

CONTRIBUIÇÃO AO CÁLCULO DAS CASCAS DE
REVOLUÇÃO MEDIANTE DIFERENÇAS FINITAS

ENGº MOUNIR KHALIL EL DEBS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador

Prof. Dr. Dante A.O. Martinelli

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Dante Guelpa

Prof. Dr. Roberto L.A. Barbato

Prof. Dr. Dante A.O. Martinelli

Suplentes

Prof. Dr. Pietro Candreva

Prof. Dr. Ilio Montanari

São Carlos, Fevereiro de 1976

APÊNDICES

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dante A.O. Martinelli pela orientação e pelo entusiasmo.

À F.A.P.E.S.P. pela bolsa de estudos concedida, que possibilitou o trabalho.

Aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, que de uma forma ou de outra contribuíram para a elaboração do trabalho, em especial aos srs. Antonio Raul Lopes, Rui Roberto Casale e Wilma Provinciali Vall, pelos trabalhos de datilografia, e aos srs. José Carlos Mar_rara e João Paulo Moretti, pelos trabalhos de desenho.

SUMÁRIO

O trabalho apresenta uma contribuição ao cálculo das cascas de revolução, sujeitas a carregamento de revolução em regime de flexão, mediante diferenças finitas. Procura-se, também, fornecer alguns subsídios para o projeto e cálculo dessas estruturas, focalizando um tipo de reservatório elevado.

No capítulo 1, apresenta-se em caráter introdutório a teoria das cascas de revolução sujeitas a carregamento de revolução.

Algumas das principais soluções analíticas da teoria de flexão são vistas no capítulo 2.

No capítulo 3, desenvolve-se a aplicação das diferenças finitas na teoria de flexão de cascas com simetria de revolução de forma e de carregamento.

No capítulo 4, apresenta-se a programação das soluções numéricas desenvolvidas no capítulo 3.

No capítulo 5, confrontam-se os resultados obtidos com soluções analíticas e soluções numéricas, para várias cascas, e apresentam-se as conclusões destas experimentações numéricas.

Finalizando, no capítulo 6, apresenta-se o cálculo de reservatório elevado constituído de cascas elipsoidais, no qual utiliza-se o programa elaborado no trabalho. Busca-se também uma primeira definição da faixa conveniente para este tipo de reservatório.

ABSTRACTS

This paper presents a contribution to the revolution shells undergoing a revolution load, in bending rate, using finite differences. It is also intended to provide some elements for the design and calculation of these structures, pointing up a type of elevated reservoir.

In chapter 1, the revolution shell theory undergoing a revolution load is presented in an introductory way.

Some of the main analytical solutions of the bending theory are seen in chapter 2.

In chapter 3, the application of finite differences on the bending theory of revolution shells undergoing a revolution load is developed.

In chapter 4, computed programs of numerical solutions developed in chapter 3 are presented.

In chapter 5, the results obtained with numerical and analytical solutions for some shells are matched and the conclusions of these numerical experiments are presented.

Concluding, in chapter 6, is presented the calculation of elevated reservoir formed of elipsoidal shells using elaborated program in this work. It searches also a first definition of the convenient range for this type of reservoir.

NOTAÇÃO E SIMBOLOGIA

Notação

Será identificada a medida que aparece no desenvolvimento do trabalho.

Simbologia

| | |
|---|----------------------------------|
| $(\vec{\quad})$ | vetor |
| $(\dot{\quad})$ | $d(\quad)/d\phi$ |
| $(\ddot{\quad})$ | $d^2(\quad)/d\phi^2$ |
| $(\dddot{\quad})$ | $d^3(\quad)/d\phi^3$ |
| $(\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\quad})$ | $d^4(\quad)/d\phi^4$ |
| $[\quad]$ | matriz |
| $[\quad]^{-1}$ | matriz inversa |
| \cdot | produto escalar |
| \times | produto vetorial |
| $(\overline{\quad})$ | refere-se ao regime de membrana* |
| $(\overset{*}{\quad})$ | refere-se ao regime de flexão* |
| (Bn) | referência bibliográfica |

* quando houver necessidade

APRESENTAÇÃO

Apesar dos primeiros estudos teóricos sobre cascas terem sido feitos no início do século passado, obras notáveis, como o domo do Panteão de Roma, com 44 metros de vão, construído pelos romanos, comprovam o emprego de estruturas em casca desde a antiguidade. O emprego do concreto armado nas construções, aliado ao desenvolvimento do tratamento teórico, permitiu um extraordinário desenvolvimento nesse tipo de construção, como se pode ver pela comparação da cúpula da catedral de São Pedro, construída no século XVI, com 40 metros de vão, pesando cerca de 11.000 toneladas, com a casca construída em 1924 em Jena, com o mesmo vão, pesando 364 toneladas.

A estrutura em casca apresenta um comportamento estático extremamente satisfatório, com ressalva a cargas localizadas, que normalmente são aplicadas nos bordos. Outro aspecto relevante desse tipo estrutural é a riqueza de forma, que permite o seu emprego para os mais diversos objetivos.

Pretendeu-se, no trabalho, não apenas contribuir para o tratamento numérico, mediante diferenças finitas, do regime de flexão de cascas com simetria de revolução de forma e de carregamento, mas também fornecer alguns subsídios para o cálculo e projeto dessas estruturas através do cálculo de um tipo de reservatório elevado. Apesar do campo poder parecer limitado, é grande o número de aplicação das cascas de revolução, como por exemplo em cúpulas, reservatórios, silos e digestores, com as mais variadas formas de meridiano.

Embora a tendência atual do cálculo deste tipo estrutural se volte mais para o método dos elementos finitos, o tratamento mediante as diferenças finitas parece também adequado nesse caso.

A apresentação das equações diferenciais empregadas no trabalho foi precedida de sumária exposição dos fundamentos da Teoria das Cascas; todo o estudo foi desenvolvido para o caso particular de cascas de revolução com carregamento de revolução, com dupla curvatura, excluindo portanto as cascas cilíndricas e cônicas.

Apresentam-se as soluções analíticas comumente empregadas, da teoria de flexão, e mais a solução mediante séries hipergeométricas, com o objetivo de compará-las, com as soluções numéricas desenvolvidas no trabalho.

A solução mediante séries hipergeométricas, usada apenas em casca esférica de espessura constante, pode ser considerada praticamente exata se se usar o número de termos necessários; por isso é apresentada para servir de padrão para as outras soluções (uma apresentação mais completa desta solução pode ser vista em GRAVINA (B5)).

As soluções de Geckeler podem ser encontradas por exemplo em BELLUZZI (B1), GRAVINA (B5), TIMOSHENKO (B12) e, apesar de serem aproximadas, são apresentadas pelo fato de serem comumente empregadas.

A aproximação de HANNA (B7), é apresentada por fornecer elementos para o cálculo de casca esférica de espessura variável.

Utilizam-se, no trabalho, diferenças finitas lagrangeanas simétricas, que conduzem a erros da ordem do espaçamento ao quadrado (obtidas com polinômios de interpolação de grau 2 e grau 4), e diferenças finitas lagrangeanas simétricas, que conduzem a erros da ordem do espaçamento à quarta (obtidas com polinômios de interpolação de grau 4 e grau 6). Da aplicação dessas diferenças finitas às equações de equilíbrio e compatibilidade, resultaram três soluções, como será visto no decorrer do trabalho.

Os programas para as soluções numéricas foram elaborados para qualquer casca de revolução de dupla curva-

tura, sendo que os parâmetros geométricos são calculados em rotinas estabelecidas para cada tipo de casca. Apesar de terem sido programadas todas as soluções, tanto as analíticas como as numéricas, apresentam-se o fluxograma e a listagem do programa para a solução numérica considerada melhor.

As experimentações numéricas foram feitas para as cascas que se julgou serem mais representativas, quanto à espessura e quanto ao ângulo de abertura, em concreto, com o objetivo de comparar as várias soluções apresentadas. Através dessas comparações procurou-se fornecer elementos para a escolha da solução para o cálculo desse tipo estrutural, pois em muitos casos é possível, e obviamente vantajoso, usar uma solução aproximada menos trabalhosa.

No cálculo do reservatório elevado procurou-se não somente a aplicação do programa elaborado no trabalho, mas também fornecer um roteiro para o cálculo desse tipo de estrutura, bem como buscar uma primeira definição da faixa conveniente para o reservatório escolhido para exemplo, através do cálculo de cinco variantes desse reservatório.

As conclusões e observações são oportunamente apresentadas no desenvolvimento do trabalho, não sendo por isto tratadas em capítulo isolado. Convém lembrar alguns tópicos que poderiam ocorrer como continuação natural do presente trabalho, como por exemplo a análise sistemática das várias cascas de revolução, e o estudo das cascas de revolução sujeitas a carregamentos assimétricos.

ÍNDICE

| | pág. |
|--|------|
| 1 - <u>INTRODUÇÃO</u> | 1 |
| 1.1 - <u>Elementos de geometria diferencial</u> | 1 |
| 1.2 - <u>Cascas de revolução</u> | 8 |
| 1.21 - Hipóteses e definições | 8 |
| 1.22 - Relações de equilíbrio | 11 |
| 1.23 - Relações deslocamentos - deformações | 13 |
| 1.24 - Relações solicitações - deformações | 17 |
| 1.25 - Equações fundamentais | 18 |
| 1.26 - Problema matemático e problema físico | 22 |
| 1.27 - Regime de membrana | 24 |
| 1.28 - Regime de flexão | 26 |
| 2 - <u>SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA TEORIA DE FLEXÃO</u> | 32 |
| 2.1 - <u>Solução mediante séries hipergeométricas</u> | 32 |
| 2.2 - <u>Soluções de Geckeler</u> | 37 |
| 2.21 - Solução de Geckeler para casca esférica com espessura constante | 37 |
| 2.22 - Solução de Geckeler para casca de revolução com meridiano qualquer e espessura variável | 41 |
| 2.3 - <u>Aproximação de Hanna</u> | 44 |
| 3 - <u>APLICAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS</u> | 46 |
| 3.1 - <u>Elementos de diferenças finitas</u> | 46 |
| 3.2 - <u>Diferenças finitas aplicadas à teoria de flexão</u> | 51 |
| 3.21 - Discretização das expressões utilizadas | 51 |
| 3.22 - Ordem do sistema de equações | 58 |
| 4 - <u>PROGRAMAÇÃO</u> | 62 |
| 5 - <u>EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA</u> | 66 |

| | |
|---|-----|
| 5.1 - <u>Experimentação 1</u> | 67 |
| 5.2 - <u>Experimentação 2</u> | 75 |
| 5.3 - <u>Experimentação 3</u> | 79 |
| 5.4 - <u>Experimentação 4</u> | 86 |
| | |
| 6 - <u>APLICAÇÃO: RESERVATÓRIO ELEVADO COMPOSTO DE CAS- CAS ELIPSOIDAIS</u> | 91 |
| | |
| 6.1 - <u>Desenvolvimento teórico</u> | 93 |
| 6.11 - Geometria da casca elipsoidal | 93 |
| 6.12 - Cálculo em regime de membrana | 94 |
| 6.13 - Cálculo em regime de flexão | 102 |
| 6.14 - Cálculo do anel de borda | 103 |
| 6.15 - Compatibilização de deslocamentos | 106 |
| 6.16 - Esforços finais | 110 |
| | |
| 6.2 - <u>Resultados obtidos</u> | 111 |
| | |
| APÊNDICE I - TABELAS | 130 |
| | |
| APÊNDICE II - LISTAGEM | 154 |
| | |
| APÊNDICE III - BIBLIOGRAFIA | 168 |

1. - INTRODUÇÃO

1.1 - Elementos de geometria diferencial

A representação vetorial de uma superfície S no espaço é dada pela equação

$$\vec{t} = \vec{t}(u, v) \quad (1.101)$$

onde \vec{t} é um vetor com origem em O , e (u, v) são duas variáveis independentes (Fig. 1.101). A esta equação vetorial correspondem as equações escalares

$$x=f_1(u, v) \quad y=f_2(u, v) \quad z=f_3(u, v) \quad (1.102-a, b, c)$$

Fazendo ora u constante, ora v constante, obtêm-se duas famílias de curvas, chamadas curvas paramétricas.

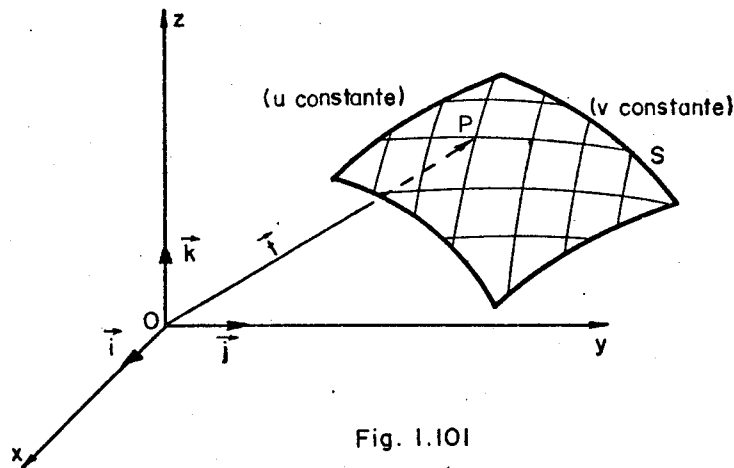


Fig. 1.101

O vetor normal \vec{n} à superfície no ponto P é dado por

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} \quad (1.103)$$

onde

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{t}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{k} \quad (1.104)$$

$$\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{t}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{k} \quad (1.105)$$

e \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} são os versores das direções x , y , z respectivamente.

A interseção de um plano qualquer α , contendo a normal \vec{n} , com a superfície S , define uma curva C_α , chamada seção normal (fig. 1.102). O raio de curvatura desta curva C_α denomina-se raio de curvatura normal r_α da superfície no ponto P e a curvatura normal K_α é definida pela relação

$$K_\alpha = \frac{1}{r_\alpha} \quad (1.106)$$

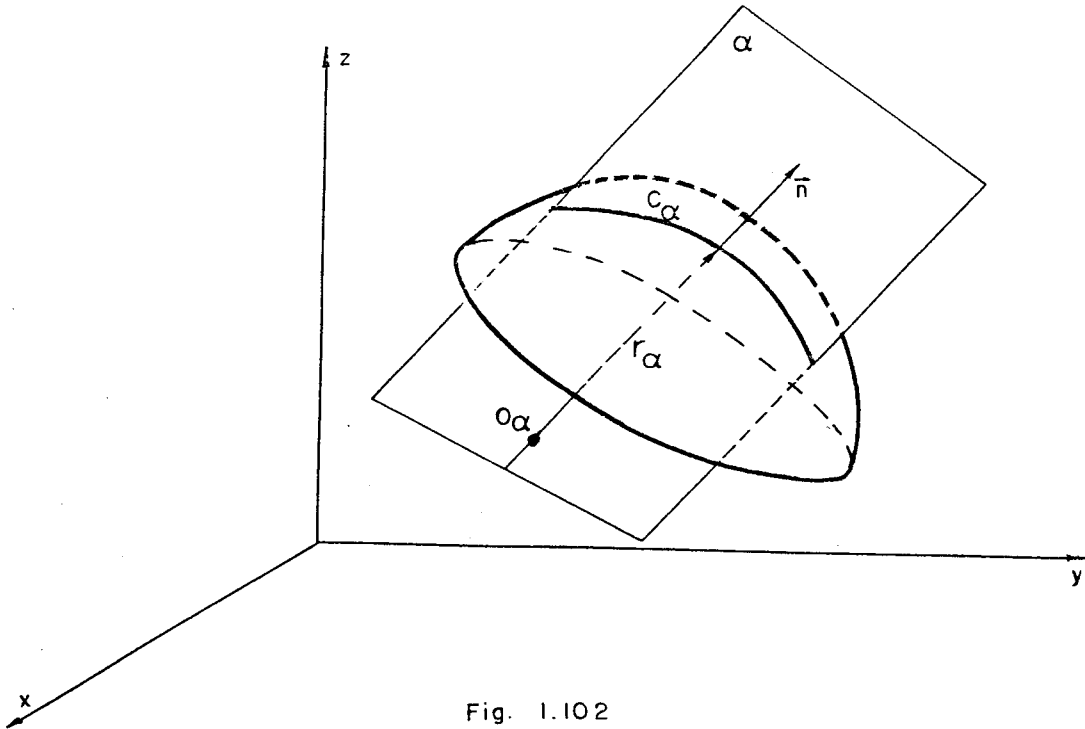


Fig. 1.102

Girando o plano α , em torno da normal \vec{n} , obtêm-se duas curvas de curvaturas K_1 e K_2 , em posições perpendiculares entre si, máxima e mínima, correspondentes aos raios de curvatura r_1 e r_2 , chamados raios principais de curvatura.

Os raios principais de curvatura são determinados pelo sistema de equações (B5)

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K \quad (1.108)$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = 2H \quad (1.109)$$

sendo

$$E = \vec{t}_u \cdot \vec{t}_u \quad (1.110-a)$$

$$F = \vec{t}_u \cdot \vec{t}_v \quad (1.110-b)$$

$$G = \vec{t}_v \cdot \vec{t}_v \quad (1.110-c)$$

$$L = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v \cdot \vec{t}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v \cdot \vec{t}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (1.111-a,b,c)$$

$$N = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v \cdot \vec{t}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\vec{t}_{uu} = \frac{\partial \vec{t}_u}{\partial u} ; \quad \vec{t}_{uv} = \frac{\partial \vec{t}_u}{\partial v} ; \quad \vec{t}_{vv} = \frac{\partial \vec{t}_v}{\partial v} \quad (1.112-a,b,c)$$

onde K é chamada curvatura total ou Gauss e H é chamada curvatura de Sophie Germain.

O sinal de K fornece uma importante informação a respeito da superfície no ponto. Se $K > 0$, os raios principais de curvatura têm o mesmo sentido, portanto em qualquer outra seção normal o raio de curvatura tem esse mesmo sentido, donde se conclui que a concavidade da superfície no ponto considerado está dirigida ao mesmo semi-espaço. Se $K < 0$, os raios de curvatura têm sentidos contrários e, por raciocínio análogo, conclui-se que a superfície tem concavidade dirigida para os dois semi-espaços opostos, em relação ao plano tangente à superfície que passa pelo ponto considerado. Se $K = 0$, conclui-se que pelo menos um dos raios principais de curvatura é infinito, e portanto a seção normal nesta direção é uma reta.

A título de ilustração apresenta-se na figura (1.103) o toro, que possui curvatura total de Gauss positiva ($K > 0$), na região externa, e curvatura total de Gauss negativa ($K < 0$), na região interna.

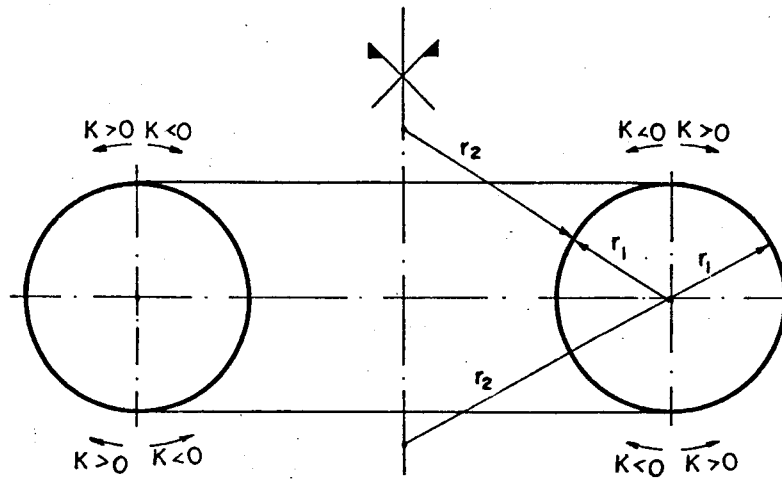


Fig. 1.103

As superfícies de revolução possuem uma seção normal principal (seção normal que contém um dos raios principais) definida pelo plano meridiano γ (plano que contém o eixo de rotação) e a outra seção normal principal é definida pelo plano π , que passa por \vec{n} , e é perpendicular ao plano meridiano (Fig. 1.104).

Os raios principais de curvatura estão contidos na reta de interseção dos planos γ e π , que contém \vec{n} , sendo que o centro de curvatura O_2 , que define o raio principal de curvatura r_2 , está contido no eixo de rotação, e o centro de curvatura O_1 é definido pela curva do meridiano (Fig. 1.105).

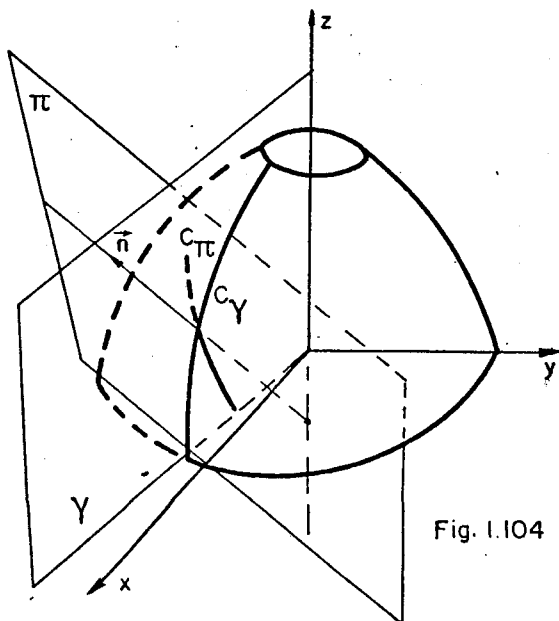


Fig. 1.104

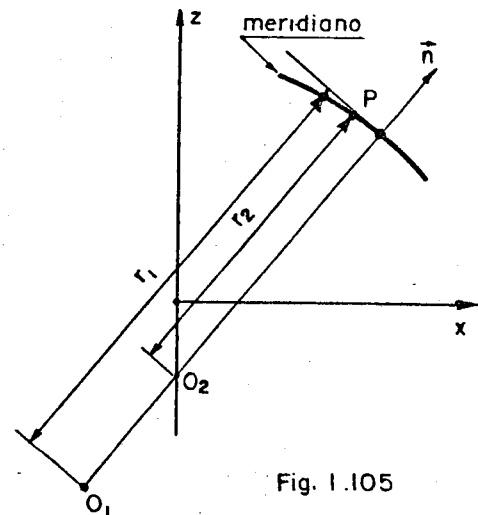


Fig. 1.105

Conhecida a equação da curva do meridiano $z=f(x)$, os raios principais de curvatura valem (B8)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d^2 z/dx^2}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}} \quad (1.113)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{z [1 + (dz/dx)^2]^{1/2}} \quad (1.114)$$

Expressando os raios principais de curvatura em função dos parâmetros ϕ e θ (Fig. 1.106) obtêm-se (B8)

$$r_1 = \frac{1}{\cos \phi} \dot{r}_0 \quad (1.115)$$

$$r_2 = \frac{r_0}{\sin \phi} \quad (1.116)$$

onde r_0 é o raio do paralelo

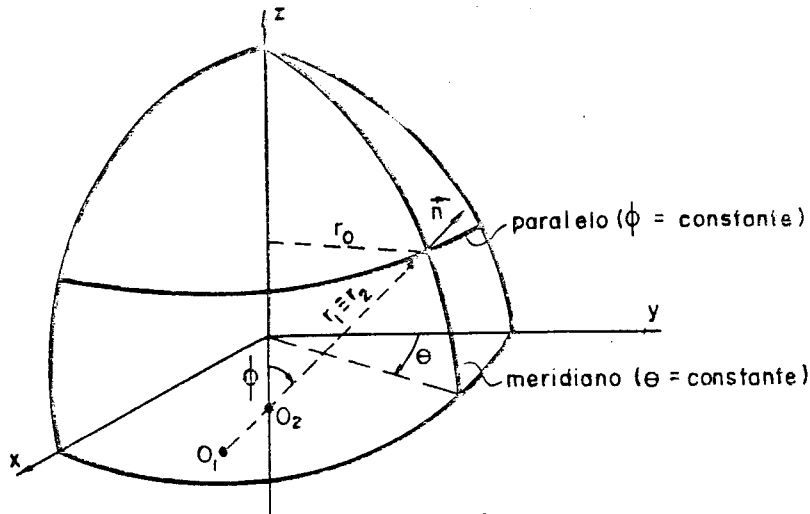


Fig. 1.106

Apresenta-se como exemplo a determinação dos raios principais de curvatura do elipsóide de revolução (Fig. 1.107). Tem-se, no caso, que a equação do meridiano é

$$\frac{r_0^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1.117)$$

onde a e b são respectivamente os semi-diâmetros maior e menor da elipse.

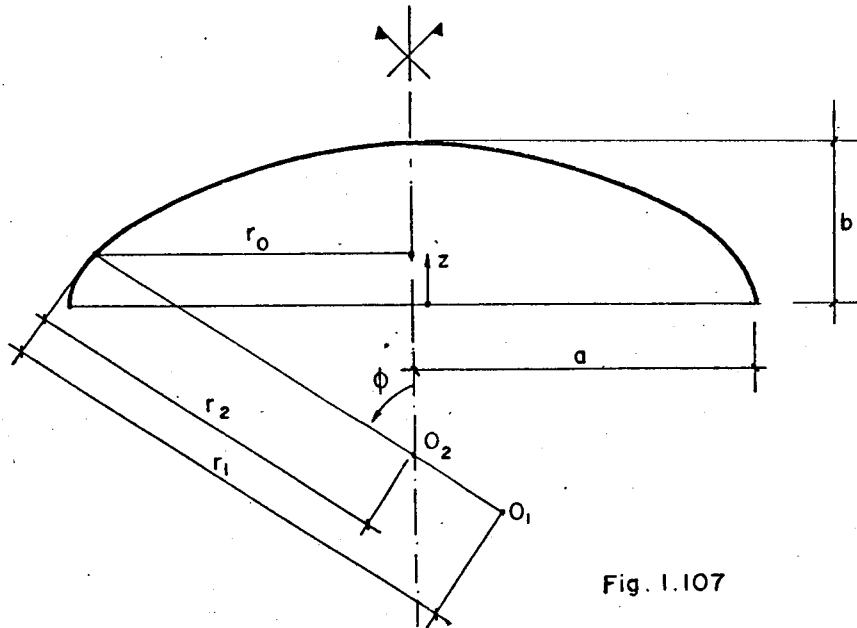


Fig. 1.107

Expressando ϕ em função de r_0 , obtêm-se

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a} \frac{r_0}{(a^2 - r_0^2)^{1/2}} \quad (1.118)$$

e utilizando os valores auxiliares

$$\eta = a/b \quad \kappa = \eta^2 - 1 \quad \kappa_\phi = \kappa \operatorname{sen}^2 \phi + 1 \quad (1.119-a,b,c)$$

resulta

$$r_0 = a \eta \operatorname{sen} \phi \kappa_\phi^{-1/2} \quad (1.120)$$

Substituindo a (1.120) em (1.115) e (1.116), obtêm-se

$$r_1 = a \eta \kappa_\phi^{-3/2} \quad (1.121)$$

$$r_2 = a \eta \kappa_\phi^{-1/2} \quad (1.122)$$

No caso de superfície esférica, nota-se que

$$r_1 = r_2 = a \text{ (a é o raio da esfera)}$$

podendo inclusive ser vista como caso particular de elipsóide de revolução em que $\eta = 1$ ($a=b$).

1.2 - Cascas de revolução

1.2.1 - Hipóteses e definições

A casca é definida como uma estrutura de superfície em que a superfície média é curva. Dentro de uma classificação geral, as cascas de revolução são aquelas em que a superfície média é uma superfície de revolução.

Admitem-se as seguintes hipóteses fundamentais no estudo das cascas delgadas (B5):

1 - O material que constitui a estrutura é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de Hooke.

2 - A espessura h é pequena em relação às dimensões e aos raios de curvatura da superfície média.

3 - As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões.

4 - Os pontos pertencentes, antes da deformação, às retas normais à superfície média, encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada.

5 - Os deslocamentos são muito pequenos em relação à espessura h , sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de superfície.

Estas são as hipóteses de Kirchoff-Love, semelhantes àsquelas da Resistência dos Materiais. O limite da espessura referida na hipótese 2 é tal que aproximadamente (B9):

$$\left(\frac{h}{r}\right)_{\max} \times \frac{1}{20}$$

Na resistência dos materiais, a hipótese 4 corresponde à hipótese de Bernoulli. A hipótese 5 mostra que a teoria é linear, sendo portanto válida a superposição de efeitos.

Os esforços, definidos por unidade de comprimento da superfície média, são as resultantes das tensões normais σ e das tensões tangenciais τ , sobre a espessura h da casca (Fig. 1.201) e valem (B9):

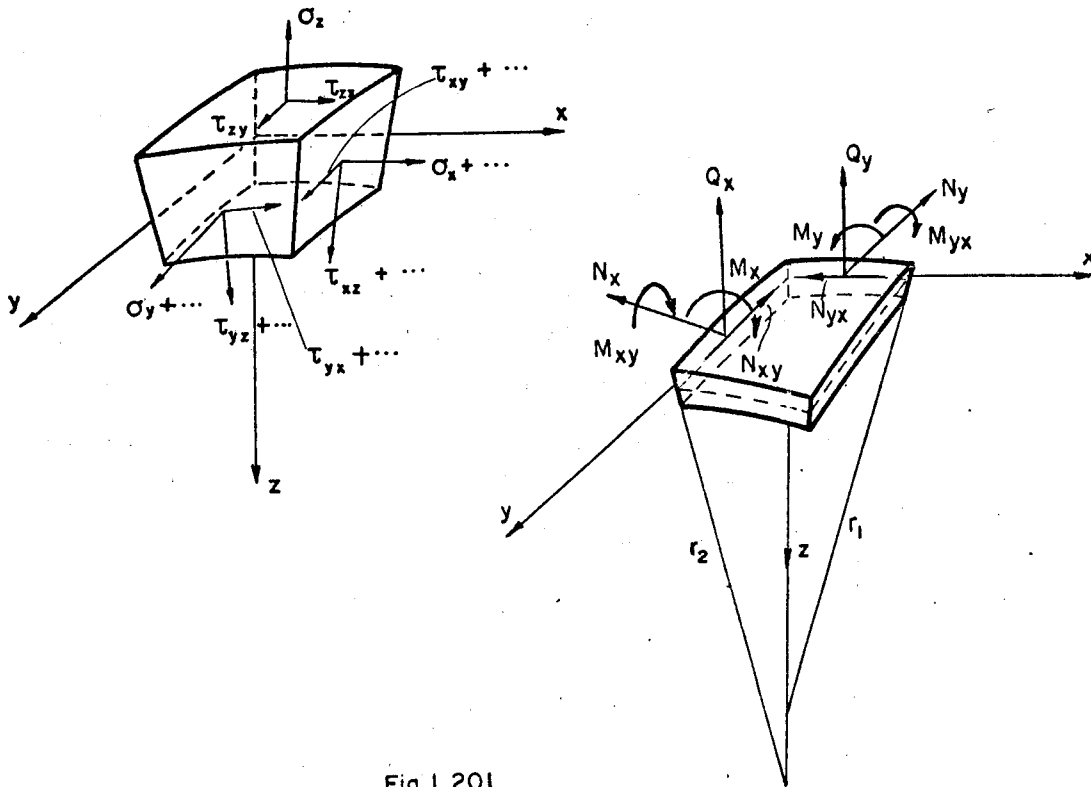


Fig. 1.201

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (1 - z/r_2) dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y (1 - z/r_1) dz$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} (1 - z/r_2) dz$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} (1 - z/r_1) dz$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} (1-z/r_2) dz$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} (1-z/r_1) dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z (1-z/r_2) dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z (1-z/r_1) dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z (1-z/r_2) dz$$

$$M_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z (1-z/r_1) dz$$

Desprezam-se, nestas expressões, os valores de z/r_1 e z/r_2 em relação à unidade, devido a hipótese 2.

