram determinados indiretamente os valores dos momentos de ruptura, os quais representam os momentos de plastificação experimentais (vide 5.1).

E para determinação dos momentos de plastificação teóricos (a partir do estágio III), para o cálculo das cargas teóricas, apresentam-se no item 3.8 as principais características mecânicas do concreto e da armadura empregados na confecção dos modelos.

(*) Esses resultados foram gentilmente cedidos por S.F. Padilha que, em trabalho paralelo, realizou várias séries de ensaios em lajes com armadura uniformemente distribuída nas duas direções.

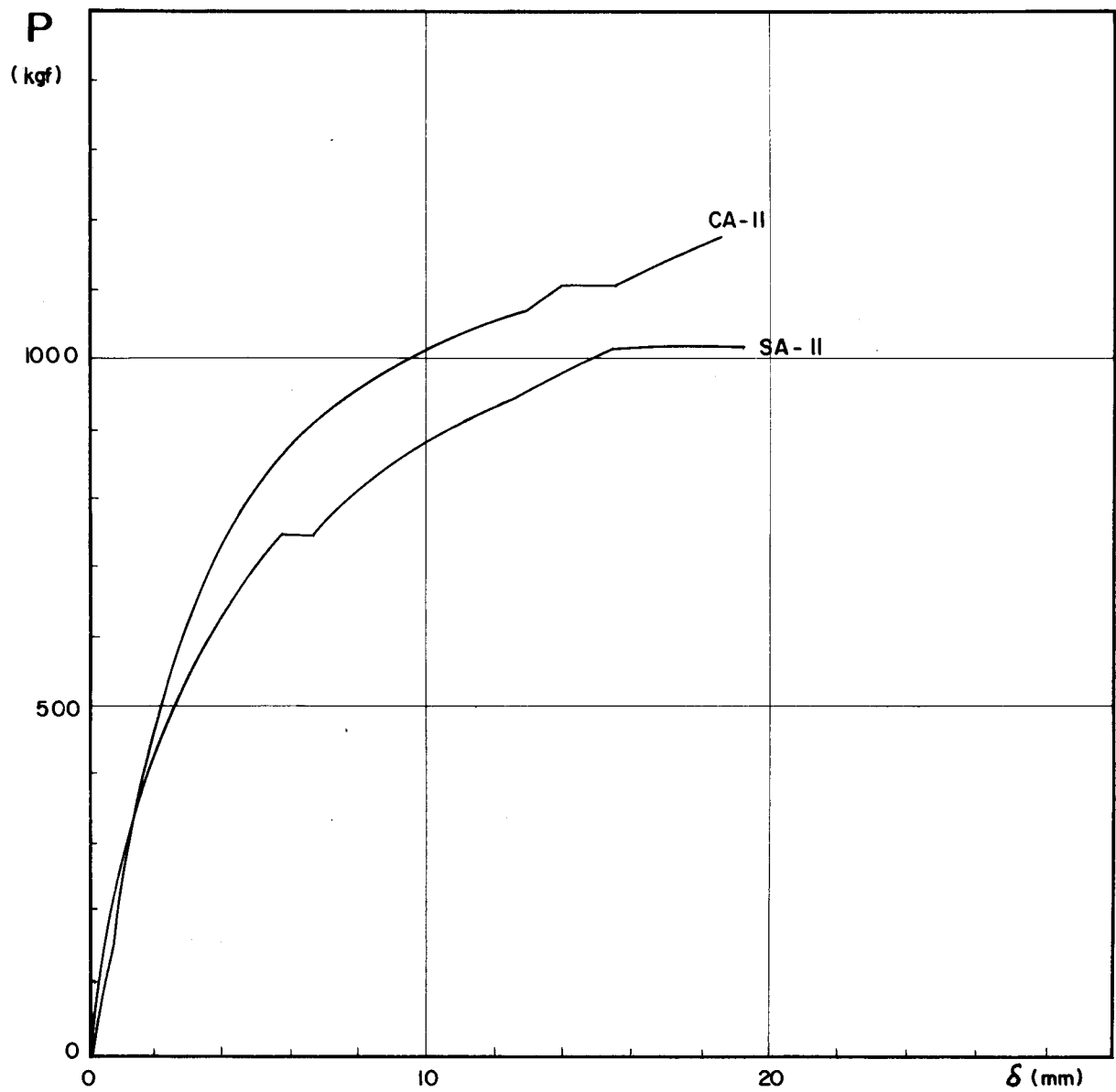
3.2 LAJES DO GRUPO 1 ($\alpha = 1,0$)

- I) Principais cargas e flechas observadas
(Tabela 3.2-1) pãg. 3_4
- II) Gráficos carga-flecha
(Figs. 3.2-1 a 3.2-5) pãgs. 3_5 a 3_9
- III) Configurações de ruína
(Figs. 3.2-6 a 3.2-9) pãgs. 3_10 a 3_12
- IV) Progresso da fissuração
(Tabs. 3.2-2 a 3.2-4) pãgs. 3_13 a 3_15

Tabela 3.2-1 - Principais valores das cargas e flechas observadas nos ensaios das lajes do Grupo 1.

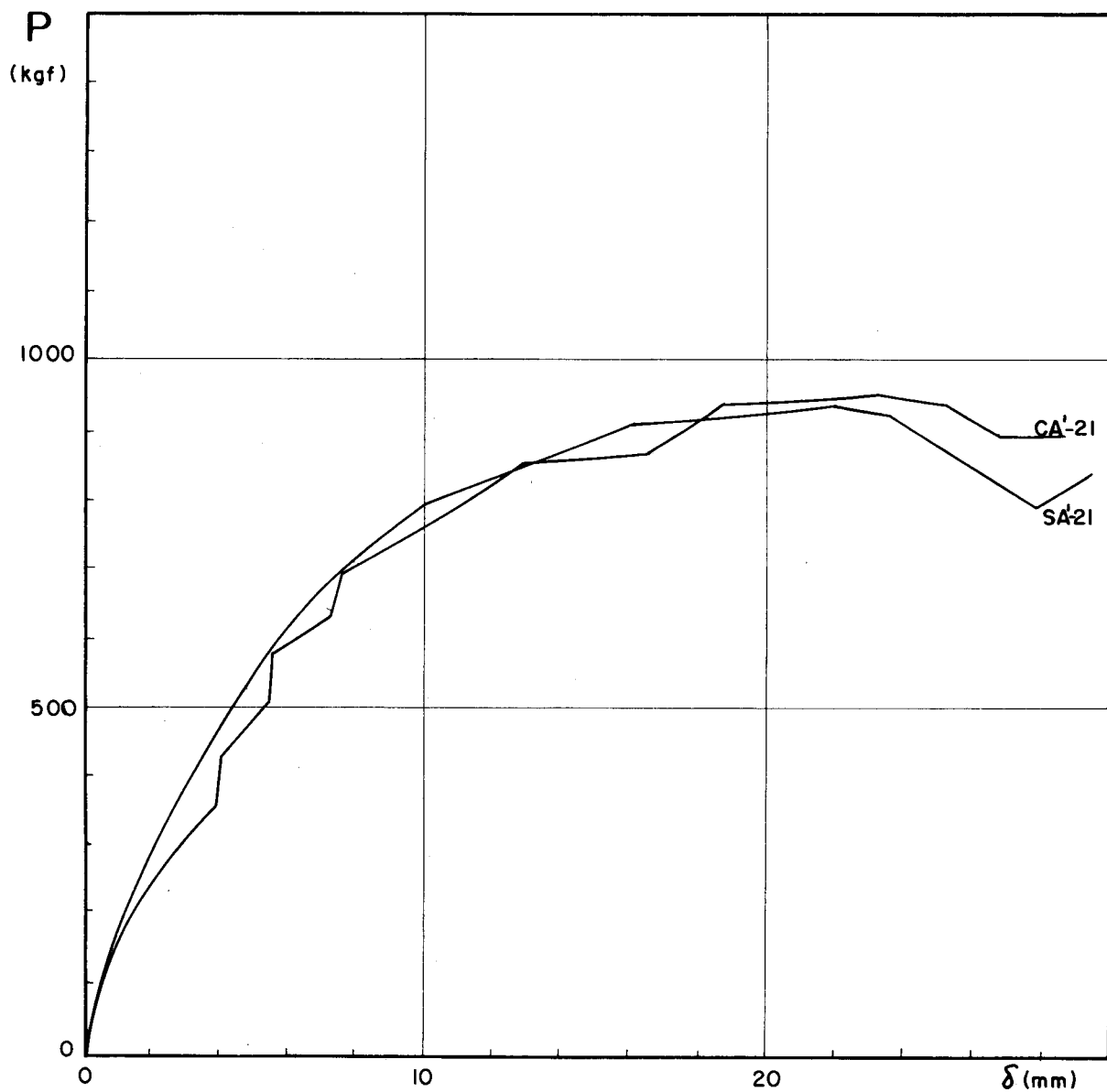
Laje	σ_{c14}	Início da Fase de Fissuração		Início da Fase de Ruína		Ruína			
		P_f kgf	δ_f mm	$\frac{P_f}{P_R}$	P_r kgf	δ_r mm	$\frac{P_r}{P_R}$	P_R kgf	δ_R mm
SA-11	270	546	2,93	0,53	996	14,76	0,97	1031*	18,40
CA-11		771	4,32	0,65	1072	12,68	0,91	1181*	18,45
SA'-21	273	291	2,15	0,31	915	15,89	0,97	944	21,68
CA'-21		291	2,49	0,31	857	12,71	0,89	959	23,06
SA-31	296	382	1,85	0,36	1031	17,08	0,97	1065	20,38
CA-31		471	2,47	0,42	1024	11,97	0,91	1126*	16,98
SA	MÉDIAS	406	2,60	0,40	981	15,91	0,97	1013	20,15
CA		551	3,93	0,51	984	12,45	0,90	1089	19,50

Observação: Os valores de P_R sem asteriscos, indicam que a ruptura com predominância de flexão e os indicados com (*) correspondem a ruptura por punção.



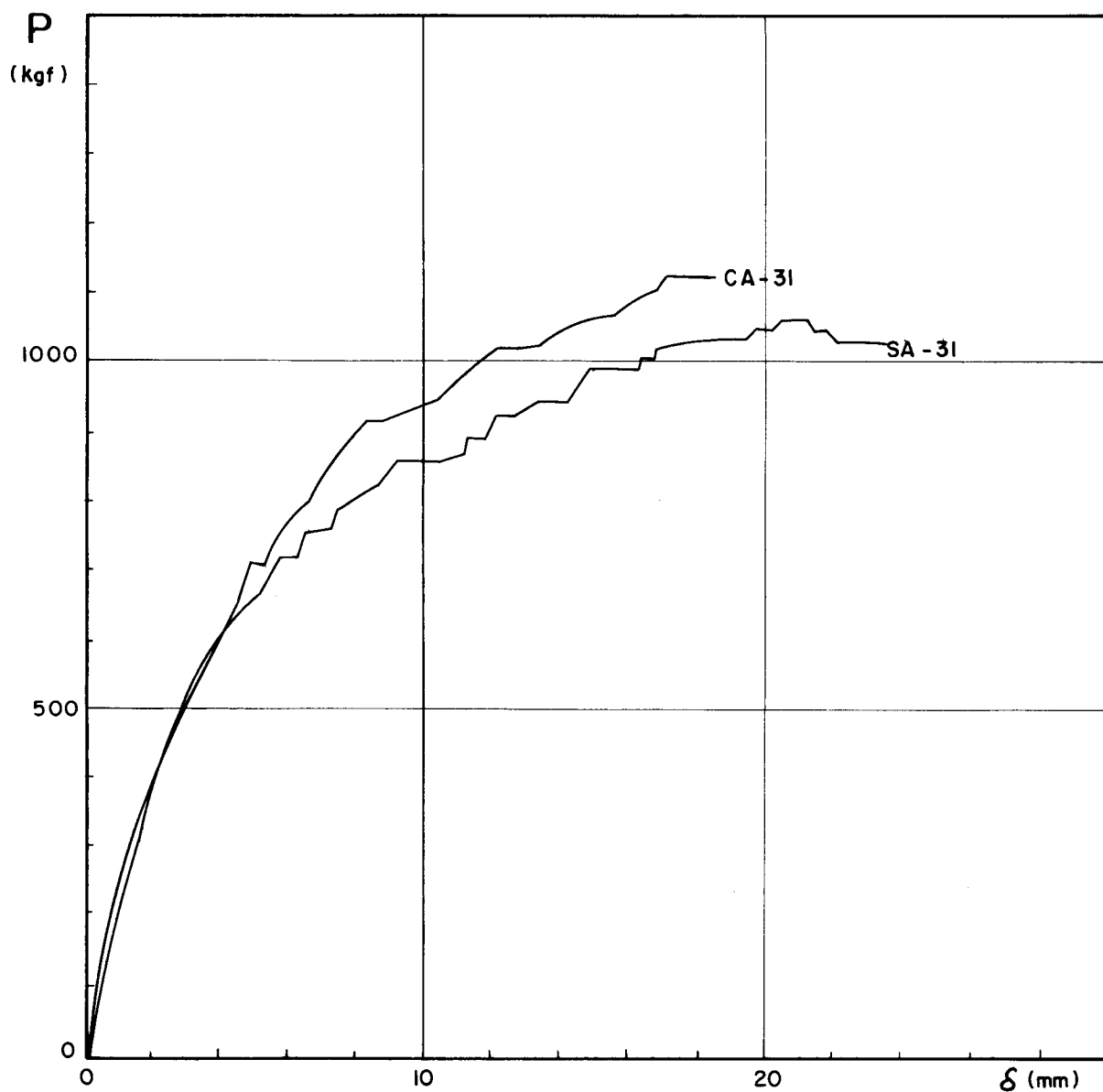
LAJE	σ_{CIA} kgf cm ²	Início da Fase de Fissura ção			Início da Fase de Ruína			Ruína	
		P_f kgf	δ_f mm	$\frac{P_f}{P_R}$	P_r kgf	δ_r mm	$\frac{P_r}{P_R}$	P_R kgf	δ_R mm
SA-II	270	546	2,93	0,53	997	14,76	0,97	1031	18,40
CA-II	270	771	4,32	0,65	1072	12,68	0,91	1181	18,45

Fig. 3.2.1 - GRÁFICOS CARGA - FLECHA (1ª SÉRIE - GRUPO I)



LAJE	\tilde{v}_{C14} $\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$	Início da Fase de Fissuração			Início da Fase de Ruína			Ruína	
		P_f kgf	δ_f mm	$\frac{P_f}{P_R}$	P_r kgf	δ_r mm	$\frac{P_r}{P_R}$	P_R kgf	δ_R mm
SA'-21	273	291	3,02	0,31	915	15,89	0,97	944	21,68
CA'-21	273	291	2,49	0,31	857	12,71	0,87	959	23,06

Fig. 3.2.2 - GRÁFICOS CARGA - FLECHA (2ª SÉRIE-GRUPO I)



LAJE	$\bar{\sigma}_{C14}$ $\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$	Início da Fase de Fissuração			Início da Fase de Ruína			Ruína	
		P_f kgf	δ_f mm	$\frac{P_f}{P_R}$	P_r kgf	δ_r mm	$\frac{P_r}{P_R}$	P_R kgf	δ_R mm
SA-31	296	382	1,85	0,36	1031	17,08	0,97	1065	20,38
CA-31	296	471	2,47	0,42	1024	11,97	0,91	1126	16,98

Fig. 3.2.3 — GRÁFICOS CARGA — FLECHA (3ª SÉRIE — GRUPO 1)

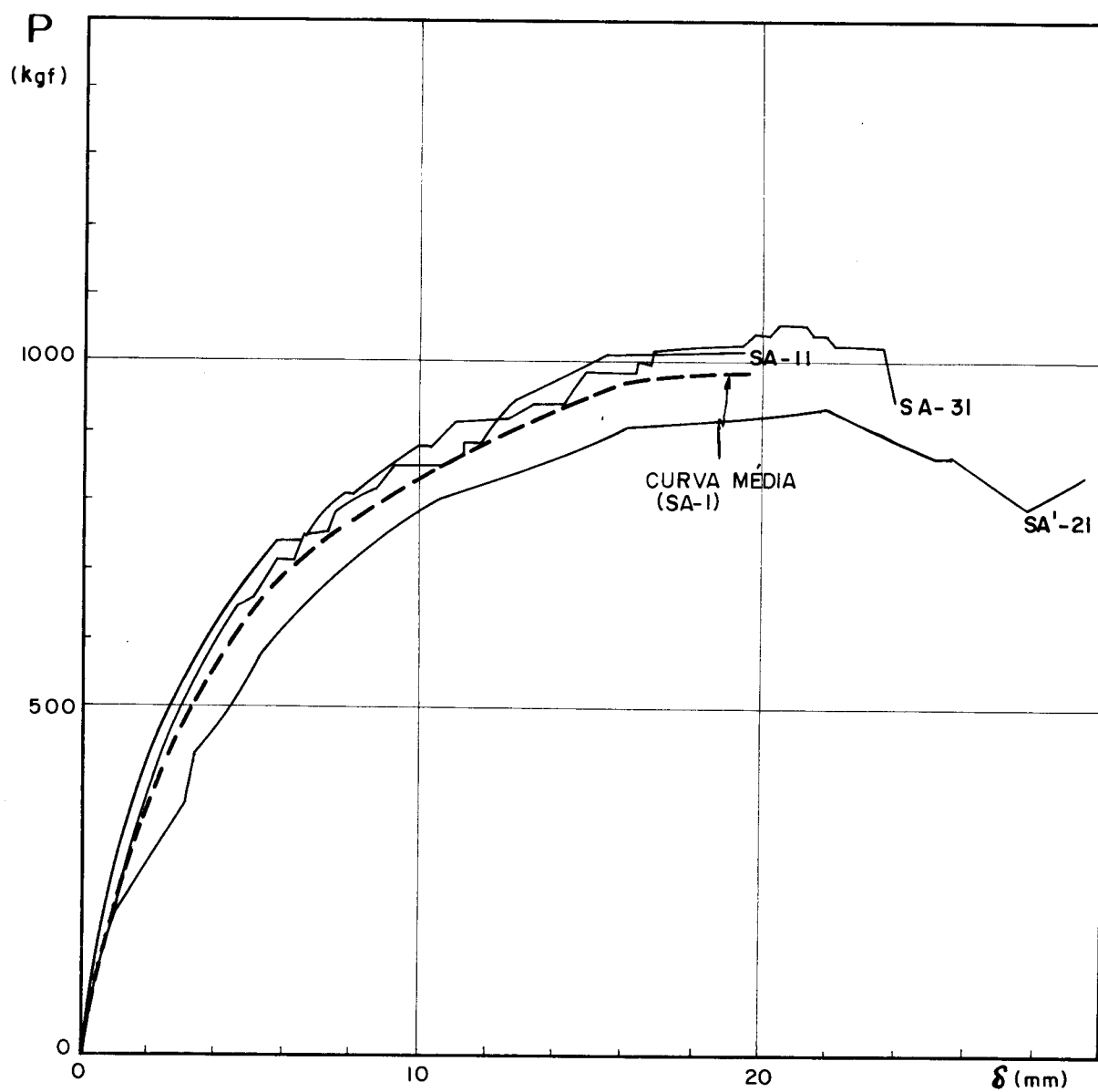


Fig. 3.2.4 - SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA (SA-1) DOS GRÁFICOS
CARGA - FLECHA DAS TRÊS LAJES TIPO SA DO GRUPO I

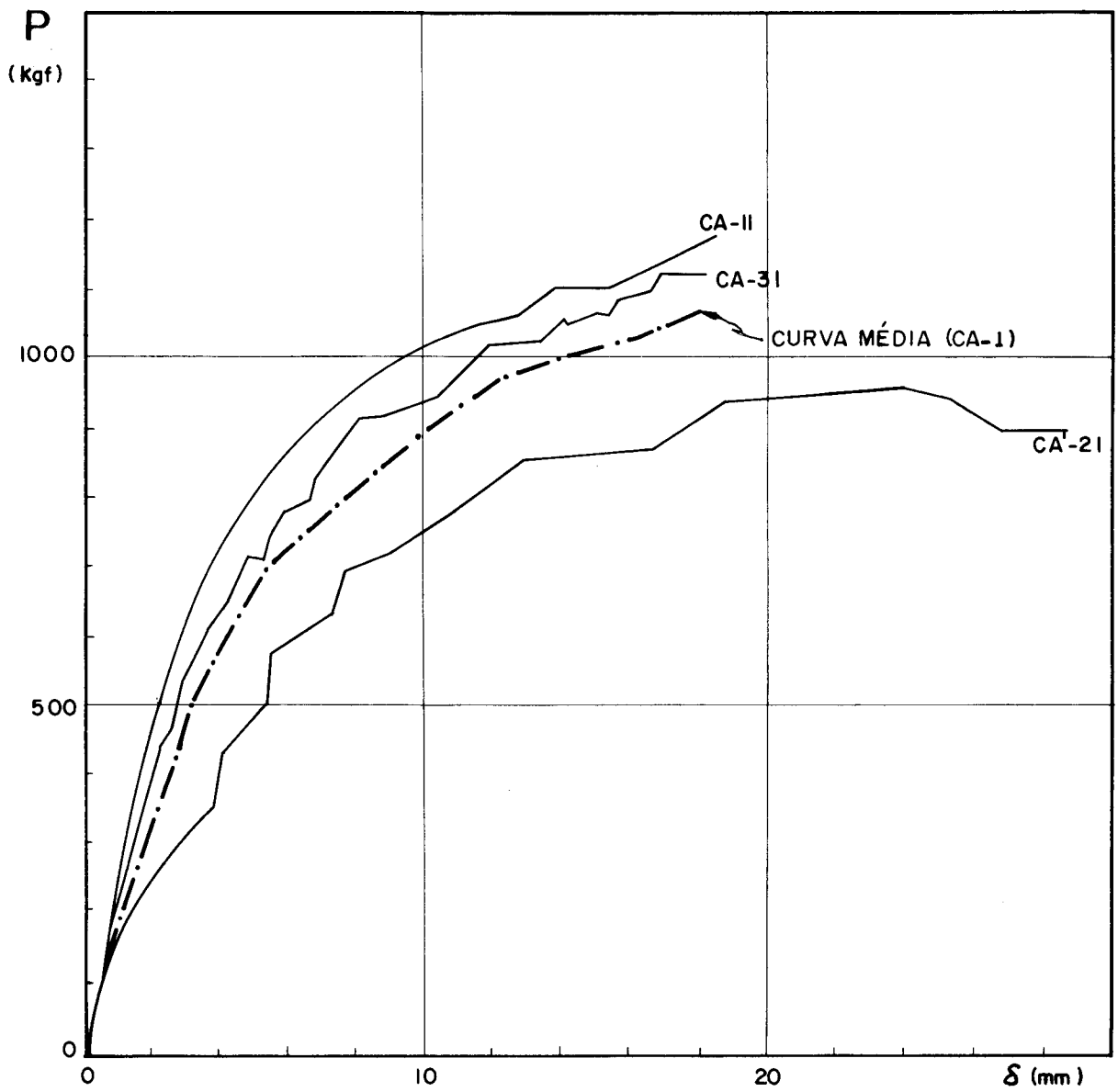
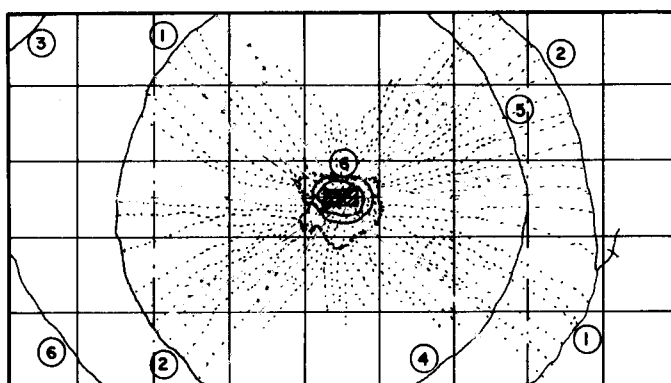
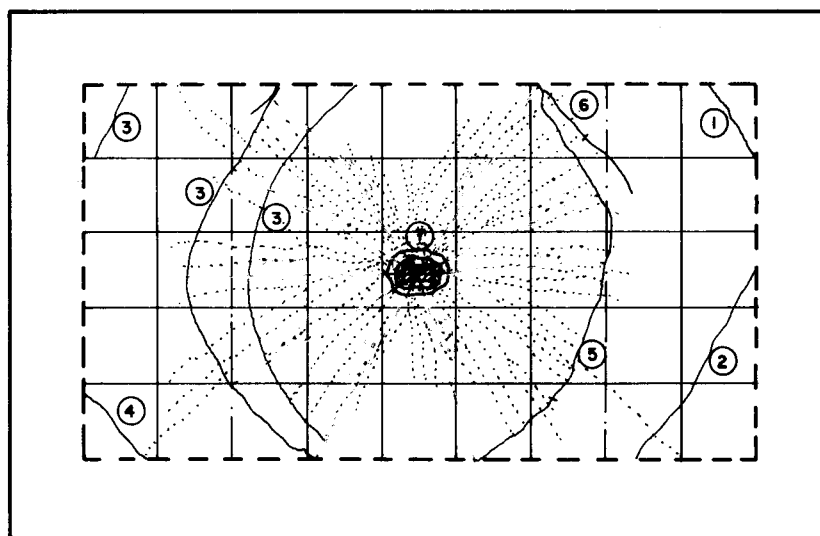


Fig. 3.2.5 - SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA (CA-1) DOS GRÁFICOS CARGA - FLECHA DAS TRÊS LAJES TIPO CA DO GRUPO I.

SA - 11



CA - 11



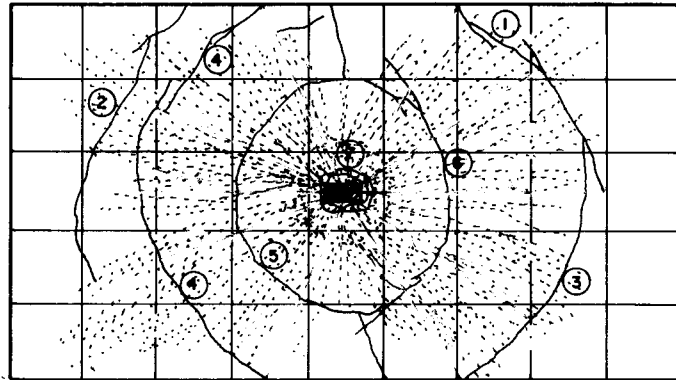
~~~~~ fissuras negativas (face superior)  
 ..... fissuras positivas (face inferior)

Escala - 1:10

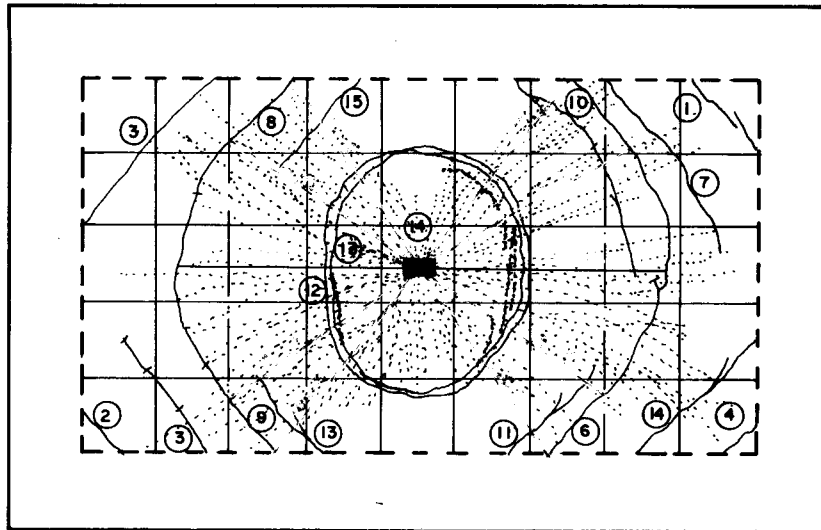
Fig. 3.2-6 - Configurações de ruína das lajes 1<sup>a</sup> Série do Grupo 1.



SA' - 21



CA' - 21



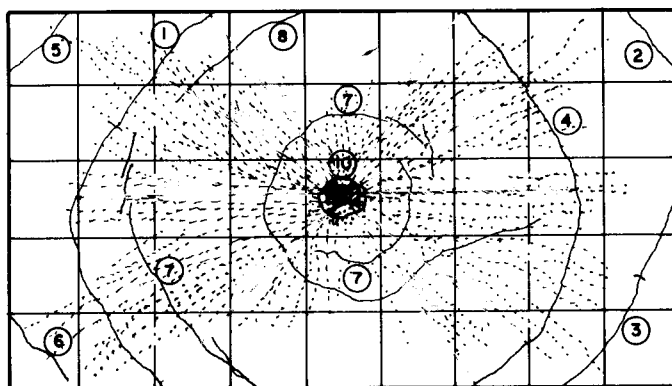
~~~~~ fissuras negativas (face superior)

..... fissuras positivas (face inferior)

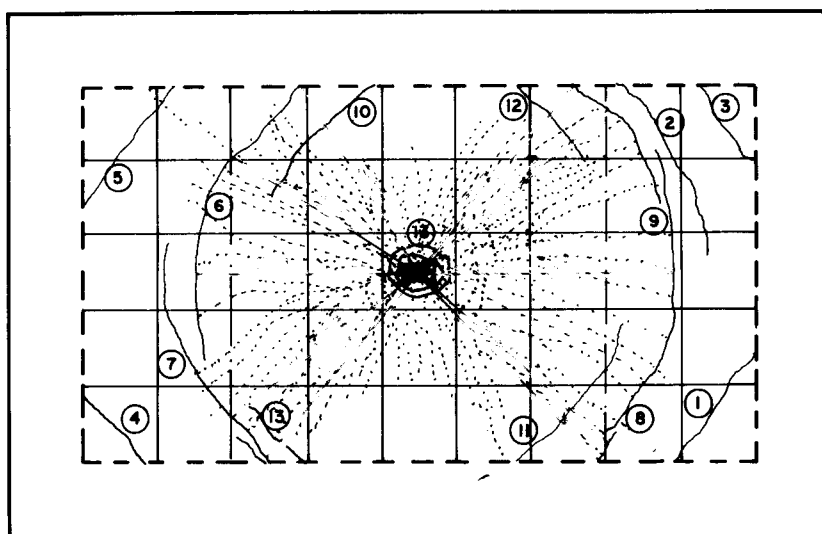
Escala - 1:10

Fig. 3.2-7 - Configurações de ruína das lajes da 2ª Série do Grupo 1.

