

INSTABILIDADE ELÁSTICA DE ESTRUTURAS DE  
EDIFÍCIOS CONSIDERANDO AS DEFORMAÇÕES  
DAS LAJES EM SEUS PLANOS

Enga. Dilze Codá dos Santos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de  
São Carlos da Universidade de São Paulo, como  
parte dos requisitos para a obtenção do título  
de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador

Prof. Dr. Ronaldo Garcia de Figueiredo

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

São Carlos, fevereiro de 1977

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Prof. Dr. Ronaldo Garcia de Figueiredo pela dedicada orientação durante toda a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Tioeturo Yagui agradecemos o auxílio dado em sugestões relativas aos exemplos resolvidos.

Agradecemos à CAPES (Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo auxílio material fornecido, através da concessão de bolsa de estudos, durante a qual pudemos levar a termo o presente trabalho.

Nossos agradecimentos à Escola de Engenharia de São Carlos pelo apoio recebido e ao CPD (Centro de Processamento de Dados) pelo uso que fizemos de seus equipamentos.

Especial reconhecimento queremos manifestar ao Prof. Dr. Dante Angelo Osvaldo Martinelli que nos incentivando, trouxe-nos a possibilidade de estagiar junto ao Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos.

Finalmente desejamos agradecer aos Senhores Rui Roberto Casale, João Paulo Moretti e Egydio Jurandir Christianini pelos trabalhos de datilografia e de desenhos executados e a todos aqueles que de alguma maneira contribuíram na realização deste trabalho.

## R E S U M O

O presente trabalho estuda a determinação da carga crítica vertical de estruturas de edifícios de forma retangular alongada em planta. A forma alongada torna maior a influência da deformabilidade das lajes em seu próprio plano sugerindo um tipo de análise de instabilidade no qual essa deformabilidade das lajes é considerada.

Antes de estabelecer o procedimento para determinação da carga crítica das estruturas tridimensionais, faz-se um estudo detalhado da instabilidade elástica de pórticos planos que são sub-estruturas do sistema tridimensional.

Alguns exemplos de estruturas tridimensionais de edifícios são resolvidos para avaliar quantitativamente a influência das lajes no parâmetro crítico do sistema.

No final apresenta-se um programa de cálculo automático em linguagem FORTRAN para aplicação da solução sugerida neste trabalho.

ABSTRACT

The present work studies the vertical critical load determination of building frames with lengthened rectangular shape in plant.

The lengthened shape makes greater the floors deformability influence in their own planes, suggesting a kind of instability analysis in which that deformability is considered.

Before the establishment of the critical load determination, it is made a detailed study of the plane frames elastic instability, which are sub-structures of the three-dimensional system.

Some examples of three-dimensional structures are solved to evaluate the floors deformations influence in the critical parameter of the system.

At the end of this work it is included an automatic computational program in FORTRAN language which permits the application of the suggested solution.

## 1. INTRODUÇÃO

A análise de instabilidade elástica de estruturas tridimensionais de edifícios, comportando-se as lajes como diafragmas indeformáveis em seus planos, foi estudada por FIGUEIREDO<sup>1</sup>. Em seu estudo, procurando reduzir o trabalho numérico e os tempos de computação envolvidos, o mesmo autor despreza as deformações axiais de todas as barras.

De fato a análise de estruturas de edifícios tridimensionais com muitos andares envolve elevado número de parâmetros, requerendo conseqüentemente muito trabalho numérico. Este labor se torna ainda maior no estudo da instabilidade, onde se procura o parâmetro crítico multiplicador comum de todas as cargas atuantes, sendo necessário calcular diversas vezes a matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras do equilíbrio, até se encontrar iterativamente, o valor deste parâmetro crítico.

É evidente que considerar indeformabilidade axial das barras corresponde a superestimar a rigidez da estrutura, o que conduz a um erro no parâmetro crítico contra a segurança. Segundo informações daquele autor, este erro é tolerável em estruturas de aço com até 12 andares. Contudo a adoção da hipótese de indeformabilidade axial das barras é perfeitamente justificável em vista das simplificações obtidas.

No presente trabalho pretende-se investigar a influência que pode advir da outra hipótese simplificadora adotada, ou seja, da indeformabilidade das lajes em seus planos.

Admite-se desde já aceitáveis as hipóteses de indeformabilidade axial das barras e da nulidade da rigidez transversal das lajes, em vista das simplificações que se obtém. Deseja-se verificar se a deformabilidade das lajes em seus planos, introduz variações sensíveis na carga crítica de flambagem do edifício, sob a ação de cargas verticais.

A primeira vista, a hipótese de diafragma rígido para as lajes, parece bastante aceitável, e tem sido usada com êxito no cálculo dos esforços solicitantes produzidos pelo vento, quando o edifício apresenta em planta, comprimento e largura da mesma ordem de grandeza. Cite-se como exemplo o trabalho de STANATO e STAFFORD SMITH<sup>2</sup>. Porém, nos casos de estruturas de edifícios em que uma das dimensões das lajes em planta, é preponderante, conforme mostra a Fig. 1.1, torna-se necessário verificar se a carga vertical de flambagem do edifício, diminui de quantidades sensíveis, quando a deformabilidade das lajes em seus planos for considerada.

A possibilidade de fazer a análise de instabilidade de estruturas análogas às representadas na Fig. 1.1 é sugerida por GOLDBERG<sup>3</sup>.

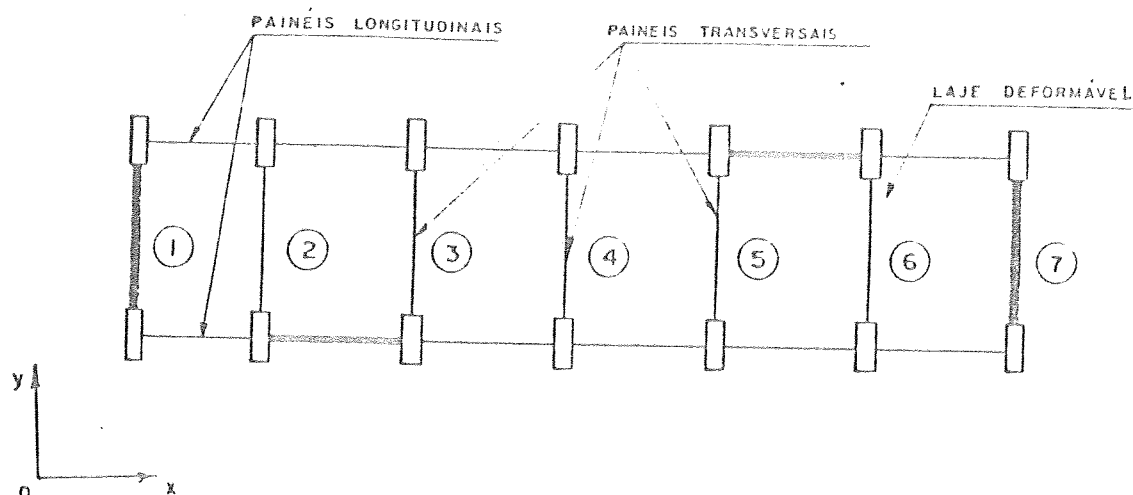


Fig. 1.1 - Planta de um edifício constituído de painéis transversais e lajes deformáveis em seu próprio plano.

Em estruturas como a da Fig. 1.1, em que os painéis transversais internos não possuem contraventamento e na qual os painéis transversais extremos e também os painéis longitudinais são contraventados e portanto impedidos de flambarem como pórticos deslocáveis, poderá ocorrer que o sistema (edifício) perca estabilidade com deslocamentos horizontais desprezíveis dos painéis transversais extremos (painéis 1 e 7) na direção  $y$  e deslocamentos horizontais consideráveis dos painéis transversais internos (painéis 2, 3, ..., 6) na mesma direção. Esta perda de estabilidade corresponderá, para os painéis transversais internos, a um comportamento intermediário entre a condição deslocável e a

condição indeslocável. Evidentemente esta condição intermediária é fornecida pelas lajes que permitem deslocamentos de corpo deformável no seu plano. A carga crítica do sistema nestas condições, será menor que a obtida com a hipótese de diafragmas rígidos para as lajes.

Deve-se notar na Fig. 1.1, que existem painéis contraventados em 3 direções não concorrentes e que neste caso, se a laje fosse considerada rígida no seu plano, a flambagem do sistema ocorreria pela perda de estabilidade dos painéis mais críticos, comportando-se como pórticos indeslocáveis, conforme deduz-se do estudo de FIGUEIREDO<sup>1</sup>.

Sendo as lajes deformáveis, poderá ocorrer que, antes que esta última situação seja atingida, ocorra a flambagem do sistema com flexão da laje em seu próprio plano, como mostra a Fig. 1.2. Vê-se na mesma figura, a laje deformada, num modo de flambagem possível.

Estruturas do tipo mostrado nas Figs. 1.1 e 1.2 foram estudadas por GOLDBERG<sup>3,4</sup> e posteriormente por ARRUDA SERRA<sup>2</sup>, na análise do efeito da ação do vento.

Na análise elaborada por ARRUDA SERRA<sup>2</sup>, foram adotadas coordenadas deslocamentos segundo a direção  $y$ , em cada interseção painel transversal-laje em todos os andares.



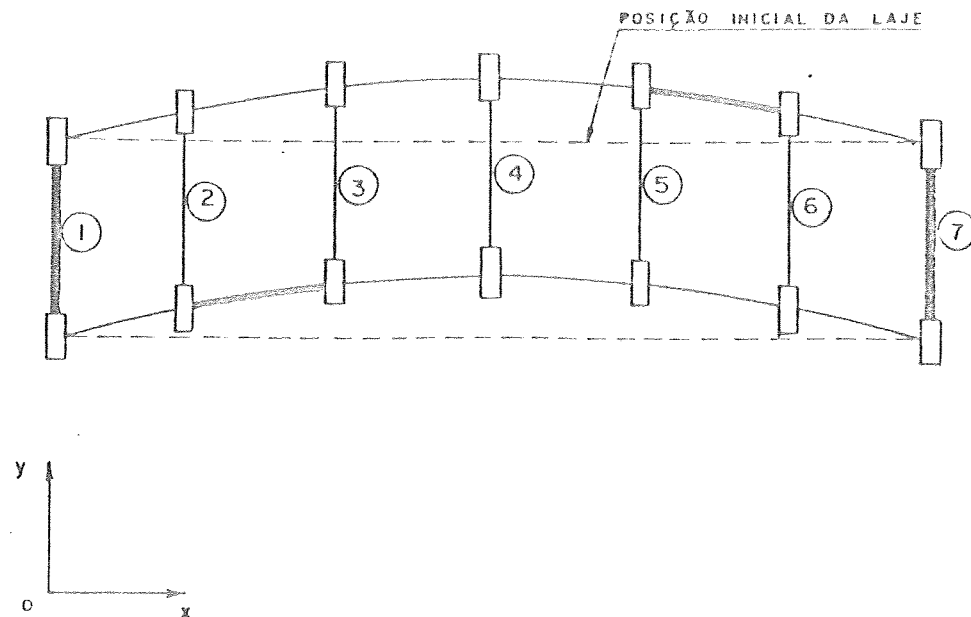


FIG. 1.2 - Modo possível de flambagem da estrutura da fig 1.1.

O presente trabalho tem o objetivo de estudar o comportamento de estruturas do tipo descrito quanto à perda de estabilidade, verificando a influência de alguns fatores como sejam o número de andares e o número de painéis transversais. Para a obtenção da matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras das referidas estruturas, será aproveitado o desenvolvimento feito por ARRUDA SERRA<sup>5</sup>, visto que as mesmas coordenadas deslocamentos podem ser adotadas no presente estudo.

Considerando-se que o problema abordado envolve um grande número de variáveis, nos edifícios estudados serão

admitidas constantes algumas dimensões em planta variando-se outras grandezas (número de andares e número de painéis transversais) que influem no comportamento da estrutura.

Deste modo chega-se a alguns resultados que permitem interpretações qualitativas da influência da deformabilidade das lajes no parâmetro crítico de flambagem do sistema.

## 2. INSTABILIDADE DE PÓRTICOS PLANOS RETANGULARES

### 2.1 Introdução

Tendo em vista o estudo que se pretende fazer sobre as estruturas de edifícios, considerando-se a deformabilidade das lajes em seus próprios planos e desejando-se levar o leitor por um caminho que facilite a compreensão dos programas automáticos de cálculo usados na análise de instabilidade das estruturas com aquelas características, pretende-se neste capítulo apresentar o estudo da instabilidade de pórticos planos retangulares indeslocáveis e deslocáveis e mostrar como pode ser feita a análise correspondente. Neste sentido será aproveitado o estudo feito por FIGUEIREDO<sup>3</sup>.

Admite-se no estudo a seguir, que os pórticos planos retangulares são constituídos de barras rigidamente ligadas aos seus nós e que estes pórticos sejam suficientemente contraventados na direção normal ao seu plano, impedidos assim de perderem estabilidade com deslocamentos nesta direção. Os pórticos planos a serem estudados constituem os painéis transversais e longitudinais que são sub-estruturas do sistema principal já descrito no capítulo 1.

## 2.2. Numeração dos nós e dos deslocamentos.

Com a finalidade de se obter a matriz de rigidez do pórtico plano, é necessário estabelecer uma regra de numeração para os nós e para os deslocamentos significativos em cada nó. Como os pórticos em estudo são pórticos retangulares constituídos de barras verticais e horizontais (respectivamente pilares e vigas) e lembrando que são desprezadas as deformações axiais elásticas destas barras, serão então nulas todas as translações verticais dos nós, que são por isso omitidas no cálculo. A mesma hipótese de indeformabilidade axial, implicará em considerar-se apenas uma translação horizontal em cada andar, comum a todos os nós do andar.

Os painéis verticais serão supostos sempre engastados na base, o que permite, no procedimento de cálculo, omitir também os eventuais deslocamentos dos nós da base.

Para exemplificar as numerações adotadas para os nós e deslocamentos, considere-se os pórticos planos das Figs. 2.1a e 2.1b. Os nós são numerados da esquerda para a direita em cada andar e sequencialmente por andares, a partir do mais elevado (vide Fig. 2.1a). Quanto aos deslocamentos, serão numeradas primeiramente todas as rotações dos nós livres e logo após são numeradas as translações dos andares, a partir do topo (uma translação em cada andar). As rotações terão a mesma numeração dos nós que lhes correspondem. Assim num pórtico com  $n_a$  andares e

$n_c$  prumadas de pilares (o índice  $c$  lembra colunas), as translações horizontais são numeradas de  $(n_a \cdot n_c + 1)$  até  $(n_a \cdot n_c + n_a)$ .

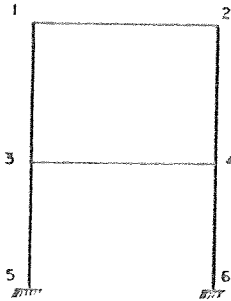


FIG. 2.1a - Numeração dos nós de um pórtico plano retangular com 2 andares.

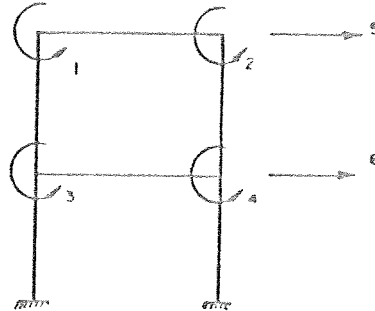


FIG. 2.1b - Numeração dos deslocamentos de um pórtico plano retangular com 2 andares.

Adotando a numeração dos deslocamentos exemplificada na Fig. 2.1b (onde  $n_a = 2$  e  $n_c = 2$ ), resultará que a obtenção da matriz de rigidez correspondente a esses deslocamentos ficará simplificada, não havendo necessidade de se proceder rearranjo de linhas e colunas daquela matriz, para os fins a que ela se destina. Este fato será melhor evidenciado no parágrafo seguinte.

### 2.3. Matriz de rigidez do pórtico

Será chamada de matriz de rigidez do pórtico, a matriz  $[S^P]$  de ordem  $n_a(n_c + 1) \times n_a(n_c + 1)$  que

relaciona os deslocamentos  $\{ D^P \}$  (rotações e translações) numerados como a Fig. 2.1b, com os eventuais esforços externos  $\{ A^P \}$  correspondentes (momentos e forças horizontais), através de:

$$\begin{Bmatrix} A^P \\ n_a [n_c + 1] \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S^P \\ n_a [n_c + 1] \times n_a [n_c + 1] \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} D^P \\ n_a [n_c + 1] \times 1 \end{Bmatrix} \dots (2.1)$$

Com a numeração adotada para os deslocamentos, as matrizes que aparecem na eq. (2.1) ficam partidas, com os elementos relativos às rotações já separados dos elementos relativos às translações, sem necessidade de se fazer rearranjo de linhas e colunas das mesmas, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \{ A^P_\theta \} \\ \{ A^P_H \} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [ S^P_{\theta\theta} ] & [ S^P_{\theta H} ] \\ [ S^P_{H\theta} ] & [ S^P_{HH} ] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{ D^P_\theta \} \\ \{ D^P_H \} \end{Bmatrix} \dots (2.2)$$

sendo que a matriz  $[ S^P ]$  da eq. (2.1), tem a forma:

$$\begin{bmatrix} S^P \\ n_a \cdot n_c \text{ colunas} \\ n_a \text{ colunas} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [ S^P_{\theta\theta} ] & [ S^P_{\theta H} ] \\ [ S^P_{H\theta} ] & [ S^P_{HH} ] \end{bmatrix} \begin{matrix} n_a \cdot n_c \text{ linhas} \\ n_a \text{ linhas} \end{matrix} \dots (2.3)$$

onde  $n_a = 2$  e  $n_c = 2$ .

Nas sub-matrizes que aparecem nas eqs. (2.2) e (2.3), os índices  $\theta$  e  $H$  referem-se respectivamente às rotações dos nós e às translações dos andares, numerados como na Fig. 2.1b.

2.4. Cálculo de  $[S^P]$ 

A matriz  $[S^P]$  definida nas eqs. (2.1) e (2.3) pode ser calculada sem muita dificuldade por procedimento muito conhecido de considerar as contribuições dos elementos da matriz de rigidez de cada barra nas posições adequadas de linha e coluna daquela matriz.

Admitindo-se que as vigas e pilares sejam esbeltos, pode-se desprezar as deformações devidas ao esforço cortante nestas barras (estas deformações serão porém consideradas nas lajes). Assim a matriz de rigidez  $[S_{MD}]$  de ordem (4x4), da barra considerada com translações verticais nulas nos seus nós e com deslocamentos numerados como nas Figs. 2.2a e 2.2b, isto é, com deslocamentos de mesma direção e sentido dos deslocamentos correspondentes do pórtico terá a forma:

$$[S_{MD}] =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{L} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} \cdot C_y & \frac{6EI_z}{L^2} \cdot C_y \\ & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} \cdot C_y & \frac{6EI_z}{L^2} \cdot C_y \\ & & \left( \frac{EA_x}{L} \cdot C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \cdot C_y^2 \right) & - \left( \frac{EA_x}{L} \cdot C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \cdot C_y^2 \right) \\ \text{simétrico} & & & \left( \frac{EA_x}{L} \cdot C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} \cdot C_y^2 \right) \end{bmatrix}$$

..... (2.4)

ou

$$\left[ S_{MD} \right] = \begin{bmatrix} S_{MD11} & S_{MD12} & S_{MD13} & S_{MD14} \\ S_{MD21} & S_{MD22} & S_{MD23} & S_{MD24} \\ S_{MD31} & S_{MD32} & S_{MD33} & S_{MD34} \\ S_{MD41} & S_{MD42} & S_{MD43} & S_{MD44} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.5)$$

Na eq. (2.4), os símbolos tem os seguintes significados:

E : módulo de elasticidade longitudinal

$I_z$  : momento de inércia em relação ao eixo normal ao plano do pórtico passando pelo C. G. da seção.

$A_K$  : área da seção transversal.

L : comprimento da barra.

$$C_x = \frac{x_K - x_J}{L} , \quad C_y = \frac{y_K - y_J}{L} , \dots\dots\dots (2.6)$$

onde  $x_J$  ,  $y_J$  e  $x_K$  ,  $y_K$  são as coordenadas das extremidades início e fim da barra (respectivamente J e K).

A rigor, a deformabilidade axial está sendo levada em consideração na eq. (2.4), através do fator  $\frac{EA_K}{L}$ . Acontece porém que, quando a barra é vertical valerá  $C_x = 0$  e o fator  $(\frac{EA_K}{L} C_x^2)$  desaparece da equação. Quando a barra for horizontal valerá  $C_x = 1$ , mas, como será visto adiante, devido ao fato da barra horizontal só poder transladar nessa direção como um todo, sem deformação axial, não haverá contribuição dos elementos  $S_{MD33}$  ,  $S_{MD34}$  e  $S_{MD44}$  na matriz  $\left[ S^P \right]$ . Portanto as rigidezes axiais  $\frac{EA_K}{L}$  não



contribuirão em nada na matriz de rigidez do pórtico. Isto equivale a desprezar as deformações axiais das barras verticais e horizontais.

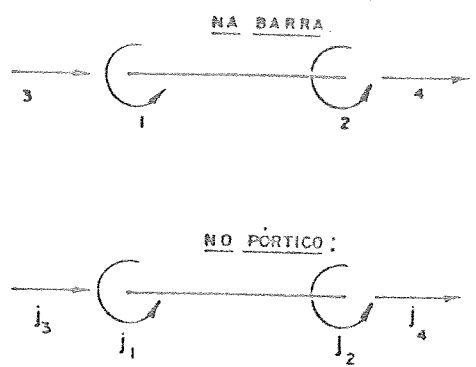


FIG. 2.2a - Deslocamentos possíveis nas barras horizontais e deslocamentos correspondentes no pórtico.

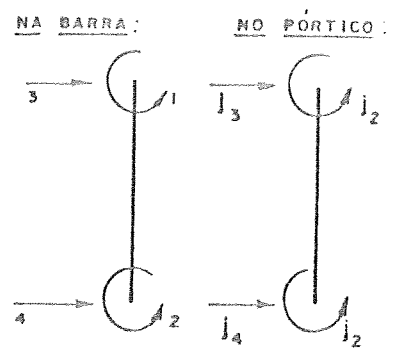


FIG. 2.2b - Deslocamentos possíveis nas barras verticais e deslocamentos correspondentes no pórtico.

Seja J o número da extremidade inicio e K o número da extremidade fim de uma barra J - K, supondo sempre J < K (o que corresponde a serem as barras horizontais orientadas sempre da esquerda para a direita e as barras verticais de cima para baixo, de acordo com a numeração adotada para os nós do pórtico). Os números dos deslocamentos do pórtico correspondentes aos deslocamentos 1, 2, 3 e 4 da barra, são calculados por:

$$j_1 = J$$

$$j_2 = K$$

$$j_3 = n_a \cdot n_c + 1 + \text{parte inteira de } \left( \frac{J - 1}{n_c} \right) \dots (2.7)$$

$$j_4 = n_a \cdot n_c + 1 + \text{parte inteira de } \left( \frac{K - 1}{n_c} \right)$$

valendo a seguinte relação de ordem:

$$j_1 < j_2 < j_3 \leq j_4 \dots \dots \dots (2.8)$$

Dois casos podem ocorrer:

a)  $j_3 < j_4$

A barra é vertical. As contribuições dos elementos da matriz  $[ S_{MD} ]$  na parte triangular superior de  $[ S^P ]$ , são calculadas por:

$$\begin{aligned}
 S_{j_1, j_1}^P &= S_{MD11} + \text{contribuições das outras barras} \\
 S_{j_1, j_2}^P &= S_{MD12} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_1, j_3}^P &= S_{MD13} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_1, j_4}^P &= -S_{MD13} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_2, j_2}^P &= S_{MD11} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_2, j_3}^P &= S_{MD13} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_2, j_4}^P &= -S_{MD13} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_3, j_3}^P &= S_{MD33} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_3, j_4}^P &= -S_{MD33} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_4, j_4}^P &= S_{MD33} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"}
 \end{aligned}$$

..... (2.9)

Quando  $j_4 > n_a(n_c + 1)$ , a extremidade fim da barra vertical é um apoio e devem ser calculadas apenas as contribuições da barra nos elementos  $S_{j_1, j_1}^P, S_{j_1, j_3}^P$  e  $S_{j_3, j_3}^P$ .

b)  $j_3 = j_4$

A barra é horizontal. As contribuições dos elementos da matriz  $[ S_{MD} ]$  na parte triangular superior de  $[ S^P ]$  são:

$$\begin{aligned}
 S_{j_1, j_1}^P &= S_{MD11} + \text{contribuição das outras barras} \\
 S_{j_1, j_2}^P &= S_{MD12} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \\
 S_{j_2, j_2}^P &= S_{MD11} + \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \quad \text{"}
 \end{aligned}$$

..... (2.10)

## 2.5. Influência do esforço axial na matriz de rigidez da barra e na matriz de rigidez do painel.

A expressão (2.4) da matriz de rigidez das barras só se aplica, quando for nulo ou desprezível o esforço normal atuante nas mesmas barras. No estudo da instabilidade é necessário considerar a influência do esforço normal sobre os elementos da matriz  $[ S_{MD} ]$ , o que se consegue, usando a teoria de segunda ordem e resolvendo a equação diferencial correspondente, na qual são considerados os momentos fletores produzidos nas seções pela própria força normal. A solução do problema que pode ser encontrada em HORNE e MERCHANT<sup>6</sup>, leva a serem definidos os coeficientes  $s$ ,  $c$  e  $m$  que alteram os valores dos elementos da matriz  $[ S_{MD} ]$ . Quando a influência da força axial é considerada, a expressão (2.4) toma a forma:

$$[ S_{MD} ] =$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} \frac{sEI_z}{L} & \frac{scEI_z}{L} & -\frac{s(1+c)EI_z}{L^2} \cdot C_y & -\frac{s(1+c)EI_z}{L^2} \cdot C_y \\ \frac{sEI_z}{L} & -\frac{s(1+c)EI_z}{L^2} \cdot C_y & \frac{s(1+c)EI_z}{L^2} \cdot C_y & \\ \left( \frac{EA_x}{L} \cdot C_x^2 + \frac{2s(1+c)EI_z}{mL^3} \cdot C_y^2 \right) & - \left( \frac{EA_x}{L} \cdot C_x^2 + \frac{2s(1+c)EI_z}{mL^3} \cdot C_y^2 \right) & & \\ \text{simétrico} & \left( \frac{EA_x}{L} \cdot C_x^2 + \frac{2s(1+c)EI_z}{mL^3} \cdot C_y^2 \right) & & \end{array} \right] \dots\dots\dots (2.11)$$

Se a força axial  $P$  for de compressão ( $P > 0$ ), as expressões de  $s$ ,  $c$  e  $m$  são as seguintes:

$$s = \frac{(1-2\alpha\cotg2\alpha)\alpha}{\tan\alpha - \alpha} \dots\dots\dots(2.12)$$

$$c = \frac{2\alpha - \text{sen}2\alpha}{\text{sen}2\alpha - 2\alpha\cos2\alpha} \dots\dots\dots(2.13)$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) - \pi^2\rho} \dots\dots\dots(2.14)$$

onde  $\rho = \frac{P}{P_E}$  e  $\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho}$

sendo  $P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \dots\dots\dots(2.15)$

a carga de EULER, ou seja, a carga que produziria flambagem da barra em condição de vinculação ideal com comprimento de flambagem igual ao próprio comprimento da barra. Nas estruturas que serão estudadas no presente trabalho, o esforço  $P$  é sempre de compressão. Porém se ocorresse força axial de tração ( $P < 0$ ), as expressões (2.12) e (2.13) se modificariam para:

$$s = \frac{(1-2\gamma\coth2\gamma)\gamma}{\tanh\gamma - \gamma} \dots\dots\dots(2.16)$$

$$c = \frac{2\gamma - \text{senh}2\gamma}{\text{senh}2\gamma - 2\gamma\cosh2\gamma} \dots\dots\dots(2.17)$$

$$\rho = \frac{P}{P_E} \quad (P < 0) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\rho}$$

A expressão (2.14) permanece inalterada.

As funções  $s$ ,  $sc$ ,  $s(1+c)$  e  $2s(1+c)/m$  que aparecem nos elementos da matriz  $[S_{MD}]$  eq.(2.11) tem a sua variação descrita na Fig. 2.3.

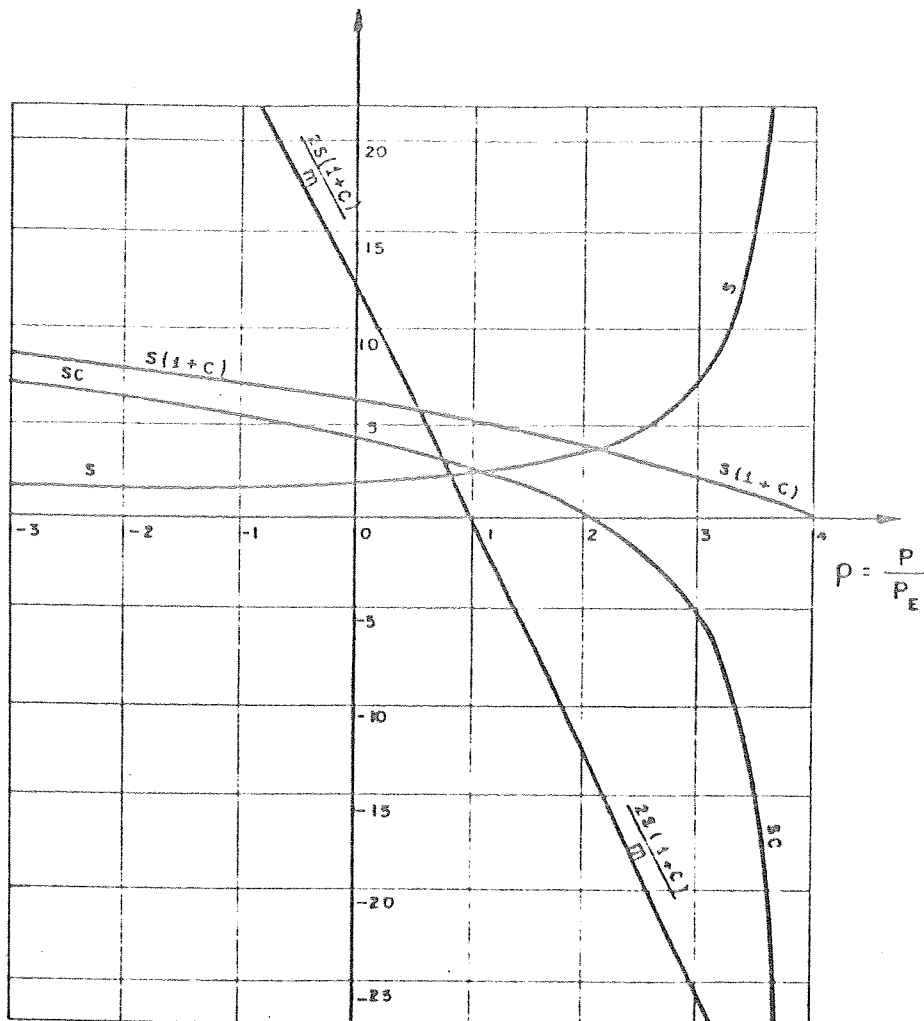


FIG. 2.3 - Gráfico das funções de instabilidade  $s$ ,  $sc$ ,  $s(1+c)$  e  $2s(1+c)/m$ .