Para as cascas de revolução, utilizando a parametrização ϕ e θ , tem-se os esforços como mostra a figura (1-202). Em se tratando de carregamento de revolução, resulta

$$N_{\phi\theta} \equiv N_{\theta\phi} \equiv M_{\phi\theta} \equiv M_{\theta\phi} \equiv Q_{\theta} \equiv 0$$

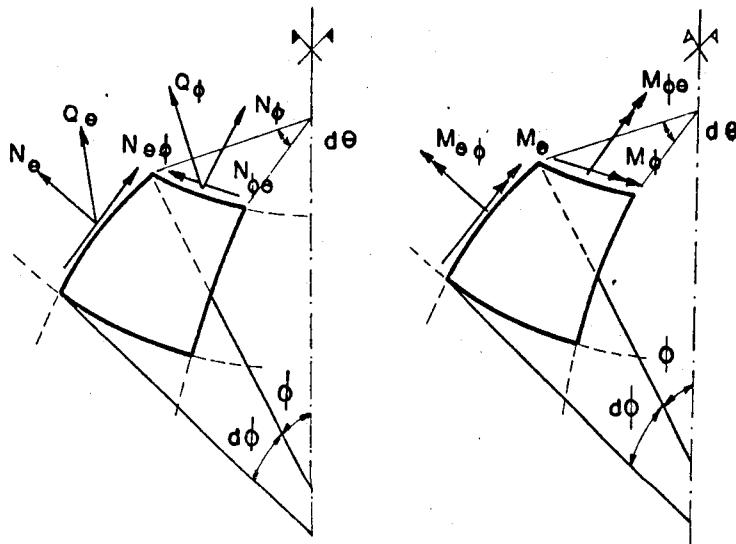


Fig. 1.202

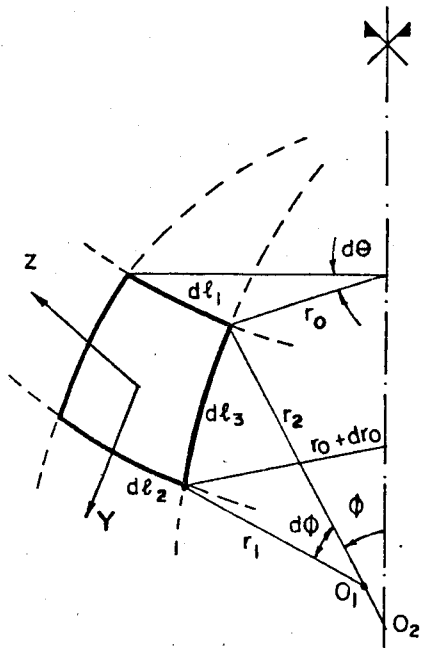
1.22 - Relações de equilíbrio

Considere-se um elemento infinitesimal da estrutura (Fig. 1.203.a) sob a ação das cargas Y e Z, sendo Y a força por unidade de área, agindo na direção da tangente ao meridiano da superfície média, e Z a força por unidade de área, agindo na direção normal à superfície média. Os esforços são tomados positivos como mostra a figura (1.203-b); N_ϕ e N_θ positivos de tração; M_ϕ e M_θ positivos quando tracionam a face interna.

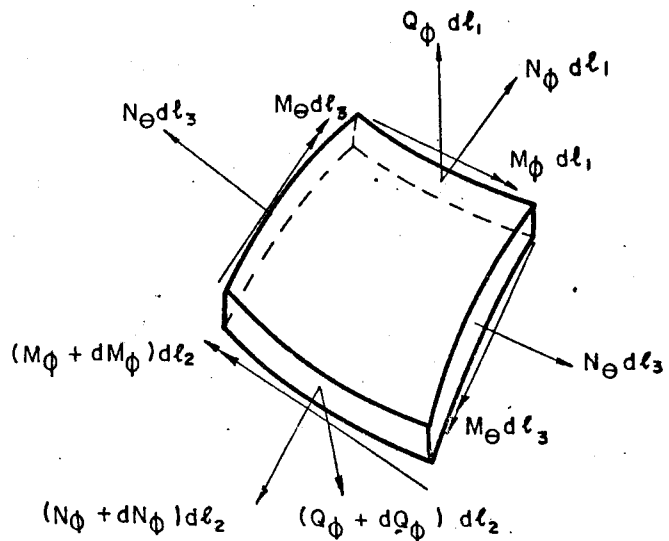
Como os esforços são por unidade de comprimento, deve-se, portanto, para determinar a resultante, multiplicar os esforços pelos respectivos comprimentos em que atuam. Da figura (1.203-a), obtêm:

$$d\ell_1 = r_0 d\theta ; d\ell_2 = (r_0 + dr_0) d\theta \approx r_0 d\theta$$

$$d\ell_3 = r_1 d\phi$$



(a)



(b)

Fig. 1.203

Analisando o equilíbrio na direção Y, resulta:

$$-N_{\phi} r_o d\theta + (N_{\phi} + dN_{\phi}) r_o d\theta - N_{\theta} r_1 d\phi d\theta \cos\phi - Q_{\phi} r_o d\theta \frac{d\phi}{2} +$$

$$(Q_{\phi} + dQ_{\phi}) r_o d\theta \frac{d\phi}{2} + Y r_o d\theta r_1 d\phi = 0$$

Do equilíbrio na direção de Z, obtêm-se:

$$-N_{\phi} r_o d\theta \frac{d\phi}{2} - (N_{\phi} + dN_{\phi}) r_o d\theta \frac{d\phi}{2} + Q_{\phi} r_o d\theta +$$

$$-(Q_{\phi} + dQ_{\phi}) r_o d\theta - N_{\theta} r_1 d\phi d\theta \sin\phi + Z r_o d\theta r_1 d\phi = 0$$

Do equilíbrio em relação à rotação ao redor da tangente ao paralelo, resulta:

$$(M_{\phi} + dM_{\phi}) r_o d\theta - M_{\phi} r_o d\theta - Q_{\phi} r_o d\theta r_1 \frac{d\phi}{2} +$$

$$-(Q_{\phi} + dQ_{\phi}) r_o d\theta r_1 \frac{d\phi}{2} - M_{\theta} r_1 d\phi d\theta \cos\phi = 0$$

Desprezando os infinitésimos de ordem superior, obtêm-se as relações de equilíbrio

$$(N_{\phi} r_o) - N_{\theta} r_1 \cos\phi - Q_{\phi} r_o + Y r_o r_1 = 0 \quad (1.201)$$

$$N_{\phi} r_o + (Q_{\phi} r_o) + N_{\theta} r_1 \sin\phi - Z r_o r_1 = 0 \quad (1.202)$$

$$(M_{\phi} r_o) - Q_{\phi} r_o r_1 - M_{\theta} r_1 \cos\phi = 0 \quad (1.203)$$

Como as três equações de equilíbrio contêm cinco esforços incógnitos (N_{ϕ} , N_{θ} , M_{ϕ} , M_{θ} , Q_{ϕ}), a estrutura é internamente hiperestática. Deve-se portanto procurar relações de compatibilidade de deslocamentos para a resolução da estrutura.

1.23 - Relações deslocamentos-deformações

Sejam v e w componentes do deslocamento da superfície média de um elemento infinitesimal da estrutura, nas direções tangencial (direção de ϕ) e normal, respectivamente, indicados positivos na figura (1.204)

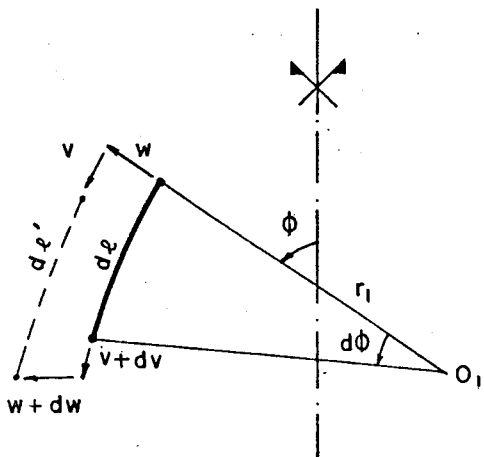


Fig. 1.204

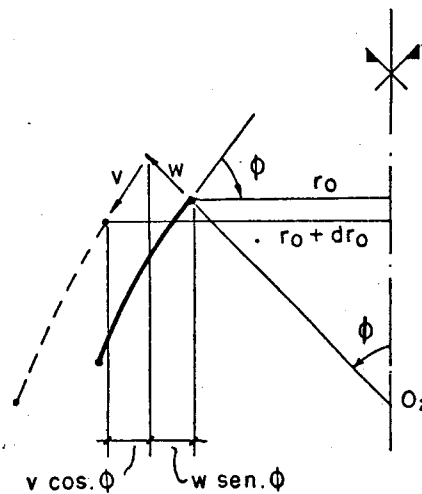


Fig. 1.205

Denominando dl o comprimento do arco do elemento infinitesimal antes da deformação e dl' depois da deformação, a deformação na direção do meridiano ϵ_ϕ é definida pela expressão

$$\epsilon_\phi = \frac{dl' - dl}{dl} \quad (1.204)$$

Analisando a figura (1.204), conclui-se que

$$dl = r_1 d\phi \quad (1.205)$$

$$dl' = (r_1 + w)d\phi + dv \quad (1.206)$$

Introduzindo em (1.204) as (1.205) e (1.206) obtêm-se

$$\epsilon_{\phi} = \frac{(r_1 + w) d\phi + dv - r_1 d\phi}{r_1 d\phi}$$

logo

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{r_1} (\dot{v} + w) \quad (1.207)$$

Considerando que r_0 é o raio do paralelo, antes da deformação, e $r_0 + dr_0$, depois da deformação, a deformação circunferencial ϵ_{θ} é definida pela expressão

$$\epsilon_{\theta} = \frac{2\pi(r_0 + dr_0) - 2\pi r_0}{2\pi r_0} \quad (1.208)$$

Analisando a figura (1.205), obtêm-se a relação

$$dr_0 = v \cos\phi + w \operatorname{sen}\phi \quad (1.209)$$

Introduzindo a (1.209) e a (1.116) em (1.208), obtêm-se

$$\epsilon_{\theta} = \frac{v \cos\phi + w \operatorname{sen}\phi}{r_2 \operatorname{sen}\phi}$$

portanto

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{r_2} (v \operatorname{cotg}\phi + w) \quad (1.210)$$

Sendo δ e ξ os deslocamentos, respectivamente horizontal e vertical, de um ponto da superfície média da casca, positivos como mostra a figura (1.206), resulta

$$\xi = v \operatorname{sen}\phi - w \cos\phi$$

$$\delta = v \cos\phi + w \operatorname{sen}\phi$$

e com a (1.208) e a (1.209), conclui-se que

$$\delta = \epsilon_{\theta} r_0 \quad (1.211)$$

Denominando χ a rotação da tangente ao meridiano quando a estrutura se deforma, positiva como mostra a figura (1.207), resulta (B1)

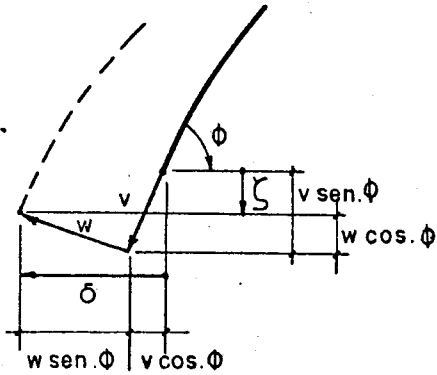


Fig. 1.206

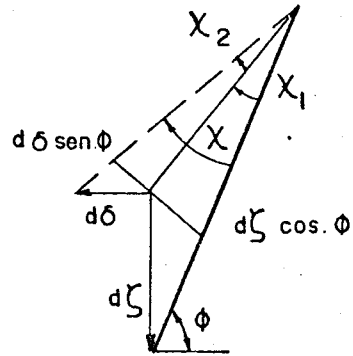


Fig. 1.207

$$\chi_1 = - \frac{d\zeta \cos\phi}{r_1 d\phi} = - \frac{1}{r_1} \dot{\zeta} \cos\phi$$

$$\chi_2 = \frac{d\delta \sin\phi}{r_1 d\phi} = \frac{1}{r_1} \dot{\delta} \sin\phi$$

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 = \frac{1}{r_1} (\dot{\delta} \sin\phi - \dot{\zeta} \cos\phi)$$

Introduzindo as expressões de δ e ζ e derivando obtêm-se

$$\chi = \frac{1}{r_1} \left[\sin\phi (-\dot{v} \sin\phi + \dot{v} \cos\phi + w \cos\phi + \dot{w} \sin\phi) + \right. \\ \left. - \cos\phi (\dot{v} \cos\phi + \dot{v} \sin\phi + w \sin\phi - \dot{w} \cos\phi) \right]$$

logo

$$\chi = \frac{1}{r_1} (\dot{w} - v) \quad (1.212)$$

Sejam ω_1 e ω_2 as variações das curvaturas principais K_1 e K_2 , respectivamente. Da análise da figura (1.208) vem que

$$d\ell = r_1 d\phi = r_1' (d\phi - d\chi)$$

portanto

$$\omega_1 = \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_1} = \frac{d\phi - d\chi}{d\ell} - \frac{d\phi}{d\ell} = - \frac{d\chi}{d\ell}$$

ou seja

$$\omega_1 = - \frac{d\chi}{d\phi} \frac{d\phi}{d\ell}$$

isto é

$$\omega_1 = - \frac{1}{r_1} \dot{\chi}$$

(1.213)

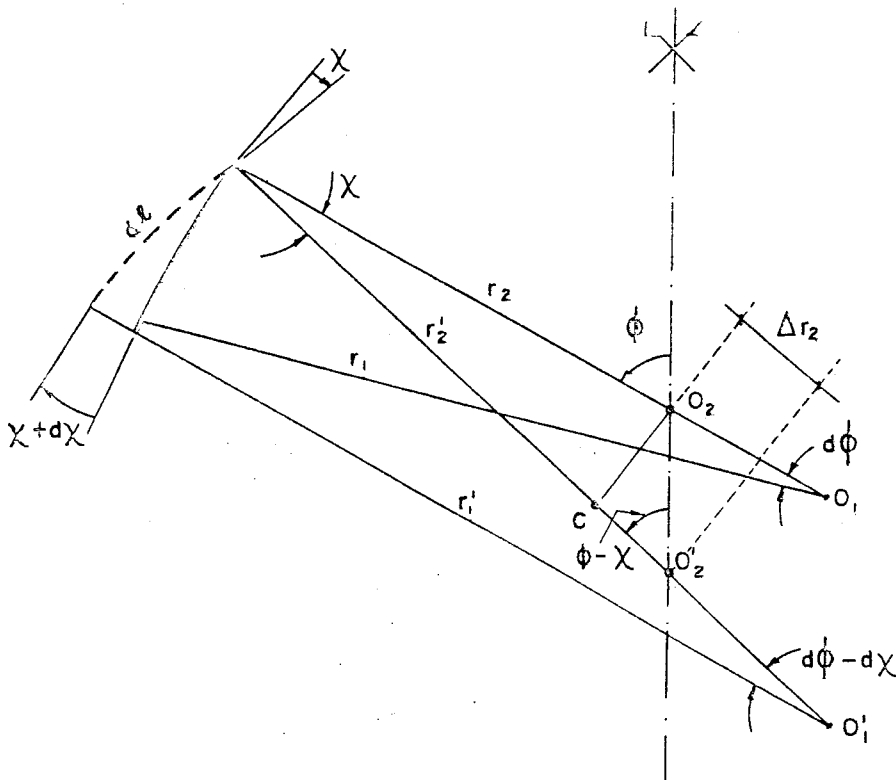


Fig. 1.208

Do triângulo O_2, O_2', C (Fig. 1.208), obtém-se

$$\overline{O_2 C} = r_2 \chi$$

e portanto

$$\frac{\overline{O_2 C}}{\overline{O_2' C}} = \frac{r_2 \chi}{\Delta r_2} = \operatorname{tg}(\phi - \chi) = \frac{\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\chi}{1 + \operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\chi} \approx \operatorname{tg}\phi$$

ou seja

$$\Delta r_2 = \frac{r_2 \chi}{\operatorname{tg} \phi}$$

portanto

$$r'_2 = r_2 + \Delta r_2 = r_2 + \frac{r_2 \chi}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{r_2 (\operatorname{tg} \phi + \chi)}{\operatorname{tg} \phi}$$

Pela definição de ω_2 , vem

$$\omega_2 = \frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - (r_2 + \Delta r_2)}{(r_2 + \Delta r_2)r_2} = - \frac{\Delta r_2}{r_2^2}$$

isto é

$$\omega_2 = - \frac{\chi}{r_2} \operatorname{cotg} \phi \quad (1.214)$$

1.24-Relações sollicitações-deformações

Utilizando a lei de Hooke generalizada, tem-se

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu \sigma_\theta)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_\phi)$$

onde E é o módulo de deformação, ν é o coeficiente de Poisson, ϵ_ϕ e ϵ_θ são as deformações segundo ϕ e θ , respectivamente, e σ_ϕ e σ_θ são as tensões normais correspondentes. Em se tratando de casca delgada, admite-se que a tensão seja constante ao longo da espessura, permitindo que as deformações sejam expressas em função das sollicitações, como segue:

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{Eh} (N_\phi - \nu N_\theta) \quad (1.215)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_\phi) \quad (1.216)$$

Pode-se também expressar as sollicitações em função das deformações, bastando resolver o sistema de equa-

ções (1.215) e (1.216). Portanto

$$N_{\phi} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\phi} - \nu \epsilon_{\theta}) \quad (1.217)$$

$$N_{\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta} - \nu \epsilon_{\phi}) \quad (1.218)$$

Os momentos M_{ϕ} e M_{θ} são relacionados com as variações das curvaturas da seguinte forma (B1):

$$M_{\phi} = -K(\omega_1 + \nu \omega_2) \quad (1.219)$$

$$M_{\theta} = -K(\omega_2 + \nu \omega_1) \quad (1.220)$$

onde

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.221)$$

Introduzindo as expressões das variações das curvaturas (1.213) e (1.214) em (1.219) e (1.220), obtêm-se

$$M_{\phi} = K \left(\frac{1}{r_1} \dot{\chi} + \frac{\nu}{r_2} \chi \cotg \phi \right) \quad (1.222)$$

$$M_{\theta} = K \left(\frac{\chi \cotg \phi}{r_2} + \nu \frac{\dot{\chi}}{r_1} \right) \quad (1.223)$$

1.25 - Equações fundamentais

Como todas as grandezas (esforços, deslocamentos, deformações) são funções apenas de ϕ , pode-se agrupar, de uma forma já clássica, todas as equações em um sistema de duas equações em χ e U , onde U é uma variável auxiliar e vale

$$U = r_2 Q_{\phi} \quad (1.224)$$

Introduzindo a (1.202) em (1.201) obtêm-se

$$(N_{\phi} \dot{r}_0) \text{sen} \phi + N_{\phi} r_0 \text{cos} \phi + (Q_{\phi} \dot{r}_0) \text{cos} \phi - Z r_0 r_1 \text{cos} \phi +$$

$$-Q_{\phi} r_0 \text{sen} \phi + Y r_0 r_1 \text{sen} \phi = 0$$

$$(N_{\phi} \dot{r}_0 \operatorname{sen}\phi) + (Q_{\phi} \dot{r}_0 \cos\phi) = Z r_0 r_1 \cos\phi - Y r_0 r_1 \operatorname{sen}\phi$$

Integrando em todo paralelo ambos os termos, obtêm-se

$$\begin{aligned} (N_{\phi} r_0 \operatorname{sen}\phi) + (Q_{\phi} r_0 \cos\phi) &= \\ &= \int (Z r_0 r_1 \cos\phi - Y r_0 r_1 \operatorname{sen}\phi) d\phi + C \end{aligned}$$

onde C é constante de integração. Resulta portanto

$$N_{\phi} = -Q_{\phi} \operatorname{cotg}\phi + \frac{1}{r_0 \operatorname{sen}\phi}.$$

$$\left[\int (Z r_0 r_1 \cos\phi - Y r_0 r_1 \operatorname{sen}\phi) d\phi + C \right]$$

ou seja

$$N_{\phi} = -\frac{U}{r_2} \operatorname{cotg}\phi + I \quad (1.225)$$

sendo

$$I = \frac{I_{\phi}}{r_0 \operatorname{sen}\phi} \quad (1.226)$$

I é um termo que depende do carregamento externo (Y, Z) e da geometria da casca. I_{ϕ} é o termo que está dentro dos colchetes da expressão anterior a (1.225).

Introduzindo a expressão de N_{ϕ} (1.225) em (1.202), obtêm-se

$$\begin{aligned} &(-Q_{\phi} \operatorname{cotg}\phi + \frac{I_{\phi}}{r_0 \operatorname{sen}\phi}) r_0 + (Q_{\phi} \dot{r}_0) + N_{\theta} r_1 \operatorname{sen}\phi + \\ &- Z r_0 r_1 = 0 \end{aligned}$$

logo

$$N_{\theta} = \frac{Q_{\phi} r_0 \operatorname{cotg}\phi}{r_1 \operatorname{sen}\phi} - \frac{(Q_{\phi} \dot{r}_0)}{r_1 \operatorname{sen}\phi} - \frac{I_{\phi}}{r_1 \operatorname{sen}^2\phi} + \frac{Z r_0 r_1}{r_1 \operatorname{sen}\phi}$$

ou seja

$$N_{\theta} = -\frac{1}{r_1} \left[\frac{(Q_{\phi} r_o)}{\text{sen}\phi} - \frac{Q_{\phi} r_o \cos\phi}{\text{sen}\phi^2} \right] +$$

$$-\frac{I_{\phi}}{r_1 \text{sen}^2\phi} + \frac{Z r_o}{\text{sen}\phi}$$

isto é

$$N_{\theta} = -\frac{1}{r_1} \dot{U} + J \quad (1.227)$$

onde

$$J = -\frac{I_{\phi}}{r_1 \text{sen}^2\phi} + \frac{Z r_o}{\text{sen}\phi} \quad (1.228)$$

J é um termo análogo a I, sendo válido, portanto, para J, o que foi dito a respeito de I.

Introduzindo (1.207) em (1.215) e (1.210) em (1.216) obtêm-se

$$\dot{v} + w = \frac{r_1}{Eh} (N_{\phi} - vN_{\theta}) \quad (1.229)$$

$$v \cotg\phi + w = \frac{r_2}{Eh} (N_{\theta} - vN_{\phi}) \quad (1.230)$$

Eliminando w destas duas expressões vem

$$\dot{v} - v \cotg\phi = \frac{1}{Eh} \left[(r_1 + vr_2) N_{\phi} - (r_2 + vr_1) N_{\theta} \right] \quad (1.231)$$

Derivando a expressão (1.230), tem-se

$$\dot{v} \cotg^2\phi - \frac{v}{\text{sen}\phi} + \dot{w} = \frac{d}{d\phi} \left[\frac{r_2}{Eh} (N_{\theta} - vN_{\phi}) \right] \quad (1.232)$$

é introduzindo \dot{v} de (1.231) em (1.232), obtêm-se

$$\dot{w} - v = \frac{d}{d\phi} \left[\frac{r_2}{Eh} (N_{\theta} - vN_{\phi}) \right] +$$

$$-\frac{\cotg\phi}{Eh} \left[(r_1 + vr_2) N_{\phi} - (r_2 + vr_1) N_{\theta} \right]$$

Introduzindo a expressão (1.212) na expressão anterior, vem

$$-Eh\chi = \frac{\cotg\phi}{r_1} \left[(r_1 + vr_2)N_\phi - (r_2 + vr_1)N_\theta \right] + \\ - \frac{h}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{r_2}{Eh} (N_\theta - vN_\phi) \right] \quad (1.233)$$

Introduzindo em (1.233) as expressões de N_ϕ (1.225) e N_θ (1.227), vem

$$-Eh\chi = \frac{\cotg\phi}{r_1} \left[(r_1 + vr_2) \left(-\frac{U}{r_2} \cotg\phi + I \right) - (r_2 + vr_1) \right. \\ \left. \left(-\frac{1}{r_1} \dot{U} + J \right) \right] - \frac{h}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left\{ \frac{r_2}{h} \left[\left(-\frac{\dot{U}}{r_1} + J \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - v \left(-\frac{U}{r_2} \cotg\phi + I \right) \right] \right\} \quad (1.234)$$

Derivando e agrupando os termos, obtém-se

$$\frac{r_2}{r_1^2} \ddot{U} + \frac{1}{r_1} \left[\frac{r_2}{r_1} \cotg\phi - \frac{r_2}{r_1} \frac{\dot{h}}{h} + \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \dot{U} \right] + \\ - \frac{1}{r_1} \left[\frac{r_1}{r_2} \cotg^2\phi - \frac{v}{h} \dot{h} \cotg\phi - v \right] U + v \frac{r_2}{r_1} \dot{I} - \frac{r_2}{r_1} \dot{J} + \\ - \frac{I}{r_1} \left[v \dot{r}_2 + vr_2 \cotg\phi + r_1 \cotg\phi - vr_2 \frac{\dot{h}}{h} \right] - \frac{J}{r_1} \left[\dot{r}_2 + \right. \\ \left. + r_2 \cotg\phi + vr_1 \cotg\phi - r_2 \frac{\dot{h}}{h} \right] + Eh \chi = 0 \quad (1.235)$$

Introduzindo (1.224) em (1.203), vem

$$\dot{M}_\phi r_0 + M_\phi \dot{r}_0 - \frac{U}{r_2} r_0 r_1 - M_\theta r_1 \cos\phi = 0$$

Introduzindo as expressões de M_ϕ (1.219) e M_θ

(1.220) e derivando, obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & K \left[\frac{\ddot{\chi}}{r_1} r_2 \operatorname{sen} \phi - \frac{\dot{\chi} \dot{r}_1 r_2 \operatorname{sen} \phi}{r_1^2} - v \chi \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} + \right. \\
 & \left. + v \dot{\chi} \cos \phi - \frac{v \chi \cos \phi \dot{r}_2}{r_2} \right] + K \frac{3}{h} \dot{h} \left[\frac{\dot{\chi}}{r_1} r_2 \operatorname{sen} \phi + \right. \\
 & \left. + \frac{v \chi}{r_2} r_2 \operatorname{sen} \phi \cotg \phi \right] + K \left[\left(\frac{r_2 \cos \phi + \dot{r}_2 \operatorname{sen} \phi}{r_1} \right) \dot{\chi} + \right. \\
 & \left. + \frac{v}{r_2} (r_2 \cos \phi + \dot{r}_2 \operatorname{sen} \phi) \chi \cotg \phi \right] - U r_1 \operatorname{sen} \phi + \\
 & - K \left[\frac{\chi}{r_2} r_1 \cos \phi \cotg \phi + v \cotg \phi \dot{\chi} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Agrupando os termos, obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{r_2}{r_1^2} \right) \ddot{\chi} + \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{\dot{r}_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cotg \phi + 3 \frac{r_2}{r_1} \frac{\dot{h}}{h} \right] \dot{\chi} + \\
 & - \frac{1}{r_1} \left[v + \frac{r_1}{r_2} \cotg^2 \phi - 3v \cotg \phi \frac{\dot{h}}{h} \right] \chi - \frac{U}{K} = 0 \quad (1.236)
 \end{aligned}$$

1.26-Problema matemático e problema físico

O sistema de equações diferenciais (1.235) e (1.236) rege o comportamento estático da casca. A solução do sistema obtêm-se somando uma solução particular do sistema completo à solução do sistema homogêneo.

A solução particular é aproximadamente a solução da casca quando se despreza a rigidez à flexão e à torção, resultando apenas esforços que atuam no plano tan

gente, N_ϕ e N_θ (B5). A estrutura assim idealizada comporta-se como membrana, e deve satisfazer às seguintes condições (ou, dizendo de outra forma, a solução particular é aproximadamente a solução de membrana quando são satisfeitas as condições) (B5):

1 - A variação das curvaturas normais da superfície média deverá ser contínua.

2 - A variação da espessura h da casca deverá ser contínua.

3 - A distribuição das forças externas deverá ser contínua.

4 - As forças externas aplicadas nas bordas livres deverão atuar nos correspondentes planos tangentes à superfície média.

5 - As reações dos vínculos deverão ser contidas nos planos tangentes à superfície média.

É oportuno salientar ainda que a solução da casca em regime de membrana depende apenas do carregamento a que ela esta submetida, pois as condições de vínculo já estão impostas (condição 5).

A solução do sistema homogêneo (obtido quando se eliminam os termos correspondentes ao carregamento externo) leva em consideração o efeito dos esforços locais gerados pelas reações dos vínculos, pelo fato da casca geralmente não obedecer às condições do regime de membrana.

O procedimento normal para a obtenção final dos esforços é análogo ao processo dos esforços usado na resolução de estruturas lineares hiperestáticas, e tem normalmente a seguinte seqüência (Fig. 1.209) (B2):

1 - Cálculo da casca em regime de membrana, obtendo-se os esforços e deslocamentos (sistema isostático funda-

2 - Cálculo dos esforços e deslocamentos da casca solicitada por força horizontal H unitária, uniformemente distribuída no contorno.

3 - Cálculo dos esforços e deslocamentos da casca solicitada por momento M unitário, uniformemente distribuído no contorno.

4 - Compatibilidade dos deslocamentos, obtendo-se os esforços H e M.

5 - Superposição dos esforços

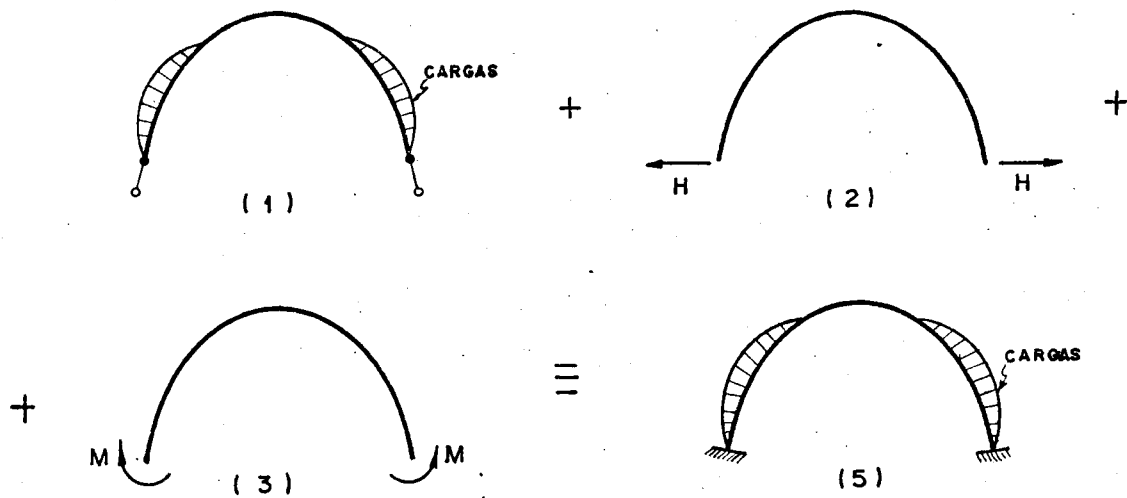


Fig. 1. 209

1.27 - Regime de Membrana

Quando se desprezam os efeitos de flexão e torção restam apenas os esforços tangenciais N_θ e N_ϕ capazes de manter o equilíbrio da casca.