SA - 31



CA - 31



~~~~~ fissuras negativas (face superior)

..... fissuras positivas (face inferior)

Escala - 1:10

Fig. 3.2-8 - Configurações de ruína das lajes da 3ª Série do Grupo 1.

Tabela 3.2-2 - Progresso das fissuras das lajes da 1a. Sērie do Grupo 1.

| Laje  | Nº da Fissura         |               | Carga P (kgf) | Flecha $\delta$ (mm) |
|-------|-----------------------|---------------|---------------|----------------------|
|       | Face inferior         | Face superior |               |                      |
| SA-11 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 546           | 2,93                 |
|       |                       | 1             | 717           | 4,98                 |
|       |                       | 2             | 737           | 6,43                 |
|       |                       | 3             | 928           | 12,14                |
|       |                       | 4             | 996           | 14,76                |
|       |                       | 5             | 996           | 16,62                |
|       |                       | 6             | 1024          | 16,89                |
| CA-11 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 771           | 4,32                 |
|       |                       | 1             | 942           | 7,26                 |
|       |                       | 2             | 976           | 8,17                 |
|       |                       | 3             | 969           | 9,76                 |
|       |                       | 4             | 1044          | 10,73                |
|       |                       | 5             | 1058          | 11,47                |
|       |                       | 6             | 1072          | 12,68                |
|       |                       | 7             | 1153          | 18,30                |

Tabela 3.2-3 - Progresso das fissuras das lajes da 2a. Série do Grupo 1.

| Laje   | Nº da fissura         |               | Carga<br>P<br>kgf | Flecha<br>$\delta$<br>(mm) |
|--------|-----------------------|---------------|-------------------|----------------------------|
|        | Face inferior         | Face superior |                   |                            |
| SA'-21 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 291               | 2,15                       |
|        |                       | 1 e 2         | 799               | 9,83                       |
|        |                       | 3 e 4         | 915               | 15,89                      |
|        |                       | 5 e 6         | 930               | 19,80                      |
|        |                       | 7             | 842               | 29,27                      |
| CA'-21 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 291               | 2,49                       |
|        |                       | 1             | 509               | 5,29                       |
|        |                       | 2 , 3 e 4     | 654               | 7,07                       |
|        |                       | 5 e 6         | 727               | 8,79                       |
|        |                       | 7 e 8         | 785               | 10,56                      |
|        |                       | 9 e 10        | 727               | 12,14                      |
|        |                       | 11 , 12 e 13  | 872               | 16,28                      |
| 14     | 944                   | 18,61         |                   |                            |

Tabela 3.2-4 - Progresso das fissuras das lajes da 3a. Série do Grupo 1.

| Laje  | Nº da fissura         |               | Carga P<br>(kgf) | Flecha $\delta$<br>(mm) |
|-------|-----------------------|---------------|------------------|-------------------------|
|       | Face inferior         | Face superior |                  |                         |
| SA-31 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 382              | 1,85                    |
|       |                       | 1             | 621              | 4,08                    |
|       |                       | 2             | 669              | 5,04                    |
|       |                       | 3             | 764              | 7,14                    |
|       |                       | 4             | 792              | 7,41                    |
|       |                       | 5             | 996              | 14,77                   |
|       |                       | 6             | 1031             | 17,08                   |
|       |                       | 7             | 1037             | 18,78                   |
|       |                       | 8             | 1031             | 19,28                   |
|       |                       | 9             | 1051             | 21,70                   |
|       | 10                    | 1037          | 22,00            |                         |
| CA-31 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 471              | 2,47                    |
|       |                       | 1             | 648              | 4,02                    |
|       |                       | 2             | 717              | 5,19                    |
|       |                       | 3             | 853              | 7,12                    |
|       |                       | 4             | 887              | 7,64                    |
|       |                       | 5 , 6 e 7     | 921              | 8,19                    |
|       |                       | 9             | 990              | 11,20                   |
|       |                       | 10            | 1024             | 11,97                   |
|       |                       | 11 e 12       | 1072             | 15,38                   |
|       |                       | 13            | 1120             | 18,04                   |

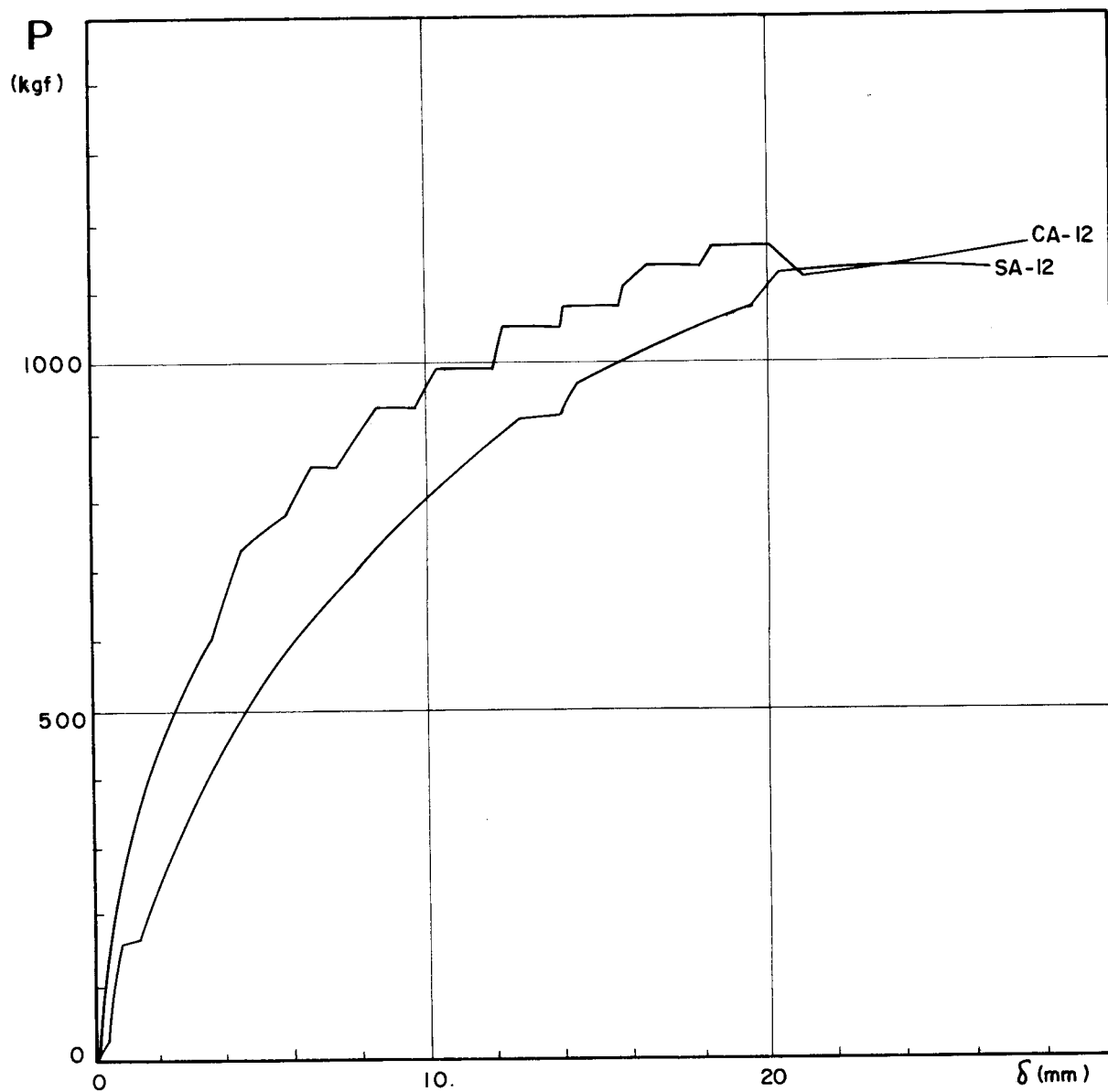
3.3. LAJES DO GRUPO 2 ( $\alpha = 1,2$ )

- I) Principais cargas e flechas observadas  
(Tabela 3.3-1) ..... pág. 3-17
- II) Gráficos carga-flecha  
(Figs. 3.3-1 a 3.3-6) ..... págs. 3-18 a 3-23
- III) Configurações de ruína  
(Figs. 3.3-7 a 3.3-10) ..... págs. 3-24 a 3-27
- IV) Progresso da fissuração  
(Tabs. 3.3-2 a 3.3-5) ..... págs. 3-28 a 3-31

Tabela 3.3-1 - Principais valores das cargas e flechas observadas nos ensaios das lajes do Grupo 2.

| Laje   | $\sigma_{c14}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | Início da Fase de Fissuração |                  | Início da Fase de Ruína |                  | Ruína                 |                  |
|--------|---------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------------|------------------|-----------------------|------------------|
|        |                                       | P <sub>f</sub><br>kgf        | $\delta_f$<br>mm | P <sub>r</sub><br>kgf   | $\delta_r$<br>mm | P <sub>R</sub><br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA-12  | 210                                   | 465                          | 4,20             | 1133                    | 20,47            | 1147                  | 22,39            |
| CA-12  |                                       | 414                          | 1,60             | 1039                    | 12,91            | 1169*                 | 18,37            |
| SA-22  | 300                                   | 435                          | 2,46             | 1242                    | 21,85            | 1300**                | 26,65            |
| CA-22  |                                       | 596                          | 3,62             | 915                     | 10,15            | 1170                  | 21,07            |
| SA-32  | 253                                   | 385                          | 3,61             | 843                     | 18,70            | 843*                  | 18,70            |
| CA-32  |                                       | 596                          | 3,52             | 1104                    | 18,99            | 1133                  | 19,47            |
| SA'-42 | 266                                   | 363                          | 2,95             | 959                     | 20,60            | 1046                  | 24,21            |
| CA'-42 |                                       | 290                          | 1,78             | 980                     | 17,72            | 1090                  | 23,90            |
| SA     |                                       | 412                          | 3,31             | 1044                    | 20,40            | 1084                  | 22,99            |
| CA     |                                       | 474                          | 2,63             | 1010                    | 14,94            | 1140                  | 20,70            |
| MÉDIAS |                                       |                              |                  |                         |                  |                       |                  |

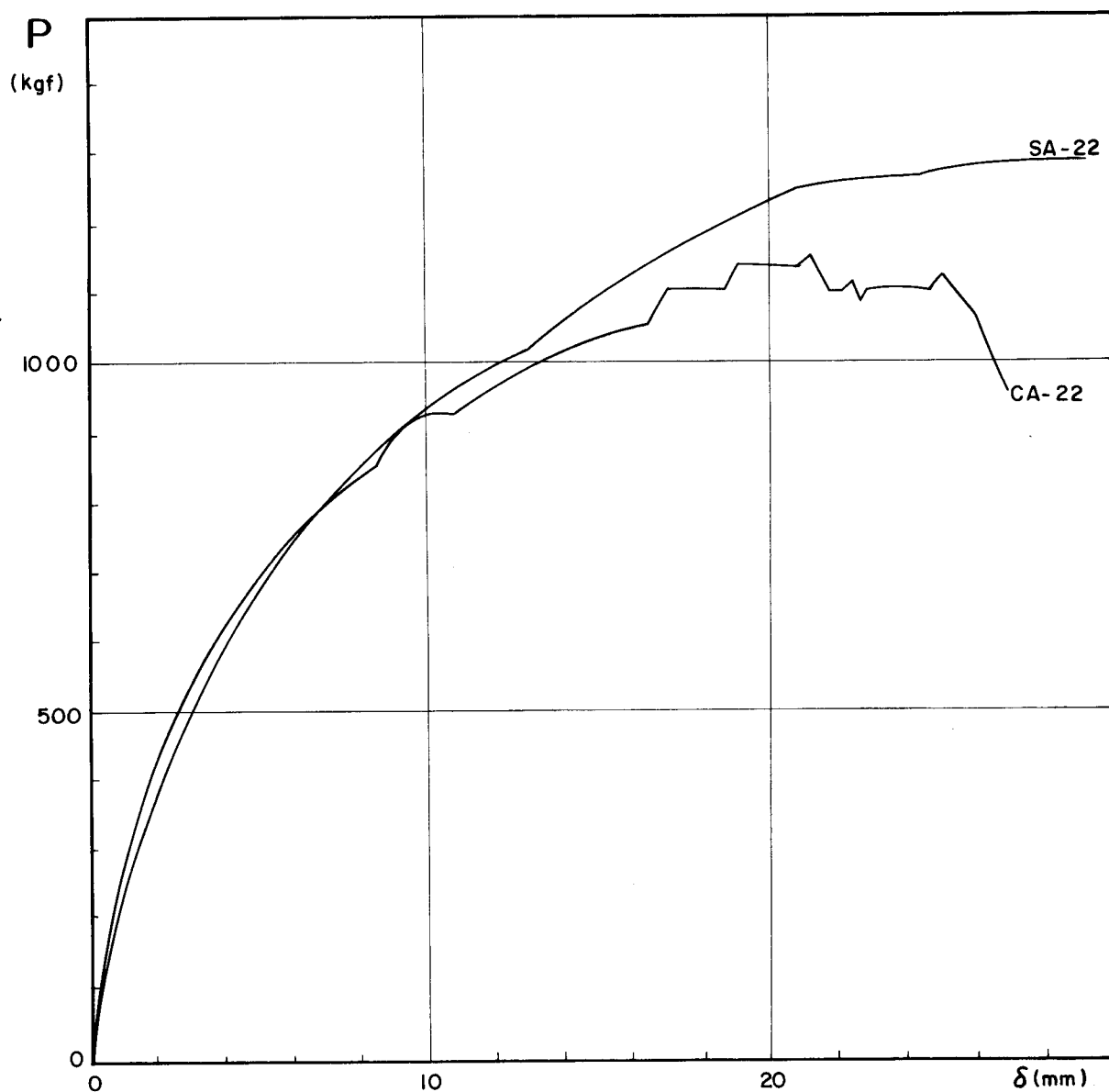
Observação: Os valores de P<sub>R</sub> sem asteriscos, indicam ruptura com predominância de flexão, os indicados com (\*) correspondem a ruptura por punção, e os com (\*\*) indicam que a ruptura se deu sob ação predominante de forças cortantes fora da região de carregamento.



| LAJE   | $\checkmark_{c14}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | Início da Fase de Fissuração |                  |                   | Início da Fase de Ruína |                  |                   | Ruína        |                  |
|--------|-------------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|-------------------|--------------|------------------|
|        |                                           | $P_f$<br>kgf                 | $\delta_f$<br>mm | $\frac{P_f}{P_R}$ | $P_r$<br>kgf            | $\delta_r$<br>mm | $\frac{P_r}{P_R}$ | $P_R$<br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA -12 | 210                                       | 465                          | 4,20             | 0,41              | 1133                    | 20,47            | 0,99              | 1147         | 22,39            |
| CA-12  | 210                                       | 44                           | 1,60             | 0,35              | 1039                    | 12,91            | 0,89              | 1169         | 18,37            |

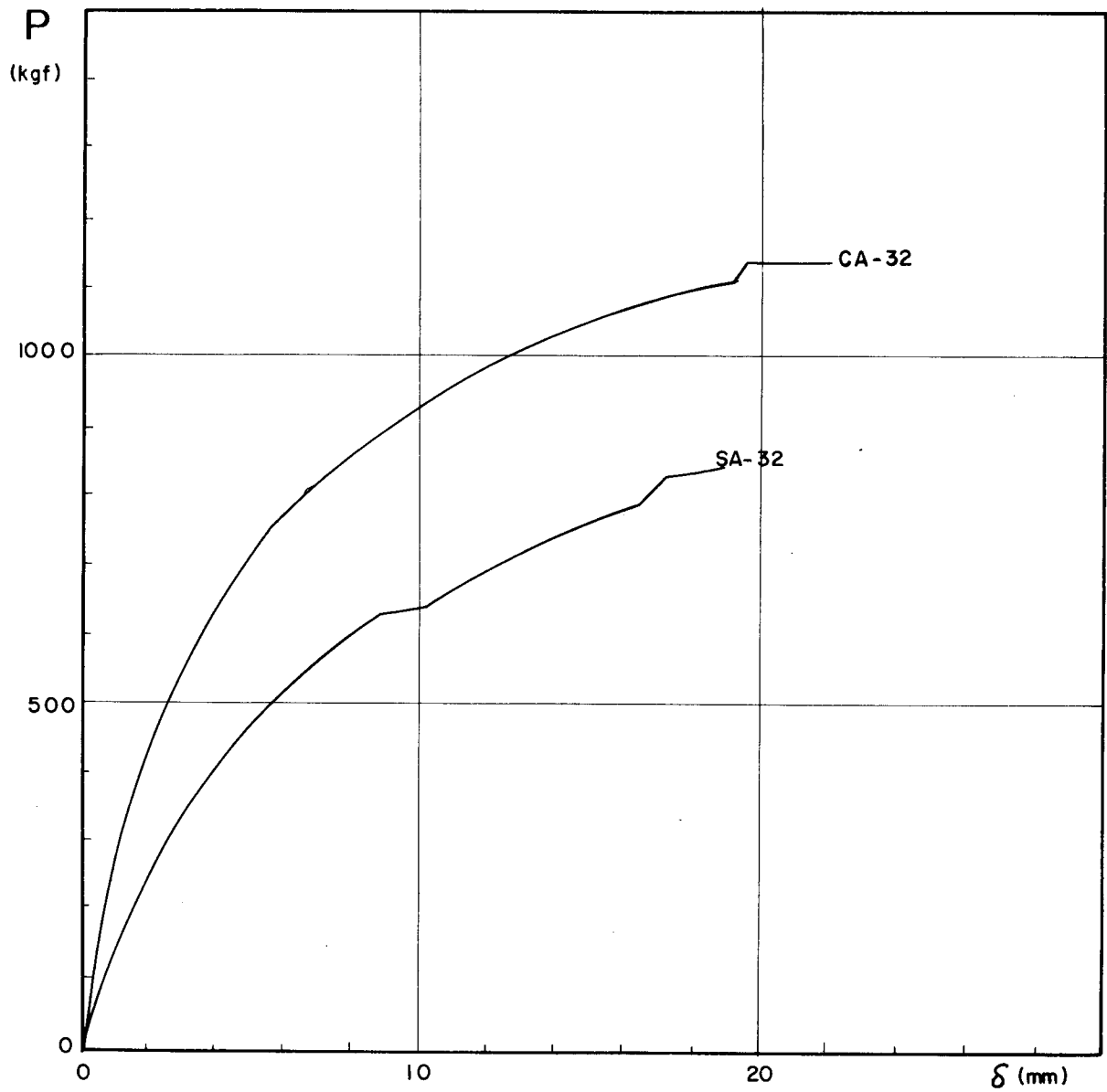
FIG. 3.3-1 - GRÁFICOS CARGA - FLECHA (1ª SÉRIE - GRUPO 2)





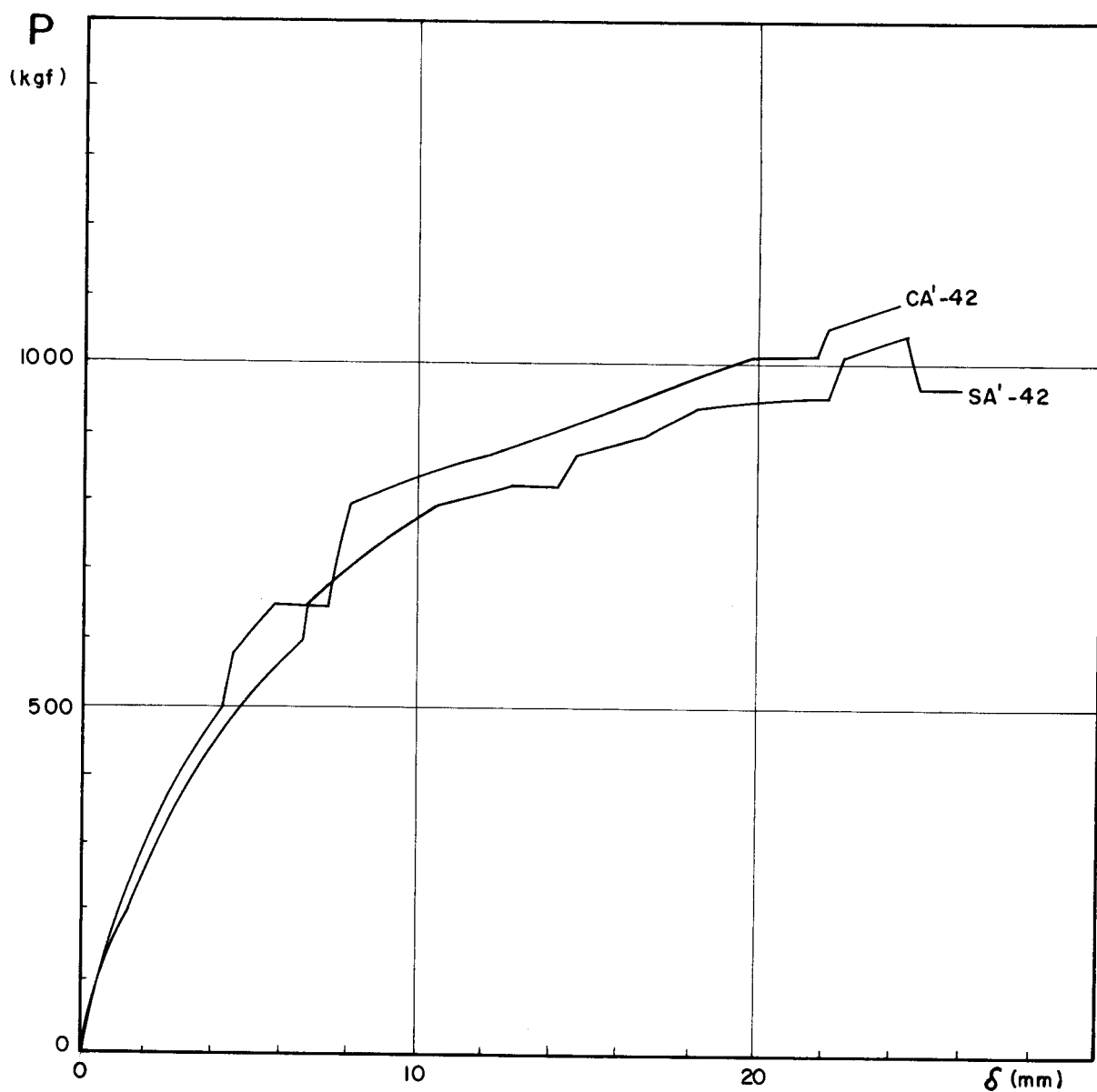
| LAJE  | $\tilde{V}_{Ck}$<br>$\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ | Início da Fase de Fissuração |                  |                   | Início da Fase de Ruína |                  |                   | Ruína        |                  |
|-------|------------------------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|-------------------|--------------|------------------|
|       |                                                      | $P_f$<br>kgf                 | $\delta_f$<br>mm | $\frac{P_f}{P_R}$ | $P_r$<br>kgf            | $\delta_r$<br>mm | $\frac{P_r}{P_R}$ | $P_R$<br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA-22 | 300                                                  | 435                          | 2,46             | 0,33              | 12 42                   | 21,85            | 0,96              | 1300         | 26,65            |
| CA-22 | 300                                                  | 356                          | 3,62             | 0,30              | 915                     | 10,15            | 0,78              | 1170         | 21,07            |

**Fig. 3.3.2** — GRÁFICOS CARGA — FLECHA (2ª SÉRIE - GRUPO 2)



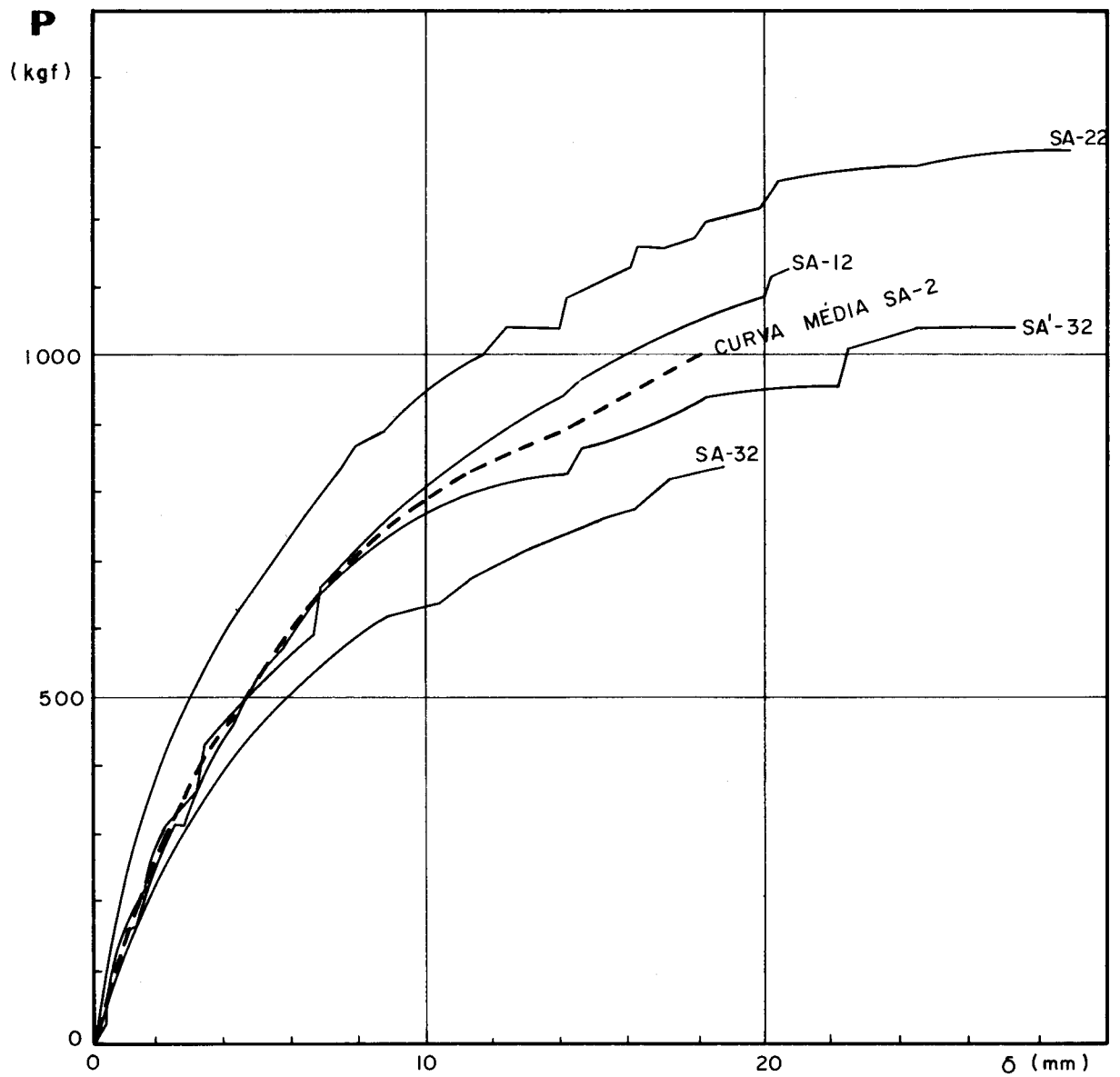
| LAJE   | $\sqrt{C_{I4}}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | Início da Fase de Fissuração |                  |                   | Início da Fase de Ruína |                  |                   | Ruína        |                  |
|--------|----------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|-------------------|--------------|------------------|
|        |                                        | $P_f$<br>kgf                 | $\delta_f$<br>mm | $\frac{P_f}{P_R}$ | $P_r$<br>kgf            | $\delta_r$<br>mm | $\frac{P_r}{P_R}$ | $P_R$<br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA'-32 | 253                                    | 385                          | 3,61             | 0,46              | 843                     | 18,70            | 1,00              | 843          | 18,70            |
| CA'-32 | 253                                    | 596                          | 3,52             | 0,53              | 1104                    | 18,99            | 0,97              | 1133         | 19,47            |

**Fig. 3.3.3** - GRÁFICOS CARGA - FLECHA (3ª SÉRIE - GRUPO 2)

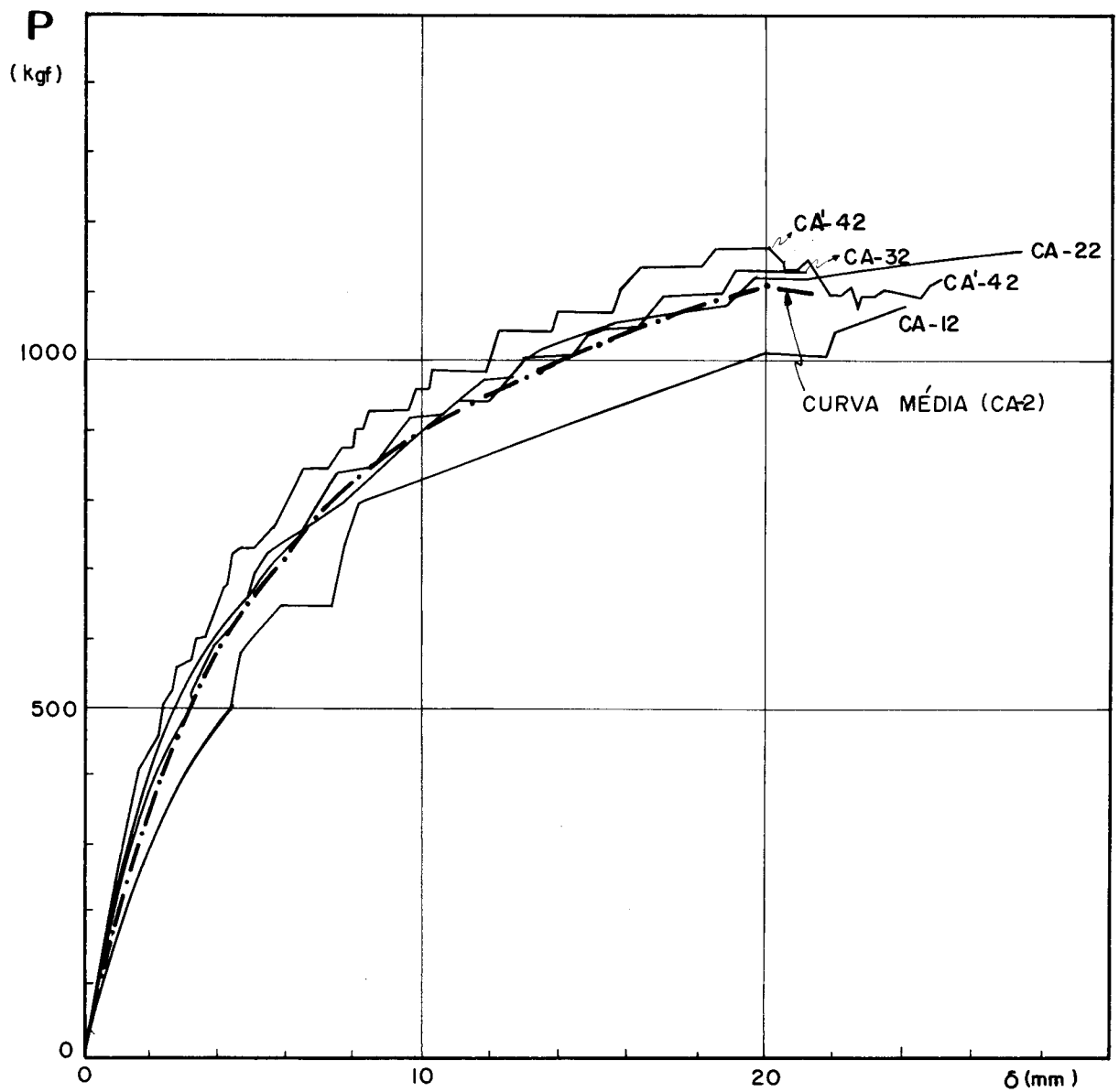


| LAJE   | $\sqrt{V_{CI4}}$<br>$\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ | Início da Fase de Fissuração |                  |                   | Início da fase de Ruína |                  |                   | Ruína        |                  |
|--------|------------------------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|-------------------|--------------|------------------|
|        |                                                      | $P_f$<br>kgf                 | $\delta_f$<br>mm | $\frac{P_f}{P_R}$ | $P_r$<br>kgf            | $\delta_r$<br>mm | $\frac{P_r}{P_R}$ | $P_R$<br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA'-32 | 266                                                  | 363                          | 2,95             | 0,35              | 959                     | 20,60            | 0,92              | 1046         | 24,21            |
| CA'-32 | 266                                                  | 290                          | 1,78             | 0,27              | 980                     | 17,72            | 0,90              | 1090         | 23,90            |

Fig. 3.3.4 — GRÁFICOS CARGA - FLECHA (4ª SERIE - GRUPO 2)

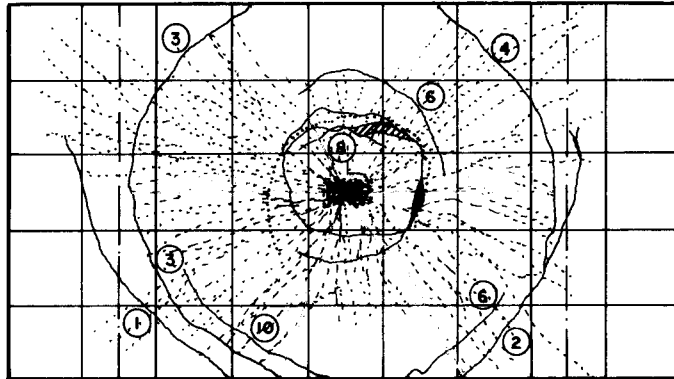


**Fig. 3.3.5** - SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA (SA-2) DOS GRÁFICOS CARGA - FLECHA DAS QUATRO LAJES TIPO SA DO GRUPO 2.

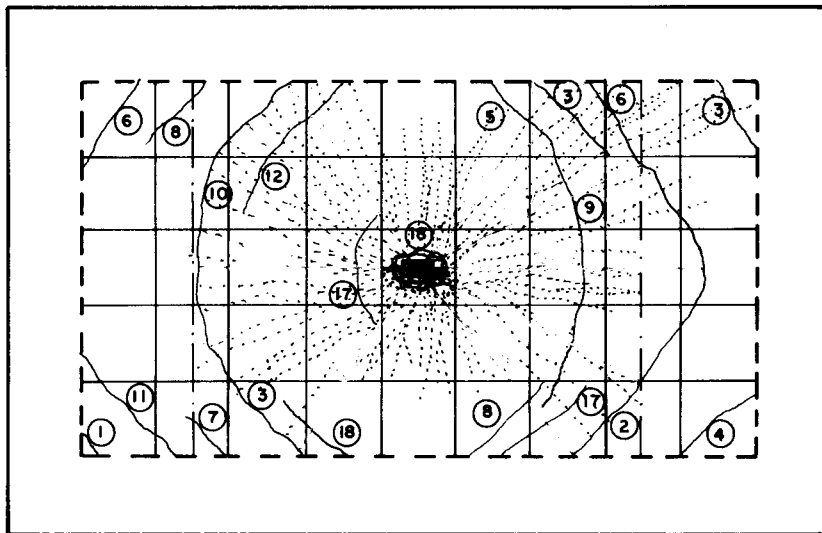


**Fig. 3.3.6** - SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA (CA-2) DOS GRÁFICOS CARGA - FLECHA DAS QUATRO LAJES TIPO CA DO GRUPO 2.

SA - 12



CA - 12

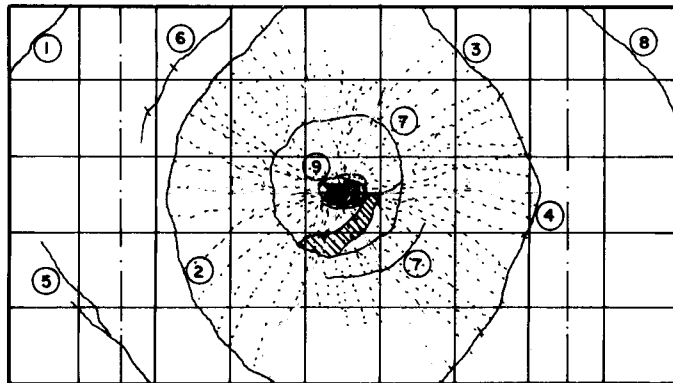


— fissuras negativas (face superior)  
 ..... fissuras positivas (face inferior)

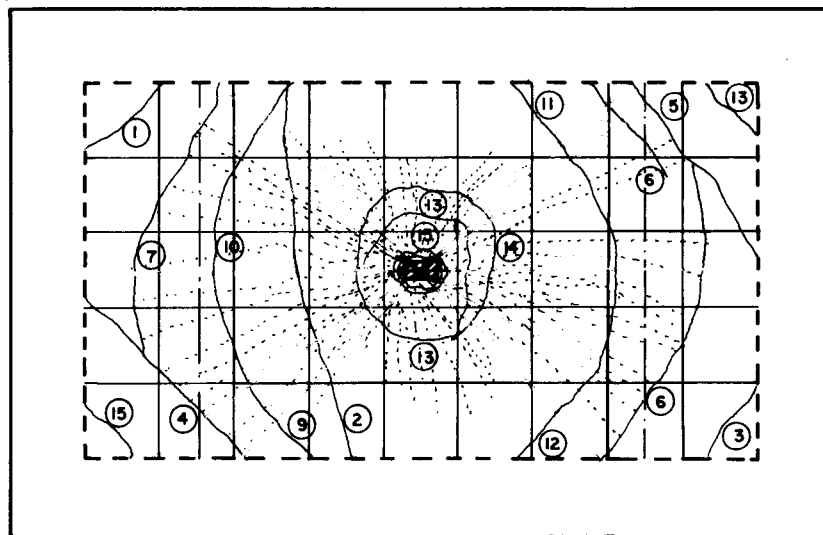
Escala - 1:10

Fig. 3.3-7 - Configurações de ruína da lajes da 1<sup>a</sup> Série do Grupo 2

SA - 22



CA - 22

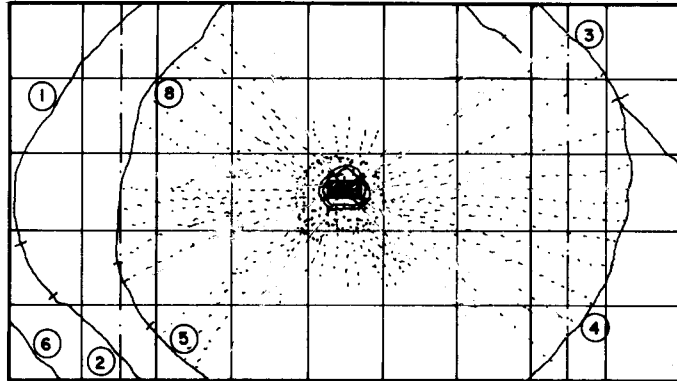


— fissuras negativas (face superior)  
.....fissuras positivas (face inferior)

Escala - 1:10

Fig. 3.3-8 - Configurações de ruína das lajes da 2<sup>a</sup> Série do Grupo 2

SA - 32



CA - 32

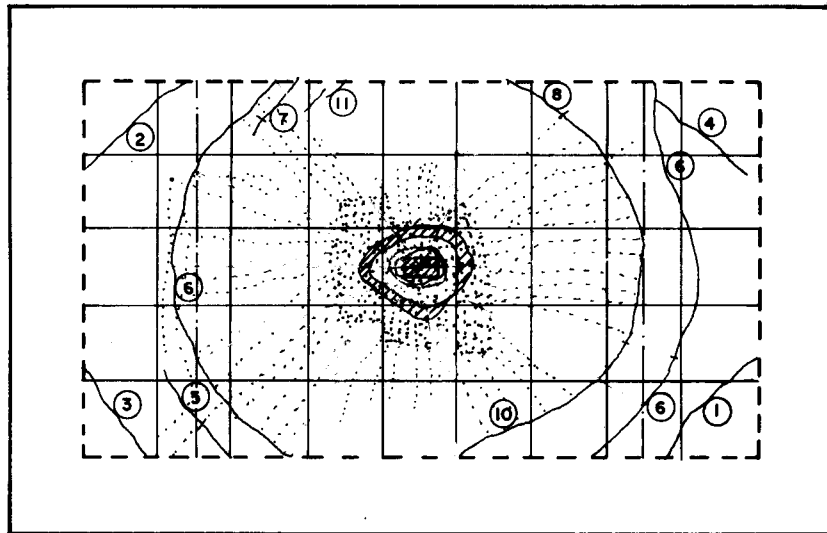
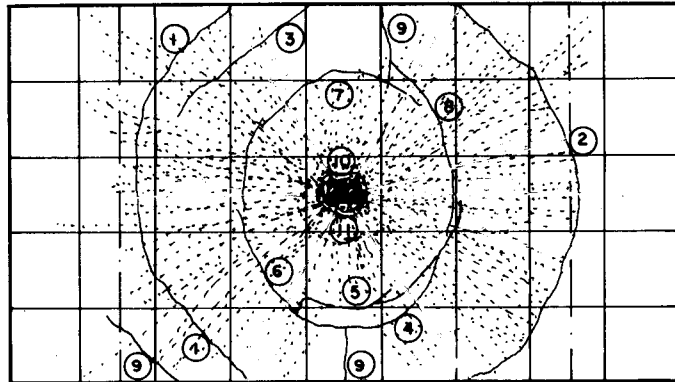


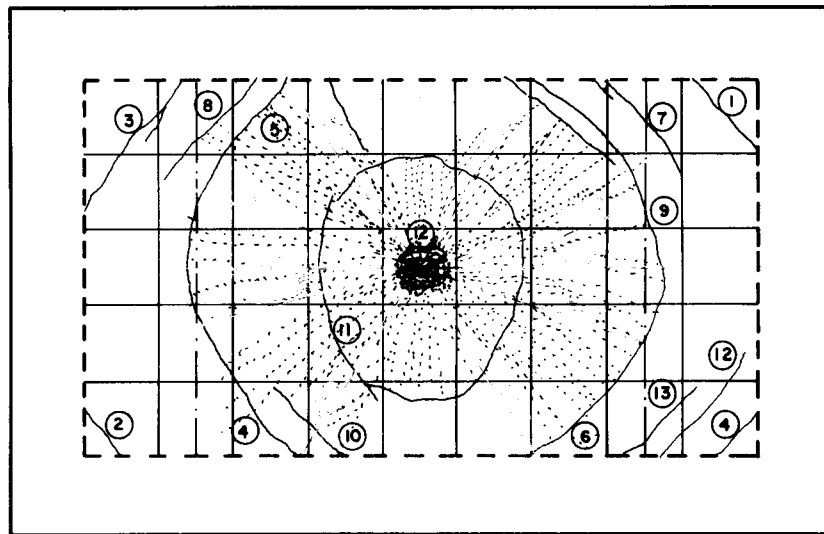
Fig.3.3-9 - Configurações de ruína das lajes da 1a. Série do Grupo 1



SA' - 42



CA' - 42



— fissuras negativas (face superior)

..... fissuras positivas (face inferior)

Escala - 1:10

Fig. 3.3-10 - Configurações de ruína das lajes da 4<sup>a</sup> Série do Grupo 2

Tabela 3.3-2 - Progresso das fissuras das  
lajes da 1a. Série do Grupo 2

| Laje  | Nº DA FISSURA |               | Carga<br>P<br>(kgf) | Flecha<br>$\delta$<br>(mm) |
|-------|---------------|---------------|---------------------|----------------------------|
|       | Face inferior | Face superior |                     |                            |
| SA-12 | <u>1</u> as   |               | 466                 | 4,20                       |
|       |               | 1             | 697                 | 7,73                       |
|       |               | 2             | 865                 | 10,83                      |
|       |               | 3             | 995                 | 15,66                      |
|       |               | 4             | 1010                | 15,79                      |
|       |               | 5 e 6         | 1119                | 20,97                      |
|       |               | 7 ,8 ,9 e 10  | 1133                | 20,47                      |
| CA-12 | <u>1</u> as   |               | 414                 | 1,60                       |
|       |               | 1 , 2 e 3     | 676                 | 4,06                       |
|       |               | 4             | 727                 | 4,39                       |
|       |               | 5             | 792                 | 5,74                       |
|       |               | 6             | 821                 | 5,94                       |
|       |               | 7 e 8         | 937                 | 9,11                       |
|       |               | 9 e 10        | 981                 | 11,55                      |
|       |               | 11            | 1024                | 12,16                      |
|       |               | 12            | 1039                | 12,91                      |
|       |               | 13 e 14       | 1010                | 13,51                      |
|       |               | 15            | 1053                | 15,31                      |
|       |               | 16 , 17 e 18  | 1155                | 20,33                      |
|       |               | 19            | 1169                | 27,37                      |

Tabela 3.3-3 - Progresso das fissuras das lajes da 2a. Série do Grupo 2.

| Laje  | Nº da fissura   |               | Carga<br>P<br>(kgf) | Flecha<br>$\delta$<br>(mm) |
|-------|-----------------|---------------|---------------------|----------------------------|
|       | Face inferior   | Face superior |                     |                            |