No estudo da instabilidade de pórticos planos não se considerará nunca  $\rho > 4$  em uma barra, pois o limite  $\rho = 4$  corresponde à carga crítica da barra flambando isoladamente com o maior número possível de vínculos, ou

seja, barra com rotações e translações impedidas nas extremidades (comprimento de flambagem  $\ell/2$ ).

Uma explanação deve ser dada aqui sobre o aparecimento de coeficientes de rigidez negativos para a barra comprimida axialmente pela carga  $P$ . A barra juntamente com a carga  $P$  deve ser considerado um único sistema para o qual estabelece-se o seu comportamento sob ação de momentos e forças transversais aplicadas. Embora não salientado a energia total do sistema será a soma de sua energia de deformação com as energias potenciais da carga  $P$  e das outras cargas concentradas nas extremidades. Somente assim poderia ocorrer o fato desta barra deformando-se (com o aumento da energia de deformação) ainda pudesse fornecer energia às cargas concentradas nas extremidades. Toda essa energia transferida é proveniente do decréscimo da energia potencial da carga  $P$  decorrente da diminuição de comprimento da corda passante pelas extremidades da barra.

Outra explanação a ser dada, é que embora seja indispensável levar em conta o encurtamento da corda para justificar a variação dos coeficientes de rigidez das barras, os mesmos encurtamentos podem ser esquecidos no cálculo dos esforços axiais dos pilares, considerando que para o carregamento particular dado (forças verticais nos nós), os pilares (supostos sem deformação axial) permanecem na posição vertical original e em equilíbrio (estável, instável ou indiferente).

Ao elaborar o programa que calcula os elementos da matriz  $[S_{ND}]$  (eq. 2.11) deve ser notado que para  $\rho = 1$ , a função  $\underline{s}$  (eq. 2.12) atinge uma indeterminação  $\infty/\infty$  (infinito dividido por infinito). Esta indeterminação pode ser levantada obtendo-se:

$$s(\rho = 1) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \approx 2,467401 \dots\dots\dots(2.18)$$

Cuidado deve ser tomado no programa de cálculo, quando  $\rho$  for próximo de 1, devendo o valor  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$  ser atribuído a  $\underline{s}$  nesse caso.

Outra indeterminação do tipo  $0 \times \infty$  (zero vezes infinito) poderá ocorrer na função  $\underline{sc}$ , quando for:

$$\tan 2\alpha = 2\alpha \dots\dots\dots(2.19)$$

que leva a solução numérica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2,246705 \dots \\ \rho = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 = 2,045749\dots \dots\dots(2.20) \\ sc = 3,604\dots \end{array} \right.$$

Assim, da mesma maneira como se procede anteriormente, quando for  $\rho$  muito próximo de 2,045749... atribui-se a  $\underline{sc}$  o valor 3,604.

Quanto à matriz de rigidez  $[ S^P ]$  do painel (eq. 2.3), julga-se suficiente dizer que existindo como se viu, alteração nas matrizes de rigidez  $[ S_{MD} ]$  das barras (eq. 2.11) decorrente da força axial, haverá também alteração dos elementos da matriz de rigidez  $[ S^P ]$  do pórtico, pois estes elementos são obtidos pela contribuição dos coeficientes de rigidez relativos a todas as barras.

## 2.6. Matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável

Considera-se neste estudo que as forças verticais concentradas nos nós constituem o único carregamento que produz solicitação do painel. Os esforços solicitantes (forças normais nos pilares) produzidos por estas cargas são facilmente obtidos pelo equilíbrio de forças verticais em cada nó do painel. Não há necessidade portanto de se utilizar cálculo matricial ou processo dos deslocamentos, usando matrizes que relacionam esforços e deslocamentos, sendo suficiente o uso de simples cálculo isostático.

Deve ser compreendido então, que a matriz de rigidez referida neste parágrafo corresponde a outras ações, diferentes das cargas externas. Este procedimento é característico da análise de instabilidade, onde a matriz que se procura e cujo comportamento deve ser estudado, é uma matriz que corresponde às eventuais ações perturbadoras do equilíbrio.



Quando o pórtico plano é indeslocável (situação que se alcança com um eficiente contraventamento conseguido com a colocação de barras diagonais bi-articuladas), as translações horizontais dos andares tornam-se desprezíveis. Adotando nulos os deslocamentos horizontais  $\{ D_H^P \}$ , a equação obtida de (2.2) e que relaciona as rotações  $\{ D_\theta^P \}$  dos nós com os momentos  $\{ A_\theta^P \}$  eventualmente aplicados nos mesmos nós é simplesmente escrita:

$$\left\{ A_\theta^P \right\}_{n_a \cdot n_c \times 1} = \left[ S_{\theta\theta}^P \right]_{n_a \cdot n_c \times n_a \cdot n_c} \times \left\{ D_\theta^P \right\}_{n_a \cdot n_c \times 1} \dots (2.21)$$

Uma vez calculada a matriz  $[ S^P ]$  (eq. 2.3), a matriz  $[ S_{\theta\theta}^P ]$  estará disponível como sub-matriz de  $[ S^P ]$ , sem a necessidade de rearranjo de linhas e colunas.

Esta matriz  $[ S_{\theta\theta}^P ]$ , correspondente às ações perturbadoras do equilíbrio, será chamada neste trabalho de matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável.

## 2.7. Parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável

Como já se disse, supor-se-á em todo este trabalho que os pórticos planos são carregados apenas com forças verticais (dirigidas para baixo) atuando em todos os seus nós. Supõe-se também que o carregamento considerado pode variar apenas de uma maneira simples, traduzida por um acréscimo simultâneo e proporcional de todas as cargas

aplicadas. Admite-se assim que o carregamento é constituído por um vetor de forças verticais aplicadas  $\{ A_v \}$  multiplicado por um parâmetro  $W (W > 0)$ , cujo valor crítico  $W_0$ , que produz a instabilidade do pórtico deseja-se determinar.

O tipo de análise de instabilidade adotado no presente estudo é chamado análise linear de instabilidade (vide manual STRUDL<sup>7</sup>), isto é, os esforços solicitantes produzidos pelo carregamento externo são proporcionais ao parâmetro  $W$  multiplicador das cargas. Em outras palavras, no cálculo dos esforços solicitantes admite-se a teoria de primeira ordem para as deformações e ainda o comportamento linear e elástico do material. Este tipo de análise é justificado no caso considerado em que são desprezadas as deformações axiais das barras, pois sendo o carregamento constituído apenas de forças verticais nos nós do pórtico, não ocorrerá deformações de flexão que justifique o uso da teoria de segunda ordem.

A teoria de segunda ordem é usada porém no cálculo das matrizes de rigidez correspondentes às eventuais ações perturbadoras do equilíbrio. Como se viu no parágrafo 2.5, é justamente o uso da teoria de segunda ordem que leva à definição dos coeficientes  $s$ ,  $c$  e  $m$  que alteram os coeficientes de rigidez das barras.

Então, nos pórticos retangulares em estudo com a análise linear de instabilidade, uma vez conhecido o esforço normal  $N_{i1}$  correspondente a  $W = 1$ , na barra  $i$ , o esforço normal  $N_{iW}$ , correspondente a qualquer outro valor do parâmetro  $W$ , é calculado por:

$$N_{iW} = N_{i1} \cdot W \dots\dots\dots(2.22)$$

Para cada valor de  $W$  existem as respectivas matrizes  $[S_{MD}]$  das barras (eq. 2.11) e também a respectiva matriz  $[S^P]$  do pórtico indeslocável (definida pela eq. 2.21) correspondente às ações perturbadoras.

Antes de definir o parâmetro crítico  $W_{\theta}$ , do pórtico suposto indeslocável, serão lembrados os possíveis estados de equilíbrio de um sistema deformável conservativo com  $n$  graus de liberdade (os graus de liberdade no caso, são os deslocamentos independentes correspondentes às ações perturbadoras):

- a) O equilíbrio do sistema é chamado estável se para levar o mesmo sistema a qualquer estado de deslocamento diferente do estado inicial, for necessário fornecer energia ao mesmo sistema.
- b) O equilíbrio do sistema é chamado instável se existir algum estado de deslocamento diferente do estado inicial, de maneira que ao atingir este estado de deslocamento a partir do estado inicial o sistema fornece energia ao meio circundante.

c) O equilíbrio do sistema é chamado indiferente se não for instável e se existir algum estado de deslocamento, diferente do estado inicial de maneira que ao atingir este estado de deslocamento a partir do estado inicial, não haja troca de energia entre o sistema e o meio circundante.

Define-se agora o parâmetro crítico  $W_0$  do pórtico suposto indeslocável: "é o menor valor do parâmetro  $W$  para o qual o pórtico admitido com translações horizontais impedidas, atinge o estado de equilíbrio indiferente".

Será visto no parágrafo 2.9 que os 3 estados de equilíbrio definidos acima através de conceitos físicos podem ser expressos por conceitos matemáticos, de fácil visualização, sobre a matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras. Também a definição de parâmetro crítico possui o correspondente conceito matemático.

## 2.8. Conceito e teoremas relativos aos auto-valores e auto-vetores de uma matriz simétrica.

Para melhor compreender os assuntos dos parágrafos seguintes, convém apresentar aqui algumas definições e teoremas relativos aos auto-valores  $\lambda_1$  e aos auto-vetores correspondentes  $\{ u_1 \}$  de uma matriz simétrica. Esses conceitos e teoremas são os seguintes:

Definição 1: Uma matriz quadrada  $[ \sigma ]$  de ordem  $n$  é definida positiva se for simétrica e se para qualquer vetor  $\{ x \}$  não nulo de ordem  $n$  for:

$$\{ x \}^T \cdot [ \sigma ] \cdot \{ x \} > 0 \quad \dots\dots\dots(2.23)$$

Definição 2: Seja  $[ \sigma ]$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Diz-se que  $\{ u \}$  é um auto-vetor de  $[ \sigma ]$  correspondente a um auto-valor  $\lambda$  se:

$$[ \sigma ] \cdot \{ u \} = \lambda \cdot \{ u \} \quad \dots\dots\dots(2.24)$$

Note-se que na eq. (2.24), que o auto-vetor  $\{ u \}$  é um vetor de módulo e sentido indeterminados, ou seja se  $\{ u \}$  é auto-vetor de  $[ \sigma ]$  correspondente ao auto-valor  $\lambda$ , então o produto de  $\{ u \}$  por um escalar é também auto-vetor de  $[ \sigma ]$  correspondente ao mesmo auto-valor  $\lambda$ .

A eq. (2.24) pode ser escrita:

$$([ \sigma ] - \lambda \cdot [ I ] ) \cdot \{ u \} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.25)$$

sendo  $[ I ]$  a matriz unidade.

Para que a eq. (2.25) tenha solução em  $[ u ]$  diferente da trivial é necessário e suficiente que se anule o determinante do pré-multiplicando, ou seja:

$$\det( [ \sigma ] - \lambda \cdot [ I ] ) = 0 \quad \dots\dots\dots(2.26)$$

O primeiro membro da eq. (2.26) é um polinômio de grau  $n$  em  $\lambda$ , polinômio este chamado polinômio característico. Conclui-se portanto que uma matriz  $[ \sigma ]$  de ordem  $n$  possui  $n$  auto-valores  $\lambda_i$  que são as soluções da eq. (2.26). Estes auto-valores nem sempre são distintos, podendo ocorrer auto-valores múltiplos.

Teorema 1: Todos os auto-valores  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) de uma matriz simétrica  $[ \sigma ]$ , são números reais.

Teorema 2: Os auto-vetores  $\{ u_1 \}, \{ u_2 \}, \dots, \{ u_m \}$  ( $m \leq n$ ) correspondentes a auto-valores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  de uma matriz simétrica  $[ \sigma ]$  de ordem  $n$  são ortogonais entre si.

Teorema 3: Se  $\{ u_1 \}, \{ u_2 \}, \dots, \{ u_m \}$  são auto-vetores correspondentes a um mesmo auto-valor  $\lambda$  de  $[ \sigma ]$ , então toda combinação linear desses auto-vetores é também auto-vetor de  $[ \sigma ]$  correspondente a  $\lambda$ .

Teorema 4: Seja  $[ \sigma ]$  uma matriz simétrica de ordem  $n$  com  $n$  auto-valores reais. Existem  $n$  auto-vetores ortogonais entre si correspondentes a esses auto-valores.

Teorema 5: Qualquer vetor  $\{ x \}$  de ordem  $n$  pode ser expresso por uma combinação linear dos  $n$  auto-vetores ortogonais entre si, de uma matriz simétrica  $[ \sigma ]$  de ordem

$n$ , isto é:

$$\{ x \} = a_1 \cdot \{ u_1 \} + a_2 \cdot \{ u_2 \} + \dots + a_n \cdot \{ u_n \} \dots (2.27)$$

sendo os  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), números reais.

Teorema 6: Os auto-valores  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) de uma matriz  $[ \sigma ]$  definida positiva são todos maiores que zero.

Teorema 7: Se uma matriz simétrica  $[ \sigma ]$  possui todos os seus auto-valores positivos, então ela é definida positiva.

Teorema 8: O determinante de uma matriz  $[ \sigma ]$  de ordem  $n$ , é igual ao produto dos seus  $n$  auto-valores:

$$\det. ( [ \sigma ] ) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \dots (2.28)$$

Teorema 9: Seja  $[ A ]$  uma matriz simétrica de ordem  $n$ :

$$[ A ] = \left[ \begin{array}{c|c} [ B ] & \{ r \} \\ \hline \{ r \}^T & a \end{array} \right] \dots (2.29)$$

onde  $[ B ]$  é a matriz simétrica de ordem  $(n-1)$ ;  $a$  é o

último elemento da diagonal principal,  $\{ r \}$  é um vetor coluna e  $\{ r \}^T$  é o vetor transposto de  $\{ r \}$ .

Sejam  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$  os  $n$  auto-valores de  $[ A ]$  e  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{n-1}$  os  $(n-1)$  auto-valores de  $[ B ]$ .

Ter-se-á então:

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n \dots \dots \dots (2.30)$$

isto é, os auto-valores de  $[ B ]$  separam os auto-valores de  $[ A ]$ .

Os pormenores sobre as definições e teoremas acima enunciados podem ser encontrados nos livros de Mc MINN<sup>o</sup>, PIPES e HOVANESSION<sup>o</sup> e também no livro de BARROS<sup>1o</sup>.

## 2.9. Conceitos matemáticos correspondentes aos possíveis estados de equilíbrio do pórtico suposto indeslocável. Outra definição do parâmetro crítico $W_{\theta}$ .

Convencionando que o sistema em estudo é composto da estrutura (que só pode adquirir energia de deformação positiva), e do carregamento constituído de cargas verticais nos nós, ao serem introduzidos deslocamentos  $\{ D_{\theta}^P \}$  nas direções das ações perturbadoras  $\{ A_{\theta}^P \}$  (vide eq.



2.21), a energia total fornecida ao sistema pelo meio circundante se reduz apenas ao trabalho fornecido pelas ações perturbadoras.

Essa energia fornecida pelo exterior vale então:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ D_{\theta}^P \right\}^T \cdot \left[ S_{\theta\theta}^P \right] \cdot \left\{ D_{\theta}^P \right\} \dots\dots\dots(2.31)$$

Deve-se salientar que a matriz  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  é função das forças axiais dos pilares (P).

Observando a definição 1 e as eqs. 2.23 e 2.31 conclui-se que o equilíbrio do pórtico será estável se e somente se a matriz de rigidez  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  correspondentes às ações perturbadoras for definida positiva. Dos teoremas 1, 6 e 7 conclui-se ainda que o equilíbrio do pórtico será estável se somente se todos os auto-valores de  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  forem positivos.

Considere-se agora o teorema 5. Para maior simplicidade, chamar-se-á de  $[\sigma]$  a matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável (correspondente às ações perturbadoras). Um vetor de deslocamentos genéricos  $\{ \kappa \}$  poderá então ser escrito:

$$\{ \kappa \} = a_1 \{ u_1 \} + a_2 \{ u_2 \} + \dots + a_n \{ u_n \} \dots\dots(2.32)$$

sendo  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) auto-vetores de  $[\sigma]$  ortogonais

entre si,  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) coeficientes não todos nulos com qualquer sinal e  $n = n_a \cdot n_c$ . A energia de deformação  $\varepsilon$  correspondente a esses deslocamentos  $\{ x \}$  será:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \{ x \}^T [ \sigma ] \{ x \} \\ &= \frac{1}{2} \{ x \}^T [ \sigma ] (a_1 \{ u_1 \} + a_2 \{ u_2 \} + \dots + a_n \{ u_n \}) \\ &= \frac{1}{2} \{ x \}^T (\lambda_1 a_1 \{ u_1 \} + \lambda_2 a_2 \{ u_2 \} + \dots + \lambda_n a_n \{ u_n \}) \\ &= \frac{1}{2} (a_1 \{ u_1 \}^T + \dots + a_n \{ u_n \}^T) (\lambda_1 a_1 \{ u_1 \} + \dots + \lambda_n a_n \{ u_n \}) \\ &\dots\dots\dots(2.33) \end{aligned}$$

Lembrando a ortogonalidade entre os auto-vetores da matriz simétrica, tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} (\lambda_1 a_1^2 \{ u_1 \}^2 + \lambda_2 a_2^2 \{ u_2 \}^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 \{ u_n \}^2) \\ &\dots\dots\dots(2.34) \end{aligned}$$

Como todos os produtos  $a_i^2 \cdot \{ u_i \}^2$  da eq. (2.34) são positivos, nota-se que o sinal que a energia de deformação  $\varepsilon$  pode assumir dependerá dos sinais assumidos pelos auto-valores da matriz  $[ \sigma ]$ . Conclui-se que o equilíbrio do pórtico indeslocável será instável se e somente se algum dos auto-valores  $\lambda_i$  da matriz  $[ \sigma ]$  (correspondente às ações perturbadoras) for negativo. Conclui-se também que o equilíbrio será indiferente se e somente se nenhum dos auto-valores for negativo, sendo algum auto-valor  $\lambda_i$  nulo.

Para elucidar esses conceitos, as figuras 2.4a, 2.4b e 2.4c mostram a situação do espectro de auto-valores de uma matriz  $[\sigma]$  de ordem  $3 \times 3$  correspondente às ações perturbadoras, nos diferentes estados de equilíbrio.

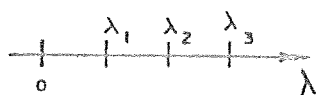


FIG. 2.4a - Espectro de auto-valores da matriz  $[\sigma]$  (de ordem  $3 \times 3$ ) no equilíbrio estável. A matriz  $[\sigma]$  é definida positiva.

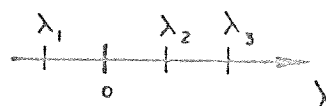


FIG. 2.4b - Espectro de auto-valores da matriz  $[\sigma]$  (de ordem  $3 \times 3$ ) no equilíbrio instável. A matriz  $[\sigma]$  não é definida positiva.

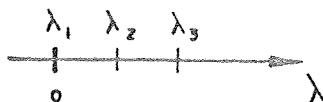


FIG. 2.4c - Espectro de auto-valores da matriz  $[\sigma]$  (de ordem  $3 \times 3$ ) no equilíbrio indiferente. A matriz não é definida positiva.

Quando for  $W = 0$ , não haverá esforço axial nas barras e neste estado o pórtico suposto indeslocável será estável. Para este primeiro valor de  $W$ , a matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  é definida positiva sendo positivos todos os seus auto-valores e sendo também  $\det(\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}) > 0$  (conforme teorema 8). Ao se variar  $W$  por valores crescentes, haverá correspondentemente uma variação contínua no espectro dos auto-valores da matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  (baseado na continuidade das funções  $s, sc, s(1+c)$  e  $2s(1+c)/m$  mostradas na Fig. 2.3). Nessa variação do espectro, o menor auto-valor  $\lambda_{\min}$  de  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  decresce e antes que se torne negativo deverá existir um valor  $W = W_{\theta}$  em correspondência ao qual será  $\lambda_{\min} = 0$ , isto é, ao crescer de  $W$ , antes que o pórtico se torne instável, haverá um valor  $W = W_{\theta}$  para o qual o equilíbrio do pórtico será indiferente.

Como a monotonicidade das funções  $s, sc, s(1+c)$  e  $s(1+c)/m$  (Fig. 2.3) deverá implicar na monotonicidade do auto-valor  $\lambda_{\min}$  pode-se dar outra definição para o parâmetro crítico  $W_{\theta}$  do pórtico suposto indeslocável: "é o valor do parâmetro  $W$  para o qual se torna nulo o menor auto-valor  $\lambda_{\min}$  da matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  correspondente às ações perturbadoras".

## 2.10. Modos de flambagem do pórtico suposto indeslocável

Ao aumentar de  $W$ , quando o parâmetro crítico  $W_{\theta}$  do pórtico suposto indeslocável é atingido, a matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$

torna-se singular (vide teorema 8), sendo que a singularidade não ocorre para nenhum valor de  $W$  menor que  $W_{\theta}$ .

Quando  $W = W_{\theta}$ , admitindo nulas as ações perturbadoras  $\{ A_{\theta}^P \}$  (o que impõe a condição de ser nula a energia trocada entre o sistema e o meio circundante) na eq. (2.21) tem-se:

$$\theta = \left[ S_{\theta\theta}^P \right] \cdot \{ D_{\theta}^P \} \dots\dots\dots (2.35)$$

Como  $\det\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  é nulo, o sistema (2.35) possui solução em  $\{ D_{\theta}^P \}$  o que mostra que de fato, quando  $W_{\theta}$  é atingido os deslocamentos podem ocorrer no pórtico sem que este troque energia com o meio circundante.

Se o menor auto-valor  $\lambda_{\min} = \theta$  de  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  for único (de multiplicidade 1), os únicos deslocamentos  $\{ D_{\theta}^P \}$  que podem ocorrer, sem haver troca de energia com o meio circundante, são o próprio auto-vetor correspondente a  $\lambda_{\min}$ . Isto pode ser verificado nas eqs. (2.32) e (2.34) do parágrafo anterior que aqui se transcrevem respectivamente:

$$\{ x \} = a_1 \{ u_1 \} + a_2 \{ u_2 \} + \dots + a_n \{ u_n \} \dots\dots(2.32)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\lambda_1 a_1^2 \{ u_1 \}^2 + \lambda_2 a_2^2 \{ u_2 \}^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 \{ u_n \}^2) \dots\dots\dots(2.34)$$

Como no equilíbrio indiferente não existe nenhum auto-valor negativo, vê-se na eq. (2.34) que a energia de deformação recebida pelo pórtico só pode ser nula se o único elemento não nulo da combinação linear (2.34) for o coeficiente  $a_i$  correspondente ao auto-valor  $\lambda_i = \lambda_{\min} = 0$ .

O vetor de deslocamentos  $\{ D_{\theta}^P \}$ , representado pelo auto-vetor correspondente a  $\lambda_{\min}$  (de multiplicidade 1) e determinado a menos de uma constante multiplicativa é chamado de modo de flambagem do pórtico suposto indeslocável. A denominação modo de flambagem deve lembrar que ao atingir o equilíbrio indiferente, o pórtico só pode deformar-se com deslocamentos que guardam entre si as mesmas relações guardadas entre os deslocamentos do auto-vetor correspondente a  $\lambda_{\min} = 0$ .

Quando o menor auto-valor  $\lambda_{\min} = 0$  de  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  for de multiplicidade  $k$ , conclui-se ainda das eqs. (2.32) e (2.34) que o pórtico ao atingir o estado crítico (equilíbrio indiferente) pode assumir, sem trocar energia com o meio circundante, quaisquer deslocamentos  $\{ D_{\theta}^P \}$  que sejam combinações lineares dos  $k$  auto-vetores, ortogonais entre si, correspondentes a  $\lambda_{\min} = 0$ .

## 2.11. Determinação do parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável

Existem diversos procedimentos para determinar o parâmetro crítico de uma estrutura, ou seja, de encontrar o

menor valor do parâmetro multiplicador das cargas para o qual a matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras torna-se singular, deixando de ser definida positiva. Esses procedimentos se baseiam ou no cálculo de auto-valores (vide Mc MINN<sup>8</sup>) ou no acompanhamento da variação do determinante da matriz ao crescer de W. Infelizmente, qualquer dessas procedimentos envolve grande quantidade de operações numéricas repetitivas que tornam o cálculo demorado, mesmo em computadores.

Um procedimento apresentado por FIGUEIREDO<sup>1</sup> se mostrou contudo bastante econômico em tempo de computação. Esse procedimento não calcula auto-valores da matriz e permite uma iteração de rápida convergência, sem se preocupar em acompanhar a variação do determinante da matriz para pequenos acréscimos do parâmetro W. O procedimento chamado por FIGUEIREDO<sup>1</sup> de "Método de GAUSS adaptado à instabilidade" baseia-se em efetuar a conhecida decomposição de GAUSS<sup>11</sup> para matrizes simétricas em banda diagonal operando apenas nos elementos da banda superior, fazendo as alterações necessárias coluna por coluna e não linha por linha como se faz usualmente. Exemplificando, considere-se a matriz simétrica em banda diagonal representada na fig. 2.5.

O método de decomposição de GAUSS, consiste em decompor a matriz dada  $[ \sigma ]$  no produto de duas outras:

$$[ \sigma ] = [ L ] \cdot [ U ] \dots\dots\dots(2.36)$$

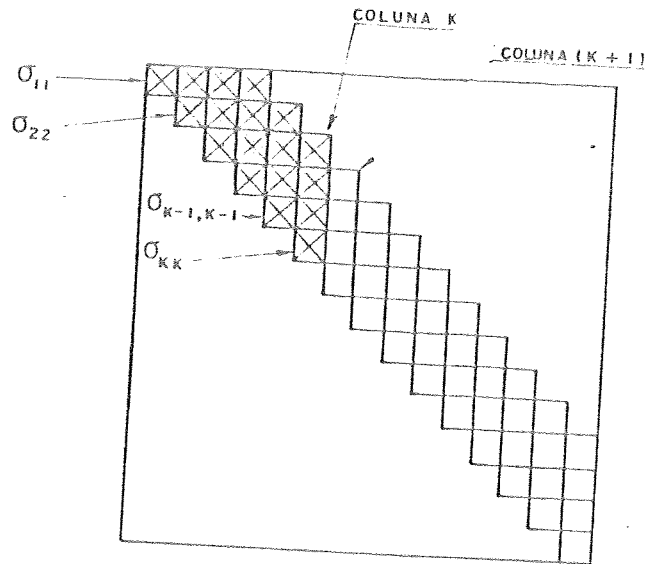


FIG. 2.5 - Esquematização das alterações sofridas na matriz  $[\sigma]$ , decorrentes da aplicação do método de decomposição de GAUSS.

sendo  $[L]$  triangular inferior com diagonal constituída de elementos unitários; enquanto  $[U]$  é triangular superior. A matriz  $[U]$ , uma vez obtida facilita o cálculo do determinante de  $[\sigma]$  que é igual ao produto de todos os elementos de sua diagonal principal.

Quando  $[\sigma]$  for simétrica, a decomposição de GAUSS fica bem simplificada pois, para se obter  $[U]$  pode-se operar apenas nos elementos da parte triangular superior de  $[\sigma]$ , não havendo necessidade de calcular nem armazenar  $[L]$ , pois sabe-se que  $[L]$  pode ser obtida de  $[U]$  dividindo cada linha de  $[U]$  pelo elemento dessa linha localizado na diagonal principal e em seguida tomando-se a matriz transposta. Se  $[\sigma]$  além de simétrica for em banda



diagonal, a economia de cálculo se torna bem maior.

Se as alterações que se processam nas colunas da matriz  $[ \sigma ]$  (Fig. 2.5) forem efetuadas em etapas, coluna por coluna, a partir da 2ª coluna, após cada etapa  $k$  será fácil encontrar o valor do determinante correspondente à matriz menor de ordem  $k$  e de diagonal comum à diagonal de  $[ \sigma ]$ , por:

$$\begin{aligned} \det_1 &= \sigma_{11} \\ & \dots\dots\dots(2.37) \\ \det_k &= \sigma_{kk} \cdot \det_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

Na Fig. 2.5, onde os elementos marcados com  $\times$  são os elementos nos quais já se efetuaram modificações, vê-se a situação em que fica a matriz  $[ \sigma ]$  após as alterações realizadas na etapa  $k$ . Os teoremas 8 e 9 dizem que se a matriz de ordem  $k$  for definida positiva, então todas as outras matrizes de ordem menor que  $k$ , também são definidas positivas, e que todos os elementos já calculados  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{kk}$  são positivos. Se acontecer na etapa  $(k+1)$  de ser a matriz de ordem  $(k+1)$  não definida positiva, sabe-se desde logo que todas as matrizes de ordem maior que  $(k+1)$  são também não definidas positivas, inclusive a própria matriz  $[ \sigma ]$ . Os teoremas 8 e 9 informam também o importante fato de que nesta etapa  $(k+1)$  deverá ser encontrado um valor  $\sigma_{k+1, k+1}$  negativo ou nulo.