A solução poderá ser então obtida com as duas primeiras relações de equilíbrio (1.201) e (1.202), eliminando o esforço cisalhante Q_ϕ , obtendo-se um sistema de duas equações a duas incógnitas cuja solução é dada pelas expressões (1.225) e (1.227), eliminando, respectivamente, os termos U e \dot{U} destas.

Portanto, os esforços são

$$\bar{N}_\phi = I = \frac{1}{r_0 \sin\phi} \left[\int (Z r_0 r_1 \cos\phi - Y r_0 r_1 \sin\phi) d\phi + C \right]$$

$$\bar{N}_\theta = J = - \frac{1}{r_1 \text{sen}^2 \phi} \left[\int (Z r_0 r_1 \cos \phi - Y r_0 r_1 \text{sen} \phi) d\phi + C \right] + \frac{Z r_0}{\text{sen} \phi}$$

Escrevendo \bar{N}_ϕ de outra forma, vem

$$\bar{N}_\phi = \frac{1}{2\pi r_0 \text{sen} \phi} \left[\int (Z \cos \phi - Y \text{sen} \phi) (2\pi r_0) r_1 d\phi + C \right]$$

O termo entre colchetes representa a resultante das cargas acima do paralelo considerado e denominando de R esta resultante, vem

$$\bar{N}_\phi = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{R}{\text{sen} \phi} \quad (1.237)$$

$$\bar{N}_\theta = \frac{R}{2\pi r_1 \text{sen}^2 \phi} + \frac{Z r_0}{\text{sen} \phi} \quad (1.238)$$

Os deslocamentos em regime de membrana, necessários à compatibilização de deslocamentos, são deslocamento horizontal δ e rotação da tangente ao meridiano χ .

O deslocamento horizontal é obtido com

$$\bar{\delta} = r_0 \bar{\epsilon}_\theta$$

Introduzindo a expressão de $\bar{\epsilon}_\theta$ (1.216) obtém-se

$$\bar{\delta} = \frac{r_0}{Eh} (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\phi)$$

$$\bar{\delta} = \frac{r_2 \text{sen} \phi}{Eh} (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\phi) \quad (1.239)$$

A rotação da tangente ao meridiano é obtida com a expressão (1.233)

$$\bar{\chi} = - \frac{\cotg\phi}{r_1 E h} \left[(r_1 + \nu r_2) \bar{N}_\phi - (r_2 + \nu r_1) \bar{N}_\theta \right] + \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left[\frac{r_2}{E h} (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\phi) \right]$$

portanto

$$\bar{\chi} = - \frac{\cotg\phi}{r_1 E h} \left[(r_1 + \nu r_2) \bar{N}_\phi - (r_2 + \nu r_1) \bar{N}_\theta \right] + \frac{1}{r_1} \left(\frac{\dot{\delta}}{\text{sen}\phi} \right) \quad (1.240)$$

1.28 - Regime de flexão

A solução da teoria de flexão, ou das perturbações locais, envolve um tratamento matemático difícil, pois se trata de resolver um sistema de duas equações diferenciais, cuja solução analítica não se conhece, a não ser para o caso particular de casca esférica com espessura constante (solução mediante series hipergeométricas).

O sistema é obtido eliminando das expressões (1.235) e (1.236) os termos referentes ao carregamento. Multiplicando estas expressões por r_1/ρ , onde $\rho=r_2/r_1$, obtem-se

$$\ddot{U} + A\dot{U} + BU + C\chi = 0 \quad (1.241)$$

$$\ddot{\chi} + D\dot{\chi} + E\chi + FU = 0 \quad (1.242)$$

onde

$$A = \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \cotg\phi - \frac{\dot{h}}{h} \right) \quad (1.243-a)$$

$$D = \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \cotg\phi + \frac{3\dot{h}}{h} \right) \quad (1.243-d)$$

$$B = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cotg^2\phi}{\rho} - \nu - \nu \frac{\dot{h}}{h} \cotg\phi \right) \quad (1.243-b)$$

$$E = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cotg^2\phi}{\rho} + \nu - 3\nu \frac{\dot{h}}{h} \cotg\phi \right) \quad (1.243-e)$$

$$C = \frac{r}{\rho} E h \quad F = - \frac{r_1}{\rho} \frac{1}{K} \quad (1.243-c, f)$$

Para o tratamento numérico, julgou-se conveniente verificar também as possíveis vantagens da substituição do sistema de equações (1.241) e (1.242) por uma única equação diferencial de quarta ordem em χ , obtida como se mostra a seguir. Da expressão (1.242), obtêm-se

$$U = -\frac{\ddot{\chi}}{F} - \frac{D}{F} \dot{\chi} - \frac{E}{F} \chi \quad (1.244)$$

Derivando esta expressão, vem

$$\begin{aligned} \dot{U} = & -\frac{\dddot{\chi}}{F} + \left(\frac{\dot{F}}{F^2} - \frac{D}{F}\right)\ddot{\chi} + \left(\frac{\dot{F}}{F^2} D - \frac{\dot{D}}{F} - \frac{E}{F}\right)\dot{\chi} + \\ & + \left(\frac{\dot{F}}{F^2} E - \frac{\dot{E}}{F}\right)\chi \end{aligned} \quad (1.245)$$

ou, de forma compacta

$$\dot{U} = A_1 \dddot{\chi} + B_1 \ddot{\chi} + C_1 \dot{\chi} + D_1 \chi \quad (1.246)$$

Derivando novamente

$$\ddot{U} = A_2 \ddot{\chi} + B_2 \dot{\chi} + C_2 \ddot{\chi} + D_2 \dot{\chi} + E_2 \chi \quad (1.247)$$

onde

$$A_2 = -\frac{1}{F}; \quad B_2 = \frac{2\dot{F}}{F^2} - \frac{D}{F};$$

$$C_2 = \frac{\ddot{F}}{F^2} - \frac{2\dot{F}^2}{F^3} + \frac{2\dot{F}D}{F^2} - \frac{2\dot{D} + E}{F};$$

$$D_2 = \frac{\ddot{F}D}{F^2} - \frac{2\dot{F}^2 D}{F^3} + \frac{2\dot{F}(D+E)}{F^2} - \frac{\ddot{D} + 2E}{F};$$

$$E_2 = \frac{\ddot{F}E}{F^2} - \frac{2\dot{F}^2 E}{F^3} + \frac{2\dot{F}E}{F^2} - \frac{\ddot{E}}{F}$$

Introduzindo (1.244), (1.246) e (1.247) em (1.241), e agrupando os termos, obtêm-se

$$\ddot{\ddot{\chi}} + A^* \ddot{\chi} + B^* \dot{\chi} + C^* \chi + D^* \dot{\chi} = 0 \quad (1.248)$$

onde

$$A^* = (B_2 + A \cdot A_1) / A_2$$

$$B^* = (C_2 + A \cdot B_1 - \frac{B}{F}) / A_2$$

$$C^* = (D_2 + A \cdot C_1 - \frac{B \cdot D}{F}) / A_2$$

$$D^* = (E_2 + A \cdot D_1 - \frac{B \cdot E}{F} + C) / A_2$$

sendo

$$\dot{D} = \frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{\text{sen}^2 \phi} + 3 \left[\frac{\ddot{h}}{h} - \left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^2 \right] \quad (1.249)$$

$$\begin{aligned} \ddot{D} = & \frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \frac{3\dot{\rho}\ddot{\rho}}{\rho^2} + 2\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^3 + \frac{2\text{cotg}\phi}{\text{sen}^2 \phi} + \\ & + 3 \left[\frac{\ddot{h}}{h} - \frac{3\dot{h}\ddot{h}}{h^2} + 2\left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^3 \right] \end{aligned} \quad (1.250)$$

$$\dot{F} = -\frac{\dot{r}_1}{\rho K} + \frac{\dot{r}_1 3\dot{h}}{\rho K h} + \frac{r_1}{\rho K} \frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \ddot{F} = & -\frac{\ddot{r}_1}{\rho K} + \left(\frac{3\dot{h}}{h} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) \left[\frac{2\dot{r}_1}{\rho K} - \frac{r_1}{\rho K} \left(\frac{3\dot{h}}{h} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) \right] + \\ & + \frac{r_2}{\rho K} \left\{ 3 \left[\frac{\ddot{h}}{h} - \left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^2 \right] + \frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.252)$$

$$\begin{aligned} \dot{E} = & \left[\frac{2\text{cotg}\phi}{\rho} - \frac{3v\dot{h}}{h} \right] \left[\frac{1}{\rho \text{sen}^2 \phi} + \frac{\text{cotg}\phi}{\rho} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right] + \frac{v}{\rho} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \\ & + 3v \frac{\text{cotg}\phi}{\rho} \left[\frac{\ddot{h}}{h} - \left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.253)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{E} = v & \left[\frac{\ddot{\rho}}{\rho^2} - \frac{2\dot{\rho}^2}{\rho^3} \right] - \left\{ \frac{2}{\text{sen}^2\phi} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{2\text{cotg}\phi}{\rho\text{sen}^2\phi} + \right. \\
 & - \frac{\text{cotg}\phi}{\rho} \left[\frac{\ddot{\rho}}{\rho} - 2\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 \right] \left. \right\} \left[\frac{2\text{cotg}\phi}{\rho} - \frac{3v\dot{h}}{h} \right] \\
 & - 2 \left[\frac{1}{\rho\text{sen}^2\phi} + \frac{\text{cotg}\phi}{\rho} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right]^2 - 6v \left[\frac{1}{\rho\text{sen}^2\phi} + \right. \\
 & \left. + \frac{\text{cotg}\phi}{\rho} \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right] \left[\frac{\ddot{h}}{h} - \left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^2 \right] + \frac{3v\text{cotg}\phi}{\rho} \left[\frac{\ddot{h}}{h} - \frac{3\dot{h}\ddot{h}}{h^2} + \right. \\
 & \left. + 2\left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^3 \right] \quad (1.254)
 \end{aligned}$$

Obtidos χ e U (ou apenas χ), a partir do sistema de equações (ou da equação), podem-se determinar os esforços e deslocamentos. Eliminando de (1.225) e (1.227), os termos que dependem do carregamento, obtêm-se

$$\hat{N}_\phi = - \frac{U}{r_2} \text{cotg}\phi \quad (1.255)$$

$$\hat{N}_\theta = - \frac{1}{r_1} \dot{U} \quad (1.256)$$

e com a expressão (1.224), vem

$$Q_\phi = \frac{U}{r_2} \quad (1.257)$$

No caso de se ter apenas χ , deve-se calcular U e \dot{U} com as expressões (1.224) e (1.246) e substituí-los em (1.225), (1.256) e (1.257), para obter os esforços \hat{N}_ϕ , \hat{N}_θ e Q_ϕ .

Os momentos são obtidos com as expressões (1.222) e (1.223)

$$M_\phi = K \left(\frac{1}{r_1} \dot{\chi} + v \frac{\chi}{r_2} \text{cotg}\phi \right) \quad (1.258)$$

$$M_\theta = K(1-v^2) \frac{\chi}{r_2} \text{cotg}\phi + vM_\phi \quad (1.259)$$

O deslocamento horizontal $\hat{\delta}$ é obtido de forma análoga ao deslocamento horizontal em regime de membrana, isto é

$$\hat{\delta} = \frac{r \operatorname{sen} \phi}{2 E h} (\hat{N}_\theta - \nu \hat{N}_\phi) \quad (1.260)$$

O outro deslocamento necessário, a rotação da tangente ao meridiano, $\hat{\chi}$, já é a incógnita do sistema de equações (ou da equação diferencial única).

Para a resolução do sistema de equações diferenciais (ou no caso da equação diferencial única) deve-se ter as condições de contorno. As condições de contorno a serem obedecidas são:

a) para força horizontal H , uniformemente distribuída no contorno (Fig. 1.210).

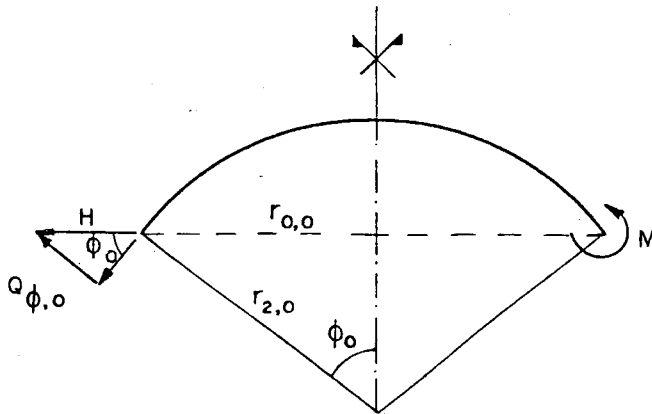


Fig. 1.210

$$Q_{\phi,0} = - H \operatorname{sen} \phi_0$$

$$M_{\phi,0} = 0$$

Introduzindo as expressões (1.257) e (1.258), obtêm-se

$$U_0 = - H r_{0,0} \quad (1.261)$$

$$K_0 \left(\frac{1}{r_{1,0}} \chi_0 + \frac{\nu \chi_0 \cotg \phi_0}{r_{2,0}} \right) = 0 \quad (1.262)$$

As mesmas expressões são válidas no caso de força horizontal aplicada no contorno superior (se houver), bastando apenas particularizá-las.

b) para momento M , uniformemente distribuído no contorno.

$$U_0 = 0 \quad (1.263)$$

$$K_0 \left(\frac{1}{r_{1,0}} \dot{\chi}_0 + \frac{\nu}{r_{2,0}} \chi_0 \cotg \phi_0 \right) = M \quad (1.264)$$

Vale também a observação anterior, referente ao caso de haver abertura superior.

2.- SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA TEORIA DE FLEXÃO

2.1- Solução mediante séries hipergeométricas

Para as cascas esféricas ($r_1 = r_2 = a$) com espessura constante, o sistema de equações diferenciais (1.241) e (1.242) reduz-se a

$$\ddot{U} + \cotg\phi \dot{U} - (\cotg^2\phi - \nu)U = - aEh\chi \quad (2.101)$$

$$\ddot{\chi} + \cotg\phi \dot{\chi} - (\cotg\phi + \nu)\chi = a \frac{U}{K} \quad (2.102)$$

Introduzindo a expressão de U(1.224) em (2.101) e (2.102) e aplicando o operador

$$L(\) = (\ddot{\ }) + \cotg\phi(\dot{\ }) - \cotg^2\phi(\)$$

vem que

$$L(Q_\phi) + \nu Q_\phi = - Eh\chi \quad (2.103)$$

$$L(\chi) - \nu\chi = \frac{a^2 Q_\phi}{K} \quad (2.104)$$

De (2.103) obtêm-se

$$\chi = - \frac{1}{Eh} \left[L(Q_\phi) + vQ_\phi \right] \quad (2.105)$$

Introduzindo a (2.105) em (2.104), tem-se

$$L \left[\frac{1}{Eh} (L(Q_\phi) + vQ_\phi) \right] - v \frac{1}{Eh} \left[L(Q_\phi) + vQ_\phi \right] = - \frac{a^2 Q_\phi}{K}$$

isto é

$$LL(Q_\phi) + vL(Q_\phi) - vL(Q_\phi) - v^2 Q_\phi = - a^2 \frac{EhQ_\phi}{K}$$

ou seja

$$LL(Q_\phi) + \left(\frac{a^2}{K} Eh - v^2 \right) Q_\phi = 0 \quad (2.106)$$

Definindo

$$\mu^4 = \frac{a^2}{K} (Eh - v^2) \quad (2.107)$$

logo

$$LL(Q_\phi) + \mu^4 Q_\phi = 0 \quad (2.108)$$

Fazendo uma transformação algébrica, resulta

$$LL(Q_\phi) + i\mu^2 L(Q_\phi) - i\mu^2 L(Q_\phi) - i^2 \mu^4 Q_\phi = 0$$

portanto

$$L \left[L(Q_\phi) + i \mu^2 Q_\phi \right] - i \mu^2 \left[L(Q_\phi) + i \mu^2 Q_\phi \right] = 0 \quad (2.109)$$

Pode-se, portanto, desmembrar a equação (2.109) em duas outras equações independentes

$$L(Q_\phi) + i\mu^2 Q_\phi = 0 \quad (2.110)$$

$$L(Q_\phi) - i\mu^2 Q_\phi = 0 \quad (2.111)$$

Introduzindo o operador na expressão (2.110), vem

$$Q_\phi'' + \cotg\phi \dot{Q}_\phi - (\cotg^2\phi - i\mu^2) Q_\phi = 0 \quad (2.112)$$

Usando novas variáveis, definidas como segue

$$x = \text{sen}^2\phi, \quad z = \frac{Q_\phi}{\text{sen}\phi} = \frac{Q_\phi}{\sqrt{x}} \quad (2.113-a,b)$$

e introduzindo em (2.112), obtêm-se

$$x(x-1)\ddot{z} + \left(\frac{5}{2}x - 2\right)\dot{z} + \left(1 - \frac{i\mu^2}{4}\right)z = 0 \quad (2.114)$$

ou

$$x(x-1)\ddot{z} + \left[(\alpha+\beta+1)x - \gamma\right]\dot{z} - \alpha\beta z = 0 \quad (2.115)$$

onde

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{5+4i\mu^2}}{4}; \quad \beta = \frac{3 - \sqrt{5+4i\mu^2}}{4}; \quad \gamma = 2$$

A solução de uma equação diferencial deste tipo (equação hipergeométrica) é

$$z_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.2}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{(1.2)(2.3)}x^2 + \dots + \frac{\alpha \dots (\alpha+n+1)\beta \dots (\beta+n+1)x^n}{n!(n+1)!} + \dots \quad (2.116)$$

Esta solução é convergente para $x < 1$. A solução da equação (2.111) é

$$z_2 = z_1 \ln x + \frac{1}{x} F(x) \quad (2.117)$$

onde $F(x)$ é uma série de potências que para $x < 1$, é também convergente. Em se tratando de casca fechada, não se considera esta solução.

Separando os termos imaginários dos reais, na expressão (2.116), tem-se

$$z_1 = S_1 + iS_2 = A_0 + iB_0 + (A_1 + iB_1)x + (A_2 + iB_2)x^2 + \dots + (A_n + iB_n)x^n \quad (2.118)$$

onde os coeficientes A_n e B_n , são expressos por (B5):

$$A_n = A_{n-1} \frac{4n^2 - 2n - 1}{4n(n+1)} + B_{n-1} \frac{\mu^2}{4n(n+1)} \quad (2.119)$$

$$B_n = - A_{n-1} \frac{\mu^2}{4n(n+1)} + B_{n-1} \frac{4n^2-2n-1}{4n(n+1)} \quad (2.120)$$

sendo

$$A_0 = 1 \quad (2.121)$$

$$B_0 = 0 \quad (2.122)$$

Como S_1 e S_2 são soluções da equação diferencial pode-se então escrever a solução geral da seguinte forma

$$z = a_1 S_1 + a_2 S_2 \quad (2.123)$$

Onde a_1 e a_2 são constantes que dependem das condições de contorno. Com (2.123) e (2.113-b) tem-se

$$Q_\phi = \text{sen}\phi \left[a_1 S_1 + a_2 S_2 \right] \quad (2.124)$$

Demonstra-se que a rotação da tangente ao meridiano χ vale

$$\chi = - \frac{1}{Eh} \left[(va_1 - \mu^2 a_2) \text{sen}\phi S_1 + (va_2 + \mu^2 a_1) \text{sen}\phi S_2 \right] \quad (2.125)$$

Os demais esforços são obtidos, em função de Q_ϕ e χ , com as expressões (1.255), (1.256), (1.258) e (1.259). Portanto há necessidade de se obterem as expressões das derivadas de Q_ϕ e χ . Estas derivadas são conseguidas com

$$\begin{aligned} (\text{sen}\phi \dot{S}_1) &= \cos\phi (A_0 + 3A_1 x + 5A_2 x^2 + \dots) = \\ &= \cos\phi \sum_0^\infty (2n+1) A_n x^n \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} (\text{sen}\phi \dot{S}_2) &= \cos\phi (B_0 + 3B_1 x + 5B_2 x^2 + \dots) = \\ &= \cos\phi \sum_0^\infty (2n+1) B_n x^n \end{aligned} \quad (2.127)$$

As expressões dos esforços são

$$N_{\phi} = - \cotg\phi \left[a_1 (S_1 \text{sen}\phi) + a_2 (S_2 \text{sen}\phi) \right] \quad (2.128)$$

$$N_{\theta} = - \left[a_1 (\dot{S}_1 \text{sen}\phi) + a_2 (\dot{S}_2 \text{sen}\phi) \right] \quad (2.129)$$

$$M_{\phi} = \frac{h^2}{12a} \left\{ (\nu a_1 - \mu^2 a_2) \left[(\text{sen}\phi \dot{S}_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \cotg\phi (\text{sen}\phi \dot{S}_1) \right] + (\nu a_2 + \mu^2 a_1) \left[(\text{sen}\phi \dot{S}_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \cotg\phi (\text{sen}\phi \dot{S}_2) \right] \right\} \quad (2.130)$$

$$M_{\theta} = \frac{h^2}{12a} (1-\nu^2) \cotg\phi \left[(\nu a_1 - \mu^2 a_2) (\text{sen}\phi \dot{S}_1) + \right. \\ \left. + (\nu a_2 + \mu a_1) \cdot (\text{sen}\phi \dot{S}_2) + \nu M_{\phi} \right] \quad (2.131)$$

e o deslocamento horizontal δ é obtido com a expressão (1.260).

As constantes a_1 e a_2 são calculadas, a partir das condições de contorno, da seguinte forma:

a) para força horizontal H , uniformemente distribuída, tem-se, a partir das expressões (1.261) e (1.262)

$$\frac{-Hr_{0,0}}{a} = a_1 (\text{sen}\phi S_1)_{x=x_0} + a_2 (\text{sen}\phi S_2)_{x=x_0} \quad (2.132)$$

$$0 = \frac{h^2}{12a} \left\{ (\nu a_1 - \mu^2 a_2) \left[(\text{sen}\phi \dot{S}_1)_{x=x_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \cotg\phi (\text{sen}\phi \dot{S}_1)_{x=x_0} \right] + (\nu a_2 + \mu^2 a_1) \left[(\text{sen}\phi \dot{S}_2)_{x=x_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \cotg\phi (\text{sen}\phi \dot{S}_2)_{x=x_0} \right] \right\} \quad (2.133)$$

Resolvendo o sistema (2.132) e (2.133) obtêm-se o valor das constantes a_1 e a_2 .

b) para momento M , uniformemente distribuído, tem-se, a partir das expressões (1.263) e (1.264)

$$0 = a_1 (\text{sen}\phi S_1)_{x=x_0} + a_2 (\text{sen}\phi S_2)_{x=x_0} \quad (2.134)$$

$$M = \frac{h^2}{12a} \left\{ (va_1 - \mu^2 a_2) \left[(\text{sen}\phi S_1)_{x=x_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + v \cotg \phi (\text{sen}\phi S_1)_{x=x_0} \right] + (va_2 + \mu^2 a_1) \left[(\text{sen}\phi S_2)_{x=x_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + v \cotg \phi (\text{sen}\phi S_2)_{x=x_0} \right] \right\} \quad (2.135)$$

obtendo-se, analogamente ao caso anterior, a_1 e a_2 .

2.2 - Soluções de Geckeler

2.21 - Solução de Geckeler para casca esférica com espessura constante

No caso de casca esférica ($r_1 = r_2 = a$) com espessura constante, o sistema de equações diferenciais (1.241) e (1.242), como já foi visto, reduz-se às expressões (2.101) e (2.102).

Os esforços causados por cargas aplicadas no contorno (H e M) amortecem rapidamente e devem conter um fator de amortecimento que faça com que os esforços diminuam à medida que se afastam do contorno. Supondo que este amortecimento seja exponencial, de forma $e^{-\lambda\psi}$, onde $\psi = \phi_0 - \phi$, (Fig. 2.201) e λ é um valor maior que 1; portanto, na derivada primeira e na derivada segunda aparece o fator multiplicativo λ e λ^2 respectivamente; logo, a derivada segunda

é maior que a derivada primeira que é, por sua vez, maior que a função

$$\ddot{Q}_\phi > \dot{Q}_\phi > Q_\phi$$

$$\ddot{\chi} > \dot{\chi} > \chi$$

Desde que a $\cotg\phi$ não tenha valores elevados, pode-se desprezar o termo que contém a derivada primeira e o termo que contém a função em relação à derivada segunda. Portanto, o sistema de equações se reduz a

$$\ddot{Q}_\phi = -Eh\chi \quad (2.201)$$

$$\ddot{\chi} = \frac{a^2}{K} Q_\phi \quad (2.202)$$

Resolvendo o sistema por substituição, obtém-se

$$\ddot{\ddot{Q}}_\phi + \frac{Eha^2}{K} Q_\phi = 0 \quad (2.203)$$

Definindo

$$\lambda^4 = 3(1-\nu^2) \frac{a^2}{h^2} \quad (2.204)$$

resulta

$$\ddot{\ddot{Q}}_\phi + 4\lambda^4 Q_\phi = 0 \quad (2.205)$$

A solução geral de uma equação diferencial deste tipo é da forma

$$Q_\phi = e^{\lambda\phi} (C_1 \operatorname{sen}\lambda\phi + C_2 \operatorname{cos}\lambda\phi) + e^{-\lambda\phi} (C_3 \operatorname{sen}\lambda\phi + C_4 \operatorname{cos}\lambda\phi) \quad (2.206)$$

A expressão é válida no caso geral, em que há dois bordos. No caso de não haver abertura superior, como Q_ϕ diminui à medida que diminui ϕ , eliminam-se, portanto, o terceiro e quarto termo da expressão (2.206). Resta então

No cálculo do deslocamento horizontal utiliza-se a expressão (1.260), desprezando-se também o termo em que aparece a função (N_ϕ) em relação ao termo que contém a primeira derivada (N_θ) . Portanto

$$\delta = - \frac{a \operatorname{sen}(\phi_0 - \psi)}{Eh} \sqrt{2} \lambda C e^{-\lambda \psi} \operatorname{sen}(\lambda \psi + \gamma - \pi/4) \quad (2.214)$$

A partir das condições de contorno, obtêm-se as constantes C e γ . Tem-se então:

a) para força horizontal H, uniformemente distribuída no contorno ($\psi = 0$; $\phi = \phi_0$)

$$-H \operatorname{sen} \phi_0 = C \operatorname{sen} \gamma \quad (2.215)$$

$$0 = \frac{a}{\sqrt{2} \lambda} C \operatorname{sen}(\gamma + \frac{\pi}{4}) \quad (2.216)$$

resultando

$$\gamma = -\frac{\pi}{4} ; \quad C = \sqrt{2} H \operatorname{sen} \phi_0 \quad (2.217-a,b)$$

b) para momento M, uniformemente distribuído no contorno ($\psi = 0$; $\phi = \phi_0$) :

$$0 = C \operatorname{sen} \gamma \quad (2.218)$$

$$M = \frac{a}{\sqrt{2} \lambda} C \operatorname{sen}(\gamma + \frac{\pi}{4}) \quad (2.219)$$

resultando

$$\gamma = 0 ; \quad C = \frac{2\lambda M}{a} \quad (2.220-a,b)$$

O problema está, portanto, resolvido, bastando apenas introduzir as constantes C e γ em cada caso, nas expressões dos esforços e dos deslocamentos.

$$Q_\phi = e^{\lambda\phi} (C_1 \text{sen}\lambda\phi + C_2 \text{cos}\lambda\phi) \quad (2.207)$$

Esta expressão pode ser escrita de forma mais compacta

$$Q_\phi = C e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi + \gamma) \quad (2.208)$$

onde C e γ são as duas constantes a determinar (que dependem das condições de contorno) e ψ é o ângulo contado a partir da borda inferior, como mostra a figura (2.201).

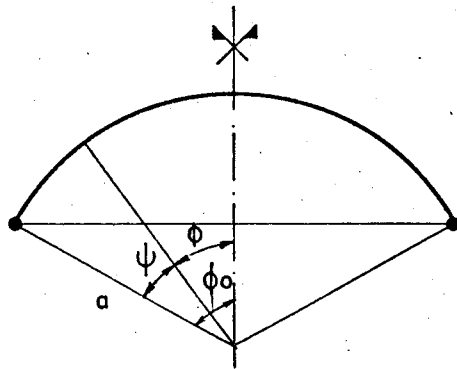


Fig. 2.201

Introduzindo a expressão (2.208) em (2.202), obtêm-se

$$\chi = \frac{1}{Eh} 2\lambda^2 C e^{-\lambda\psi} \text{cos}(\lambda\psi + \gamma) \quad (2.209)$$

Os esforços podem ser obtidos em função de Q_ϕ e χ com as expressões (1.255) (1.256) (1.258) e (1.259). Assim sendo

$$N_\phi = -\text{cotg}(\phi_0 - \psi) C e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\phi + \gamma) \quad (2.210)$$

$$N_\theta = -\sqrt{2} \lambda C e^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\phi + \gamma - \frac{\pi}{4}) \quad (2.211)$$

Nos momentos M_ϕ e M_θ , despreza-se, nas equações (1.258) e (1.259), o termo que contém a função (χ) em relação à primeira derivada ($\dot{\chi}$). Resulta

$$M_\phi = \frac{a}{\sqrt{2} \lambda} C e^{-\lambda\phi} \text{sen}(\lambda\phi + \gamma + \pi/4) \quad (2.212)$$

$$M_\theta = \nu M_\phi \quad (2.213)$$

2.22- Solução de Geckeler para casca de revolução com meridiano qualquer e espessura variável.