| SA-22 | 1 <sup>as</sup> |               | 435                 | 2,46                       |
|       |                 | 1             | 792                 | 6,62                       |
|       |                 | 2 e 3         | 966                 | 10,26                      |
|       |                 | 4             | 1046                | 13,06                      |
|       |                 | 5             | 1162                | 16,94                      |
|       |                 | 6             | 1177                | 17,78                      |
|       |                 | 7             | 1242                | 21,85                      |
|       |                 | 8             | 1279                | 24,22                      |
|       |                 | 9             | 1300                | 28,62                      |
|       |                 | 1 e 2         | 356                 | 1,77                       |
| CA-22 | 1 <sup>as</sup> |               | 596                 | 3,62                       |
|       |                 | 3 e 4         | 654                 | 4,57                       |
|       |                 | 5             | 806                 | 6,67                       |
|       |                 | 6             | 835                 | 7,05                       |
|       |                 | 7             | 930                 | 9,27                       |
|       |                 | 8             | 915                 | 10,15                      |
|       |                 | 9             | 966                 | 11,18                      |
|       |                 | 10            | 1061                | 14,97                      |
|       |                 | 11            | 1104                | 18,29                      |
|       |                 | 12 e 13       | 1119                | 18,51                      |
|       |                 | 14            | 1104                | 22,54                      |
|       |                 | 15            | 974                 | 26,83                      |

Tabela 3.3-4 - Progresso das fissuras das lajes da 3a. Sêrie do Grupo 2.

| Laje  | Nº da Fissura   |               | Carga<br>P<br>(kgf) | Flecha<br>$\delta$<br>(mm) |
|-------|-----------------|---------------|---------------------|----------------------------|
|       | Face inferior   | Face superior |                     |                            |
| SA-32 | 1 <sup>as</sup> |               | 385                 | 3,61                       |
|       |                 | 1 e 2         | 625                 | 8,71                       |
|       |                 | 3             | 676                 | 11,08                      |
|       |                 | 4             | 756                 | 14,63                      |
|       |                 | 5,6 e 7       | 785                 | 16,21                      |
|       |                 | 8             | 843                 | 18,70                      |
| SA-32 | 1 <sup>as</sup> |               | 596                 | 3,52                       |
|       |                 | 1 e 2         | 639                 | 4,05                       |
|       |                 | 3             | 806                 | 6,85                       |
|       |                 | 4             | 836                 | 8,02                       |
|       |                 | 5             | 901                 | 8,99                       |
|       |                 | 6             | 988                 | 12,25                      |
|       |                 | 7             | 1032                | 13,22                      |
|       |                 | 8             | 1039                | 13,95                      |
|       |                 | 9             | 1053                | 14,96                      |
|       |                 | 10            | 1046                | 16,88                      |
|       |                 | 11            | 1104                | 18,99                      |

Tabela 3.3-5 - Progresso das fissuras das lajes da 4a. Série do Grupo 2.

| Laje   | Nº de fissura         |               | Carga<br>P<br>(kgf) | Flecha<br>$\delta$<br>(mm) |
|--------|-----------------------|---------------|---------------------|----------------------------|
|        | Face inferior         | Face superior |                     |                            |
| SA'-42 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 363                 | 2,95                       |
|        |                       | 1             | 596                 | 6,48                       |
|        |                       | 2             | 828                 | 12,59                      |
|        |                       | 3 ,4 ..... 9  | 959                 | 20,60                      |
|        |                       | 10            | 959                 | 21,92                      |
|        |                       | 11            | 1046                | 27,05                      |
| CA'-42 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 291                 | 1,78                       |
|        |                       | 1             | 508                 | 4,19                       |
|        |                       | 2 e 3         | 654                 | 7,18                       |
|        |                       | 4 e 5         | 741                 | 7,53                       |
|        |                       | 6             | 799                 | 7,93                       |
|        |                       | 7 e 8         | 872                 | 11,94                      |
|        |                       | 9             | 908                 | 13,68                      |
|        |                       | 10            | 944                 | 15,61                      |
|        |                       | 11            | 981                 | 17,72                      |
|        |                       | 12            | 1090                | 23,90                      |

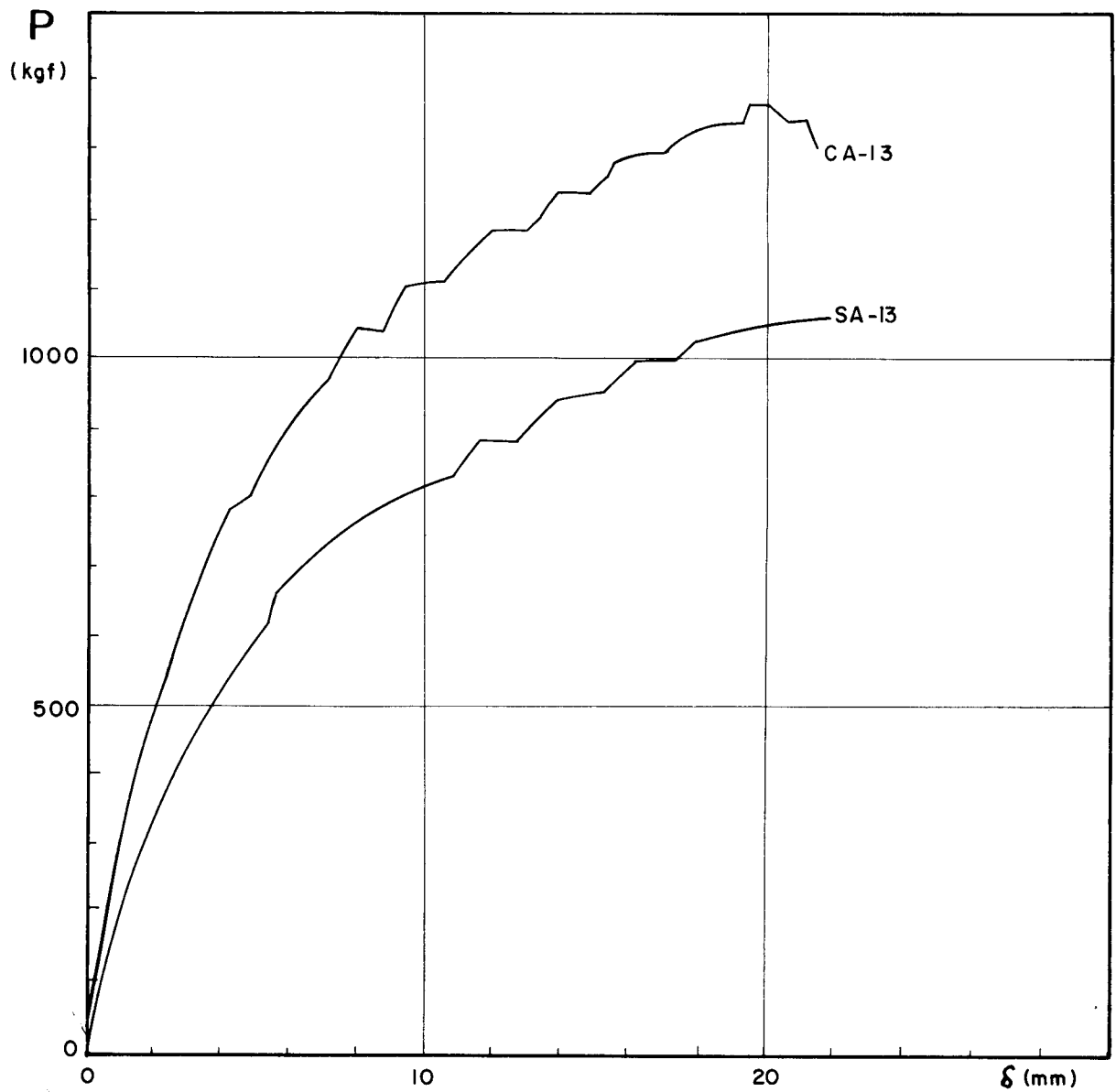
3.4. LAJES DO GRUPO 3 ( $\alpha = 1,4$ )

- I) Principais cargas e flechas observadas  
(Tabela 3.4-1) ..... pãg. 3-33
- II) Gráficos carga-flecha  
(Figs. 3.4-1 a 3.4-5) ..... pãgs.3-34 a 3-38
- III) Configurações de ruína  
(Figs. 3.4-6 a 3.4-8) ..... pãgs.3-39 a 3-41
- IV) Progresso da fissuração  
(Tabs. 3.4-2 a 3.4-5) ..... pãgs.3-42 a

Tabela 3.4-1 - Principais valores das cargas e flechas observadas nos ensaios das lajes do Grupo 3.

| Laje         | $\sigma_{c14}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | Início da Fase de Fissuração |                  | Início da Fase de Ruína |                  | Ruína                 |                  |
|--------------|---------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------------|------------------|-----------------------|------------------|
|              |                                       | P <sub>f</sub><br>kgf        | $\delta_f$<br>mm | P <sub>r</sub><br>kgf   | $\delta_r$<br>mm | P <sub>R</sub><br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA-13        | 162                                   | 537                          | 4,04             | -                       | -                | 1060*                 | 20,10            |
| CA-13        |                                       | 639                          | 3,15             | -                       | -                | 1366**                | 21,40            |
| SA-23        | 270                                   | 581                          | 2,67             | 1235                    | 14,31            | 1394**                | 25,03            |
| CA-23        |                                       | 552                          | 2,45             | 1162                    | 11,40            | 1351**                | 20,62            |
| SA'-33       | 253                                   | 363                          | 1,91             | 1293                    | 21,12            | 1351                  | 25,14            |
| SA'-33       |                                       | 581                          | 3,21             | 1307                    | 13,90            | 1562                  | 21,41            |
| CA           |                                       | 494                          | 2,87             | 1264                    | 17,72            | 1268                  | 23,42            |
| MEDIAS<br>SA |                                       | 591                          | 2,94             | 1235                    | 12,65            | 1426                  | 21,14            |

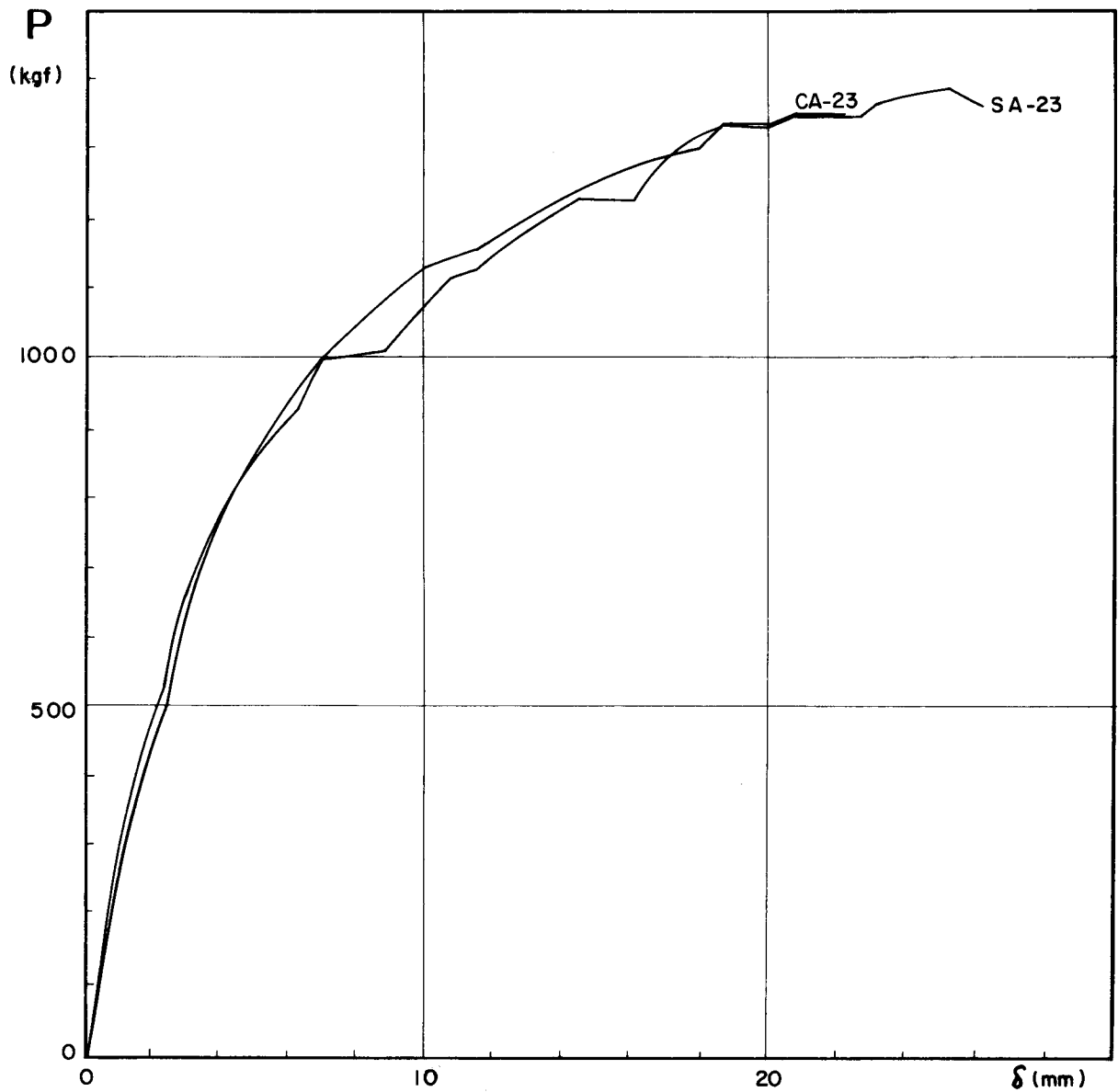
Observação: Os valores de P<sub>R</sub> indicados sem asteriscos, correspondem à ruptura com predominância de flexão, os com (\*) indicam que ocorreu ruptura por punção, e (\*\*) quer dizer que a ruptura se deu sob a ação predominante de forças cortantes fora da região de carregamento.



| LAJE  | $\sigma_{CI4}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | Início da Fase de Fissuração |                  |                   | Início da Fase de Ruína |                  |                   | Ruína        |                  |
|-------|---------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|-------------------|--------------|------------------|
|       |                                       | $P_f$<br>kgf                 | $\delta_f$<br>mm | $\frac{P_f}{P_R}$ | $P_r$<br>kgf            | $\delta_r$<br>mm | $\frac{P_r}{P_R}$ | $P_R$<br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA-13 | 162                                   | 537                          | 4,04             | 0,51              | —                       | —                | —                 | 1060         | 20,10            |
| CA-13 | 162                                   | 639                          | 3,15             | 0,47              | —                       | —                | —                 | 1366         | 21,40            |

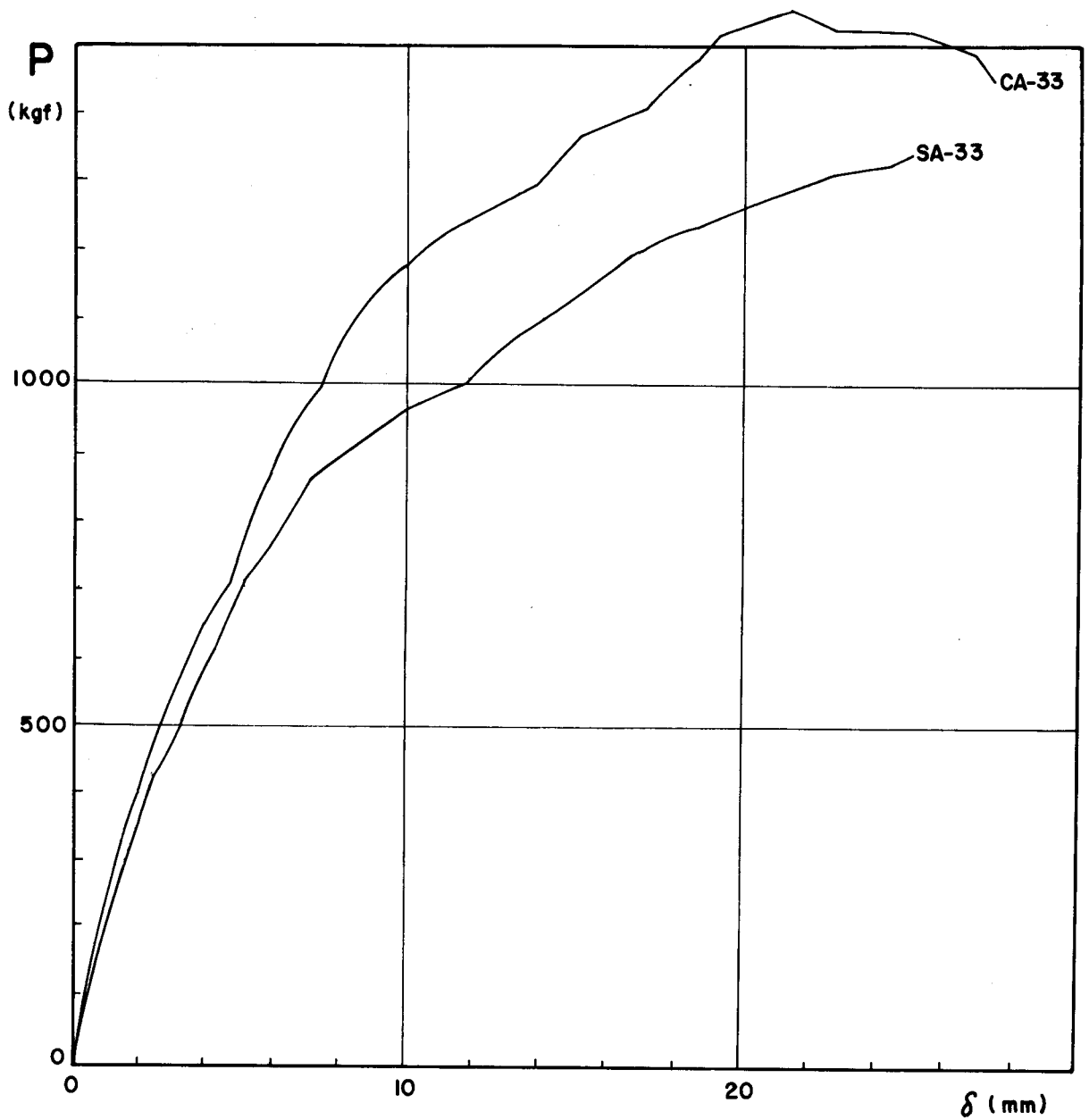
Fig. 3.4.1 — GRÁFICOS CARGA — FLECHA (1ª SÉRIE — GRUPO 3)





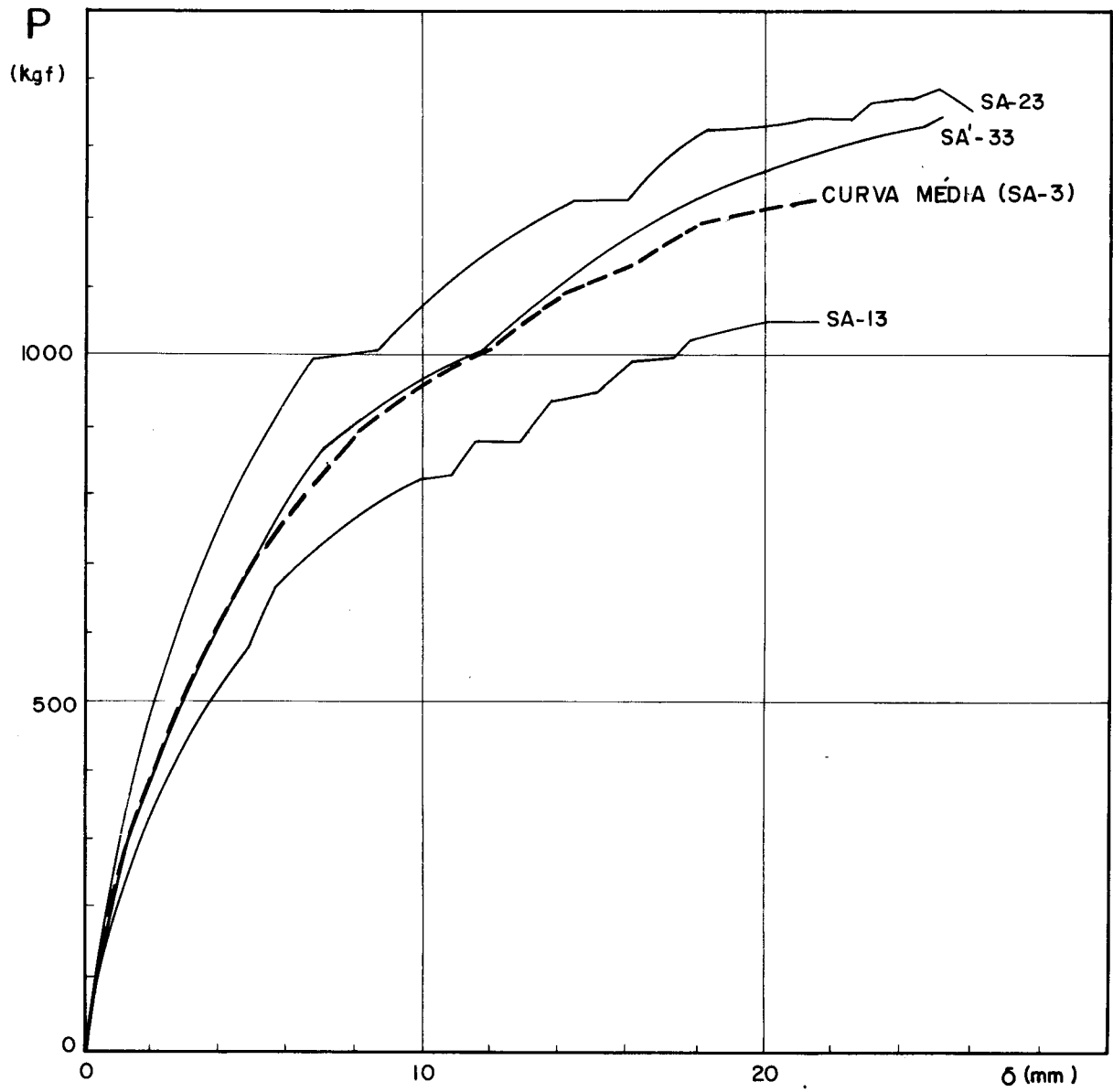
| LAJE  | $\tilde{V}_{CI4}$<br>$\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ | Início da Fase de Fissuração |                  |                   | Início da Fase de Ruína |                  |                   | Ruína        |                  |
|-------|-------------------------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|-------------------|--------------|------------------|
|       |                                                       | $P_f$<br>kgf                 | $\delta_f$<br>mm | $\frac{P_f}{P_R}$ | $P_r$<br>kgf            | $\delta_r$<br>mm | $\frac{P_r}{P_R}$ | $P_R$<br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA-23 | 270                                                   | 581                          | 2,45             | 0,42              | 1235                    | 14,31            | 0,90              | 1394         | 25,03            |
| CA-23 | 270                                                   | 552                          | 2,67             | 0,41              | 1162                    | 11,40            | 0,86              | 1351         | 20,62            |

Fig. 3.4.2 - GRÁFICOS CARGA - FLECHA (2ª SÉRIE - GRUPO 3)

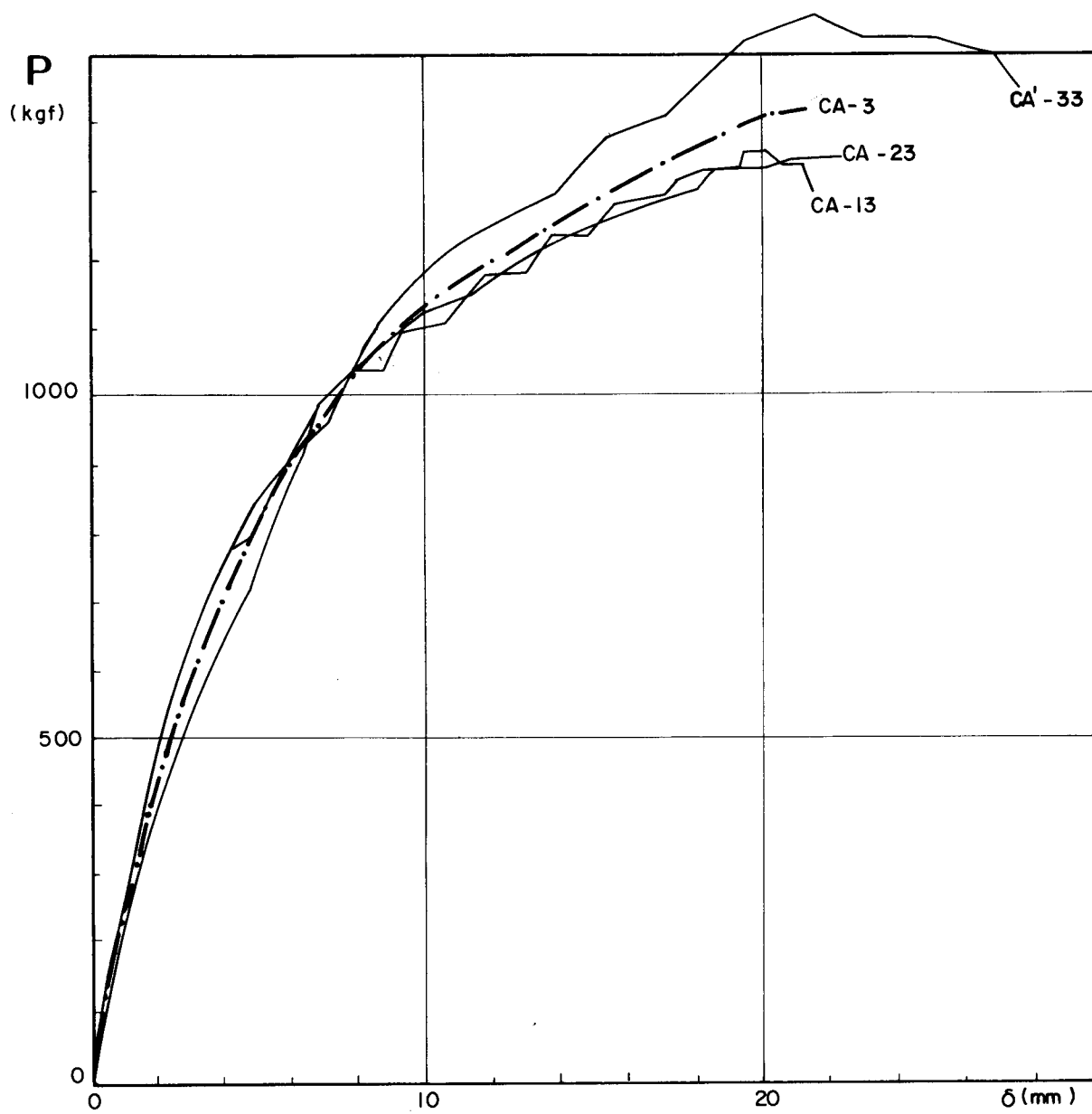


| LAJE   | $\sigma_{Cl4}$<br>kgf/cm <sup>2</sup> | Início da Fase de Fissuração |                  |                   | Início da Fase de Ruína |                  |                   | Ruína        |                  |
|--------|---------------------------------------|------------------------------|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|-------------------|--------------|------------------|
|        |                                       | $P_f$<br>kgf                 | $\delta_f$<br>mm | $\frac{P_f}{P_R}$ | $P_r$<br>kgf            | $\delta_r$<br>mm | $\frac{P_r}{P_R}$ | $P_R$<br>kgf | $\delta_R$<br>mm |
| SA'-33 | 253                                   | 363                          | 1,91             | 0,27              | 1 293                   | 21,12            | 0,96              | 1 351        | 25,14            |
| CA'-33 | 253                                   | 581                          | 3,21             | 0,37              | 1 307                   | 13,90            | 0,84              | 1 562        | 21,41            |

Fig. 3.4.3 - GRÁFICOS CARGA - FLECHA DAS LAJES DA 3ª SÉRIE - GRUPO 3

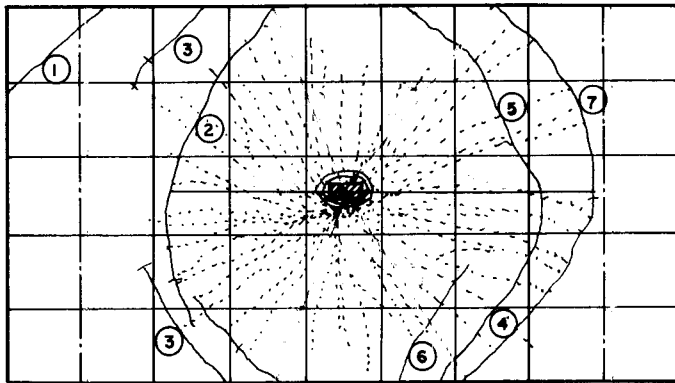


**Fig. 3.4.4** — SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA (SA-3) DOS GRÁFICOS CARGA - FLECHA DAS TRÊS LAJES TIPO SA DO GRUPO 3

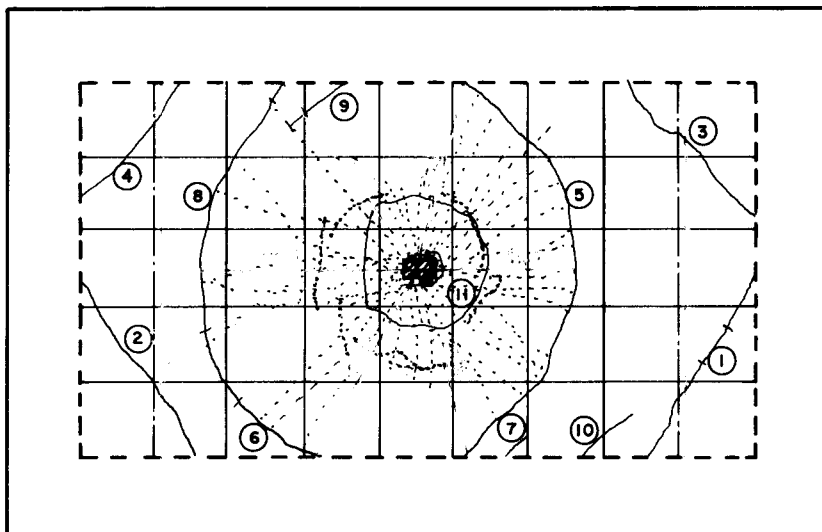


**Fig. 3.4.5** - SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA (CA-3) DOS GRÁFICOS CARGA - FLECHA DAS TRÊS LAJES TIPO CA GRUPO 3

SA - 13



CA - 13

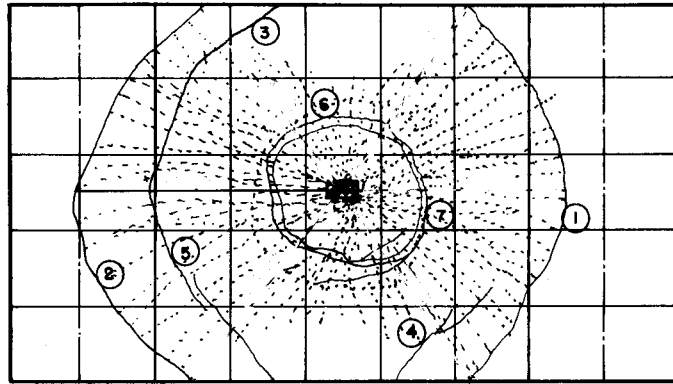


— fissuras negativas (face superior)  
 ..... fissuras positivas (face inferior)

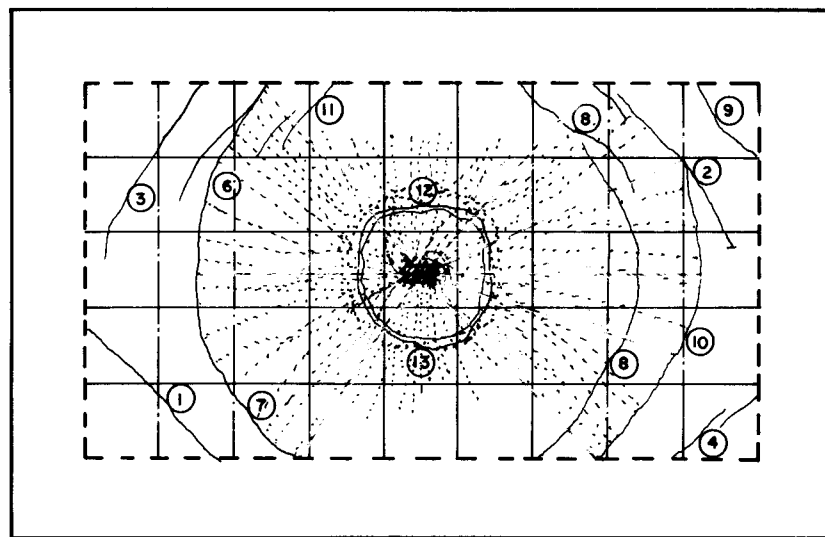
Escala - 1:10

Fig. 3.4-6 - Configurações da ruína das lajes da 1<sup>a</sup> Série do Grupo 3.

SA - 23



CA - 23



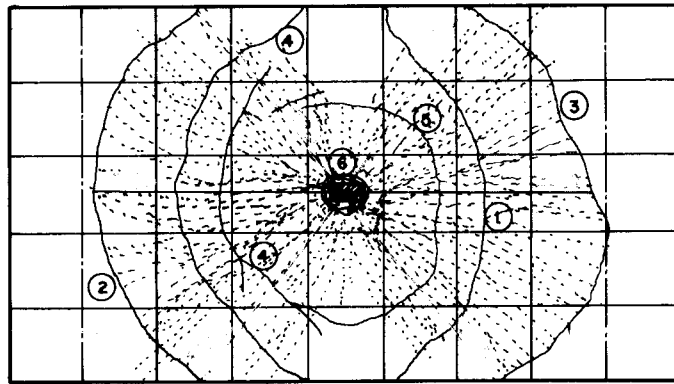
— fissuras negativas (face superior)

..... fissuras positivas (face inferior)

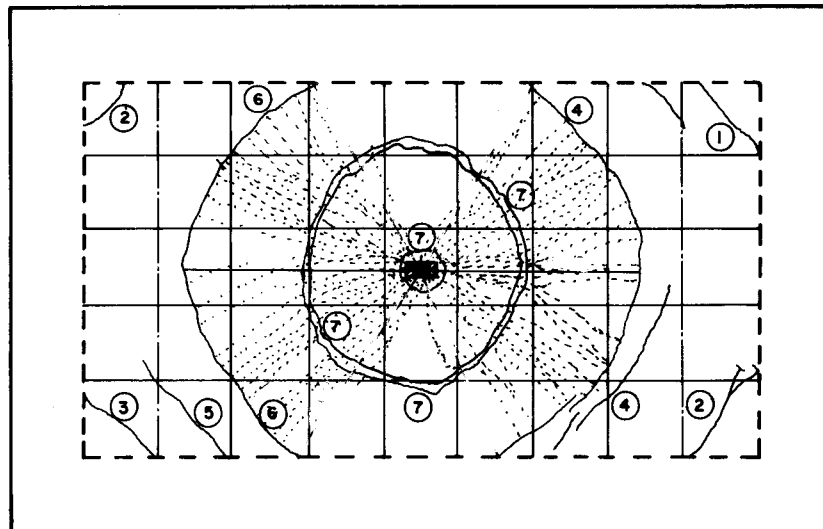
Escala - 1:10

Fig. 3.4-7 - Configurações da ruína das lajes da 2<sup>a</sup> Série do Grupo 3.

SA' - 33



CA' - 33



— fissuras negativas (face superior)  
..... fissuras positivas (face inferior)

Escala - 1:10

Fig. 3.4-8 - Configurações de ruína das lajes da 3<sup>a</sup> Série do Grupo 3.

Tabela 3.4-2 - Progresso das fissuras das lajes da 2a. Série do Grupo 3.

| Laje  | Nº da fissura         |                 | Carga<br>P<br>(kgf) | Flecha<br>$\delta$<br>(mm) |
|-------|-----------------------|-----------------|---------------------|----------------------------|
|       | Face inferior         | Face superior   |                     |                            |
| SA-23 | <u>1<sup>as</sup></u> |                 | 581                 | 2,67                       |
|       |                       | 1 e 2           | 1017                | 8,62                       |
|       |                       | 3               | 1119                | 10,53                      |
|       |                       | 4               | 1235                | 14,31                      |
|       |                       | 5               | 1235                | 15,93                      |
|       |                       | 6               | 1351                | 22,01                      |
|       |                       | 7               | 1366                | 26,01                      |
| CA-23 | <u>1<sup>as</sup></u> |                 | 552                 | 2,45                       |
|       |                       | 1 , 2 , 3 e 4   | 930                 | 6,10                       |
|       |                       | 5 , 6 , ..., 10 | 1162                | 11,40                      |
|       |                       | 11              | 1279                | 15,92                      |
|       |                       | 12              | 1337                | 19,95                      |
|       |                       | 13              | 1351                | 22,02                      |



Tabela 3.4-3 - Progresso das fissuras das lajes da 3a. Série do Grupo 3.

| Laje   | nº de fissura         |               | Carga<br>P<br>(kgf) | Flecha<br>$\delta$<br>(mm) |
|--------|-----------------------|---------------|---------------------|----------------------------|
|        | Face inferior         | Face superior |                     |                            |
| SA'-33 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 363                 | 1,91                       |
|        |                       | 1             | 930                 | 8,66                       |
|        |                       | 2             | 1017                | 11,79                      |
|        |                       | 3             | 1264                | 19,66                      |
|        |                       | 4             | 1293                | 21,12                      |
|        |                       | 5             | 1322                | 22,79                      |
|        |                       | 6             | 1351                | 25,14                      |
| CA'-33 | <u>1<sup>as</sup></u> |               | 581                 | 3,21                       |
|        |                       | 1             | 654                 | 3,81                       |
|        |                       | 2             | 799                 | 5,09                       |
|        |                       | 3             | 944                 | 6,40                       |
|        |                       | 4             | 1090                | 8,23                       |
|        |                       | 5 e 6         | 1307                | 13,90                      |
|        |                       | 7             | 1526                | 22,92                      |

### 3.5. LAJES COM ARMADURA UNIFORME

Os resultados que constam neste item (págs.3-45 a 3-48), são apenas os gráficos carga x flecha obtidos nos ensaios de três séries de lajes com armaduras dispostas uniformemente nas duas direções ( $\phi$  1,65mm c/ 8,5mm). Essa disposição das armaduras corresponde a  $\alpha = 1,8$ . A equivalência entre a notação apresentada aqui e as dos itens anteriores é a seguinte:

SC - corresponde às lajes do tipo SA sem redução de armadura.

CC - corresponde às lajes do tipo CA sem redução de armadura.

A diferença entre as três séries consiste somente na resistência da argamassa.

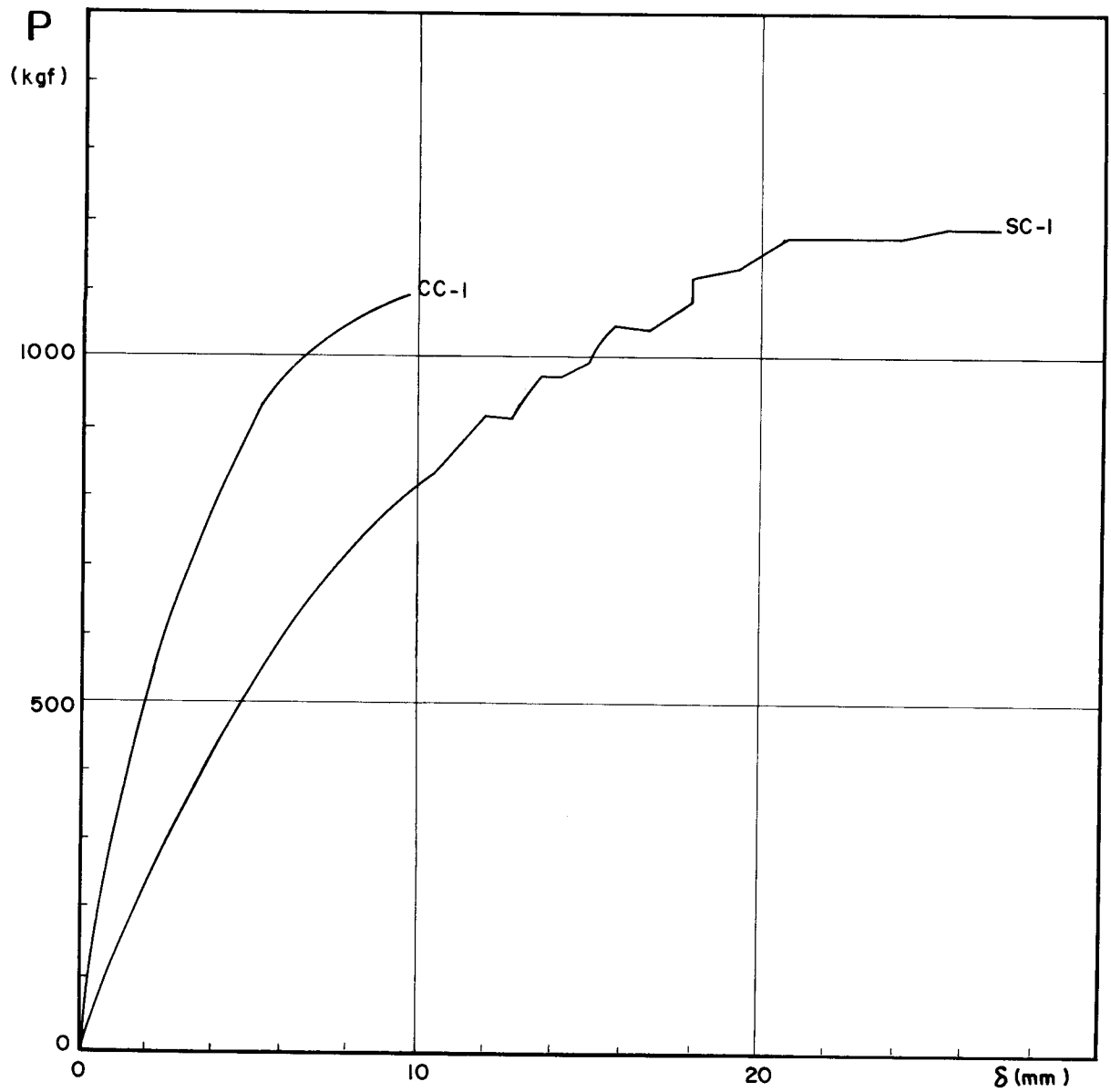


Fig 3.5-1 - GRÁFICOS CARGA - FLECHA (1ª SERIE - GRUPO SEM REDUÇÃO DE ARMADURA)

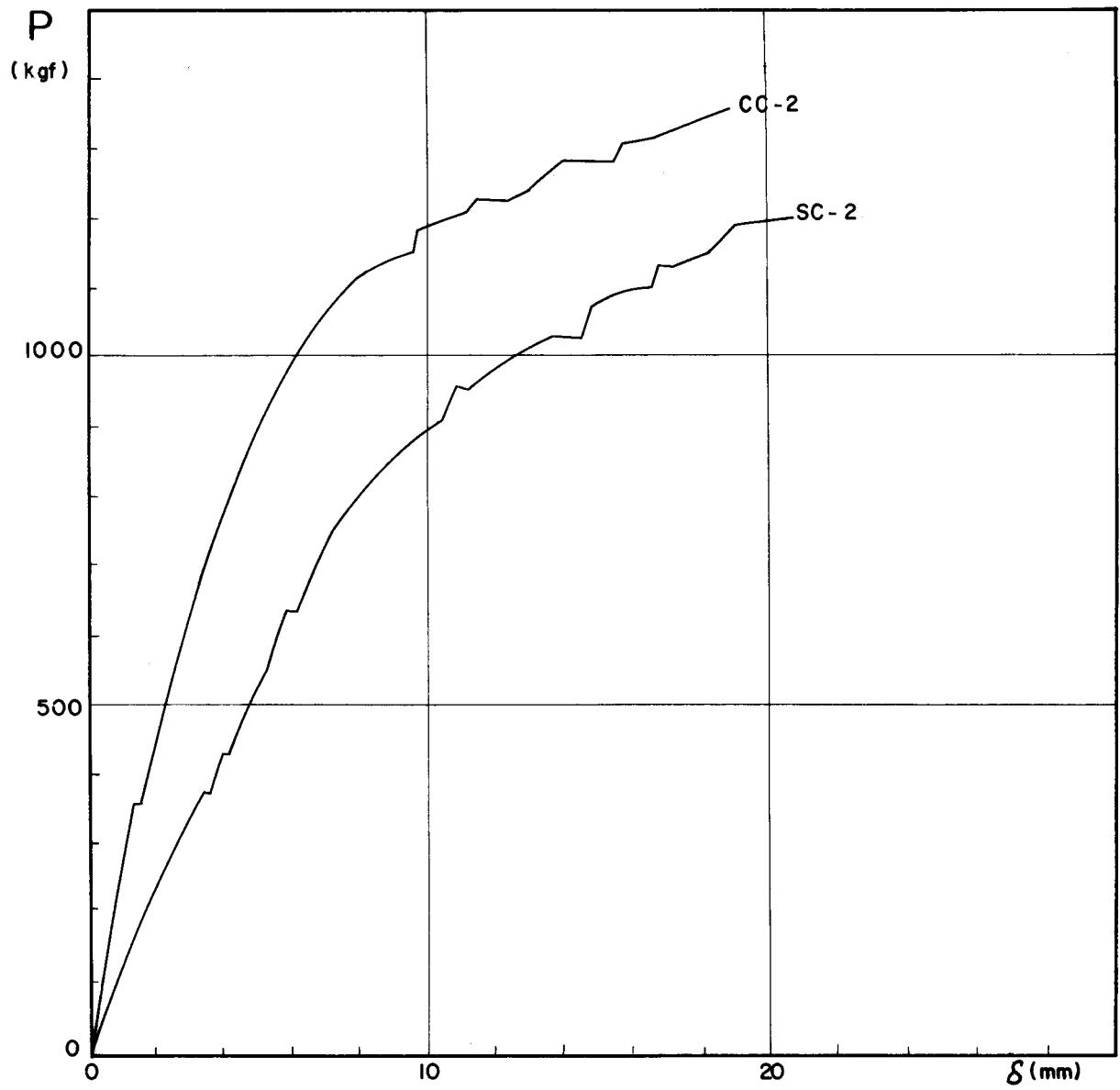