Com a explanação acima, vê-se que testando em cada etapa o sinal de  $\sigma_{kk}$ , obtém-se grande economia de tempo de

computação pois muitas vezes, quando a matriz  $[\sigma]$  é não definida positiva, os cálculos podem ser interrompidos no meio do procedimento ( quando for encontrado  $\sigma_{kk} \leq 0$  com  $k < n$ ) sem necessidade de efetuar as alterações até a última coluna  $n$ . Quando não for encontrado nenhum  $\sigma_{kk} \leq 0$ , as alterações nos elementos de  $[\sigma]$  serão feitas até a última coluna dessa matriz  $[\sigma]$  é definida positiva.

As alterações decorrentes da aplicação do método de GAUSS (adaptado à análise de instabilidade), que deverão ser efetuadas na matriz  $[\sigma]$  de ordem  $n$  para o cálculo dos determinantes de  $[\sigma]$  e de suas sub-matrizes cujas diagonais coincidem com a de  $\sigma$  são expressas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \det_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sum_{k=k_{\min}}^{i-1} \frac{\sigma_{ki} \cdot \sigma_{kj}}{\sigma_{kk}} \quad \dots\dots\dots (2.38) \\ (j = 2, 3, \dots, n) ; (i = i_{\min}, i_{\min+1}, \dots, j) \\ \det_j = \sigma_{jj} \cdot \det_{j-1} \quad \dots\dots\dots (2.39) \end{array} \right.$$

$$\text{sendo } i_{\min} = \max\{ j - e_{bs\theta} + 2, 2 \} \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\text{e } k_{\min} = i_{\min} - 1 \quad \dots\dots\dots (2.41)$$

Na eq (2.40)  $e_{bs\theta}$  é a largura da banda superior da matriz simétrica  $[\sigma]$  ( $e_{bs\theta} = \min\{ n_c + 1, n_a \cdot n_c \}$ ).

Como após ser aplicado o método de GAUSS (adaptado a análise de instabilidade) é possível saber se a matriz  $[ \sigma ]$  (correspondente a um certo valor de  $W$ ), é ou não definida positiva, este fato sugere a aplicação de um cálculo iterativo de rápida convergência que consiste em escolher um intervalo inicial de variação de  $W$  e dividi-lo ao meio sucessivamente, verificando em cada ciclo se o valor de  $W_0$  foi ultrapassado ou não. Assim usa-se o

ALGORITMO:

Para  $W = 1$ , determina-se a barra crítica (barra correspondente a maior relação  $\rho = \frac{P}{P_E}$ ). Seja  $\rho_{\max}$  este valor; adotando-se  $W = \frac{1}{\rho_{\max}}$ , ocorrerá  $\rho = 1$  na barra crítica sendo o pórtico indeslocável estável nessa condição. Um limite superior da solicitação axial que a barra crítica pode suportar é expresso pela condição  $\rho = 4$  (correspondente a flambagem da barra bi-engastada). Portanto o extremo superior do intervalo onde  $W_0$ , será procurado é  $W_{\max} = \frac{4}{\rho_{\max}}$ .

Inicia-se o algoritmo com o intervalo  $[a,b]$  onde  $a = 0$  e  $b = W_{\max}$ . Adota-se:

$$W = \frac{a+b}{2} \dots\dots\dots (2.42)$$

Calcula-se  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  e pelo método de GAUSS, deve-se verificar se  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  é ou não definida positiva. Se  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  não for definida positiva, adota-se  $W$  como novo  $\underline{b}$ . Se  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  for definida positiva, adota-se  $W$  como novo  $\underline{a}$ .

Repete-se o procedimento, dividindo-se o intervalo  $[a,b]$  ao meio em cada etapa. Ao interromper o processo ter-se-á:

$$a < W_{\theta} < b \quad \dots\dots\dots(2.43)$$

onde  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são os últimos adotados. A precisão do resultado dependerá do número de ciclos executados, sendo o procedimento rapidamente convergente (para as finalidades da prática são suficientes 8 ou 9 ciclos).

## 2.12. Determinação do modo de flambagem do pórtico suposto indeslocável

Como se viu no parágrafo 2.10, acontece frequentemente que ao ser atingido o valor do parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável, a matriz  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  possui o auto-valor  $\lambda_{\min} = 0$  isolado (de multiplicidade igual a 1). Nesse caso existirá também apenas um auto-vetor correspondente a  $\lambda_{\min}$ , isto é, existe um modo de flambagem bem definido que estabelece a forma ou relação entre os deslocamentos que ocorrem no instante em que o pórtico perde estabilidade.

A Fig. 2.6 mostra o exemplo de um pórtico indeslocável apresentando os deslocamentos típicos de um modo de flambagem.

Quando se procura determinar o parâmetro crítico  $W_{\theta}$  pelo algoritmo descrito no parágrafo anterior, ao terminar-se a execução do algoritmo, não se pode afirmar que o auto-valor  $\lambda_{\min}$  é nulo. Garante apenas que  $\lambda_{\min}$  é bem próximo de zero (relativamente às grandezas dos outros auto-valores), fato que será indicado por  $\lambda_{\min} \approx 0$ . Por esse motivo o modo de flambagem correspondente a  $\lambda_{\min}$  (de multiplicidade = 1) não pode ser obtido como solução do sistema (2.35) cuja matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  não será singular.

A procura do modo de flambagem no caso de  $\lambda_{\min} \approx 0$  ser de multiplicidade 1 se resume portanto na procura do auto-vetor correspondente ao auto-valor isolado  $\lambda_{\min} \approx 0$ .

Convém explicar que, se ao terminar-se o algoritmo para determinação de  $W_{\theta}$ , a matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  apresentar auto-valor  $\lambda_{\min} \approx 0$  com multiplicidade 2 ou maior, a procura dos auto-vetores correspondentes a  $\lambda_{\min}$  deixa de ter finalidade prática, pois nesses casos, ao perder estabilidade, os deslocamentos do pórtico não guardam entre si uma relação fixa, podendo ocorrer deslocamentos que são uma qualquer das infinitas combinações lineares possíveis daqueles auto-vetores.

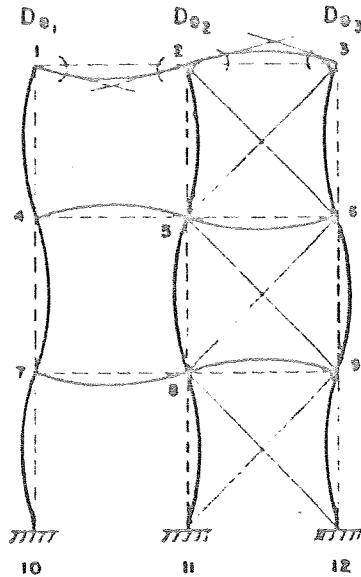


FIG. 2.6 - Modo possível de flambagem  
de um pórtico indeslocável.

A rigor, não existe um modo definido de flambagem.

Então para procurar o modo de flambagem do pórtico,  
se existente, deve-se:

1o) Procurar os menores auto-valores da matriz  

$$\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$$
 (sugere-se encontrar os 3 ou 4 menores auto-valores).

2o) Verificar se o menor auto-valor é diferente dos outros encontrados.

3o) Se o menor auto-valor for igual a pelo menos um dos outros encontrados, não será procurado modo de

flambagem por falta de finalidade prática.

4g) Se o menor auto-valor for diferente dos demais, determina-se o auto-vetor correspondente a esse auto-valor, que será o modo de flambagem procurado.

Na aplicação do procedimento acima, surgem problemas computacionais e problemas de aproximação numérica, para os quais algumas soluções são sugeridas por FIGUEIREDO<sup>1</sup>. Deseja-se apenas informar que na determinação dos auto-valores e auto-vetores da matriz  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  podem ser usados o método iterativo (baseado no método de potenciação de matrizes), o método de GIVENS-HOUSEHOLDER<sup>12</sup> ou o método de JACOBI<sup>13</sup>.

### 2.13. Matriz de rigidez do pórtico suposto deslocável.

#### Pórticos com barras diagonais.

Considere-se a eq. (2.2). Foi visto no parágrafo 2.6 que, quando o pórtico plano retangular for eficientemente contraventado (com barras diagonais por exemplo), os deslocamentos horizontais  $\{ D_H^P \}$  podem ser desprezados, obtendo-se de (2.2):

$$\{ A_{\theta}^P \} = \left[ S_{\theta\theta}^P \right] \cdot \{ D_{\theta}^P \} \dots\dots\dots (2.21)$$

Esta última equação levou à definição da matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$

correspondente as ações perturbadoras  $\{ A_0^P \}$ , matriz esta cujo estudo permite verificar se o estado de equilíbrio do pórtico indeslocável é estável, instável ou indiferente.

Quando o pórtico retangular não possuir contraventamento algum, ou então, possuir um contraventamento deficiente, ou seja, um "contraventamento" realizado com diagonais de rigidezes axiais demasiadamente pequenas, ocorrerá que, ao perder estabilidade, este pórtico mostrará um modo de flambagem com translações horizontais não desprezíveis nos andares.

Esta característica comum, de apresentarem translações horizontais não desprezíveis ao perderem estabilidade sugere que seja dado, a estes tipos de pórtico um tratamento semelhante ao se efetuar suas análises de instabilidade. Esse tratamento semelhante consiste em considerar uma mesma matriz  $\left[ S_{HH}^* \right]$  ( a ser definida adiante) correspondente às translações dos andares, para procura do parâmetro crítico e do modo de flambagem.

As barras diagonais usadas para contraventar pórticos retangulares são geralmente esbeltas, com desprezível resistência à compressão, o que obriga a se usar duas diagonais cruzadas em cada andar. Como as barras diagonais possuem rigidezes axiais bem menores que as rigidezes axiais dos pilares, pode-se desprezar as deformações axiais destes últimos e continuar omitindo no cálculo as translações verticais dos nós, como já se procedeu no parágrafo 2.4 .



Vê-se então, que o comportamento de um pórtico retangular com diagonais esbeltas, sob ação das cargas externas concentradas, pode também ser descrito pela eq. (2.2) onde os deslocamentos considerados são somente as rotações dos nós e as translações dos andares. Para se obter a matriz  $[S^P]$  (eq. 2.3) do pórtico com barras diagonais deve-se considerar a contribuição dos pilares e vigas, como se fez no parágrafo (2.4) e também a contribuição das barras diagonais. Estas últimas devem ser orientadas de cima para baixo e tratadas da mesma maneira como a barra vertical (parágrafo 2.4), com translações verticais impedidas dos nós. As matrizes de rigidez  $[S_{MD}]$  das barras diagonais podem ser calculadas pela mesma eq. (2.11) onde evidentemente  $C_x$  e  $C_y$  não são mais nulos e  $I_z$  pode ser tomado igual a zero. Os deslocamentos possíveis na barra diagonal e no pórtico são numerados como na Fig. 2.7. As contribuições dos elementos de  $[S_{MD}]$  da barra diagonal na matriz  $[S^P]$  são calculados pelas mesmas eqs. (2.9) e (2.10).

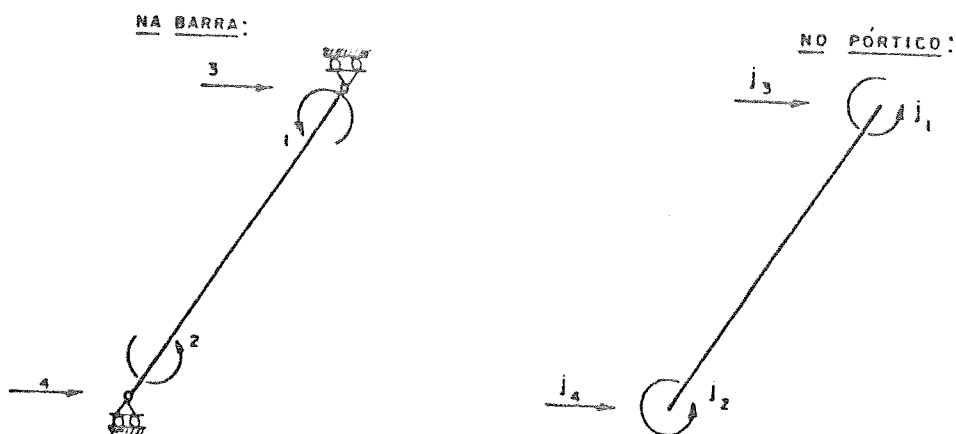


Fig. 2.7 - Deslocamentos possíveis nas barras inclinadas e deslocamentos correspondentes no pórtico.

Como a resistência à compressão das diagonais esbeltas é desprezível, a contribuição que duas barras diagonais iguais e cruzadas adicionam à matriz  $[S^P]$  (eq. 2.3) por efeito de suas rigidezes axiais é sensivelmente igual à contribuição de apenas uma barra diagonal na qual se omite a possibilidade de flambagem.

Uma vez calculada a matriz  $[S^P]$  (eq. 2.3) com o procedimento do parágrafo 2.4, considerando também a contribuição das barras diagonais, quando existirem, pode-se obter da eq. (2.2), a matriz de rigidez reduzida correspondente às translações horizontais dos andares:

$$[S_{HH}^*] = [S_{HH}] - [S_{H\theta}] \cdot [S_{\theta\theta}^P]^{-1} \cdot [S_{\theta H}] \dots (2.44)$$

sendo:

$$[A_H^P] = [S_{HH}^*] \cdot [D_H^P] \dots \dots \dots (2.45)$$

Esta matriz  $[S_{HH}^*]$  (eq. 2.44) que relaciona as translações horizontais  $\{D_H^P\}$  dos andares com as forças horizontais  $\{A_H^P\}$  nos mesmos, enquanto são livres as rotações  $\{D_\theta^P\}$  dos nós (isto é,  $\{A_\theta^P\} = 0$ ), será chamada de matriz de rigidez do pórtico suposto deslocável.

A designação "suposto" deslocável é usada porque é atribuída também a pórticos contraventados com barras diagonais. Deve ser notado que um pórtico desse tipo classificado de início como indeslocável poderá ter de fato o comportamento indeslocável para pequenas cargas

aplicadas, mas que ao crescer destas cargas, até que atinjam o carregamento crítico, o pórtico venha a flambar com translações significativas nos andares e portanto, com comportamento deslocável.

Portanto, para a análise de instabilidade, a classificação do pórtico retangular como deslocável depende do seu comportamento na flambagem.

Como nem sempre é possível prever o comportamento do pórtico contraventado durante a flambagem, sendo que este comportamento depende da rigidez axial das diagonais, define-se então a matriz  $\left[ S_{HH}^* \right]$  (eq. 2.44) denominando-a matriz de rigidez do pórtico "suposto" deslocável. Essa matriz será usada, como se verá, tanto no estudo da flambagem dos pórticos deficientemente contraventados como no estudo da flambagem dos pórticos eficientemente contraventados.

E' importante salientar o fato de que, para garantir a existência de  $\left[ S_{HH}^* \right]$ , é necessário primeiramente garantir a de  $\left[ S_{\theta\theta}^p \right]^{-1}$  (vide eq. 2.44). Pode-se contudo afirmar que para os valores do parâmetro  $W$  satisfazendo:

$$0 < W < W_{\theta} \dots\dots\dots (2.46)$$

a matriz  $\left[ S_{\theta\theta}^p \right]$  é definida positiva, e portanto, neste intervalo de  $W$ , existirão sempre as matrizes  $\left[ S_{\theta\theta}^p \right]^{-1}$  e  $\left[ S_{HH}^* \right]$ .

2.14. Cálculo de  $\left[ S_{HH}^* \right]$ 

A maneira mais prática de se obter  $\left[ S_{HH}^* \right]$  a partir de  $\left[ S^P \right]$  é usando-se o método de eliminação de GAUSS<sup>14</sup> para solução de sistemas lineares.

Liberar as rotações dos nós do pórtico retangular equivalente a adotar  $\{ A_{\theta}^P \} = \emptyset$  na eq. (2.2); tem-se então:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \left[ S_{\theta\theta}^P \right] & \left[ S_{\theta H}^P \right] \\ \hline \left[ S_{H\theta}^P \right] & \left[ S_{HH}^P \right] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \{ D_{\theta}^P \} \\ \hline \{ D_H^P \} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{ \emptyset \} \\ \hline \{ A_H^P \} \end{array} \right\} \dots (2.47)$$

O método de eliminação de GAUSS aplicado parcialmente à eq.(2.47) levará ao sistema:

$$\left[ \begin{array}{c|c} [U] & \left[ \sigma_{\theta H} \right] \\ \hline \emptyset & \left[ \sigma_{HH} \right] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \{ D_{\theta}^P \} \\ \hline \{ D_H^P \} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{ \emptyset \} \\ \hline \{ A_H^P \} \end{array} \right\} \dots (2.48)$$

donde

$$\left[ \sigma_{HH} \right] \cdot \{ D_H^P \} = \{ A_H^P \} \dots (2.49)$$

Comparando-se (2.49) com (2.45) conclui-se que:

$$\left[ S_{HH}^* \right] = \left[ \sigma_{HH} \right] \dots (2.50)$$

sendo a matriz do 2º membro obtida com o método de eliminação de GAUSS.

Para melhor compreender o procedimento de cálculo considere-se o pórtico da Fig. 2.8, com 5 andares e 3 prumadas de pilares.

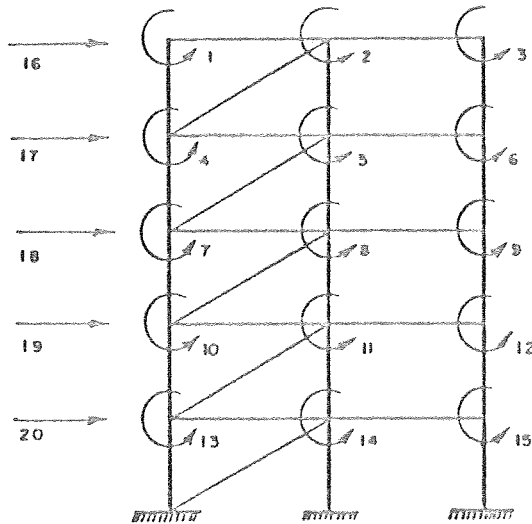


Fig. 2.8 - Pórtico com 5 andares e 3 prumadas de pilares.

A Fig. 2.9 apresenta o esquema de armazenamento da parte triangular superior da matriz  $[S^P]$  correspondente ao pórtico da fig. 2.8.

Na Fig. 2.9 os elementos em escuro na matriz são os elementos da diagonal principal. Os elementos nulos que permanecem inalterados na eliminação parcial de GAUSS são indicados por  $Z_0$  enquanto os elementos nulos que serão alterados no processo estão indicados por  $Z_A$ . Na mesma Fig. 2.9,  $\ell_{bs\theta}$  é a largura verdadeira da banda superior de  $[S^P_{\theta\theta}]$  e  $\ell_{bsH}^*$  é a largura admitida (para economia de tempo

e memória de cálculo) para a banda superior de  $\left[ S_{HH}^* \right]$  (não confundir com  $\ell_{bsH} = 2$  que é a largura da banda superior de  $\left[ S_{HH}^P \right]$ ). A largura admitida  $\ell_{bsH}^*$  é estabelecida considerando que a translação de um andar requer forças horizontais significativas apenas nos andares vizinhos. FIGUEIREDO<sup>1</sup> sugere  $\ell_{bsH}^* = 6$  na análise de instabilidade de pórticos retangulares planos.

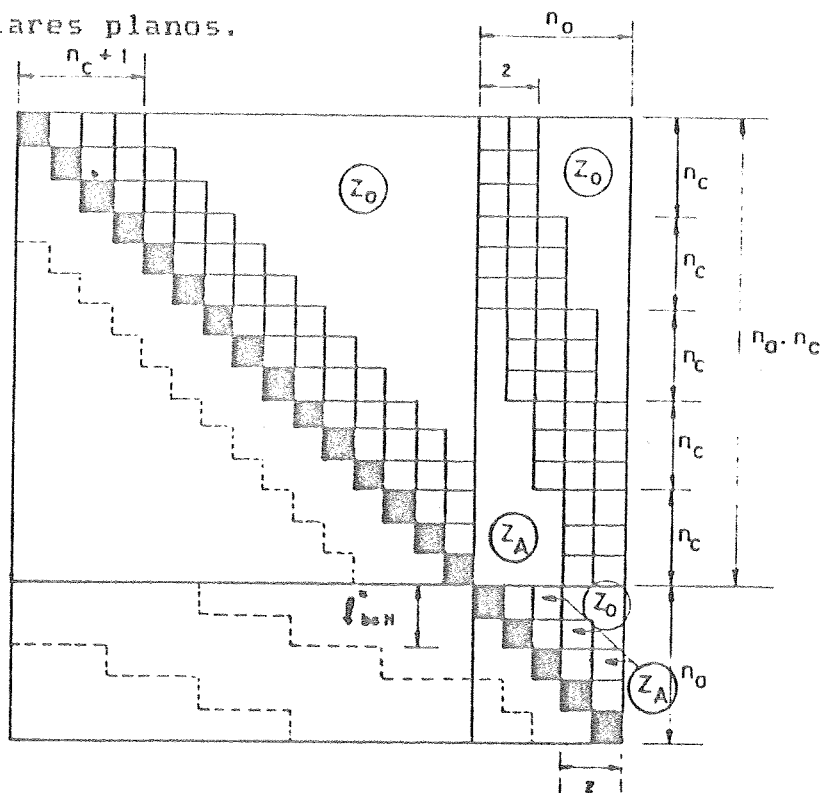


Fig. 2.9 - Esquema de armazenamento da parte simétrica superior da matriz  $\left[ S^P \right]$  correspondente ao pórtico da Fig. 2.8.

A eliminação das primeiras  $(n_a \cdot n_c)$  equações do sistema (2.47) operando apenas na parte triangular superior (alterando  $Z_A$  mas sem alterar  $Z_0$  pode ser feita pelas eqs. (2.38), (2.40) e (2.41) do parágrafo 2.11, seguidas das:



estabilidade apresentar translações horizontais significativas nos andares. Este pórtico deslocável poderá então possuir ou não um " contraventamento " de barras diagonais.

O parâmetro crítico  $W_H$  dos pórticos deslocáveis (do ponto de vista da análise de instabilidade) é definido como "o menor valor do parâmetro  $W$  para o qual podem ocorrer as translações horizontais dos andares sem que o pórtico troque energia com o meio circundante". O uso dessa definição equivale a adotar a matriz  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$  (eq. 2.44) como correspondente às ações perturbadoras. O parâmetro crítico  $W_H$  será também o menor valor de  $W$  para o qual se torna nulo o menor auto-valor  $\lambda_{\min}$  da matriz  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$ .

#### 2.16. Determinação do parâmetro crítico do pórtico deslocável

Para a determinação de  $W_H$  do pórtico deslocável (do ponto de vista da análise de instabilidade), a matriz  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$  deve ser determinada para diversos valores de  $W$ , seguindo os procedimentos dos parágrafos 2.4 e 2.14, usando-se também o método de GAUSS aplicado à instabilidade e o algoritmo da pag.33, para saber quando  $\lambda_{\min}$  se aproxima de zero.

Não há interesse em procurar o parâmetro crítico  $W_H$  para valores maiores que  $W_\theta$ , pois para  $W = W_\theta$  o pórtico já



entraria em colapso mesmo se fosse eficientemente contraventado (pórtico indeslocável).

Então deve-se primeiramente tratar o pórtico (possível de perder estabilidade com translações horizontais significativas) como indeslocável e determinar-se  $W_{\theta}$ . Em seguida procura-se  $W_H$  partindo-se do intervalo  $0 \leq W \leq W_{\theta}$ , usando o procedimento iterativo de dividir o intervalo ao meio em cada etapa. Como já se viu, a matriz  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$  pode sempre ser encontrada dentro do intervalo inicial de variação de  $W$ . Também, como admite-se que o pórtico apresenta translações horizontais ao atingir o equilíbrio indiferente (portanto numa situação de menor vinculação que a do pórtico indeslocável), será certamente  $W_H < W_{\theta}$ .

## 2.17. Verificação da eficiência do contraventamento realizado por barras diagonais.

Quando se tem a certeza de que o pórtico é eficientemente contraventado, o parâmetro crítico  $W_{\theta}$  do pórtico indeslocável pode ser determinado estudando-se apenas a matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  ao variar de  $W$ , como se viu no parágrafo 2.11. Esta certeza existirá quando, o calculista prever de antemão que o contraventamento é suficientemente rígido para que o pórtico atinja o equilíbrio indiferente com rotações significativas dos nós e translações horizontais desprezíveis nos andares. Porém, como existe o

interesse, por motivos econômicos, de que as diagonais sejam bastante esbeltas, esta constatação intuitiva nem sempre é possível. Neste caso, que pode ocorrer com frequência, torna-se necessário constatar se o contraventamento realizado pelas barras diagonais é realmente eficiente para que se, tome  $W_{\theta}$  como parâmetro crítico do pórtico.

O que se faz, para verificar se o contraventamento é eficiente, é determinar primeiramente  $W_{\theta}$  e em seguida estudar o comportamento da matriz  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$  (eq. 2.44) procurando  $W_H$ , partindo-se do intervalo inicial:

$$0 < W < W_{\theta} \quad \dots\dots\dots(2.46)$$

e usando o processo iterativo de dividir o intervalo ao meio em cada etapa.

Se o valor encontrado para  $W_H$  for bastante próximo de  $W_{\theta}$  ( a igualdade nunca ocorre devido ao processo iterativo de cálculo) conclui-se que o pórtico não perderá estabilidade com translações horizontais antes que ocorram somente rotações dos nós, e portanto o contraventamento é eficiente.

Se for encontrado  $W_H < W_{\theta}$  ( $W_H$  e  $W_{\theta}$  não próximos), ocorrerá perda de estabilidade com translações horizontais e o contraventamento é deficiente.

## 2.18. Determinação do modo de flambagem do pórtico deslocável.

Quando na análise de instabilidade de um pórtico (com ou sem barras diagonais) for encontrado  $W_H < W_\theta$  e a matriz  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$  possuir apenas um auto-valor  $\lambda_{\min} \approx 0$ , o pórtico ao atingir o equilíbrio indiferente apresentará translações horizontais que guardam entre si uma relação fixa. O vetor  $(D_H^P)$ , a menos de uma constante multiplicativa, que descreve esse modo de flambagem é representado pelo auto-vetor de  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$  correspondente ao auto-valor  $\lambda_{\min}$ . O cálculo desse auto-vetor deve ser realizado da mesma maneira como se faz para o pórtico indeslocável (vide parágrafo 2.12). A única diferença entre este e aquele caso é que agora trata-se da matriz  $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$  e não da matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$ .

A Fig. 2.10 mostra a configuração típica do modo de flambagem de um pórtico que perde estabilidade com translações horizontais significativas  $D_{H1}$ ,  $D_{H2}$ ,  $D_{H3}$  nos seus nós.

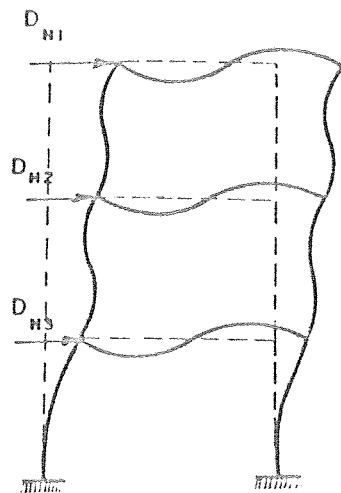


FIG. 2.10 - Modo possível de flambagem de um pórtico retangular que perde estabilidade com translações horizontais dos nós.

### 2.19. Parâmetro crítico efetivo para os pórticos planos retangulares.

Do estudo realizado nos parágrafos anteriores, embora tenham sido definidos 2 parâmetros críticos  $W_{\theta}$  e  $W_H$ , para cada pórtico, nota-se que à cada pórtico pode ser associado um único parâmetro crítico efetivo.

Esse parâmetro crítico efetivo será sempre possível de se determinar se ficar estabelecimento que, para qualquer pórtico retangular (classificado como deslocável ou indeslocável) a análise de instabilidade seja realizada seguindo o procedimento abaixo:

- a) determina-se  $W_{\theta}$  do pórtico suposto indeslocável.
- b) determina-se  $W_H$  partindo-se do intervalo inicial  $0 \leq W \leq W_{\theta}$  usando-se o procedimento iterativo de dividir o intervalo ao meio em cada etapa. O valor  $W_H$  encontrado neste intervalo será o parâmetro crítico efetivo do pórtico. O modo de flambagem do pórtico, correspondente ao parâmetro crítico efetivo, poderá ser constituído apenas de rotações significativas dos nós, ou apenas de translações significativas nos andares ou de todos estes deslocamentos ocorrendo simultaneamente.

### 3 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA TRIDIMENSIONAL

#### 3.1. Introdução

Conforme já delineado no capítulo 1, o objetivo do presente trabalho, é estudar estruturas tridimensionais de edifícios, que apresentam configuração em planta do tipo já visto nas figs. 1.1 e 1.2, com dimensão preponderante numa direção, procurando-se verificar a influência da deformabilidade das lajes em seus próprios planos no valor da carga crítica que produz a flambagem do sistema. Propõe-se à essa verificação da influência da deformabilidade das lajes, tendo em vista que a análise de instabilidade, considerando as lajes como diafragmas (indeformáveis em seus planos), já foi racionalmente estudada.

As estruturas de edifícios a serem analisadas cuja configuração em planta é vista na fig. 1.1, terão os painéis longitudinais e os painéis transversais extremos eficientemente contraventados, de maneira que estes painéis, só perdem estabilidade como pórticos indeslocáveis (isto é, ao aumentar o carregamento surgirão no plano do painel rotações significativas nos nós antes que ocorram

translações horizontais significativas nos andares).

O parâmetro crítico  $W_g$  que deseja-se procurar e cuja variação necessita ser estudada (vide capítulo 4) corresponderá, geralmente, à flambagem do sistema numa situação em que as translações horizontais na direção  $x$ , serão desprezíveis em todos os nós dos painéis (fig. 1.1) enquanto que as translações horizontais na direção  $y$  mantêm-se desprezíveis para os nós dos painéis extremos mas não para os nós dos painéis transversais intermediários, onde assumem valores consideráveis. A laje deformada terá configuração semelhante à mostrada na Fig. 1.2.

A matriz de rigidez do sistema correspondente às translações horizontais dos nós da estrutura na direção  $y$ , e que é tomada como correspondente às ações perturbadoras do equilíbrio, será determinada somando-se as contribuições fornecidas pelas sub-estruturas (lajes e painéis transversais) que o constituem, aproveitando-se o desenvolvimento dado nos trabalhos de ARRUDA SERRA<sup>5</sup> e FIGUEIREDO e ARRUDA SERRA<sup>15</sup>. Deve ser lembrado que na análise de instabilidade deseja-se encontrar o parâmetro crítico e eventualmente o modo de flambagem; portanto no presente estudo, não serão determinados esforços internos nas barras, necessita-se apenas encontrar a matriz de rigidez do sistema tridimensional. A sequência de cálculos e raciocínios para a obtenção desta matriz é dada nos parágrafos seguintes.