Desprezando os termos que contêm a primeira derivada, e os termos que contêm a função, no sistema de equação (1.241) e (1.242), como foi visto no caso da solução de Geckeler para casca esférica de espessura constante, obtêm-se

$$\ddot{U} = - \frac{r_1^2}{r_2} Eh\chi \quad (2.221)$$

$$\ddot{\chi} = \frac{r_1^2}{r_2} \frac{U}{K} \quad (2.222)$$

Resolvendo o sistema em U, vem

$$\ddot{\ddot{U}} + \frac{r_1^4}{r_2^2} \frac{Eh}{K} U = 0 \quad (2.223)$$

Definindo

$$\lambda^4 = 3 \frac{r_1^4}{r_2^2} \frac{(1-\nu^2)}{h^2} \quad (2.224)$$

e introduzindo em (2.223) , resulta

$$\ddot{\ddot{U}} + 4\lambda^4 U = 0 \quad (2.225)$$

Admitindo λ constante, a solução de (2.225) pode ser expressa da seguinte forma (conforme já foi visto)

$$U = Ce^{-\lambda\psi} \text{sen}(\lambda\psi+\gamma) \quad (2.226)$$

E, portanto,

$$\chi = \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{Eh} 2C\lambda^2 e^{-\lambda\psi} \cos(\lambda\psi+\gamma) \quad (2.227)$$

De forma análoga àquela vista para a casca esférica de espessura constante, obtêm-se os esforços e os deslocamentos

$$Q_{\phi} = \frac{C}{r_2} e^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}(\lambda\psi + \gamma) \quad (2.228)$$

$$N_{\phi} = -\frac{C}{r_2} \operatorname{cotg}(\phi_0 - \psi) e^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}(\lambda\psi + \gamma) \quad (2.229)$$

$$N_{\theta} = -\frac{1}{r_1} \sqrt{2} C \lambda e^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4}) \quad (2.230)$$

$$M_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C}{\lambda} \frac{r_1}{r_2} e^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}(\lambda\psi + \gamma + \frac{\pi}{4}) \quad (2.231)$$

$$M_{\theta} = \nu M_{\phi} \quad (2.232)$$

$$\delta = \frac{r_2}{r_1} \frac{\operatorname{sen}(\phi_0 - \psi)}{Eh} \sqrt{2} C \lambda e^{-\lambda\psi} \operatorname{sen}(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4}) \quad (2.233)$$

Das condições de contorno obtêm-se as constantes C e γ , da mesma forma com que foram obtidas para a casca esférica de espessura constante. Assim sendo, tem-se:

a) para força horizontal H, uniformemente distribuída no contorno

$$\gamma = -\frac{\pi}{4} \quad , \quad C = \sqrt{2} r_{2,0} \operatorname{sen}\phi_0 H \quad (2.234-a,b)$$

b) para momento M, uniformemente distribuído no contorno

$$\gamma = 0 \quad , \quad C = 2\lambda_0 \frac{r_{2,0}}{r_{1,0}} M \quad (2.235-a,b)$$

Para as cascas com variação sensível de λ , pode-se efetuar um cálculo aproximado, com as fórmulas deduzidas, considerando faixas ao longo das quais é possível admitir λ constante.

Considere-se a casca da figura (2.202), com λ variável; e dividindo a mesma em faixas suficientemente pequenas com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, com os seus respectivos $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$.

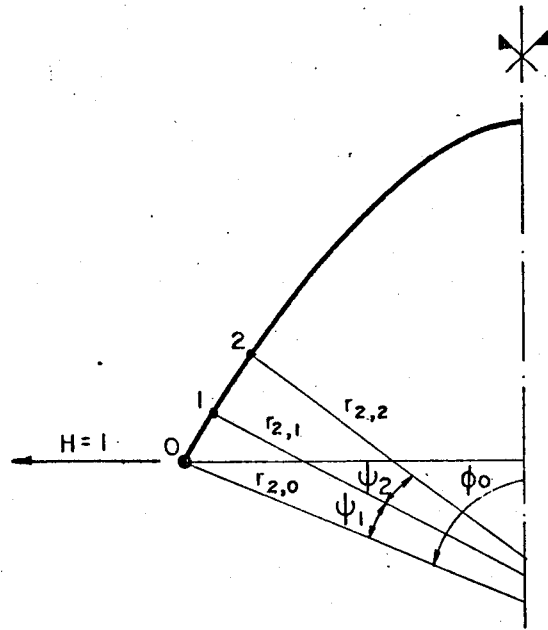


Fig. 2.202

Aplicando $H = 1$, no contorno, pode-se então obter Q_ϕ e M_ϕ em 1, por meio das expressões (2.228) e (2.231).

$$Q_\phi^{(1)} = \sqrt{2} r_{2,0} \operatorname{sen} \phi_0 \frac{1}{r_{2,1}} e^{-\lambda_1 \psi_1} \operatorname{sen}(\lambda_1 \psi_1 - \frac{\pi}{4})$$

$$M_\phi^{(1)} = r_{2,0} \frac{\operatorname{sen} \phi_0}{\lambda_1} \frac{r_{1,1}}{r_{2,1}} e^{-\lambda_1 \psi_1} \operatorname{sen}(\lambda_1 \psi_1)$$

Obtido o valor de $Q_\phi^{(1)}$, pode-se então obter $H^{(1)}$ com a expressão

$$H^{(1)} = - \frac{Q_\phi^{(1)}}{\operatorname{sen}(\phi_0 - \psi_1)}$$

Aplicando $H^{(1)}$ e $M_{\phi}^{(1)}$ no ponto 1, obtêm-se, com as fórmulas deduzidas, os valores de Q_{ϕ} e M_{ϕ} em 2.

$$Q_{\phi}^{(2)} = \sqrt{2} \frac{r_{2,0}}{r_{2,2}} \operatorname{sen} \phi_0 e^{(-\lambda_1 \phi_1 - \lambda_2 \psi_2)} \operatorname{sen}(\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 - \frac{\pi}{4})$$

$$M_{\phi}^{(2)} = \frac{r_{2,0}}{\lambda_2} \operatorname{sen} \phi_0 \frac{r_{1,2}}{r_{2,2}} e^{(-\lambda_1 \phi_1 - \lambda_2 \psi_2)} \operatorname{sen}(\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2)$$

Este procedimento pode ser estendido para toda a casca e os demais esforços (N_{ϕ} , N_{θ} , M_{θ}) são obtidos de mesma forma. Conclui-se então que se pode calcular os efeitos produzidos por uma força H, numa casca com λ variável, utilizando as expressões (2.228 a 2.233), nas quais substitui-se o termo $\lambda\psi$, pela somatória $\sum \lambda_i \psi_i$ (B5). De forma análoga são considerados os efeitos de um momento M aplicado no contorno.

2.3. Aproximação de Hanna

Baseando-se em resultados experimentais em cúpulas esféricas de alumínio, com espessura variável, carregadas ao longo da borda, Hanna indica uma simplificação que permite o cálculo dos esforços da teoria de flexão, em casca esférica com espessura variável.

Esta aproximação consiste em admitir que as perturbações de borda da casca esférica de espessura variável sejam iguais às da mesma casca com a espessura constante conveniente. Esta espessura é a que a casca de espessura variável apresenta a uma distância S_a da borda, determinada com

$$S_a = \frac{\sqrt{a h_a}}{2} \quad (2.301)$$

Esta aproximação exige que a região de engrossamento se estenda pelo menos a uma distância S da borda dada por

$$S = 2\sqrt{a h_a} \quad (2.302)$$

onde a é o raio da casca e h_a é a espessura média da região do engrossamento (Fig. 2.301).

$$h_a = \frac{h_o + h_c}{2} \quad (2.303)$$

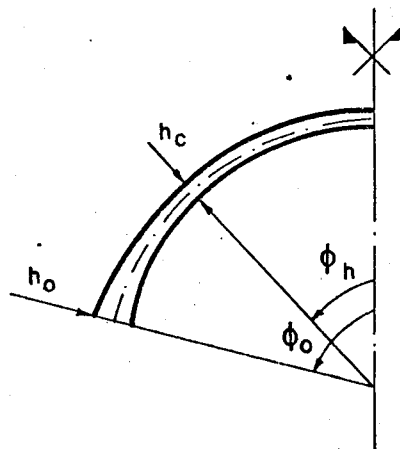


Fig. 2.301

Esta aproximação é utilizada apenas para o cálculo dos efeitos (esforços e deslocamentos) da teoria de flexão, sendo que para o cálculo das tensões produzidas por estes esforços deve-se considerar a espessura real no ponto.

Salienta ainda uma aproximação corrente no cálculo da flexão de cascas com simetria de revolução e carregamento, que consiste em considerar os coeficientes elásticos de uma casca de meridiano qualquer iguais aos de uma "casca esférica equivalente", de tal forma a possuir o mesmo ângulo de abertura ϕ_o e mesma espessura (B_1).

3.- APLICAÇÃO DAS DIFERENÇAS FINITAS

3.1- Elementos de diferenças finitas

O método das diferenças finitas consiste em substituir uma função, conhecida apenas em pontos isolados, por um polinômio (de interpolação) de grau n , a fim de substituir as derivadas da função pelas derivadas do polinômio.

Assim, suponham-se conhecidos os valores de uma função $y = f(x)$, em pontos igualmente espaçados (em princípio os pontos podem não ser igualmente espaçados, o que acarreta apenas complicações formais). Considere-se por exemplo como polinômio de interpolação o polinômio de 4º grau

$$y = p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (3.101)$$

e denominem-se

$$\begin{aligned} f(-2\Delta) &= y_{m-2} & f(-\Delta) &= y_{m-1} \\ f(0) &= y_m & f(\Delta) &= y_{m+1} \\ f(2\Delta) &= y_{m+2} \end{aligned} \quad (3.102)$$

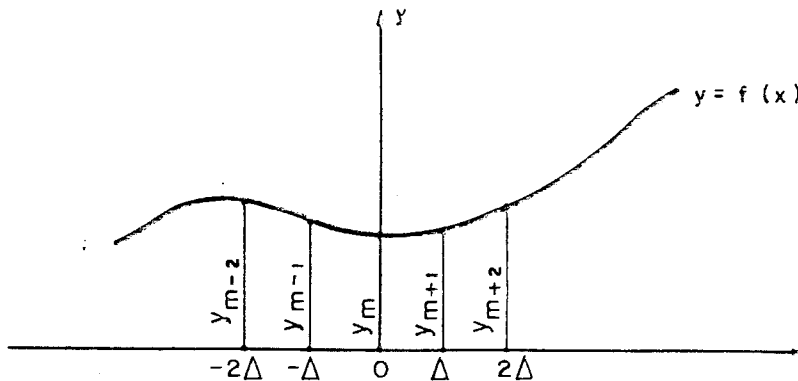


Fig. 3.101

É possível montar um sistema de 5 equações a 5 incógnitas e determinar as expressões dos coeficientes do polinômio (a, b, c, d, e) , em função dos valores conhecidos da função (y_i) . Determinado assim o polinômio interpolador, suas derivadas podem ser utilizadas, com certa aproximação, como derivadas da função $y = f(x)$ no ponto central (diferenças finitas simétricas) ou em outro ponto, à direita ou à esquerda do ponto central (diferenças finitas assimétricas).

De forma análoga consegue-se determinar as expressões das derivadas utilizando polinômio de interpolação de grau n .

Estas são as diferenças finitas lagrangeanas, as quais são utilizadas neste trabalho. Cabe observar que outras discretizações podem ser obtidas com as diferenças hermitianas, nas quais o polinômio interpolador é definido não somente por valores da função como também por valores das derivadas; a respeito, podem ser consultados, por exemplo, SOARE (B10) e as referências aí indicadas.

Denominaram-se de DF-1 as diferenças finitas quando se utilizam as seguintes expressões para as deriva-

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_m = \frac{1}{2\Delta} [-y_{m-1} + y_{m+1}] \quad (3.103)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_m = \frac{1}{\Delta^2} [y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}] \quad (3.104)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_m = \frac{1}{2\Delta^3} [-y_{m-2} + 2y_{m-1} - 2y_{m+1} + y_{m+2}] \quad (3.105)$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_m = \frac{1}{\Delta^4} [y_{m-2} - 4y_{m-1} + 6y_m - 4y_{m+1} + y_{m+2}] \quad (3.106)$$

As expressões (3.103) e (3.104) são obtidas com polinômio de grau 2 e as (3.105) e (3.106) com polinômio de grau 4.

Denominaram-se de DF-2 as diferenças finitas quando se utilizam as seguintes expressões para derivadas

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_m = \frac{1}{12\Delta} [y_{m-2} - 8y_{m-1} + 8y_{m+1} - y_{m+2}] \quad (3.107)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_m = \frac{1}{12\Delta^2} [-y_{m-2} + 16y_{m-1} - 30y_m + 16y_{m+1} - y_{m+2}] \quad (3.108)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_m = \frac{1}{8\Delta^3} [y_{m-3} - 8y_{m-2} + 13y_{m-1} - 13y_{m+1} + 8y_{m+2} - y_{m+3}] \quad (3.109)$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_m = \frac{1}{6\Delta^4} [-y_{m-3} + 12y_{m-2} - 39y_{m-1} + 56y_{m+1} - 39y_{m+2} + 12y_{m+3} - y_{m+4}] \quad (3.110)$$

As expressões (3.107) e (3.108) são obtidas com polinômio de grau 4 e as (3.109) e (3.110) com polinômio de grau 6.

O erro cometido, quando se utilizam diferenças finitas é função do espaçamento Δ entre os pontos, e segundo SALVADORI (B10), pode ser expresso sob a forma:

$$p/(DF-1) \quad e(x) = f_1(x)\Delta^2 + f_2(x)\Delta^4 + f_3(x)\Delta^6 + \dots \quad (3.111)$$

$$p/(DF-2) \quad e(x) = f'_1(x)\Delta^4 + f'_2(x)\Delta^6 + f'_3(x)\Delta^8 + \dots \quad (3.112)$$

Note-se que para as DF-1 o erro é, para as quatro expressões, da ordem de Δ^2 e, que analogamente, para as DF-2 o erro é da ordem de Δ^4 . Poder-se-ia, é claro, obter um conjunto de expressões para as 4 derivadas sô com polinômio de interpolação de grau 4, e outro conjunto sô com polinômio de interpolação de grau 6; neste caso, porém, as ordens dos erros variariam dentro do mesmo conjunto, impedindo as extrapolações de Richardson, que serão vistas a seguir.

Ao se calcular com vários valores de espaçamento, tem-se para o mesmo ponto x

$$p/(DF-1) \quad e = C_1 \Delta^2 + C_2 \Delta^4 + C_3 \Delta^6 + \dots \quad (3.113)$$

$$p/(DF-2) \quad e = C'_1 \Delta^4 + C'_2 \Delta^6 + C'_3 \Delta^8 + \dots \quad (3.114)$$

Com o conhecimento da expressão do erro pode-se calcular uma melhor aproximação, nos pontos comuns, para os valores obtidos com malhas distintas, usando as extrapolações de Richardson(B10) apresentadas a seguir.

Denominando A_1 o valor corresponde ao cálculo com espaçamento Δ_1 (obtido com número de divisões n_1) e A_2 o valor correspondente ao cálculo com espaçamento Δ_2 (obtido com número de divisões n_2) obtêm-se, a partir da figura (3.102):

$$\Delta_1 = \frac{(b-a)}{n_1} \quad e \quad \Delta_2 = \frac{(b-a)}{n_2} \quad (3.115-a,b)$$

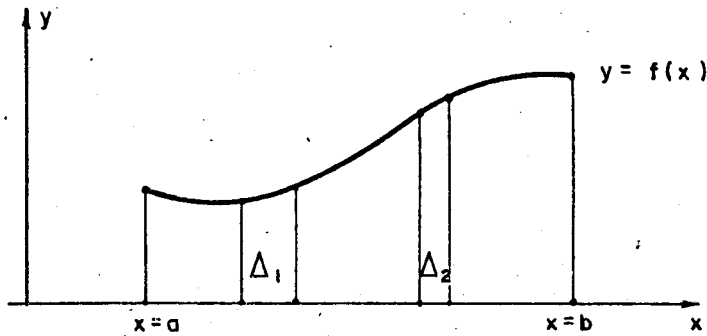


Fig. 3.102

Desprezando-se, para as DF-1, o erro de ordem superior a Δ^2 , e denominando e_1 e e_2 os erros correspondentes aos valores A_1 e A_2 , respectivamente, resultam

$$e_1 = A - A_1 = C_1 \left(\frac{b-a}{n_1}\right)^2 \quad (3.116)$$

$$e_2 = A - A_2 = C_1 \left(\frac{b-a}{n_2}\right)^2 \quad (3.117)$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se o valor A extrapolado

$$A = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} A_2 - \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} A_1 \quad (3.118)$$

ou, expressando-o de forma mais compacta, vem

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \quad (3.119)$$

Para as (DF-2), desprezando-se o erro de ordem superior a Δ^4 , obtêm-se, de forma análoga

$$A = \frac{n_2^4}{n_2^4 - n_1^4} A_2 - \frac{n_1^4}{n_2^4 - n_1^4} A_1 \quad (3.120)$$

ou

$$A = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 \quad (3.121)$$

Com três malhas distintas pode-se, para as (DF-1), levar em consideração a segunda parcela do erro, da seguinte forma

$$e_1 = A - A_1 = C_1 \left(\frac{b-a}{n_1}\right)^2 + C_2 \left(\frac{b-a}{n_1}\right)^4 \quad (3.122)$$

$$e_2 = A - A_2 = C_1 \left(\frac{b-a}{n_2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{b-a}{n_2}\right)^4 \quad (3.123)$$

$$e_3 = A - A_3 = C_1 \left(\frac{b-a}{n_3}\right)^2 + C_2 \left(\frac{b-a}{n_3}\right)^4 \quad (3.124)$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se o valor A extrapolado

$$A = \frac{n_1^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_1^2)} A_1 - \frac{n_2^4}{(n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_1^2)} A_2 + \frac{n_3^4}{(n_3^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_2^2)} A_3$$

ou

$$A = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 \quad (3.126)$$

Os coeficientes α_i , β_i , γ_i encontram-se tabelados em SALVADORI (B10) para as diversas relações dos números de divisões da malha.

Não se devem usar as extrapolações, quando as aproximações sucessivas não tendem monotonicamente ao valor verdadeiro.

3.2- Diferenças finitas aplicadas à teoria de flexão

3.21.- Discretizações das expressões utilizadas

Ao se aplicarem as diferenças finitas nas cascas, é usual que se numerem os nós a partir do contorno inferior. Assim sendo, tem-se dois casos distintos: casca com curvatura gaussiana positiva (Fig. 3.201-a) e casca com curvatura gaussiana negativa (Fig. 3.201-b).

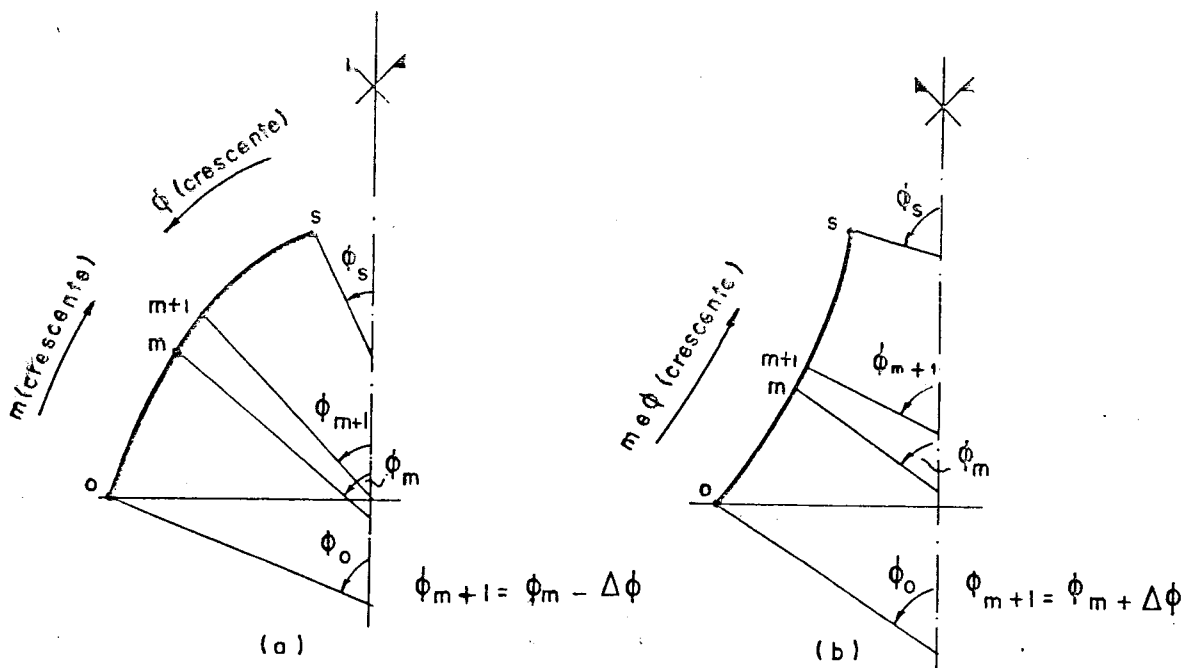


Fig. 3.201

No caso de casca com curvatura gaussiana positiva, a numeração dos nós cresce no sentido contrário ao do ângulo ϕ . Tem-se então um incremento negativo do ângulo; portanto, deve-se considerar Δ_ϕ negativo, quando se usarem as expressões das derivadas.

No caso de casca com curvatura gaussiana negativa, a numeração dos nós cresce no mesmo sentido de ϕ . Portanto, o incremento do ângulo é positivo, não se mudando, então, o sinal de Δ_ϕ .

Foram elaboradas três discretizações distintas na resolução de cascas em regime de flexão:

- a) Aplicação das diferenças finitas sobre o sistema de equações (1.241) e (1.242), usando as diferenças finitas (DF-1).
- b) Aplicação das diferenças finitas sobre o sistema de equações (1.241) e (1.242), usando as diferenças finitas (DF-2).
- c) Aplicação das diferenças finitas sobre a equação (1.248), usando as diferenças finitas (DF-2).

O sistema de equações diferenciais (ou a equação) discretizado é obtido da seguinte forma:

Discretização a: Aplicando as expressões (3.103) e (3.104) em (1.241) e (1.242), e agrupando os termos, resultam para o ponto genérico m

$$\begin{aligned} & (1-0,5\Delta_{\phi} A_m)U_{m-1}+(\Delta_{\phi}^2 B_m-2)U_m+(1-0,5\Delta_{\phi} A_m)U_{m+1} + \\ & +\Delta_{\phi}^2 C_m \chi_m = 0 \end{aligned} \quad (3.201)$$

$$\begin{aligned} & (1-0,5\Delta_{\phi} D_m)\chi_{m-1}+(\Delta_{\phi}^2 E_m-2)\chi_m+(1-0,5\Delta_{\phi} D_m)\chi_{m+1} + \\ & +\Delta_{\phi}^2 F_m U_m = 0 \end{aligned} \quad (3.202)$$

Discretização b: Aplicando as expressões (3.107) e (3.108) em (1.241) e (1.242), e agrupando os termos, resultam para o ponto genérico m

$$\begin{aligned} & (\Delta_{\phi} A_m-1)U_{m-2}+(16-8\Delta_{\phi} A_m)U_{m-1}+(12\Delta_{\phi}^2 B_m-30)U_m + \\ & +(16+8\Delta_{\phi} A_m)U_{m+1}-(1+\Delta_{\phi} A_m)U_{m+2}+12\Delta_{\phi}^2 C_m \chi_m = 0 \end{aligned} \quad (3.203)$$

$$\begin{aligned} & (\Delta_{\phi} D_m-1)\chi_{m-2}+(16-8\Delta_{\phi} D_m)\chi_{m-1}+(12\Delta_{\phi}^2 E_m-30)\chi_m + \\ & +(16+8\Delta_{\phi} D_m)\chi_{m+1}-(1+\Delta_{\phi} D_m)\chi_{m+2}+12\Delta_{\phi}^2 F_m U_m = 0 \end{aligned} \quad (3.204)$$

Discretização c: Aplicando as expressões (3.107), (3.108), (3.109) e (3.110) em (1.248), e agrupando os termos, resulta para o ponto genérico m

$$\begin{aligned} & (-4+3\Delta_{\phi} A_m^*)\chi_{m-3}+(48-24\Delta_{\phi} A_m^*-2\Delta_{\phi}^2 B_m^*+2\Delta_{\phi}^3 C_m^*)\chi_{m-2} + \\ & +(156+39\Delta_{\phi} A_m^*+32\Delta_{\phi}^2 B_m^*-16\Delta_{\phi}^3 C_m^*)\chi_{m-1}+(224-60\Delta_{\phi}^2 B_m^*+ \\ & +24\Delta_{\phi}^4 D_m^*)\chi_m+(-156-39\Delta_{\phi} A_m^*+32\Delta_{\phi}^2 B_m^*+16\Delta_{\phi}^3 C_m^*)\chi_{m+1} + \\ & +(48+24\Delta_{\phi} A_m^*-2\Delta_{\phi}^2 B_m^*-2\Delta_{\phi}^3 C_m^*)\chi_{m+2}+(-4-3\Delta_{\phi} A_m^*)\chi_{m+3} = 0 \end{aligned} \quad (3.205)$$

As expressões discretizadas dos esforços e dos deslocamentos são obtidas da seguinte forma:

Discretização a: Aplicando a expressão (3.103) nas expressões dos esforços (1.255 a 1.259) e do deslocamento horizontal (1.260), resultam:

$$Q_{\phi,m} = \frac{U_m}{r_{2,m}} \quad (3.206)$$

$$N_{\phi,m} = - \frac{U_m}{r_{2,m}} \cotg\phi_m \quad (3.207)$$

$$N_{\theta,m} = - \frac{1}{r_{1,m}} \frac{1}{2\Delta_\phi} (-U_{m-1} + U_{m+1}) \quad (3.208)$$

$$M_{\phi,m} = \frac{K_m}{2\Delta_\phi r_{1,m}} \left(-\chi_{m-1} + \frac{2v\Delta_\phi}{\rho_m} \cotg\phi_m \chi_m + \chi_{m+1} \right) \quad (3.209)$$

$$M_{\theta,m} = K_m(1-\nu) \frac{\cotg\phi_m}{r_{2,m}} + \nu M_{\phi,m} \quad (3.210)$$

$$\delta_m = \frac{r_{0,m}}{2\Delta_\phi r_{1,m} h_m E} \left(U_{m-1} + \frac{2v\Delta_\phi}{\rho_m} \cotg\phi_m U_m - U_{m+1} \right) \quad (3.211)$$

Discretização b: Aplicando a expressão (3.107) nas expressões dos esforços e dos deslocamentos, resultam:

$$N_{\theta,m} = - \frac{1}{12\Delta_\phi r_{1,m}} (U_{m-2} - 8U_{m-1} + 8U_{m+1} - U_{m+2}) \quad (3.212)$$

$$M_{\phi,m} = \frac{K_m}{12\Delta_\phi r_{1,m}} (\chi_{m-2} - 8\chi_{m-1} + \frac{12v\Delta_\phi \cotg\phi_m \chi_m}{\rho_m} + 8\chi_{m+1} - \chi_{m+2}) \quad (3.213)$$

$$\delta_m = \frac{r_{0,m}}{12\Delta_\phi r_{1,m} h_m E} (-U_{m-2} + 8U_{m-1} + \frac{12v\Delta_\phi \cotg\phi_m U_m}{\rho_m} - 8U_{m+1} + U_{m+2}) \quad (3.214)$$

Os esforços $Q_{\phi,m}$, $N_{\phi,m}$, $M_{\theta,m}$ são obtidos com as expressões (3.206), (3.207), (3.210) respectivamente, ou seja, as mesmas expressões deduzidas para a discretização a , pois tais esforços não dependem das derivadas das funções.

Discretização c : Como no caso em questão, a resolução da equação diferencial fornece apenas χ ; deve-se então obter U e \dot{U} no ponto m , em função de χ . Assim sendo, introduzindo as expressões (3.107) e (3.108) em (1.244), resulta:

$$U_m = \frac{1}{12\Delta_{\phi}^2 F_m} \left[(1-\Delta_{\phi} D_m) \chi_{m-2} + (-16+8\Delta_{\phi} D_m) \chi_{m-1} + (30-12\Delta_{\phi}^2 E_m) \chi_m + (-16-8\Delta_{\phi} D_m) \chi_{m+1} + (1+\Delta_{\phi} D_m) \chi_{m+2} \right] \quad (3.215)$$

~~introduzindo~~ as expressões (3.107), (3.108), (3.109) em (1.246) resulta:

$$\dot{U}_m = \frac{1}{24\Delta_{\phi}^3} \left[(3A_{i,m}) \chi_{m-3} + (-24A_{i,m} - 2\Delta_{\phi} B_{i,m} + 2\Delta_{\phi}^2 C_{i,m}) \chi_{m-2} + (39A_{i,m} + 32\Delta_{\phi} B_{i,m} - 16\Delta_{\phi}^2 C_{i,m}) \chi_{m-1} + (-60\Delta_{\phi} B_{i,m} + 24\Delta_{\phi}^3 D_{i,m}) \chi_m + (-39A_{i,m} + 32\Delta_{\phi} B_{i,m} + 16\Delta_{\phi}^2 C_{i,m}) \chi_{m+1} + (24A_{i,m} - 2\Delta_{\phi} B_{i,m} - 2\Delta_{\phi}^2 C_{i,m}) \chi_{m+2} + (-3A_{i,m}) \chi_{m+3} \right] \quad (3.216)$$

Os esforços $Q_{\phi,m}$, $N_{\phi,m}$, $N_{\theta,m}$ são obtidos introduzindo as expressões (3.215) ou (3.216) nas expressões (1.257), (1.255) e (1.256) respectivamente.

Os esforços $M_{\phi,m}$ e $M_{\theta,m}$ são obtidos com as expressões (3.213) e (3.210) respectivamente. O deslocamento radial δ_m é obtido a partir da expressão (1.260).

Conhecidas as expressões discretizadas dos esforços podem-se obter as expressões discretizadas das condições de contorno para força horizontal H e momento M uniformemente distribuídos no contorno. Assim sendo, têm-se para a borda inferior

Discretização a:

$$U_o = -Hr_{o,o} \quad (3.217)$$

$$-\chi_{-1} + \frac{2v\Delta}{\rho_o} \phi \cotg\phi_o \chi_o + \chi_{+1} = -\frac{2\Delta}{K_o} \frac{r_{o,o}}{\phi} M \quad (3.218)$$

Estas duas expressões são válidas para força horizontal unitária aplicada no contorno inferior (fazendo $H = 1$ na (3.217) e $M = 0$ na (3.218)) e momento unitário aplicado no contorno inferior (fazendo $H = 0$ na (3.217) e $M = 1$ na (3.218)).

Discretização b:

$$U_o = Hr_{o,o}$$

$$\chi_{-2} - 8\chi_{-1} + \frac{12v\Delta}{\rho_o} \phi \cotg\phi_o \chi_o + 8\chi_{+1} - \chi_{+2} = \frac{12\Delta}{K_o} \frac{r_{o,o}}{\phi} M \quad (3.219)$$

Discretização c:

$$(1 - \Delta_\phi D_o) \chi_{-2} + (-16 + 8\Delta_\phi D_o) \chi_{-1} + (30 - 12\Delta_\phi^2 E_o) \chi_o + (-16 - 8\Delta_\phi D_o) \chi_{+1} + (1 + \Delta_\phi D_o) \chi_{+2} = -12\Delta_\phi^2 F_o Hr_{o,o} \quad (3.220)$$

$$\chi_{-2} - 8\chi_{-1} + \frac{12\nu\Delta\phi}{\rho_0} \cotg\phi_0 \chi_0 + 8\chi_{+1} - \chi_{+2} = \frac{12\Delta\phi r_{1,0}}{K_0} M$$

É válida, para os casos b e c, a observação feita no caso a.

Para as cascas abertas, valem para a outra borda as expressões deduzidas para a borda inferior, bastando apenas particularizá-las para o ponto considerado. Para as cascas sem abertura superior (apenas uma borda) obtêm-se, por simetria, as seguintes condições de contorno (Fig. 3.302).