FIG. 3.5-2 — GRÁFICOS CARGA — FLECHA (2ª SÉRIE- GRUPO SEM REDUÇÃO DE ARMADURA).

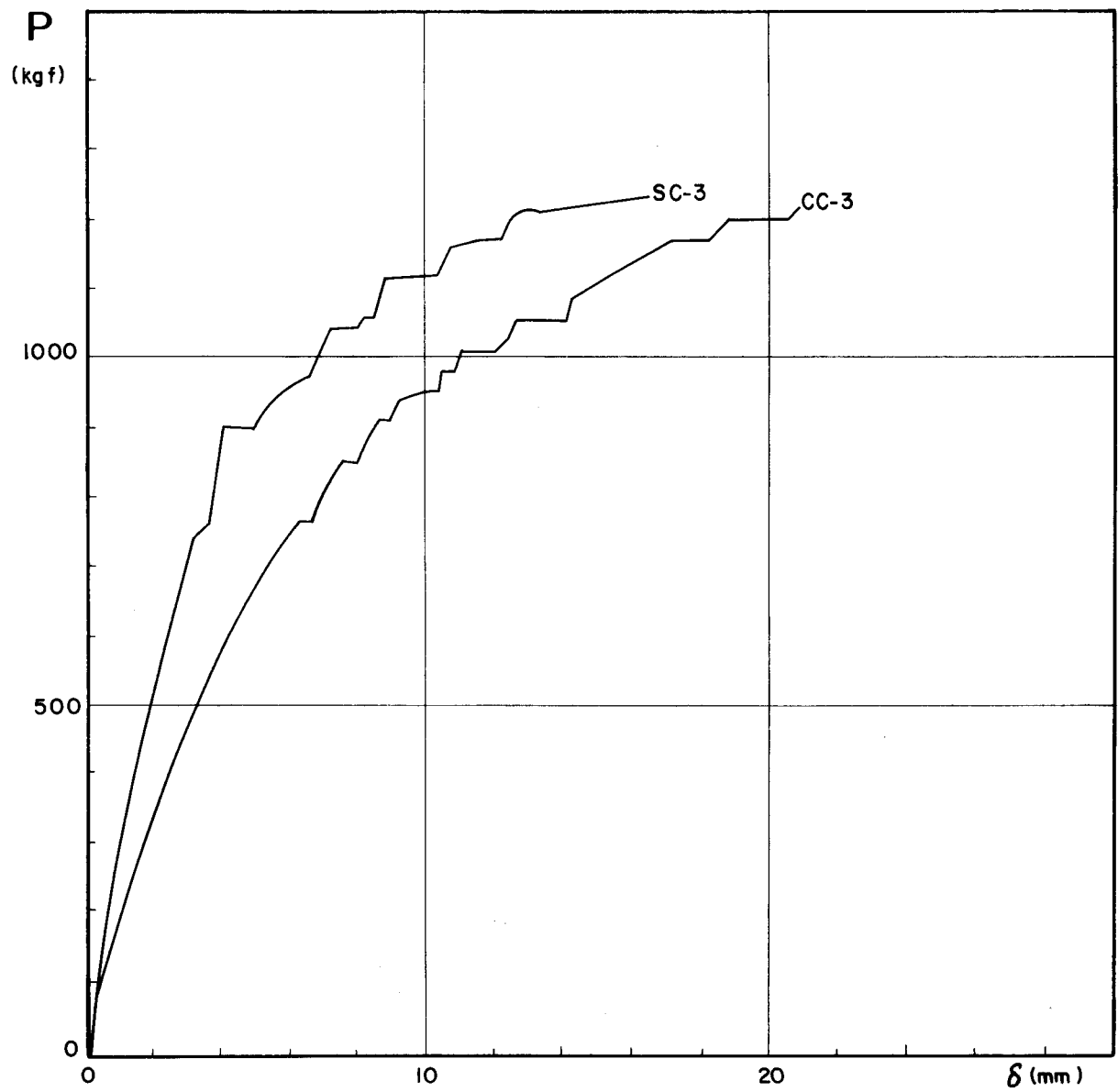
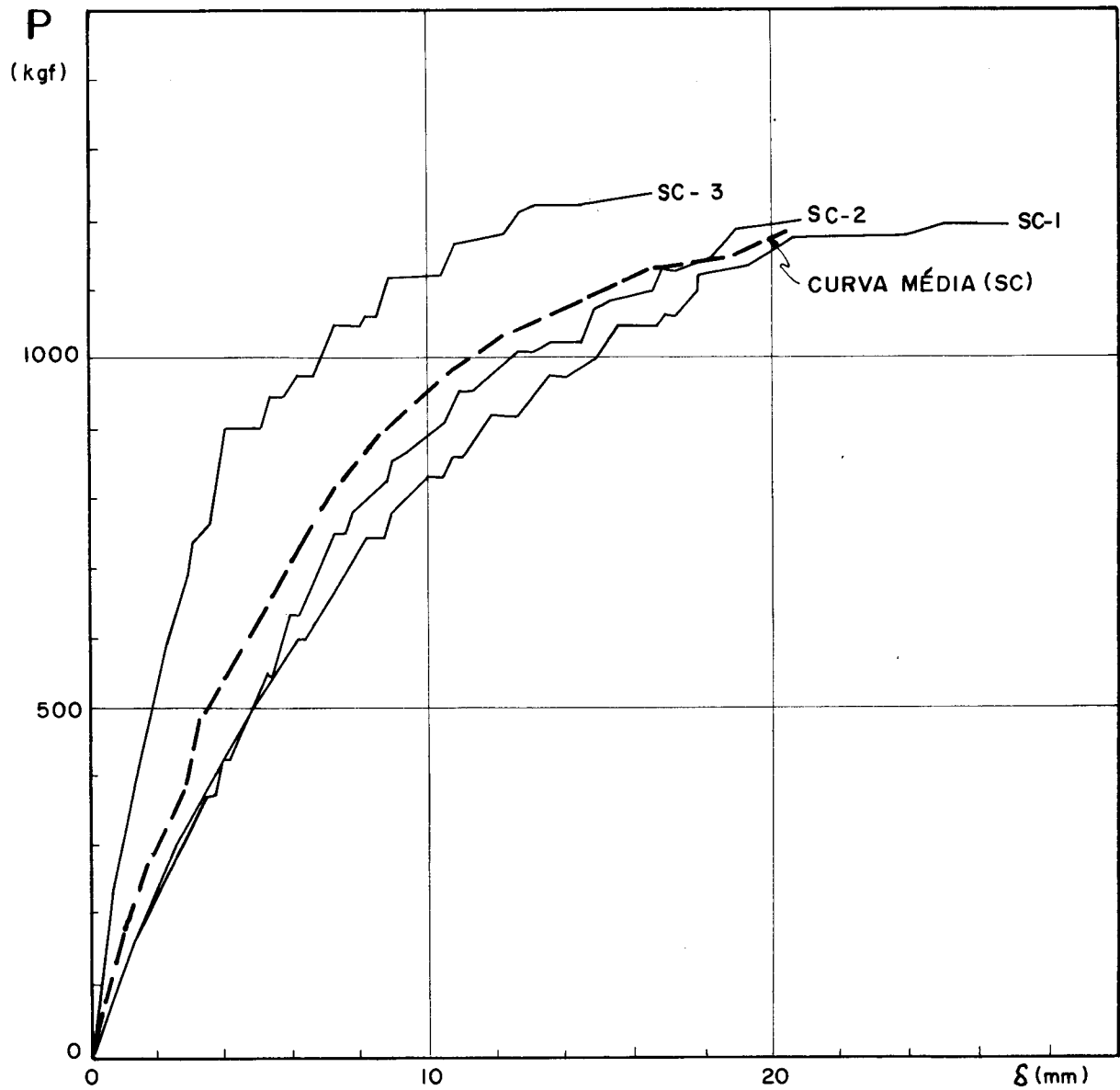
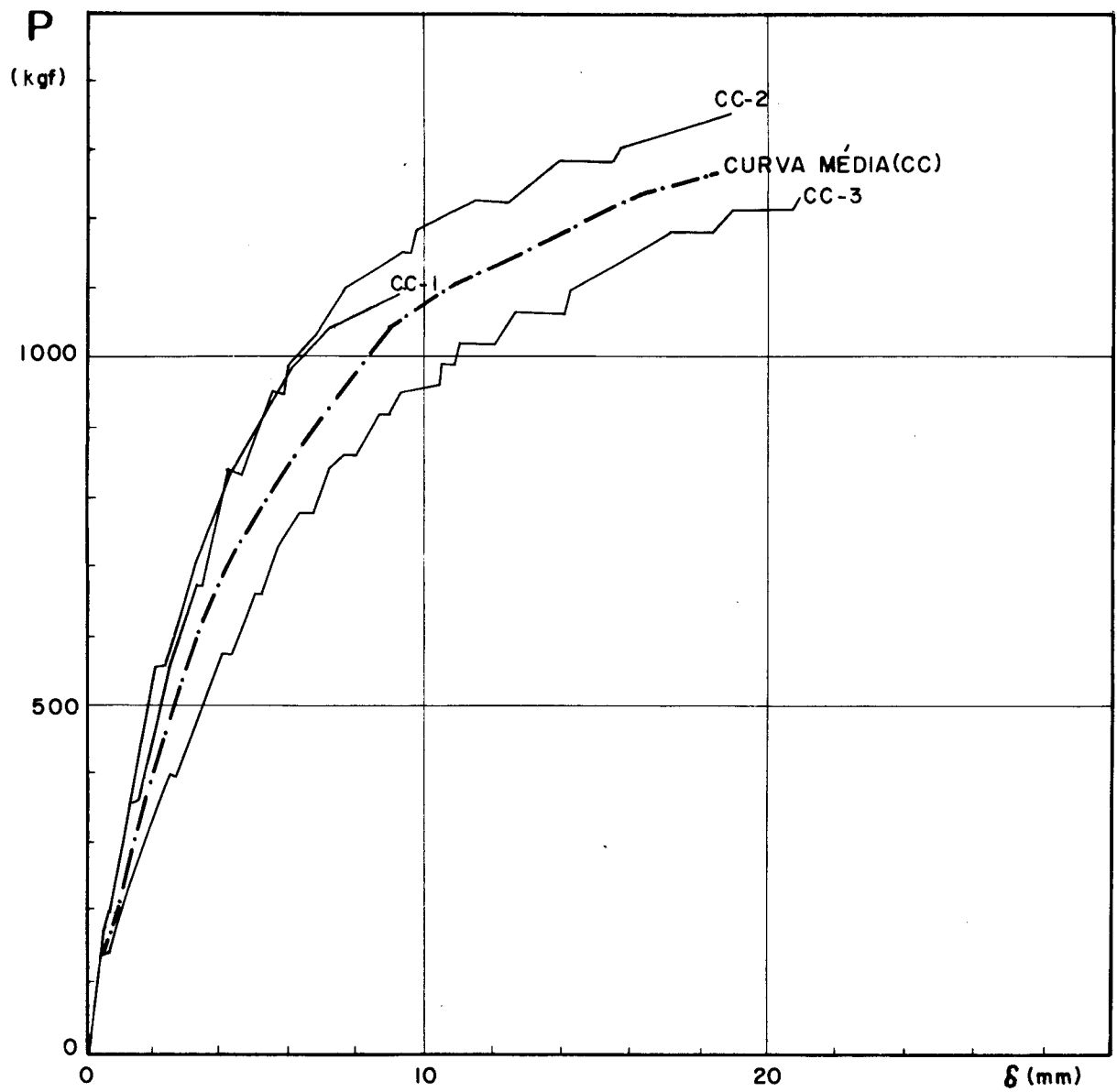


FIG. 3.5-3 — GRÁFICOS CARGA — FLECHA (3ª SÉRIE - GRUPO SEM REDUÇÃO DE ARMADURA).



**Fig. 3.5.4** - SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA DOS GRÁFICOS CARGA - FLECHA DAS LAJES TIPO SC DAS TRÊS SÉRIES - GRUPO SEM REDUÇÃO DE ARMADURA



**Fig. 3.5.5** – SUPERPOSIÇÃO E CURVA MÉDIA DOS GRÁFICOS CARGA – FLECHA DAS LAJES TIPO CC DAS TRÊS SÉRIES – GRUPO SEM REDUÇÃO DE ARMADURA

### 3.6. PRIMEIRA COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Apresenta-se a seguir, um resumo dos principais resultados observados nos ensaios das lajes.

O objetivo desse resumo é mostrar panoramicamente a diferença de comportamento entre lajes de um mesmo tipo, porém pertencentes a grupos diferentes.

#### 3.6.1. Lajes Tipo SA

Na Tabela 3.6-1, comparam-se os valores médios das principais cargas observadas em cada grupo, com as respectivas cargas de ruína.

Na Fig. 3.6-1, apresentam-se os andamentos das diversas curvas médias (carga-flecha) das lajes dos Grupos 1, 2 e 3, bem como, do Grupo correspondente às lajes sem redução de armadura (SC).

Considerando que, teoricamente, as configurações de ruína devem ser bi-simétricas, as configurações de ruína de cada laje foram reduzidas (superpostas) a um só quadrante - suposto representante dos demais. A partir daí foi traçada uma curva média, a qual se considerou como a configuração de ruína mais provável. É o que se apresenta nas Figs. 3.6-4, 3.6-5, 3.6-6, respectivamente, para as lajes do Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3.

#### 3.6.2. Lajes Tipo CA

Analogamente ao que se fez no item anterior, apresentam-se na mesma ordem as comparações correspondentes as lajes tipo CA (vide Tabela 3.6-2 e Figs. 3.6-7, 3.6-8 e 3.6-9).

Finalmente, na Fig. 3.6-3, mostram-se as diferenças entre as lajes tipo CA e SA, no que se refere ao comportamento carga-flecha.

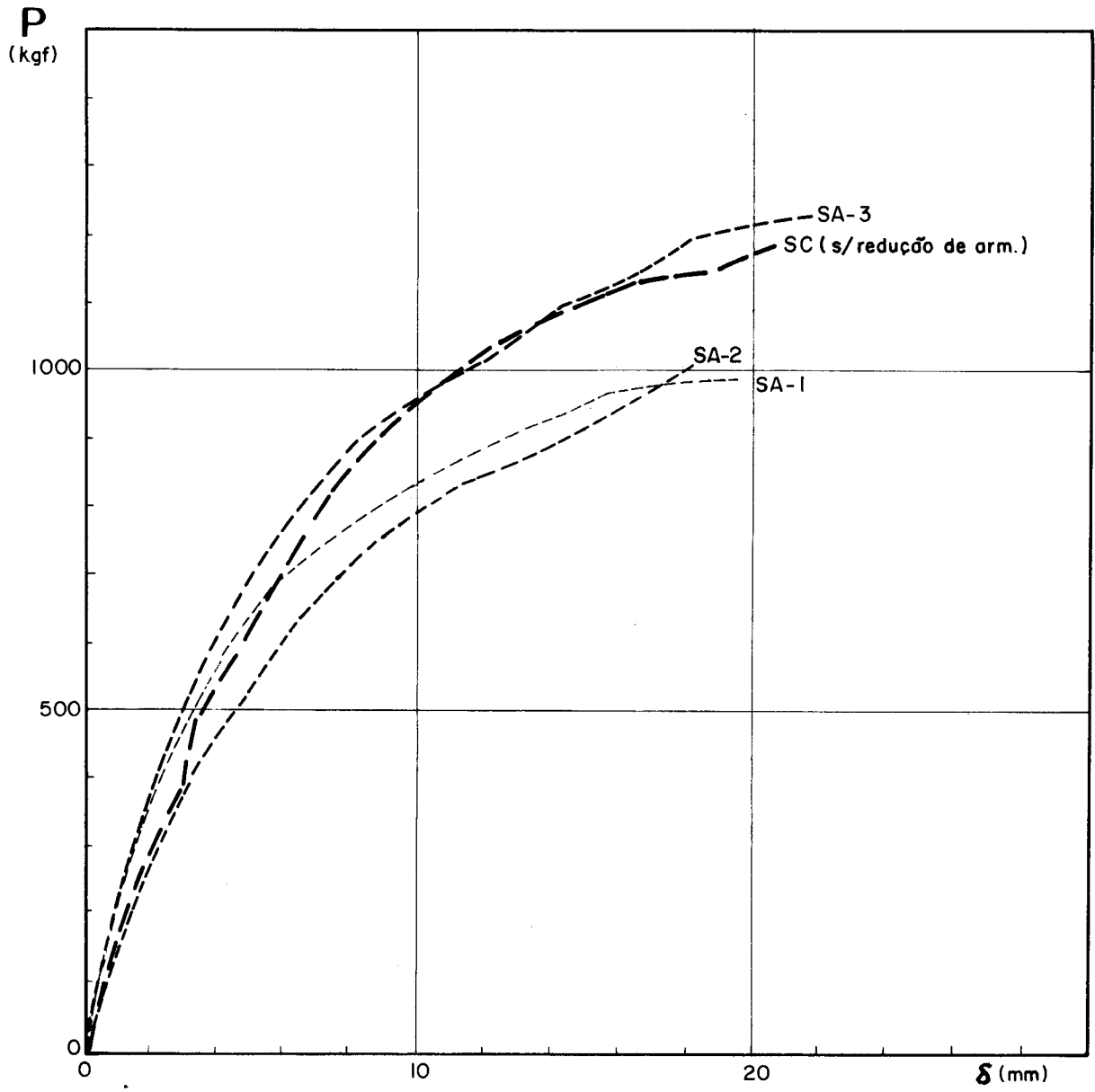


Tabela 3.6-1 - Cargas Médias das Lajes Tipo SA

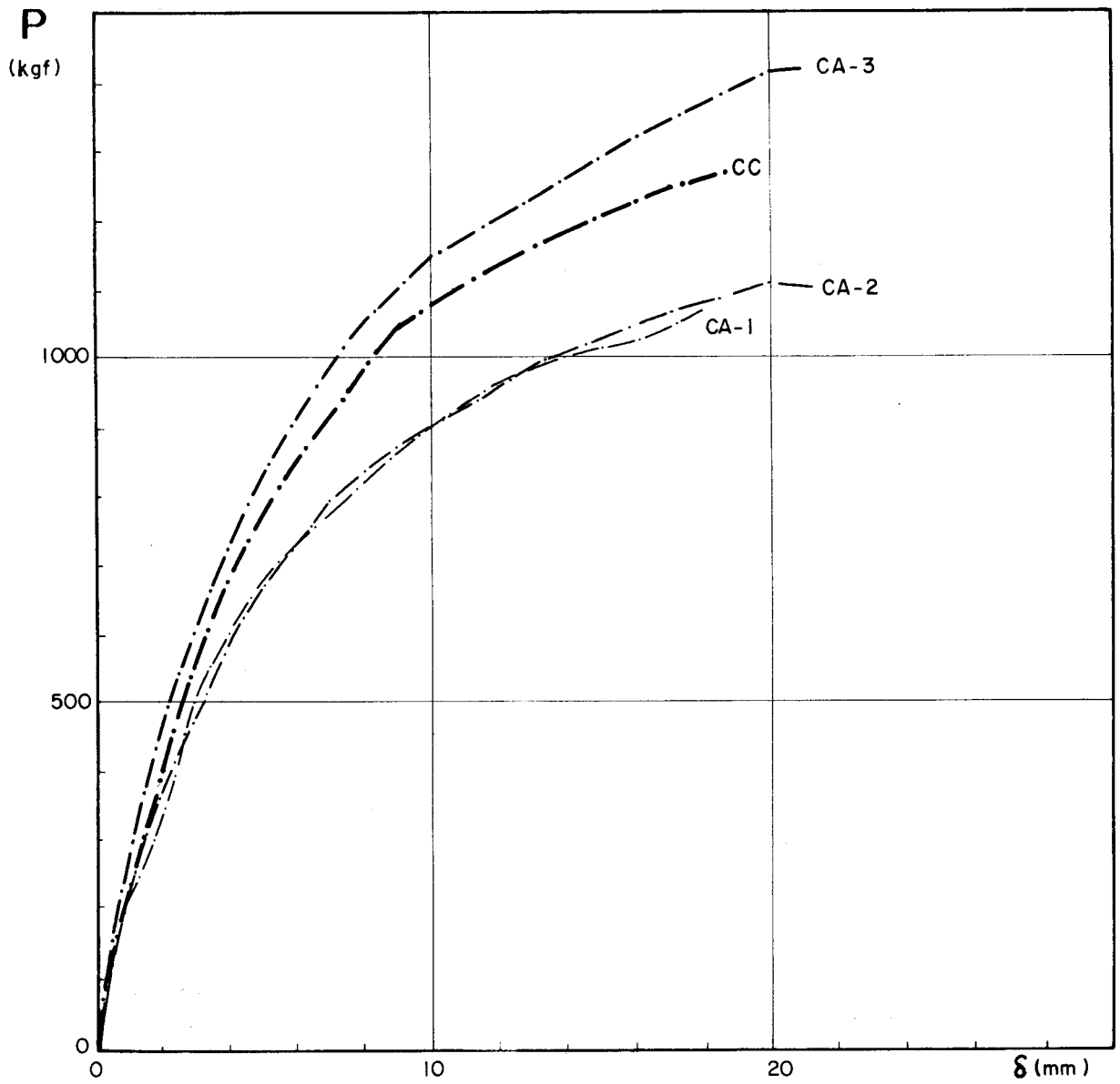
| GRUPO | Início da Fase de Fissuração |           | Início da Fase de Ruína |           | Ruína |
|-------|------------------------------|-----------|-------------------------|-----------|-------|
|       | $P_f$                        | $P_f/P_R$ | $P_r$                   | $P_r/P_R$ | $P_R$ |
| 1     | 406                          | 0,40      | 981                     | 0,97      | 1.013 |
| 2     | 412                          | 0,38      | 1.044                   | 0,96      | 1.084 |
| 3     | 494                          | 0,39      | 1.264                   | 1,00      | 1.268 |

Tabela 3.6-2 - Cargas Médias das Lajes Tipo CA

| GRUPO | Início da Fase de Fissuração |           | Início da Fase de Ruína |           | Ruína |
|-------|------------------------------|-----------|-------------------------|-----------|-------|
|       | $P_f$                        | $P_f/P_R$ | $P_r$                   | $P_r/P_R$ | $P_R$ |
| 1     | 551                          | 0,51      | 984                     | 0,90      | 1.089 |
| 2     | 474                          | 0,36      | 1.010                   | 0,89      | 1.140 |
| 3     | 591                          | 0,41      | 1.235                   | 0,87      | 1.426 |



**Fig. 3.6.1** — COMPARAÇÃO ENTRE AS CURVAS MÉDIAS DAS LAJES TIPO SA e SC



**Fig. 3.6.2** – COMPARAÇÃO ENTRE AS CURVAS MÉDIAS DAS LAJES TIPO CA e CC

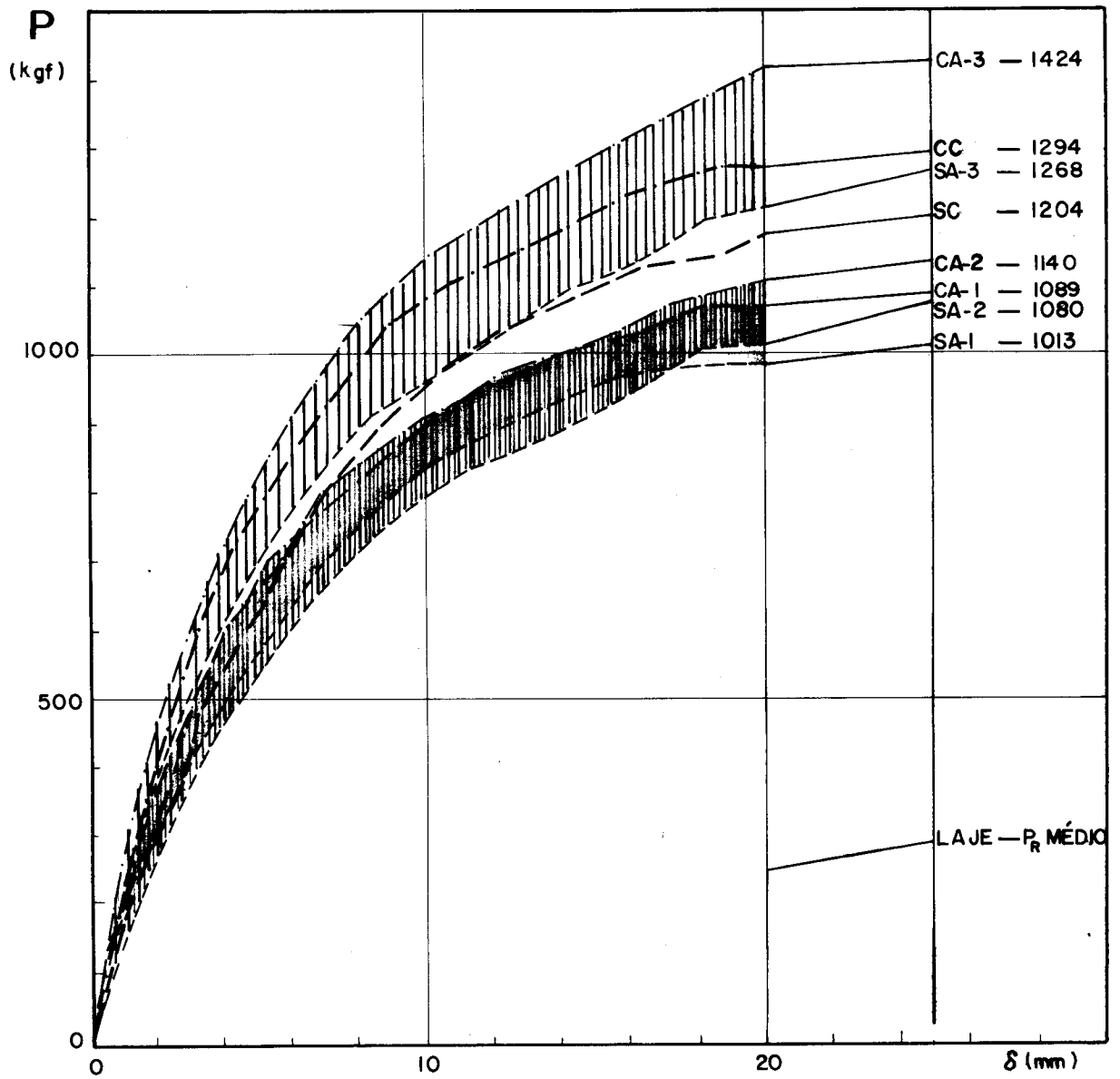
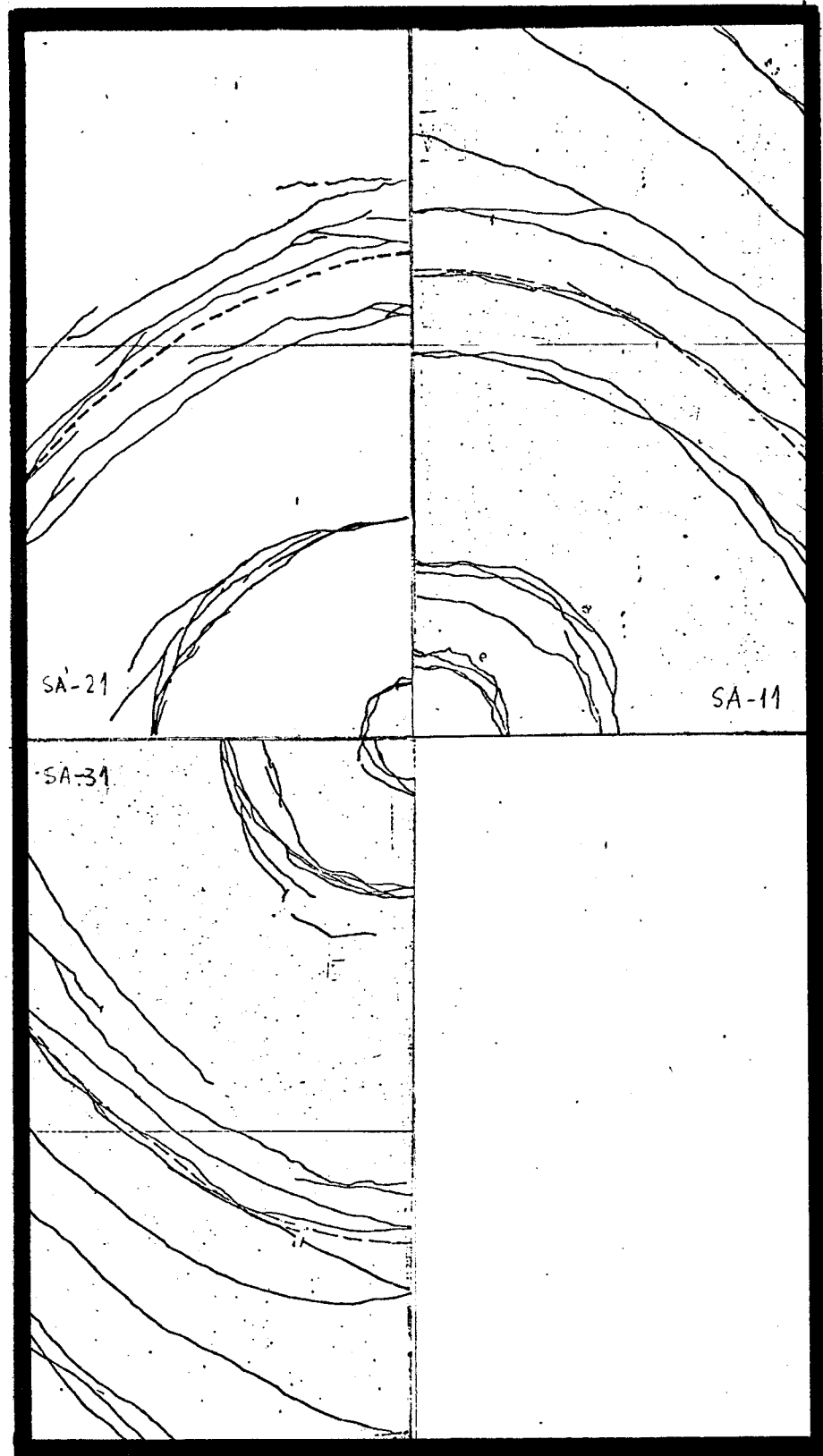
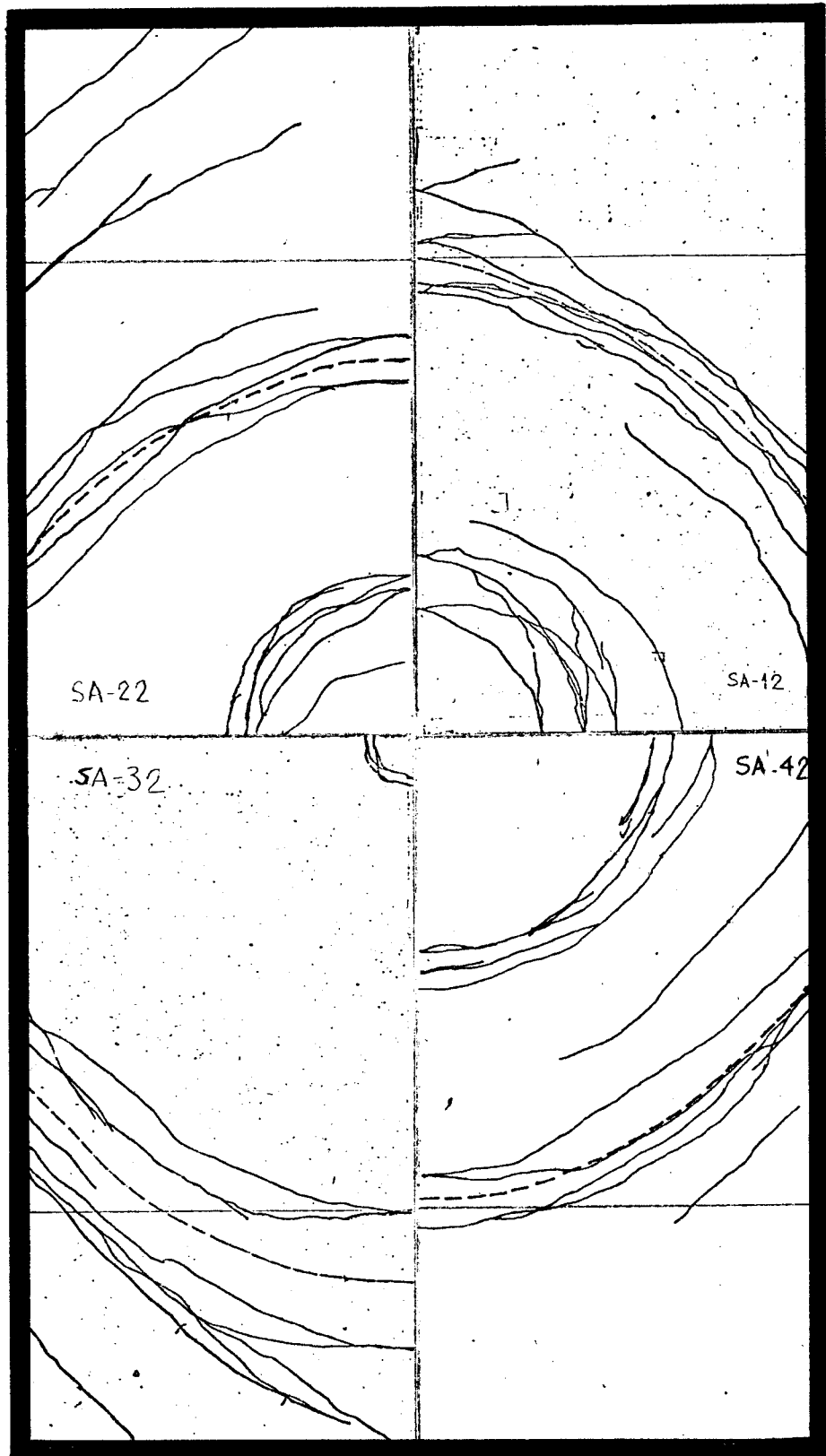


Fig 3.6-3 — SUPERPOSIÇÃO DE TODAS AS CURVAS MÉDIAS E EXTENSÃO ÀS RESPECTIVAS CARGAS MÉDIAS DE RUÍNA.



----- FISSURA MÉDIA      ESCALA : 0 5 10cm

Fig 3.6-4 - Configurações de Ruína ( Resumo - Grupo I )



----- FISSURA MÉDIA

ESCALA :

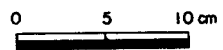
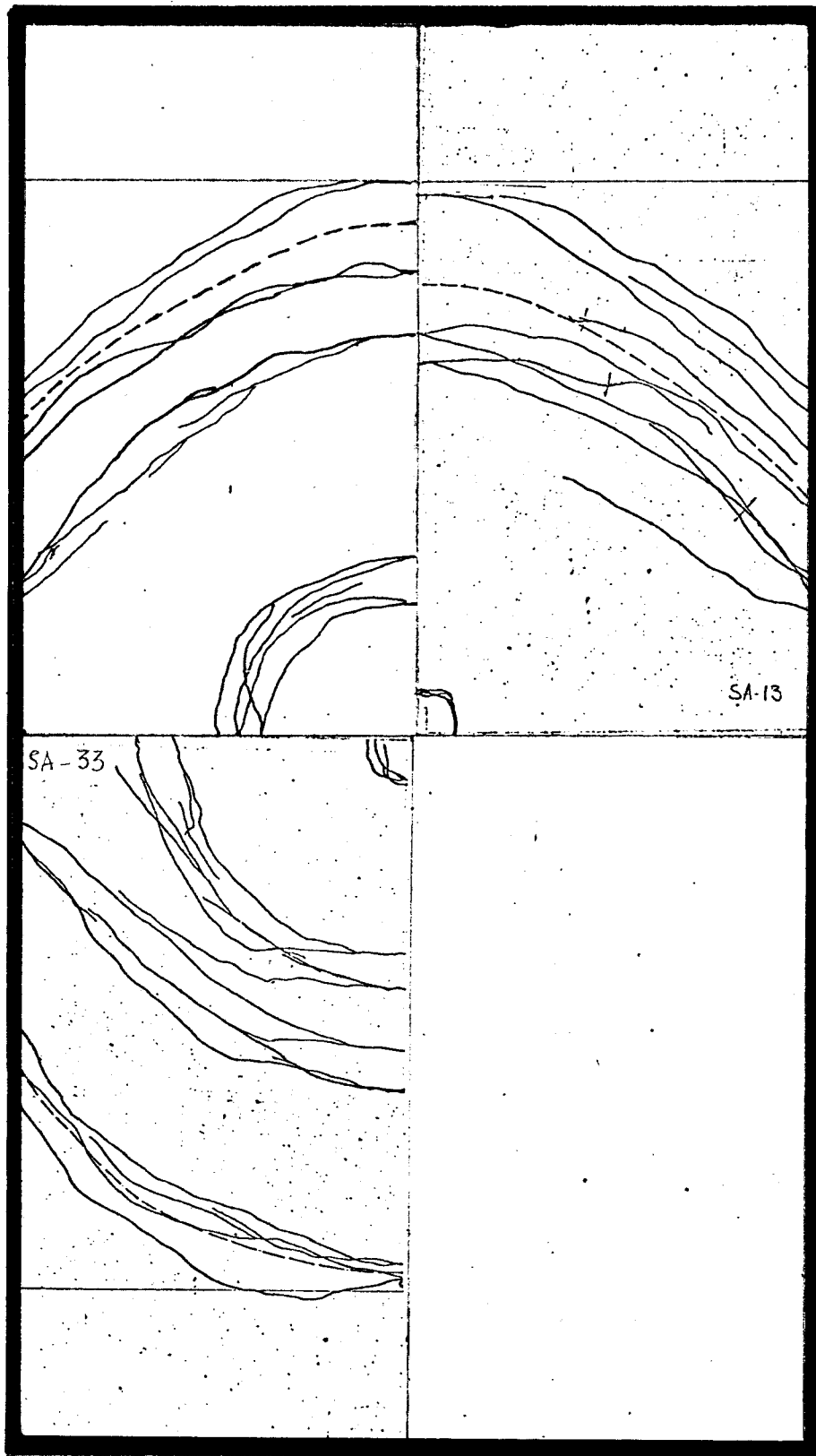
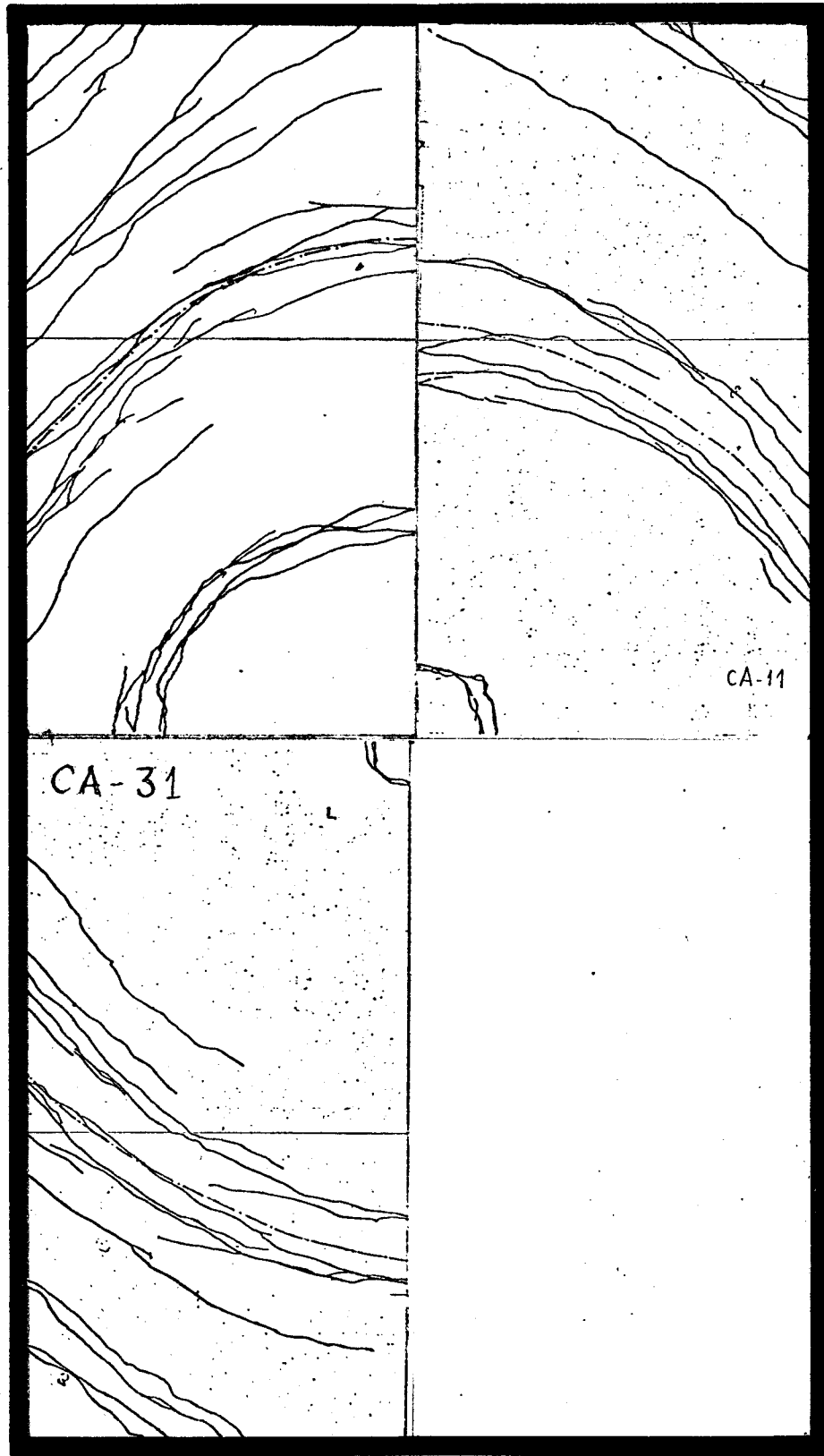


Fig 3.6-5 - Configurações de Ruína (Resumo - Grupo 2)



----- FISSURA MEDIA      ESCALA :      0      5      10 cm

**Fig 3.6-6** - Configurações de Ruína (Resumo-Grupo )



----- FISSURA MÉDIA    ESCALA:    0    5    10cm

Fig 3.6-8 - Configurações de Ruína (Resumo-Grupo 1)



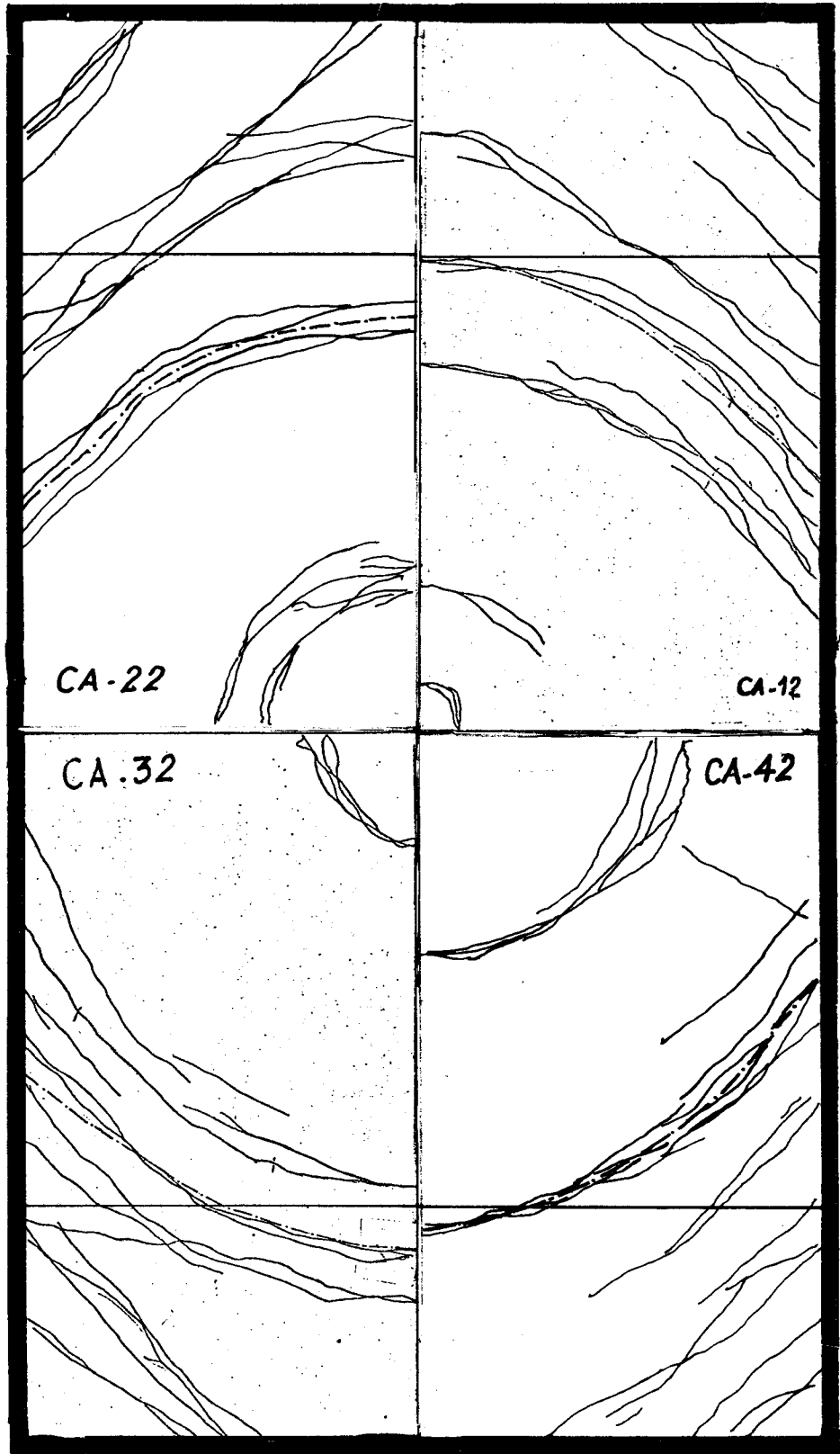


Fig 3.6-7

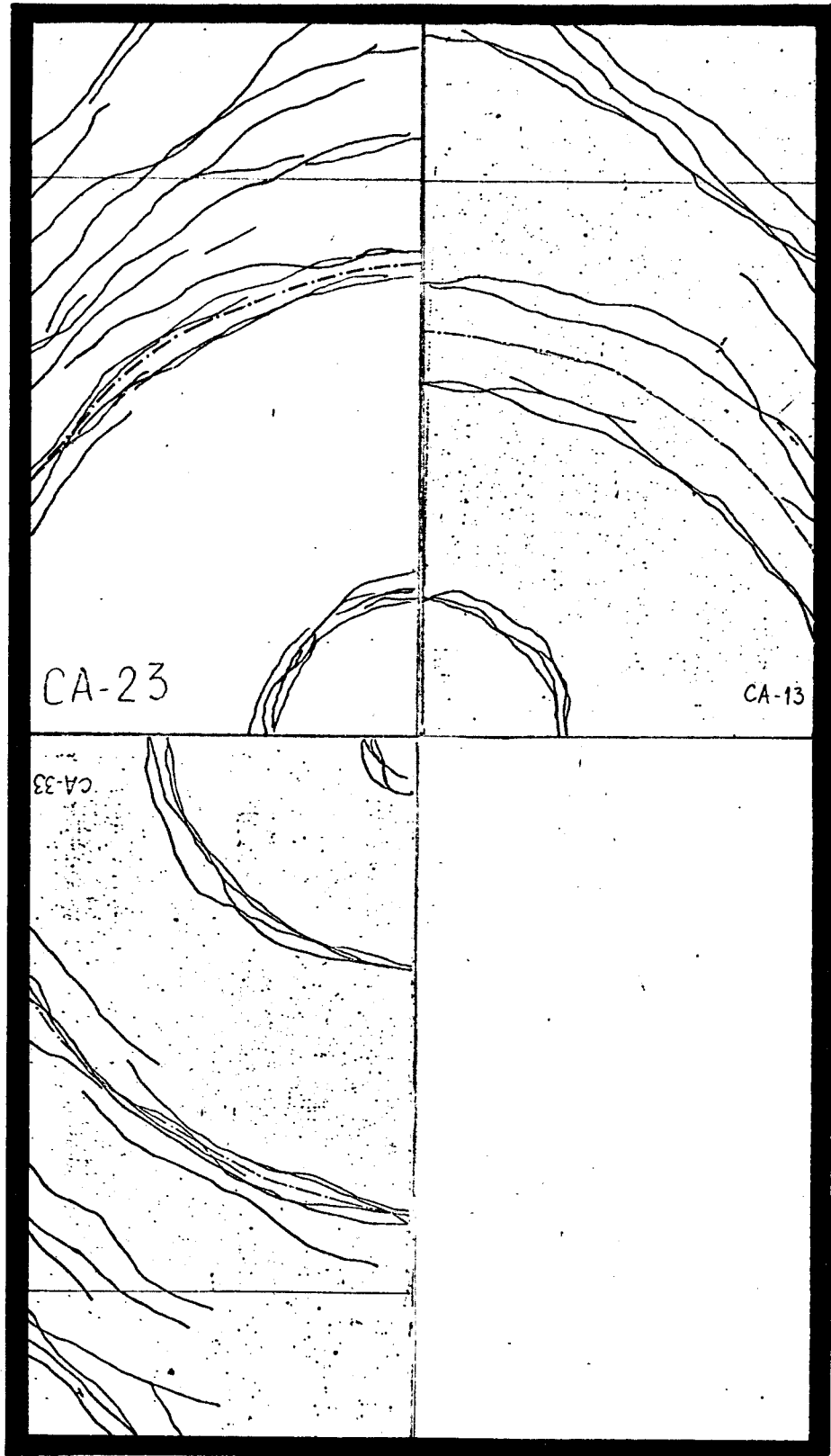


Fig 3.6-9

### 3.7. FAIXAS

Apresentam-se na Fig. 3.7-1, os gráficos carga x flecha correspondentes aos resultados mais significativos dos ensaios das faixas (vigas) dos tipos F e FR.

Como se disse no item 2.1.1, as faixas tem como finalidade, a verificação dos momentos de plastificação das laje. A partir das curvas médias  $P - \delta$  das faixas F e FR foram determinadas as respectivas cargas médias  $P_{r(\text{med})}$  e  $P_{r1(\text{med})}$ , cujos valores são utilizados para determinação dos momentos de plastificação experimentais ( $m^*$  e  $m_1^*$ ), conforme mostra-se no item 5.1. Os valores dessas cargas são os seguintes:

Faixas tipo F:  $P_{r(\text{med})} \cong 155\text{kaf}$

Faixas tipo FR:  $P_{r1(\text{med})} \cong 75\text{kgf}$

### 3.8. CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS MATERIAIS

#### 3.8.1. Argamassa

A resistência à compressão simples da argamassa, foi determinada a partir de corpos de prova cilíndricos padronizados de acordo com o MB-1 (item 45).

Para cada série de modelos ensaiavam-se no mínimo 10 corpos de prova, os quais eram rompidos, em geral, aos 14 dias de idade. A resistência individual à compressão simples, foi calculada dividindo-se a carga de ruptura pela área da seção ( $\approx 19,6\text{cm}^2$ ) do corpo de prova. Na Tabela 3.8-1, apresentam-se as resistências individuais de todos os corpos ensaiados.

Nos cálculos dos momentos de plastificação (item 4.1) adotou-se como resistência característica da argamas

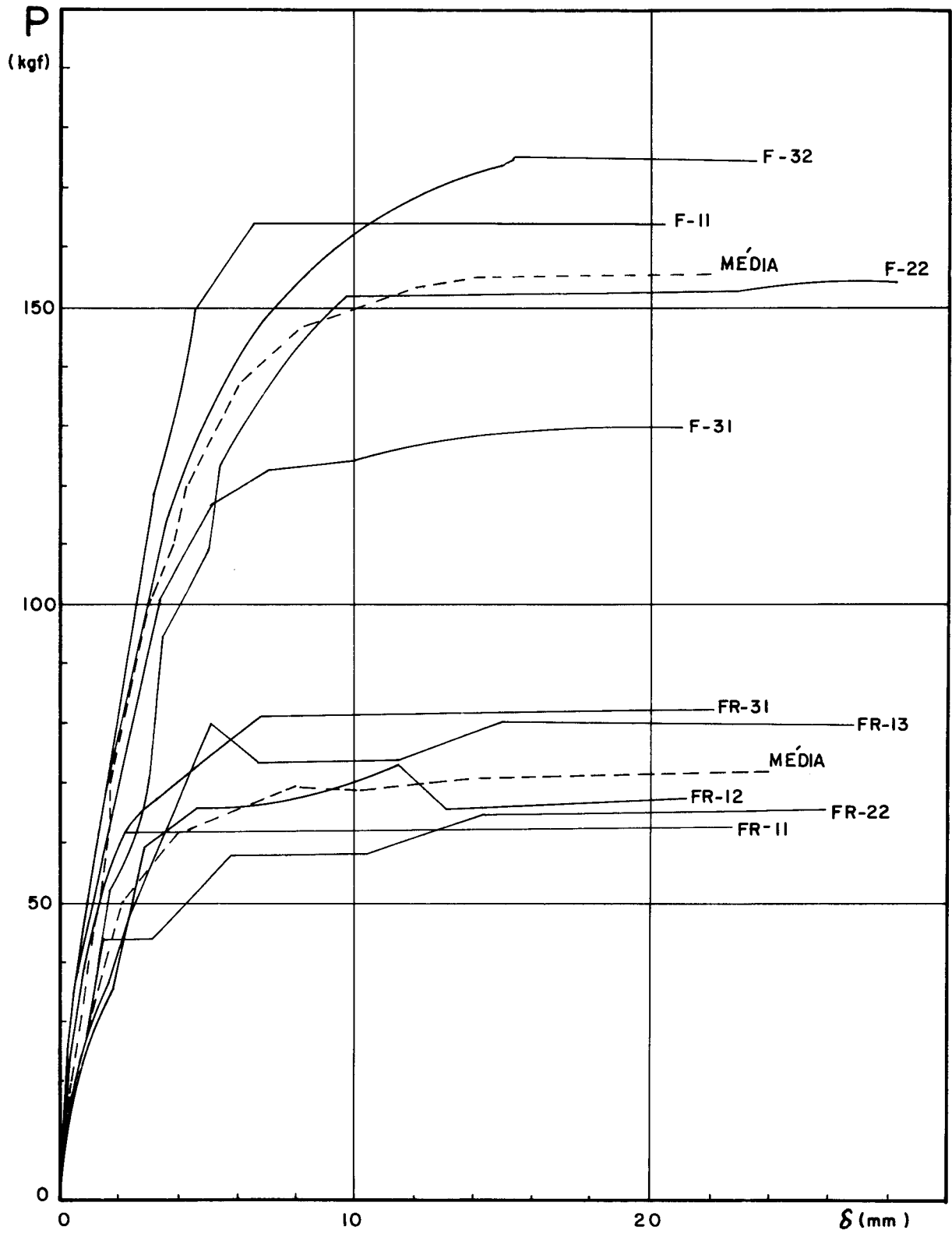


Figura 3.7-1 - Gráficos carga — flexa das faixas dos tipos F e FR

sa, simplesmente, a resistência média de cada série. Todavia, para cálculo mais preciso, deve-se fazer um estudo estatístico mais preciso, recorrendo-se à "teoria de pequenas amostras", através da qual pode-se fazer uma estimativa mais correta da resistência característica. Entretanto, como a resistência da argamassa não é o principal fator que influi no valor do momento de plastificação, resolveu-se adotar a resistência média.

Os valores das resistências médias foram obtidos pela média aritmética das resistências individuais de cada série, salvo a 1ª série do Grupo 3 (vide Tabela 3.8-2). Nesta última, por causa da visível discrepância em relação às outras séries, adotou-se como resistência média, a média aritmética de todos corpos de prova restantes ou seja: (\*)

$$\sigma_{\text{med},1.3} = \frac{\sum \sigma_i}{n} = \frac{35.552}{132} = 269 \text{kgf/cm}^2$$

### 3.8.2. Arame

As características mecânicas dos arames foram determinadas a partir de ensaios de tração em 16 corpos de prova com  $l_0 = 10\text{cm}$  e  $\phi = 1,65\text{mm}$ . Os resultados foram os seguintes:

$$\sigma_e = \sigma_{0,2} \approx 36,0 \text{kgf/mm}^2 = 3.600 \text{kgf/cm}^2$$

$$\epsilon_e = 7\%$$

$$E \approx 720.000 \text{kgf/cm}^2$$

---

(\*) Adotou-se esse critério, porque nas diversas séries o controle dos materiais foi mantido praticamente constante. Portanto, a média de todos c.p. é uma boa indicação da resistência média dos c.p. da 1ª Série do Grupo 3.

Tabela 3.8-1 - Resistência a compressão simples (em kgf/cm<sup>2</sup>) dos 138 corpos de prova ensaiados.

| CP | $\sigma_i$ | CP | $\sigma_i$ | CP | $\sigma_i$ | CP  | $\sigma_i$ | CP  | $\sigma_i$ |
|----|------------|----|------------|----|------------|-----|------------|-----|------------|
| 1  | 231        | 29 | 285        | 57 | 248        | 85  | 288        | 113 | * 190      |
| 2  | 255        | 30 | 286        | 58 | 252        | 86  | 289        | 114 | 216        |
| 3  | 258        | 31 | 289        | 59 | 255        | 87  | 290        | 115 | 229        |
| 4  | 260        | 32 | 289        | 60 | 255        | 88  | 293        | 116 | 252        |
| 5  | 276        | 33 | 293        | 61 | 255        | 89  | 294        | 117 | 257        |
| 6  | 296        | 34 | 294        | 62 | 264        | 90  | 297        | 118 | 261        |
| 7  | 304        | 35 | 302        | 63 | 267        | 91  | 299        | 119 | 264        |
| 8  | 306        | 36 | 306        | 64 | 269        | 92  | 299        | 120 | 275        |
| 9  | 252        | 37 | 243        | 65 | 271        | 93  | 306        | 121 | 295        |
| 10 | 255        | 38 | 245        | 66 | 271        | 94  | 306        | 122 | 295        |
| 11 | 255        | 39 | 246        | 67 | 275        | 95  | 306        | 123 | 296        |
| 12 | 257        | 40 | 257        | 68 | 293        | 96  | 306        | 124 | 316        |
| 13 | 257        | 41 | 259        | 69 | 232        | 97  | 308        | 125 | 236        |
| 14 | 260        | 42 | 264        | 70 | 245        | 98  | 308        | 126 | 236        |
| 15 | 261        | 43 | 272        | 71 | 252        | 99  | 311        | 127 | 239        |
| 16 | 261        | 44 | 283        | 72 | 253        | 100 | 312        | 128 | 242        |
| 17 | 264        | 45 | 183        | 73 | 255        | 101 | 312        | 129 | 242        |
| 18 | 265        | 46 | 196        | 74 | 258        | 102 | 316        | 130 | 250        |
| 19 | 267        | 47 | 201        | 75 | 261        | 103 | 317        | 131 | 257        |
| 20 | 267        | 48 | 204        | 76 | 263        | 104 | 321        | 132 | 257        |
| 21 | 267        | 49 | 204        | 77 | 258        | 105 | 326        | 133 | 257        |
| 22 | 267        | 50 | 209        | 78 | 262        | 106 | 327        | 134 | 261        |
| 23 | 270        | 51 | 211        | 79 | 274        | 107 | 331        | 135 | 261        |
| 24 | 272        | 52 | 214        | 80 | 274        | 108 | * 141      | 136 | 267        |
| 25 | 272        | 53 | 215        | 81 | 283        | 109 | * 141      | 137 | 267        |
| 26 | 274        | 74 | 220        | 82 | 283        | 110 | * 146      | 138 | 269        |
| 27 | 280        | 55 | 222        | 83 | 283        | 111 | * 173      |     |            |
| 28 | 281        | 56 | 239        | 84 | 286        | 112 | * 178      |     |            |

(\* ) Valores desprezados (1a. Série - Grupo 3)

Tabela 3.8-2 - Resistência média da argamassa  
à compressão simples.

| Série | Grupo | Corpos de Prova   |                  | $\sigma_{med}$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) |
|-------|-------|-------------------|------------------|------------------------------------------|
|       |       | nº de<br>ordem(*) | total<br>de c.p. |                                          |
| 1a.   | 1     | 1-8               | 8                | 273                                      |
| 2a.   |       | 9-36              | 28               | 273                                      |
| 3a.   |       | 37-44             | 8                | 259                                      |
| 1a.   | 2     | 45-56             | 12               | 210                                      |
| 2a.   |       | 57-68             | 12               | 265                                      |
| 3a.   |       | 69-76             | 8                | 252                                      |
| 4a.   |       | 77-107            | 31               | 299                                      |
| 1a.   | 3     |                   |                  | 269                                      |
| 2a.   |       | 114-124           | 11               | 269                                      |
| 3a.   |       | 125-138           | 14               | 253                                      |

(\*) Vide Tabela 3.8-1

Os valores anteriores foram obtidos diretamente da curva média tensão-deformação (Fig.3.8-1), a qual foi traçada com as deformações indicadas no fim da Tabela 3.8-3 e com as respectivas tensões. Esses resultados foram calculados a partir das seguintes expressões:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{d}{\left(\frac{V_p}{V_t}\right) l_0} \dots\dots\dots (3.8-2)$$

$$\sigma = \frac{P}{S_0} \dots\dots\dots (3.8-3)$$

As cargas  $P$  e os deslocamentos  $d$  são obtidos através de curvas  $(P,d)$  fornecidas pela máquina de ensaio (INSTRON), para uma determinada relação  $V_p/V_t$ , onde:

$V_p$  = velocidade do papel (na máquina)

$V_t$  = velocidade do travessão (veloc. relativa das garras)



Tabela 3.8-3 - Resultados dos ensaios dos arames

| CP   | DEFORMAÇÕES (%) |                 |                 |                 |                 | TENSÕES<br>DE RUPTURA<br>(kgf/mm <sup>2</sup> ) |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------------------------------------|
|      | $\epsilon_{20}$ | $\epsilon_{40}$ | $\epsilon_{60}$ | $\epsilon_{80}$ | $\epsilon_{90}$ |                                                 |
| 1    | 1,5             | 2,5             | 4,0             | 5,5             | 7,5             | 51,45                                           |
| 2    | 1,5             | 2,5             | 4,0             | 6,5             | 8,5             | 51,92                                           |
| 3    | 1,5             | 3,0             | 4,0             | 6,0             | 7,5             | 50,98                                           |
| 4    | 1,5             | 3,0             | 4,0             | 6,5             | 8,5             | 50,51                                           |
| 5    | 1,5             | 3,0             | 4,5             | 6,5             | 8,5             | 50,98                                           |
| 6    | 1,0             | 2,0             | 3,0             | 5,0             | 6,5             | 50,98                                           |
| 7    | 2,0             | 3,0             | 4,5             | 9,0             | 17,0            | 49,11                                           |
| 8    | 1,5             | 2,5             | 4,0             | 7,0             | 14,0            | 49,58                                           |
| 9    | 2,0             | 2,5             | 4,0             | 8,0             | 16,0            | 49,11                                           |
| 10   | 1,0             | 2,5             | 4,0             | 8,0             | 15,0            | 48,18                                           |
| 11   | 1,5             | 2,5             | 4,5             | 8,0             | 15,5            | 49,11                                           |
| 12   | 1,0             | 2,0             | 3,5             | 6,5             | 12,0            | 49,58                                           |
| 13   | 1,0             | 2,5             | 4,0             | 7,0             | 12,0            | 49,11                                           |
| 14   | 1,0             | 2,0             | 3,5             | 7,5             | 14,0            | 49,58                                           |
| 15   | 1,5             | 3,0             | 4,5             | 8,0             | 14,5            | 49,58                                           |
| 16   | 1,0             | 2,0             | 3,5             | 6,5             | 12,0            | 49,58                                           |
| MÉD. | 1,4             | 2,5             | 4,0             | 7,0             | 11,8            | 50,00                                           |

Obs:  $\epsilon_i$  = deformação corresponde à carga  $\bar{i}$  (em kgf)

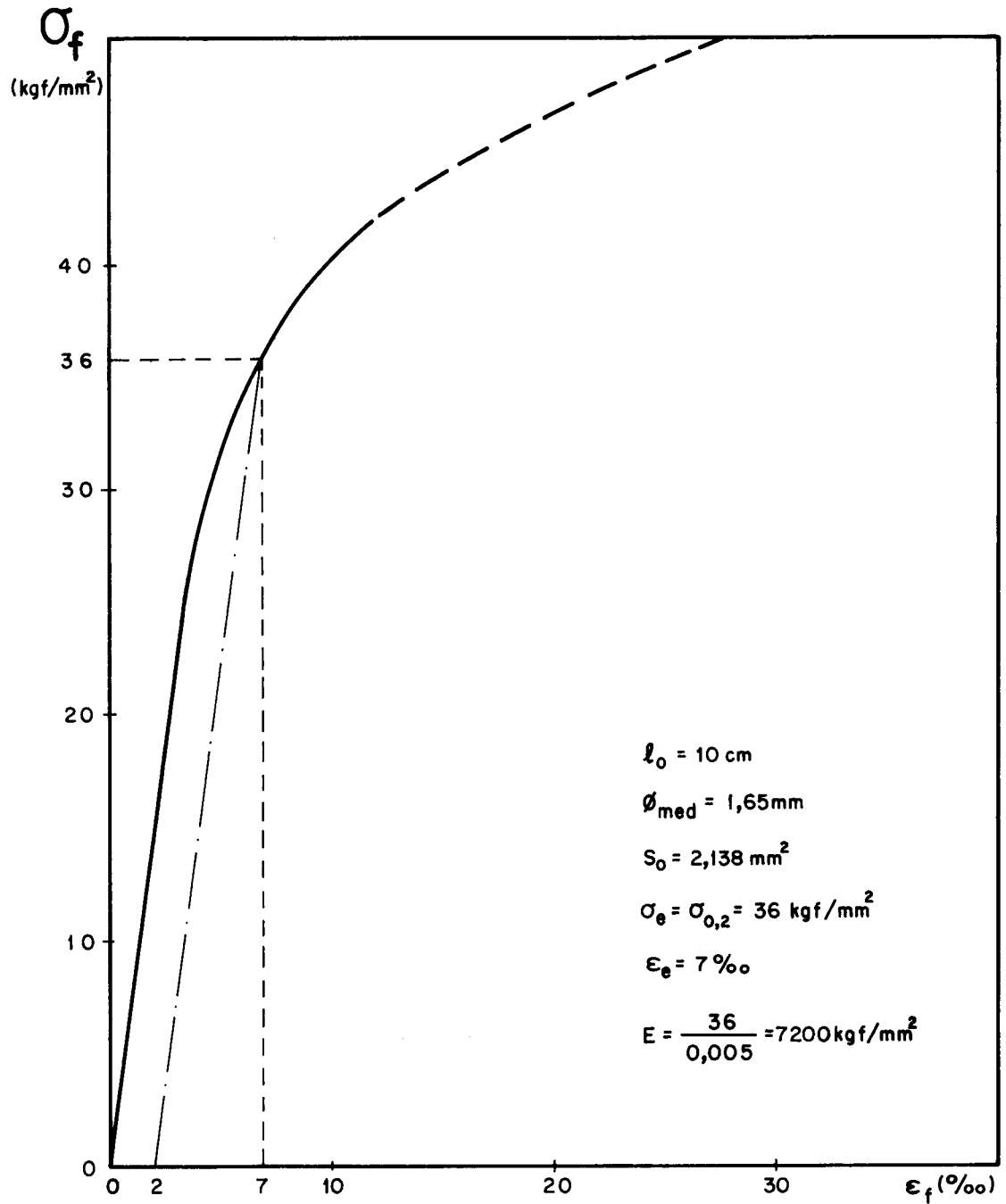


Fig. 3.8-1 - Curva média tensão - deformação dos arames das telas, traçada a partir de 16 amostras

#### 4. RESULTADOS TEÓRICOS

Neste capítulo, calculam-se:

- Momentos de plastificação por unidade de comprimento da laje, os quais, devido condição de equilíbrio de momentos, devem ser iguais aos momentos resistentes (vide Ítem 4.1).
- Cargas de ruína obtidas a partir de cálculo aproximado descrito no ítem 1.4.3b e levando-se em consideração os momentos de plastificação teóricos ( $\underline{m}$  e  $\underline{m}_1$ ) obtidos no ítem 4.1 e os teórico-experimentais ( $\underline{m}^*$  e  $\underline{m}_1^*$ ) calculados no ítem 5.1.

##### 4.1. MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO - CÁLCULO NO ESTÁDIO III

Os valores teóricos dos momentos de plastificação por unidade de comprimento, foram obtidos com cálculo de peça sub-armada no Estádio III. Isto é, empregando-se as expressões dadas no ítem 1.3.2b (pág.1-12), ou seja:

$$m = a_s f_{yk} \left( d - \frac{a_s f_{yk}}{2f_{ck}} \right) \dots\dots\dots (4.1-1)$$

$$m_1 = a_{s1} f_{yk} \left( d - \frac{a_{s1} f_{yk}}{2f_{ck}} \right) \dots\dots\dots (4.1-2)$$

onde  $\underline{m}$  e  $\underline{m}_1$  são os momentos plastificação correspondentes as regiões de laje com diferentes distribuições de armadura. Nas regiões onde se dá a redução de armadura tem-se:

$$a_{s1} = 0,5a_s \dots\dots\dots (4.1-3)$$

e, portanto, a expressão (4.1-2) pode ser escrita sob a forma:

$$m_1 = 0,5 a_s f_{yk} \left( d - \frac{a_s f_{yk}}{4 f_{ck}} \right) \dots\dots\dots (4.1-4)$$

Entretanto, antes de se apresentarem os valores de  $m$  e  $m_1$  será feita uma verificação da condição de "sub-armação" das lajes ensaiadas.

Admitindo as hipóteses de cálculo do Estádio III, para que uma seção retangular seja sub-armada, na ruptura deve-se ter conforme a Fig. 4.1-1:

$$\epsilon_s = \epsilon_y \text{ e } \epsilon_c = \epsilon_{cu}$$

ou ainda, da Fig. 4.1-1b:

$$\epsilon_s = \left( \frac{d-x}{x} \right) \epsilon_{cu} \dots\dots\dots (4.1-5)$$

Por outro lado, da equação de equilíbrio (1.3-1, pág. 7) tem-se:

$$y = a_s \left( \frac{f_{yk}}{f_{ck}} \right) \dots\dots\dots (4.1-6)$$

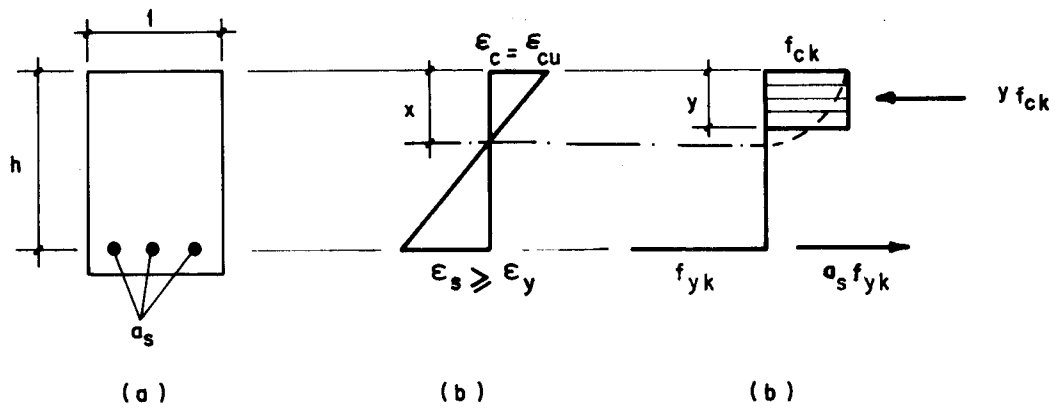


Fig 4.1-1

Supondo  $y = 0,8x$  (critério da NB-1/78, item 4.1) e combinando-se as expressões (4.1-5) e (4.1-6), obtém-se:

$$\epsilon_s = \left( \frac{0,8df_{ck}}{a_s f_{yk}} - 1 \right) \epsilon_{cu} \dots\dots\dots (4.1-7)$$