### 3.2. Sub-estrutura Painei

O painei transversal, pensado como sub-estrutura do sistema principal, tem o comportamento em seu próprio plano descrito pela matriz  $\left[ S_{HH}^* \right]$  (eq. 2.44) que relaciona as forças horizontais  $\{ A_H^P \}$  com os deslocamentos  $\{ D_H^P \}$ .

Para qualquer painei tipo pórtico plano, aquela matriz de rigidez do pórtico suposto deslocável daqui por diante, será indicada por  $\left[ S_{HH}^{p*} \right]$ , sendo que o índice superior p refere-se ao painei. Este índice é usado para evitar confusão com a matriz de rigidez da laje que será definida no próximo parágrafo.

A obtenção da matriz de rigidez  $\left[ S_{HH}^{p*} \right]$  da sub-estrutura painei, quer este possua ou não diagonais, é efetuada seguindo os procedimentos descritos nos parágrafos 2.4 e 2.14.

### 3.3. Sub-estrutura Laje

A laje isolada pode ser tratada semelhantemente a um "pórtico" sem vigas e com apenas uma prumada de pilares.

A numeração dos nós (interseção das lajes com os painéis transversais) e dos deslocamentos adotada, para o caso de uma laje de edifício que possui 6 painéis transversais, é mostrada na fig. 3.1. Imagina-se que esta



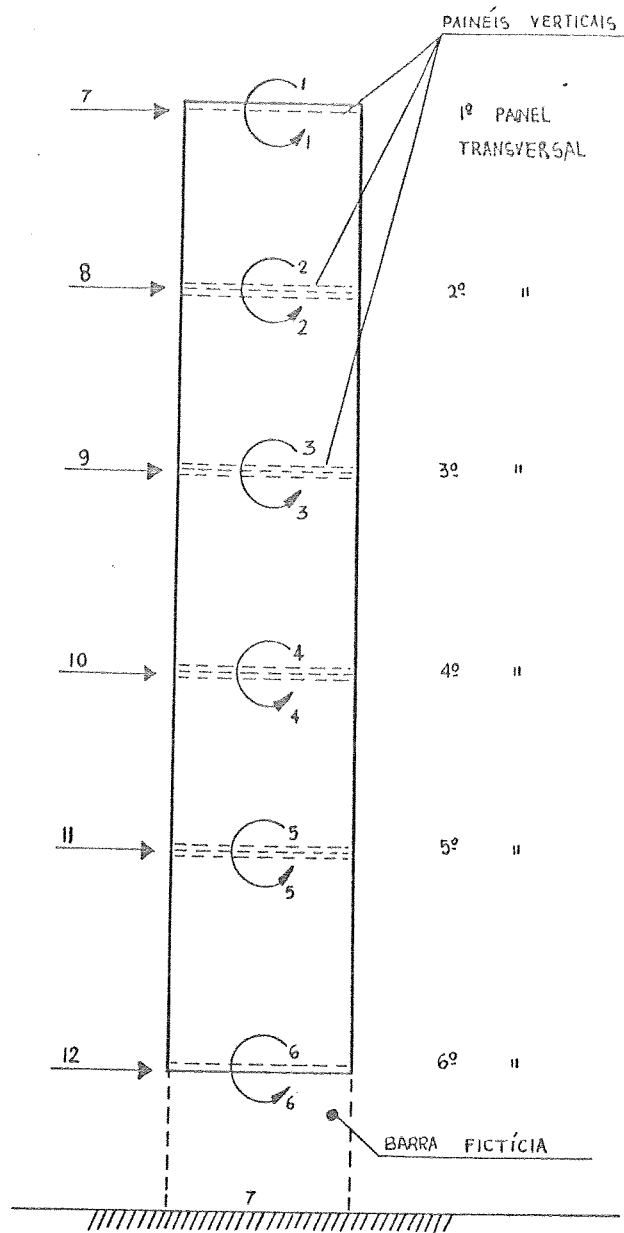


FIG. 3.1 - Numeração dos nós e dos deslocamentos da laje. Constitui um "pórtico" com apenas uma prumada de pilares.

figura mostra a laje como sendo vista por um observador situado acima do plano da laje. Observe-se que da mesma maneira como para o caso do pórtico retangular genérico, são numeradas primeiramente todas as  $n_p$  rotações ( $n_p$  = número de painéis transversais) e depois as  $n_p$  translações horizontais.

A matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S_{HH}^{e*} \end{bmatrix}$  de ordem  $n_p \times n_p$ , que relaciona as  $n_p$  translações (nrs 7, 8, ..., 12; na Fig. 3.1) com as respectivas forças horizontais, enquanto são livres as  $n_p$  rotações (nrs 1, 2, ..., 6; na Fig. 3.1) pode então ser calculada da seguinte maneira:

Primeiramente calcula-se uma matriz  $\begin{bmatrix} S^P \end{bmatrix}$  de ordem  $2n_p \times 2n_p$  ("pórtico" com uma única prumada de pilares) com o procedimento descrito no parágrafo 2.4, onde a matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S_{MD} \end{bmatrix}$  das "barras" das lajes, antes expressa pela eq. (2.11) será agora expressa por:

$$\begin{bmatrix} S_{MD} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{(4+2g)EI_z}{(1+2g)L} & \frac{(2-2g)EI_z}{(1+2g)L} & \frac{-6EI_z}{(1+2g)L^2} \cdot C_y & \frac{6EI_z}{(1+2g)L^2} \cdot C_y \\ \frac{(4+2g)EI_z}{(1+2g)L} & \frac{-6EI_z}{(1+2g)L^2} \cdot C_y & \frac{6EI_z}{(1+2g)L^2} \cdot C_y & \\ \left( \frac{EA}{L} \cdot C_x^2 + \frac{12EI_z}{(1+2g)L^3} \cdot C_y^2 \right) & - \left( \frac{EA}{L} \cdot C_x^2 + \frac{12EI_z}{(1+2g)L^3} \cdot C_y^2 \right) & & \\ \text{simétrico} & & \left( \frac{EA}{L} \cdot C_x^2 + \frac{12EI_z}{(1+2g)L^3} \cdot C_y^2 \right) & \end{bmatrix}$$

..... (3.1)

Na eq. (3.1) os símbolos  $E$ ,  $I_z$ ,  $L$ ,  $C_x$  e  $C_y$  tem os mesmos significados já descritos no parágrafo 2.5.

O símbolo  $g$  (parâmetro de deformação devido ao esforço cortante) é dado pela expressão:

$$g = \frac{6fEI_z}{GA_x L^2} \dots\dots\dots(3.2)$$

onde:

$G$  = módulo de elasticidade transversal

$A_x$  = área da seção transversal

$f$  = fator que depende da forma da seção transversal da barra que para seções retangulares assume o valor 1,2.

Os novos coeficientes  $(4+2g)$ ,  $(2-2g)$  e  $(1+2g)$  aparecem agora nos elementos de  $[ S_{MD} ]$  (eq. 3.1) para levar em conta o efeito das deformações devidas ao esforço cortante que não foi considerado nas barras esbeltas pertencentes aos painéis - pórticos. No entanto, nas matrizes de rigidez dos segmentos de laje, não aparecerão os coeficientes  $\underline{s}$ ,  $\underline{sc}$  e  $\underline{m}$  (vide eq. 2.11), pois as lajes não são solicitadas por força axial. Ao usar o procedimento do parágrafo 2.4, nas expressões onde aparecem os índices  $n_a$  e  $n_c$ , estes índices devem ser substituídos respectivamente por  $n_p$  e 1. Deve-se notar que nunca acontecerá o caso  $j_3 = j_4$  e portanto as contribuições das "barras" da laje na matriz  $[ S^P ]$  serão calculadas sempre com as eqs. (2.9).

Uma vez calculada  $[ S^P ]$  (de ordem  $2n_p \times 2n_p$ ) a matriz de rigidez da sub-estrutura laje, definida por:

$$\begin{aligned} \left[ S_{HH}^{e*} \right] &= \left[ S_{HH}^P \right] - \left[ S_{HO}^P \right] \cdot \left[ S_{\theta\theta}^P \right]^{-1} \cdot \left[ S_{\theta H}^P \right] \\ (n_p \times n_p) & \quad (n_p \times n_p) \quad (n_p \times n_p) \quad (n_p \times n_p) \quad (n_p \times n_p) \\ & \dots\dots\dots(3.3) \end{aligned}$$

pode ser calculada usando-se o método de eliminação de GAUSS, como se mostrou no parágrafo 2.14, eliminando-se as primeiras  $n_p$  equações do sistema correspondente à eq.(2.48).

Na realidade, o cálculo de  $\left[ S_{HH}^{e*} \right]$  fica muito simplificado, podendo ser aproveitada a mesma parte do programa de cálculo que calcula  $\left[ S_{HH}^{p*} \right]$ , bastando trocar os índices  $n_a$  e  $n_c$  por  $n_p$  e 1.

### 3.4. Matriz de rigidez do sistema

Antes de explicar como será obtida a matriz de rigidez do sistema, deve-se estabelecer uma regra de numeração para os painéis, para as lajes e para os nós e deslocamentos do mesmo sistema. Considere-se como exemplo a estrutura constituída de 3 painéis transversais e 2 lajes, vista na Fig. 3.2.

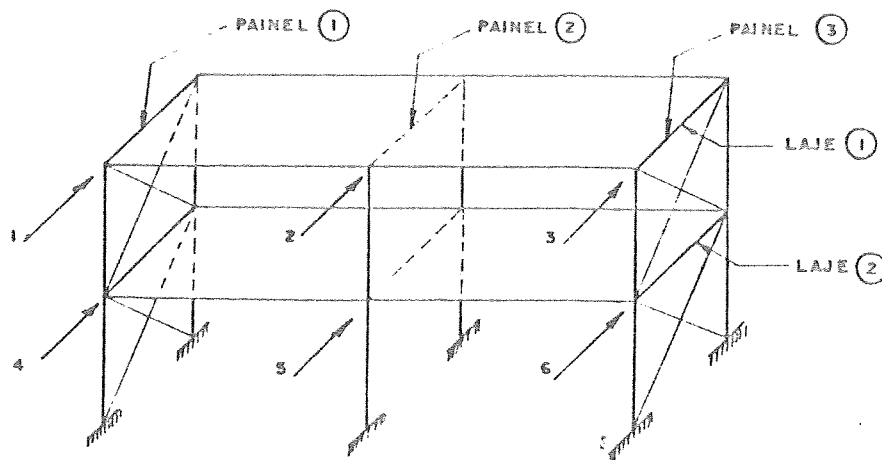


FIG. 3.2 - Numeração das lajes, painéis transversais e dos deslocamentos de uma estrutura de edifício com 3 painéis transversais e 2 lajes.

Os  $n_p$  painéis transversais são numerados da esquerda para a direita; as  $n_a$  lajes são numeradas de cima para baixo e os nós e respectivos deslocamentos ( $n_a \cdot n_p$  translações horizontais) são numerados da esquerda para a direita em cada laje, começando pela laje mais elevada.

A matriz de rigidez  $[S_S]$  do sistema de ordem  $(n_a \cdot n_p \times n_a \cdot n_p)$ , é obtida da contribuição de todas as sub-estruturas (painéis transversais e lajes).  
Simbolicamente:

$$\left[ S_S \right] = \sum_{p=1}^{n_p} \left[ S_S^p \right] + \sum_{\ell=1}^{n_a} \left[ S_S^\ell \right] \dots (3.4)$$

Nesta equação,  $\left[ S_S^p \right]$  e  $\left[ S_S^\ell \right]$  relativas ao painel  $p$  e à laje  $\ell$ , ambas de ordem  $(n_a \cdot n_p \times n_a \cdot n_p)$  podem ser obtidas respectivamente da matriz de rigidez  $\left[ S_{HH}^{p*} \right]$  da sub-estrutura painel de ordem  $(n_a \times n_a)$  e da matriz de rigidez  $\left[ S_{HH}^{\ell*} \right]$  da sub-estrutura laje de ordem  $(n_p \times n_p)$ , através de:

$$\left[ S_S^p \right] = \left[ T^p \right]^T \cdot \left[ S_{HH}^{p*} \right] \cdot \left[ T^p \right] \dots (3.5)$$

$$\left[ S_S^\ell \right] = \left[ T^\ell \right]^T \cdot \left[ S_{HH}^{\ell*} \right] \cdot \left[ T^\ell \right] \dots (3.6)$$

Sendo  $\left[ T^p \right]$  a matriz que realiza a transformação dos deslocamentos do sistema, nos deslocamentos do painel  $p$ :

$$\begin{matrix} \{ D_H^p \} & = & \left[ T^p \right] & \cdot & \{ D_S \} & \dots (3.7) \\ (n_a \times 1) & & (n_a \times n_a \cdot n_p) & & (n_a \cdot n_p \times 1) \end{matrix}$$

e  $\left[ T^\ell \right]$  a matriz que realiza a transformação dos deslocamentos do sistema nos deslocamentos da laje  $\ell$ :

$$\begin{matrix} \{ D_H^\ell \} & = & \left[ T^\ell \right] & \cdot & \{ D_S \} & \dots (3.8) \\ (n_p \times 1) & & (n_p \times n_a \cdot n_p) & & (n_a \cdot n_p \times 1) \end{matrix}$$

A contribuição do painel  $\underline{p}$  na matriz  $[S_S]$  pode ser calculada mais facilmente, em termos de economia de memória e tempo de computação, sem usar a eq. (3.5) mas somando-se as contribuições dos elementos  $(s_{HH}^P)_{i,j}$  da matriz de rigidez  $[S_{HH}^{P*}]$  nos elementos  $(s_S^P)_{i_s, j_s}$  da matriz de rigidez do sistema.

Assim:

$$(s_S^P)_{i_s, j_s} = (s_{HH}^P)_{i, j} \dots\dots\dots (3.9)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n_a \\ j = 1, 2, \dots, n_a \\ i_s = p + (i - 1)n_p \dots\dots\dots (3.10) \\ j_s = p + (j - 1)n_p \end{array} \right.$$

Da mesma maneira, a contribuição da laje  $\underline{\ell}$  na matriz  $[S_S]$  pode ser feita mais facilmente, deixando de usar a eq. (3.6), mas somando-se as contribuições dos elementos  $(s_{HH}^{\ell*})_{i,j}$  da matriz de rigidez  $[S_{HH}^{\ell*}]$  nos elementos  $(s_S^{\ell})_{i_s, j_s}$  da matriz de rigidez do sistema.

$$(s_S^{\ell})_{i_s, j_s} = (s_{HH}^{\ell})_{i, j} \dots\dots\dots (3.11)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n_p \\ j = 1, 2, \dots, n_p \\ i_s = (\ell - 1)n_p + i \dots\dots\dots (3.12) \\ j_s = (\ell - 1)n_p + j \end{array} \right.$$

Para compreender o significado das eqs (3.10) e (3.12) pode-se fazer apelo à fig. 3.2, observando-se a correspondência entre os deslocamentos do sistema e os deslocamentos das sub-estruturas (lajes e painéis).



#### 4. ANÁLISE DE INSTABILIDADE DO SISTEMA TRIDIMENSIONAL

##### 4.1. Introdução

Conforme já estabelecido no início deste trabalho, admite-se que o sistema tridimensional a ser estudado é composto de painéis verticais, que são os pórticos, possuindo os mesmos rigidez nula transversalmente ao seu plano, sendo seu comportamento caracterizado pelas matrizes  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  (eq. 2.21) e  $\begin{bmatrix} S_{HH}^{P*} \end{bmatrix}$  (eq. 2.44) correspondentes ao comportamento em seu próprio plano. Para as lajes, admite-se que as mesmas também possuem rigidez nula transversalmente, levando-se porém em conta a deformabilidade em seus próprios planos. As deformações axiais de todas as barras, excetuando-se as diagonais, são desprezadas. Ainda, conforme já estabelecido, admite-se que o carregamento dos painéis e também do sistema é constituído somente de forças verticais dirigidas para baixo, aplicadas nos diversos nós da estrutura. Considera-se portanto que o carregamento admitido produz os únicos esforços solicitantes que são as forças normais nos pilares do edifício.

Tome-se como exemplo o sistema mostrado na fig. 4.1, na qual se vê também um carregamento possível constituída de forças verticais  $P$  e  $P/2$ .

Como já foi esclarecido, deve-se admitir que o carregamento é fornecido (conforme Fig. 4.1) especificando-se a proporção existente entre todas as cargas verticais e supondo que o mesmo carregamento correspondente ao valor unitário do parâmetro  $W$  multiplicador das cargas. Esta norma será adotada em todos os exemplos de aplicação. Assim, desejando-se analisar a instabilidade da estrutura da fig. 4.1, sabe-se que para  $W = 1$ , as cargas valem  $P$  e  $P/2$ .

Em virtude da linearidade entre as cargas aplicadas e os esforços axiais solicitantes, linearidade esta que é consequência da indeformabilidade axial adotada para as barras,

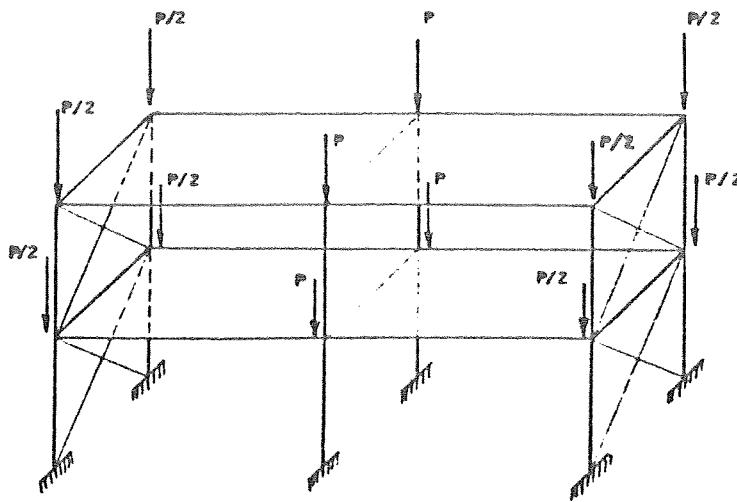


Fig. 4.1 - Sistema tridimensional do tipo a ser estudada com as cargas verticais dadas  $P$  e  $P/2$ , correspondentes a  $W = 1$ .

uma vez obtidos por simples equações de equilíbrio, os esforços normais  $N_{11}$  correspondentes à  $W = 1$  em todos os pilares, os esforços axiais  $N_{iW}$  para qualquer valor de  $W$  podem ser calculados por:

$$N_{iW} = N_{11} \cdot W \quad \dots\dots\dots(2.22)$$

Onde houver cruzamento de dois painéis ortogonais entre si, o cálculo das matrizes de rigidez  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} S_{HH}^{P*} \end{bmatrix}$  desses painéis (levando em conta a influência das forças normais) é realizado considerando-se que a carga vertical ( $P$  ou  $P/2$  na Fig. 4.1) atua integralmente tanto no nó de um painel quanto no nó do painel que lhe é ortogonal. Note-se que não há sentido em dividir a carga vertical ( $P$  ou  $P/2$ ) em dois quinhões a serem atribuídos a cada um dos painéis que se cruzam, pois sendo os dois painéis ortogonais entre si, os coeficientes de rigides  $s$ ,  $c$  e  $m$  do mesmo pilar em cada um dos painéis são obtidos em duas equações de equilíbrio independentes (equações diferenciais de 2ª ordem) nas quais, componentes ortogonais e independentes do momento devido à carga  $P$  são levadas em conta.

#### 4.2. Matriz de rigidez do sistema correspondente às ações perturbadoras

Para atender as finalidades deste trabalho (verificação da influência da deformabilidade das lajes no valor do parâmetro crítico do sistema), ao estudar-se o sistema principal (do tipo visto nas Figs.1.1 e 4.1) procurar-se-á verificar se o mesmo sistema perde estabilidade mostrando translações significativas

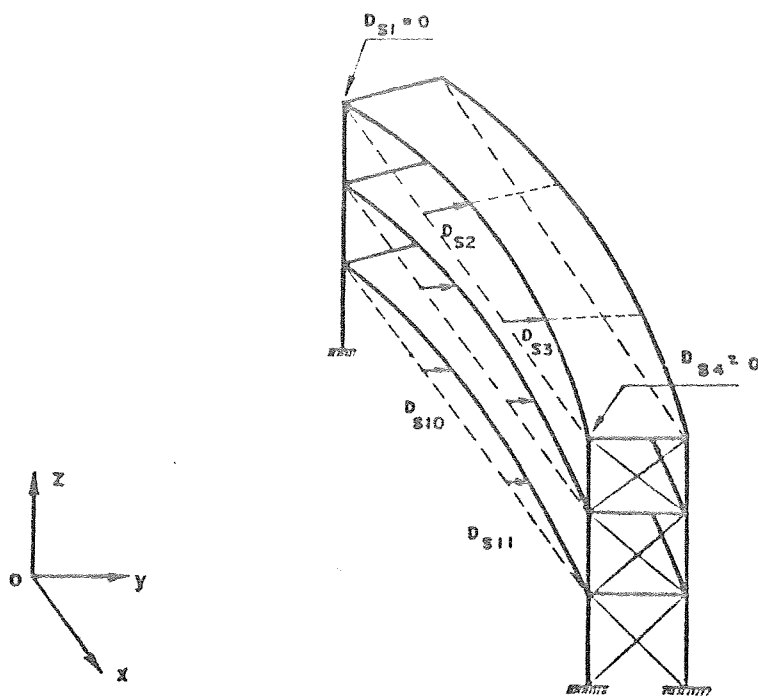


Fig. 4.2 - Modo de flambagem do sistema, cuja ocorrência antes que aconteça qualquer outro modo de flambagem deve ser verificada.

dos seus nós na direção  $y$ , com modo de flambagem semelhante ao mostrado na Fig. 4.2 antes que, ao crescer de  $W$ ; outra configuração de flambagem possa ocorrer.

Portanto na procura do parâmetro crítico do sistema, visando estudar a influência da deformabilidade das lajes, será adotada como matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras, a matriz  $[ S_S ]$  de ordem  $(n_a \times n_p)$  relativa às translações horizontais como as mostradas na fig. 4.2 e também já salientadas e numeradas na fig. 3.2. Então, a matriz  $[ S_S ]$  correspondente as ações perturbadoras do sistema, que relaciona as  $(n_a \cdot n_p)$  translações horizontais  $\{ D_S \}$  com as eventuais  $(n_a \cdot n_p)$  forças horizontais  $\{ A_S \}$  através de:

$$\{ A_S \} = [ S_S ] \cdot \{ D_S \} \dots\dots\dots(4.1)$$

deverá ser calculada com o procedimento do parágrafo 3.3 e é definida pela eq. (3.4), aqui repetida:

$$[ S_S ] = \sum_{p=1}^{n_p} [ S_S^p ] + \sum_{\ell=1}^{n_a} [ S_S^\ell ] \dots\dots\dots(3.4)$$

Deve-se lembrar que no cálculo de  $[ S_S ]$ , deve ser considerada, para cada valor de  $W$ , a influência das forças normais nos pilares, influência esta que é expressa pelo aparecimento dos coeficientes  $\underline{s}$ ,  $\underline{c}$  e  $\underline{m}$  nas matrizes de rigidez  $[ S_{MD} ]$  (eq. 2.11) dos pilares.

#### 4.3. Intervalo de variação de $W$ no qual a instabilidade do sistema é procurada

O parâmetro crítico  $W_S$  do sistema é definido como "o menor valor do parâmetro  $W$  para o qual ocorre o equilíbrio indiferente do sistema". Este equilíbrio indiferente pode acontecer para o sistema como um todo ou então para uma parte do mesmo que perde estabilidade isoladamente.

Para se compreender como é obtido o intervalo de variação do parâmetro  $W$  no qual deve ser procurada a possível perda de estabilidade do sistema, apresentando este um modo de flambagem semelhante ao da Fig. 4.2 (com translações significativas de corpo deformável nas lajes) é necessário primeiramente tecer algumas considerações sobre o comportamento do mesmo sistema tridimensional sob ação de cargas verticais.

Se for admitido que as características elástico-geométricas das lajes, painéis e barras de contraventamento (dos painéis) podem variar entre amplos limites, poderá acontecer que, ao crescer de  $W$ , ocorra outro tipo de flambagem, antes que o sistema atinja instabilidade caracterizada por deslocamentos como os da Fig. 4.2. Por exemplo, se as lajes forem muito rígidas no seu próprio plano, seus comportamentos serão semelhantes aos de diafragmas rígidos. Neste caso, antes que ocorram deslocamentos de corpo deformável das lajes ou mesmo

deslocamentos de corpo rígido das mesmas, como mostra FIGUEIREDO<sup>1</sup>, havendo 3 painéis verticais suficientemente contraventados e não concorrentes numa mesma reta, acontecerá a flambagem isolada de algum painel como indeslocável (com rotações significativas nos nós e translações horizontais desprezíveis, vide Fig. 2.6). O parâmetro crítico  $W_S$  do sistema, neste caso, pode ser tomado igual ao parâmetro  $W_{\theta}^k$  do pórtico  $k$  suposto indeslocável mais crítico.

Outro exemplo de perda de estabilidade que pode ocorrer antes que surja o estado de equilíbrio indiferente da Fig. 4.2 é mostrado na Fig. 4.3.

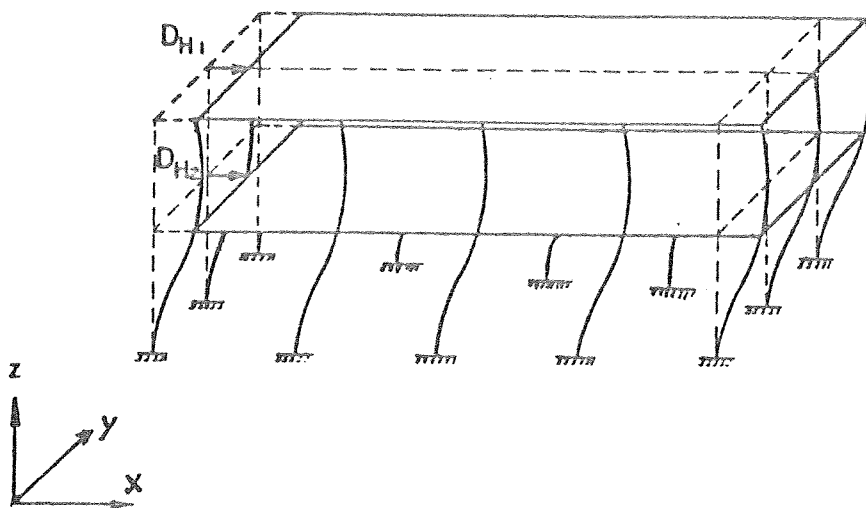


Fig. 4.3 - Modo de flambagem, cuja ocorrência antes de surgir o modo de flambagem semelhante ao da Fig. 4.2, deve ser evitada, através de contraventamento eficiente dos painéis longitudinais.

O modo de flambagem mostrado na Fig. 4.3 (com translação de corpo rígido das lajes na direção  $x$ ) poderá ocorrer bastante cedo se os pórticos longitudinais possuírem diagonais de pequena rigidez axial.

Baseado nessas considerações e desejando-se estudar a influência da deformabilidade das lajes no valor do parâmetro crítico  $W_S$  do sistema, nos exemplos a serem analisados, serão sempre adotadas diagonais com bastante rigidez axial nos painéis transversais extremos e nos painéis longitudinais. Esta medida eliminará a possibilidade de perda de flambagem do sistema com deslocamentos de corpo rígido das lajes; porém não impedirá a perda de estabilidade localizada de algum pórtico como indeslocável. Também com esta medida, a influência da deformabilidade das lajes será notada sempre que for encontrado um parâmetro crítico do sistema,  $W_S$  menor que o parâmetro crítico  $W_\theta^k$  do pórtico suposto indeslocável mais crítico. Se for encontrado  $W_S < W_\theta^k$  será possível comprovar a ocorrência de deformação de flexão das lajes, através do cálculo do modo de flambagem do sistema, devendo este modo de flambagem ser semelhante ao da Fig. 4.2.

Nos exemplos a serem estudados serão consideradas estruturas nas quais o equilíbrio instável que ocorre mais cedo é de um dos tipos: flambagem local de algum painel isolado ou flambagem por deformação de flexão nas lajes. Somente quando acontecer a flexão das lajes é que ficará evidenciada a influência da deformabilidade das mesmas no



valor do parâmetro crítico  $W_S$ .

Portanto, se ocorrer a flambagem do sistema com deformações das lajes, este tipo de flambagem deverá ocorrer para um valor  $W = W_S$  do parâmetro crítico do sistema, satisfazendo:

$$\min \{ W_H^p \} < W < \min \{ W_\theta^p, W_\theta^q \} \quad \dots\dots\dots(4.2)$$

$$p = 1, \dots, n_p \quad p = 1, \dots, n_p$$

$$q = 1, \dots, n_q$$

onde:  $n_p$  = número de painéis transversais

$n_q$  = número de painéis longitudinais

O extremo inferior do intervalo definido na eq. (4.2) é o parâmetro crítico do pórtico transversal suposto deslocável mais crítico. O extremo superior é o parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável mais crítico entre os painéis transversais e longitudinais.

Chamando de

$$\omega = \min \{ W_H^p \} \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

$$p = 1, \dots, n_p$$

e

$$\Omega = \min \{ W_\theta^p, W_\theta^q \} \quad \dots\dots\dots(4.4)$$

$$p = 1, \dots, n_p$$

$$q = 1, \dots, n_q$$

será:

$$\omega < W_S < \Omega \quad \dots\dots\dots(4.5)$$

Deve-se observar que com o intervalo de variação de  $W$  adotado para a procura de  $W_S$ , não será assumido nunca nenhum pilar carregado acima da carga crítica ( $4\pi^2 EI_z / L^2$ ) correspondente à condição de barra bi-engastada.