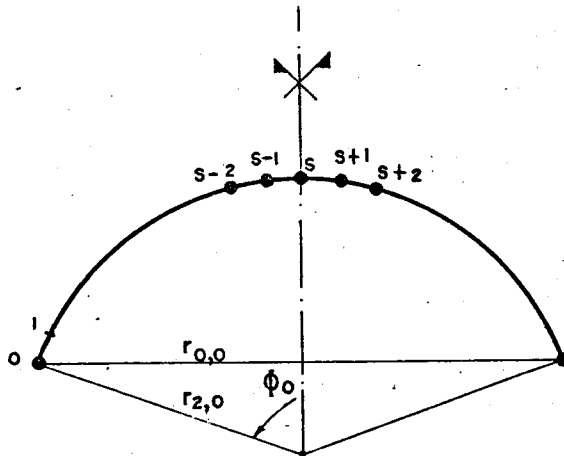


Fig. 3.202

Discretização a:

$$U_s = 0 \quad ; \quad \chi_s = 0$$

Discretização b:

$$U_s = 0 \quad ; \quad \chi_s = 0;$$

$$U_{s-1} = -U_{s+1} \quad ; \quad \chi_{s-1} = -\chi_{s+1}$$

Discretização c:

$$\chi_s = 0 \quad , \quad \chi_{s-1} = -\chi_{s+1} \quad ,$$

$$\chi_{s-2} = -\chi_{s+2}$$

3.22 - Ordem do sistema de equações

Para a determinação da ordem do sistema de equações a ser obtido, ao se utilizarem as diferenças finitas, é preciso fazer um balanço entre o número de incógnitas criadas e o número de equações que se obtêm ao se utilizarem as citadas discretizações.

Denominando de s o número de divisões (portanto $s+1$ nós), têm-se para as cascas com dois bordos (Fig.

3.203-a), nas três discretizações, a, b, c:

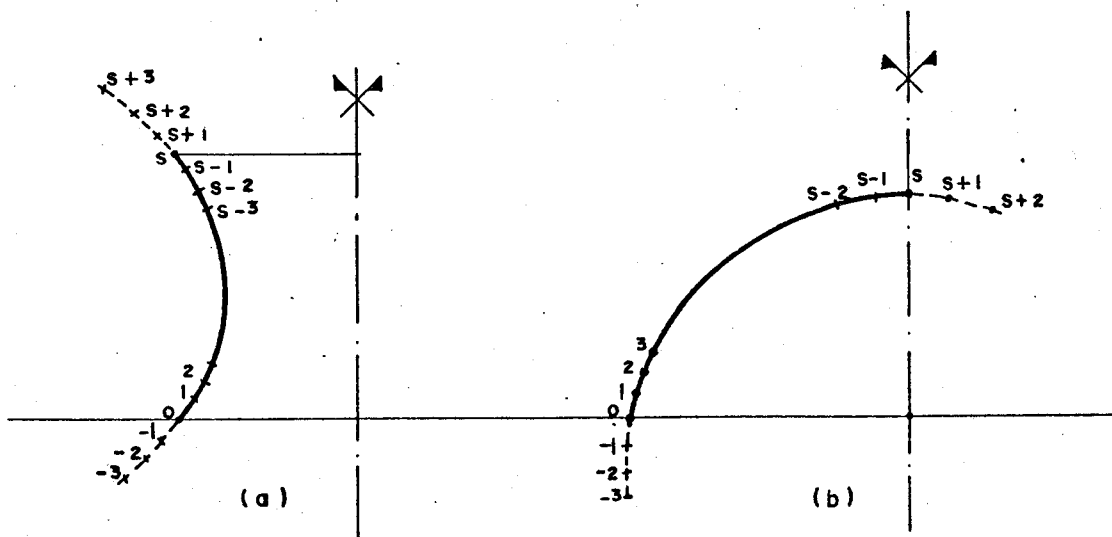


Fig. 3.203

| Discretização <u>a</u> | incógnitas | equações |
|---|------------|----------|
| aplicação das (3.201) e (3.202) nos pontos 0 a s , $s+1$ pontos | $2(s+3)$ | $2(s+1)$ |
| condições de contorno | — | 4 |
| ordem do sistema | $2s+6$ | $2s+6$ |

| Discretização b : | incógnitas | equações |
|-----------------------------------|-------------------|------------------|
| aplicação das (3.203) e (3.204) | | |
| nos pontos 0 a s ; $s+1$ pontos | $2(s+5)$ | $2(s+1)$ |
| condições de contorno | $\frac{-}{2s+10}$ | $\frac{4}{2s+6}$ |

resultando, portanto, um número de incógnitas maior que o número de equações. O procedimento normal neste caso seria utilizar diferenças finitas assimétricas, reduzindo o número de incógnitas, tornando-o igual ao número de equações. Para facilidade de programação, utilizou-se um artifício, que consiste em criar equações suplementares, da seguinte forma.

Considere-se o polinômio de 4º grau

$$y = P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

onde os coeficientes, obtidos como foi visto, valem

$$a = \frac{1}{24\Delta^4} \left[y_{m-2} - 4y_{m-1} + 6y_m - 4y_{m+1} + y_{m+2} \right] \quad (3.221)$$

$$b = \frac{1}{12\Delta^3} \left[-y_{m-2} + 2y_{m-1} - 2y_{m+1} + y_{m+2} \right] \quad (3.222)$$

$$c = \frac{1}{24\Delta^2} \left[-y_{m-2} + 16y_{m-1} - 30y_m + 16y_{m+1} - y_{m+2} \right] \quad (3.223)$$

$$d = \frac{1}{12\Delta} \left[y_{m-2} - 8y_{m-1} + 8y_{m+1} - y_{m+2} \right] \quad (3.224)$$

$$e = y_m$$

Fazendo $m = 1$, nas expressões (3.221), (3.222), (3.223) e (3.224), obtém-se com $x = -2\Delta$ o valor de y no ponto 2:

$$y_{-2} = 5y_{-1} - 10y_0 + 10y_1 - 5y_2 + y_3 \quad (3.225)$$

Obtêm-se então uma equação suplementar sem produzir novas incógnitas. Procedendo-se assim, ao utilizarem-se as expressões (3.107 e 3.108), no ponto 0 (zero), aparecerá o valor da função no ponto -2, que é obtido com os valores da função nos 5 pontos anteriores conforme mostra a expressão (3.225). Logo, a derivada da função no ponto 0 (zero) é indiretamente obtida com pontos não simétricos; o procedimento é semelhante ao de utilizar diferenças finitas assimétricas, obtêm-se porém um sistema de equações de ordem um pouco maior.

Particularizando a expressão (3.225) para as variáveis χ e U , têm-se, para a borda inferior:

$$U_{-2} - 5U_{-1} + 10U_0 - 10U_1 + 5U_2 - U_3 = 0 \quad (3.226)$$

$$\chi_{-2} - 5\chi_{-1} + 10\chi_0 - 10\chi_1 + 5\chi_2 - \chi_3 = 0 \quad (3.227)$$

Analogamente, obtêm-se outras duas equações para a borda superior, sem produzir novas incógnitas. Portanto, aumentou-se o número de equações de 4, fazendo-o igual ao número de incógnitas, $2s+10$, que é a ordem do sistema.

| Discretização <u>c</u> | incógnitas | equações |
|---------------------------------|------------|----------|
| aplicação de (3.205) nos pontos | | |
| 0 a s; s+1 pontos | s+7 | s+1 |
| condições de contorno | - | 4 |
| equações suplementares | - | <u>2</u> |
| ordem do sistema | s+7 | s+7 |

Aqui, as duas equações suplementares resultam da particularização da expressão (3.227) para os pontos -3 e s+3, isto é

$$\chi_{-3} - 5\chi_{-2} + 10\chi_{-1} - 10\chi_0 + 5\chi_1 - \chi_2 = 0$$

$$\chi_{s-2} - 5\chi_{s-1} + 10\chi_s - 10\chi_{s+1} + 5\chi_{s+2} - \chi_{s+3} = 0$$

Para as cascas com coroamento fechado (Fig. 3.203-b), têm-se:

| Discretização <u>a</u> : | incógnitas | equações |
|---------------------------------|-------------|-------------|
| aplicação das (3.201) e (3.202) | | |
| nos pontos 0 a s-1, s pontos | 2(s+2) | 2s |
| condições de contorno | - | 2 |
| simetria | - | 2 |
| ordem do sistema | <u>2s+4</u> | <u>2s+4</u> |

| Discretização <u>b</u> : | incógnitas | equações |
|-------------------------------------|-------------|-------------|
| aplicação das (3.203) e (3.204) nos | | |
| pontos 0 a s-1 ; s pontos | 2(s+4) | 2s |
| condições de contorno | - | 2 |
| simetria | - | 2 |
| equações suplementares * | - | 2 |
| ordem do sistema | <u>2s+8</u> | <u>2s+8</u> |

(*) referentes apenas à borda inferior

| Discretização <u>c</u> : | incógnitas | equações |
|---------------------------------|------------|------------|
| aplicação de (3.205) nos pontos | | |
| 0 a s-1; s pontos | s+6 | s |
| condições de contorno | - | 2 |
| simetria | - | 3 |
| equações suplementares | - | 1 |
| ordem do sistema | <u>s+6</u> | <u>s+6</u> |

Nota-se que, no caso c, o número de equações, ou seja, a ordem do sistema de equações, é aproximadamente a metade da dos casos a e b.

4. - PROGRAMAÇÃO

Foram elaborados programas em FORTRAN IV do IBM-1130, com configuração 32K, palavras de 16 bits, para:

- Solução mediante séries hipergeométricas (casca esférica de espessura constante).
- Solução de Geckeler para casca esférica de espessura constante.
- Solução de Geckeler para casca de revolução de meridiano qualquer e espessura variável.
- Solução mediante diferenças finitas usando a discretização a (para meridiano qualquer e espessura variável).
- Solução mediante diferenças finitas usando a discretização b (para meridiano qualquer e espessura variável).
- Solução mediante diferenças finitas usando a discretização c (para meridiano qualquer e espessura variável).

A programação das três primeiras soluções (soluções analíticas) é imediata, seguindo a seqüência de cálculo já apresentada.

A programação das três últimas soluções (soluções mediante diferenças finitas) é idêntica, diferenciando-se quanto à formulação matemática e a índices que se referem à ordem da matriz, e são portanto tratadas neste capítulo de uma forma comum.

Os programas destas soluções constam das seguintes rotinas:

GJRMS - rotina para inversão de matriz pelo processo de Gauss-Jordan-Rutishauser.

GEOME - rotina para impressão do cabeçalho, leitura e impressão das características geométricas e mecânicas, cálculo dos parâmetros geométricos do contorno inferior e superior (se houver).

PAGEO - rotina para cálculo dos parâmetros geométricos em cada ponto.

SPMMC - rotina para montagem da matriz dos coeficientes.

CDEED - rotina para cálculo dos esforços e deslocamentos.

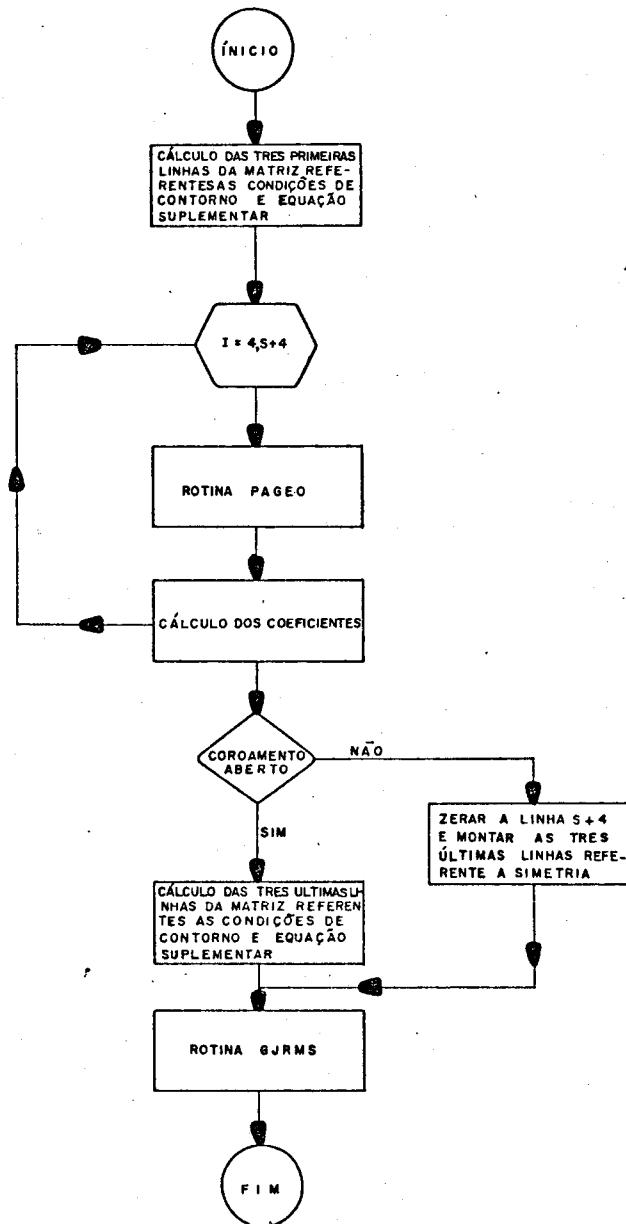
A função das rotinas GEOME e PAGEO é fornecer os parâmetros geométricos para as rotinas SPMMC e CDEED, sendo que apenas elas dependem da geometria da casca, e por isto, para cada tipo de casca, deve-se modificar estas rotinas.

Apresentam-se, a seguir, para a discretização c,

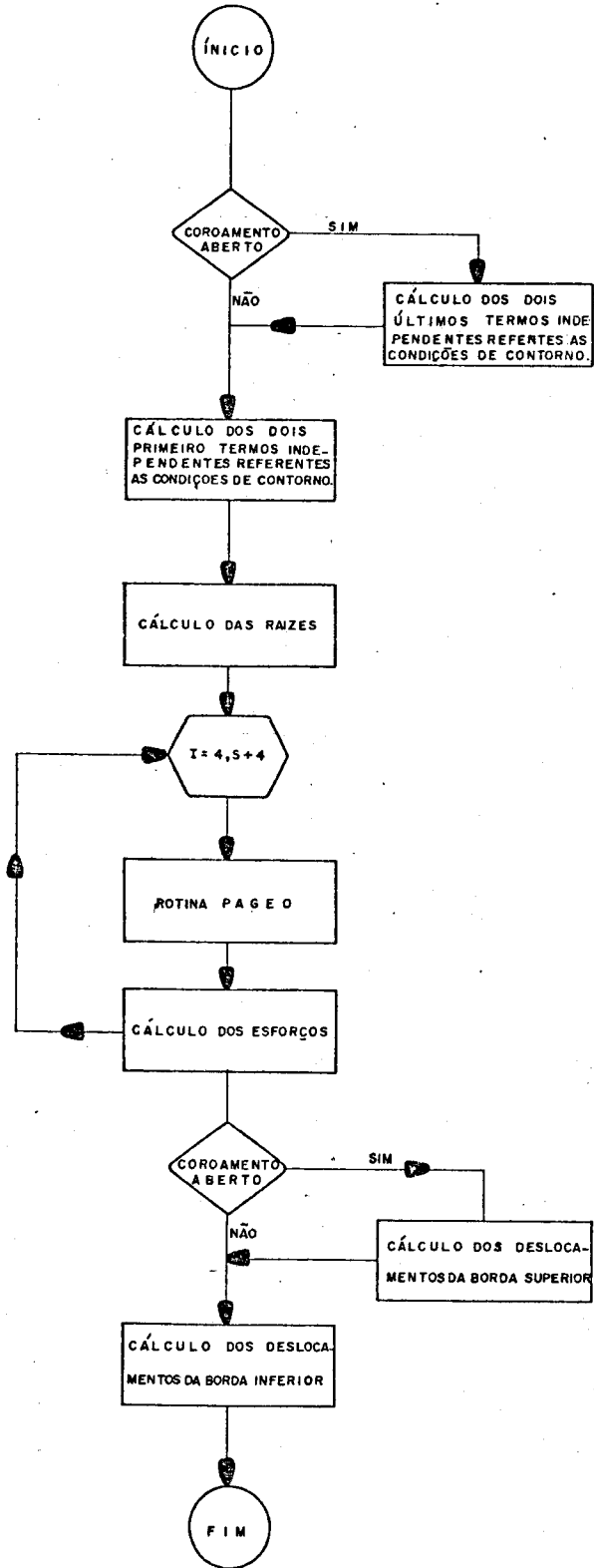
os fluxogramas das rotinas SPMMC, CDEED e do programa principal que não dependem da geometria da casca.

A listagem do programa, bem como a saída dos resultados, são apresentados no apêndice (APÊNDICE II - LISTAGEM), para um elipsóide de revolução com abertura superior e variação linear de espessura (Fig. 6.104).

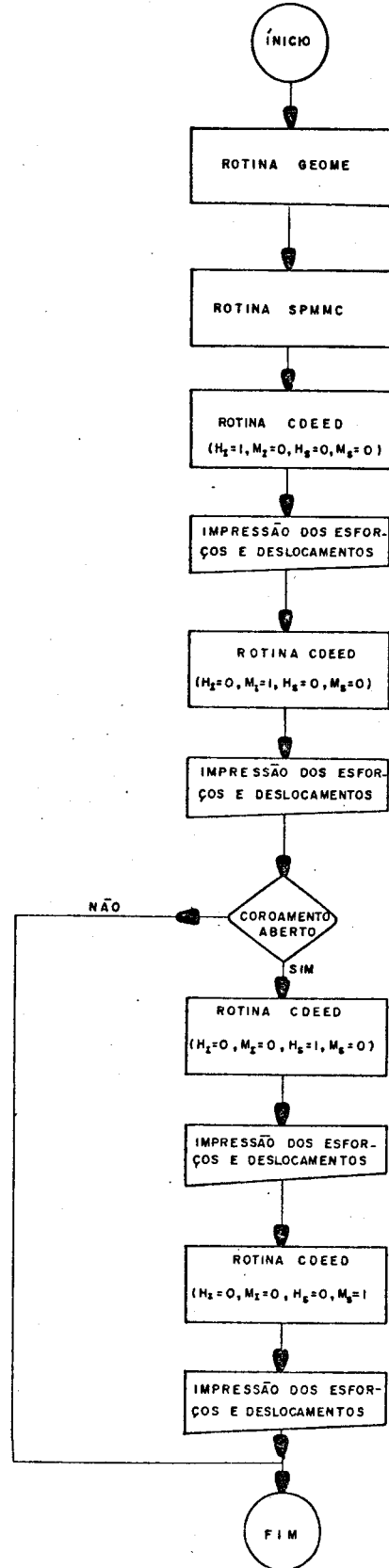
ROTINA SPMMC



ROTINA CDEED



PROGRAMA PRINCIPAL



5. - EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

O objetivo deste capítulo é fazer comparações dos resultados que se obtêm com a utilização das soluções apresentadas anteriormente, para o cálculo de estrutura em casca, em regime de flexão. Foram apresentadas as seguintes soluções:

Soluções analíticas

- Solução mediante séries hipergeométricas
- Solução de Geckeler para casca esférica de espessura constante.
- Solução de Geckeler para casca de revolução com meridiano qualquer e espessura variável.
- Aproximação de Hanna.

Soluções mediante diferenças finitas

- Discretização a. (Aplicação das diferenças finitas DF-1, sobre o sistema de equações (1.241) e (1.242)).
- Discretização b. (Aplicação das diferenças finitas DF-2, sobre o sistema de equações (1.241 e 1.242)).
- Discretização c. (Aplicação das diferenças finitas DF-2, sobre a equação (1.248)).

Foram efetuadas 4 experimentações numéricas, e resultaram deste estudo, tabelas e diagramas que poderão orientar na escolha da solução a se adotar na resolução da teoria de flexão em cada caso, conforme a precisão que se desejar.

Na confecção destas tabelas, que são apresentadas no Apêndice I, foram escolhidos os pontos mais representativos, ou seja, uma concentração maior de pontos juntos à borda e espaçamento maior de pontos à medida que se afasta da borda, pois os esforços provenientes das perturbações locais amortecem à medida que se afasta da borda.

Estas experimentações foram feitas, solicitando a borda da casca por força horizontal unitária e por momento unitário, uniformemente distribuídos no contorno, aplicados separadamente.

5.1 - Experimentação 1 - Casca esférica de espessura constante ($a/h = 300$) com ângulo do contorno inferior $\phi_0 = 30^\circ$, coroamento fechado, calculada mediante:

- a) séries hipergeométricas com 500 termos (tomada como padrão);
- b) solução de Geckeler;
- c) diferenças finitas usando a discretização a, com $\Delta_\phi = 2^\circ$;
- d) como no caso anterior, com $\Delta_\phi = 1^\circ$;
- e) extrapolações de Richardson com c) e d);
- f) diferenças finitas, usando a discretização b, com $\Delta_\phi = 2^\circ$;
- g) como no caso anterior com $\Delta_\phi = 1^\circ$;
- h) extrapolações de Richardson com f) e g);

- i) diferenças finitas, usando a discretização \underline{c} , com $\Delta_\phi = 2\varphi$;
- j) como no caso anterior, com $\Delta_\phi = 1\varphi$;
- l) como no caso anterior, com $\Delta_\phi = 0,5\varphi$;
- m) extrapolações de Richardson com i) e j);
- n) extrapolação de Richardson com j) e l);
- o) extrapolações de Richardson com i), j) e l);

Apresentam-se nas tabelas 1.1 a 1.9 (Apêndice I) os resultados dos esforços N_ϕ , N_θ , M_ϕ , M_θ e dos deslocamentos da borda. Não se apresenta o esforço Q_ϕ porque, para efeito de precisão, é idêntico a N_ϕ .

Seguem algumas observações e conclusões de análise dos resultados desta experimentação.

- Convergência monotônica dos valores obtidos com as diferenças finitas, quando se reduz a malha, sendo portanto possível aplicar as extrapolações de Richardson.

- Como era esperado, os resultados obtidos com as DF-2 são melhores do que os obtidos com as DF-1, justificando plenamente o trabalho adicional.

- O efeito produzido pelas extrapolações de Richardson é maior para as DF-1 do que para as DF-2.

- Os resultados obtidos com as diferenças finitas melhoram ao afastar-se da borda, pois as funções a aproximar tornam-se mais suaves.

- Os resultados obtidos com a discretização \underline{b} e com a discretização \underline{c} são bem próximos quanto aos momentos M_ϕ e M_θ , porém os resultados para os esforços N_ϕ e N_θ são melhores com a discretização \underline{b} .

- Apesar da observação anterior, é mais vantajoso usar a discretização c, pelo menor tempo de computação, visto que a ordem do sistema de equações a ser resolvido é aproximadamente a metade da ordem do sistema correspondente à discretização b.

- Ainda que com a discretização c se tenha $D_{12} \neq D_{21}$, os dois valores convergem à medida que se refina a malha. A razão desta discrepância (pois se deveria ter $D_{12} = D_{21}$) é que D_{21} é proveniente da solução do sistema e D_{12} é proveniente de uma derivada terceira.

- Da análise dos resultados de malhas com número de derivações proporcionais a 1, 2 e 4, com a discretização c, observa-se que os valores extrapolados com as duas primeiras malhas não são melhores que os resultados obtidos com a terceira malha.

- Para uma melhor visualização dos erros cometidos, apresentam-se plotados nos diagramas 1.1 a 1.12, os erros para os esforços N_θ e M_ϕ (a partir das citadas tabelas 1.1 a 1.9, do apêndice I). Estes erros são definidos pelas expressões:

$$E = \frac{|v_e| - |v_a|}{|\max v_e|} \quad \text{se } v_e \text{ e } v_a \text{ tiverem o mesmo sinal}$$

$$E = \frac{|v_e - v_a|}{|\max v_e|} \quad \text{se } v_e \text{ e } v_a \text{ tiverem sinais diferentes}$$

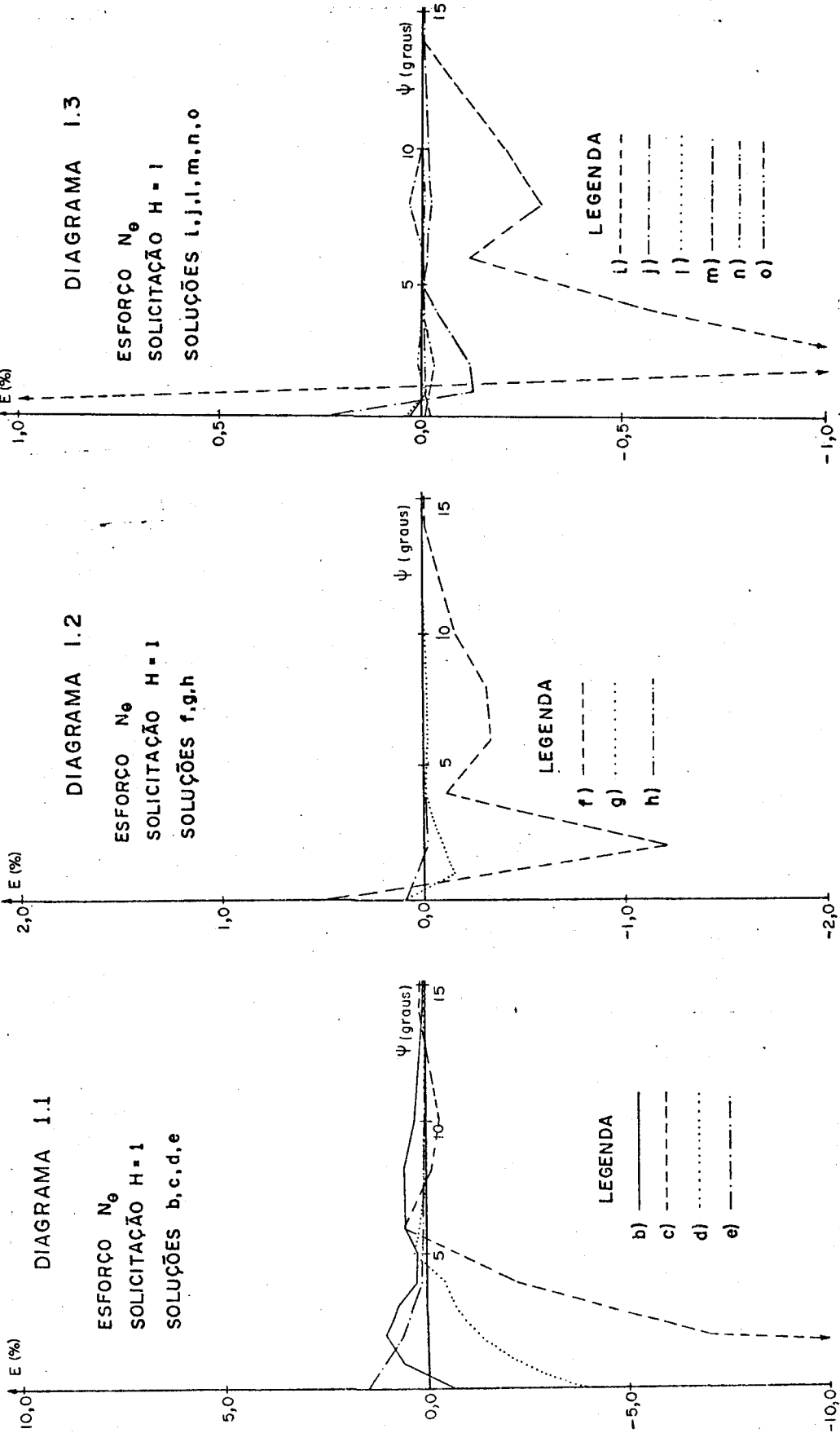
onde

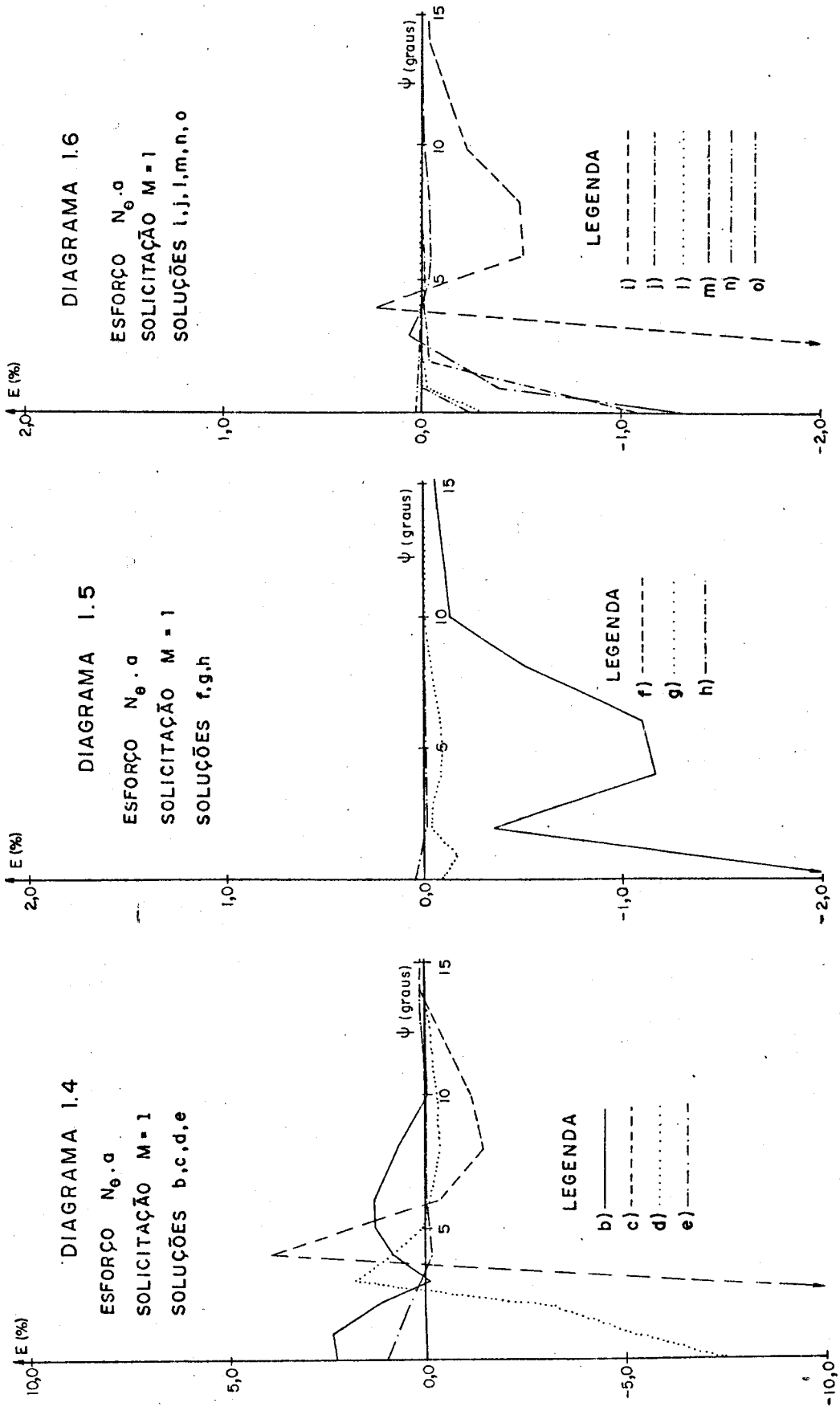
v_e é o valor tomado como padrão

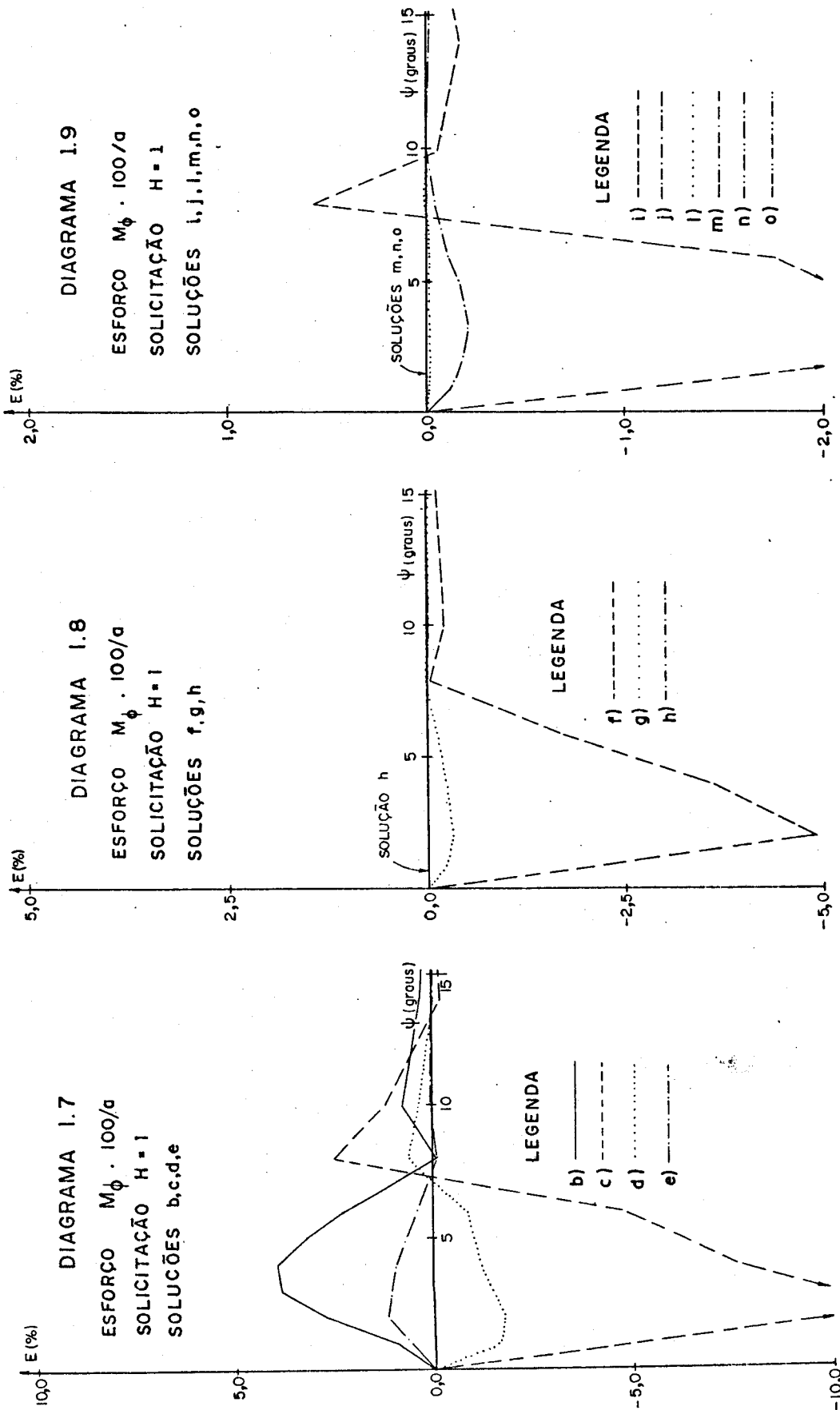
V_a é o valor aproximado,
 $\max V_e$ é o máximo valor padrão.