Portanto, para que as seções sejam sub-armadas, os valores de  $\epsilon_f$  obtidos através de (4.1-7) devem satisfazer a condição:

$$\epsilon_s > \epsilon_y \dots\dots\dots (4.1-8)$$

A tabela 4.1-1 apresenta os valores de  $\epsilon_f$ ,  $m$  e  $m_1$  correspondentes às diversas lajes ensaiadas, os quais foram calculados com:

$$f_{yk} = 3600 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\epsilon_y = 7\%$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\%$$

$$a = 1,8 \text{ cm}$$

$$a_s \approx 0,25 \text{ cm}^2/\text{dm}$$

$$a_{s1} = 0,5s_f$$

#### 4.2. CARGAS DE RUÍNA - CÁLCULO DE VERIFICAÇÃO

Partindo das considerações expostas no item 1.4.3b, o cálculo das cargas de ruína correspondentes às lajes ensaiadas, pode ser feito fazendo  $m' = 0$  e  $m_1' = 0$  nas expressões (1.4-47) e (1.4-64). Portanto:

$$P = 4(P_a + P_b) \dots\dots\dots (4.1-1)$$

Tabela 4.1-1 - Momentos de plastificação teóricos

| GRUPO | SÉRIE | $\sigma_c$<br>(kgf/cm <sup>2</sup> ) | m<br>(kgf.dm/dm) | $m_1$<br>(kgf.dm/dm) | $\epsilon_f$<br>(0/%) | $k_1 = \frac{m_1}{m}$ |
|-------|-------|--------------------------------------|------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1     | 1a.   | 273                                  | 147,2            | 77,3                 | 11,8                  | 0,53                  |
|       | 2a.   | 273                                  | 147,2            | 77,3                 | 11,8                  | 0,53                  |
|       | 3a.   | 259                                  | 146,4            | 77,1                 | 11,0                  | 0,53                  |
| 2     | 1a.   | 210                                  | 142,7            | 76,2                 | 8,3                   | 0,53                  |
|       | 2a.   | 265                                  | 146,7            | 77,2                 | 11,1                  | 0,53                  |
|       | 3a.   | 252                                  | 145,9            | 77,0                 | 10,6                  | 0,53                  |
|       | 4a.   | 299                                  | 148,5            | 77,6                 | 13,24                 | 0,52                  |
| 3     | 1a.   | 269                                  | 146,9            | 77,3                 | 11,6                  | 0,53                  |
|       | 2a.   | 269                                  | 146,9            | 77,3                 | 11,6                  | 0,53                  |
|       | 3a.   | 253                                  | 146,0            | 77,0                 | 10,1                  | 0,53                  |

onde:

$$P_a = m [c + (1+c^2)\beta] \dots\dots\dots (4.2-2)$$

$$P_b = mk\theta \dots\dots\dots (4.2-3)$$

os valores de  $c$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  e  $K$  são dados, respectivamente, pelas expressões (1.4-56), (1.4-59), (1,4-60) e (1.4-65).

Deve-se observar que o valor de  $P$  dado por (4.1-9) deve satisfazer também a seguinte condição:

$$P \leq 2\pi m \dots\dots\dots (4.2-4)$$

Isto  $\bar{e}$ , a carga de ruína que deverá ser considerada será o menor dos dois valores abaixo:

$$P = \begin{cases} P_1 = 4(P_a + P_b) \dots\dots\dots (4.2-5A) \\ P_2 = 2\pi m \dots\dots\dots (4.2-5B) \end{cases}$$

Na Tabela 4.2-1, apresentam-se os resultados dos cálculos considerando-se os valores de  $\underline{m}$  e  $\underline{m}_1$  dados na Tabela 4.1-1.

Analogamente, na Tabela 4.2-2, indicam-se os resultados de cálculo considerando-se os momentos de plastificação ( $m^*$  e  $m_1^*$ ) obtidos através dos ensaios da faixas (vide ítem 5.1).

Tabela 4.2-1 - Valores teóricos das cargas de ruína, calculados com  $\underline{m}$  e  $\underline{m}_1$  (teóricos)

| Grupo | Série | $\alpha$ | m     | $m_{med}$ | $m_1$ | $m_{1med}$ | $k_1 = \frac{m_1}{m}$ | $\beta$ (rad) | $\theta$ (rad) | $\gamma$ (rad) | k     | $P_a$ (kgf) | $P_b$ (kgf) | $P_1$ (kgf) | $P_2$ |     |  |
|-------|-------|----------|-------|-----------|-------|------------|-----------------------|---------------|----------------|----------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------|-----|--|
| 1     | 1a.   |          | 147,2 |           | 77,3  |            |                       |               |                |                |       |             |             |             |       |     |  |
|       | 2a.   | 1,0      | 147,2 | 146,9     | 77,3  | 77,2       | 0,53                  | 0,429         | 0,713          | 1,142          | 0,862 | 143,3       | 90,3        | 934         |       | 923 |  |
|       | 3a.   |          | 146,4 |           | 77,1  |            |                       |               |                |                |       |             |             |             |       |     |  |
| 2     | 1a.   |          | 142,7 |           | 76,2  |            |                       |               |                |                |       |             |             |             |       |     |  |
|       | 2a.   |          | 146,7 |           | 77,2  |            |                       |               |                |                |       |             |             |             |       |     |  |
|       | 3a.   | 1,2      | 145,9 | 146,0     | 77,0  | 77,0       | 0,53                  | 0,482         | 0,607          | 1,089          | 0,891 | 166,0       | 79,0        | 980         |       | 917 |  |
|       | 4a.   |          | 148,5 |           | 77,6  |            |                       |               |                |                |       |             |             |             |       |     |  |
| 3     | 1a.   |          | 146,9 |           | 77,3  |            |                       |               |                |                |       |             |             |             |       |     |  |
|       | 2a.   | 1,4      | 146,9 | 146,6     | 77,3  | 77,2       | 0,53                  | 0,535         | 0,501          | 1,036          | 0,912 | 192,8       | 67,0        | 1.039       |       | 921 |  |
|       | 3a.   |          | 146,0 |           | 77,0  |            |                       |               |                |                |       |             |             |             |       |     |  |

Observações:

- 1) Os valores de  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$ , k,  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_1$  e  $P_2$  foram calculados, respectivamente, pelas expressões (1.4-59), (1.4-60), (1.4-61), (1.4-65), (1.4-47), (1.4-64), (1.4-64), (4.2-5A) e (4.2-5B)
- 2) Os valores teóricos das cargas de ruína são os assinalados com  $\bigcirc$



Tabela 4.2-2 - Valores teóricos das cargas de ruína, calculados com  $m^*$  e  $m_1^*$  (teórico-experimentais).

| Grupo | Série | $\alpha$ | $m^*$ | $m_1^*$ | $k_1^* = \frac{m_1^*}{m^*}$ | $\beta$<br>(rad) | $\theta$<br>(rad) | $\gamma$<br>(rad) | k     | $P_a$<br>(kgf) | $P_b$<br>(kgf) | $P_1$<br>(kgf) | $P_2$<br>(kgf) |
|-------|-------|----------|-------|---------|-----------------------------|------------------|-------------------|-------------------|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1     | 1a.   |          |       |         |                             |                  |                   |                   |       |                |                |                |                |
|       | 2a.   | 1,0      |       |         |                             | 0,429            | 0,713             | 1,142             | 0,848 | 151,2          | 93,7           | 980            |                |
|       | 3a.   |          |       |         |                             |                  |                   |                   |       |                |                |                |                |
| 2     | 1a.   |          |       |         |                             |                  |                   |                   |       |                |                |                |                |
|       | 2a.   | 1,2      | 155,0 | 75,0    | 0,48                        | 0,482            | 0,607             | 1,089             | 0,879 | 176,2          | 82,7           | 1.036          | (974)          |
|       | 3a.   |          |       |         |                             |                  |                   |                   |       |                |                |                |                |
|       | 4a.   |          |       |         |                             |                  |                   |                   |       |                |                |                |                |
| 3     | 1a.   |          |       |         |                             |                  |                   |                   |       |                |                |                |                |
|       | 2a.   | 1,4      |       |         |                             | 0,535            | 0,501             | 1,036             | 0,903 | 203,8          | 70,1           | 1.096          |                |
|       | 3a.   |          |       |         |                             |                  |                   |                   |       |                |                |                |                |

Observações: As mesmas da Tabela 4.2-1

5 - RESULTADOS TEÓRICO-EXPERIMENTAIS

5.1 - MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO CORRESPONDENTES ÀS FAIXAS ENSAIADAS

Seja uma viga bi-apoiada, de seção retangular e submetida a duas cargas concentradas conforme mostra a Fig. 5.1.1a.

Para essa viga, o momento de plastificação total ( $M_p$ ) pode ser obtido, por exemplo, pelo Teorema Cinemático da Teoria da Plasticidade. Ou seja, considerando que o mecanismo de ruína (ou de colapso) é o da Fig.5.1-1b, tem-se:

$$2 \left( \frac{P_R}{2} \right) \delta = 2 M_p \theta \quad \dots \dots \dots (5.1-1)$$

onde:  $\theta = \frac{\delta}{\left(\frac{l-a}{2}\right)} \quad \dots \dots \dots (5.1-2)$

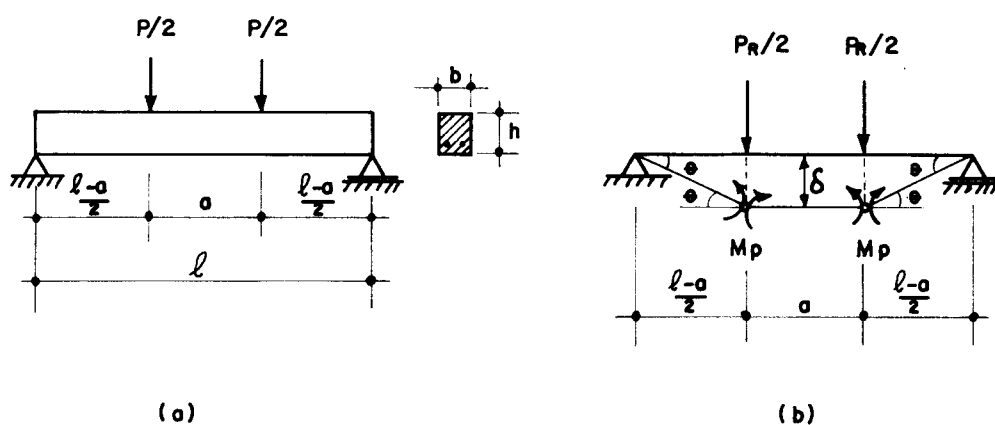


Fig. 5.1-1

Substituindo (5.1-2) em (5.1-1), tem-se:

$$M_p = P_R \left( \frac{\ell - a}{4} \right) \dots\dots\dots (5.1-3)$$

Como, em geral, para as lajes considera-se o momento de plastificação por unidade de largura, tem-se portanto:

$$m = \frac{M_p}{b} = P_R \left( \frac{\ell - a}{4b} \right) \dots\dots\dots (5.1-4)$$

Considerando-se as curvas médias  $P-\delta$  (Fig.3.7-1), correspondentes aos ensaios mais significativos das faixas, e a partir da expressão (5.1-4) é que foram calculados os momentos de plastificação teórico-experimentais das lajes. Ou seja:

- a) Momento de plastificação ( $M^*$ ) correspondente à região mais armada das lajes:

Vigas auxiliares: Faixas tipo F (vide Fig.2.1-4)

Dimensões:  $\ell = 50\text{cm}$ ,  $a = 10\text{cm}$  e  $b = 10\text{cm}$

Carga de ruína:  $P_{Rmed} \cong 155\text{kgf}$  (vide ítem 3.7)

$$\therefore m^* \cong 155 \left( \frac{50-10}{4 \times 10} \right) = \underline{155\text{kgf/dm}}$$

- b) Momento de plastificação ( $m_1^*$ ) correspondente às regiões da laje onde as armaduras são parcialmente suprimidas:

Analogamente, tem-se, a partir dos resultados dos ensaios das faixas FR, o seguinte valor para  $m_1^*$ :

$$m_1^* \cong 75 \left( \frac{50-10}{4 \times 10} \right) = \underline{75\text{kgf.dm/dm}}$$

## 5.2 - CARGAS DE RUÍNA ASSOCIADAS ÀS CONFIGURAÇÕES OBTIDAS NOS ENSAIOS DAS LAJES

### 5.2.1 - Descrição do Processo de Cálculo

Considere-se uma laje isotrópica de contorno convexo inteiramente apoiado, com a armadura reduzida em determinadas regiões e submetida a uma carga concentrada fixa, conforme mostra a Fig. 5.2-1.

Para o cálculo da carga de ruína, supõe-se que a configuração de ruína seja a "configuração básica", isto é, sem leques, e com as charneiras positivas dirigindo-se do ponto de aplicação da carga aos cantos da laje (Fig.5.2-1).

Seja  $P_i$  a parcela de  $P$  correspondente a uma determinada charneira  $i$ , de comprimento  $L_i$ , tal que:

$$L_i = l_i + l_{1i} \dots\dots\dots (5.2-1)$$

onde:

$l_i$  = comprimento da parte da charneira  $i$ , sujeita ao momento de plastificação  $\underline{m}$ .

$l_{1i}$  = comprimento da parte da charneira  $i$ , sujeita ao momento de plastificação  $\underline{m}_1 < \underline{m}$ .

Igualando-se a energia desenvolvida por  $P_i$ , à energia absorvida pela charneira  $i$ , tem-se:

$$P_i f = (m l_i + m_1 l_{1i}) \theta_i \dots\dots\dots (5.2-2)$$

onde:

$$\theta_i = \theta_i' + \theta_i'' = \frac{f}{a} + \frac{f}{b} \dots\dots\dots (5.2-3)$$

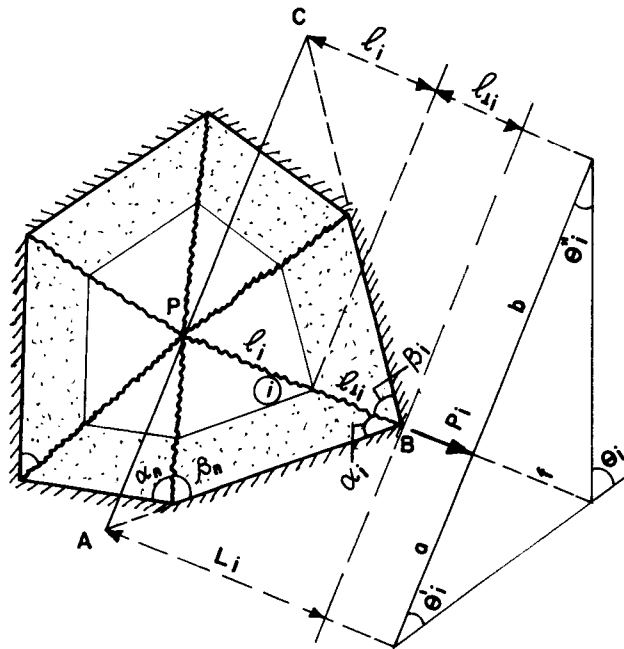


Fig 5.2-1

Dos triângulos ABP e BCP (Fig. 5.2-1), têm-se:

$$a = \frac{L_i}{\cot \alpha_i} \quad \text{e} \quad b = \frac{L_i}{\cot \beta_i} \quad \dots \dots \dots (5.2-4)$$

Substituindo (5.2-4) em (5.2-3) e levando o resultado em (5.2-2), vem:

$$P_i = \left( \frac{m l_i + m_1 l_{1i}}{L_i} \right) (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) \dots \dots (5.2-5)$$

ou ainda, a partir de transformações algébricas, tem-se:

$$P_i = m (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) \left[ 1 - (1-r) \frac{l_{1i}}{L_i} \right] \dots (5.2-6)$$

onde:

$$r = \frac{m_1}{m} = \text{índice de redução de momentos} \dots (5.2-7)$$

Portanto, o valor total da carga de ruína é dado por:

$$P_J = \sum_{i=1}^n P_i = m \sum_{i=1}^n (\cotg\alpha_i + \cotg\beta_i) \left[ 1 - (1-r) \frac{l_i}{L_i} \right] \dots\dots (5.2-8)$$

sendo,  $n$  o número total de charneiras positivas.

É interessante notar que, se a distribuição das armaduras for constante ( $m_i = m$ ) tem-se,  $r = 1$ . Portanto:

$$P = m \sum_{i=1}^n (\cotg\alpha_i + \cotg\beta_i) \dots\dots\dots (5.2-9)$$

que é a expressão da carga de ruína de uma laje de contorno convexo inteiramente apoiado, com a configuração de ruína da Fig. 5.2.1.

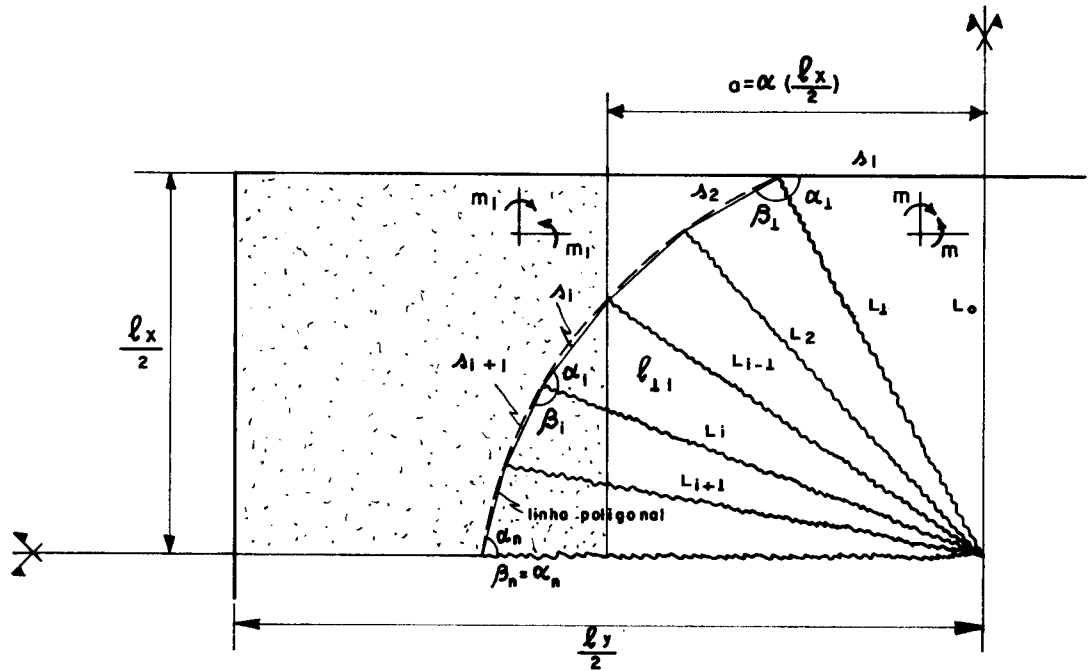


Fig. 5.2-2

### 5.2.2. Resultados obtidos

Para a aplicação do processo de cálculo exposto acima às lajes ensaiadas, foram adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- 1a.) Utilização de configurações mais simples (Figs. 3.6-4 a 3.6-9).
- 2a.) Aproximação das charneiras negativas dessas configurações a linhas poligonais, para cujos vértices convergem as charneiras positivas (Fig. 5.2-7).
- 3a.) Consideração de apoios indeslocáveis ao longo dessas linhas poligonais.

Como as configurações de ruína adotadas são bi-simétricas, o cálculo foi feito considerando-se, apenas, um quadrante de laje. Ou seja, aplicando a fórmula (5.2-8) às  $n$  charneiras do quadrante, tem-se:

$$P' = 4m \left( \sum_{i=1}^{n-1} A_i + \frac{A_n}{2} \right) \dots\dots\dots (5.2-10)$$

onde:  $A_i = (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) \left[ 1 - (1-r) \frac{l_{1i}}{L_i} \right];$

$$i = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (5.2-11)$$

Para melhor precisão, os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , em vez de serem medidos, foram calculados pelas seguintes expressões:

$$\alpha_i = \arccos \left( \frac{L_i^2 + s_i^2 - L_{i-1}^2}{2L_i s_i} \right) \dots\dots\dots (5.2-12A)$$

$$\beta_i = \arccos \left( \frac{L_i^2 + s_{i+1}^2 - L_{i+1}^2}{2L_i s_{i+1}} \right) \dots\dots\dots (5.2-12B)$$

sendo,  $s_i$ ,  $s_{i+1}$ ,  $L_{i-1}$ ,  $L_i$  e  $L_{i+1}$  (Fig. 5.2-1), segmentos de reta medidos com precisão de 0,1cm.

Na tabela 5.2-1 apresenta-se o resumo dos resultados dos cálculos efetuados (vide tabela A.1 a A.12 do Apêndice).

TABELA 5.2-1 - Valores das cargas de ruína teórico-experimentais.

| Grupo | Laje  | $P_J$<br>(kgf) | $P_{Jmed}$<br>(kgf) | $P_J^*$<br>(kgf) | $P_{Jmed}^*$<br>(kgf) |
|-------|-------|----------------|---------------------|------------------|-----------------------|
| 1     | SA-11 | 951            | 944                 | 999              | 993                   |
|       | SA-21 | 935            |                     | 982              |                       |
|       | SA-31 | 945            |                     | 997              |                       |
|       | CA-11 | 961            | 958                 | 1012             | 1019                  |
|       | CA-21 | 923            |                     | 1002             |                       |
|       | CA-31 | 989            |                     | 1043             |                       |
| 2     | SA-12 | 916            | 957                 | 995              | 1015                  |
|       | SA-22 | 936            |                     | 989              |                       |
|       | SA-32 | 994            |                     | 1054             |                       |
|       | SA-42 | 980            |                     | 1023             |                       |
|       | CA-12 | 935            | 975                 | 1016             | 1035                  |
|       | CA-22 | 987            |                     | 1042             |                       |
|       | CA-32 | 1002           |                     | 1063             |                       |
|       | CA-42 | 974            |                     | 1017             |                       |
| 3     | SA-13 | 944            | 966                 | 1018             | 1029                  |
|       | SA-23 | 963            |                     | 1016             |                       |
|       | SA-33 | 991            |                     | 1052             |                       |
|       | CA-13 | 896            | 936                 | 945              | 992                   |
|       | CA-23 | 952            |                     | 1011             |                       |
|       | CA-33 | 960            |                     | 1019             |                       |

Observação: Os valores de  $P_J$  e  $P_J^*$  foram calculados, respectivamente, com  $(m$  e  $m_1)$  e  $(m^*$  e  $m_1^*)$ .



## 6 - CONCLUSÕES

### 6.1 - COMPARAÇÃO ENTRE AS CARGAS DE RUÍNA OBSERVADAS E AS DE CÁLCULO

Antes das considerações finais deste trabalho, a presentam-se, nas tabelas 6.1-1 e 6.1-2, o resumo das cargas de ruína obtidas nos ensaios e sua comparação com as cargas de cálculo.