#### 4.4. Determinação do parâmetro crítico do sistema

Sugere-se, para a determinação do parâmetro crítico  $W_S$  do sistema, o seguinte procedimento:

1<sub>q</sub>) - Determinam-se os parâmetros críticos  $W_{\theta}^q$  ( $q = 1, \dots, n_q$ ) de todos os painéis longitudinais supostos indeslocáveis (vide parágrafo 2.11). Nesta fase do cálculo, convém verificar, para cada pórtico longitudinal, se o contraventamento realizado pelas diagonais é eficiente (parágrafo 2.17 para se ter certeza que  $W_{\theta}^q$  ( $q = 1, \dots, n_q$ ) pode ser tomado com parâmetro crítico efetivo do pórtico.

2<sub>q</sub>) - Determinam-se para todos os painéis transversais (contraventados ou não) os parâmetros críticos  $W_{\theta}^p$  ( $p = 1, \dots, n_p$ ) e  $W_H^p$  ( $p = 1, \dots, n_p$ ) dos pórticos supostos respectivamente indeslocáveis e deslocáveis (vide parágrafo 2.11 e 2.16). Também nesta fase, convém verificar se os contraventamentos dos pórticos transversais contraventados são eficientes (parágrafo 2.17).

3<sub>o</sub>) - Determinam-se os extremos  $\omega$  e  $\Omega$  do intervalo de variação de  $W$ , onde a instabilidade do sistema será procurada, isto é, determinam-se:

$$\omega = \min \{ W_H^P \} \dots\dots\dots(4.3)$$

$$p = 1, \dots, n_p$$

$$\Omega = \min \{ W_\theta^P, W_\theta^Q \} \dots\dots\dots(4.4)$$

$$p = 1, \dots, n_p$$

$$q = 1, \dots, n_q$$

4<sub>o</sub>) - Com o intervalo inicial da variação de  $W$  (vide eq. 4.5) segue-se procedimento análogo ao do algoritmo descrito no parágrafo 2.11, dividindo-se o intervalo ao meio em cada etapa. Para cada valor de  $W$  são determinadas as matrizes  $\left[ S_{HH}^{p*} \right]$  de todos os painéis transversais (vide parágrafo 2.14) e a partir destas a matriz  $\left[ S_S \right]$  do sistema correspondente às ações perturbadoras (vide parágrafo 3.3). Usam-se também as matrizes de rigidez  $\left[ S_{HH}^{e*} \right]$  (eq. 3.3) das lajes. Após 8 ou 9 ciclos do algoritmo, o menor auto-valor  $\lambda_{\min}$  da matriz  $\left[ S_S \right]$  é bem próximo de zero. Toma-se então  $W_S = W$ , e o parâmetro crítico do sistema está determinado.

5<sub>o</sub>) - Se for encontrado para  $W_S$  um valor muito próximo de  $\Omega$ , isto significa que o sistema perde estabilidade sem deformações significativas de flexão das lajes, mas que a estabilidade é comprometida pela flambagem

local do pórtico suposto indeslocável mais crítico entre os painéis longitudinais e transversais. Convém então registrar qual o pórtico  $k$  (longitudinal ou transversal) ao qual corresponde o menor parâmetro crítico  $W_{\theta}^k = \Omega$ .

6g) - Se for encontrado para  $W_S$  um valor significativamente menor que  $\Omega$ , isto significa que o sistema perde estabilidade com deslocamentos de corpo deformável das lajes em seus próprios planos e houve então influência da deformabilidade das mesmas no valor do parâmetro crítico  $W_S$ .

Convém explicar detalhadamente, os fenômenos relativos ao comportamento do sistema que levaram ao procedimento acima descrito: Ao crescer de  $W$ , são atingidos os valores dos parâmetros críticos  $W_H^p$  ( $p = 1, \dots, n_p$ ) dos pórticos transversais intermediários não contraventados. Então, se os pórticos transversais trabalhassem isoladamente, a estabilidade do sistema já estaria comprometida. Porém a flambagem isolada destes pórticos transversais deslocáveis é impedida, através da laje, pelos painéis contraventados (transversais e longitudinais). Desta maneira,  $W$  pode continuar aumentando. Assim, se as lajes fossem infinitamente rígidas nos seus planos, o parâmetro  $W$  aumentaria até atingir o valor  $W_{\theta}^k$  relativo ao pórtico  $k$  (transversal ou longitudinal) suposto

indeslocável mais crítico. Porém se as lajes forem suficientemente flexíveis, os valores  $W_0^p$  e  $W_0^q$  não serão atingidos e o sistema poderá perder estabilidade com um valor de  $W$  correspondente à flambagem dos pórticos transversais num comportamento intermediário entre o de pórtico deslocável e o de pórtico indeslocável. Evidentemente, este é o caso previsto no 6º item, cuja ocorrência deve ser constatada e que mais interessa ao presente estudo.

Evidentemente, quando ocorrer o caso previsto no 5º item a deformabilidade das lajes não influi no parâmetro crítico  $W_S$  do sistema.

O procedimento sugerido para obtenção de  $W_S$ , presta-se à elaboração de um programa geral de cálculo automático, para análise de instabilidade das estruturas em estudo. Portanto um programa final para a referida análise deve basear-se nos itens supra-indicados. No entanto, quando se deseja salientar alguns fatos relativos ao comportamento do sistema, poderão ser introduzidos no programa algumas modificações, caso necessárias.

#### 4.5. Determinação do modo de flambagem do sistema

Quando ocorrer o tipo de flambagem previsto no 6º item do parágrafo anterior, isto é  $W_S < \Omega$ , e ocorrendo também de ser único (de multiplicidade 1) o auto-valor  $\lambda_{\min}$

da matriz  $[ S_S ]$  (eq. 3.4), convém calcular o auto-vetor correspondente aquele auto-valor. Como já se viu, este auto-vetor é o modo de flambagem do sistema tridimensional.

O cálculo do modo de flambagem do sistema, que é semelhante ao mostrado na Fig. 4.2, torna-se útil para evidenciar as deformações por flexão das lajes, durante a perda de estabilidade.

## 5. INFLUÊNCIA DA DEFORMABILIDADE DAS LAJES NO PARÂMETRO CRÍTICO DO SISTEMA

### 5.1. Introdução

Com a aplicação dos procedimentos descritos no capítulo 4, pode-se levar a efeito a análise de instabilidade de estruturas do tipo descrito no capítulo 1 (vide Figs. 1.1 e 1.2) e no capítulo 4 (vide Figs. 4.1 e 4.2), determinando o parâmetro crítico  $W_S$  (procurado no intervalo 4.2) e o modo de flambagem das mesmas estruturas.

De um ponto de vista teórico, dada uma estrutura tridimensional com aquelas características (determinada pelos parâmetros elástico-geométricos de todas as barras) e conhecidos os valores das cargas verticais concentradas nos nós correspondentes a  $W = 1$ , é suficiente a aplicação dos procedimentos sugeridos no capítulo 4, para se determinar o parâmetro crítico  $W_S$  da estrutura e o correspondente modo de flambagem (quando existente) permitindo verificar então se há ou não influência da deformabilidade das lajes no valor de  $W_S$  encontrado.

Porém, como o objetivo deste trabalho não é tão somente apresentar uma solução automática para o problema de instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios que considere as deformações das lajes em seus próprios

planos, mas também pesquisar a magnitude da influência destas deformações, de maneira quantitativa, levando em conta os diversos fatores que podem influir no valor do parâmetro crítico, decidiu-se analisar várias estruturas com dimensões bem próximas das que resultam no cálculo estrutural de casos reais.

Visando então obter resultados que possibilitem interpretações quantitativas, foram escolhidas para os exemplos resolvidos neste capítulo um certo número de estruturas, as quais foram julgadas representativas das estruturas reais.

Essas estruturas adotadas para os exemplos são reunidas em dois grupos, de acordo com as seções usadas nos seus pilares:

Grupo 1: Pilares constituídos de perfis tipo H

Grupo 2: Pilares constituídos de 2 perfis U

## 5.2. Exemplos de estruturas do Grupo 1

### - Descrição das estruturas

As diversas estruturas do grupo 1, cuja instabilidade foi analisada visando resultados quantitativos, possuem as características descritas a seguir:



a) Painéis transversais

Os painéis transversais de todas as estruturas adotadas neste grupo possuem sempre duas prumadas de pilares com eixos distando entre si de 8,0m. Os painéis transversais (assim como as estruturas tridimensionais correspondentes) possuem no máximo 10 andares.

Bastará descrever um painel transversal o de maior altura (10 andares), considerando-se que os painéis transversais de altura menor (8, 6, 4 e 2 andares) são obtidos daquele retirando-se as barras (pilares e vigas) dos andares inferiores. Será suficiente descrever um painel, pois em cada estrutura tridimensional (10, 8, 6, 4, e 2 andares), os painéis transversais serão iguais e repetidos, excetuando-se os painéis transversais extremos que possuem também os mesmos perfis de vigas e pilares usados nos painéis transversais intermediários, mas são contraventados com barras diagonais em todos os andares.

As características do painel transversal extremo (contraventado) de maior altura estão descritas na Fig.

5.1a

Todas as barras dos painéis transversais, são de aço, para o qual adotou-se módulo de elasticidade longitudinal  $E = 21000t/cm^2$ .

A Fig. 5.2 mostra o perfil adotado para todas as vigas dos painéis transversais. Na Fig. 5.3 são indicadas as seções das barras do contraventamento. As seções adotadas nos pilares dos painéis transversais estão mostradas na Fig. 5.4. Nesta figura o eixo y-y está contido no plano do painel transversal.

## b) Painéis longitudinais

Uma vez descritas as características dos painéis transversais, fica facilitada a tarefa de descrever os painéis longitudinais pois como se viu, os painéis transversais de uma mesma estrutura tridimensional são iguais e repetidos. Os perfis dos pilares dos painéis longitudinais são os mesmos usados nos painéis transversais, apenas que trabalhando no plano ortogonal (que contém o eixo x-x da Fig. 5.4). Para os painéis longitudinais, a distância entre prumadas de pilares vizinhas é adotada constante e igual a 6,0m.

Também bastará descrever um dos painéis longitudinais de maior altura, considerando-se que os painéis de menor altura são obtidos do mesmo pela retirada das barras dos andares inferiores e os de largura diferente são conseguidos com a repetição das vigas e acrescentando ou retirando prumadas iguais de pilares (distanciadas entre si de 6,0m).

Deve ser lembrado que os painéis longitudinais são sempre eficientemente contraventados, perdendo estabilidade como pórticos indeslocáveis. Para conseguir o contraventamento eficiente, usando-se os mesmos tipos de barras diagonais pode-se ao aumentar a largura do painel, repetir o mesmo contraventamento em novas faixas situadas entre prumadas de pilares vizinhas. A Fig. 5.1b mostra um painel longitudinal com 10 andares e 8 prumadas de pilares.

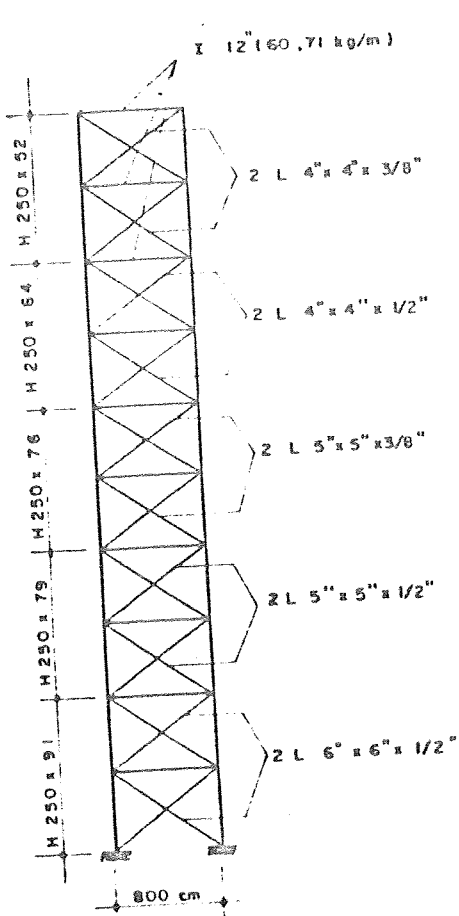


FIG. 5.1a - Painel transversal extremo.

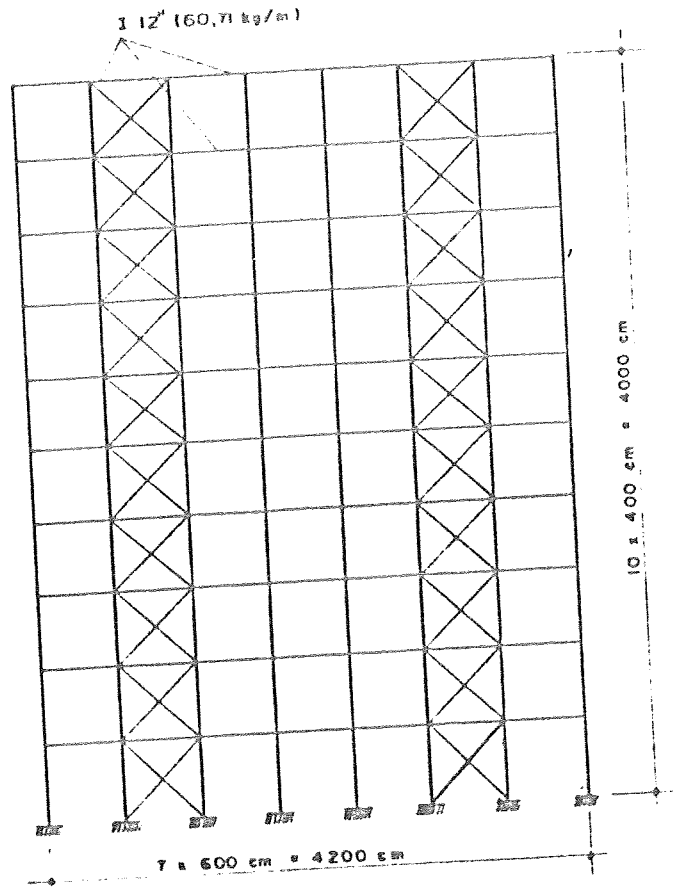


FIG. 5.1b - Painel longitudinal.  
As barras do contraventamento tem as mesmas seções em cada andar do contraventamento do painel transversal (Fig. 5.1a).

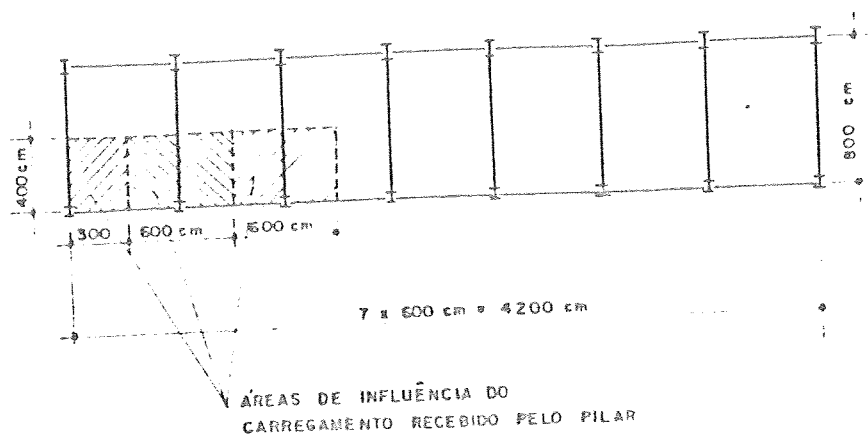


FIG. 5.1c - Planta de estrutura de edifício com 10 andares e 8 painéis transversais mostrando também as "áreas de influência do carregamento" no andar. Nos pilares de canto a carga concentrada vertical vale  $P_c = 16t$  e nos pilares de borda vale  $P_b = 32t$ .

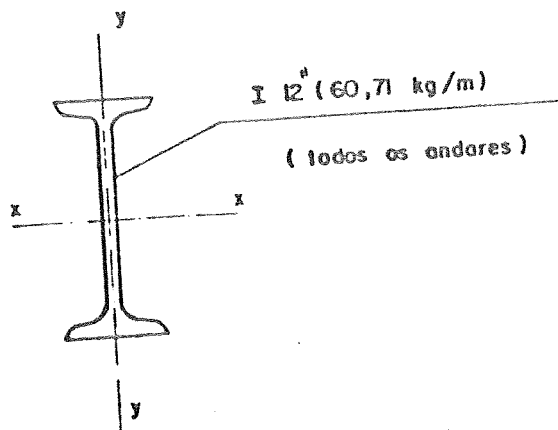


FIG. 5.2 - Tipo de perfil usado em todas as vigas das estruturas do grupo 1.

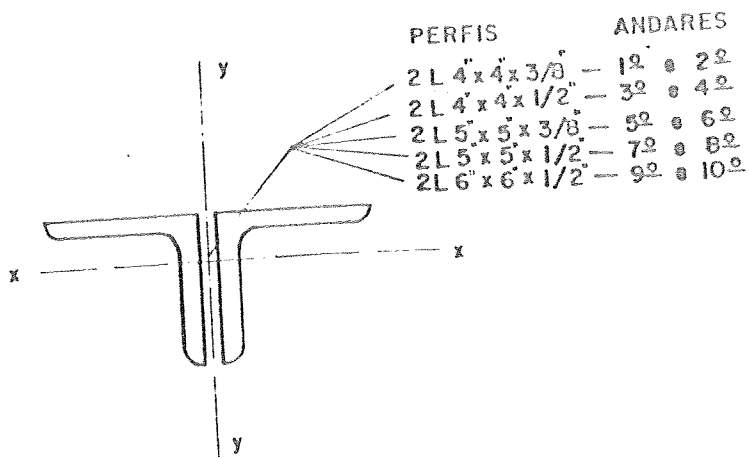


FIG. 5.3 - Tipos de perfis usados nas barras diagonais das estruturas do grupo 1.

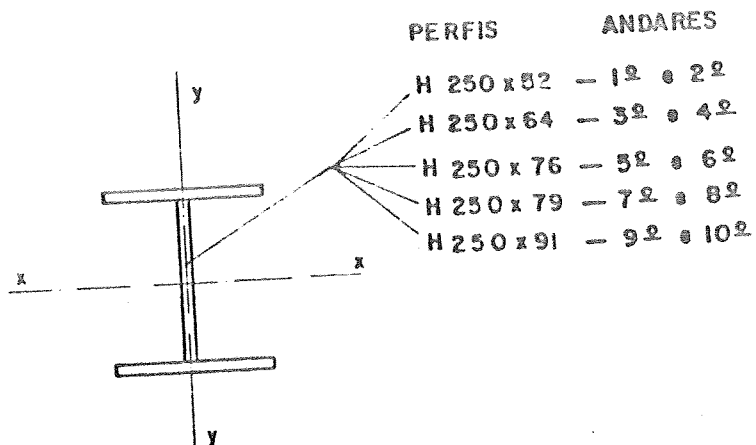


FIG. 5.4 - Tipos de perfis adotados para as colunas das estruturas do grupo 1.

c) Estrutura tridimensional

Após definir as características dos painéis transversais e longitudinais, bastará, para completar a descrição total do sistema, definir as características das lajes. Nas estruturas deste grupo foram adotadas lajes de concreto armado com espessura igual a 10cm. Adotou-se para o concreto módulo de elasticidade longitudinal  $E = 210t/cm^2$  e módulo de elasticidade transversal  $G = 80t/cm^2$ .

Na tabela I são apresentadas as características de todas as barras usadas nas estruturas do grupo. A numeração dos andares que consta na tabela I e nas Figs. 5.3 e 5.4 é feita a partir do topo.

TABELA I

CARACTERÍSTICAS DOS PERFIS ADOTADOS PARA AS ESTRUTURAS DO GRUPO 1

andares	barras	perfis	S (cm <sup>2</sup> )	I <sub>x</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )
1º e 2º	diagonais	2L4"x4"x3/8"	37,00	—	—
	colunas	H250x52	66,00	7701,90	2481,80
3º e 4º	diagonais	2L4"x4"x1/2"	48,40	—	—
	colunas	H250x64	91,30	9698,00	3308,80
5º e 6º	diagonais	2L5"x5"x3/8"	59,40	—	—
	colunas	H250x76	96,70	11583,50	4135,70
7º e 8º	diagonais	2L5"x5"x1/2"	61,28	—	—
	colunas	H250x79	100,20	11721,10	4136,40
9º e 10º	diagonais	2L6"x6"x1/2"	74,18	—	—
	colunas	H250x91	115,40	13487,40	4963,30
vigas em todos os andares		I12" (60,71kg/m)	77,30	11330,00	—

OBS.: Os andares são numerados a partir do topo do edifício

d) Carregamento correspondente a  $W = 1$

O carregamento das estruturas do Grupo 1 foi definido tomando por base uma sobrecarga de  $1,33t/m^2$  em cada andar e considerando o conhecido critério de "áreas de influência em planta" para cada pilar. As "áreas de influência" que são retângulos são mostradas na Fig. 5.1c. Com esse critério, resultam para as estruturas do grupo cargas concentradas verticais  $P_c = 16t$  nos pilares de canto e  $P_b = 32t$  nos pilares de borda. Esse carregamento é suposto igual e repetido em todos os andares.

As cargas concentradas adotadas entram com seu valor integral, quer na análise plana de instabilidade de um painel transversal, quer na análise plana do painel longitudinal ou na análise de instabilidade do sistema. Essas cargas não devem ser divididas em quinhões distribuídos entre os painéis ortogonais entre si, como se viu no capítulo 4, parágrafo 4.1.

- Resultados

Para se ter uma visão global de como varia o parâmetro crítico  $W_g$  do sistema ao variar das dimensões (largura e altura) das estruturas do Grupo 1, construiu-se a Tabela II que reúne os resultados obtidos para esse grupo.

Para facilitar a interpretação dos resultados resumidos na Tabela II, serão dadas primeiramente algumas explicações sobre problemas ocorrentes de ordem computacional.

Como se viu no capítulo 4, um programa geral de cálculo deveria seguir o procedimento ali descrito. Contudo, o programa de cálculo usado no estudo dos diversos exemplos precisou sofrer pequenas modificações para superar problemas de armazenamento no computador usado (IBM-1130 com 32K de memória interna).

Assim, o intervalo de variação de  $W$  onde o parâmetro crítico do sistema é procurado, definido pelos extremos  $\omega$  e  $\Omega$  (eqs. 4.3 e 4.4) foi substituído por um intervalo de extremos  $\omega$  e  $\Omega^*$  sendo estes calculados por:

$$\omega = \min \left\{ W_H^p \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

$$p=1, \dots, n_p$$

$$\Omega^* = \min \left\{ W_\theta^p \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

$$p=1, \dots, n_p$$

isto é, manteve-se o extremo inferior e usou-se novo extremo superior  $\Omega^*$ .

Note-se nas eqs. (4.3 e 5.1) que o cálculo dos novos extremos é efetuado considerando-se apenas os pórticos transversais, que são de "pequeno tamanho" e seus



respectivos parâmetros críticos  $W_H^P$  e  $W_\theta^P$  (pórticos supostos respectivamente deslocável e indeslocável). No cálculo do novo extremo superior, omitiu-se então os valores de  $W_\theta^q$  relativos aos painéis longitudinais indeslocáveis. A determinação dos  $W_\theta^q$  não foi possível dentro do programa principal devido ao "tamanho maior" dos pórticos longitudinais. Por isso os valores  $W_\theta^q$  foram determinados em programa separado.

Como o parâmetro crítico do sistema não poderá ser nunca maior que  $W_\theta^q$ , tornou-se necessário registrar esses valores (iguais para os dois painéis longitudinais) nos quadros da Tabela II, para constatar se o parâmetro crítico encontrado em cada estrutura não ultrapassa  $W_\theta^q$ .

O parâmetro crítico encontrado no novo intervalo:

$$\omega < W < \Omega^* \dots\dots\dots(5.2)$$

é chamado então de  $W_S^*$  por estar ainda sujeito à verificação da condição

$$W_S^* < W_\theta^q \dots\dots\dots(5.3)$$

para se poder afirmar, com certeza, que  $W_S^*$  é igual ao próprio parâmetro crítico  $W_S$  do sistema.

Quando a condição (5.3) não for satisfeita e for encontrado um  $W_S^*$  tal que:

$$W_S^* < \Omega^* \dots\dots\dots(5.4)$$

sabe-se que a perda de estabilidade da estrutura é determinada pela flambagem localizada do painel longitudinal como pórtico indeslocável e portanto não há influência da deformabilidade das lajes. O parâmetro crítico do sistema será então  $W_S = W_\theta^q$ .

Em cada quadro da Tabela II (relativo a cada estrutura analisada) são então registrados os valores  $\omega$ ,  $\Omega^*$ ,  $W_S^*$  e  $W_\theta^q$  (este último calculado em programa separado), para facilitar a interpretação dos resultados.

Ao permitir, durante a análise de instabilidade que o parâmetro  $W$  assuma valores maiores que  $W_\theta^q$ , poderão resultar para os pilares do painel longitudinal, forças axiais maiores que  $4\pi^2 EI_y / L^2$  (quatro vezes a carga de EULER, vide ALGORITMO do parágrafo 2.11). Este fato porém não traz nenhuma invalidade na análise de instabilidade realizada e registrada na Tabela II, ainda que os coeficientes da matriz de rigidez dos pórticos longitudinais não possuam significado físico, pois esses coeficientes não contribuem na matriz  $[S_S]$  (eq. 3.4) do sistema.

TABELA II

## RESULTADOS DOS EXEMPLOS DO GRUPO 1

Para  $W = 1$  vale o carregamento descrito no parágrafo 5.2 e na Fig. 5.1c

NÚMERO DE ANDARES		NÚMERO DE PAINÉIS TRANSVERSAIS					
		4	6	8	10	12	14
2	$\Omega^*$	38,272	38,272	38,272	38,272	38,272	38,272
	$\omega$	9,811	9,811	9,811	9,811	9,811	9,811
	$W_S^*$	38,258	38,258	34,951	25,195	20,804	17,802
	$W_\theta^q$	17,857	17,582	17,484	17,445	17,406	17,406
4	$\Omega^*$	19,801	19,801	19,801	19,801	19,801	19,801
	$\omega$	4,534	4,534	4,534	4,534	4,534	4,534
	$W_S^*$	19,794	19,794	17,573	12,966	10,789	9,432
	$W_\theta^q$	10,871	10,583	10,478	10,426	10,387	10,374
6	$\Omega^*$	13,630	13,630	13,630	13,630	13,630	13,630
	$\omega$	2,881	2,881	2,881	2,881	2,881	2,881
	$W_S^*$	13,626	13,626	11,977	8,933	7,264	7,264
	$W_\theta^q$	8,078	7,805	7,707	7,664	7,631	7,631
8	$\Omega^*$	10,112	10,112	10,112	10,112	10,112	10,112
	$\omega$	2,029	2,029	2,029	2,029	2,029	2,029
	$W_S^*$	10,109	10,109	8,783	6,509	6,509	6,509
	$W_\theta^q$	5,953	5,749	5,675	5,642	5,642	5,642
10	$\Omega^*$	8,264	8,264	8,264	8,264	8,264	8,264
	$\omega$	1,561	1,561	1,561	1,561	1,561	1,561
	$W_S^*$	8,261	8,261	7,187	7,187	7,187	7,187
	$W_\theta^q$	5,042	4,851	4,789	4,789	4,789	4,789

- Discussão dos resultados obtidos para as estruturas do Grupo 1

Para melhor entender a interpretação que deve-se dar a cada caso, considere-se por exemplo a estrutura com 4 andares e 14 painéis transversais, para a qual os valores indicados no correspondente quadro da Tabela II são:

$$\Omega^* = 19,801$$

$$\omega = 4,534$$

$$W_S^* = 9,432$$

$$W_\theta^q = 10,374$$

Nestes exemplos são satisfeitas as duas condições:

$$W_S^* < W_\theta^q \quad \dots\dots\dots(5.3)$$

$$W_S^* < \Omega^* \quad \dots\dots\dots(5.4)$$

o que indica que ao aumentar do parâmetro  $W$ , ocorre a flambagem do sistema com deformações de flexão das lajes, isto é, pode-se tomar como parâmetro crítico  $W_S$  do sistema o valor:

$$W_S = W_S^* = 9,432$$

Considerando-se um outro caso, o da estrutura com 4 andares e 10 painéis transversais, tem-se na Tabela:

$$\Omega^* = 19,801$$

$$\omega = 4,534$$

$$W_S^* = 12,966$$

$$W_\theta^q = 10,426$$

Agora a condição:

$$W_S^* < \Omega^* \dots\dots\dots(5.4)$$

é satisfeita, mas a la condição:

$$W_S^* < W_\theta^q \dots\dots\dots(5.3)$$

não é verificada. Isto quer dizer que a estrutura em estudo perde estabilidade por flambagem localizada do painel longitudinal como indeslocável. O parâmetro crítico  $W_S$  do sistema vale então:

$$W_S = W_\theta^q = 10,426$$

Estudando todos os conjuntos de 4 valores registrados na Tabela II, nota-se que nas estruturas estudadas a influência da deformabilidade das lajes só acontece para as estruturas com mais de 10 painéis transversais. Os casos correspondentes estão salientados com hachuras na tabela. Verificou-se nos exemplos estudados que esta influência tende a crescer (acontecendo para

estruturas com menor número de painéis transversais) com o aumento do número de andares.

Em diversas estruturas a influência da deformabilidade das lajes, deixou de ocorrer pelo cedo aparecimento da flambagem localizada do painel longitudinal. Um fator que contribui para o aparecimento da flambagem do sistema com deformação das lajes é o tipo de perfil usado para os pilares. Os perfis H adotados possuem momento de inércia  $I_x$  (correspondente aos painéis transversais) com ordem de valor 3 vezes maior que  $I_y$  (correspondente aos painéis longitudinais) o que faz os painéis longitudinais serem muito flexíveis, relativamente aos painéis transversais é esta flexibilidade dos painéis longitudinais que provoca o aparecimento da flambagem localizada dos mesmos antes que ocorra qualquer outro tipo de flambagem.

### 5.3. Exemplos de estruturas do grupo 2

#### - Descrição das estruturas

As estruturas deste grupo diferem das estruturas do grupo 1, apenas quanto ao tipo de perfis adotados para os pilares. Os perfis adotados (seção composta com 2 perfis U) estão indicados na Fig. 5.6 e na Tabela III.

Ao escolher as estruturas do Grupo 2 procurou-se adotar para os pilares, seções cujos momentos de inércia  $I_x$  e  $I_y$  fossem da mesma ordem de grandeza, com a finalidade de verificar se essa modificação proporciona maior influência da deformabilidade das lajes no parâmetro crítico  $W_s$  do sistema.