Com isto, para valores de $E > 0$ tem-se erros por falta, e para valores de $E < 0$ erros por excesso.

A razão de se usar, no denominador da expressão do erro, o máximo valor do intervalo é para não dar muita importância a porcentagem de erro grandes, quando afetam valores pequenos dos esforços considerados.







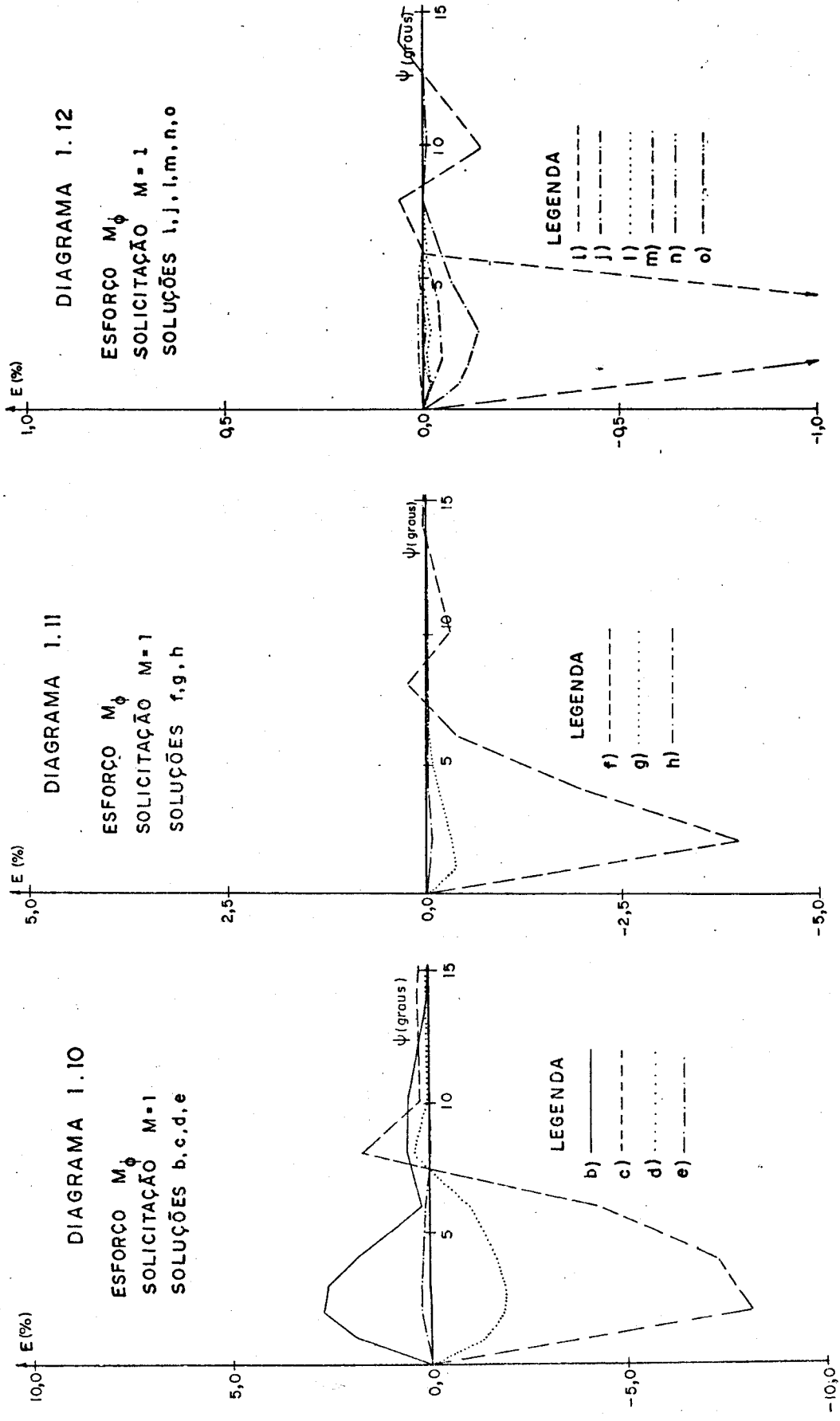


DIAGRAMA 1.12
ESFORÇO M_ϕ
SOLICITAÇÃO $M=1$
SOLUÇÕES l,j,i,m,n,o

DIAGRAMA 1.11
ESFORÇO M_ϕ
SOLICITAÇÃO $M=1$
SOLUÇÕES f,g,h

DIAGRAMA 1.10
ESFORÇO M_ϕ
SOLICITAÇÃO $M=1$
SOLUÇÕES b,c,d,e

5.2 - Experimentação 2 - Cascas esféricas de espessura constante, coroamento fechado, e com as seguintes características:

| espessura | ϕ_0 |
|-----------|----------|
| a/20 | 40° |
| a/500 | 40° |
| a/20 | 20° |
| a/500 | 20° |

Estas cascas foram escolhidas de forma a cobrirem, quanto ao ângulo no contorno e quanto a espessura, o intervalo mais usual nas cascas esféricas de concreto.

O cálculo destas cascas foi feito mediante:

- séries hipergeométricas (padrão);
- solução de Geckeler (aproximada).

Os resultados obtidos para os esforços N_θ , M_ϕ e para os deslocamentos na borda, são apresentados nas tabelas 2.1 a 2.5 do apêndice I. Os erros, definidos na experimentação anterior, são apresentados nos diagramas 2.1 e 2.2.

O objetivo desta experimentação é verificar numericamente os limites de aplicabilidade da solução de Geckeler, muito mais acessível que a solução exata mediante séries hipergeométricas.

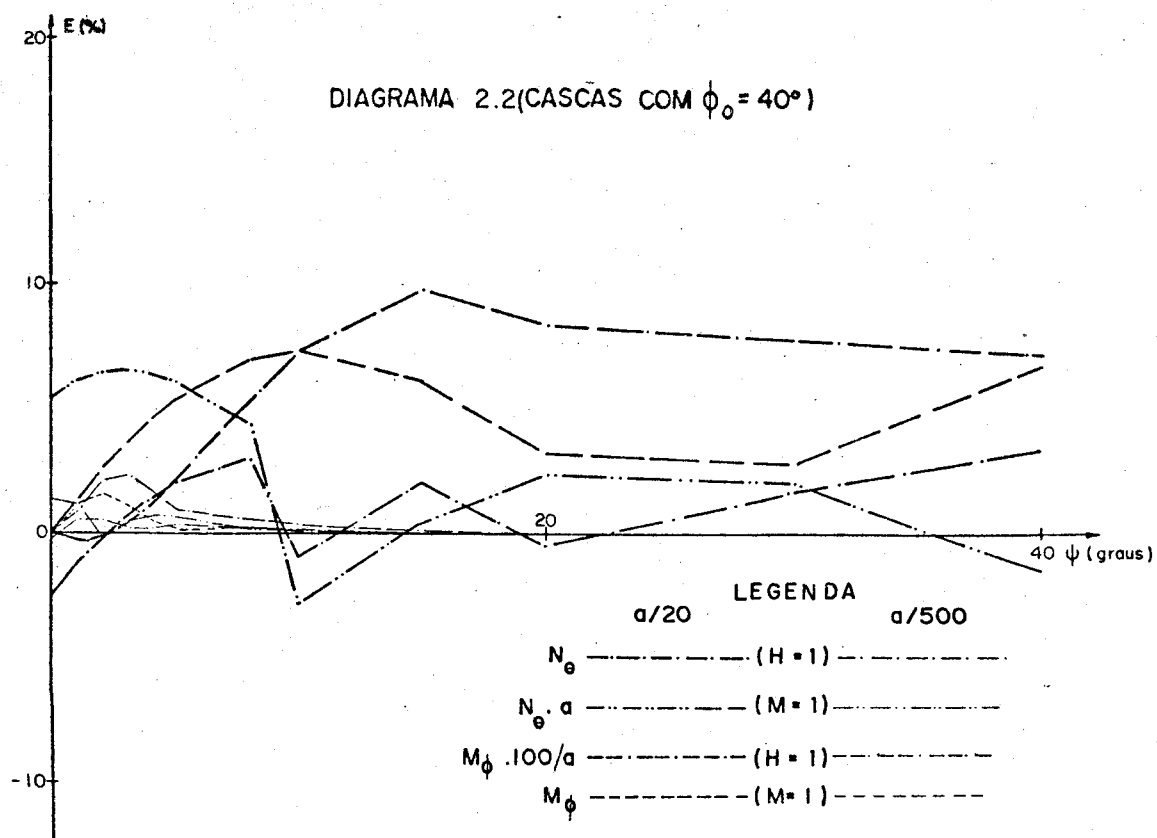
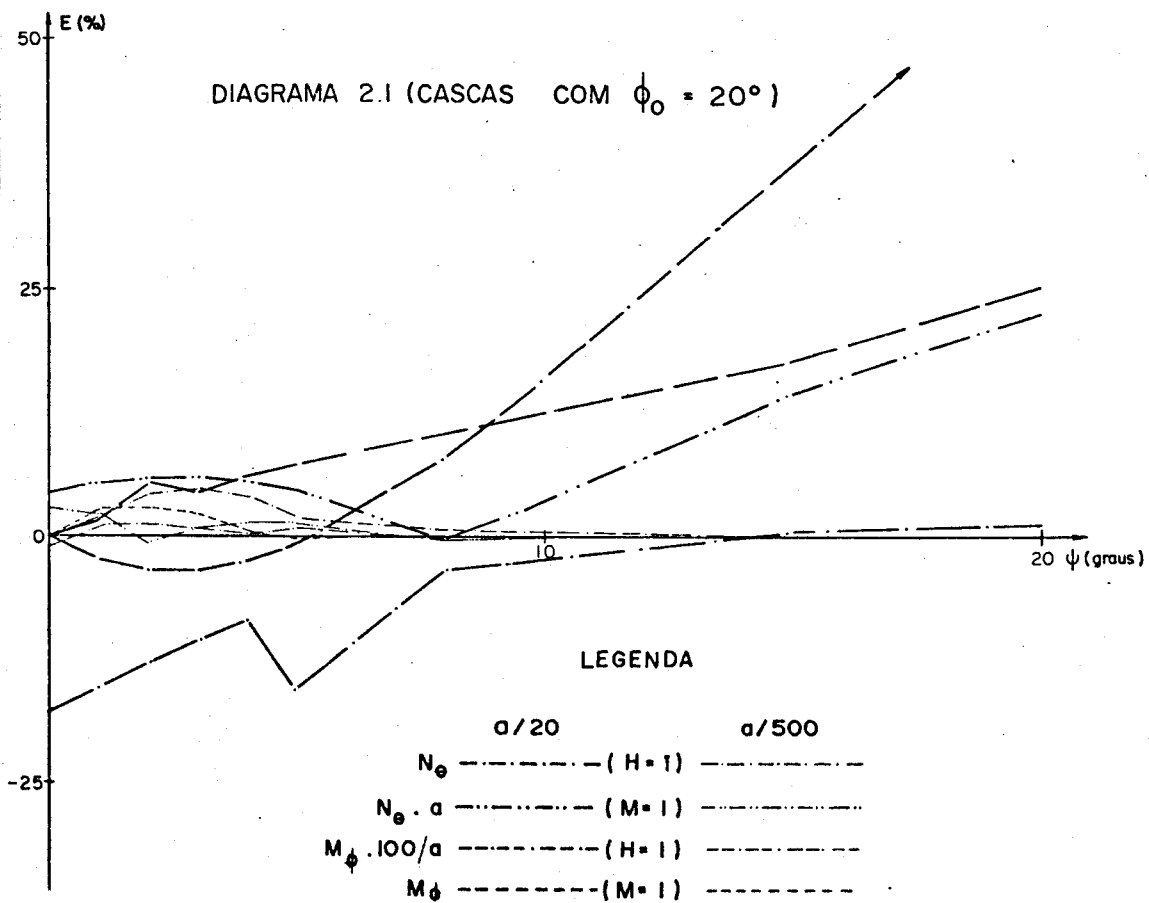
Seguem algumas observações e conclusões desta experimentação.

- Nas cascas com $a/h=20$ as perturbações não se restringem a uma pequena região, como nas cascas finas, em que os efeitos da borda amortecem rapidamente.

- Nas cascas menos delgadas ($a/h = 20$) aparece um erro na solução mediante séries hipergeométricas, pois, aplicando um momento unitário uniformemente distribuído na borda, tem-se para $\psi = 1^\circ$, $M_\phi > 1,0$. Nota-se ainda que se

está em torno do limite de aplicação da teoria das cascas delgadas.

- É difícil delimitar, com generalidade, uma faixa em que a solução de Geckeler possa ser utilizada, ainda mais que tal faixa está intimamente ligada ao conceito de segurança da estrutura e também às dimensões da obra. Para esta opção de utilizar ou não a solução aproximada de Geckeler espera-se que os diagramas dos erros e as tabelas sejam um bom ponto de apoio.



5.3 Experimentação 3 - Cascas esféricas de espessura variável, coroamento fechado, com as seguintes características:

| casca | ϕ_o | ϕ_h | h_o/a | h_c/a | h_f/a |
|-------|----------|----------|---------|---------|---------|
| 1 | 20° | 12° | 0.004 | 0.0015 | 0.00353 |
| 2 | 20° | 4° | 0.030 | 0.0100 | 0.02493 |
| 3 | 40° | 30° | 0.004 | 0.0015 | 0.00362 |
| 4 | 40° | 15° | 0.060 | 0.0300 | 0.05404 |

onde os termos citados são (Fig. 2.301):

ϕ_o é o ângulo ϕ do contorno inferior

ϕ_h é o ângulo ϕ até onde varia a espessura

h_o é a espessura da casca na borda

h_c é a espessura da casca que permanece constante

h_f é a espessura fictícia com a qual são calculados os esforços e deslocamentos em regime de flexão, conforme aproximação de Hanna.

O cálculo destas cascas foi feito mediante:

- solução de Geckeler, para casca esférica de espessura fictícia constante h_f (Aproximação de Hanna);
- solução de Geckeler, para casca de revolução de meridiano qualquer e espessura variável;
- diferenças finitas, usando a discretização c , com $\Delta_\phi = 2^\circ$ e $\Delta_\phi = 1^\circ$ para as cascas com $\phi_o = 40^\circ$ e $\phi_o = 20^\circ$, respectivamente;
- como no item anterior, com $\Delta_\phi = 1^\circ$ e $\Delta_\phi = 0,5^\circ$ para as cascas com $\phi_o = 40^\circ$ e $\phi_o = 20^\circ$, respectivamente;
- extrapolação de Richardson com c) e d).

Nesta experimentação, visava-se averiguar a precisão das soluções a) e b). Como padrão, na falta de solução analítica precisa, tomou-se a solução mediante diferenças finitas. Para tanto, elaboraram-se as soluções c) e d), cujo confronto permitiu verificar a boa convergência das di

ferências empregadas, e tomou-se como padrão o correspondente valor extrapolado segundo Richardson (solução e).

Apresentam-se, nas tabelas 3.1 a 3.9, do apêndice I, os resultados obtidos para os esforços N_θ e M_ϕ e para os deslocamentos na borda, e, nos diagramas 3.1 a 3.4, os erros conforme definição anterior, tomando como padrão os já citados resultados de e).

Seguem algumas observações e conclusões da experimentação:

- Fixou-se variação linear da espessura em função do ângulo ϕ ;

- A casca 1 foi calculada com b) (solução de Gekeler para casca de revolução de meridiano qualquer e espessura variável), com $\Delta_\phi = 1^\circ$ e $\Delta_\phi = 0,5^\circ$. Como os resultados foram bem próximos, as demais cascas foram calculadas apenas com $\Delta_\phi = 1^\circ$, porque de nada adiantaria refinar a malha para esse tipo de solução;

- Além dos erros serem maiores nas cascas menos delgadas do que nas cascas mais delgadas, eles não se restringem somente à proximidade da borda.

- Os erros são maiores nas cascas com $\phi_0 = 20^\circ$ (menor relação flecha sobre raio) do que nas cascas com $\phi_0 = 40^\circ$ (maior relação entre a flecha e o raio).

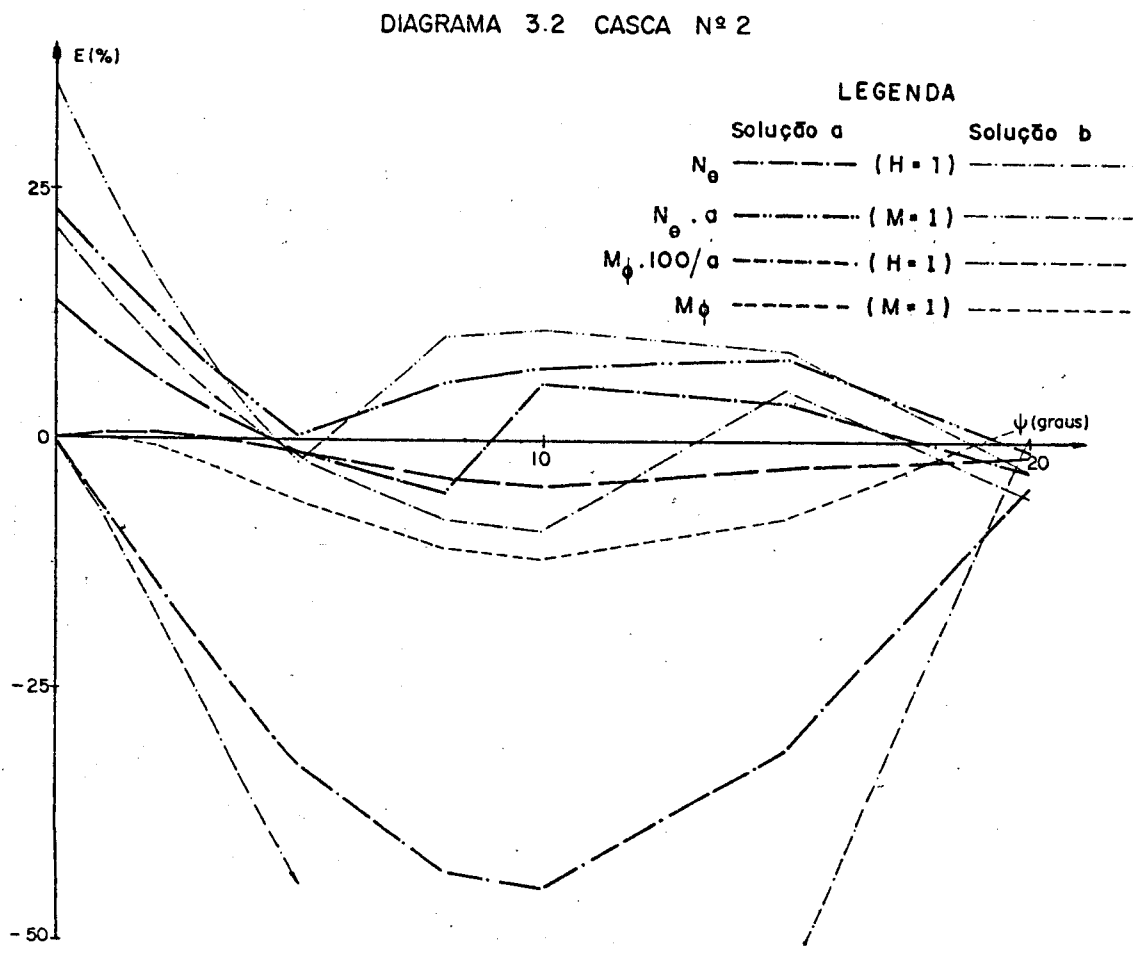
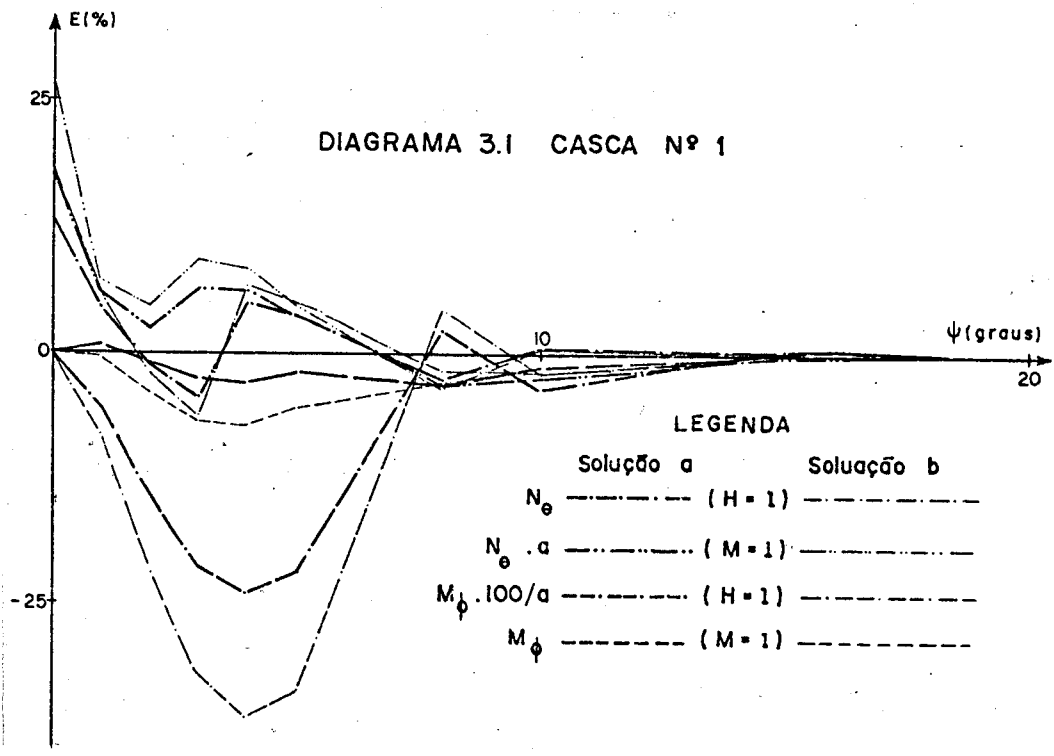
- Conforme mostram os diagramas de erros, tem-se duas situações notáveis nas duas soluções aproximadas a) e b):

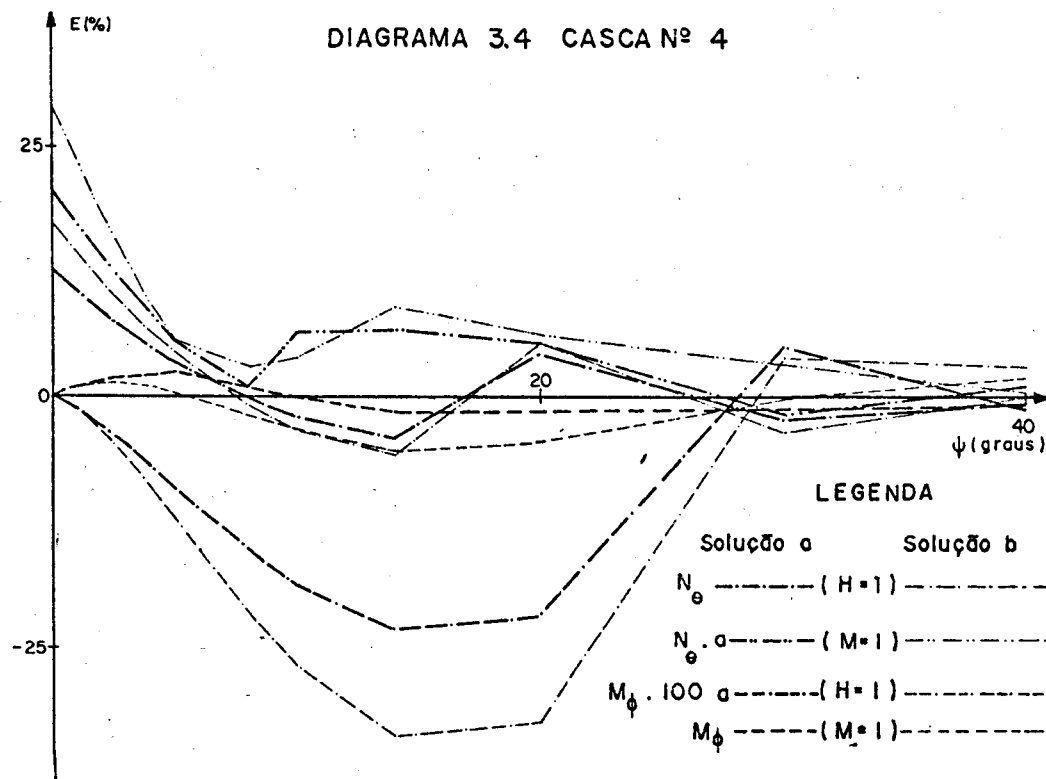
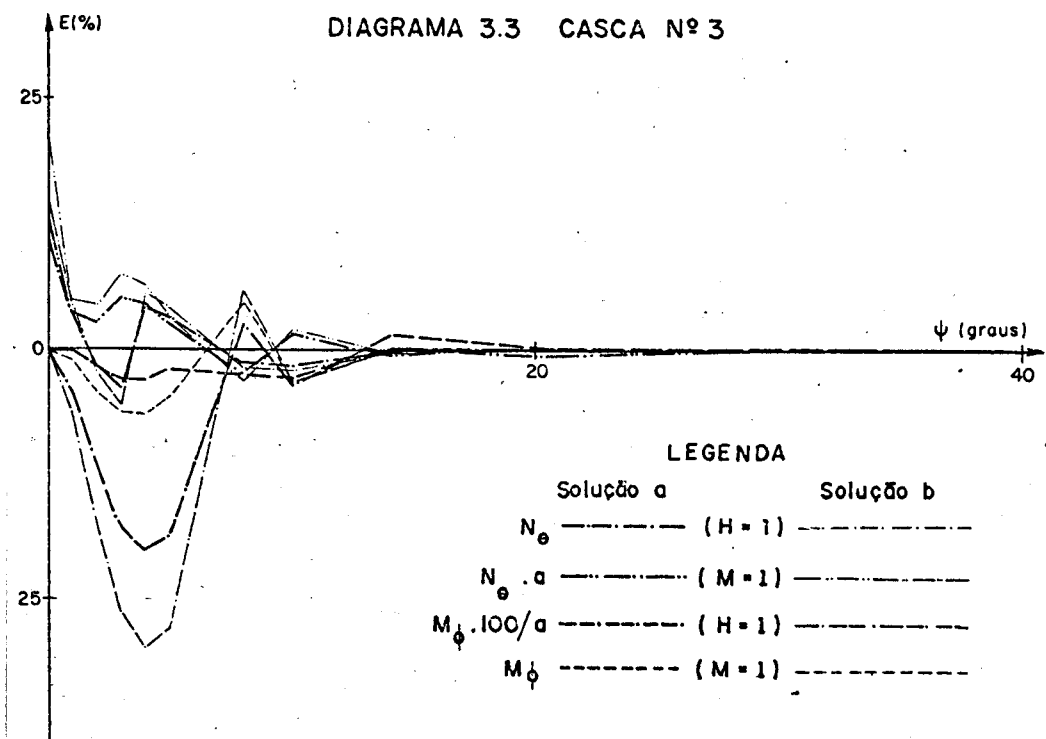
1a.) na região mais próxima à borda, erros por falta, no esforço N_θ ;

2a.) numa região pouco afastada da borda, erros por excesso, no esforço M_ϕ .