As cargas de ensaio correspondem às cargas médias de ruína de cada um dos grupos de modelos ensaiados, distinguindo-se entre elas os valores correspondentes às lajes tipos SA e CA.

As cargas de cálculo foram obtidas pela teoria das charneiras plásticas, considerando-se duas configurações de ruína: a teórica e a experimental. As cargas (P), correspondentes à configuração teórica, foram calculadas no Capítulo 4 (item 4.2) a partir das hipóteses do cálculo de verificação estabelecidas no item 1.4.3b. Para o cálculo das cargas (P'), associadas às configurações experimentais, adotou-se o critério descrito no Capítulo 5 (item 5.2).

Quanto à comparação entre os resultados teóricos e experimentais, pode-se observar pela tabela 6.1-1 que, com o aumento do coeficiente  $\alpha$ , os valores das cargas de ensaio chegam a ser 38% maiores do que as cargas de cálculo para as lajes tipo SA e de 55% para as lajes tipo CA. Considerando-se as cargas de cálculo da Tabela 6.1-2, aqueles números ficam reduzidos, respectivamente, a 30% e 46%. Isto se deve ao fato dessas cargas terem sido calculadas a partir dos momentos de plastificação teórico-experimentais ( $m^*$  e  $m_1^*$ ), os quais são maiores do que os puramente teóricos ( $m$  e  $m_1$ ).

Para uma melhor visualização dos resultados, a presentam-se, na Fig. 6.1-1, dois gráficos nos quais pode-

-se observar tanto a influência da vinculação como a da redução gradativa da armadura. Ou seja, as lajes vinculadas vertical e horizontalmente (lajes tipo CA) possuem efetivamente maior capacidade de carga do que as lajes vinculadas só verticalmente (lajes tipo SA). Essa influência é tanto maior à medida que o coeficiente  $\alpha$  cresce. Por exemplo, para as lajes do Grupo 3 esse acréscimo representa aproximadamente 20% (Fig. 6.1-1a). Já a redução gradativa da armadura, que teoricamente não deveria repercutir na carga de ruína, repercute e de forma não desprezível. Por exemplo, as lajes do Grupo 3 (mais armadas) revelam-se nitidamente mais resistentes do que as do Grupo 1 (principalmente as lajes tipo CA).

## 6.2 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora já se tenha mostrado até aqui um panorama geral de todo o trabalho desenvolvido, desde os aspectos teóricos, experimentais, teórico-experimentais e os resultados pertinentes a cada um deles, apresentam-se a seguir as conclusões sobre o problema da redução gradativa da armadura e das discrepâncias provenientes do efeito de membrana.

A análise dos resultados correspondentes às fases anteriores à ruína, por fugirem dos objetivos do trabalho, ficarão sem comentários. Todavia, sugere-se no item 6.3 alguns tópicos para os quais os resultados apresentados no Capítulo 3 podem servir de subsídios a estudos posteriores.

Quanto à redução gradativa da armadura os resultados dos ensaios mostraram que as lajes ficam mais resistentes quando se aumenta o coeficiente  $\alpha$ . Pela teoria das charneiras plásticas esse fato não deveria ocorrer, conforme indicam os valores das cargas de cálculo. Mesmo nas lajes simplesmente apoiadas sem vinculação horizontal (lajes

tipo SA), nas quais se supunha não haver efeitos de arqueamento e de membrana, esse fenômeno ocorreu. A razão dessa discrepância deve-se em grande parte à existência de atrito nos roletes de apoio, o qual foi induzido pelo próprio sistema de vinculação vertical (vide Figs. 2.1-2 e 2.2-5). Devido a isso criou-se, de certa forma, uma vinculação horizontal capaz de provocar tanto o efeito de arqueamento como o de membrana, aumentando assim a capacidade resistente das lajes (vide Tabelas 6.1-1 e 6.1-2).

Quanto ao efeito de membrana, a sua influência mostrou-se bastante evidente, principalmente nas lajes onde a região mais armada se aproxima dos apoios. Isto é, o efeito de membrana torna-se mais pronunciado à medida que o valor de  $\alpha$  cresce.

Embora teoricamente não se possa prever com exatidão a influência do efeito de membrana, apresenta-se a seguir uma estimativa desse efeito a partir da teoria desenvolvida no item 1.5.2. (\*)

Admitindo-se que o efeito de membrana seja o responsável pelo aumento de carga desde o início da fase de ruína até ruína propriamente dita, tem-se:

com:

$$\frac{l_y}{l_x} = \frac{90}{50} = 1,8 ; s = \frac{t_y}{l_y} = \frac{t_x}{l_x} = \frac{2,5}{50} = \frac{1}{20}$$

$$T_x = T_y = s_f \sigma_e = 0,025 \times 3.600 = 90 \text{ kgf/cm}$$

$$A_p = t_x \cdot t_y = 2,5 \times 4,5 = 11,25 \text{ cm}^2 \text{ (área de carregamento)}$$

---

(\*) Rigorosamente, não se poderia aplicar aquela teoria às lajes ensaiadas porque elas não têm a armadura uniformemente distribuída em toda a sua extensão.

Entrando-se no gráfico da Fig. 1.5-6c. ( $s = 1/20$ ) com os valores de  $l_y/l_x = 1,8$  e  $T_x/T_y = 1$ , obtém-se:

$$\frac{p l_x^2}{T_x \delta} \approx 430$$

Tomando-se por base as lajes tipo CA do Grupo 3 ( $\alpha = 1,4$ ) nas quais a região de redução da armadura é relativamente pequena, tem-se, a partir dos resultados da Tabela 3.3-1, uma diferença de flecha ( $\delta = \delta_p - \delta_r$ ) de aproximadamente 1cm, portanto:

$$\Delta P = p A_p = 430 \times \frac{90 \times 1}{50^2} \times 11,25 = 174 \text{ kcf}$$

Comparando-se esse valor com a diferença entre carga média de ruína e carga correspondente ao início da fase de ruína, conclui-se que:

$$\Delta P_{\text{exp}} = P_{\text{med}} - P_{\text{rmed}} = 1420 - 1235 = 185 \text{ kcf}$$

Esses resultados mostram a boa concordância entre a teoria e a experimentação.

### 6.3 - PROSSEGUIMENTO DA PESQUISA

Além deste trabalho, continuam em andamento, no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, vários trabalhos de pesquisa também voltados para a análise experimental de lajes elasto-plásticas.

Dentro desse espírito, sugere-se que sejam desenvolvidos em futuros trabalhos, também voltados para o estudo do efeito de membrana e da redução gradativa da armadura, os seguintes tópicos:

- 1º) variação da relação entre os vãos da laje;
- 2º) variação da relação entre a espessura e o vão menor;
- 3º) variação da área de carregamento;
- 4º) influência da deformabilidade dos apoios.

Quanto ao primeiro tópico a ser abordado, pode-se adiantar que, mesmo para o caso de carga uniformemente distribuída, o número de ensaios realizados é ainda relativamente pequeno. Embora os desenvolvimentos teóricos estejam numa fase bastante avançada, seria oportuna uma investigação experimental utilizando modelos reduzidos - de lajes contínuas, semelhantes às adotadas por Gamble, Sozen e Siess [4].

O segundo tópico oferece pelo menos dois aspectos de interesse. Um deles é o efeito de arqueamento, que pode se manifestar mais intensamente em lajes com espessura relativamente grandes. O outro aspecto é relacionado com a ação de membrana que, de acordo com a teoria - Taylor [34] pode conferir à laje maior capacidade resistente sem que as deformações sejam excessivamente grandes, ao contrário do previsto pela teoria de Park [27]. Uma consequência de ordem prática, da análise da variação de espessura, será naturalmente o estabelecimento de um critério para limitação de flechas (em serviço) a partir da situação de ruína. Aliás, estudo semelhante pode ser feito a partir dos resultados dos ensaios que se encontram neste trabalho (vide itens 3.1 a 3.4).

Quanto à variação da área de carregamento, o interesse maior reside justamente no fato de se poder saber até que ponto uma carga parcialmente distribuída pode ser tratada como carga concentrada. A resposta disso, que pode ser obtida a partir das configurações de ruína,

certamente irá proporcionar grandes simplificações de cálculo quer seja em regime elástico ou elasto-plástico.

Finalmente, o quarto tópico a ser abordado tem importância fundamental na determinação da configuração de ruína de lajes contínuas. Como se sabe, a teoria elementar das charneiras plásticas admite que os apoios das lajes sejam indeformáveis. Portanto, principalmente nas lajes de pontes onde as cargas são de intensidade elevada, é de interesse a pesquisa das rótulas plásticas que poderão se formar ao longo das vigas de apoio antes da formação das charneiras plásticas nas lajes.

Tabela 6.1-1 - Comparação entre as cargas de ruína de ensaio e de cálculo.

| Laje | Grupo | $\alpha$ | Cargas de Cálculo (kgf) |     | Cargas de Ensaio (kgf) | $\frac{P_{exp}}{P}$ | $\frac{P_{exp}}{P'}$ |
|------|-------|----------|-------------------------|-----|------------------------|---------------------|----------------------|
|      |       |          | P                       | P'  |                        |                     |                      |
| SA   | 1     | 1,0      | 923                     | 944 | 1013                   | 1,10                | 1,07                 |
| CA   |       |          |                         | 958 |                        |                     |                      |
| SA   | 2     | 1,2      | 917                     | 957 | 1084                   | 1,18                | 1,13                 |
| CA   |       |          |                         | 975 |                        |                     |                      |
| SA   | 3     | 1,4      | 921                     | 966 | 1268                   | 1,38                | 1,31                 |
| CA   |       |          |                         | 936 |                        |                     |                      |

Observação: Os valores das cargas de cálculo foram obtidos considerando-se os números de plastificação teóricos ( $m$  e  $m_1$ ).

Tabela 6.1-2 - Comparação entre as cargas de ruína de ensaio e de cálculo.

| Laje | Grupo | $\alpha$ | Cargas de Cálculo (kgf) |        | Cargas de Ensaio (kgf) | $\frac{P_{exp}}{P^*}$ | $\frac{P_{exp}}{P'^*}$ |
|------|-------|----------|-------------------------|--------|------------------------|-----------------------|------------------------|
|      |       |          | $P^*$                   | $P'^*$ |                        |                       |                        |
| SA   | 1     | 1,0      | 974                     | 993    | 1013                   | 1,04                  | 1,02                   |
| CA   |       |          |                         | 1019   | 1089                   | 1,12                  |                        |
| SA   | 2     | 1,2      | 974                     | 1015   | 1084                   | 1,11                  | 1,07                   |
| CA   |       |          |                         | 1035   | 1140                   | 1,17                  |                        |
| SA   | 3     | 1,4      | 974                     | 1029   | 1268                   | 1,30                  | 1,23                   |
| CA   |       |          |                         | 992    | 1426                   | 1,46                  |                        |

Observação: Os valores de  $P^*$  e  $P'^*$  foram obtidos considerando-se os momentos de plastificação teórico-experimentais ( $m^*$  e  $m'^*$ ).



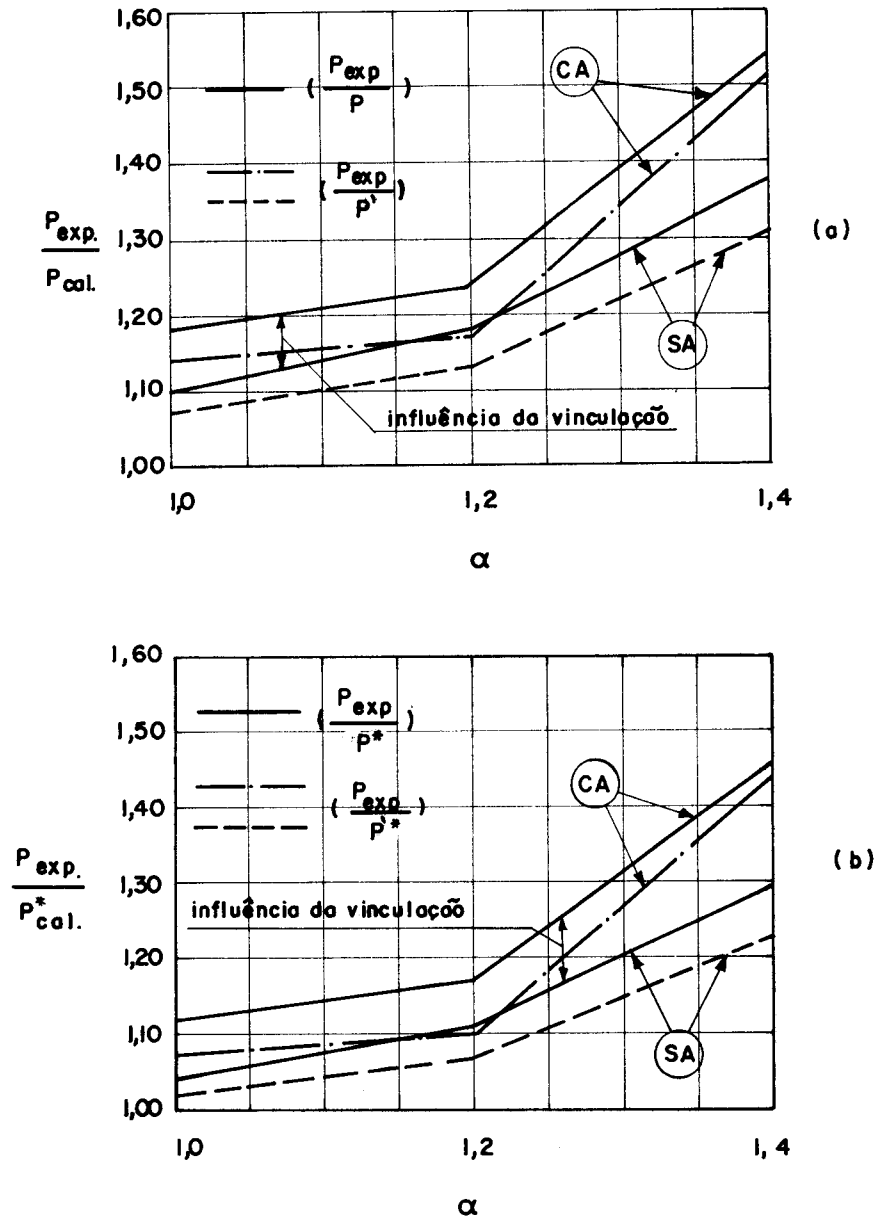


Fig. 6.1-1 - Comparação entre as cargas de ruína de ensaio e de cálculo.

BIBLIOGRAFIA

1. CHAMECKI.S. - "Cálculo das lajes no regime de ruptura", Enciclopédia Técnica Universal Globo, vol. IV, 1962.
2. CHRISTIANSEN, K.P - "The effect of membrane stress on the ultimate strength of the interior panel in a reinforced concrete slab", The Structural Engineer, Vol. 41, n.8 VIII/1963, p. 261/265.
3. COMITÉ EUROPEËN DU BÉTON - "Bulletin d'Information", n. 57, IX/1966, p. 62/140.
4. GAMBLE, W.L., SOZEN, M.A. e SIESS, C.P. - "An experimental study of reinforced concrete two-way floor slab", The Structural Series, n.211, VI/1961.
5. HAYES, B. - "Allowing for membrane action in the plastic analysis of rectangular reinforced concrete slabs", Magazine of Concrete Research, vol. 20, n.65, VII/1968, p. 205/212.
6. HOGNESTAD, E., HANSON, N.W. e HENRY, D.M. - "Concrete stress distribution in ultimate strength design", Journal of the American Concrete Institute, vol.27, n.4, XII/1955, p.455/479.
7. JOHANSEN, K.W. - "Bruchmomente der kreuzweise bewehrten platten", Association Internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires, 1932, p.277/296.
8. JOHANSEN, K.W. - "Linhas de ruptura", Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1962.
9. JONES, L.L. e WOOD, R.H. - "Yield-line analysis of slabs", Thames and Hudson, London, 1967.

10. JORGE, A. e FIGUEIREDO, R.G. - "Estudo experimental de lajes em regime de ruptura", Trabalho de Formatura, Rel. Int. 8/x, LE-EESC-USP, São Carlos/SP, 1961.
11. KEMP, K.O. - "Yield of a square reinforced concrete slab on simple supports", The Structural Engineer, vol.45, n.7, VII/1967, p.235/240.
12. LANGENDONCK, T.v. - "Charneiras plásticas em lajes de edifícios", Estrutura, n.58, 1965, p.113/125.
13. LANGENDONCK, T.v. - "Charneiras plásticas em lajes de pontes", Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1965.
14. LANGENDONCK, T.v. - "Charneiras plásticas em lajes de edifícios", Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1966.
15. LANGENDONCK, T.v. - "Teoria elementar das charneiras plásticas", vol.I, Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1970.
16. LANGENDONCK, T.v. - "Remarques sur le calcul des dalles au poinçonnement", C.E.B, Bulletin d'Information, n.57, IX/1966, p.141/144.
17. LEONHARDT, F. - "Das Beweheren von Stahlbetontragwerken (Armadura das estruturas de concreto armado)", in Beton-Kalender, 1973, vol.II, pp.331-433.
18. MARTINELLI, D.A.O. - "Contribuição ao emprego de extensômetros elétricos de resistência no estudo de estruturas", Tese de Doutorado, EESC-USP, São Paulo, 1961.

19. MARTINELLI, D.A.O., SAVASSI, W. e RIBEIRO LIMA, R.L. - "Estudo experimental do pilar t pico do vertedouro da barragem de Jaguara", Rel. 6/67, LE-EESC-USP, São Carlos/SP, 1967.
20. MARTINELLI, D.A.O., SAVASSI, W. e RIBEIRO LIMA, R.L. - "Estudo experimental do pilar t pico do vertedouro da barragem de Ilha Solteira", Rel. 62/69, LE-EESC, São Carlos/SP, 1969.
21. MONTANARI, I. - "Carga de ruptura em tabuleiro de pontes", Tese de Doutorado, EESC-USP, São Carlos/SP, 1969.
22. MORLEY, C.T. - "Yield-line theory for reinforced concrete slabs at moderately large deflections", Magazine of Concrete Research, vol.=9, n.61, XII/1967, p.211/221.
23. MOY, S.S.J. e MAYFIELD, B. - "Load-deflection characteristics of rectangular reinforced concrete slabs", Magazine of Concrete Research, vol.24, n.81, XII/1972, p.209/218.
24. PARK, R. - "Tensile membrane behaviour of uniformly loaded rectangular reinforced concrete slabs with fully restrained edges", Magazine of Concrete Research, vol.16, n.46, III/1964, p.39/44.
25. PARK, R. - "Ultimate strength of rectangular concrete slabs under short-term uniform loading with edges restrained against lateral movement", Proceedings of Institution of Civil Engineers, vol.28, V/1964, p.125/150.
26. PARK, R. - "The ultimate strength and long-term behaviour of uniformly loaded two-way concrete slabs with partial lateral restraint at all edges",

- Magazine of Concrete Research, vol.16, n.48, IX/1964, p.139/152.
27. PARK, R. - "The lateral stiffness and strength required to ensure membrane action at the ultimate load of a reinforced concrete slab and beam floor", Magazine of Concrete Research, vol.17, n.50, III/1965.
  28. PARK, R. - "Membrane action at the ultimate load of laterally restrained concrete slabs", C.E.B., Bulletin d'Information, n.58, X/1966, p.
  29. POLILO, A. - "Sugestão para o cálculo, pelo método de ruptura, das lajes retangulares de pontes, apoiadas nos quatro lados", Escola Nacional de Engenharia, Rio de Janeiro, 1964.
  30. ROCHA, M. - "Dimensionamento experimental das construções", Mem. n.21, LNEC, Lisboa, 1952.
  31. SAVE, M.A. e MASSONNET, C.E. - "Plastic analysis and design of plates and shells", North-Holland Publishing Company, London, 1972.
  32. SAWCZUK, A. e WINNICKI, L. - "Plastic behaviour of simply supported concrete plates at moderately large deflections", Structural Research Series, n.265, University of Illinois, 1963, p.97/111.
  33. SZILARD, R. - "Theory and analysis of plates", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974, p.571/612.
  34. TAYLOR, R. - "A note on a possible basis for a new method of ultimate load design of reinforced concrete slabs", Magazine of Concrete Research, vol.17, n.53, XII/1965, p.183/186.

35. TIMOSHENKO, S. e GOODIER, J.N. - "Theory of elasticity", 2<sup>a</sup> Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1951, p.506.
36. WOOD, R.H. - "Plastic and elastic design of slabs and plates", Thames and Hudson, London, 1961.
37. ZAGOTTIS, D.L. - "Charneiras plásticas, configurações de ruptura com superfície cônicas", EPUSP, São Paulo, 1967.
38. ZAGOTTIS, D.L. - "Charneiras plásticas, configurações de ruína com superfícies regradadas de característica retilínea", EPUSP, São Paulo, 1968.

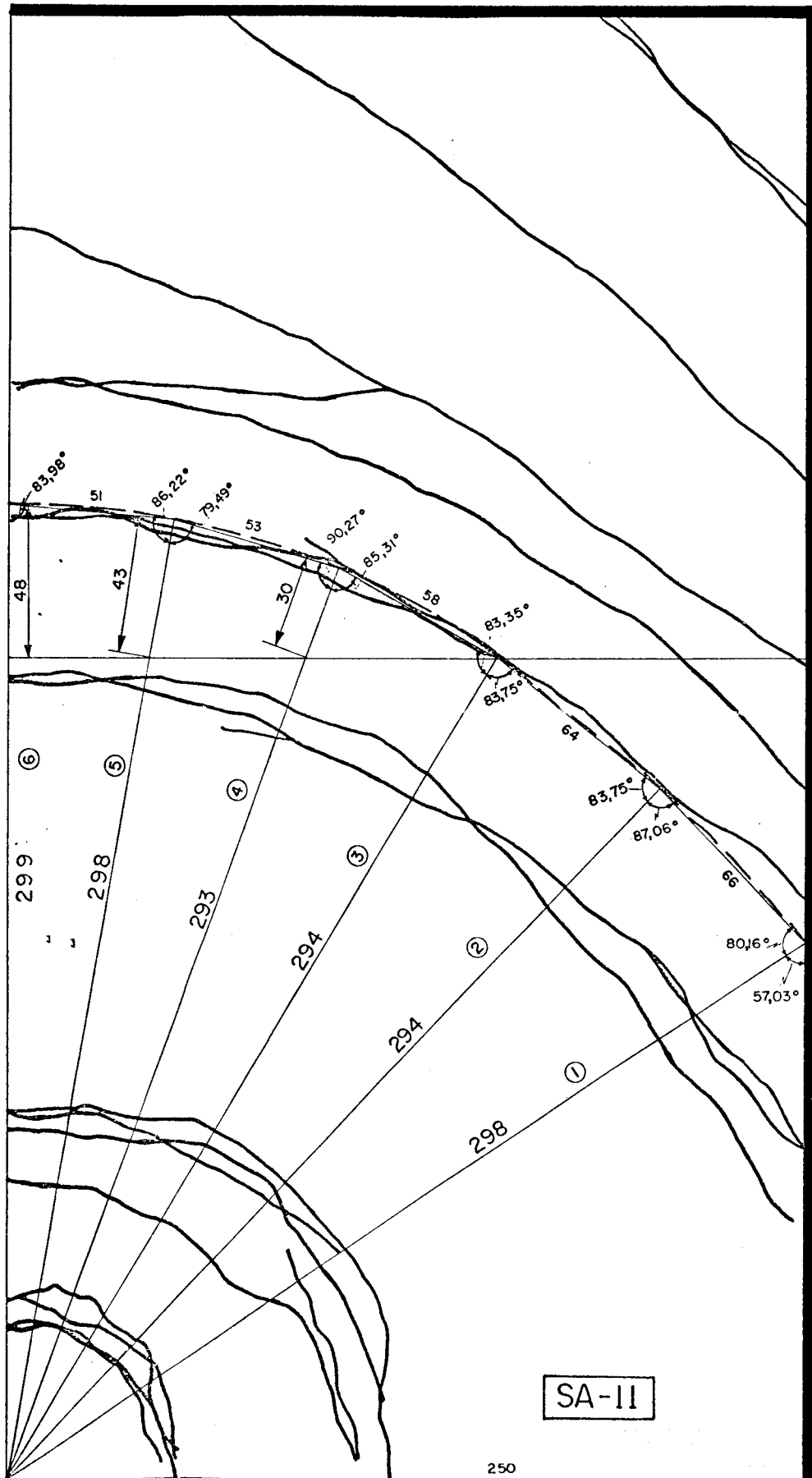


Fig. A-1 - Configuração de ruína simplificada

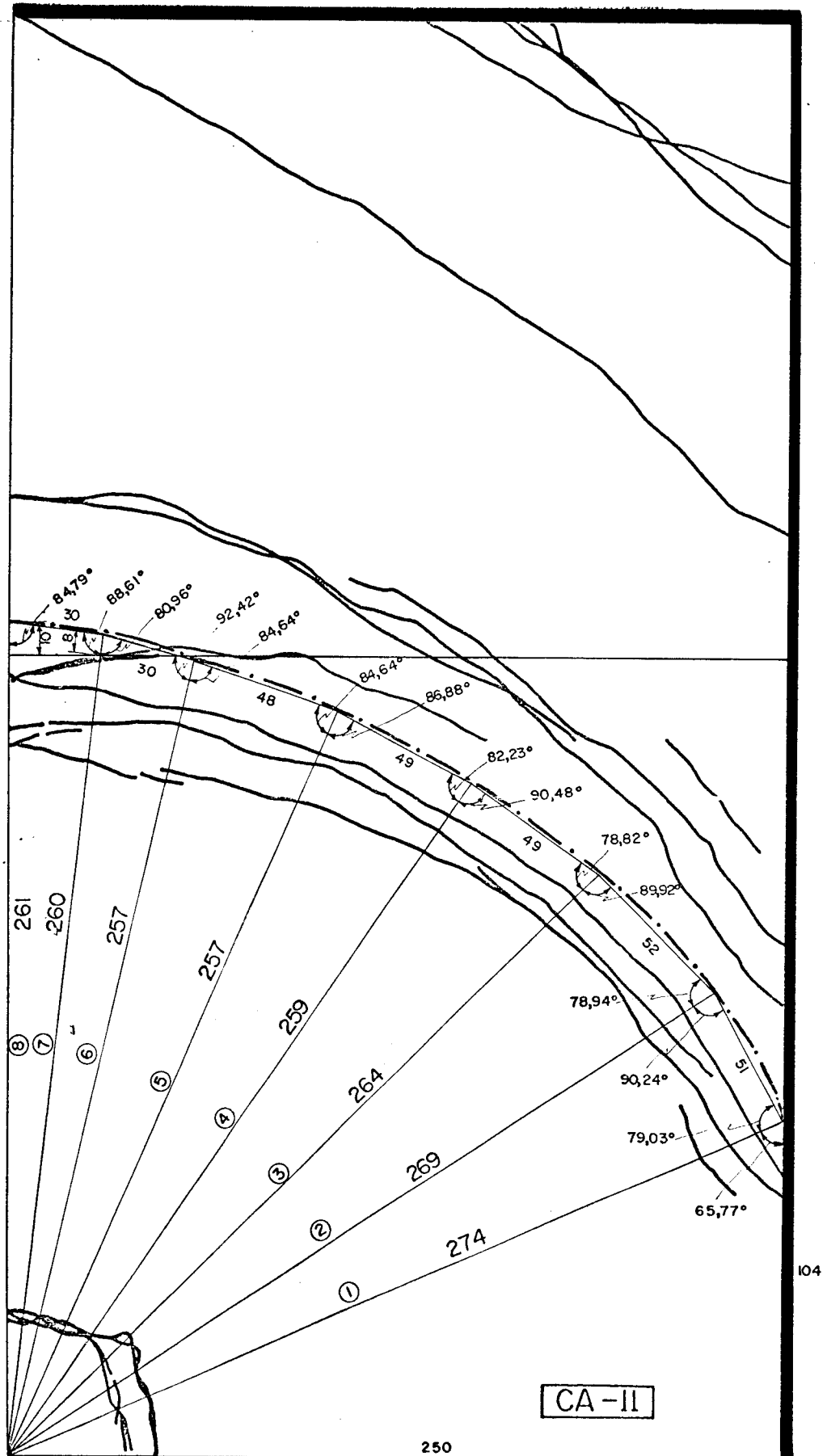


Fig. A-2 - Configuração de ruína simplificada



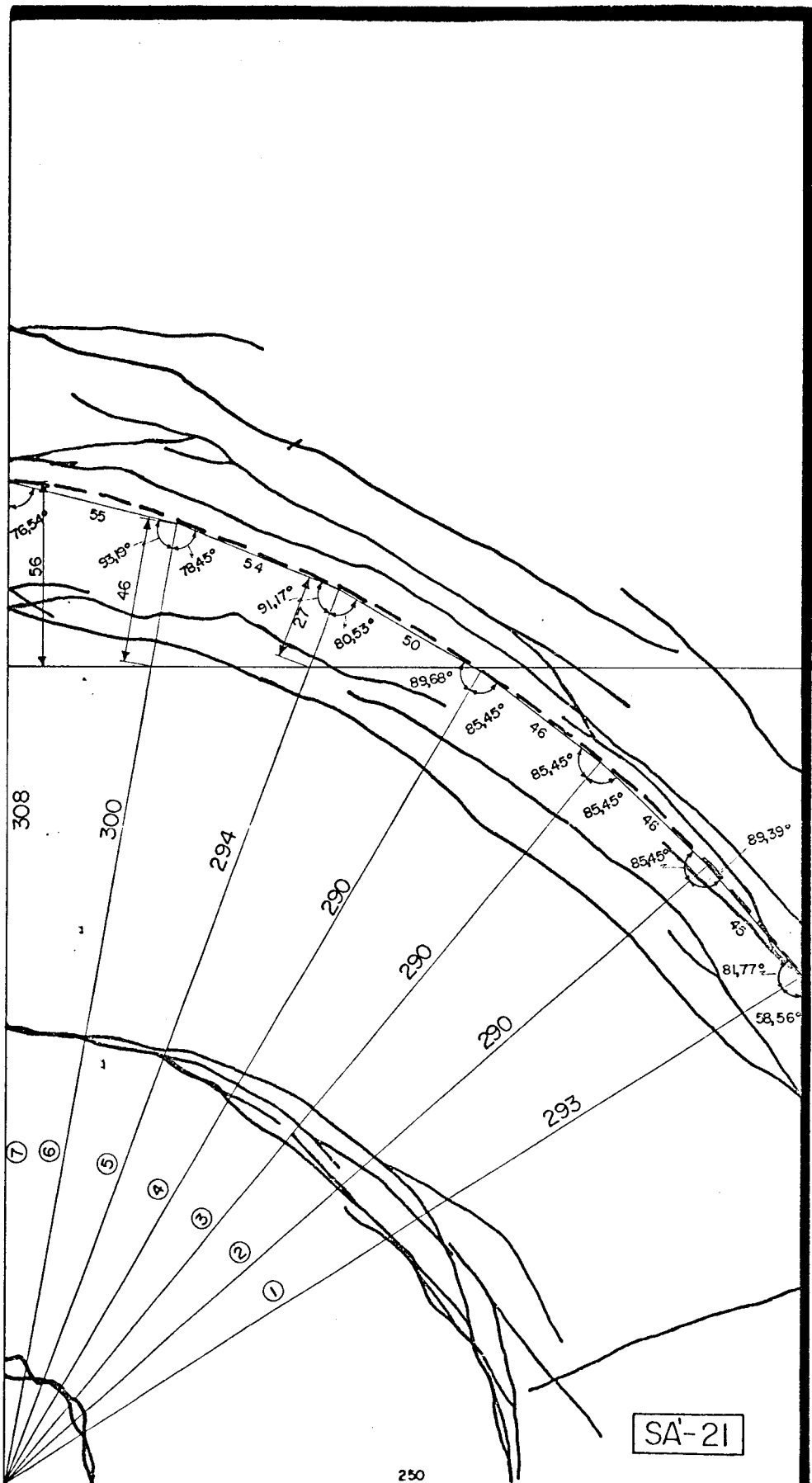


Fig. A-3 - Configuração de ruína simplificada

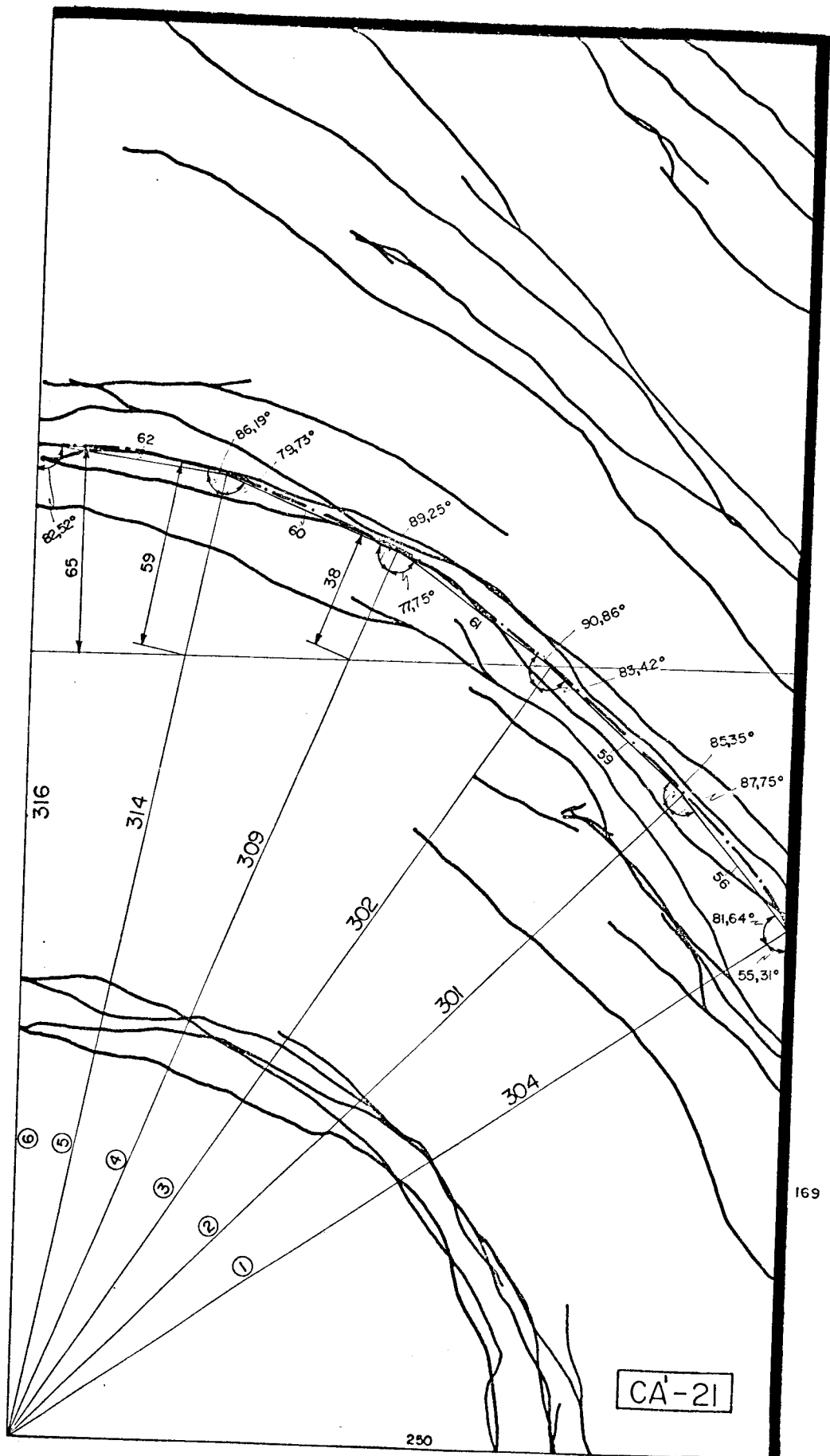


Fig. A-4 - Configuração de ruína simplificada

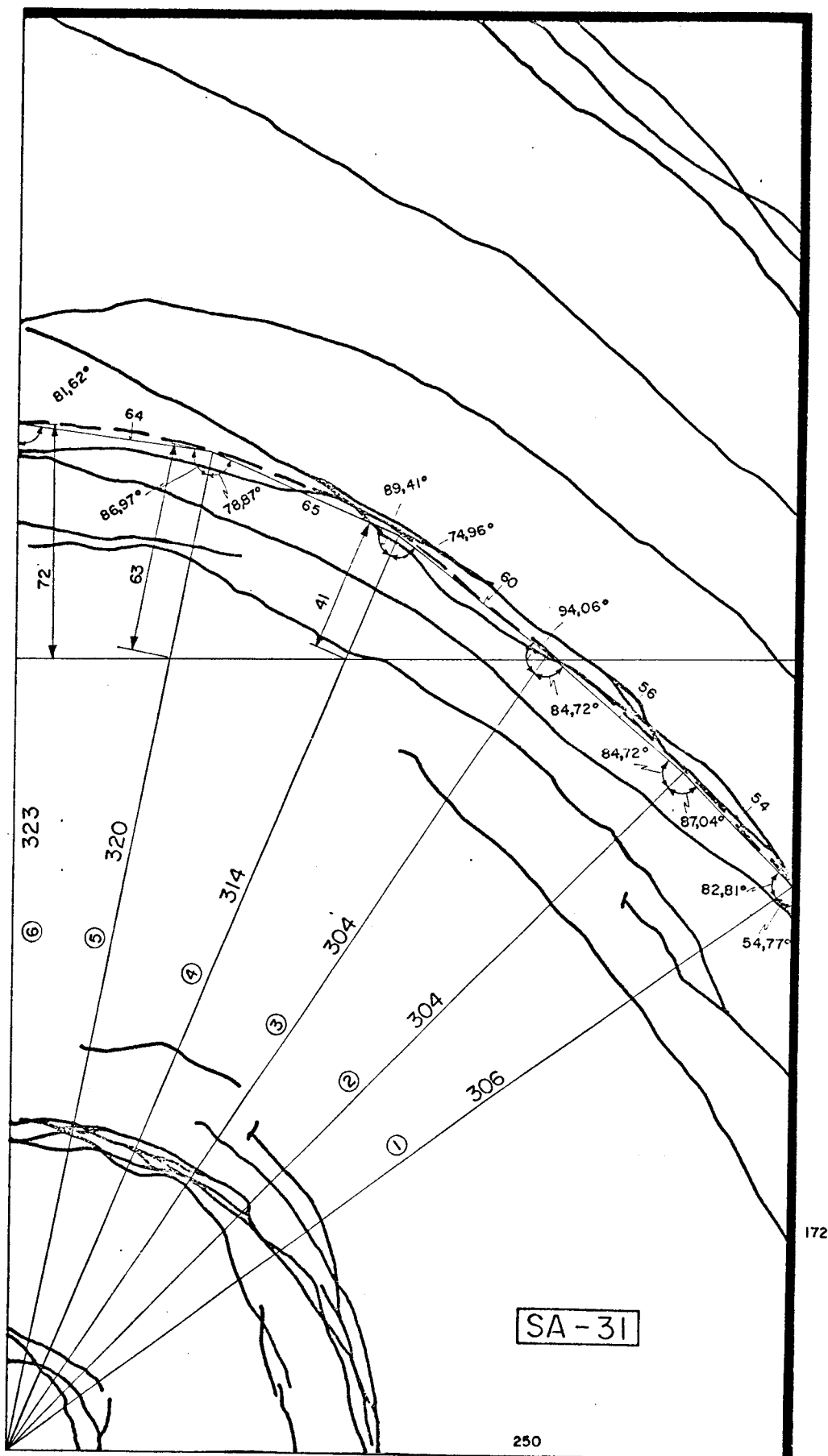


Fig. A-5 - Configuração de ruína simplificada

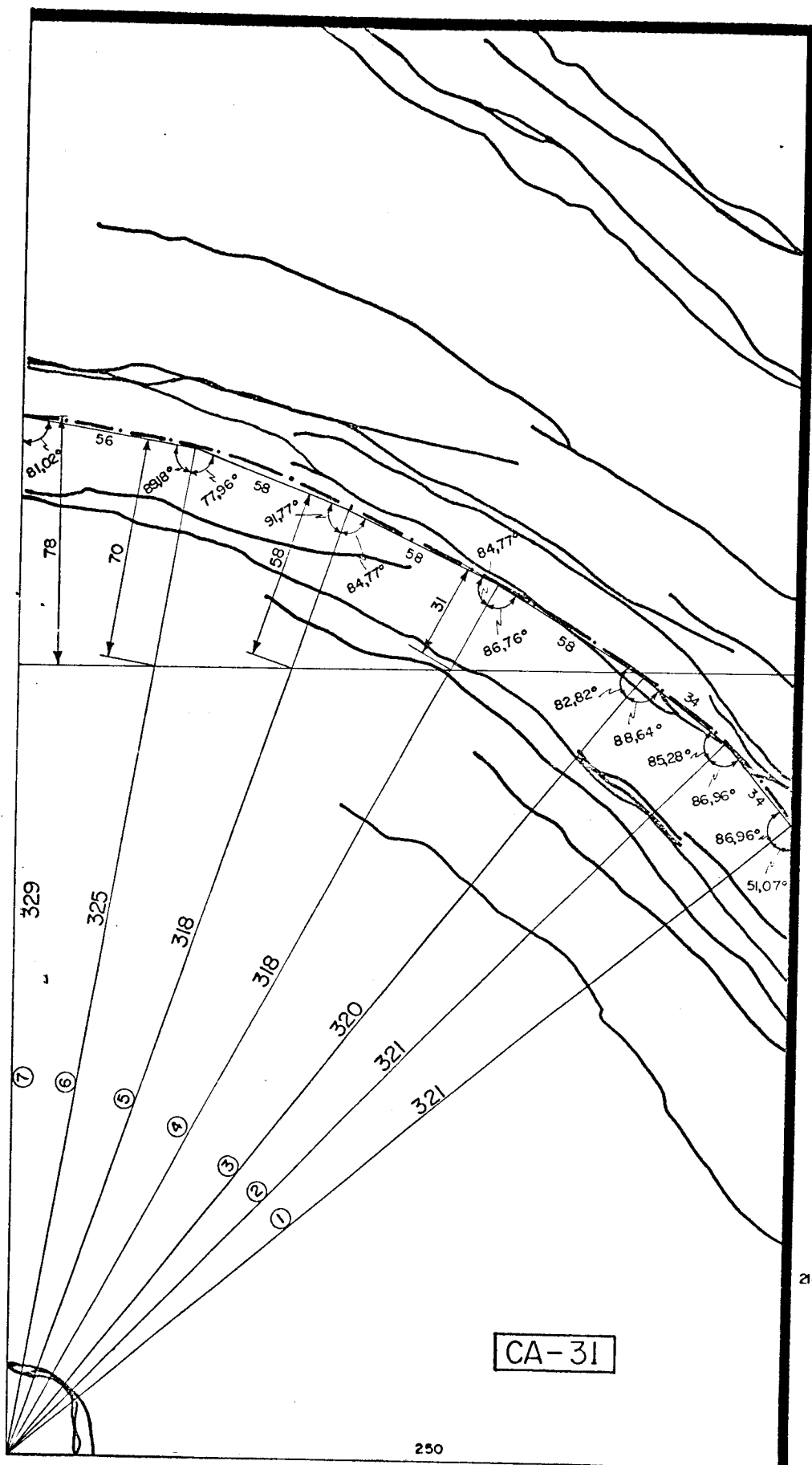


Fig. A-6 - Configuração de ruína simplificada



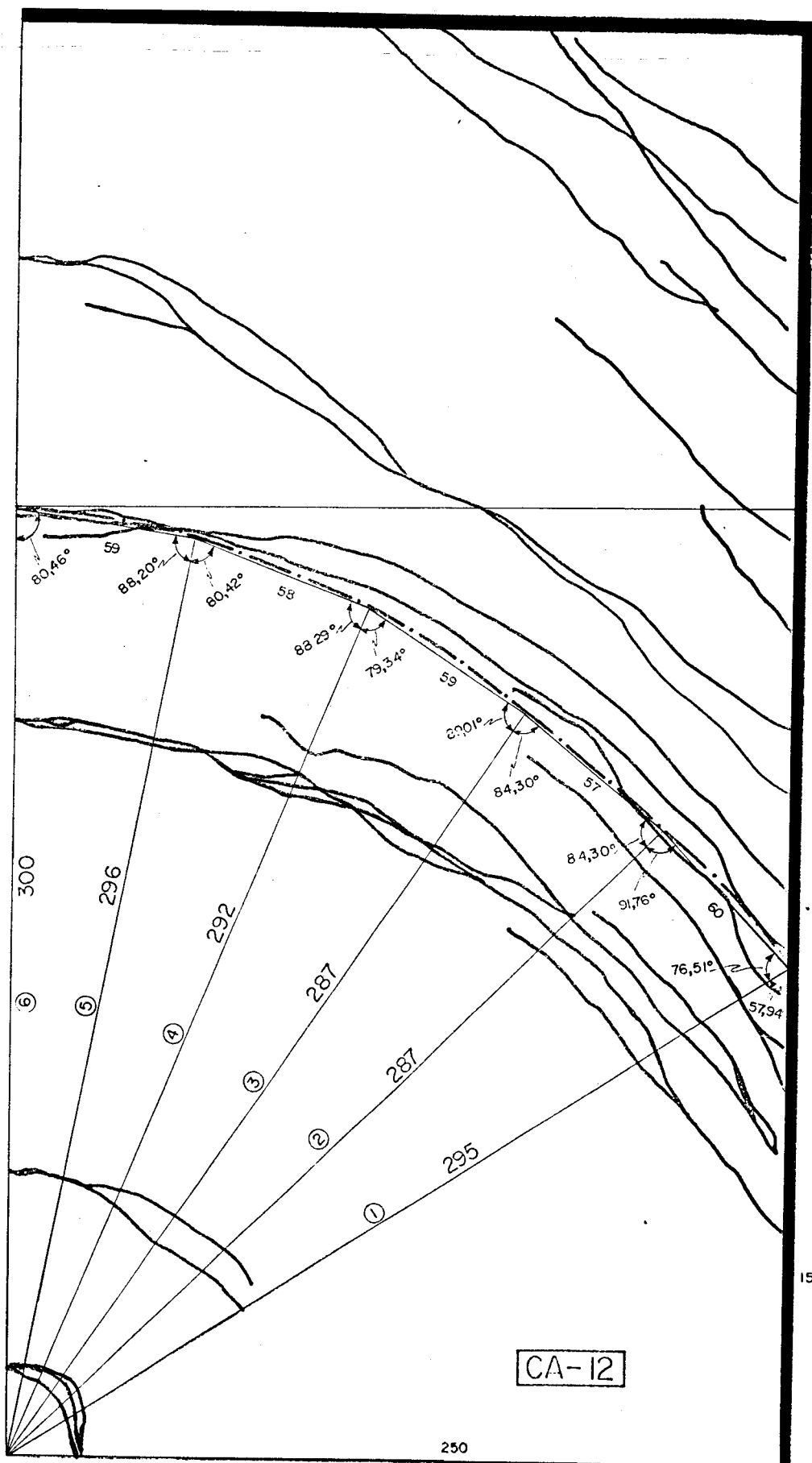


Fig. A-8 - Configuração de ruína simplificada

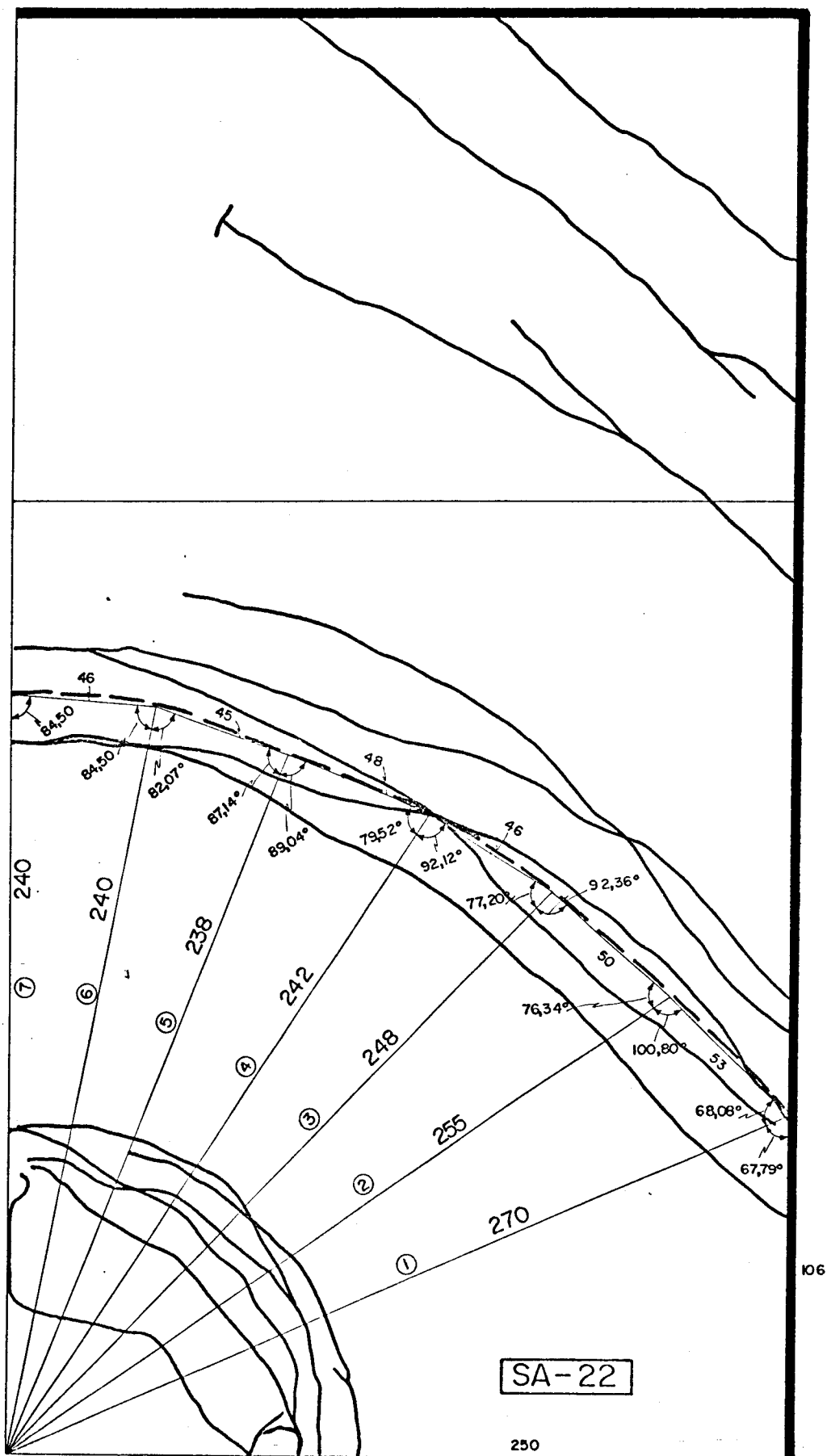


Fig. A-9 - Configuração de ruína simplificada

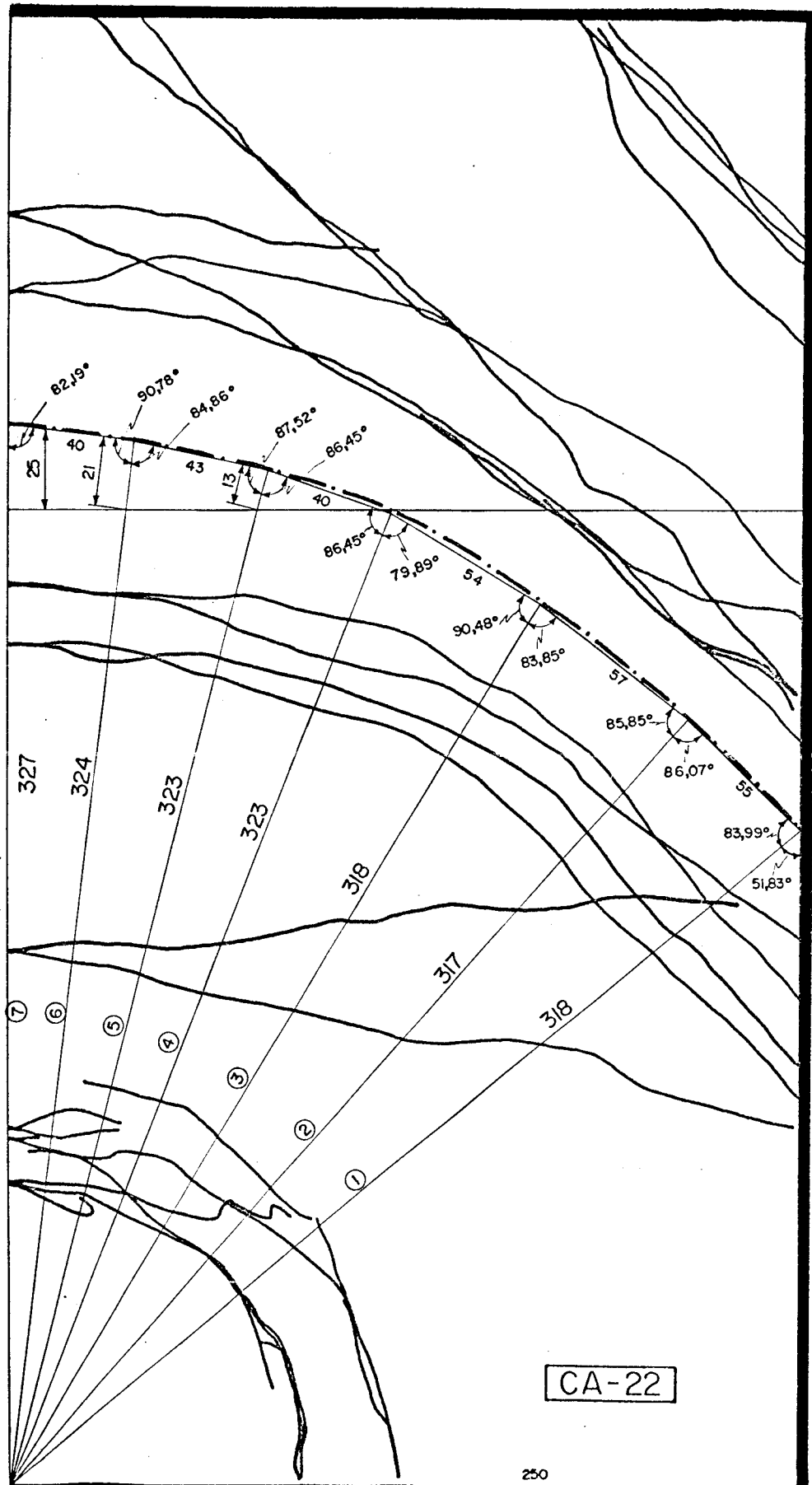
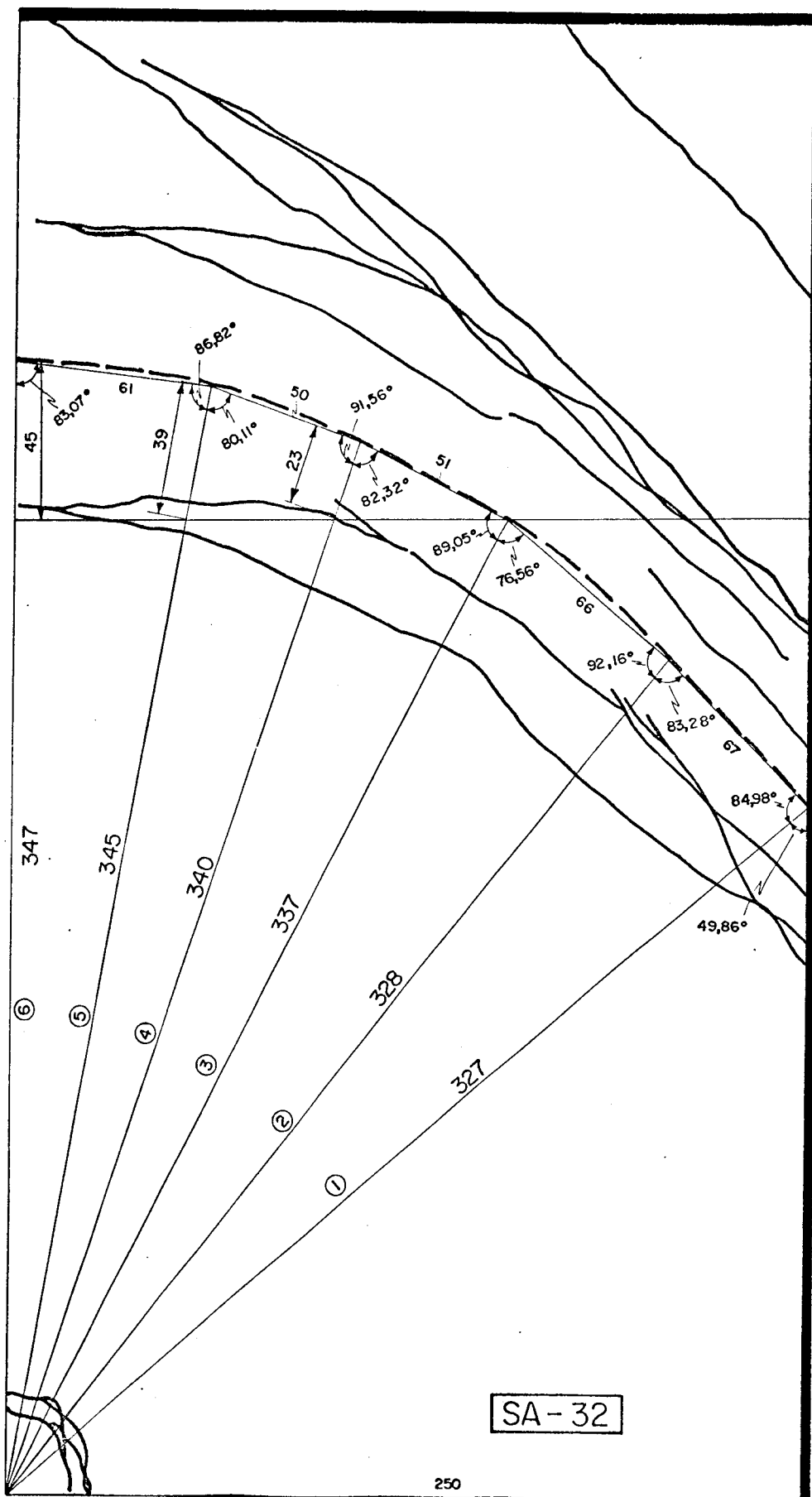


Fig. A-10 - Configuração de ruína simplificada





214

Fig. A-11 - Configuração de ruína simplificada

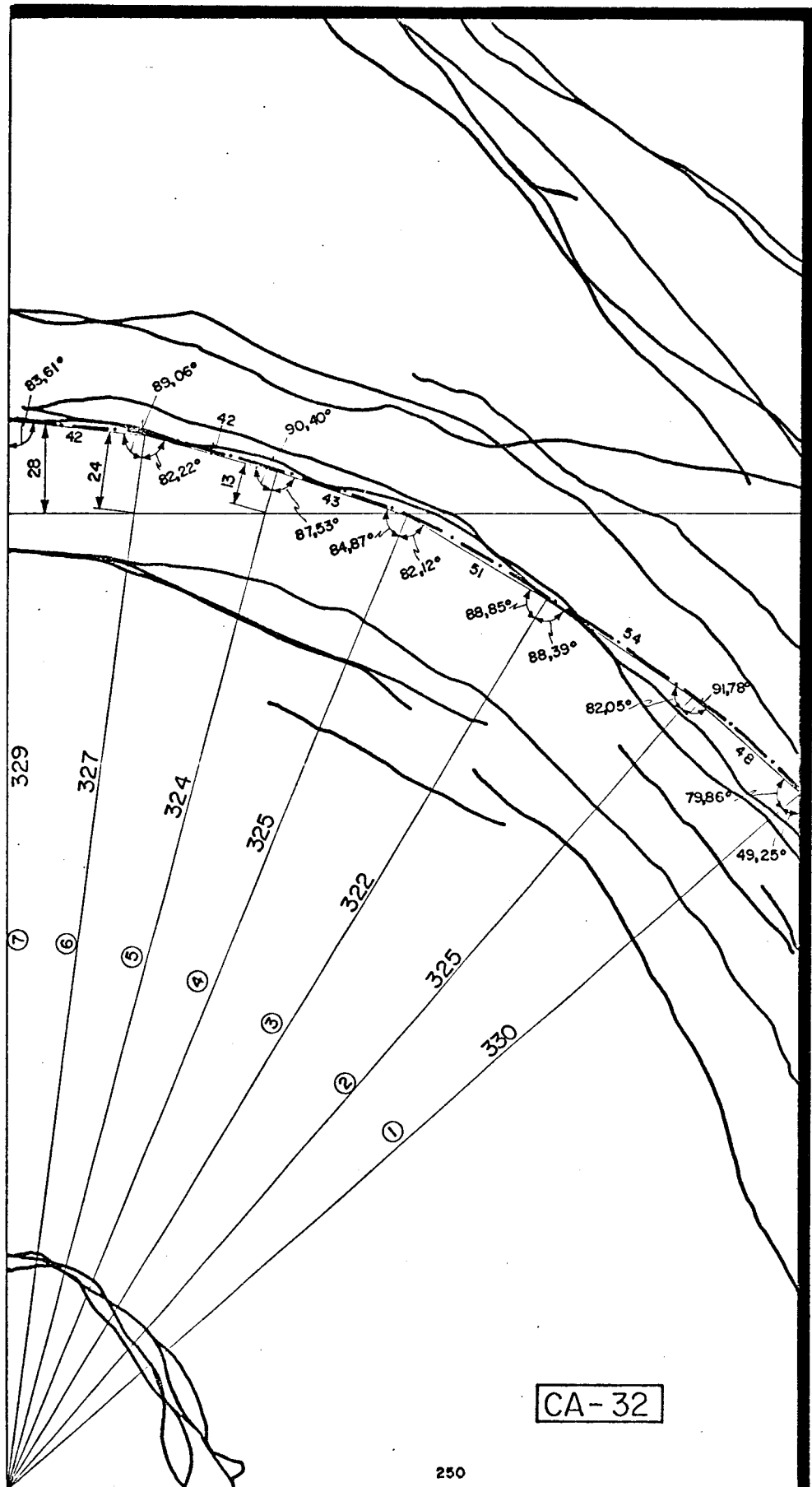


Fig. A-12 - Configuração de ruína simplificada

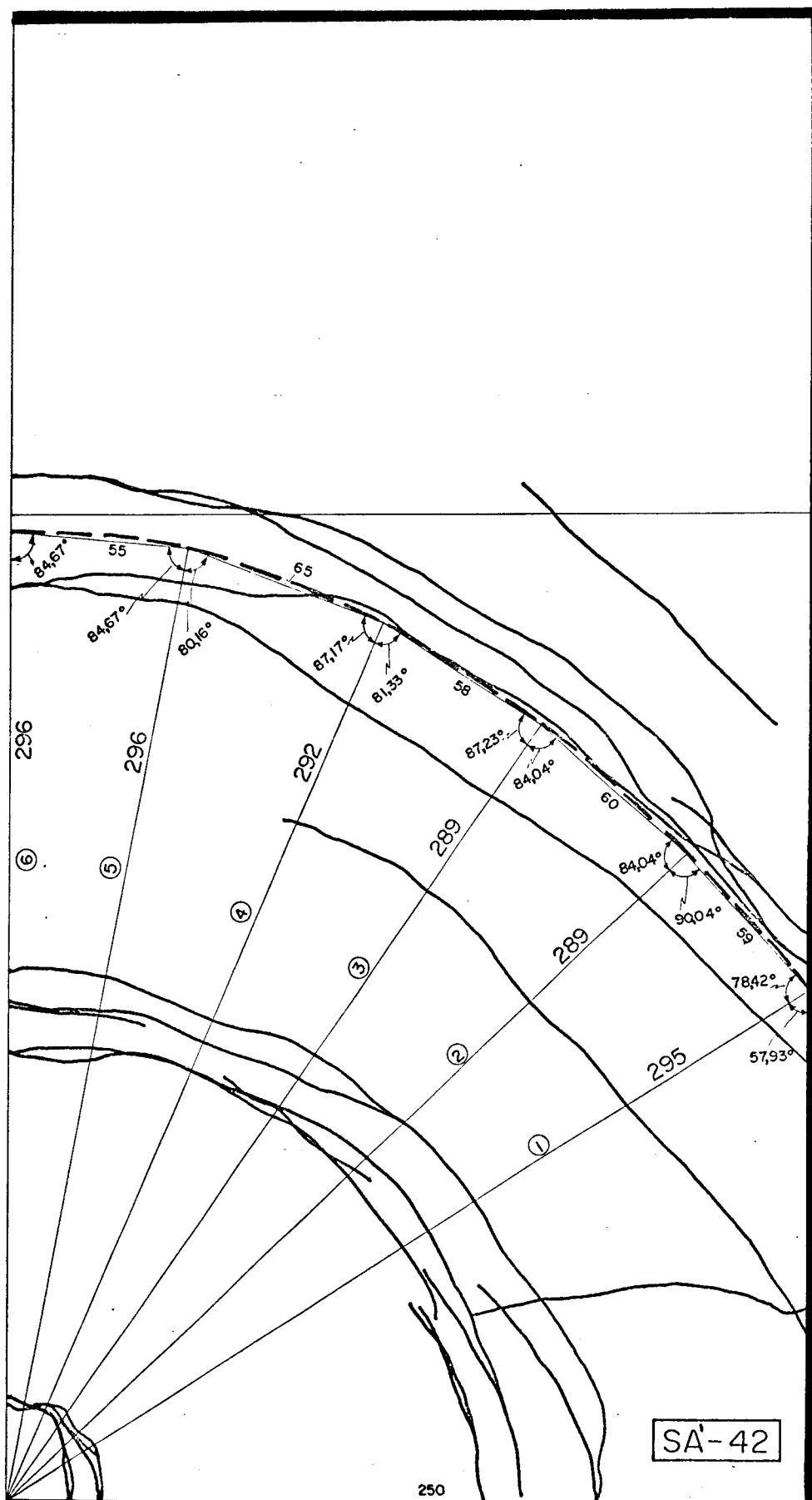


Fig. A-13 - Configuração de ruína simplificada

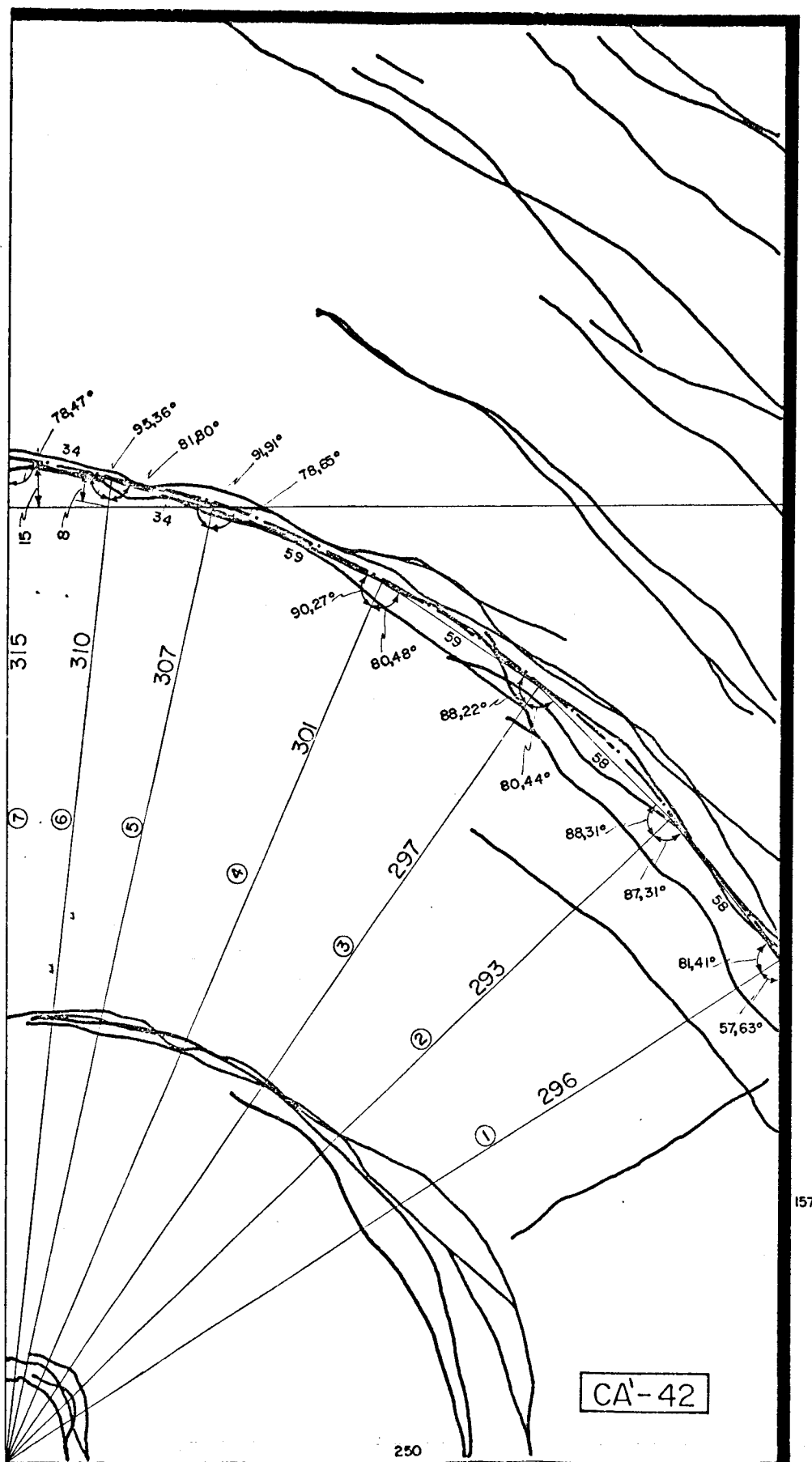


Fig. A-14 - Configuração de ruína simplificada

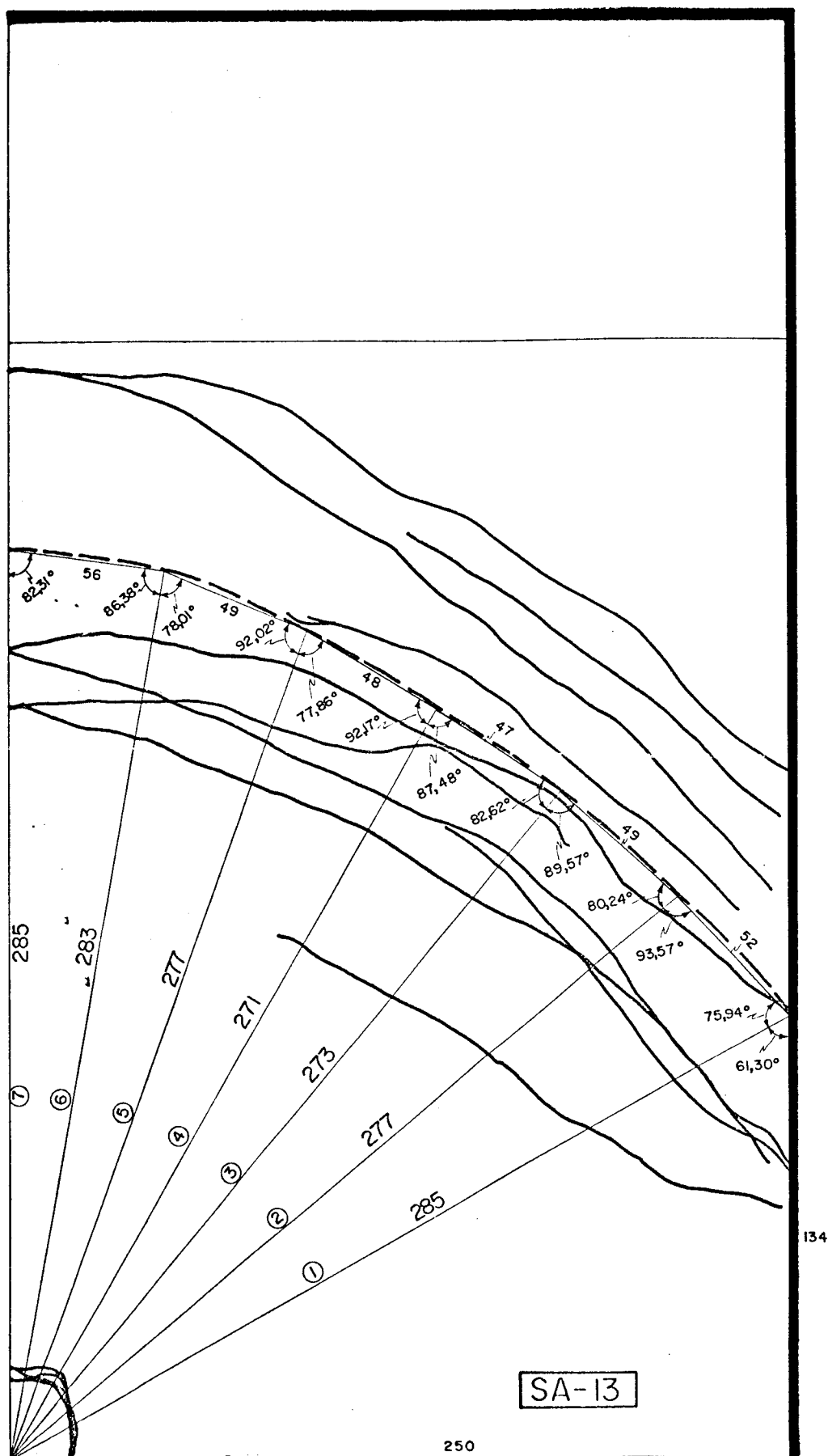


Fig. A-15 - Configuração de ruína simplificada

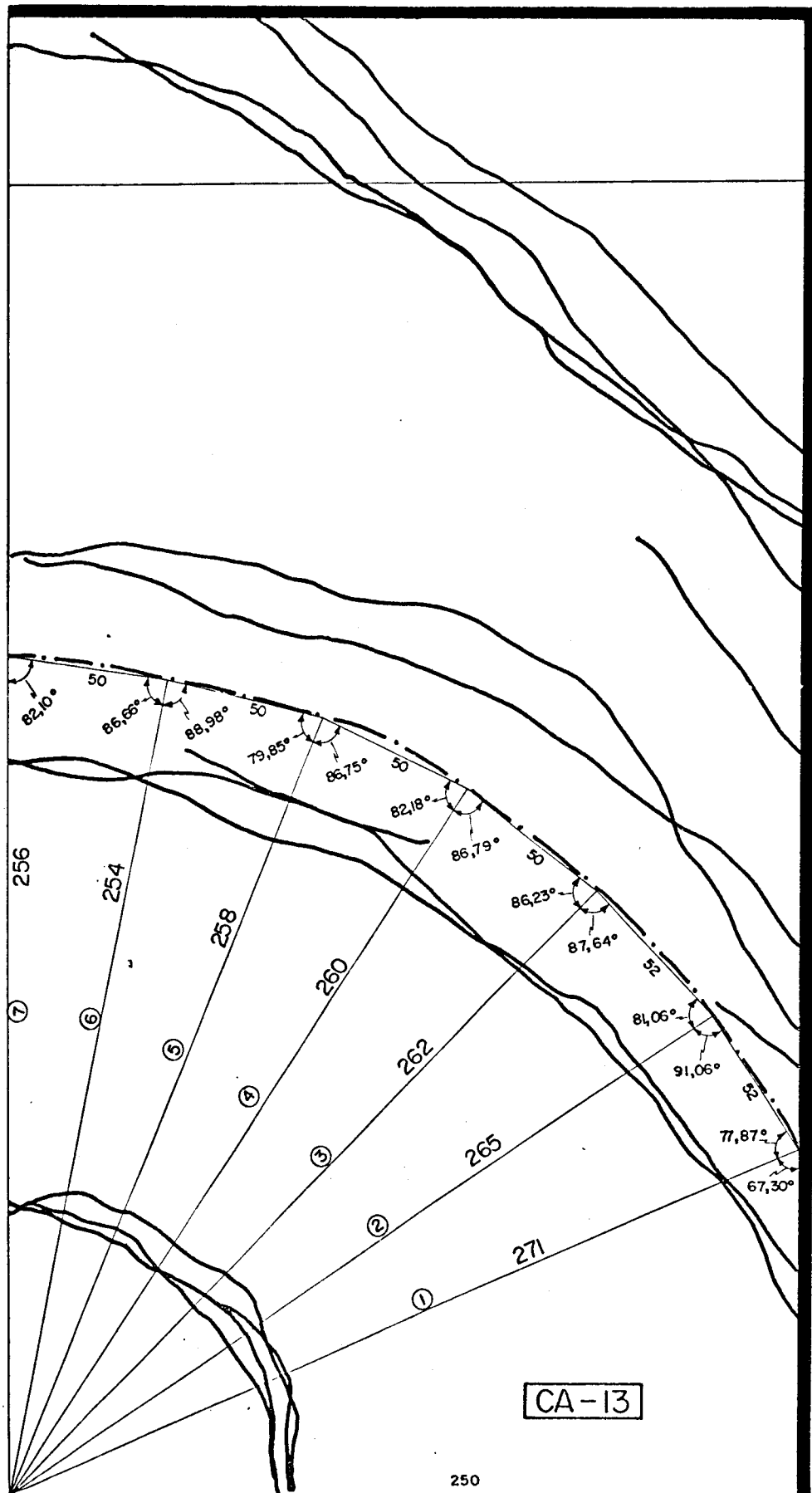