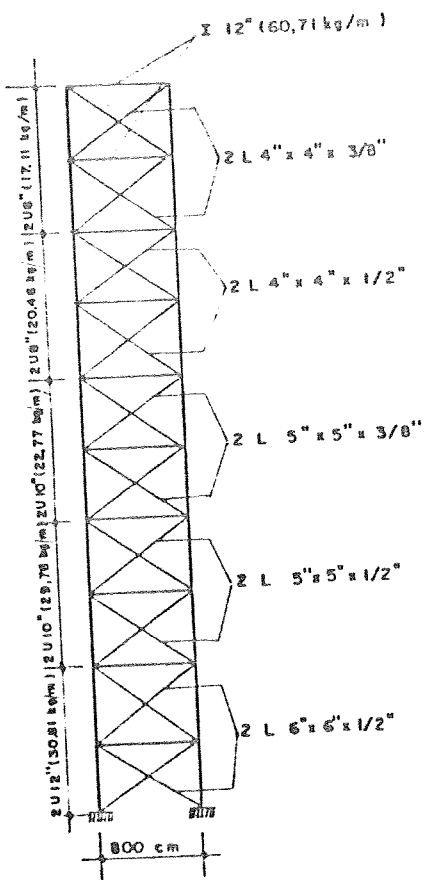


FIG. 5.5a - Painel transversal extremo.

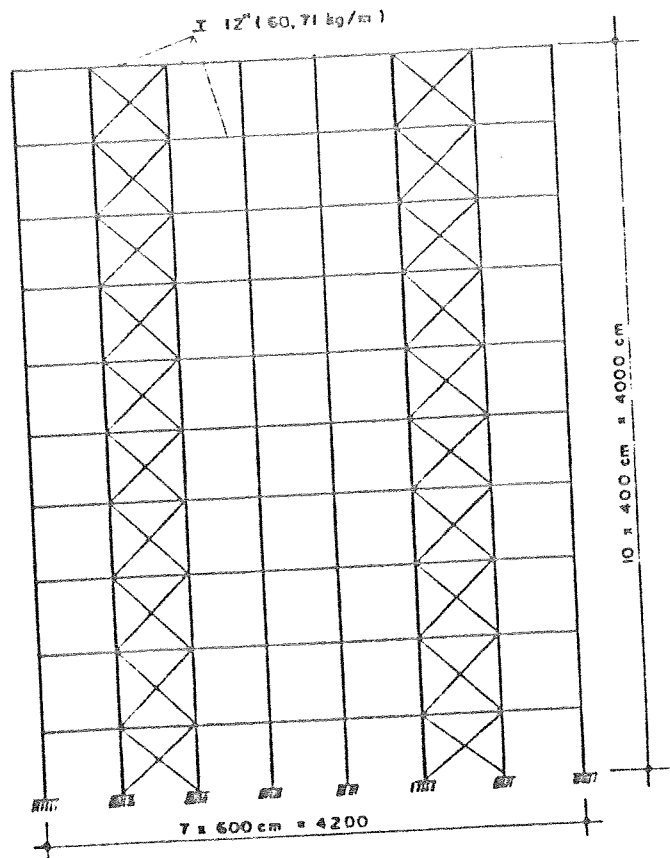


FIG. 5.5b - Painel longitudinal. As barras do contraventamento tem as mesmas seções em cada andar do contraventamento do painel transversal (Fig. 5.5a).

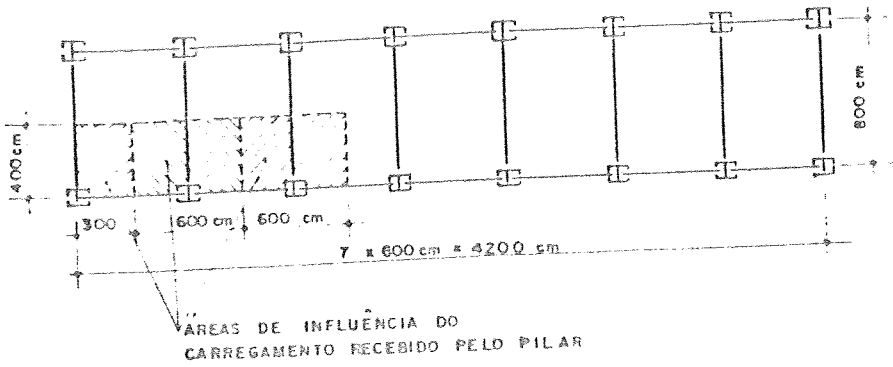


FIG. 5.5c - Planta de estrutura de edifício com 10 andares e 8 painéis transversais mostrando também as "áreas de influência do carregamento" no andar. Nos pilares de canto a carga concentrada vale  $P_c = 16t$  e nos pilares de borda vale  $P_b = 32t$ .

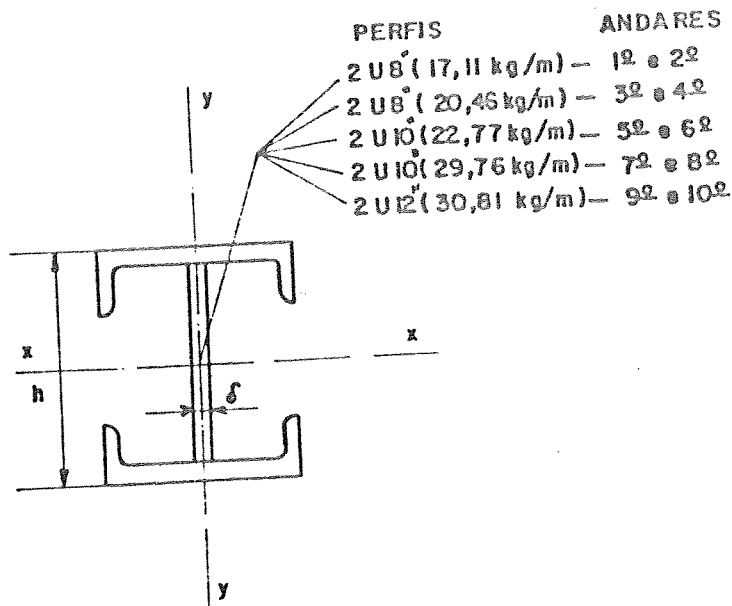


FIG. 5.6 - Tipos de perfis adotados para as colunas das estruturas do Grupo 2.



As Figs. 5.5a e 5.5b descrevem respectivamente o painel transversal extremo de maior altura (10 andares) e o painel longitudinal correspondente ao exemplo também desta altura e constituído de 8 painéis transversais. Os demais painéis transversais ou longitudinais podem ser obtidos destes últimos, da maneira já explicada, retirando-se ou adicionando-se barras.

O carregamento é o mesmo já adotado para as estruturas do grupo 1, isto é, cargas verticais concentradas  $P_c = 16t$  nos pilares de canto e  $P_b = 32t$  nos pilares de borda (em cada andar).

Também para as estruturas deste grupo foi adotada espessura de 10cm para as lajes de concreto armado. Adotou-se para o concreto módulo de elasticidade longitudinal  $E = 210t/cm^2$  e módulo de elasticidade transversal  $G = 80t/cm^2$ . Para os painéis transversais que são de aço adotou-se módulo de elasticidade longitudinal  $E = 2100t/cm^2$ .

A Tabela III define as características de todas as barras usadas nas estruturas deste grupo. A numeração dos andares, na mesma tabela é feita a partir do topo.

### - Resultados

Os resultados encontrados para cada estrutura analisada estão representados na Tabela IV através dos valores  $\omega$ ,  $\Omega^*$ .

PERFIS ADOTADOS PARA AS ESTRUTURAS DO GRUPO 2

TABELA III

andares	barras	perfis	S (cm <sup>2</sup> )	I <sub>x</sub> (cm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )
19 e 29	diagonais	21,4"x4"x3/8"	37,00	—	—
	colunas	2U8" (17,1kg/m) h = 200,00mm ø = 6,35mm	55,60	3653,20	2712,40
39 e 49	diagonais	2L4"x4"x1/2"	48,40	—	—
	colunas	2U8" (20,46kg/m) h = 230,00mm ø = 6,35mm	65,80	5964,60	3006,50
59 e 69	diagonais	2L5"x5"x3/8"	59,40	—	—
	colunas	2U10" (22,77kg/m) h = 230,00mm ø = 8,00mm	75,40	6552,10	5600,90
79 e 89	diagonais	2L5"x5"x1/2"	61,28	—	—
	colunas	2U10" (29,76kg/m) h = 260,00mm ø = 8,00mm	95,10	11120,00	6581,00
99 e 109	diagonais	2L6"x6"x1/2"	74,18	—	—
	colunas	2U12" (30,81kg/m) h = 260,00mm ø = 9,50mm	101,55	13510,00	10741,80
Vigas em todos os andares			112" (60,71kg/m)	77,30	11330,00

OBS.: Os andares são numerados a partir do topo do edifício

$W_{\theta}^q$  e  $W_S^*$ . Como se viu no parágrafo 5.2, as relações de grandeza entre estes valores possibilita a interpretação do comportamento da estrutura ao perder estabilidade.

- Discussão dos resultados das estruturas do Grupo 2

Nestas estruturas (com as novas seções adotadas para os pilares) observa-se uma influência da deformabilidade das lajes um pouco maior do que nas estruturas do Grupo 1. Por exemplo veja-se a estrutura com 4 andares e 10 painéis transversais, para a qual os resultados obtidos:

$$\Omega^* = 12,579$$

$$\omega = 3,544$$

$$W_S^* = 9,478$$

$$W_{\theta}^q = 9,699$$

satisfazem as duas condições:

$$W_S^* < \Omega^* \dots\dots\dots(5.4)$$

$$W_S^* < W_{\theta}^q \dots\dots\dots(5.3)$$

Portanto a estrutura com 4 andares e 10 painéis transversais quando com pilares duplo U perde estabilidade com deformação de flexão das lajes enquanto com pilares H perde estabilidade por flambagem localizada do painel longitudinal.

TABELA IV  
 RESULTADOS DOS EXEMPLOS DO GRUPO 2

Para  $W = 1$  vale o carregamento descrito no parágrafo 5.3 e na Fig. 5.5c

NÚMERO DE ANDARES		NÚMERO DE PAINÉIS TRANSVERSAIS					
		4	6	8	10	12	14
2	$\Omega^*$	20,464	20,464	20,464	20,464	20,464	20,464
	$\omega$	5,885	5,885	5,885	5,885	5,885	5,885
	$W_S^*$	20,457	20,457	20,457	16,698	12,783	10,818
	$W_\theta^q$	19,323	19,023	18,916	18,858	18,830	18,809
4	$\Omega^*$	12,579	12,579	12,579	12,579	12,579	12,579
	$\omega$	3,544	3,544	3,544	3,544	3,544	3,544
	$W_S^*$	12,575	12,575	12,575	9,478	7,775	6,778
	$W_\theta^q$	10,091	9,842	9,747	9,699	9,675	9,644
6	$\Omega^*$	8,608	8,608	8,608	8,608	8,608	8,608
	$\omega$	2,290	2,290	2,290	2,290	2,290	2,290
	$W_S^*$	8,605	8,605	8,605	6,378	5,236	
	$W_\theta^q$	8,773	8,488	8,392	8,333	8,309	
8	$\Omega^*$	7,537	7,537	7,537	7,537	7,537	
	$\omega$	1,836	1,836	1,836	1,836	1,836	
	$W_S^*$	7,534	7,534	7,534	5,536		
	$W_\theta^q$	8,024	7,715	7,597	7,536		
10	$\Omega^*$	7,088	7,088	7,088			
	$\omega$	1,512	1,512	1,512			
	$W_S^*$	7,086	7,086	6,682			
	$W_\theta^q$	7,441	7,145	7,038			

As seções adotadas para os pilares das estruturas do Grupo 2 foram escolhidas de maneira a satisfazer imposições construtivas e de resistência, resultando que a discrepância entre os momentos de inércia  $I_x$  e  $I_y$  das colunas ( $I_x / I_y = 3$  para o Grupo 1) ficou diminuída mais pela diminuição dos  $I_x$  (relativos aos painéis transversais) do que pelo aumento dos  $I_y$  (relativos aos painéis longitudinais). Este fato do qual não se pode fugir por estar atendendo a condições realísticas do dimensionamento, surge neste grupo como um outro fator que tende a reduzir a influência da deformabilidade das lajes no valor do parâmetro crítico  $W_g$ . Pode-se compreender a redução desta influência, observando que a rigidez das lajes (que contraventam os painéis transversais) que foi mantida constante, resultou aumentada relativamente às rigidezes dos painéis transversais.

Observa-se então nos resultados da Tabela IV que a influência da deformabilidade das lajes (casos hachurados na Tabela) embora maior só aparece para poucos casos novos.

Pode-se dizer assim, de uma maneira geral que a influência da deformabilidade das lajes no parâmetro crítico do sistema só acontece para as estruturas com mais de 8 painéis transversais.

- Modo de flambagem

A determinação do modo de flambagem das estruturas dos exemplos serve apenas como complementação ao estudo da instabilidade, pois o resultado de maior interesse prático é o valor  $W_S$  do parâmetro crítico do sistema.

Na realidade a determinação do modo de flambagem além de despende muito tempo de computação, reduz demais a capacidade do programa e o "tamanho" das estruturas que podem ser analisadas.

Porém, a título de ilustração, no caso da estrutura do Grupo 2 com 4 andares e 10 painéis transversais, o modo de flambagem encontrado é apresentado na Fig. 5.7.

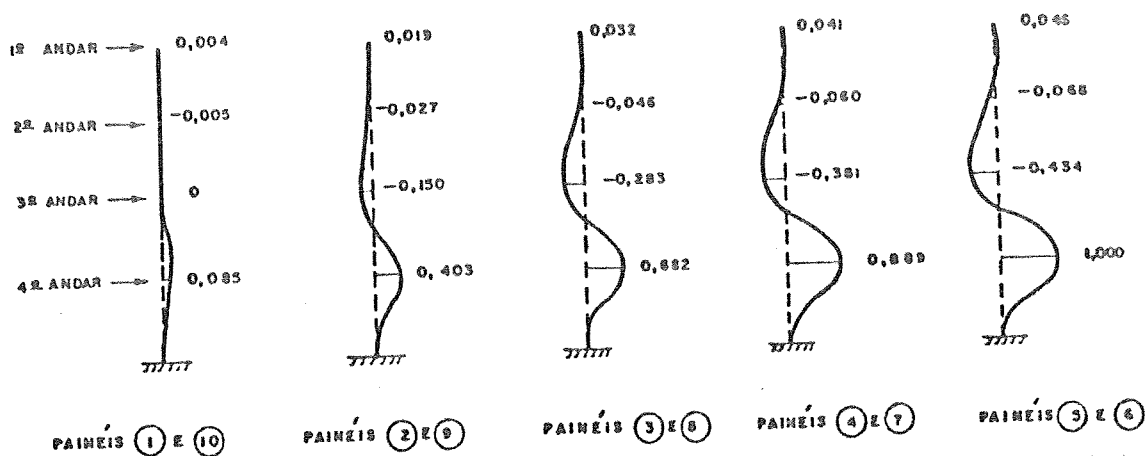


FIG. 5.7 - Deslocamentos nos diversos níveis dos painéis correspondentes ao modo de flambagem encontrado na estrutura com 4 andares e 10 painéis transversais.

## 6. PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO

### 6.1. Introdução

Foi elaborado um programa de cálculo automático em linguagem FORTRAN, para o computador IBM-1130 com 32K de memória interna, que realiza a solução apresentada neste trabalho para a análise de estruturas tridimensionais de edifícios considerando as deformações das lajes em seus próprios planos. São dadas a seguir as características do referido programa.

### 6.2. Organização do programa

O programa principal lê e imprime dados que definem o edifício e realiza a análise sugerida neste trabalho fazendo uso de 10 sub-rotinas cujas funções são dadas a seguir:

- 1) VINPN - Determina os parâmetros críticos do painel suposto indeslocável e suposto deslocável.
- 2) LIDPN - Lê e imprime os dados que definem cada painel.

- 3) LIDLJ - Lê e imprime os dados que definem cada laje.
- 4) CEMRB - Calcula os elementos da matriz de rigidez de cada barra.
- 5) SPPNL - Determina a matriz de rigidez do pórtico correspondente as rotações dos nós e a matriz de rigidez do pórtico correspondentes as translações dos andares.
- 6) SPLAJ - Calcula os elementos da matriz de rigidez da laje
- 7) VINST - Calcula o parâmetro crítico do sistema tridimensional (edifício), e quando existente os modos de flambagem associados.
- 8) INVGJ - Realiza inversão da matriz pelo método de GAUSS-JORDAN.
- 9) DEGJ1  
DEGJ2 - Verifica se uma matriz simétrica é definida positiva com o método de GAUSS ou então efetua a decomposição da banda superior da matriz pelo mesmo método.



10) AVJCB - Calcula os auto-valores e respectivos auto-vetores de uma matriz pelo método de JACOBI.

### 6.3. Identificação das variáveis

A tabela V apresenta a definição dos nomes de variáveis que aparecem no programa de cálculo automático.

TABELA V

Nome	Definição
NA	Número de andares (número de lajes)
NPANS	Número de painéis transversais
NPNEL	Número do painel
IRP()	Indicador de painel repetido
IRL	Indicador de laje repetida
NJ	Número de nós da sub-estrutura (painel ou laje)
M	Número de barras da sub-estrutura
NC	Número de prumadas de colunas do painel
E	Módulo de elasticidade longitudinal
G	Módulo de elasticidade transversal
X(),Y()	Coordenadas dos nós da sub-estrutura
JJ()	Extremidade início da barra
JK()	Extremidade fim da barra
AX()	Área da seção transversal da barra
IZ()	Momento de inércia da seção da barra
L()	Comprimento da barra
W	Parâmetro multiplicador do carregamento vertical do painel e do sistema
AW1()	Esforço de compressão na barra, correspondente a $W = 1$

TABELA V (continuação)

Nome	Definição
AC()	Esforço de compressão na barra
CX(),CY()	Cossenos diretores da barra
WCP( ,1)	Parâmetro crítico do pórtico suposto deslocável
WCP( ,2)	Parâmetro crítico do pórtico suposto indesejável
EIW	Extremo inferior do intervalo (5.2) de variação de W onde é procurado o parâmetro crítico do edifício
ESW	Extremo superior do mesmo intervalo de variação de W
SMD(,)	Elementos da matriz de rigidez da barra
SP(,)	Elementos da matriz de rigidez da sub-estrutura
CE	Carga de EULER para a barra
RO	Relação $P/P_E$ para barra
ROMAX	Relação $P/P_E$ para barra crítica do painel
NBC	Número da barra crítica do painel
WCB	Parâmetro crítico correspondente à flambagem da barra crítica suposta bi-articulada nas extremidades
LBS	Largura da banda superior de uma matriz simétrica em banda diagonal
ITR	Número do ciclo iterativo
SCM1,SCM2	Constantes de rigidez da barra
SCM3,SCM4	Índices de deslocamentos da sub-estrutura
J1,J2,J3,J4	Índices de deslocamentos horizontais do painel
IP,JP	Índices de deslocamentos horizontais da laje
IL,JL	Índices de deslocamentos do sistema
IS,JS	Elementos da matriz de rigidez do sistema
SS( , )	Indicador de que foi ou não atingida a carga crítica do sistema
INDI	Número de multiplicidade do auto-valor mínimo ( $\lambda_{\min} = 0$ ) da matriz $[S_S]$ correspondente ao parâmetro crítico do sistema
NMAVM	

#### 6.4. Preparação dos dados em cartões

Para facilitar a preparação dos dados de uma estrutura, o programa de cálculo foi elaborado de maneira a imprimir os dados nas mesmas posições de colunas em que os mesmos são fornecidos em cartões. Na Tabela VI é mostrado como devem ser fornecidos os dados das estruturas em cartões ao computador, e a ordenação dos mesmos. Na última coluna da mesma tabela, as expressões entre parênteses são dados alfanuméricos que o programa lê e imprime. No mesmo cartão em que é lido o número do painel ou o número da laje são lidos também os valores da variável IRP ou de IRL. Se IRP ou IRL forem iguais a zero, significa que o painel ou a laje são diferentes do painel ou da laje anteriores e são portanto lidos os dados a eles (painel ou laje) referentes. Quando porém, IRP ou IRL forem iguais a 1, o painel ou laje são repetidos, e portanto não serão lidos os dados a eles correspondentes.

Para melhor elucidar o fornecimento dos dados de uma estrutura ao computador, na Tabela VII, mostra-se como são dispostos os cartões de dados referentes ao exemplo constituído de 2 andares e 8 painéis transversais, pertencente ao Grupo II.

TABELA VI

		Nº de cartões	VARIÁVEIS NUMÉRICAS e ALFANUMÉRICAS EM CADA CARTÃO
A	a) nº de painéis	1	(NUMERO DE PAINÉIS) NPANS
	b) nº de lajes	1	(NUMERO DE LAJES) NA
B	a) nº do painel e índice de repetição	1	(PAINEL NUMERO) NPHEL, IRP
	b) nº de nós	1	(NUMERO DE NOS) NJ
	c) nº de barras	1	(NUMERO DE BARRAS) M
	d) nº de pilares	1	(NUMERO DE PILARES) NC
	e) módulo de elasticidade longitudinal	1	(MODULO DE ELAST. LONGITUDINAL) E
	f) cabeçalho	1	(COORDENADAS DOS NOS)
	g) sub-cabeçalho	1	(NO X Y)
	h) coordenadas dos nós	NJ	K, X(K), Y(K)
	i) cabeçalho	1	(CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS)
	j) sub-cabeçalho	1	(BARRA JJ JK AX IZ AWI)
	k) características e propriedades das barras	M	K, JJ(K), JK(K), AX(K), IZ(K), AWI(K)
C	a) nº do painel e índice de repetição	1	(PAINEL NUMERO) NPNEL, IRP
D	a) nº da laje e índice de repetição	1	(LAJE NUMERO) NLAJE, IRL
	b) módulo de elasticidade longitudinal	1	(MODULO DE ELAST. LONGITUDINAL) E
	c) módulo de elasticidade transversal	1	(MODULO DE ELAST. TRANSVERSAL) G
	d) cabeçalho	1	(COORDENADAS DOS NOS)
	e) sub-cabeçalho	1	(NO X Y)
D	f) coordenadas dos nós	NPANS	K, X(K), Y(K)
	g) cabeçalho	1	(CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS)
	h) sub-cabeçalho	1	(BARRA JJ JK IZ AX F)
	i) características e propriedades das barras	NPANS-1	K, JJ(K), JK(K), IZ(K), AX(K), F(K)
E	a) nº da laje e índice de repetição	1	(LAJE NUMERO) NLAJE, IRL

A - Dados relativos ao sistema

B - Dados relativos a um painel ainda não repetido

C - Dados relativos a um painel repetido

D - Dados relativos a uma laje não repetida

E - Dados relativos a uma repetida

Observe-se na mesma tabela que para cada variável inteira é reservado um campo de 5 colunas e para as variáveis reais, na forma decimal e exponencial, é reservado um campo de 10 e 15 colunas respectivamente. A numeração dos cartões que consta na 2ª coluna da tabela é feita para mostrar a ordenação dos cartões de dados do exemplo considerado, não sendo fornecida nos próprios cartões.

TABELA VII

COLUNA DO CARTÃO	1	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	
DADOS RELATIVOS AO SISTEMA	01	NUMERO DE LAJES									2			
	02	NUMERO DE PAINELIS TRANSVERSAIS									6			
PAINEL NÃO REPETIDO	03	PAINEL NUMERO									1	0		
	04	NUMERO DE NOS									6			
	05	NUMERO DE BARRAS									8			
	06	NUMERO DE PILARES									2			
	07	MODULO DE ELAST. LONGITUDINAL										2100.00		
	08	COORDENADAS DOS NOS												
	09		NO		X		Y							
	10		1		0.00		800.00							
	11		2		800.00		800.00							
	12		3		0.00		400.00							
	13		4		800.00		400.00							
	14		5		0.00		0.00							
	15		6		800.00		0.00							
		16	CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS											
		17	BARRA	JJ	JK	AX	IZ							
		18	1	1	2	77.30	11330.00							
	19	2	3	4	77.30	11330.00								
	20	3	1	3	55.60	3653.20								
	21	4	2	4	55.60	3653.20								
	22	5	3	5	55.60	3653.20								
	23	6	4	6	55.60	3653.20								
	24	7	2	3	37.00	0.00								
	25	8	4	5	37.00	0.00								
PAINEL NÃO REPETIDO	26	PAINEL NUMERO									2	0		
	27	NUMERO DE NOS									6			
	28	NUMERO DE BARRAS									6			
	29	NUMERO DE PILARES									2			
	30	MODULO DE ELAST. LONGITUDINAL										2100.00		
	31	COORDENADAS DOS NOS												
	32		NO		X		Y							
	33		1		0.00		800.00							
	34		2		800.00		800.00							
	35		3		0.00		400.00							
	36		4		800.00		400.00							
	37		5		0.00		0.00							
	38		6		800.00		0.00							

TABELA VII (continuação)

COLUNA DO CARTÃO	1	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
PAINEL NÃO REPETIDO (CONT.)	39	CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS											
	40	BARRA	JJ	JK	AX		IZ						
	41	1	1	2	77.30	11330.00							
	42	2	3	4	77.30	11330.00							
	43	3	1	3	55.60	3653.20							
	44	4	2	4	55.60	3653.20							
	45	5	3	5	55.60	3653.20							
	46	6	4	6	55.60	3653.20							
	PAINEL REPETIDOS	47	PAINEL NUMERO										3
48		PAINEL NUMERO										4	1
49		PAINEL NUMERO										5	1
PAINEL NÃO REPETIDO	50	PAINEL NUMERO										6	0
	51	NUMERO DE NOS										6	
	52	NUMERO DE BARRAS										8	
	53	NUMERO DE PILARES										2	
	54	MODULO DE ELAST. LONGITUDINAL										2100.00	
	55	COORDENADAS DOS NOS											
	56	NO	X		Y								
	57	1	0.00		800.00								
	58	2	800.00		800.00								
	59	3	0.00		400.00								
	60	4	800.00		400.00								
	61	5	0.00		0.00								
	62	6	800.00		0.00								
	63	CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS											
	64	BARRA	JJ	JK	AX		IZ						
65	1	1	2	77.30	11330.00								
66	2	3	4	77.30	11330.00								
67	3	1	3	55.60	3653.20								
68	4	2	4	55.60	3653.20								
69	5	3	5	55.60	3653.20								
70	6	4	6	55.60	3653.20								
71	7	2	3	37.00	0.00								
72	8	4	5	37.00	0.00								
LAJE NÃO REPETIDA	73	LAJE NUMERO										1	0
	74	MODULO DE ELAST. LONGITUDINAL										210.00	
	75	MODULO DE ELAST. TRANSVERSAL										80.00	
	76	COORDENADAS DOS NOS											
	77	NO	X		Y								
	78	1	0.00		3000.00								
	79	2	0.00		2400.00								
	80	3	0.00		1800.00								
	81	4	0.00		1200.00								
82	5	0.00		600.00									
83	6	0.00		0.00									

TABELA VII (continuação)

COLUNA DO CARTÃO	1	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	
	84	CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS												
	85	BARRA . JJ		JK	IZ		AX		F					
LAJE NÃO	86	1	1	2	0.42667E 09		8000.00		1.20					
REPETIDA	87	2	2	3	0.42667E 09		8000.00		1.20					
(CONT.)	88	3	3	4	0.42667E 09		8000.00		1.20					
	89	4	4	5	0.42667E 09		8000.00		1.20					
	90	5	5	6	0.42667E 09		8000.00		1.20					
LAJE	91	LAJE NUMERO									2	1		
REPETIDA														

### 6.5. Programa de cálculo em linguagem FORTRAN

Nas páginas seguintes são dadas as listagens do programa de cálculo automático na linguagem FORTRAN

### 6.6. Explicações sobre o programa de cálculo automático

São dados aqui esclarecimentos à respeito dos cálculos realizados pelo programa principal e suas sub-rotinas.

#### a) Programa Principal

1) Linhas 1 a 10 - É impresso o título do programa e são lidos e impressos os valores NA e NPANS.

2) Linhas 11 a 17 - São lidos os dados referentes a cada painel e armazenados no disco.