- Poder-se-ia pensar que a solução b) fornecesse aproximações muito melhores que a solução a). Ao contrário, a experimentação mostra que a solução b), apesar de muito mais trabalhosa, forneceu resultados sempre piores que os de a), quer quanto aos esforços, quer quanto aos deslocamen

tos na borda, sendo que para estes últimos os resultados obtidos com a) estão bem próximos dos obtidos com as diferenças finitas.





5.4 - Experimentação 4: Cascas elipsoidais de espessura constante, coroamento fechado, com as seguintes características:

| casca | h/a | ϕ_0 | η |
|-------|-------|----------|--------|
| 1 | 1/300 | 30° | 2 |
| 2 | 1/300 | 30° | 3 |
| 3 | 1/300 | 60° | 3 |

onde h é a espessura da casca

ϕ_0 é o ângulo ϕ do contorno inferior

η é a relação entre os semi-eixos, da elipse geratriz do elipsóide (Fig.6.102).

O cálculo destas cascas foi feito mediante:

- solução de Geckeler para casca de revolução de meridiano qualquer e espessura variável;
- diferenças finitas, usando a discretização c , com $\Delta_\phi = 2^\circ$;
- como no item anterior, com $\Delta_\phi = 1^\circ$;
- extrapolação de Richardson com b) e c).

Encontram-se nas tabelas 4.1 a 4.7 do apêndice I os resultados obtidos para os esforços N_θ e M_ϕ e para os deslocamentos no contorno e, nos diagramas 4.1 a 4.3, os erros conforme definição anterior. Aqui, como no caso anterior, as duas soluções mediante diferenças finitas evidenciaram para $\Delta_\phi = 1^\circ$ a boa convergência dos resultados, permitindo, portanto, que se tomassem como padrão os valores obtidos com d).

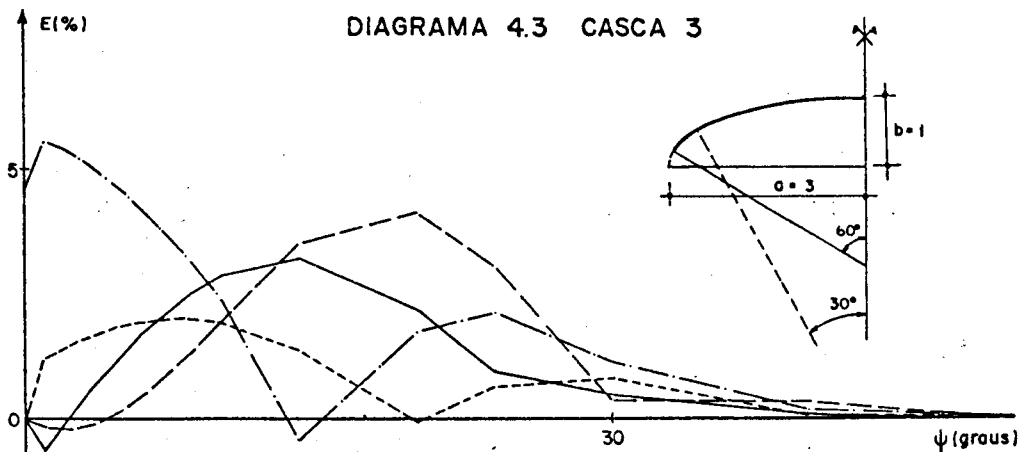
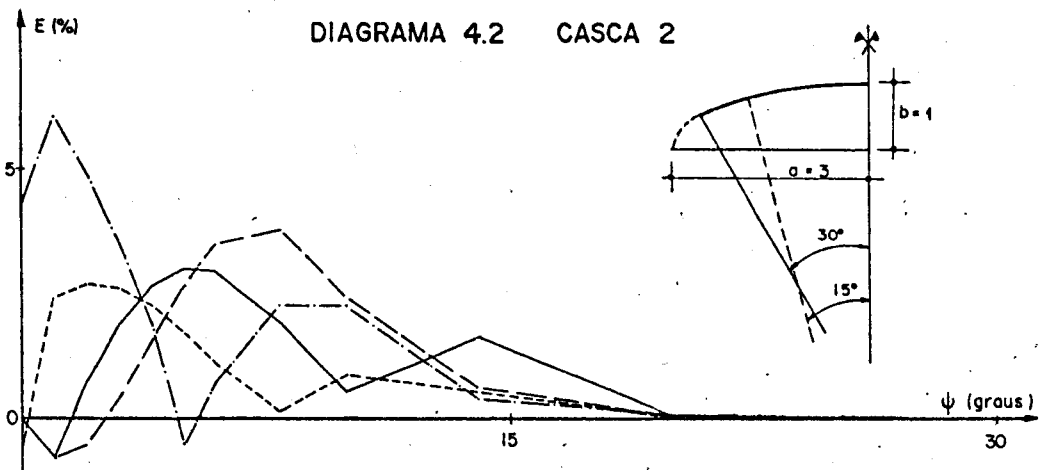
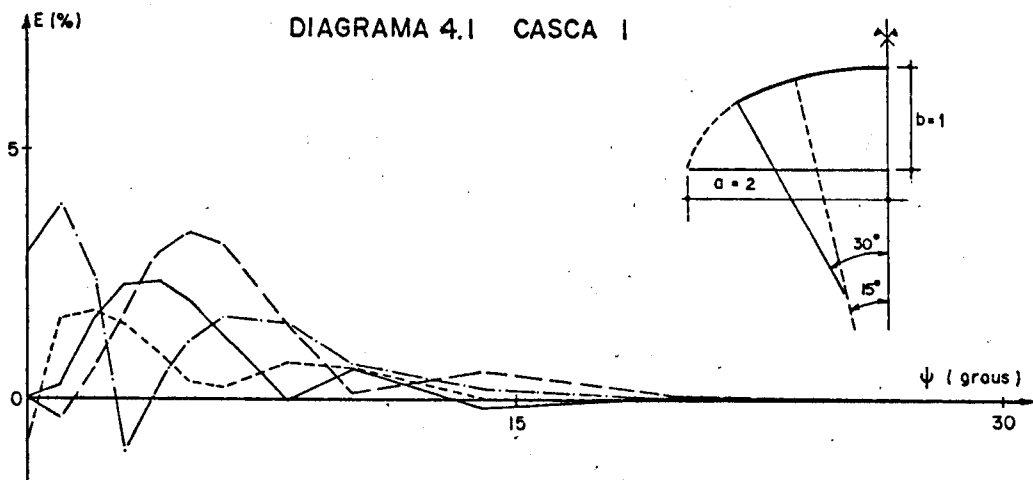
O objetivo desta experimentação é verificar a aplicabilidade da solução aproximada de Geckeler, para casca de revolução de meridiano qualquer e variação de espessura, no caso de casca elipsoidal de espessura constante, na qual se tem apenas a variação dos raios de curvatura.

Os resultados reunidos nas tabelas e diagramas mostram que:

- Os erros são maiores nas cascas com relação η maior, como era de se esperar;

- Na maior parte da casca, os erros são por falta;

- A solução aproximada pode ser considerada boa, visto que os maiores erros são da ordem de 5%, plenamente aceitáveis. Assim, por comparação com os resultados pouco satisfatórios obtidos na experimentação 3, para o caso de casca esférica de espessura variável, parece que a variação dos raios de curvatura do meridiano afeta a precisão menos do que a variação de espessura.



LEGENDA

- N_θ ----- H = 1
- $N_\theta \cdot a$ ----- M = 1
- $M_\phi \cdot 100/a$ ----- H = 1
- M_ϕ ----- M = 1

6. - APLICAÇÃO: RESERVATÓRIO ELEVADO COMPOSTO DE CASCAS
ELIPSOIDAIS

Desenvolve-se, neste capítulo, exemplo ilustrativo de aplicação do programa elaborado, utilizando-o para o cálculo de uma estrutura para reservatório elevado. Ao mesmo tempo, procura-se também uma primeira definição da faixa conveniente para este tipo de estrutura.

A estrutura tomada para exemplo é um reservatório elevado que consta de casca de cobertura elipsoidal, anel de rigidez e casca recipiente também elipsoidal (Fig. 6.101). Como simplificação perfeitamente aceitável, ainda mais diante dos objetivos do estudo, a casca recipiente foi considerada engastada no topo da torre, em vista da grande rigidez deste, para a qual concorre decisivamente a laje de fundo do reservatório. Conseqüentemente, torre e laje não foram calculados.

No cálculo deste reservatório, foram consideradas as ações correspondentes a:

- peso próprio
- água (reservatório cheio de água até a casca de cobertura)
- temperatura (variação uniforme de temperatura na casca de cobertura)

A ação do vento sobre o reservatório é considerável apenas na torre e na sua junção com a casca recipiente. Esta ação porém não irá interferir nas conclusões posteriores que são apresentadas no fim do capítulo, e não é considerada no cálculo, mesmo porque se trata de carregamento assimétrico.

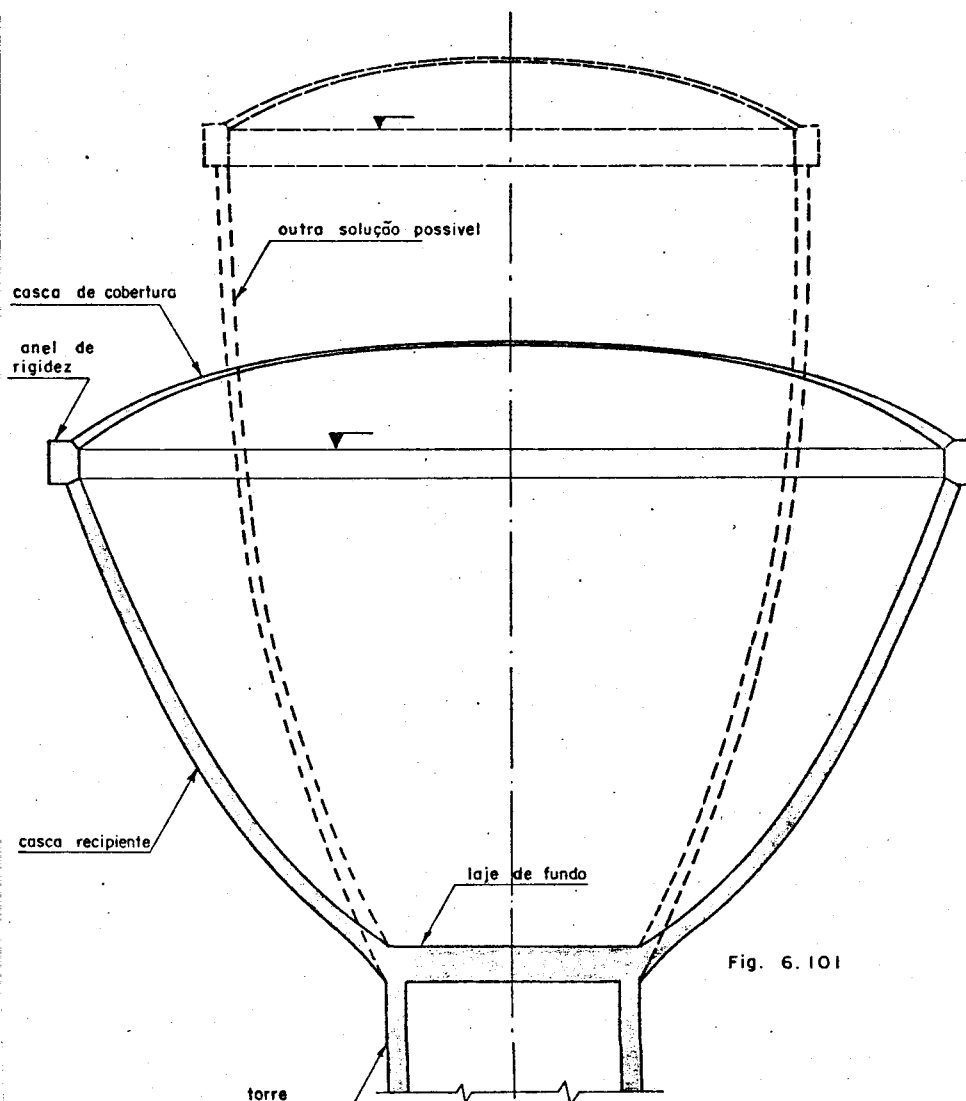


Fig. 6.101

6.1- Desenvolvimento teórico

6.11. -- Geometria da casca elipsoidal

Os raios principais de curvatura são obtidos com as expressões (1.121) e (1.122), válidas tanto para o caso em que o eixo de rotação contém o semi-eixo menor da elipse (Fig.6.102-a), como para o caso em que o eixo de rotação contém o semi-eixo maior (Fig.6.102-b).

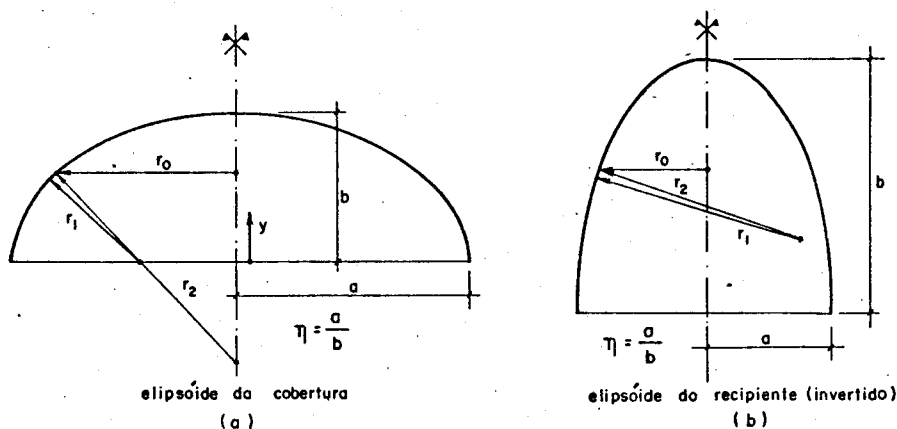


Fig. 6.102

Para a casca de cobertura, admitindo uma variação linear da espessura com o ângulo ϕ , (Fig.6.103), tem-se

$$h' = m'\phi + n' \quad (6.101)$$

onde

$$m' = \frac{h_o - h_c}{\phi_o - \phi_h}; \quad n' = - \frac{h_o - h_c}{\phi_o - \phi_h} \phi_h \quad (6.102-a,b)$$

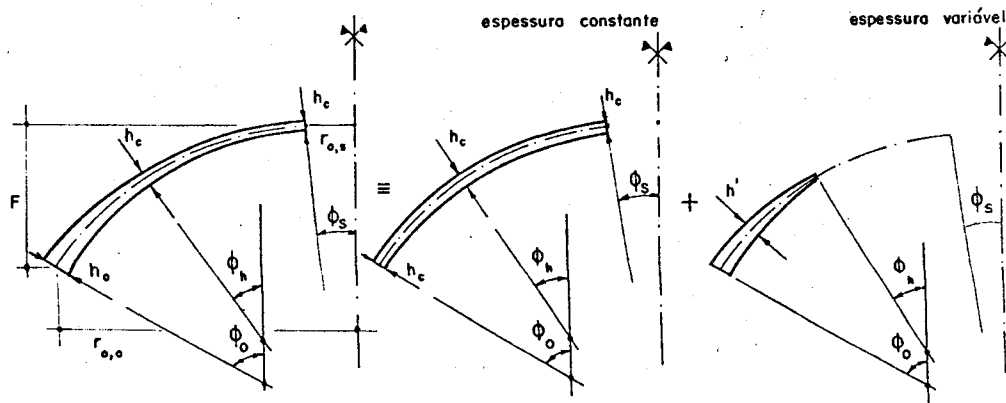


Fig. 6.103

Para a casca recipiente, admitindo também decréscimo linear da espessura com o ângulo ϕ , a partir da borda superior (Fig. 6.104), tem-se

$$h' = m'\phi + n'$$

onde

$$m' = \frac{h_o - h_c}{\phi_s - \phi_h}, \quad n' = -\frac{h_o - h_c}{\phi_s - \phi_h} \phi_h \quad (6.103-a, b)$$

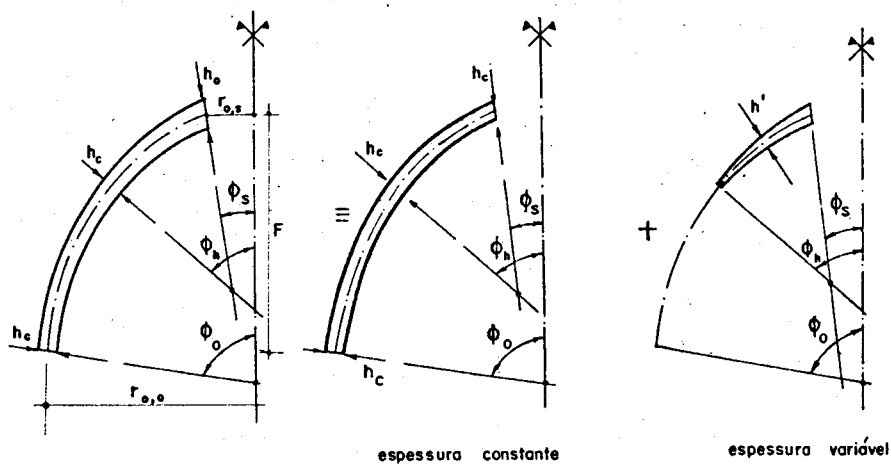


Fig. 6.104

6.12 - Cálculo do regime de membrana

Para o cálculo dos esforços e deslocamentos devidos ao peso próprio na casca de cobertura foram considerados dois carregamentos distintos: cargas devidas à espessura constante e cargas devidas à espessura variável.

Os esforços de membrana produzidos pelo carregamento de espessura constante são obtidos com as expressões (1.237) e (1.238), onde a resultante R vale

$$R = \int_{\phi_s}^{\phi} (Z \cos \phi - Y \sin \phi) 2\pi r_o r_1 d\phi \quad (6.104)$$

sendo que para o carregamento em questão (Fig. 6.105)

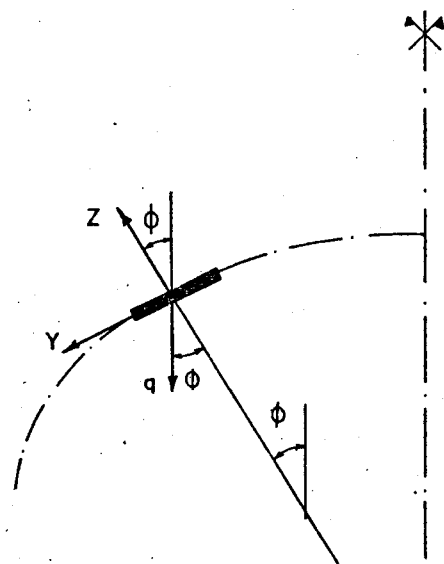


Fig. 6.105

$$Z = -q \cos \phi \quad Y = q \sin \phi \quad (6.105-a, b)$$

onde

$$q = \gamma_c h_c \quad (\gamma_c - \text{peso específico do concreto})$$

Introduzindo (6.105-a, b) em (6.104), obtêm-se

$$R = -q 2\pi \int_{\phi_s}^{\phi} r_o r_1 d\phi$$

Introduzindo as expressões de r_o (1.120) e de r_1 (1.121), vem

$$R = -q \cdot 2\pi a^2 \eta^2 \int_{\phi_s}^{\phi} \frac{\sin \phi}{[\eta^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi]^2} d\phi \quad (6.106)$$

Cálculo numericamente a integral (Simpson), determinam-se os esforços \bar{N}_ϕ e \bar{N}_θ . Obtidos os esforços, pode-se, então, determinar o deslocamento horizontal $\bar{\delta}$ e a variação da inclinação da tangente $\bar{\chi}$, a partir das expressões (1.239) e (1.240), respectivamente. Desenvolvendo o segundo termo da expressão (1.240), tem-se

$$\frac{1}{r_1} \left(\frac{\dot{\bar{\delta}}}{\sin \phi} \right) = \frac{1}{r_1 \sin \phi} \left\{ \frac{1}{E} \left[\frac{r_o}{h} (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\phi) + (\bar{N}_\theta - \nu \bar{N}_\phi) \frac{h \dot{r}_o - r_o \dot{h}}{h^2} \right] + \right. \\ \left. - \delta \cot \phi \right\} \quad (6.107)$$

Deduz-se também que

$$\begin{aligned} \dot{N}_\theta = & -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{r_1 \text{sen}^2\phi \dot{R} - R(\dot{r}_1 \text{sen}^2\phi + 2r_1 \text{sen}\phi \cos\phi)}{(r_1 \text{sen}^2\phi)^2} \right] + \\ & + \frac{\text{sen}\phi (\dot{Z}r_0 + \dot{r}_0 Z) - Zr_0 \cos\phi}{\text{sen}^2\phi} \end{aligned} \quad (6.108)$$

$$\dot{N}_\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{r_0 \text{sen}\phi \dot{R} - R(r_0 \cos\phi + \dot{r}_0 \text{sen}\phi)}{(r_0 \text{sen}\phi)^2} \quad (6.109)$$

Para o elipsóide de revolução, deduz-se que

$$\dot{r}_0 = r_1 \cos\phi \quad (6.110)$$

$$\dot{r}_1 = 3r_1 \kappa \text{sen}\phi \cos\phi / \kappa_\phi \quad (6.111)$$

e, para o carregamento em questão,

$$\dot{R} = -2\pi q r_0 r_1 \quad (6.112)$$

$$\dot{Z} = q \text{sen}\phi \quad (6.113)$$

Observa-se ainda que deve ser usada a espessura real h nas expressões (1.239) (1.240) e (6.107), e que h , devido à variação de espessura adotada, vale

$$\dot{h} = \frac{h_0 - h_c}{\phi_0 - \phi_h} \quad (6.114)$$

Os esforços de membrana produzidos pelo carregamento da variação de espessura são obtidos, analogamente, com as expressões (1.237) e (1.238), sendo que, para o carregamento em questão, tem-se

$$\sigma' = \gamma_c h' \quad (6.115)$$

Fazendo

$$m = \gamma_C m' \quad ; \quad n = \gamma_C n' \quad , \text{ tem-se}$$

$$q' = m\phi + n \quad (6.116)$$

resultando então

$$Z = -q' \cos\phi \quad e \quad Y = q' \sin\phi \quad (6.117-a, b)$$

Das expressões (6.117-a, b), (6.116) e (6.104),
obtêm-se

$$R = -2\pi a^2 \eta^2 \int_{\phi_h}^{\phi} \frac{(m\phi+n) \sin\phi}{[\eta^2 \sin^2\phi + \cos^2\phi]^2} d\phi \quad (6.118)$$

$$Z = -(m\phi+n) \cos\phi \quad (6.119)$$

Calculando numericamente a integral (Simpson),
e introduzindo as (6.118) e (6.119) em (1.237) e (1.238),
determinam-se os esforços \bar{N}_ϕ e \bar{N}_θ . Os deslocamentos $\bar{\delta}$ e $\bar{\chi}$
são obtidos como no carregamento anterior com

$$\dot{R} = -2\pi r_o r_1 (m\phi+n) \quad (6.120)$$

$$\dot{Z} = (m\phi+n) \sin\phi - m \cos\phi \quad (6.121)$$

A variação uniforme de temperatura na cúpula, em
regime de membrana, não produz esforços, nem deslocamento
 $\bar{\chi}$, produzindo apenas deslocamento horizontal, que é calculado com

$$\bar{\delta} = r_o \alpha \Delta T \quad (6.122)$$

onde α é o coeficiente de dilatação do concreto, e vale
 $10^{-5}/C^\circ$ (NB-1/60), e ΔT é a variação de temperatura adotada,
 $-15^\circ C$.

No cálculo dos esforços e deslocamentos da casca recipiente, devidos ao peso próprio, foram considerados três carregamentos: o peso próprio da cúpula e do anel; cargas devido à espessura constante; cargas devidas à espessura variável.

A casca recipiente está solicitada pelo peso próprio da cúpula mais anel, como mostra a figura (6.106-a), que é equivalente ao sistema estático, mostrado na figura (6.106-b). Chamando de V a resultante das cargas (cúpula+anel), os esforços \bar{N}_ϕ e \bar{N}_θ são obtidos com as (1.237) e (1.238), fazendo

$$R = -V \quad ; \quad Z = 0$$

e os deslocamentos são obtidos, com as expressões vistas, usando

$$\dot{R} = 0 \quad , \quad \dot{Z} = 0$$

e

$$\dot{h} = \frac{h_o - h_c}{\phi_s - \phi_h}$$

ou

$$\dot{h} = 0$$

conforme haja, ou não, variação de espessura.

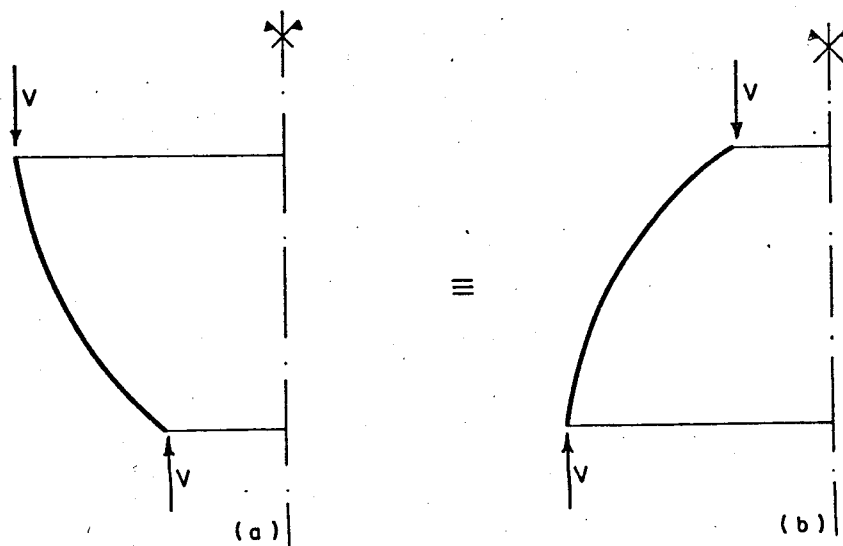


Fig.6.106

O carregamento devido à espessura constante é considerado como mostra a figura (6.107), ou seja, decomposto em duas parcelas que serão tratadas isoladamente.

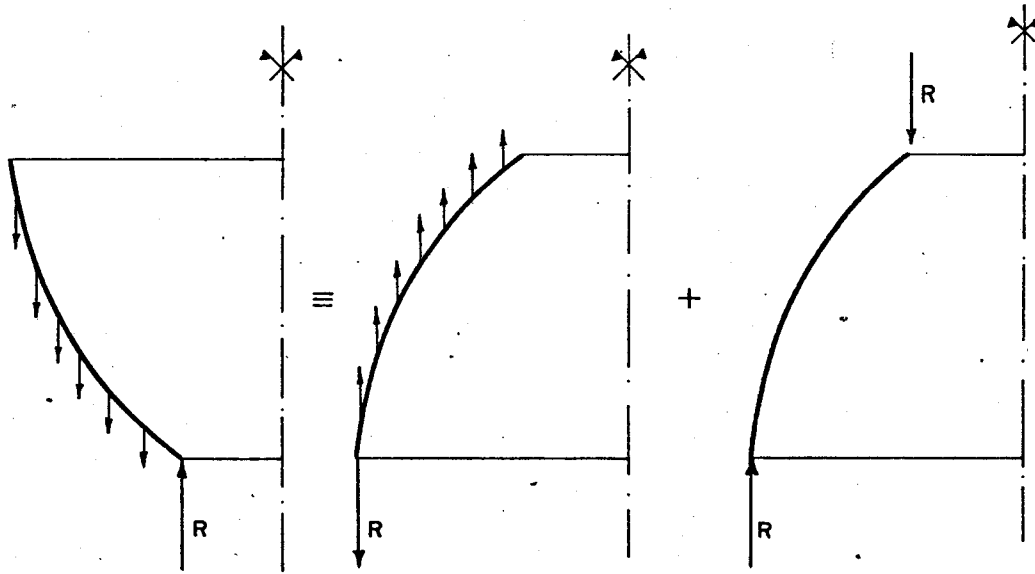


Fig. 6.107

Da análise da figura (6.108), resulta para a primeira parcela do carregamento.

$$Z = q \cos\phi \quad , \quad Y = - q \sin\phi \quad (6.123-a,b)$$

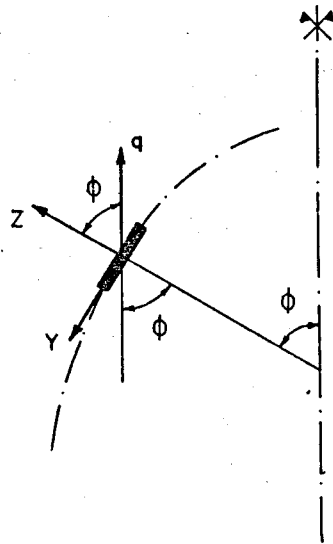


Fig. 6.108

Introduzindo (6.123-a,b) em (6.104), obtêm-se

$$R = 2\pi q a^2 \eta^2 \int_{\phi_s}^{\phi} \frac{\text{sen}\phi}{[\eta^2 \text{sen}^2\phi + \text{cos}^2\phi]^2} d\phi \quad (6.124)$$

Calculando a integral numericamente (Simpson), obtêm-se os esforços \bar{N}_ϕ e \bar{N}_θ . Os deslocamentos são obtidos com

$$\dot{R} = 2\pi q r_0 r_1 \quad (6.125)$$

$$\dot{Z} = -q \text{sen}\phi \quad (6.126)$$

Os esforços e deslocamentos provenientes da segunda parcela do carregamento são obtidos como no carregamento do peso próprio da cúpula mais anel.

De forma análoga a que foi tratado o carregamento devido à espessura constante, decompõe-se o carregamento devido à espessura variável em duas parcelas, como mostra a figura (6.109). Os esforços da primeira parcela do carregamento são obtidos com

$$R = 2\pi a^2 \eta^2 \int_{\phi_s}^{\phi} \frac{(m\phi+n) \text{sen}\phi}{[\eta^2 \text{sen}^2\phi + \text{cos}^2\phi]^2} d\phi \quad (6.127)$$

$$Z = (m\phi+n) \text{cos}\phi \quad (6.128)$$

onde $m = \gamma_c m'$ e $n = \gamma_c n'$. Os deslocamentos da primeira parcela do carregamento são obtidos com

$$\dot{R} = 2\pi r_0 r_1 (m\phi+n) \quad (6.129)$$

$$\dot{Z} = m \text{cos}\phi - (m\phi+n) \text{sen}\phi \quad (6.130)$$

O tratamento da segunda parcela já foi visto.