Fig. A-16 - Configuração de ruína simplificada

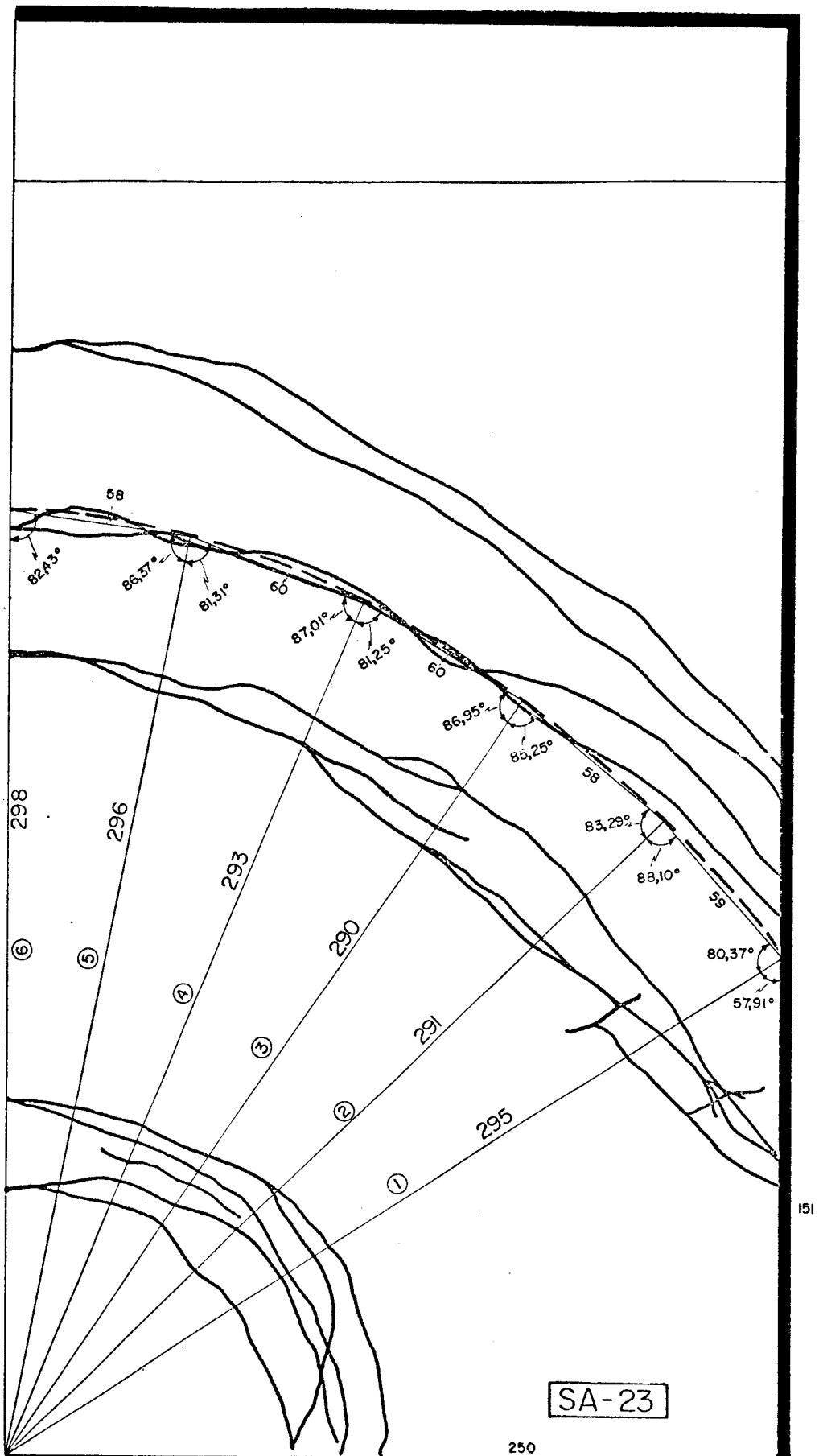


Fig. A-17 - Configuração de ruína simplificada

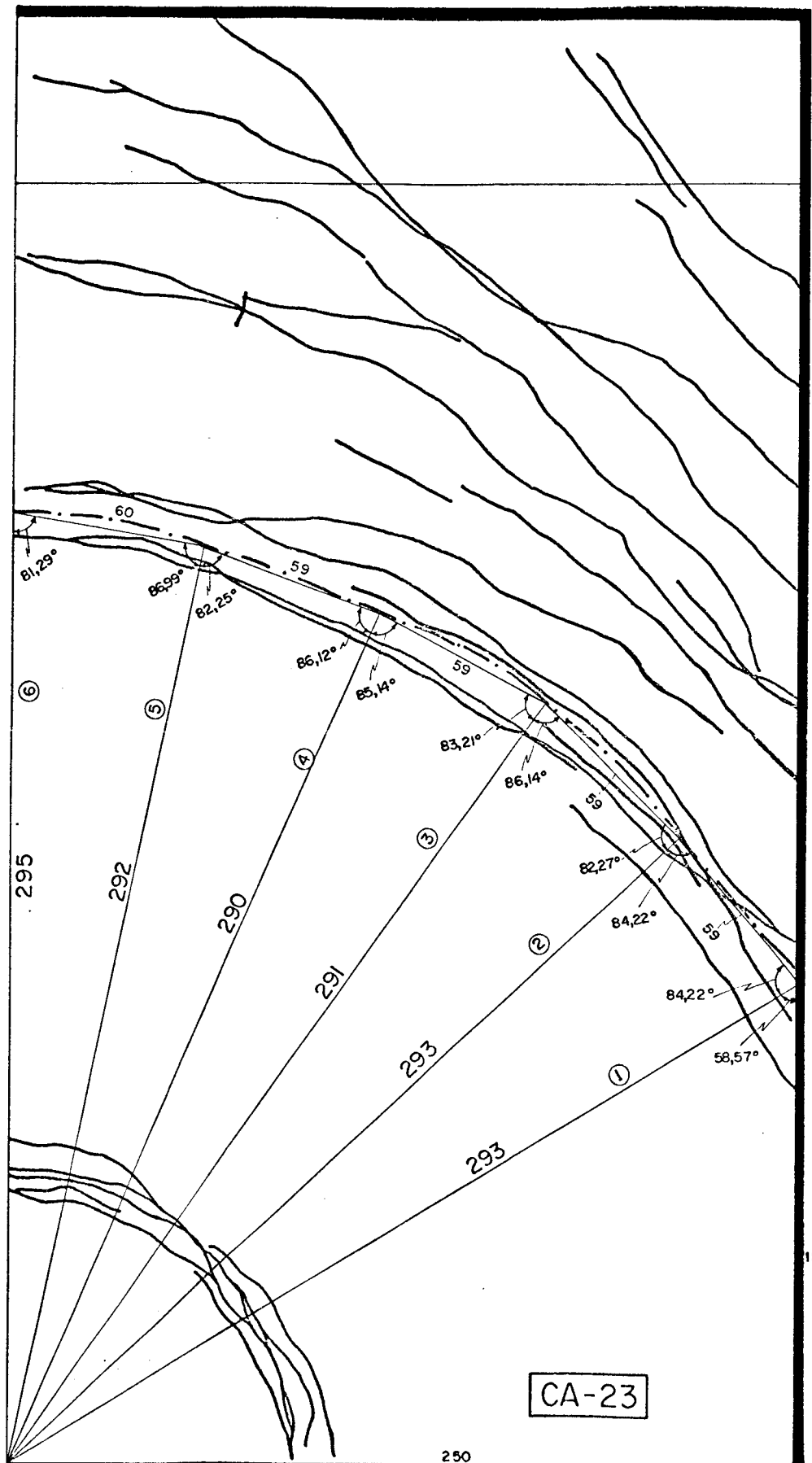
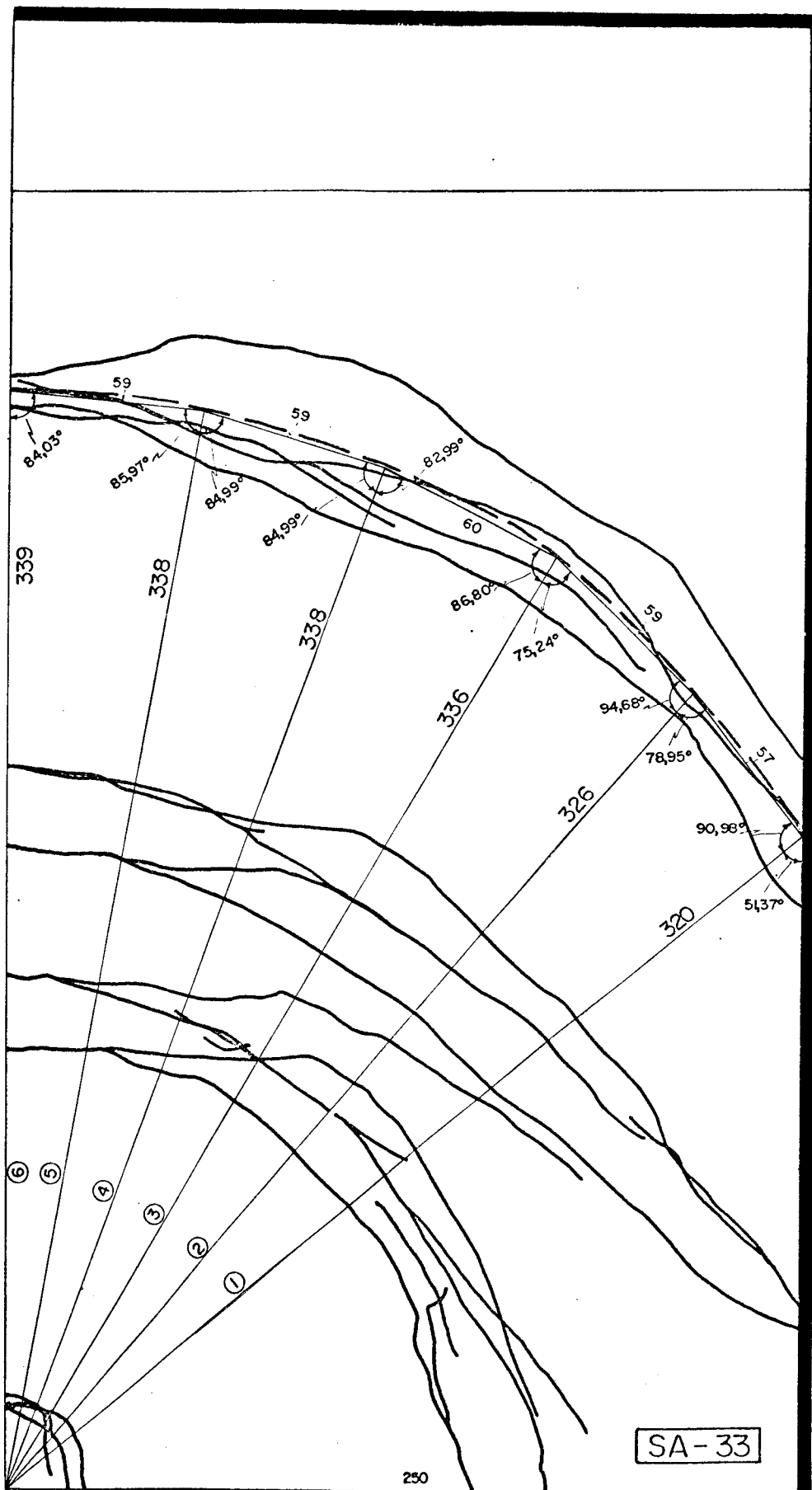


Fig. A-18 - Configuração de ruína simplificada





203

Fig. A-19 - Configuração de ruína simplificada

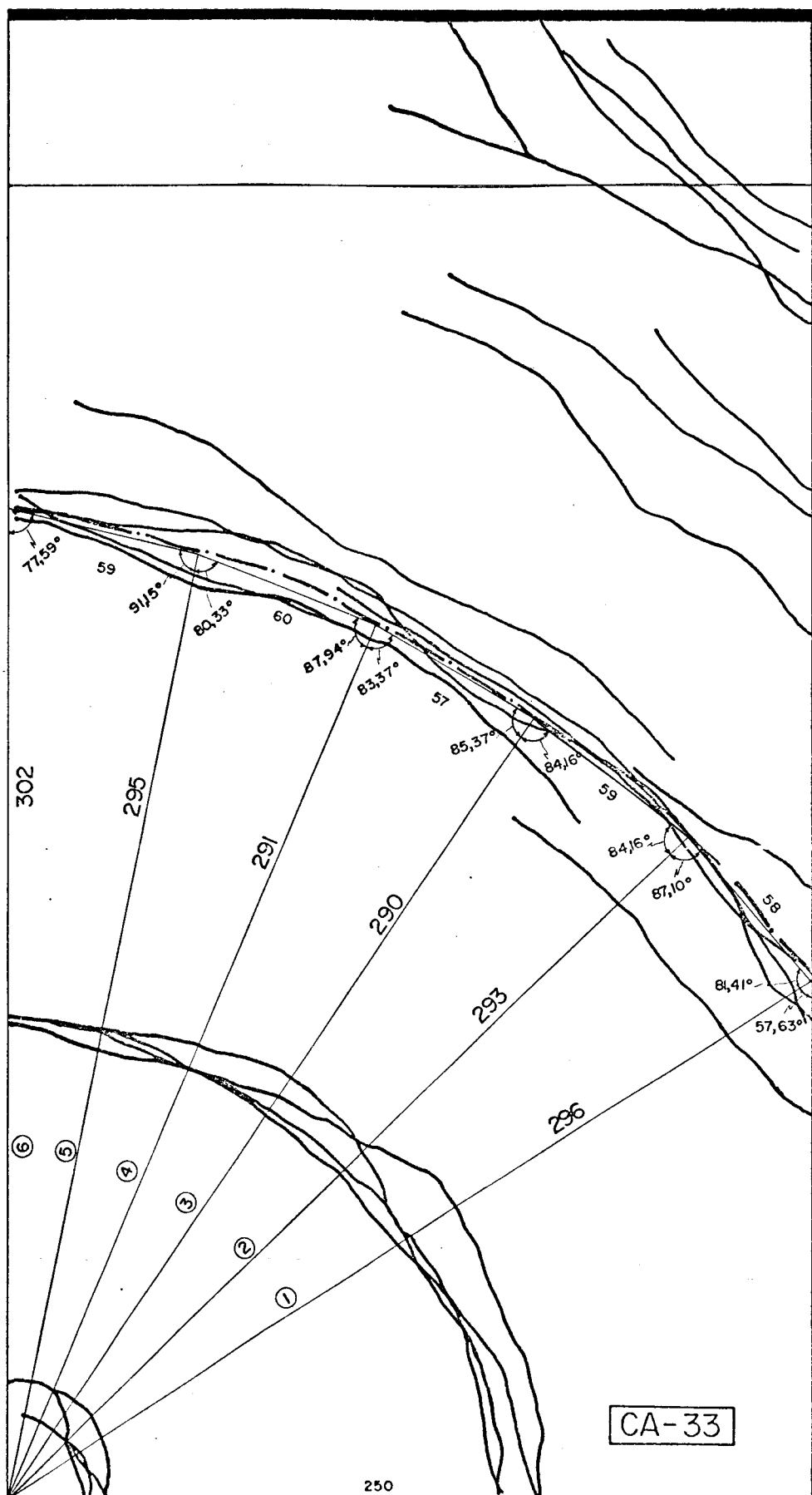


Fig. A-20 - Configuração de ruína simplificada

Tabela A.1 - Valores de P' (lajes SA - Grupo 1)

| LAJE   | m     | r    | i | $\ell_{1,i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|-------|------|---|----------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| SA-11  | 147,2 | 0,53 | 1 | 0                    | 29,8          | 57,03             | 80,16            | 951         |
|        |       |      | 2 | 0                    | 29,4          | 87,06             | 83,75            |             |
|        |       |      | 3 | 0                    | 29,4          | 83,75             | 83,35            |             |
|        |       |      | 4 | 3,0                  | 29,3          | 85,31             | 90,27            |             |
|        |       |      | 5 | 4,3                  | 29,8          | 79,49             | 86,22            |             |
|        |       |      | 6 | 4,8                  | 29,9          | 83,98             | 83,98            |             |
| SA'-21 | 147,2 | 0,53 | 1 | 0                    | 29,3          | 58,56             | 81,77            | 935         |
|        |       |      | 2 | 0                    | 29,0          | 89,39             | 85,45            |             |
|        |       |      | 3 | 0                    | 29,0          | 85,45             | 85,45            |             |
|        |       |      | 4 | 0                    | 29,0          | 85,45             | 89,68            |             |
|        |       |      | 5 | 2,7                  | 29,4          | 80,53             | 91,17            |             |
|        |       |      | 6 | 4,6                  | 30,0          | 78,46             | 93,19            |             |
|        |       |      | 7 | 5,6                  | 30,8          | 76,54             | 76,54            |             |
| SA-31  | 146,4 | 0,53 | 1 | 0                    | 30,6          | 54,77             | 82,81            | 945         |
|        |       |      | 2 | 0                    | 30,4          | 87,04             | 84,72            |             |
|        |       |      | 3 | 0                    | 30,4          | 84,72             | 94,06            |             |
|        |       |      | 4 | 4,1                  | 31,4          | 79,96             | 84,41            |             |
|        |       |      | 5 | 6,3                  | 32,0          | 78,87             | 86,97            |             |
|        |       |      | 6 | 7,2                  | 32,3          | 81,62             | 81,62            |             |

$$P'_{med} = 944$$

Observações: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10)

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.2 - Valores de P' (Lajes SA - Grupo 2)

| LAJE   | m     | r    | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| SA-12  | 142,7 | 0,53 | 1 | 0                 | 28,2          | 62,42             | 82,56            | 916         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 28,0          | 87,04             | 87,18            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 28,2          | 82,62             | 86,07            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 28,3          | 83,78             | 85,84            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 28,4          | 83,64             | 93,97            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 29,2          | 75,99             | 94,97            |             |
|        |       |      | 7 | 0                 | 30,1          | 75,12             | 75,12            |             |
| SA-22  | 146,7 | 0,53 | 1 | 0                 | 27,0          | 67,79             | 68,08            | 936         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 25,5          | 100,80            | 76,34            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 24,8          | 92,36             | 77,20            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 24,2          | 92,12             | 79,52            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 23,8          | 89,04             | 87,14            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 24,0          | 82,07             | 84,50            |             |
|        |       |      | 7 | 0                 | 24,0          | 84,50             | 84,50            |             |
| SA-32  | 145,9 | 0,53 | 1 | 0                 | 32,7          | 49,86             | 84,98            | 994         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 32,8          | 83,28             | 92,16            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 33,7          | 76,56             | 89,05            |             |
|        |       |      | 4 | 2,3               | 34,0          | 82,32             | 91,56            |             |
|        |       |      | 5 | 3,9               | 34,5          | 80,11             | 86,82            |             |
|        |       |      | 6 | 4,5               | 34,7          | 83,07             | 83,07            |             |
| SA'-42 | 148,5 | 0,52 | 1 | 0                 | 29,5          | 57,93             | 78,42            | 980         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 28,9          | 90,04             | 84,04            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 28,9          | 84,04             | 87,23            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 29,2          | 81,33             | 87,17            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 29,6          | 80,16             | 84,67            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 29,6          | 84,67             | 84,76            |             |

$$P'_{med} = 957$$

Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.3 - Valores de P' (Lajes SA - Grupo 3)

| LAJE  | m     | r    | i | $l_{1 \cdot i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|-------|-------|------|---|-------------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| SA-13 | 146,9 | 0,53 | 1 | 0                       | 28,5          | 61,30             | 75,94            | 944         |
|       |       |      | 2 | 0                       | 27,7          | 93,57             | 80,24            |             |
|       |       |      | 3 | 0                       | 27,3          | 89,57             | 82,62            |             |
|       |       |      | 4 | 0                       | 27,1          | 87,48             | 92,17            |             |
|       |       |      | 5 | 0                       | 27,7          | 77,86             | 92,02            |             |
|       |       |      | 6 | 0                       | 28,3          | 78,01             | 86,38            |             |
|       |       |      | 7 | 0                       | 28,5          | 82,31             | 82,31            |             |
| SA-23 | 146,9 | 0,53 | 1 | 0                       | 29,5          | 57,91             | 80,37            | 963         |
|       |       |      | 2 | 0                       | 29,1          | 88,10             | 83,29            |             |
|       |       |      | 3 | 0                       | 29,0          | 85,25             | 86,95            |             |
|       |       |      | 4 | 0                       | 29,3          | 81,25             | 87,01            |             |
|       |       |      | 5 | 0                       | 29,6          | 81,31             | 86,37            |             |
|       |       |      | 6 | 0                       | 29,8          | 82,43             | 82,43            |             |
| SA-33 | 146,0 | 0,53 | 1 | 0                       | 32,0          | 51,37             | 90,98            | 991         |
|       |       |      | 2 | 0                       | 32,6          | 78,95             | 94,68            |             |
|       |       |      | 3 | 0                       | 33,6          | 75,24             | 86,80            |             |
|       |       |      | 4 | 0                       | 33,8          | 82,49             | 84,99            |             |
|       |       |      | 5 | 0                       | 33,8          | 84,99             | 85,97            |             |
|       |       |      | 6 | 0                       | 33,9          | 84,03             | 84,03            |             |

$$P'_{med} = 966$$

Observações: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.4 - Valores de P' (Lajes CA - Grupo 1)

| LAJE   | m     | r    | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| CA-11  | 147,2 | 0,53 | 1 | 0                 | 27,4          | 65,77             | 79,03            | 961         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 26,9          | 90,24             | 78,94            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 26,9          | 89,92             | 78,82            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 25,9          | 90,48             | 82,23            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 25,7          | 86,88             | 84,64            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 25,7          | 84,64             | 92,42            |             |
|        |       |      | 7 | 0,8               | 26,0          | 80,96             | 88,61            |             |
|        |       |      | 8 | 1,0               | 26,1          | 84,79             | 84,79            |             |
| CA'-21 | 147,2 | 0,53 | 1 | 0                 | 30,4          | 55,31             | 81,64            | 923         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 30,1          | 87,75             | 85,35            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 30,2          | 83,42             | 90,86            |             |
|        |       |      | 4 | 3,8               | 30,9          | 77,75             | 89,25            |             |
|        |       |      | 5 | 5,9               | 31,4          | 79,73             | 86,19            |             |
|        |       |      | 6 | 6,5               | 31,6          | 82,52             | 82,52            |             |
| CA-31  | 146,4 | 0,53 | 1 | 0                 | 32,1          | 51,07             | 86,96            | 989         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 32,1          | 86,96             | 85,28            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 32,0          | 88,64             | 82,82            |             |
|        |       |      | 4 | 3,1               | 31,8          | 86,76             | 84,77            |             |
|        |       |      | 5 | 5,8               | 31,8          | 84,77             | 91,77            |             |
|        |       |      | 6 | 7,0               | 32,5          | 77,96             | 89,18            |             |
|        |       |      | 7 | 7,8               | 32,9          | 81,02             | 81,02            |             |

$$P'_{med} = 958$$

Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.5 - Valores de P' (Lajes CA - Grupo 2)

| LAJE   | m     | r    | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| CA-12  | 142,7 | 0,53 | 1 | 0                 | 29,5          | 57,94             | 76,51            | 935         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 28,7          | 91,76             | 84,30            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 28,7          | 84,30             | 89,01            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 29,2          | 79,34             | 88,29            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 29,6          | 80,42             | 88,20            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 30,0          | 80,46             | 80,46            |             |
| CA-22  | 146,7 | 0,53 | 1 | 0                 | 31,8          | 51,83             | 83,99            | 987         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 31,7          | 86,07             | 85,85            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 31,8          | 83,85             | 90,48            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 32,3          | 79,89             | 86,45            |             |
|        |       |      | 5 | 1,3               | 32,3          | 86,45             | 87,52            |             |
|        |       |      | 6 | 2,1               | 32,4          | 84,86             | 90,78            |             |
|        |       |      | 7 | 2,5               | 32,7          | 82,19             | 82,19            |             |
| CA-32  | 145,9 | 0,53 | 1 | 0                 | 33,0          | 49,25             | 79,86            | 1002        |
|        |       |      | 2 | 0                 | 32,5          | 91,78             | 82,05            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 32,2          | 88,39             | 88,85            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 32,5          | 82,12             | 84,87            |             |
|        |       |      | 5 | 1,3               | 32,4          | 87,53             | 90,40            |             |
|        |       |      | 6 | 2,4               | 32,7          | 82,22             | 89,06            |             |
|        |       |      | 7 | 2,8               | 32,9          | 83,61             | 83,61            |             |
| CA'-42 | 148,5 | 0,52 | 1 | 0                 | 29,6          | 57,63             | 81,41            | 974         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 29,3          | 87,31             | 88,31            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 29,7          | 80,44             | 88,22            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 30,1          | 80,48             | 90,27            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 30,7          | 78,65             | 91,91            |             |
|        |       |      | 6 | 0,8               | 31,0          | 81,80             | 95,36            |             |
|        |       |      | 7 | 1,5               | 31,5          | 78,47             | 78,47            |             |

$$P'_{med} = 975$$

Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20)

Tabela A.6 - Valores de P' (Lajes CA - Grupo 3)

| LAJE  | m     | r    | i | $l_{1,j}$<br>(cm) | $L_j$<br>(cm) | $\alpha_j$<br>(o) | $\beta_j$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|-------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| CA-13 | 146,9 | 0,53 | 1 | 0                 | 27,1          | 67,30             | 77,87            | 896         |
|       |       |      | 2 | 0                 | 26,5          | 91,06             | 81,06            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 26,2          | 87,64             | 86,23            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 26,0          | 86,79             | 82,12            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 25,8          | 86,75             | 79,85            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 25,4          | 88,98             | 86,66            |             |
|       |       |      | 7 | 0                 | 25,6          | 82,10             | 82,10            |             |
| CA-23 | 146,9 | 0,53 | 1 | 0                 | 29,3          | 58,57             | 84,22            | 952         |
|       |       |      | 2 | 0                 | 29,3          | 84,22             | 82,27            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 29,1          | 86,14             | 83,21            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 29,0          | 85,14             | 86,12            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 29,2          | 82,25             | 86,99            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 29,5          | 81,29             | 81,29            |             |
| CA-33 | 146,0 | 0,53 | 1 | 0                 | 29,6          | 57,63             | 81,41            | 960         |
|       |       |      | 2 | 0                 | 29,3          | 87,10             | 84,16            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 29,0          | 84,16             | 85,37            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 29,1          | 83,37             | 87,94            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 29,5          | 80,33             | 91,15            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 30,2          | 77,59             | 77,59            |             |

$$P'_{med} = 936$$

Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).

2) Os valores de  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).



Tabela A.7 - Valores de P' (Lajes SA - Grupo 2)

| LAJE   | m     | r    | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| SA-12  | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 28,2          | 62,42             | 82,56            | 995         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 28,0          | 87,04             | 87,18            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 28,2          | 82,62             | 86,07            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 28,3          | 83,78             | 85,84            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 28,4          | 83,64             | 93,97            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 29,2          | 75,99             | 94,97            |             |