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE VINPN
REAL IZ(40),L(40)
COMMON ENOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,NC,E,G,XI
130),Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AW1(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
2CP(15,2),E1W,ESW,1APC,NLAJE,SMD(4,4),SP(60,60),SS(80,80),F(15)
C1.-----DETERMINACAO DA BARRA CRITICA DO PAINEL E DO VALOR DE W PARA O
C      QUAL A RELACAO (RO=P/PE) DA MESMA BARRA E IGUAL A 1.
1      PI=3.14159
2      ROMAX=-1.*10.**35
3      DC 10 I=1,M
4      IF(IZ(1))10,10,1
5      1 CE=P1**2*E#IZ(1)/L(1)**2
6      RO=AW1(1)/CE
7      IF(RO-ROMAX)10,10,2
8      2 ROMAX=RO
9      NBC=I
10     CONTINUE
11     WCB=1.0/ROMAX
12     WRITE(5,3)NBC,NPNEL,WCB
13     3 FORMAT(//,5X,' A BARRA',14,' DO PAINEL',13,' E'' CRITICA',I
14     1STU E'', ATINGE'',/,'7X'EM PRIMEIRO LUGAR A CARGA DE EULER PARA W
15     2='',F10.3,'')
C2.-----DETERMINACAO DO PARAMETRO CRITICO DO PORTICO SUPOSTO IN-
C      DESLOCAVEL.
16     W1=C.0
17     W2=4.*WCB
18     IND=C
19     LBS=NC+1
20     IF(LBS-NA*NC)5,5,4
21     4 LBS=NA*NC
22     5 N1=1
23     N2=NA*NC
24     DO 40 ITR=1,10
25     W=(W1+W2)/2.0
26     DO 20 I=1,M
27     20 AC(I)=AW1(I)*W
28     CALL SPPNL(2)
29     AUX=10.**35
30     DO 30 I=N1,N2
31     IF(SP(1,I)-AUX)6,30,30
32     6 AUX=SP(1,I)
33     30 CONTINUE
34     IF(AUX)9,9,7
35     7 CALL DEGJI(SP,N1,N2,LBS,INS,IND)
36     IF(INS)9,11,8
37     8 W1=W
38     GO TO 40
39     9 W2=W
40     CONTINUE
41     W=(W1+W2)/2.0
42     11 WCP(NPNEL,2)=W
43     WRITE(5,12)NPNEL,W
44     12 FORMAT(5X,' O PAINEL',13,' QUANDO SUPOSTO INDESLOCA''VEL TEM PARA
45     1METRO',/,'7X'CRITICO W='',F10.3,'')
C3.-----DETERMINACAO DO PARAMETRO CRITICO DO PORTICO SUPOSTO DESLOCA-
C      VEL.
46     W1=0.0
47     W2=W
48     IND=0
49     LBS=NA
50     IF(LBS-6)14,14,13
51     13 LBS=6
52     14 N1=NA*NC+1
53     N2=NA*NC+NA
54     DO 70 ITR=1,10
55     W=(W1+W2)/2.0
56     DO 50 I=1,M
57     50 AC(I)=AW1(I)*W
58     CALL SPPNL(1)
59     AUX=10.**35
60     DO 60 I=N1,N2
61     IF(SP(1,I)-AUX)15,15,60
62     15 AUX=SP(1,I)
63     60 CONTINUE
64     IF(AUX)18,18,16
65     16 CALL DEGJI(SP,N1,N2,LBS,INS,IND)
66     IF(INS)18,19,17
67     17 W1=W
68     GO TO 70
69     18 W2=W
70     CONTINUE
71     W=(W1+W2)/2.0
72     19 WCP(NPNEL,1)=W
73     WRITE(5,21)NPNEL,W
74     21 FORMAT(5X,' O PAINEL',13,' QUANDO SUPOSTO DESLOCA''VEL TEM PARAME
75     1TRO',/,'7X'CRITICO W='',F10.3,'')
76     RETURN
      END

```

// DUP

\*STORE

WS UA VINPN



```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE LIDPN
REAL IZ(40),L(40)
COMMON ENOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,NC,E,G,X(
130),Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AWI(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
ZCP(15,2),EIH,ESW,IAPC,MLAJE,SMO(4,4),SP(60,60),SS(80,80),F(15)
```

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46

```
C1.-----DADOS QUE DEFINEM O PAINEL.
READ(2,1)(ENOME(J),J=1,8),NPNEL,IRP(NPNEL)
WRITE(5,1)(ENOME(J),J=1,8),NPNEL,IRP(NPNEL)
1 FORMAT(10A4,18,110)
IF(IRP(NPNEL))12,2,12
2 DO 10 I=1,3
READ(2,3)(ENOME(J),J=1,8),NOME(1)
10 WRITE(5,3)(ENOME(J),J=1,8),NOME(1)
3 FORMAT(10A4,18)
NJ=NOME(1)
M=NOME(2)
NC=NOME(3)
READ(2,4)(ENOME(J),J=1,10),E
WRITE(5,4)(ENOME(J),J=1,10),E
4 FORMAT(10A4,F10,2)
C2.-----LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS.
DO 20 I=1,2
READ(2,5)ENOME
20 WRITE(5,5)ENOME
5 FORMAT(20A4)
DO 30 I=1,NJ
READ(2,6)K,X(K),Y(K)
6 FORMAT(15,2F10,0)
30 WRITE(5,7)K,X(K),Y(K)
7 FORMAT(15,2F10,2)
C3.-----LEITURA DAS CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS.
DO 40 I=1,2
READ(2,8)ENOME
40 WRITE(5,8)ENOME
DO 50 I=1,M
READ(2,9)K,JJ(K),JK(K),AX(K),IZ(K),AWI(K)
8 FORMAT(3I5,3F10,0)
IF(JJ(K)-JK(K))50,9,9
9 JAUX=JJ(K)
JK(K)=JK(K)
JK(K)=JAUX
50 WRITE(5,11)K,JJ(K),JK(K),AX(K),IZ(K),AWI(K)
11 FORMAT(3I5,3F10,2)
C4.-----CALCULO DOS COMPRIMENTOS E COSSENO DIRETORES DAS BARRAS.
DO 60 I=1,M
JJ1=JJ(1)
JK1=JK(1)
XCL=X(JK1)-X(JJ1)
YCL=Y(JK1)-Y(JJ1)
L(I)=SQRT(XCL**2+YCL**2)
CX(I)=XCL/L(I)
60 CY(I)=YCL/L(I)
12 WRITE(5,13)
13 FORMAT(1X,24(10----))
RETURN
END
```

```
// DUP
*STORE WS UA LIDPN
```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE LIDLJ
REAL IZ(40),L(40)
COMMON ENOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,NC,E,G,X(
130),Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AWI(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
ZCP(15,2),EIH,ESW,IAPC,MLAJE,SMO(4,4),SP(60,60),SS(80,80),F(15)
```

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16

```
C1.-----DADOS QUE DEFINEM A LAJ.
READ(2,1)(ENOME(J),J=1,8),MLAJE,IRL
WRITE(5,1)(ENOME(J),J=1,8),MLAJE,IRL
1 FORMAT(8A4,18,110)
IF(IRL)11,2,11
2 NC=1
NJ=NPANS
M=NPANS-1
READ(2,3)(ENOME(J),J=1,10),E
WRITE(5,3)(ENOME(J),J=1,10),E
READ(2,3)(ENOME(J),J=1,10),G
WRITE(5,3)(ENOME(J),J=1,10),G
3 FORMAT(10A4,F10,2)
C2.-----LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS
DO 10 I=1,2
READ(2,4)ENOME
10 WRITE(5,4)ENOME
4 FORMAT(20A4)
```

```

17 DO 20 I=1,NJ
18 READ(2,5)K,X(K),Y(K)
19 5 FORMAT(15,2F10.0)
20 WRITE(3,6)K,X(K),Y(K)
21 6 FORMAT(15,2F10.2)
C3-----LEITURA DAS CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS.
22 DO 30 I=1,2
23 READ(2,4)ENOME
24 WRITE(3,4)ENOME
25 DO 40 I=1,M
26 READ(2,7)K,JJ(K),JK(K),IZ(K),AX(K),F(K)
27 7 FORMAT(15,5E15.5,2F10.0)
28 IF(JJ(K)-JK(K))40,8,8
29 8 JAX=JJ(K)
30 JK=JK(K)
31 JJ(K)=JK(K)
32 40 WRITE(5,9)K,JJ(K),JK(K),IZ(K),AX(K),F(K)
33 9 FORMAT(15,5E15.5,2F10.2)
C4-----CALCULO DOS COMPRIMENTOS DAS BARRAS.
34 DO 50 I=1,M
35 JJI=JJ(I)
36 JKI=JK(I)
37 L(I)=Y(JJI)-Y(JKI)
38 11 WRITE(5,12)
39 12 FORMAT(1X,24(0---))
40 RETURN
END
// DUP
*STORE WS UA LIOUJ

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE CEMRB(N,IND2)
REAL IZ(40),L(40)
COMMON ENOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,NC,E,G,XI
130),Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AWI(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
2CP(15,2),E1W,ESW,IAPC,NLAJE,SMD(4,4),SP(60,60),SS(80,80),F(15)
IF(17(N))1,1,2
1 IF(IND2-2)2,13,13
2 PI=3.14159
IF(AC(N))3,3,4
3 S=4.0
SC=7.0
RC=0.0
GO TO 9
4 CE=PI**2*E*IZ(N)/L(N)**2
RO=AC(N)/CE
ALF=C.5*PI*SQRT(RO)
ALF2=2.*ALF
SEN2=SIN(ALF2)
COS2=COS(ALF2)
IF(ABS(ALF2-3.14159)-0.0005)5,5,6
5 S=2.4674
GO TO 8
6 SEN1=SIN(ALF)
COS1=COS(ALF)
TAN1=SEN1/COS1
COT2=COS2/SEN2
S=ALF*(1.0-ALF2*COT2)/(TAN1-ALF)
IF(ABS(ALF-2.246705)-0.000005)7,7,8
7 SC=3.604
GO TO 9
8 C=(ALF2-SEN2)/(SEN2-ALF2*COS2)
SC=S*C
9 IF(IND2-2)12,11,11
11 SMD(1,1)=S*.5*IZ(N)/L(N)
SMD(1,2)=SC*.5*IZ(N)/L(N)
GO TO 14
12 SCM1=E*AX(N)/L(N)
SCM2=S*E*IZ(N)/L(N)
SCM3=(S+SC1)*E*IZ(N)/L(N)**2
SCM4=SC*E*IZ(N)/L(N)
SCM5=(2*(S+SC)-PI**2*RO)*SCM
SMD(1,1)=SCM2
SMD(1,2)=SCM4
SMD(1,3)=-SCM3*CY(N)
SMD(3,3)=SCM1*CX(N)**2+SCM5*CY(N)**2
GO TO 14
13 SMD(1,1)=0.0
SMD(1,2)=0.0
14 RETURN
END
// DUP
*STORE WS UA CEMRB

```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE SPPNL(INDP)
REAL IZ(40),L(40)
COMMON E,HOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,NC,E,G,X(
130),Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AW1(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
2CP(15,2),EIW,ESW,IAPC,NLAJE,SMD(4,4),SP(60,60),SS(80,80),F(15)
```

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67

```
C1.-----MATRIZ DE RIGIDEZ DO PORTICO INDESLOCVEL.
  IND=1
  INS=1
  NI=1
  N2=NA*NC
  N3=NA*NC+1
  N4=NA*NC+NA
  DO 10 I=1,N2
  DO 10 J=1,N2
10 SP(I,J)=0.0
  IF(INDP-2)4,1,4
  1 DO 20 N=1,M
    CALL CEMRB(N,2)
    J1=JJ(N)
    J2=JK(N)
    IF((J2-N2)/2,2,3
  2 SP(J1,J2)=SP(J1,J2)+SMD(1,2)
    SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
  3 SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
20 CONTINUE
  GO TO 16

C2.-----MATRIZ DE RIGIDEZ DO PORTICO DESLOCVEL.
  4 DO 30 J=N3,N4
  DO 30 I=N1,J
30 SP(I,J)=0.0
  DO 40 N=1,M
    J1=JJ(N)
    J2=JK(N)
    J3=N2+(JJ(N)-1)/NC+1
    J4=N2+(JK(N)-1)/NC+1
    IF(J3-J4)6,5,6
  5 CALL CEMRB(N,2)
    SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
    SP(J1,J2)=SP(J1,J2)+SMD(1,2)
    SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
  GO TO 40
  6 CALL CEMRB(N,1)
    IF(J4-N4)7,7,8
  7 SP(J1,J2)=SP(J1,J2)+SMD(1,2)
    SP(J1,J4)=SP(J1,J4)-SMD(1,3)
    SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
    SP(J2,J3)=SP(J2,J3)+SMD(1,3)
    SP(J2,J4)=SP(J2,J4)-SMD(1,3)
    SP(J3,J4)=SP(J3,J4)-SMD(3,3)
  8 SP(J4,J4)=SP(J4,J4)+SMD(3,3)
    SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
    SP(J1,J3)=SP(J1,J3)+SMD(1,3)
    SP(J3,J3)=SP(J3,J3)+SMD(3,3)
40 CONTINUE
  LBS=NC+1
  IF(LBS-NA*NC)11,11,9
  9 LBS=NA*NC
11 CALL DEGJ1(SP,N1,N2,LBS,INS,IND)
  DO 60 J=N3,N4
  IMIN=(J-NA*NC)*NC-2*NC+2
  IF(IMIN-2)12,12,13
12 IMIN=2
13 DO 50 I=IMIN,N2
  KMIN=I-LBS+1
  IF(KMIN-IMIN+1)14,15,15
14 KMIN=IMIN-1
15 KMAX=I-1
  DO 50 K=KMIN,KMAX
50 SP(I,J)=SP(I,J)-SP(K,I)*SP(K,J)/SP(K,K)
  KI=IMIN-1
  DO 60 I=N3,J
  DO 60 K=KI,N2
60 SP(I,J)=SP(I,J)-SP(K,I)*SP(K,J)/SP(K,K)
16 RETURN
  END
```

```
// DUP
*STORE WS UA SPPNL
```

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE SPLAJ
REAL IZ(40),L(40)
COMMON I,NOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,KC,E,G,XI
130,Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AWI(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
2CP(15,2),E1W,ESW,IAPC,PLAJF,SMD(4,4),SP(60,60),SS(80,80),-115)
N1=1
N2=NPANS
N3=N2+1
N4=2*NPANS
DO 10 I=1,N4
DO 10 J=1,N4
10 SP(I,J)=0.0
DO 20 I=1,M
J1=JJ(I)
J2=JK(I)
J3=I2+(J1-1)/NC+1
J4=N2+(J2-1)/NC+1
COEF=12.*I(I)*E*IZ(I)/(G*AX(I)*L(I)**2)
AUX=11.+COEF)
S=(4.+COEF)/AUX
SC=(2.-COEF)/AUX
SMD(1,1)=S*E*IZ(I)/L(I)
SMD(1,2)=SC*E*IZ(I)/L(I)
SMD(1,3)=A.*E*IZ(I)/(AUX=L(I)**2)
SMD(3,3)=(2.0*SMD(1,3))/L(I)
IF(J4-N4)1,1,2
1 SP(J1,J2)=SP(J1,J2)+SMD(1,2)
SP(J1,J4)=SP(J1,J4)-SMD(1,3)
SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
SP(J2,J3)=SP(J2,J3)+SMD(1,3)
SP(J2,J4)=SP(J2,J4)-SMD(1,3)
SP(J3,J4)=SP(J3,J4)-SMD(3,3)
SP(J4,J4)=SP(J4,J4)+SMD(3,3)
2 SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
SP(J1,J3)=SP(J1,J3)+SMD(1,3)
SP(J3,J3)=SP(J3,J3)+SMD(3,3)
20 CONTINUE
INS=1
INS=2
LPS=2
CALL DEGJ1(SP,N1,N2,LBS,INS,IND)
DO 40 J=N3,N4
IMIN=J-NPANS
IF(IMIN-2)3,3,4
3 IMIN=2
4 DO 30 I=IMIN,N2
KMIN=I-LPS+1
IF(KMIN-IMIN+1)5,6,6
5 KMIN=IMIN-1
6 KMAX=I-1
DO 30 K=KMIN,KMAX
30 SP(I,J)=SP(I,J)-SP(K,I)*SP(K,J)/SP(K,K)
KI=IMIN-1
DO 40 I=K3,J
DO 40 K=KI,N2
40 SP(I,J)=SP(I,J)-SP(K,I)*SP(K,J)/SP(K,K)
RETURN
END

```

// DUP  
\*STORE WS UA SPLAJ

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE INVGJ(N1,N2,S)
DIMENSION S(80,80)
DO 30 I=N1,N2
AUX=S(I,1)
S(I,1)=1.0
DO 10 J=N1,N2
10 S(I,J)=S(I,J)/AUX
DO 30 K=N1,N2
IF(I-K)1,30,1
1 AUX=S(K,1)
S(K,1)=0.0
DO 20 L=N1,N2
20 S(K,L)=S(K,L)-S(I,L)*AUX
30 CONTINUE
RETURN
END

```

// DUP  
\*STORE WS UA INVGJ

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE VINST
REAL IZ(40),L(40)
COMMON ENOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,NC,E,G,XI
130)Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AW(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
ZCP(15,2),EIH,ESW,IAPC,NLAJE,SMD(4,4),SP(60,60),SS(80,80),F(15)
C1.-----DETERMINACAO DO PARAMETRO CRITICO DO SISTEMA.
1 INDI=0
2 N1=1
3 N2=NA*NPANS
4 W1=EIW
5 W2=ESW
6 IND=0
7 LBS=NA*NPANS
8 DO 100 I=1,10
9 W=(W1+W2)/2.0
C1.1-----ZERAR A MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA.
10 DO 10 I=1,N2
11 DO 10 J=1,N2
12 SS(I,J)=0.0
C1.2-----CONTRIBUICAO DE CADA PAINEL NA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA.
13 NRG=0
14 DO 50 N=1,NPANS
15 NPNEL=N
16 IF(IRP(NPNEL))2,1,2
17 1 NRG=NRG+1
18 READ(NRG,1)NJ,M,NC,E,X,Y,JJ,JK,AX,IZ,L,CX,CY,AWI
19 DO 20 I=1,M
20 AC(I)=AWI(I)*W
21 CALL SPPNL(1)
22 2 DO 40 I=1,NA
23 IS=NPNEL+(I-1)*NPANS
24 IP=NA*NC+I
25 DO 30 J=1,NA
26 JS=NPNEL+(J-1)*NPANS
27 JP=NA*NC+J
28 30 SS(IS,JS)=SS(IS,JS)+SP(IP,JP)
29 40 CONTINUE
30 50 CONTINUE
C1.3-----CONTRIBUICAO DE CADA LAJE NA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA.
31 DO 80 N=1,NA
32 NLAJE=N
33 IF(NLAJE-1)3,3,4
34 3 NRG=NLAJE+6
35 READ(NRG,1)SP
36 4 DO 70 I=1,NPANS
37 IS=(NLAJE-1)*NPANS+I
38 IL=NPANS+I
39 DO 60 J=1,NPANS
40 JS=(NLAJE-1)*NPANS+J
41 JL=NPANS+J
42 60 SS(IS,JS)=SS(IS,JS)+SP(IL,JL)
43 70 CONTINUE
44 80 CONTINUE
45 IF(IND)13,6,13
46 6 AUX=10.**35
47 DO 90 I=1,N2
48 IF(SS(I,I)-AUX)5,90,90
49 5 AUX=SS(I,I)
50 90 CONTINUE
51 IF(AUX)9,9,7
52 7 CALL DEGJ2(SS,N1,N2,LBS,INS,IND)
53 IF(INS)9,11,8
54 8 W1=W
55 GO TO 100
56 9 W2=W
57 100 CONTINUE
58 W=(W1+W2)/2.0
59 11 WRITE(5,12)W
60 12 FORMAT(//5X,*** A INSTABILIDADE DA ESTRUTURA VERIFICA-SE PARA O P
61 I PARAMETRO',7,8X'CRITICO' W =*F10.3,*.*)
62 INDI=1
63 GO TO 101
64 13 EXW=(EIW+511.*ESW)/512.
65 IF(W-EXW)102,102,23
66 102 IF(N2-60)103,103,25
67 103 DO 110 I=N1,N2
68 DO 110 J=I,N2
69 110 SS(J,I)=SS(I,J)
C2.-----CALCULO DO AUTO-VALOR MAXIMO
70 C=-10.**35
71 DO 130 I=N1,N2
72 TC=SS(I,I)
73 DO 120 J=N1,N2
74 IF(J-I)14,120,14
75 14 TC=TC+ABS(SS(I,J))
76 120 CONTINUE
77 IF(TC-C)130,130,15
78 15 C=TC
79 130 CONTINUE
80 DO 140 I=N1,N2
81 DO 140 J=N1,N2
82 140 SS(I,J)=SS(I,J)/C.

```

```

83 DO 150 I=N1,N2
84 150 SS(I,I)=SS(I,I)+C.05
85 CALL INV6J(N1,N2,SS)
86 IND=1
87 CALL AVJCB(SS,SP,N1,N2,IND)
C2.1-----ORDENACAO DOS AUTO-VECTORES E AUTO-VALORES EM ORDEM DECRESCENTE
C  DESTES ULTIMOS
88 I2=N2-1
89 DO 170 I=1,I2
90 J2=N2-1
91 DO 170 J=1,J2
92 IF(SS(J,J)-SS(J+1,J+1))16,170,170
93 16 AUX=SS(J,J)
94 SS(J,J)=SS(J+1,J+1)
95 SS(J+1,J+1)=AUX
96 DO 160 K=1,N2
97 AUX=SP(K,J)
98 SP(K,J)=SP(K,J+1)
99 160 SP(K,J+1)=AUX
00 170 CONTINUE
01 NMAVM=1
02 DO 180 I=2,4
03 IF(1.0-SS(I,I)/SS(1,1)-0.00001)17,17,180
04 17 NMAVM=NMAVM+1
05 180 CONTINUE
06 IF(NMAVM-1)18,18,23
07 18 PIVOT=0.0
08 DO 190 K=1,N2
09 IF(ABS(SP(K,1))-ABS(PIVOT))190,19,19
10 19 PIVOT=SP(K,1)
11 190 CONTINUE
12 DO 200 K=1,N2
13 SP(K,1)=SP(K,1)/PIVOT
14 WRITE(5,21)
15 21 FORMAT(///,18X'MODO DE FLAMBAGEM DO SISTEMA',///,5X'** TRANSLACAO
16 1S HORIZONTAIS DOS NO'S (INTERSECOES ENTRE',/,9X'LAJES E PAINE'IS
17 2) DA ESTRUTURA.',///,15X'INTERSECAO',13X'DESLOCAMENTO',//)
18 L1=1
19 L2=NPANS
20 DO 220 K=1,NA
21 DO 210 N=L1,L2
22 NPANEL=N-(K-1)*NPANS
23 WRITE(5,22)K,NPANEL,SP(N,1)
24 22 FORMAT(10X'LAJE'13,' - PAINEL'13,7X,F10.3)
25 L1=L1+NPANS
26 L2=L2+NPANS
27 WRITE(5,104)
28 104 FORMAT(1X,/)
29 220 CONTINUE
30 GO TO 25
31 23 WRITE(5,24)
32 24 FORMAT(///,5X'** O SISTEMA NAO POSSUI UM MODO BEM DEFINIDO DE FLAMB
33 1ACS',/)
34 25 RETURN
END

```

// DUP

\*STORE WS UA VINST

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE DEGJ1(S,N1,N2,LBS,INS,IND)
DIMENSION S(60,60)
IF(IND)2,1,2
1 IF(S(N1,N1))9,9,2
2 INS=1
J1=N1+1
DO 20 J=J1,N2
I1=J-LBS+2
IF(I1-N1-1)3,4,4
3 I1=N1+1
4 K1=I1-1
DO 10 I=I1,J
K2=I-1
DO 10 K=K1,K2
10 S(I,J)=S(I,J)-S(K,I)*S(K,J)/S(K,K)
IF(IND)20,5,20
5 IF(S(J,J))6,6,20
20 CONTINUE
GO TO 11
6 IF(J=N2)9,7,7
7 IF(S(J,J))9,8,8
8 INS=0
GO TO 11
9 INS=-1
11 RETURN
END

```

// DUP

\*STORE WS UA DEGJ1

```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
SUBROUTINE DEGJ2(S,N1,N2,LBS,INS,IND)
DIMENSION S(80,80)
IF(IND)2,1,2
1 IF(S(N1,N1))9,9,2
2 INS=1
  J1=N1+1
  DO 20 J=J1,N2
    I1=J-LBS+2
    IF(I1-N1-1)3,4,4
  3 I1=N1+1
  4 K1=I1-1
    DO 10 I=I1,J
      K2=I-1
      DO 10 K=K1,K2
        S(I,J)=S(I,J)-S(K,I)*S(K,J)/S(K,K)
  10 S(I,J)=S(I,J)
    IF(IND)20,5,20
  5 IF(S(J,J))6,6,20
  20 CONTINUE
  GO TO 11
  6 IF(IJ-N2)9,7,7
  7 IF(S(J,J))9,8,8
  8 INS=0
  GO TO 11
  9 INS=-1
  11 RETURN
  END
// DUP
*STORE WS UA DEGJ2

```

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE AVJCB(A,U,N1,N2,IND)
DIMENSION A(80,80),U(60,60),AIK(60)
C1.-----PREPARACAO PARA O CALCULO DE AUTO-VALORES E AUTO-VETORES
1 IF(IND)1,2,1
  1 DO 10 I=N1,N2
    DO 10 J=N1,N2
  10 U(I,J)=0.0
  20 DO 20 I=N1,N2
    U(I,I)=1.0
  2 OLUQD=0.0
    QDSFD=0.0
    DO 30 I=N1,N2
      OLUQD=OLUQD+A(I,I)**2
      J1=I+1
      IF(I-N2)3,4,4
      IF(I-N2)3,4,4
  3 DO 30 J=J1,N2
    30 QDSFD=QDSFD+A(I,J)**2
C2.-----ITERACAO PELO METODO DE JACOBI PARA MATRIZES SIMETRICAS
4 EPS=10.**(-10)
  I2=N2-1
  DO 90 NITR=1,50
    DO 70 I=N1,I2
      J1=I+1
      DO 70 J=J1,N2
        C=ABS(A(I,I))-A(J,J)
        IF(Q-EPS)7,7,5
        IF(ABS(A(I,J))-C)7,7,5
  5 IF(ABS(A(I,J))-C)7,7,5
  6 P=2.*A(I,J)+Q/(A(I,I)-A(J,J))
    AUX=SQRT(P*P+Q*Q)
    CSN=SQRT((1.0+Q/AUX)/2.0)
    SEN=P/(2.*CSN*AUX)
    GO TO 8
  7 CSN=1.0/SQRT(2.0)
    SEN=CSN
  8 IF(IND)9,11,9
  9 DO 40 K=N1,N2
    AUUKI=U(K,I)
    U(K,I)=AUXKI*CSN+U(K,J)*SEN
    U(K,J)=AUXKI*SEN-U(K,J)*CSN
  40 U(K,J)=AUXKI*SEN-U(K,J)*CSN
  11 DO 40 K=I,N2
    IF(K-J)12,12,14
  12 AIK(K)=A(I,K)
    AI(K)=AIK(K)*CSN+AI(K,J)*SEN
    IF(K-J)13,13,15
  13 AI(J,K)=AIK(K)*SEN-AI(K,J)*CSN
  GO TO 50

```

```

43 14 AUXIK=A(I,K)
44 A(I,K)=AUXIK*CSN+A(J,K)*SEN
45 A(J,K)=AUXIK*SEN-A(I,K)*CSN
46 50 CONTINUE
47 AIK(J)=AIK(I)*SEN-AIK(J)*CSN
48 DO 60 K=N1,J
49 IF(K-I)15,15,16
50 15 AUXKI=A(K,I)
51 A(K,I)=AUXKI*CSN+A(K,J)*SEN
52 A(K,J)=AUXKI*SEN-A(K,I)*CSN
53 GO TO 60
54 16 A(K,J)=AIK(K)*SEN-A(K,J)*CSN
55 60 CONTINUE
56 70 A(I,J)=0.0
57 QD=0.0
58 DO 80 I=N1,N2
59 80 QD=QD+A(I,I)**2
60 IF(QD-OLDQD/QD-10.**(-5))18,17,17
61 17 OLDQD=QD
62 90 CONTINUE
63 18 RETURN
    END

```

// DUP

\*STORE WS UA AVJCB

```

// FOR
*10CS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
    REAL IZ(40),L(40)
    COMMON /NOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP(15),IRL,NJ,M,NC,E,G,X(
130),Y(30),JJ(40),JK(40),AX(40),IZ,AW1(40),AC(40),L,CX(40),CY(40),W
2CP(15,2),E1W,ESW,IAPC,NLAJE,SMD(4,4),SP(60,60),SS(80,80),F(15)
    DEFINE FILE 1(5,220,U,IR),2(5,220,U,IR),3(5,220,U,IR),4(5,220,U,IR
1),5(5,220,U,IR),6(5,220,U,IR),7(40,220,U,IR)
C1.-----IMPRESSAO DO CABECALHO,LEITURA DO NUMERO DE PAINES E DO NUME-
1 WRITE(5,1)
2 1 FORMAT(////5X,'ANALISE DE INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSION
3 AIS',/,5X,'DE EDIFICIOS CONSIDERANDO AS DEFORMACOES DAS LAJES EM',/
4 2,5X,'SEUS PROPRIOS PLANOS.',////)
5 DO 10 I=1,2
6 READ(2,2)(NOME(J),J=1,8),NOME(I)
7 10 WRITE(5,2)(NOME(J),J=1,8),NOME(I)
8 2 FORMAT(9A4,18)
9 NA=NOME(1)
10 NPANS=NOME(2)
C2.-----LEITURA DOS DADOS DE CADA PAINEL.
11 NRG=0
12 DO 20 I=1,NPANS
13 CALL LIDPM
14 IF(IRP(NPNEL))20,3,20
15 3 NRG=NRG+1
16 WRITE(NRG,1)NJ,M,NC,E,X,Y,JJ,JK,AX,IZ,L,CX,CY,AW1
17 20 CONTINUE
C3.-----LEITURA DOS DADOS DE CADA LAJE.
18 DO 30 I=1,NA
19 CALL LIDLJ
20 IF(IRL)4,4,30
21 4 CALL SPLAJ
22 NRG=NLAJE+6
23 WRITE(NRG,1)SP
24 30 CONTINUE
C4.-----VERIFICACAO DA INSTABILIDADE DE CADA PAINEL.
25 WRITE(5,4)
26 41 FORMAT(1',/,28X,'RESULTADOS',/,1X,24('---'),/)
27 NRG=0
28 DO 40 I=1,NPANS
29 NPN=L=1
30 IF(IRP(NPNEL))6,5,6
31 5 NRG=NRG+1
32 READ(NRG,1)NJ,M,NC,E,X,Y,JJ,JK,AX,IZ,L,CX,CY,AW1
33 IAPC=NPNEL
34 CALL VINPN
35 GO TO 40
36 6 WRITE(5,7)NPNEL,IAPC
37 7 FORMAT(7,5X,' O PAINEL',13,' E' IDENTICO AO PAINEL',13,'.')
38 WCP(NPNEL,1)=WCP(IAPC,1)
39 WCP(NPNEL,2)=WCP(IAPC,2)
40 CONTINUE

```



```

C5.-----DETERMINACAO DOS VALORES EXTREMOS DO INTERVALO ONDE SERA PRO-
C      CURADO O PARAMETRO CRITICO DO SISTEMA.
41      ESW=10.0*35
42      DO 50 I=1,NRG
43      IF(WCP(I,2)-ESW)8,50,50
44      8 ESW=WCP(I,2)
45      NPC2=I
46      50 CONTINUE
47      FIW=10.0*35
48      DO 60 I=1,NPANS
49      IF(WCP(I,1)-FIW)9,60,60
50      9 FIW=WCP(I,1)
51      NPC1=I
52      60 CONTINUE
C6.-----CONSTATAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE UM INTERVALO ONDE POSSA SER PES-
C      QUISSADA A INSTABILIDADE DO SISTEMA.
53      IF(ESW-FIW)11,11,13
54      11 WRITE(5,12)
55      12 FORMAT(1X'NÃO HA INTERVALO DE VARIAÇÃO DE W PARA ANALISAR A INS-
56      TABILIDADE '/X' DO SISTEMA',/)
57      GO TO 10
58      13 WRITE(5,14)FIW,ESW,NPC1,NPC2
59      14 FORMAT(//,5X'O INTERVALO ONDE SERA ESTUDADA A INSTABILIDADE D
60      O SISTEMA',/8X'MA VARIA DE W ='F11.3,' A W ='F11.3,' ESTES VALO',/
61      2,8X'RES CORRESPONDEM AS CARGAS CRITICAS DOS PAINES',I2,' E ',
62      3I2,/,8X'SUPSTOS RESPECTIVAMENTE DESLOCA'VEL E INDESLOCA'VEL.')
C7.-----VERIFICAÇÃO DA INSTABILIDADE DO SISTEMA TRIDIMENSIONAL.
63      CALL VINST
64      WRITE(5,15)
65      15 FORMAT(//,24('---'),/25X'TRABALHO TERMINADO'/)
66      16 CONTINUE
67      CALL EXIT
      END
// XEQ

```

3) Linhas 18 a 24 - São lidos os dados referentes a cada laje, é calculada a matriz de rigidez da laje e armazenada no disco.