|        |       |      | 7 | 0                 | 30,1          | 75,12             | 75,12            |             |
| SA-22  | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 27,0          | 67,79             | 68,08            | 989         |
|        |       |      | 2 | 0                 | 25,5          | 100,80            | 76,34            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 24,8          | 92,36             | 77,20            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 24,2          | 92,12             | 79,52            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 23,8          | 89,04             | 87,14            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 24,0          | 82,07             | 84,50            |             |
| SA-32  | 155,0 | 0,48 | 7 | 0                 | 24,0          | 84,50             | 84,50            | 1054        |
|        |       |      | 1 | 0                 | 32,7          | 49,86             | 84,98            |             |
|        |       |      | 2 | 0                 | 32,8          | 83,28             | 92,16            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 33,7          | 76,56             | 89,05            |             |
|        |       |      | 4 | 2,3               | 34,0          | 82,32             | 91,56            |             |
|        |       |      | 5 | 3,9               | 34,5          | 80,11             | 86,82            |             |
|        |       |      | 6 | 4,5               | 34,7          | 83,07             | 83,07            |             |
| SA'-42 |       |      | 1 | 0                 | 29,5          | 57,93             | 78,42            | 1023        |
|        |       |      | 2 | 0                 | 28,9          | 90,04             | 84,04            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 28,9          | 84,04             | 87,23            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 29,2          | 81,33             | 87,17            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 29,6          | 80,16             | 84,67            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 29,6          | 84,67             | 84,67            |             |

$$P'_{med} = 1015$$

- Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).  
 2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.8 - Valores de P' (Lajes SA - Grupo 3)

| LAJE  | m     | r    | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|-------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| SA-13 | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 28,5          | 61,30             | 75,94            | 1018        |
|       |       |      | 2 | 0                 | 27,7          | 93,57             | 80,24            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 27,3          | 89,57             | 82,62            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 27,1          | 87,48             | 92,17            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 27,7          | 77,86             | 92,02            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 28,3          | 78,01             | 86,38            |             |
|       |       |      | 7 | 0                 | 28,5          | 82,31             | 82,31            |             |
| SA-23 | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 29,5          | 57,91             | 80,37            | 1016        |
|       |       |      | 2 | 0                 | 29,1          | 88,10             | 83,29            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 29,0          | 85,25             | 86,95            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 29,3          | 81,25             | 87,01            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 29,6          | 81,31             | 86,37            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 29,8          | 82,43             | 82,43            |             |
| SA-33 | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 32,0          | 51,37             | 90,98            | 1052        |
|       |       |      | 2 | 0                 | 36,6          | 78,95             | 94,68            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 33,6          | 75,24             | 86,80            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 33,8          | 82,49             | 84,99            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 33,8          | 84,99             | 85,97            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 33,9          | 84,03             | 84,03            |             |

$$P'_{med} = 1029$$

Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.9 - Valores de P' (Lajes SA - Grupo 1)

| LAJE   | $m_j^*$ | $r^*$ | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|---------|-------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| SA-11  | 155,0   | 0,48  | 1 | 0                 | 29,8          | 57,03             | 80,16            | 999         |
|        |         |       | 2 | 0                 | 29,4          | 87,06             | 83,75            |             |
|        |         |       | 3 | 0                 | 29,4          | 83,75             | 83,35            |             |
|        |         |       | 4 | 3,0               | 29,3          | 85,31             | 90,27            |             |
|        |         |       | 5 | 4,3               | 29,8          | 79,49             | 86,22            |             |
|        |         |       | 6 | 4,8               | 29,9          | 83,98             | 83,98            |             |
| SA'-21 | 155,0   | 0,48  | 1 | 0                 | 29,3          | 58,56             | 81,77            | 982         |
|        |         |       | 2 | 0                 | 29,0          | 89,39             | 85,45            |             |
|        |         |       | 3 | 0                 | 29,0          | 85,45             | 85,45            |             |
|        |         |       | 4 | 0                 | 29,0          | 85,45             | 89,68            |             |
|        |         |       | 5 | 2,7               | 29,4          | 80,53             | 91,17            |             |
|        |         |       | 6 | 4,6               | 30,0          | 78,46             | 93,19            |             |
|        |         |       | 7 | 5,6               | 30,8          | 76,54             | 76,54            |             |
| SA-31  | 155,0   | 0,48  | 1 | 0                 | 30,6          | 54,77             | 82,81            | 997         |
|        |         |       | 2 | 0                 | 30,4          | 87,04             | 84,72            |             |
|        |         |       | 3 | 0                 | 30,4          | 84,72             | 94,06            |             |
|        |         |       | 4 | 4,1               | 31,4          | 79,96             | 84,41            |             |
|        |         |       | 5 | 6,3               | 32,0          | 78,87             | 86,97            |             |
|        |         |       | 6 | 7,2               | 32,3          | 81,62             | 81,62            |             |

$$P'_{med} = 993$$

Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2.10).

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.10 - Valores de P' (Lajes CA - Grupo 1)

| LAJE   | m     | r    | i | $l_{1 \cdot j}$<br>(cm) | $L_j$<br>(cm) | $\alpha_j$<br>(o) | $\beta_j$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|-------|------|---|-------------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| CA-11  | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                       | 27,4          | 65,77             | 79,03            | 1012        |
|        |       |      | 2 | 0                       | 26,9          | 90,24             | 78,94            |             |
|        |       |      | 3 | 0                       | 26,4          | 89,92             | 78,82            |             |
|        |       |      | 4 | 0                       | 25,9          | 90,48             | 82,23            |             |
|        |       |      | 5 | 0                       | 25,7          | 86,88             | 84,64            |             |
|        |       |      | 6 | 0                       | 25,7          | 84,64             | 92,42            |             |
|        |       |      | 7 | 0,8                     | 26,0          | 80,96             | 88,61            |             |
|        |       |      | 8 | 1,0                     | 26,1          | 84,79             | 84,79            |             |
| CA'-21 | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                       | 30,4          | 55,31             | 81,64            | 1002        |
|        |       |      | 2 | 0                       | 30,1          | 87,75             | 85,35            |             |
|        |       |      | 3 | 0                       | 30,2          | 83,42             | 90,86            |             |
|        |       |      | 4 | 3,8                     | 30,9          | 77,75             | 89,25            |             |
|        |       |      | 5 | 5,9                     | 31,4          | 79,73             | 86,19            |             |
|        |       |      | 6 | 6,5                     | 31,6          | 82,52             | 82,52            |             |
| CA-31  | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                       | 32,1          | 51,07             | 86,96            | 1043        |
|        |       |      | 2 | 0                       | 32,1          | 86,96             | 85,28            |             |
|        |       |      | 3 | 0                       | 32,0          | 88,64             | 82,82            |             |
|        |       |      | 4 | 3,1                     | 31,8          | 86,76             | 84,77            |             |
|        |       |      | 5 | 5,8                     | 31,8          | 84,77             | 91,77            |             |
|        |       |      | 6 | 7,0                     | 32,5          | 77,96             | 89,18            |             |
|        |       |      | 7 | 7,8                     | 32,9          | 81,02             | 81,02            |             |

$$P'_{med} = 1019$$

- Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).
- 2) Os valores de  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.11 - Valores de P' (Laje CA - Grupo 2)

| LAJE   | m     | r    | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|--------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| CA-12  | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 29,5          | 57,94             | 76,51            | 1016        |
|        |       |      | 2 | 0                 | 28,7          | 91,76             | 84,30            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 28,7          | 84,30             | 89,01            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 29,2          | 79,34             | 88,29            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 29,6          | 80,42             | 88,20            |             |
|        |       |      | 6 | 0                 | 30,0          | 80,46             | 80,46            |             |
| CA-22  | 155,8 | 0,48 | 1 | 0                 | 31,8          | 51,83             | 83,99            | 1042        |
|        |       |      | 2 | 0                 | 31,7          | 86,07             | 85,85            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 31,8          | 83,85             | 90,48            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 32,3          | 78,89             | 86,45            |             |
|        |       |      | 5 | 1,3               | 32,3          | 86,45             | 87,52            |             |
|        |       |      | 6 | 2,1               | 32,4          | 84,86             | 90,78            |             |
|        |       |      | 7 | 2,5               | 32,7          | 82,19             | 82,19            |             |
| CA-32  | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 33,0          | 49,25             | 79,86            | 1063        |
|        |       |      | 2 | 0                 | 32,5          | 91,78             | 82,05            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 32,2          | 88,39             | 88,85            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 32,5          | 82,12             | 84,87            |             |
|        |       |      | 5 | 1,3               | 32,4          | 87,53             | 90,40            |             |
|        |       |      | 6 | 2,4               | 32,7          | 82,22             | 89,06            |             |
|        |       |      | 7 | 2,8               | 32,9          | 83,61             | 83,61            |             |
| CA'-42 | 155,8 | 0,48 | 1 | 0                 | 29,6          | 57,63             | 81,41            | 1017        |
|        |       |      | 2 | 0                 | 29,3          | 87,31             | 88,31            |             |
|        |       |      | 3 | 0                 | 29,7          | 80,44             | 88,22            |             |
|        |       |      | 4 | 0                 | 30,1          | 80,48             | 90,27            |             |
|        |       |      | 5 | 0                 | 30,7          | 78,65             | 91,91            |             |
|        |       |      | 6 | 0,8               | 31,0          | 81,80             | 95,36            |             |
|        |       |      | 7 | 1,5               | 31,5          | 78,47             | 78,47            |             |

$$P'_{med} = 1035$$

- Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).  
 2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

Tabela A.12 - Valores de P' (Lajes CA - Grupo 3)

| LAJE  | m     | r    | i | $l_{1.i}$<br>(cm) | $L_i$<br>(cm) | $\alpha_i$<br>(o) | $\beta_i$<br>(o) | P'<br>(kgf) |
|-------|-------|------|---|-------------------|---------------|-------------------|------------------|-------------|
| CA-13 | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 27,1          | 67,30             | 77,87            | 945         |
|       |       |      | 2 | 0                 | 26,5          | 91,06             | 81,06            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 26,2          | 87,64             | 86,23            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 26,0          | 86,79             | 82,12            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 25,8          | 86,75             | 79,85            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 25,4          | 88,98             | 86,66            |             |
|       |       |      | 7 | 0                 | 25,6          | 82,10             | 82,10            |             |
| CA-23 | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 29,3          | 58,57             | 84,22            | 1011        |
|       |       |      | 2 | 0                 | 29,3          | 84,22             | 82,27            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 29,1          | 86,14             | 83,21            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 29,0          | 85,14             | 86,12            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 29,2          | 82,25             | 86,99            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 29,5          | 81,29             | 81,29            |             |
| CA-33 | 155,0 | 0,48 | 1 | 0                 | 29,6          | 57,63             | 81,41            | 1019        |
|       |       |      | 2 | 0                 | 29,3          | 87,10             | 84,16            |             |
|       |       |      | 3 | 0                 | 29,0          | 84,16             | 85,37            |             |
|       |       |      | 4 | 0                 | 29,1          | 83,37             | 87,94            |             |
|       |       |      | 5 | 0                 | 29,5          | 80,33             | 91,15            |             |
|       |       |      | 6 | 0                 | 30,2          | 77,59             | 77,59            |             |

$$P'_{med} = 992$$

Obs.: 1) Os valores de P' foram calculados pela fórmula (5.2-10).

2) Os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  foram calculados através das expressões (5.2-12), com os parâmetros das respectivas configurações (vide Figs. A.1 a A.20).

A-33

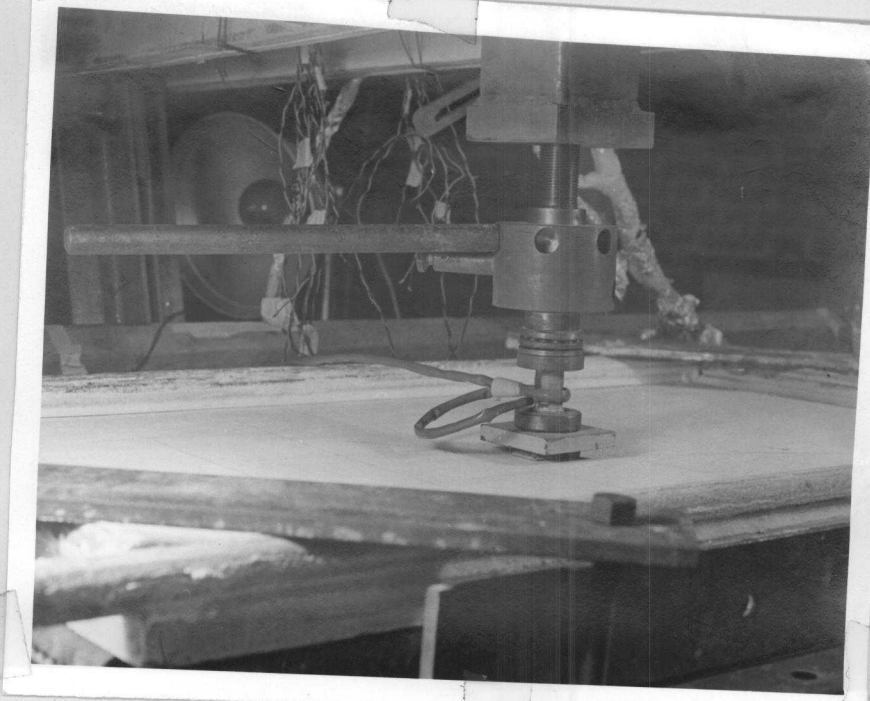


Foto 1 - Aspecto de uma laje Tipo SA durante o ensaio.



Foto 2 - Detalhe do apoio de canto das lajes Tipo SA.

A-34

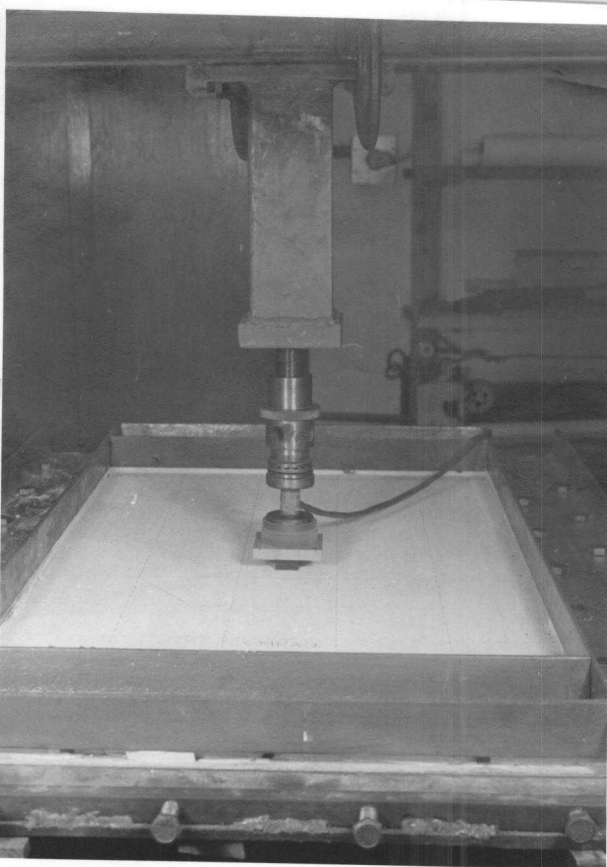


Foto 3 - Aspectos do sistema de aplicação de carga por ocasião do ensaio de uma laje Tipo CA.



Foto 4 - Primeiras fissuras da face inferior de uma das lajes ensaiadas.



A-35

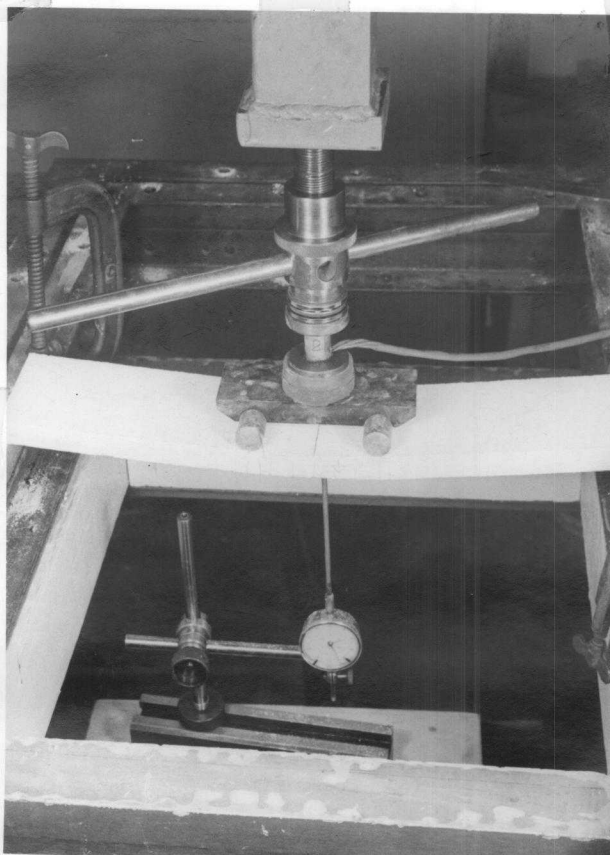


Foto 5 - Aspectos de uma Faixa durante um ensaio.

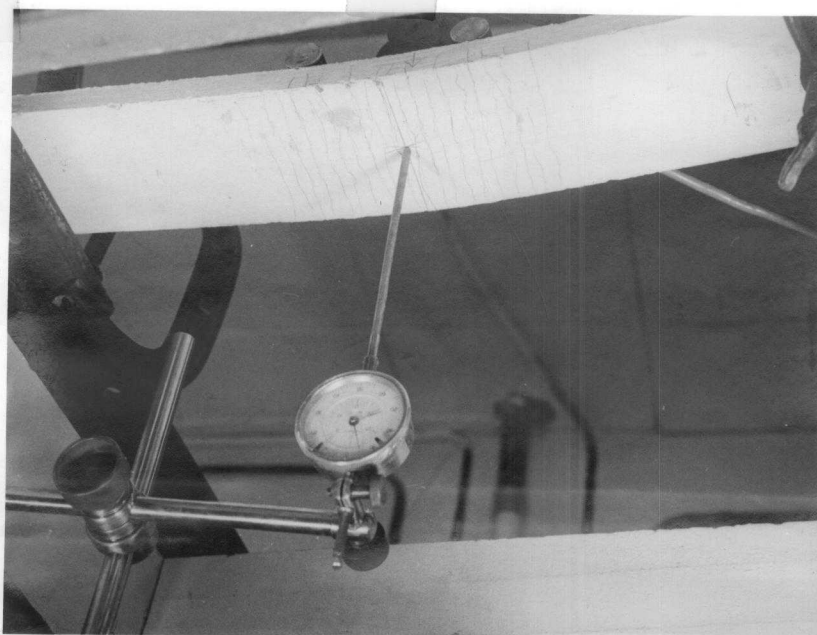


Foto 6 - Detalhe das fissuras de uma Faixa por ocasião de um ensaio.

A-36

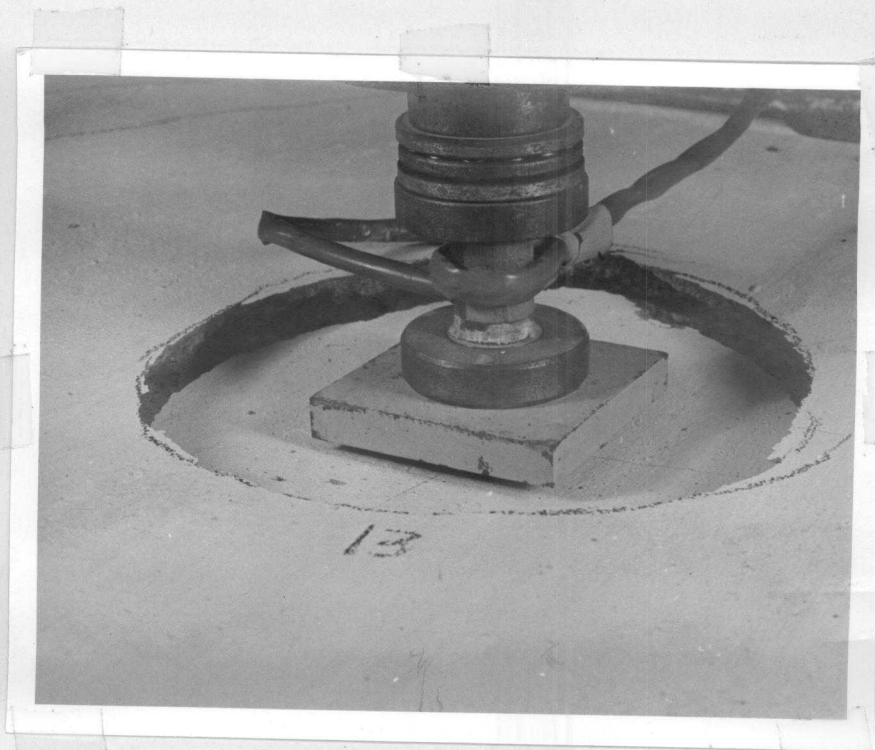


Foto 7 - Detalhe da face superior de uma laje na ruptura.

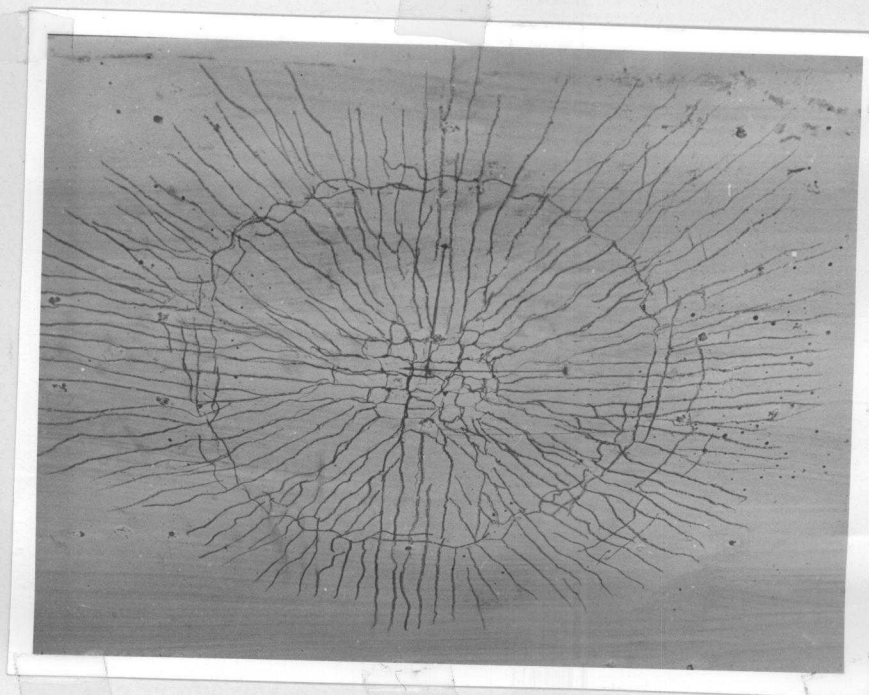


Foto 8 - Estado de fissuração da face inferior de uma das lajes, por ocasião da ruptura.

A-37

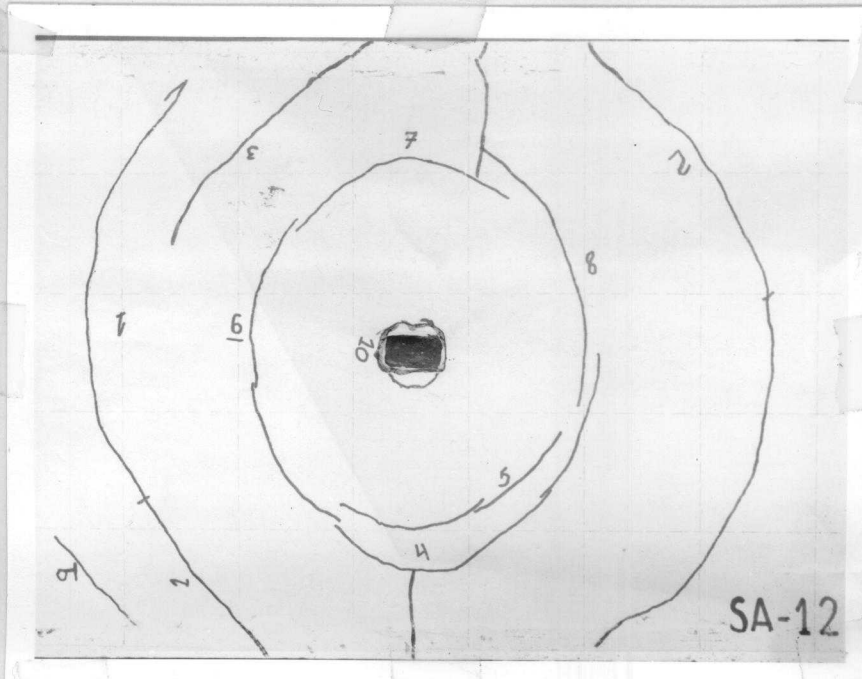


Foto 9 - Configuração de ruína (face superior) da Laje SA-12.

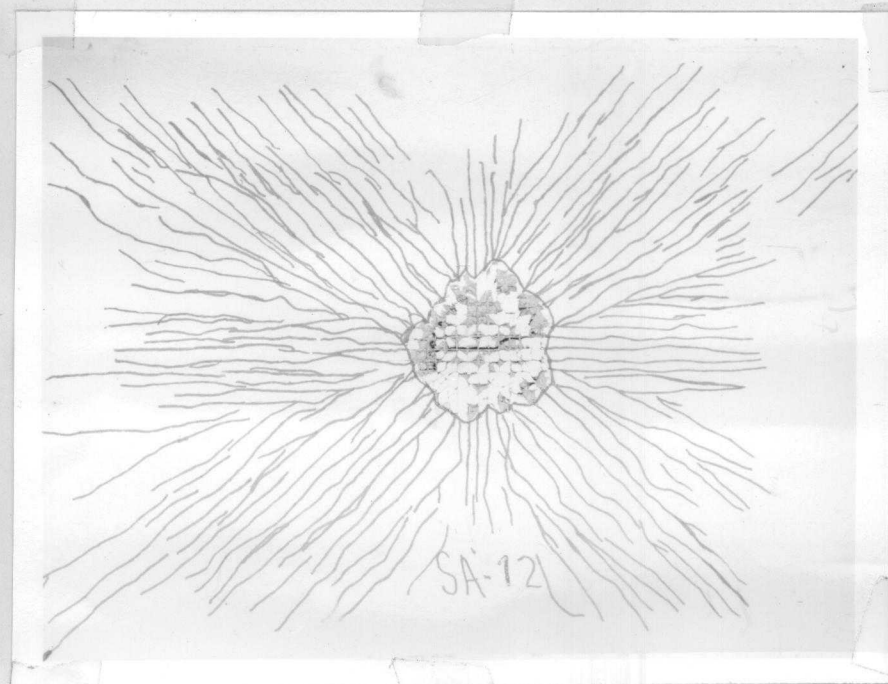


Foto 10 - Configuração de ruína (face inferior) da Laje SA-12.

A-38

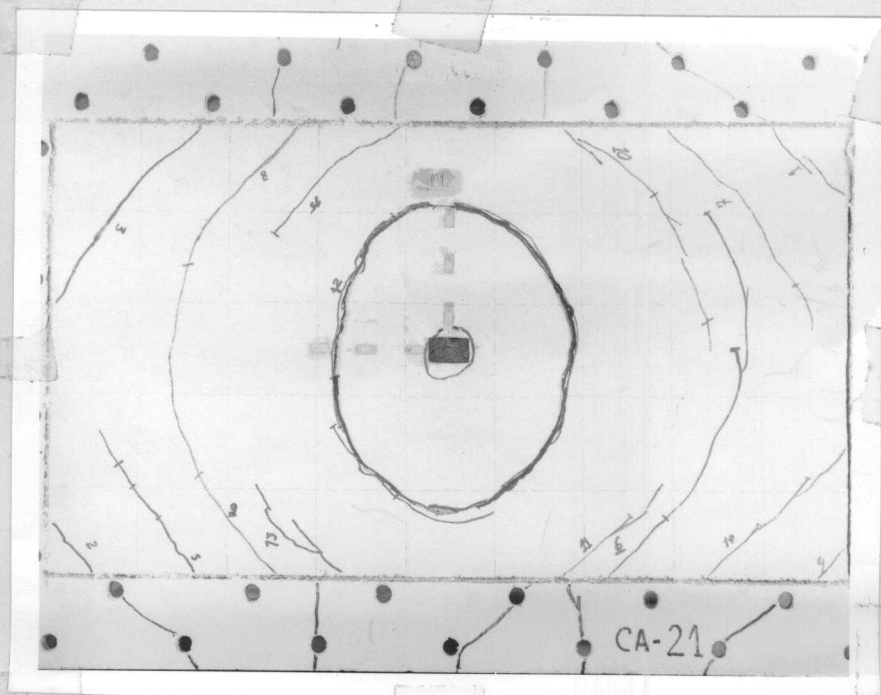


Foto 11 - Configuração de ruína (face superior) da laje CA-21.

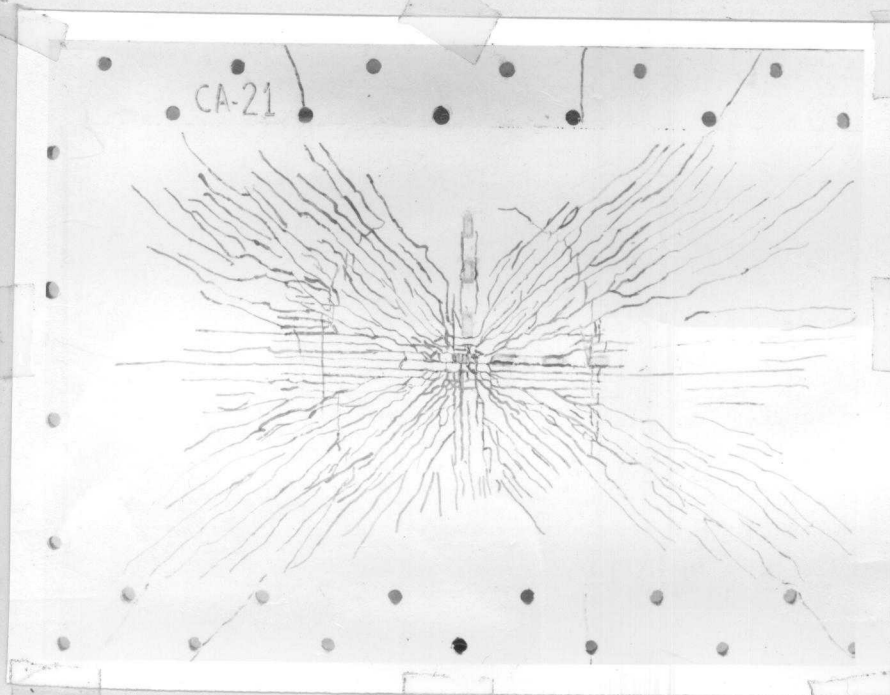


Foto 12 - Configuração de ruína (face inferior) da Laje CA-21.