4) Linhas 25 a 40 - É feita a análise de instabilidade de todos os painéis transversais da estrutura, calculando-se assim os valores dos parâmetros críticos associados à cada painel. Se o painel for repetido, estes valores são iguais ao do painel anterior.

5) Linhas 41 a 52 - São determinados os valores extremos do intervalo onde será procurado o parâmetro crítico  $W_S$  do sistema.

6) Linhas 53 a 62 - Verifica-se a existência de intervalo onde possa ser analisada a instabilidade do sistema. Caso não exista intervalo o programa imprime mensagem e termina. Caso exista intervalo, são impressos os seus valores extremos.

7) Linhas 63 a 67 - É executada a análise de instabilidade do sistema. São determinados assim o valor do parâmetro crítico do sistema, e quando existente, os respectivos modos de flambagem.

b) Sub-rotina VINPN

1) Linhas 1 a 15 - É determinada a barra crítica do painel e o valor de  $W$  que corresponde à carga de EULER na mesma barra. Em seguida são impressos os números do painel, o número da barra crítica e o valor do parâmetro  $W$ .

2) Linhas 16 e 17 - São estabelecidos os valores extremos do intervalo onde será procurado o parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável.

3) Linha 18 - Adota-se IND igual a zero. Esta variável é usada como parâmetro pela sub-rotina DEGJ1, que será chamada adiante.

4) Linhas 19 a 21 - É determinada a largura LBS da banda superior da matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^p \end{bmatrix}$  do pórtico suposto indeslocável.

5) Linhas 22 e 23 - São calculados os índices relativos ao 1º e ao último deslocamentos correspondentes à matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^p \end{bmatrix}$ .

6) Linha 24 - Inicia-se o processo iterativo para a determinação do parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável.

7) Linhas 25 a 27 - É adotado para  $W$  o valor médio dos extremos do intervalo e em seguida são calculados os esforços axiais nas barras do painel, correspondentes ao valor de  $W$ .

8) Linha 28 - É determinada a matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável através da sub-rotina SPPNL.

9) Linhas 29 a 40 - Se todos os elementos da diagonal principal de  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  são positivos, chama-se a sub-rotina DEGJ1, que verifica se a mesma matriz é ou não definida positiva e para qualquer das alternativas altera-se convenientemente o intervalo de variação de  $W$ . Se algum elemento da diagonal de  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  for negativo ou nulo a matriz é não definida positiva e altera-se então o intervalo de variação de  $W$ .

10) Linhas 41 a 45 - É determinado e impresso o valor do parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável, logo após realizados os ciclos do processo iterativo.

11) Linhas 46 e 47 - São estabelecidos os valores extremos do intervalo de  $W$  onde será procurado o parâmetro crítico do pórtico suposto deslocável.

12) Linhas 48 a 51 - É adotado IND igual a zero para uso como parâmetro de entrada na sub-rotina DEGJ1 e logo após é determinada a largura da banda superior da

matriz  $\left[ S_{HH}^* \right]$  (eq. 2.44).

13) Linhas 52 e 53 - São calculados os índices relativos ao primeiro e ao último deslocamentos correspondentes à matriz  $\left[ S_{HH}^* \right]$ .

14) Linha 54 - Inicia-se o processo iterativo para o cálculo do parâmetro crítico do pórtico suposto deslocável.

15) Linhas 55 a 57 - É adotado para  $W$  o valor médio dos extremos do intervalo, e em seguida são calculados os esforços axiais das barras do pórtico suposto deslocável.

16) Linha 58 - É determinada a matriz de rigidez  $\left[ S_{HH}^* \right]$  (eq. 2.44) do pórtico suposto deslocável.

17) Linhas 59 a 70 - São realizadas as mesmas etapas das linhas 28 a 39, para a matriz  $\left[ S_{HH}^* \right]$ .

18) Linhas 71 a 76 - É determinado e impresso o parâmetro crítico do pórtico suposto deslocável, após realizados os ciclos do processo iterativo.

c) Sub-rotina LIDPN

1) Linhas 1 a 3 - São lidos e impressos os valores NPNEL (número do painel) e IRP (indicador de painel

repetido)

2) Linha 4 - Se IRP for igual a zero, são lidos os dados do painel, e se IRP for igual a 1, o painel é idêntico ao painel anterior, não sendo necessário portanto realizar a leitura dos seus dados.

3) Linhas 5 a 14 - São lidos os valores das variáveis, NJ, M, NC e do módulo de elasticidade longitudinal do material das barras do painel.

4) Linhas 15 a 23 - São lidas e impressas as coordenadas retangulares dos nós do painel.

5) Linhas 24 a 35 - São lidas e impressas as características e propriedades das barras do painel.

6) Linhas 36 a 46 - São calculados os comprimentos e cossenos diretores das barras do painel.

d) Sub-rotina LIDLJ

1) Linhas 1 a 3 - São lidos e impressos os valores NLAJE (número da laje) e IRL (indicador de laje repetida).

2) Linha 4 - Se IRL for igual a zero são lidos os dados da laje e se IRL for igual a 1 a laje é repetida e

não é necessário realizar a leitura de seus dados.

3) Linhas 5 a 7 - São determinados os valores NC, NJ e M da laje

4) Linhas 8 a 12 - São lidos e impressos o módulo de elasticidade longitudinal e o módulo de elasticidade transversal do material das barras da laje.

5) Linhas 13 a 21 - São lidas e impressas as coordenadas retangulares dos nós da laje.

6) Linhas 22 e 23 - São lidas e impressas as características e propriedades das barras da laje.

7) Linhas 34 a 40 - São calculados os comprimentos das barras da laje.

e) Sub-rotina CEMRE

1) Linha 1 - É verificado se o valor do momento de inércia da barra é maior ou igual a zero. Sendo maior que zero serão calculados os coeficientes de rigidez s e sc da barra.

2) Linha 2 - O momento de inércia da barra é nulo (correspondente à condição de barra bi-articulada). Se

IND2 for igual a 2, a matriz de rigidez  $[ S_{ND} ]$  da barra não contribui na matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável, resultam pois nulos os elementos daquela matriz. Se IND2 for igual a 1 calcula-se a matriz de rigidez  $[ S_{ND} ]$  da barra que contribui na matriz de rigidez do pórtico suposto deslocável.

3) Linhas 3 e 4 - É estabelecido o valor da constante PI e testado se a barra é axialmente carregada.

4) Linhas 5 a 8 - A carga axial da barra é nula. São então estabelecidos os valores dos coeficientes de rigidez s e sc da barra e o valor da relação  $RO = (P/PE)$  para o cálculo posterior dos elementos da matriz de rigidez da barra.

5) Linhas 9 a 27 - A carga axial da barra é maior que zero (de compressão). São então determinados os coeficientes de rigidez s e sc (eqs. 2.12 e 2.13) de rigidez da barra, para o cálculo posterior dos elementos da matriz de rigidez da barra.

6) Linhas 28 a 42 - Se IND2 for igual a 2 são calculados os elementos da matriz de rigidez  $[ S_{ND} ]$  da barra que contribuem na matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável e se IND2 for igual a 1 são calculados



os elementos da matriz de rigidez  $\left[ S_{MD} \right]$  da barra que contribuem para a matriz de rigidez do pórtico suposto deslocável.

7) Linhas 43 a 45 - Sendo nulo o momento de inércia da barra (barra bi-articulada), os elementos da sua matriz de rigidez não contribuem na matriz de rigidez  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  do pórtico indeslocável, e portanto resultam nulos.

f) Sub-rotina SPPNL

1) Linhas 1 a 6 - São adotados os valores IND e INS iguais a 1 para uso como parâmetros da sub-rotina DEGJ1 e são calculados os índices do primeiro e do último deslocamentos correspondentes às matrizes  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  e  $\left[ S_{HH}^* \right]$ .

2) Linhas 7 a 9 - É zerada a parte triangular superior da matriz  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  como preparação para o cálculo da própria matriz  $\left[ S_{\theta\theta}^P \right]$  ou da matriz  $\left[ S_{HH}^* \right]$ .

3) Linha 10 - Se o parâmetro INDP for igual a 2, será calculada a matriz de rigidez do pórtico suposto indeslocável e se INDP for igual a 1 será calculada a matriz de rigidez do pórtico suposto deslocável.

4) Linhas 11 a 20 - São determinadas as contribuições dos elementos das matrizes de rigidez  $[ S_{MD} ]$  de todas as barras na matriz de rigidez  $[ S_{\theta\theta}^P ]$  do pórtico suposto indeslocável.

5) Linhas 21 a 23 - É zerada a parte triangular superior restante da matriz  $[ S^P ]$  do pórtico como preparação para o cálculo da matriz  $[ S_{HH}^K ]$  do pórtico suposto deslocável.

6) Linhas 24 a 47 - São determinadas as contribuições dos elementos das matrizes de rigidez  $[ S_{MD} ]$  de todas as barras na matriz  $[ S^P ]$ .

7) Linhas 48 a 50 - É calculada a largura da banda superior da matriz  $[ S_{\theta\theta}^P ]$ , para simplificar a determinação da matriz  $[ S_{HH}^K ]$ .

8) Linhas 51 a 67 - A matriz  $[ S_{HH}^K ]$  é obtida aplicando-se o método de eliminação de GAUSS, parcialmente à matriz  $[ S^P ]$  de maneira a se processar a eliminação das primeiras  $(n_a \cdot n_c)$  linhas daquela matriz. Para isto chama-se sub-rotina DEGJ1 que resume os cálculos das eqs. (2.38, 2.40 e 2.41) e depois realizam-se os cálculos das eqs. (2.51, 2.52 e 2.54).

g) Sub-rotina SPLAJ

- 1) Linhas 1 a 4 - São calculados os índices do primeiro e do último deslocamentos correspondentes às matrizes  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} S_{HH}^{\ell*} \end{bmatrix}$  para a sub-estrutura laje.
- 2) Linhas 5 a 7 - É zerada a parte triangular superior da matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S^P \end{bmatrix}$  da laje.
- 3) Linhas 8 a 12 - São calculados os índices dos deslocamentos da laje correspondentes aos deslocamentos 1, 2, 3 e 4 da barra.
- 4) Linhas 13 a 20 - É calculada a matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S_{MD} \end{bmatrix}$  da barra de laje.
- 5) Linhas 21 a 32 - É determinada a contribuição da matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S_{MD} \end{bmatrix}$  da barra de laje na matriz de rigidez  $\begin{bmatrix} S^P \end{bmatrix}$  da laje.
- 6) Linhas 33 a 35 - São tomados os valores IND e INS iguais a 1, para uso como parâmetros de entrada na sub-rotina DEGJ1 e determinada a largura da banda superior da sub-matriz  $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$  da laje.

7) Linhas 36 a 52 - É determinada a matriz de rigidez  $\left[ S_{HH}^{e*} \right]$  da laje, repetindo-se a mesma parte (linhas 51 a 67 da sub-rotina SPPNL) que calcula a matriz  $\left[ S_{HH}^{p*} \right]$  dos painéis, apenas trocando-se os valores NÂ e NC por NPANS e 1.

#### h) Sub-rotina VINST

1) Linha 1 - O valor INDI é tomado igual a zero como preparação para o cálculo do parâmetro crítico  $W_S^*$ . Quando no decorrer do processo iterativo for atingida a carga crítica do edifício, será adotado então INDI igual a 1, para indicar que deve ser calculada mais uma vez a matriz de rigidez  $\left[ S_s \right]$  do sistema, correspondente ao valor de  $W_S^*$  encontrado, para determinação dos modos de flambagem.

2) Linhas 2 a 5 - São determinados os índices do primeiro e do último deslocamentos correspondentes à matriz de rigidez  $\left[ S_s \right]$  do sistema e estabelecidos os valores extremos do intervalo de variação de  $W$ , onde será procurado o parâmetro crítico  $W_S^*$ .

3) Linhas 6 e 7 - É adotado IND igual a zero para uso como parâmetro na sub-rotina DEGJ2 e estabelecido como largura da banda superior a matriz  $\left[ S_s \right]$  a largura total desta matriz.

4) Linha 8 - É iniciado o processo iterativo para o cálculo do parâmetro crítico  $W_S^*$ .

5) Linha 9 - É adotado para  $W$ , o valor médio dos extremos do intervalo.

6) Linhas 10 a 12 - São igualados a zero os elementos da parte triangular superior da matriz de rigidez  $[S_s]$  do sistema.

7) Linhas 13 a 30 - São determinadas as contribuições das matrizes de rigidez de todos os painéis na matriz de rigidez do sistema.

8) Linhas 31 a 44 - São determinadas as contribuições das matrizes de rigidez de todas as lajes na matriz de rigidez do sistema.

9) Linhas 45 a 57 - Se a carga crítica do sistema ainda não foi atingida ( $INDI = 0$ ), é verificado se algum elemento da diagonal principal de  $[S_s]$  é negativo ou nulo. Em caso afirmativo a matriz  $[S_s]$  é não definida positiva e altera-se o intervalo de variação de  $W$ . Se todos os elementos da diagonal principal de  $[S_s]$  forem positivos, faz-se a decomposição de GAUSS, alterando no final convenientemente o intervalo de variação de  $W$ . Se

INDI for igual a 1 serão determinados os modos de flambagem do sistema.

10) Linhas 58 a 61 - Após concluído o processo iterativo, o parâmetro  $W_S$  é determinado, como sendo o valor médio dos extremos do último intervalo de  $W$  calculado, e logo depois impresso.

11) Linhas 62 e 63 - É adotado INDI igual a 1 para indicar que foi atingida a carga crítica do sistema. A matriz de rigidez  $[ S_S ]$  é calculada mais uma vez para determinar os modos de flambagem do sistema.

12) Linhas 64 e 65 - Se o valor encontrado para  $W_S^*$  for muito próximo do extremo superior  $\Omega^*$  do intervalo de variação de  $W$  o programa é terminado.

13) Linha 66 - Se o produto  $(NA \times NPANS)$  da estrutura analisada for superior a 60 o programa não calcula os respectivos modos de flambagem.

14) Linhas 67 a 69 - Determina-se a parte triangular inferior da matriz  $[ S_S ]$  para então calcular os modos de flambagem do sistema.

15) Linhas 70 a 84 - São feitas algumas transformações na matriz  $[ S_S ]$  de maneira a ocorrer uma

alteração no espectro dos auto-valores, porém sem alterar os seus auto-vetores.

16) Linhas 85 a 87 - É determinada a matriz inversa da matriz  $[S_s]$  (já modificada). Adota-se IND igual a 1 para uso como parâmetro na sub-rotina AVJCB. São calculados os auto-valores e os correspondentes auto-vetores de  $[S_s]^{-1}$ , que são armazenados respectivamente na diagonal de SP [ . ] e nas colunas de SS [ . ] (o auto-vetor correspondente ao maior auto-valor de  $[S_s]^{-1}$ , e de multiplicidade 1, representa o modo de flambagem do exemplo em estudo)

17) Linhas 88 a 100 - Reordenam-se os elementos da diagonal de SS [ . ] e as colunas de SP [ . ] de maneira que os maiores auto-valores de  $[S_s]^{-1}$  e os respectivos auto-vetores fiquem armazenados nas posições mais à esquerda de SS [ . ] e de SP [ . ].

18) Linhas 101 a 105 - Calcula-se o número de multiplicidade do maior auto-valor da matriz  $[S_s]^{-1}$ .

19) Linhas 106 a 130 - Se existe um único modo de flambagem (NMAVM = 1), divide-se todos os deslocamentos correspondentes a este modo pelo deslocamento de maior módulo, e imprime-se então o vetor de deslocamentos representativo do modo de flambagem da estrutura.

20) Linhas 131 a 134 - Se o maior auto-valor de  $[S_5]^{-1}$  não é único ( $NMAVN \geq 2$ ), imprime-se mensagem.

i) Sub-rotina INVGJ

Executa a inversão de matrizes quadradas (não singulares), através do método de GAUSS-JORDAN que adota como pivô, os elementos da diagonal principal.

j) Sub-rotinas DEGJ1 e DEGJ2

Quando  $IND = 1$ , estas sub-rotinas (são iguais) executam a decomposição da parte triangular superior de uma matriz simétrica  $[S]$  de largura de banda LBS pelo método de decomposição de GAUSS. Quando a variável  $IND$  é igual a zero, testa-se a cada passo se o elemento da diagonal principal de  $[S]$  é negativo ou nulo. Caso apareça algum elemento negativo ou nulo, é interrompida a decomposição de GAUSS, adotando-se para  $INS$  o valor  $-1$ . Se todos os elementos da diagonal de  $[S]$  resultarem positivos, adota-se  $INS = +1$ . Se apenas o último elemento da diagonal de  $[S]$  for nulo atribui-se a  $INS$  o valor zero. Resultando portanto  $INS = +1$ , a matriz  $[S]$  é definida positiva, e sendo  $INS$  igual a  $-1$  ou zero,  $[S]$  é não definida positiva.



k) Sub-rotina AVJCB

Quando for  $IND = 1$  esta sub-rotina determina todos os auto-valores e correspondentes auto-vetores de uma matriz simétrica  $[ A ]$ . Os auto-valores são armazenados na diagonal principal de  $[ A ]$  e os auto-vetores nas colunas da matriz  $[ U ]$ . Quando  $IND$  for zero determinam-se apenas os auto-valores de  $[ A ]$ .

6.7 - Saida dos resultados

Nas páginas 142 e 143 são dados os resultados impressos pelo programa de cálculo, para a estrutura do Grupo 2, que possui 4 andares e 10 painéis transversais, e cujo modo de flambagem foi representado na Fig. 5.7.

RESULTADOS

---

- \* A BARRA 11 DO PAINEL 1 E' CRITICA, ISTO E', ATINGE EM PRIMEIRO LUGAR A CARGA DE EULER PARA  $w = 12.072$ .
- \* O PAINEL 1 QUANDO SUPOSTO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO  $w = 25.158$ .
- \* O PAINEL 1 QUANDO SUPOSTO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO  $w = 25.146$ .
- \* A BARRA 11 DO PAINEL 2 E' CRITICA, ISTO E', ATINGE EM PRIMEIRO LUGAR A CARGA DE EULER PARA  $w = 6.036$ .
- \* O PAINEL 2 QUANDO SUPOSTO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO  $w = 12.579$ .
- \* O PAINEL 2 QUANDO SUPOSTO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO  $w = 3.544$ .
- \* O PAINEL 3 E' IDENTICO AO PAINEL 2.
- \* O PAINEL 4 E' IDENTICO AO PAINEL 2.
- \* O PAINEL 5 E' IDENTICO AO PAINEL 2.
- \* O PAINEL 6 E' IDENTICO AO PAINEL 2.
- \* O PAINEL 7 E' IDENTICO AO PAINEL 2.
- \* O PAINEL 8 E' IDENTICO AO PAINEL 2.
- \* O PAINEL 9 E' IDENTICO AO PAINEL 2.
- \* A BARRA 11 DO PAINEL 10 E' CRITICA, ISTO E', ATINGE EM PRIMEIRO LUGAR A CARGA DE EULER PARA  $w = 12.072$ .
- \* O PAINEL 10 QUANDO SUPOSTO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO  $w = 25.158$ .
- \* O PAINEL 10 QUANDO SUPOSTO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO  $w = 25.146$ .
- \*\* O INTERVALO ONDE SERA ESTUDADA A INSTABILIDADE DO SISTEMA VARIA DE  $w = 3.544$  A  $w = 12.579$ . ESTES VALORES CORRESPONDEM AS CARGAS CRITICAS DOS PAINELIS 2 E 2 SUPOSTOS RESPECTIVAMENTE DESLOCAVEL E INDESLOCAVEL.
- \*\* A INSTABILIDADE DA ESTRUTURA VERIFICA-SE PARA O PARAMETRO CRITICO  $w = 9.495$ .

## MODO DE FLAMBAGEM DO SISTEMA

\*\* TRANSLACOES HORIZONTAIS DOS NO'S (INTERSECOES ENTRE LAJES E PAINELIS) DA ESTRUTURA.

INTERSECAO				DESLOCAMENTO
LAJE	1	-	PAINEL 1	0.004
LAJE	1	-	PAINEL 2	0.019
LAJE	1	-	PAINEL 3	0.032
LAJE	1	-	PAINEL 4	0.041
LAJE	1	-	PAINEL 5	0.046
LAJE	1	-	PAINEL 6	0.046
LAJE	1	-	PAINEL 7	0.041
LAJE	1	-	PAINEL 8	0.032
LAJE	1	-	PAINEL 9	0.019
LAJE	1	-	PAINEL 10	0.004
LAJE	2	-	PAINEL 1	-0.005
LAJE	2	-	PAINEL 2	-0.027
LAJE	2	-	PAINEL 3	-0.046
LAJE	2	-	PAINEL 4	-0.060
LAJE	2	-	PAINEL 5	-0.068
LAJE	2	-	PAINEL 6	-0.068
LAJE	2	-	PAINEL 7	-0.060
LAJE	2	-	PAINEL 8	-0.046
LAJE	2	-	PAINEL 9	-0.027
LAJE	2	-	PAINEL 10	-0.005
LAJE	3	-	PAINEL 1	0.000
LAJE	3	-	PAINEL 2	-0.150
LAJE	3	-	PAINEL 3	-0.283
LAJE	3	-	PAINEL 4	-0.381
LAJE	3	-	PAINEL 5	-0.434
LAJE	3	-	PAINEL 6	-0.434
LAJE	3	-	PAINEL 7	-0.381
LAJE	3	-	PAINEL 8	-0.283
LAJE	3	-	PAINEL 9	-0.150
LAJE	3	-	PAINEL 10	0.000
LAJE	4	-	PAINEL 1	0.085
LAJE	4	-	PAINEL 2	0.403
LAJE	4	-	PAINEL 3	0.682
LAJE	4	-	PAINEL 4	0.889
LAJE	4	-	PAINEL 5	0.999
LAJE	4	-	PAINEL 6	1.000
LAJE	4	-	PAINEL 7	0.889
LAJE	4	-	PAINEL 8	0.682
LAJE	4	-	PAINEL 9	0.403
LAJE	4	-	PAINEL 10	0.085

-----  
 TRABALHO TERMINADO

## 7. CONCLUSÕES

Considera-se que o processo apresentado neste trabalho para análise da instabilidade elástica de estruturas tridimensionais de edifícios, com o qual pode-se determinar o carregamento crítico vertical e o correspondente modo de flambagem das estruturas em estudo proporciona resultados suficientemente precisos.

O programa de cálculo apresentado no capítulo 6, de aplicação restrita ao tipo de estruturas descrito nos capítulos 1 e 4, ou seja, estruturas constituídas de painéis transversais e painéis longitudinais contraventados pelas lajes, permite determinar a carga crítica daquele tipo de estruturas e o respectivo modo de flambagem (quando este for único) sendo possível constatar os casos em que existe influência da deformabilidade das lajes no valor do parâmetro crítico  $W_s$ .

Quando a perda de estabilidade da estrutura se dá com deformação das lajes, encontra-se para o parâmetro crítico  $W_s$  do sistema valores maiores que os dos parâmetros críticos dos pórticos transversais deslocáveis isolados. O parâmetro crítico do sistema não chega porém a atingir os valores dos parâmetros críticos dos mesmos pórticos isolados supostos indeslocáveis. Apenas este fato de

possuir o parâmetro crítico do sistema um valor intermediário entre os parâmetros críticos encontrados na análise plana isolada dos pórticos transversais, justifica a aplicação do procedimento aqui sugerido, por ser um caminho seguro e preciso para a determinação daquele valor.

Com o presente trabalho, julga-se ainda ter dado contribuição para melhor compreensão da análise de instabilidade de pórticos planos, complementando desta maneira o trabalho de FIGUEIREDO<sup>1</sup>.

Dos exemplos analisados (Grupo 1 e Grupo 2) conclui-se que a influência da deformabilidade das lajes no parâmetro crítico  $W_S$  das estruturas com uma dimensão preponderante em planta, aparece quando a estrutura possui grande número de painéis transversais (8 ou mais).

A influência constatada nos exemplos é de utilidade no projeto dos edifícios do tipo mencionado, pois sugere que o contraventamento dos painéis transversais deve ser feito para cada grupo de 6 ou 7 painéis. Esse tipo de contraventamento, realizado com barras diagonais deve ser executado para poder se aproveitar ao máximo a capacidade dos pórticos transversais levando-os a trabalhar até sua flambagem localizada como pórticos indeslocáveis.

Em vista da influência da deformabilidade das lajes só aparecer para estruturas com muitos painéis transversais e portanto com uma das dimensões preponderante em planta, pode-se concluir aqui que na análise de instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios das estruturas com

uniformidade de dimensões em planta é justificável desprezar a deformabilidade das lajes e considerar apenas 3 deslocamentos (1 rotação e 2 translações) por andar. O presente trabalho confirma portanto que a análise de instabilidade como é feita por FIGUEIREDO<sup>1</sup>, desprezando a deformabilidade das lajes é bastante precisa.

Deve ser notado que em diversos dos exemplos resolvidos no capítulo 5, o parâmetro crítico do sistema é o próprio valor do parâmetro crítico do pórtico transversal ou longitudinal indeslocável. De fato, quando os pórticos transversais contraventados forem próximos, a análise plana da instabilidade desses pórticos levam ao parâmetro crítico do sistema. Porém na análise de instabilidade do caso mais geral, somente a análise aqui apresentada permite encontrar o parâmetro crítico  $W_S$  procurado.

Convém finalmente deixar claro que o presente trabalho não esgota o assunto da instabilidade elástica de

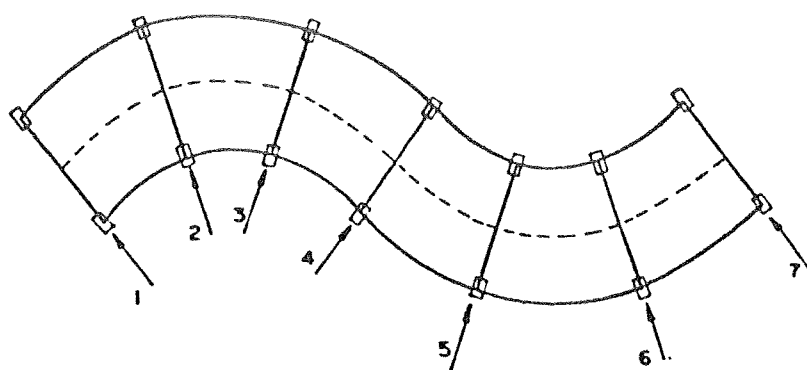


FIG. 7.1 - Estrutura de edifício com lajes curvas alongadas em planta. Indicam-se também alguns deslocamentos possíveis de serem adotados para o sistema.

estruturas de edifícios com uma dimensão preponderante em planta. Sugere-se por exemplo para outros trabalhos o estudo da instabilidade de edifícios com lajes curvas em planta, como é visto na Fig. 7.1. Não se pode aqui, "a priori" dizer que a influência da deformabilidade das lajes seja maior ou menor que a encontrada nas estruturas estudadas no presente trabalho. O estudo da instabilidade daquelas estruturas e a interpretação a ser dada, à influência da deformabilidade das lajes, deixa-se para outros estudiosos.

8. BIBLIOGRAFIA

1. FIGUEIREDO, R. G. - Sobre a instabilidade elástica de pórticos tridimensionais de edifícios. Tese de doutoramento, Escola de Engenharia de São Carlos, USP.- 1972.
2. STAMATO, M. C. e STAFFORD-SMITH, B. - Análise aproximada de estruturas tridimensionais de edifícios elevados. XIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural (Montevideo, 1969) Publ. EESC-USP, nº 155.
3. GOLDBERG, J. E. - Buckling of multistorey buildings. Journal of the Engineering Mechanics Division. February, 1965.
4. GOLDBERG, J. E. - Analysis of multistorey buildings considering shear wall and floor deformations. Symposium on Tall Buildings, Southampton, Pergamon Press, 1967.
5. SERRA, J. L. F. A. - Influência da deformabilidade das lajes nos efeitos da ação do vento. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1974



6. HORNE, M. R. e MERCHANT, W. - The Stability of frames. Pergamon Press, 1965.
7. ICES STRUDL-II - The structural design language engineering user's manual. (Vol. 1a)
8. McMINN, S. J. - Matrices for structural analysis. E. and F.N. Spon Limited, 1964.
9. PIPES, L. A. e HOVANESSIAN, S.A. - Matrix computer methods in engineering. Jons Wiley and Sons, 1969.
10. BARROS, I. Q. - Métodos numéricos, Vol. I, Álgebra Linear. - UNICAMP, 1970.
11. BARROS, I. Q. - op. cit (10).
12. RALSTON, A. e WILF. H. S. - Mathematical methods for digital computers, Vol. II - John Wiley and Sons, 1967 - p. 94-115.
13. CARNAHAN, B., LUTHER, H. A. e WILKER, J. O. - Applied numerical methods. John Wiley and Sons, Inc, 1969, pp 250-260.
14. BARROS. I. Q. - op. cit (10), pp 29-45.

15. FIGUEIREDO, R. G. e SERRA, J. L. F. A -  
Comportamento de grelha sem rigidez à torção em  
edifícios elevados sob a ação do vento. XVIII  
Jornadas Sul-Americanas de Engenharia  
Estrutural (Caracas, 1975).