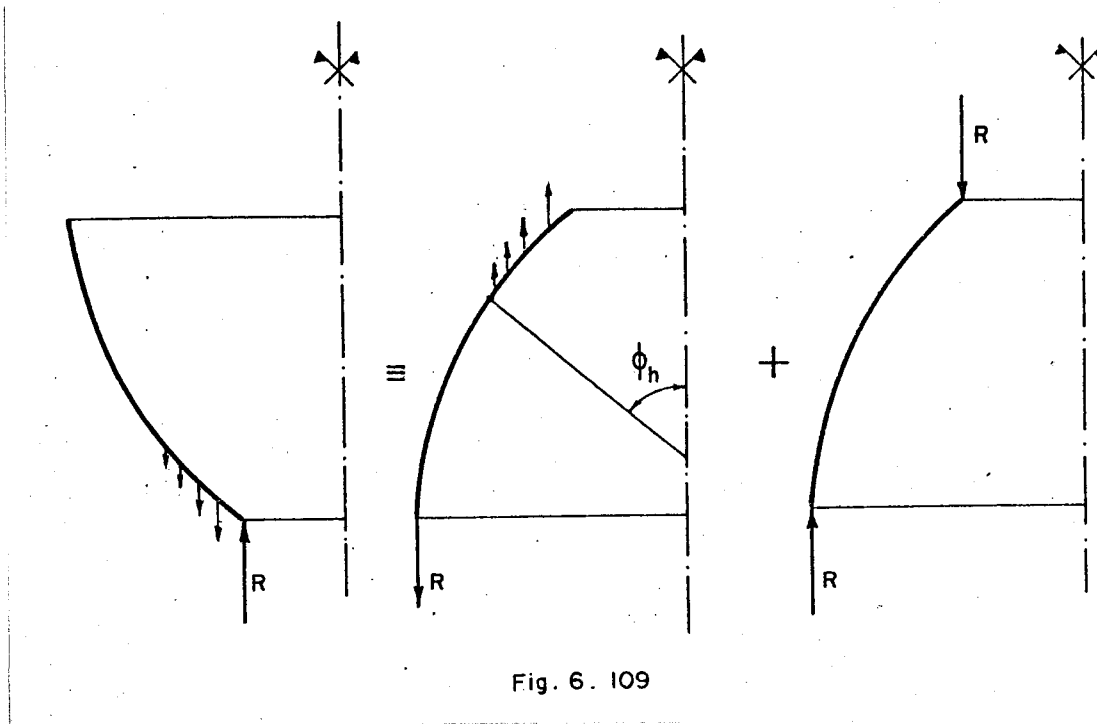


Fig. 6. 109

O efeito da água, a ser armazenada no reservatório, é considerado também, dividindo o carregamento em duas parcelas (Fig.6.110).

Para a primeira parcela do carregamento tem-se

$$Z = p \quad , \quad Y = 0 \quad (6.131-a,b)$$

onde $p = \gamma_a y$; y é altura da coluna de água e vale

$$y = \left[b^2 - \frac{r^2}{\eta^2} \right]^{1/2} - \left[b^2 - \frac{r_{O,O}^2}{\eta^2} \right]^{1/2} + y_O \quad (6.132)$$

Introduzindo (6.131-a,b) na expressão da resultante, tem-se

$$R = 2\pi a^2 \eta^2 \int_{\phi_s}^{\phi} \frac{\text{sen}\phi}{[(\eta^2 \text{sen}^2\phi + \text{cos}^2\phi)]^2} \cdot \gamma_a \cdot y \text{cos}\phi d\phi \quad (6.133)$$

e os esforços \bar{N}_ϕ e \bar{N}_θ são obtidos analogamente ao que foi visto. Os deslocamentos desta parcela são calculados com

$$\dot{R} = 2\pi r_{O,1} \gamma_a y \text{cos}\phi \quad (6.134)$$

$$\dot{z} = - \frac{\gamma_a}{\eta^2} \frac{r_0 r_1 \cos \phi}{\left[b^2 - \frac{r_0^2}{\eta^2} \right]^{1/2}} \quad (6.135)$$

Os esforços e deslocamentos da segunda parcela são obtidos como foi visto anteriormente.

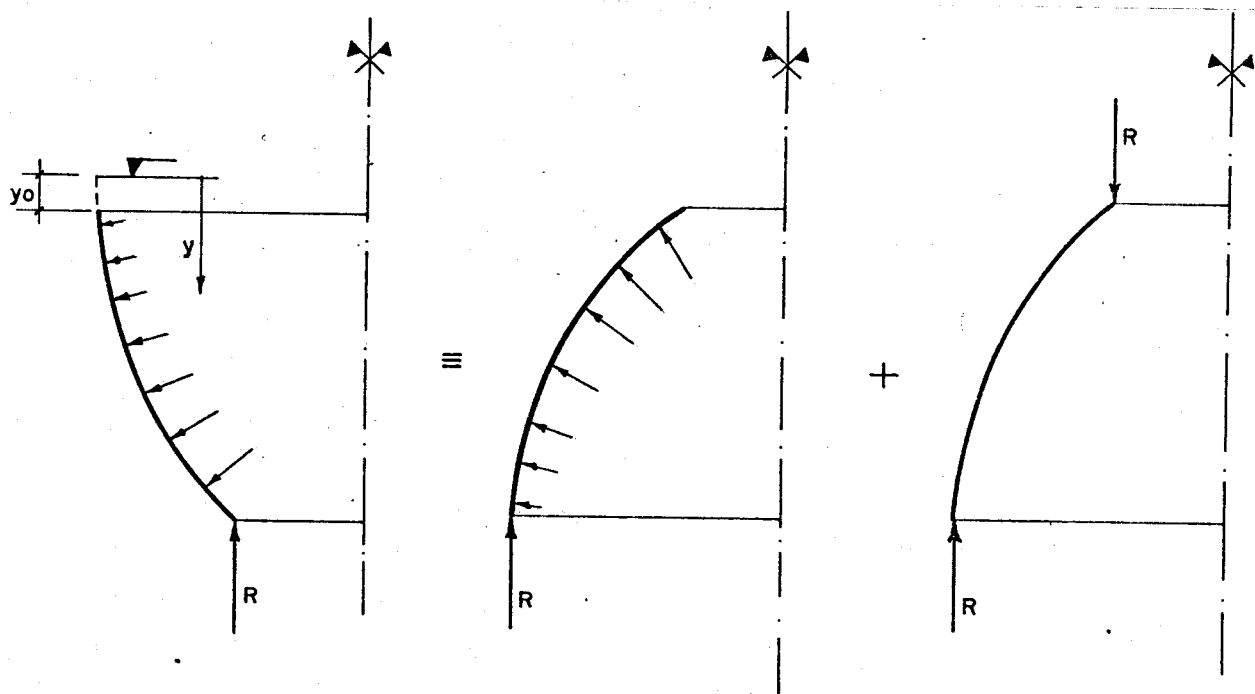


Fig. 6.110

6.13 - Cálculo do regime de flexão

Os esforços e deslocamentos das cascas (cobertura e recipiente) oriundos do regime de flexão são calculados utilizando o programa elaborado para a discretização c .

Apresentam-se, a seguir, as expressões dos parâmetros geométricos que ainda não foram vistas, para o elipsoide de revolução calculados nas rotinas GEOME e PAGEO.

$$\rho = \kappa_{\phi} \quad (6.136)$$

$$\dot{\rho} = 2\kappa \text{sen} \phi \cos \phi \quad (6.137)$$

$$\ddot{\rho} = 2\kappa (1 - 2\text{sen}^2 \phi) \quad (6.138)$$

$$\ddot{\rho} = -8\kappa \text{sen}\phi \text{cos}\phi \quad (6.139)$$

$$\ddot{r}_1 = \frac{3}{2} \frac{r_1}{\rho} \left(\ddot{\rho} - \frac{5}{2} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} \right) \quad (6.140)$$

Estes parâmetros são necessários para calcular as expressões (1.249) a (1.254)

6.14 - Cálculo do anel de borda

O estudo de anel circular de seção transversal retangular pode ser encontrado, por exemplo, em BILLINGTON (B2). No caso em questão (Fig. 6.111), os coeficientes elásticos do anel, D_{ij}^A (deslocamento i (Fig. 6-112-b), produzido por esforço unitário j (Fig. 6-112-a)), valem:

$$D_{11}^A = - \frac{r}{E} \left[\frac{r}{A} + \frac{12y_{os}^2}{d^3 \ln(1+b/r)} \right] \quad (6.141)$$

$$D_{12}^A = D_{21}^A = - D_{14}^A = - D_{41}^A = \frac{12ry_{os}}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \quad (6.142)$$

$$D_{13}^A = D_{31}^A = - \frac{r}{E} \left[\frac{r}{A} - \frac{12y_{oi}y_{os}}{d^3 \ln(1+b/r)} \right] \quad (6.143)$$

$$D_{22}^A = - D_{24}^A = D_{42}^A = - D_{44}^A = - \frac{12r}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \quad (6.144)$$

$$D_{23}^A = D_{32}^A = - D_{34}^A = D_{43}^A = - \frac{12ry_{oi}}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \quad (6.145)$$

$$D_{33}^A = - \frac{r}{E} \left[\frac{r}{A} + \frac{12y_{oi}^2}{d^3 \ln(1+b/r)} \right] \quad (6.146)$$

onde A é a área da seção transversal, e r é o raio interno do anel.

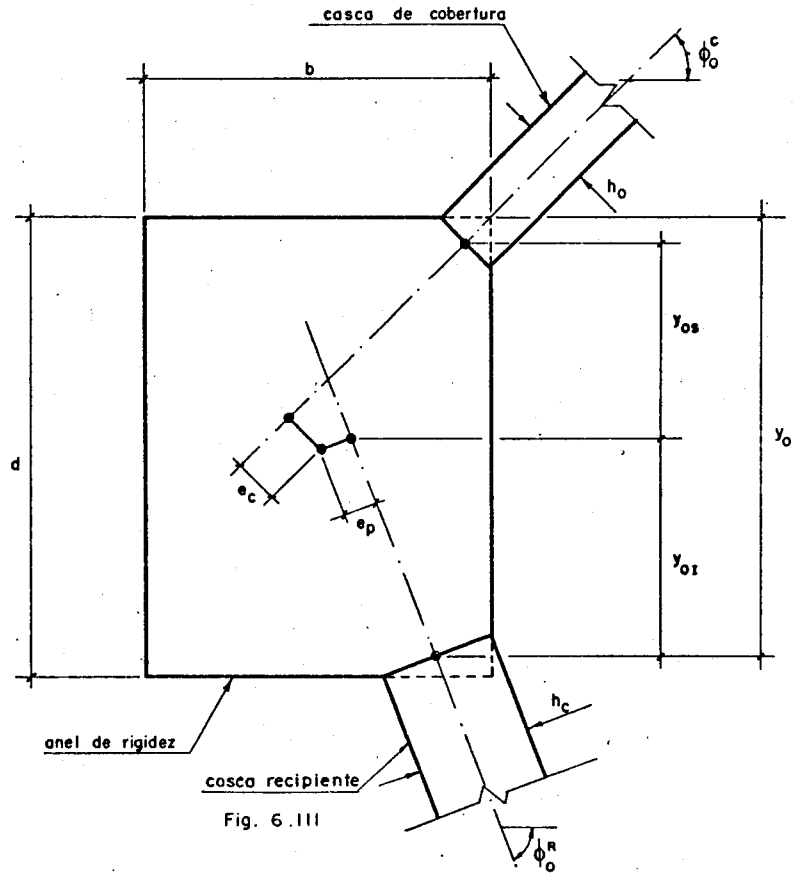


Fig. 6.111

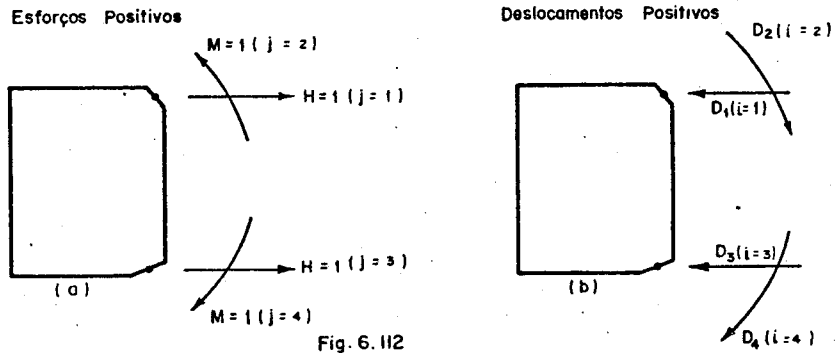


Fig. 6.112

Os deslocamentos do anel, submetido ao peso próprio da estrutura, como mostra a figura (6.113), valem

$$D_{10}^A = \frac{r^2}{EA} \cdot (N_{\phi}^C \cos \phi_O^C + N_{\phi}^R \cos \phi_O^R) + \frac{12ry_{os}}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \cdot (N_{\phi}^C e_c + N_{\phi}^R e_p) \quad (6.147)$$

$$D_{20}^A = D_{40}^A = - \frac{12r}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \cdot (N_{\phi}^C e_c + N_{\phi}^R e_p) \quad (6.148)$$

$$D_{30}^A = \frac{r^2}{EA} (N_{\phi}^C \cos \phi_O^C + N_{\phi}^R \cos \phi_O^R) - \frac{12ry_{oi}}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \cdot (N_{\phi}^C e_c + N_{\phi}^R e_p) \quad (6.149)$$

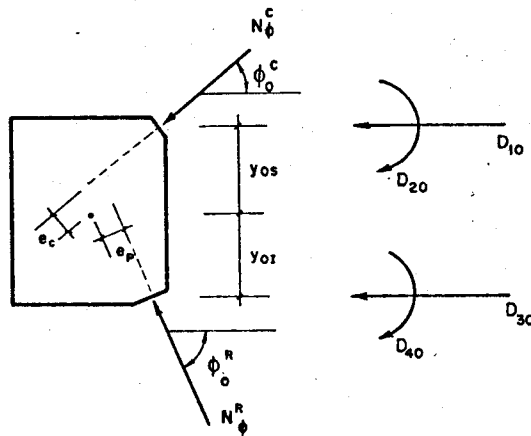


Fig. 6.113

Os deslocamentos do anel, produzidos pela água (Fig.6.114), valem

$$D_{10}^A = \frac{r^2 P}{EA} - \frac{12ry_{os} P x}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \quad (6.150)$$

$$D_{20}^A = D_{40}^A = \frac{12r.P.x}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \quad (6.151)$$

$$D_{30}^A = \frac{r^2 P}{EA} + \frac{12ry_{oi} P x}{Ed^3 \ln(1+b/r)} \quad (6.152)$$

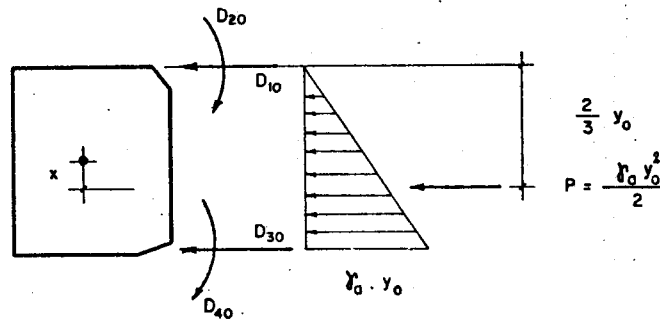


Fig. 6.114

6.15 = Compatibilização de deslocamentos

Apresenta-se, na figura (6.115), o esquema dos esforços e deslocamentos tomados positivos. Denominando $D_{if}^C, D_{if}^A, D_{if}^R$ os deslocamentos finais da cúpula, do anel e da casca recipiente, $D_{io}^C, D_{io}^A, D_{io}^R$, os deslocamentos em regime de membrana da cúpula, do anel e da casca recipiente; D_{ij}^C, D_{ij}^R , os deslocamentos i , produzidos por esforço unitário j , em regime de flexão da cúpula e da casca recipiente respectivamente; X_j , os esforços incógnitos, e fazendo a compatibilização de deslocamentos, tem-se:

em A

$$D_{if}^C = D_{10}^C + X_1 D_{11}^C + X_2 D_{12}^C = D_{if}^A + D_{10}^A + X_1 D_{11}^A + X_2 D_{12}^A + X_3 D_{13}^A + X_4 D_{14}^A$$

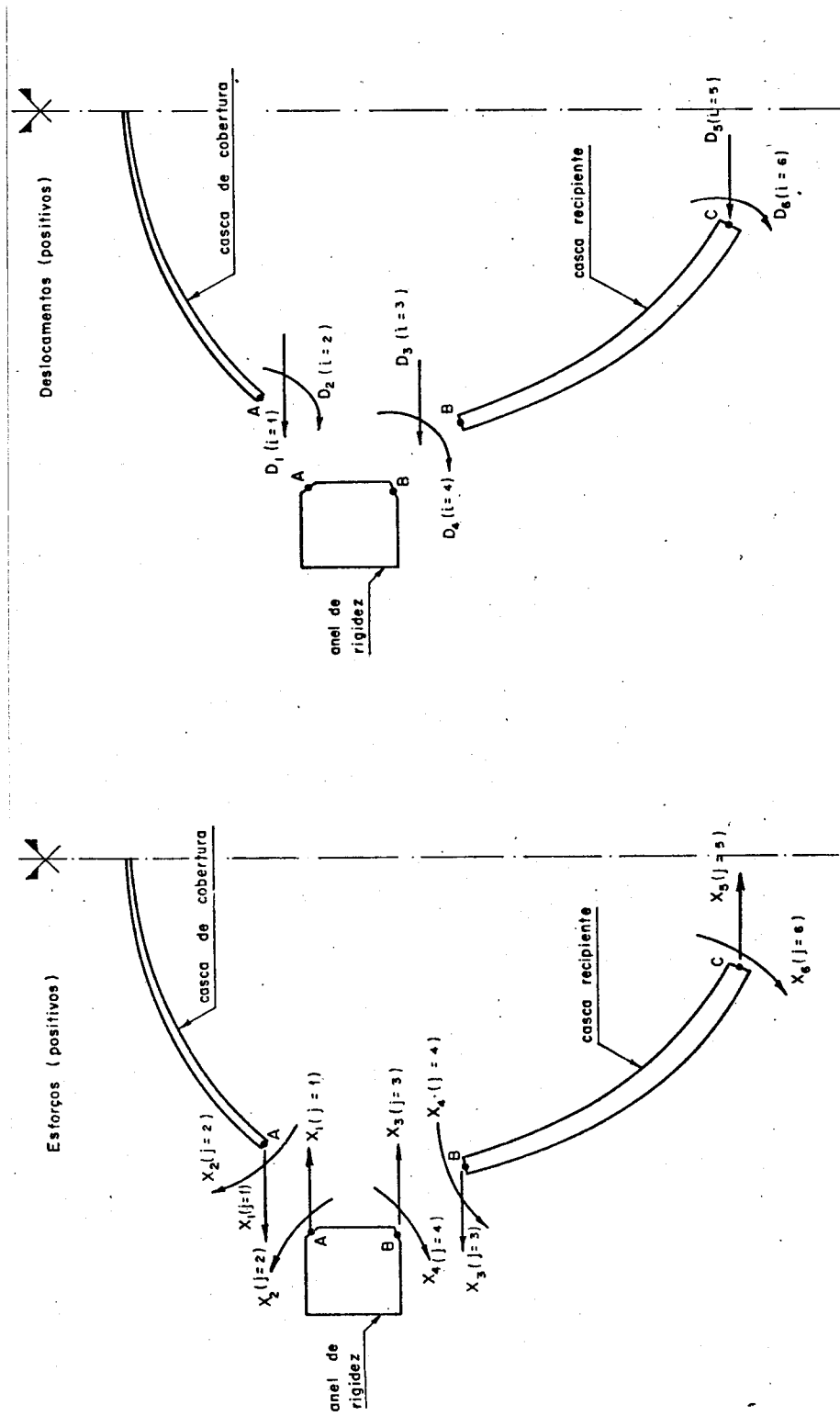


Fig. 6.115

$$D_{2f}^A = D_{20}^C + X_1 D_{21}^C + X_2 D_{22}^C = D_{2f}^A = D_{20}^A + X_1 D_{21}^A + X_2 D_{22}^A + \\ + X_3 D_{23}^A + X_4 D_{24}^A$$

em B

$$D_{3f}^A = D_{30}^A + X_1 D_{31}^A + X_2 D_{32}^A + X_3 D_{33}^A + X_4 D_{34}^A = \\ = D_{3f}^R = D_{30}^R + X_3 D_{33}^R + X_4 D_{34}^R + X_5 D_{35}^R + X_6 D_{36}^R$$

$$D_{4f}^A = D_{40}^A + X_1 D_{41}^A + X_2 D_{42}^A + X_3 D_{43}^A + X_4 D_{44}^A = \\ = D_{4f}^R = D_{40}^R + X_3 D_{43}^R + X_4 D_{44}^R + X_5 D_{45}^R + X_6 D_{46}^R$$

em C (suposto engastamento perfeito)

$$D_{5f}^R = 0 = D_{50}^R + X_3 D_{53}^R + X_4 D_{54}^R + X_5 D_{55}^R + X_6 D_{56}^R$$

$$D_{6f}^R = 0 = D_{60}^R + X_3 D_{63}^R + X_4 D_{64}^R + X_5 D_{65}^R + X_6 D_{66}^R$$

Resulta um sistema de 6 equações a 6 incôgnitas, que podem ser escritas na forma matricial

$$[A] [X] = [B] \quad (6.153)$$

e a solução (os esforços incôgnitos) será

$$[X] = [A]^{-1} [B] \quad (6.154)$$

onãe

$$A_{11} = (D_{11}^C - D_{11}^A) \quad ; \quad A_{12} = (D_{12}^C - D_{12}^A) \quad ;$$

$$\begin{aligned} A_{13} &= -D_{13}^A & ; & & A_{14} &= -D_{14}^A \\ A_{15} &= 0 & ; & & A_{16} &= 0 \\ A_{21} &= (D_{21}^C - D_{21}^A) & ; & & A_{22} &= (D_{22}^C - D_{22}^A) \\ A_{23} &= -D_{23}^A & ; & & A_{24} &= -D_{24}^A \\ A_{25} &= 0 & ; & & A_{26} &= 0 \\ A_{31} &= D_{31}^A & ; & & A_{32} &= D_{32}^A \\ A_{33} &= (D_{33}^A - D_{33}^R) & ; & & A_{34} &= (D_{34}^A - D_{34}^R) \\ A_{35} &= -D_{35}^R & ; & & A_{36} &= -D_{36}^R \\ A_{41} &= D_{41}^A & ; & & A_{42} &= D_{42}^A \\ \hline A_{43} &= D_{43}^A - D_{43}^R & ; & & A_{44} &= D_{44}^A - D_{44}^R \\ A_{45} &= -D_{45}^R & ; & & A_{46} &= -D_{46}^R \\ A_{51} &= 0 & ; & & A_{52} &= 0 \\ A_{53} &= D_{53}^R & ; & & A_{54} &= D_{54}^R \\ A_{55} &= D_{55}^R & ; & & A_{56} &= D_{56}^R \\ A_{61} &= 0 & ; & & A_{62} &= 0 \\ A_{63} &= D_{63}^R & ; & & A_{64} &= D_{64}^R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{65} &= D_{65}^R & ; & & A_{66} &= D_{66}^R \\ B_1 &= (D_{10}^A - D_{10}^C) & ; & & B_2 &= (D_{20}^A - D_{20}^C) \\ B_3 &= (D_{30}^R - D_{30}^A) & ; & & B_4 &= (D_{40}^R - D_{40}^A) \\ B_5 &= - D_{50}^R & ; & & B_6 &= - D_{60}^R \end{aligned}$$

6.16. - Esforços Finais

Os esforços finais são obtidos superpondo, aos esforços de membrana, os esforços em regime de flexão decorrentes da solicitação unitária (calculados com o programa elaborado), multiplicados pelos esforços provenientes da compatibilização de deslocamentos. Assim sendo, tem-se:

para a casca de cobertura

$$E_f = E_m + X_1 E_1 + X_2 E_2$$

para a casca recipiente

$$E_f = E_m + X_3 E_3 + X_4 E_4 + X_5 E_5 + X_6 E_6$$

onde

E_f - Esforço final

E_m - Esforço em regime de membrana

E_j - Esforços, em regime de flexão, produzido por esforço j unitário (Fig. 6.115).

X_j - Esforços incógnitos

6.2 - Resultados Obtidos

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para 5 variantes deste reservatório, as quais diferem entre si por alguns parâmetros geométricos.

As características geométricas da casca de cobertura são:

| variante | 1=2=3=4 | 5 |
|---------------------|---------|-------|
| $\bar{r}_{O,O}$ (m) | 7,500 | 5,250 |
| F (m) | 1,802 | 1,261 |
| h_o (m) | 0,120 | 0,100 |
| h_c (m) | 0,070 | 0,070 |
| ϕ_o | 45° | 45° |
| ϕ_h | 20° | 20° |
| ϕ_s | 0° | 0° |
| η | 3 | 3 |

onde os parâmetros geométricos encontram-se definidos nas figuras (6.102 e 6.103). As variantes 1, 2, 3, 4 possuem a casca de cobertura com as mesmas características geométricas.

O anel de borda é idêntico nas cinco variantes, e apresenta as seguintes dimensões (Fig. 6.111).

$$b = 0,600\text{m}$$

$$d = 0,800\text{m}$$

As características geométricas da casca recipiente são:

| variante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\bar{r}_{O,O}$ (m) | 7,500 | 7,500 | 7,500 | 7,500 | 5,250 |
| $\bar{r}_{O,S}$ (m) | 2,099 | 1,057 | 2,099 | 2,099 | 2,060 |
| F (m) | 8,146 | 8,500 | 8,146 | 8,146 | 14,487 |
| h_o (m) | 0,400 | 0,300 | 0,300 | 0,450 | 0,450 |
| h_c (m) | 0,200 | 0,200 | 0,200 | 0,150 | 0,150 |
| ϕ_o | 70° | 70° | 70° | 70° | 90° |
| ϕ_h | 50° | 44° | 50° | 70° | 90° |
| ϕ_s | 30° | 16° | 30° | 30° | 52° |
| η | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

A capacidade e o consumo de concreto das variantes são:

| variante | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| capacidade (m ³) | 900 | 900 | 900 | 900 | 950 |
| consumo (m ³) | 107 | 106 | 105 | 112 | 118 |

O cálculo destas variantes, conforme desenvolvimento teórico apresentado, fornece os seguintes resultados para os esforços incógnitos X_j (Fig.6.115).

Variante 1

ação: peso próprio

$$\begin{array}{ll} X_1 = 0,0361 & \text{tf/m} & X_2 = -0,0445 & \text{tf} \\ X_3 = -0,0324 & \text{tf/m} & X_4 = 0,0975 & \text{tf} \\ X_5 = 14,6928 & \text{tf/m} & X_6 = 4,0917 & \text{tf} \end{array}$$

ação: água

$$\begin{array}{ll} X_1 = -0,1545 & \text{tf/m} & X_2 = 0,0720 & \text{tf} \\ X_3 = -0,2368 & \text{tf/m} & X_4 = 0,1225 & \text{tf} \\ X_5 = 56,8378 & \text{tf/m} & X_6 = 16,1804 & \text{tf} \end{array}$$

ação: temperatura

$$\begin{array}{ll} X_1 = 1,2044 & \text{tf/m} & X_2 = -0,3165 & \text{tf} \\ X_3 = 0,4216 & \text{tf/m} & X_4 = -0,4395 & \text{tf} \\ X_5 = -0,0001 & \text{tf/m} & X_6 = 0,0000 & \text{tf} \end{array}$$

Variante 2

ação: peso próprio

$$\begin{array}{ll} X_1 = 0,0386 & \text{tf/m} & X_2 = -0,0455 & \text{tf} \\ X_3 = -0,0314 & \text{tf/m} & X_4 = 0,0947 & \text{tf} \\ X_5 = 93,2403 & \text{tf/m} & X_6 = 12,3762 & \text{tf} \end{array}$$

ação: água

$$\begin{array}{ll} X_1 = -0,1537 & \text{tf/m} & X_2 = 0,0717 & \text{tf} \\ X_3 = -0,2366 & \text{tf/m} & X_4 = 0,1217 & \text{tf} \\ X_5 = 341,7019 & \text{tf/m} & X_6 = 45,3500 & \text{tf} \end{array}$$

ação: temperatura

$$\begin{array}{ll} X_1 = 1,2309 \text{ tf/m} & X_2 = -0,3273 \text{ tf} \\ X_3 = 0,4317 \text{ tf/m} & X_4 = -0,4695 \text{ tf} \\ X_5 = 0,0000 \text{ tf/m} & X_6 = 0,0000 \text{ tf} \end{array}$$

Variante 3

ação: peso próprio

$$\begin{array}{ll} X_1 = 0,0379 \text{ tf/m} & X_2 = -0,0452 \text{ tf} \\ X_3 = -0,0317 \text{ tf/m} & X_4 = 0,0954 \text{ tf} \\ X_5 = 12,8473 \text{ tf/m} & X_6 = 2,9791 \text{ tf} \end{array}$$

ação: água

$$\begin{array}{ll} X_1 = -0,1545 \text{ tf/m} & X_2 = 0,0720 \text{ tf} \\ X_3 = -0,2368 \text{ tf/m} & X_4 = 0,1225 \text{ tf} \\ X_5 = 51,4432 \text{ tf/m} & X_6 = 12,1413 \text{ tf} \end{array}$$

ação: temperatura

$$\begin{array}{ll} X_1 = 1,2044 \text{ tf/m} & X_2 = -0,3165 \text{ tf} \\ X_3 = 0,4217 \text{ tf/m} & X_4 = -0,4395 \text{ tf} \\ X_5 = -0,0001 \text{ tf/m} & X_6 = 0,0000 \text{ tf} \end{array}$$

Variante 4

ação: peso próprio

$$\begin{array}{ll} X_1 = 0,0548 \text{ tf/m} & X_2 = -0,0518 \text{ tf} \\ X_3 = -0,0459 \text{ tf/m} & X_4 = 0,0700 \text{ tf} \\ X_5 = 16,5001 \text{ tf/m} & X_6 = 4,7698 \text{ tf} \end{array}$$

ação: água

$$\begin{array}{ll} X_1 = -0,1809 \text{ tf/m} & X_2 = 0,0836 \text{ tf} \\ X_3 = -0,2865 \text{ tf/m} & X_4 = 0,1368 \text{ tf} \\ X_5 = 60,5648 \text{ tf/m} & X_6 = 17,9419 \text{ tf} \end{array}$$

ação: temperatura

$$X_1 = 1,1201 \text{ tf/m} \quad X_2 = -0,2825 \text{ tf}$$

$$X_3 = 0,4189 \text{ tf/m} \quad X_4 = -0,3294 \text{ tf}$$

$$X_5 = -0,0003 \text{ tf/m} \quad X_6 = 0,0000 \text{ tf}$$

Variante 5

ação: peso próprio

$$X_1 = -0,1145 \text{ tf/m} \quad X_2 = -0,0052 \text{ tf}$$

$$X_3 = -0,0345 \text{ tf/m} \quad X_4 = 0,0309 \text{ tf}$$

$$X_4 = 6,8802 \text{ tf/m} \quad X_6 = 2,4903 \text{ tf}$$

ação: água

$$X_1 = -0,1257 \text{ tf/m} \quad X_2 = 0,0411 \text{ tf}$$

$$X_3 = -0,2105 \text{ tf/m} \quad X_4 = 0,0832 \text{ tf}$$

$$X_5 = 32,3656 \text{ tf/m} \quad X_6 = 12,1195 \text{ tf}$$

ação: temperatura

$$X_1 = 1,2054 \text{ tf/m} \quad X_2 = -0,2474 \text{ tf}$$

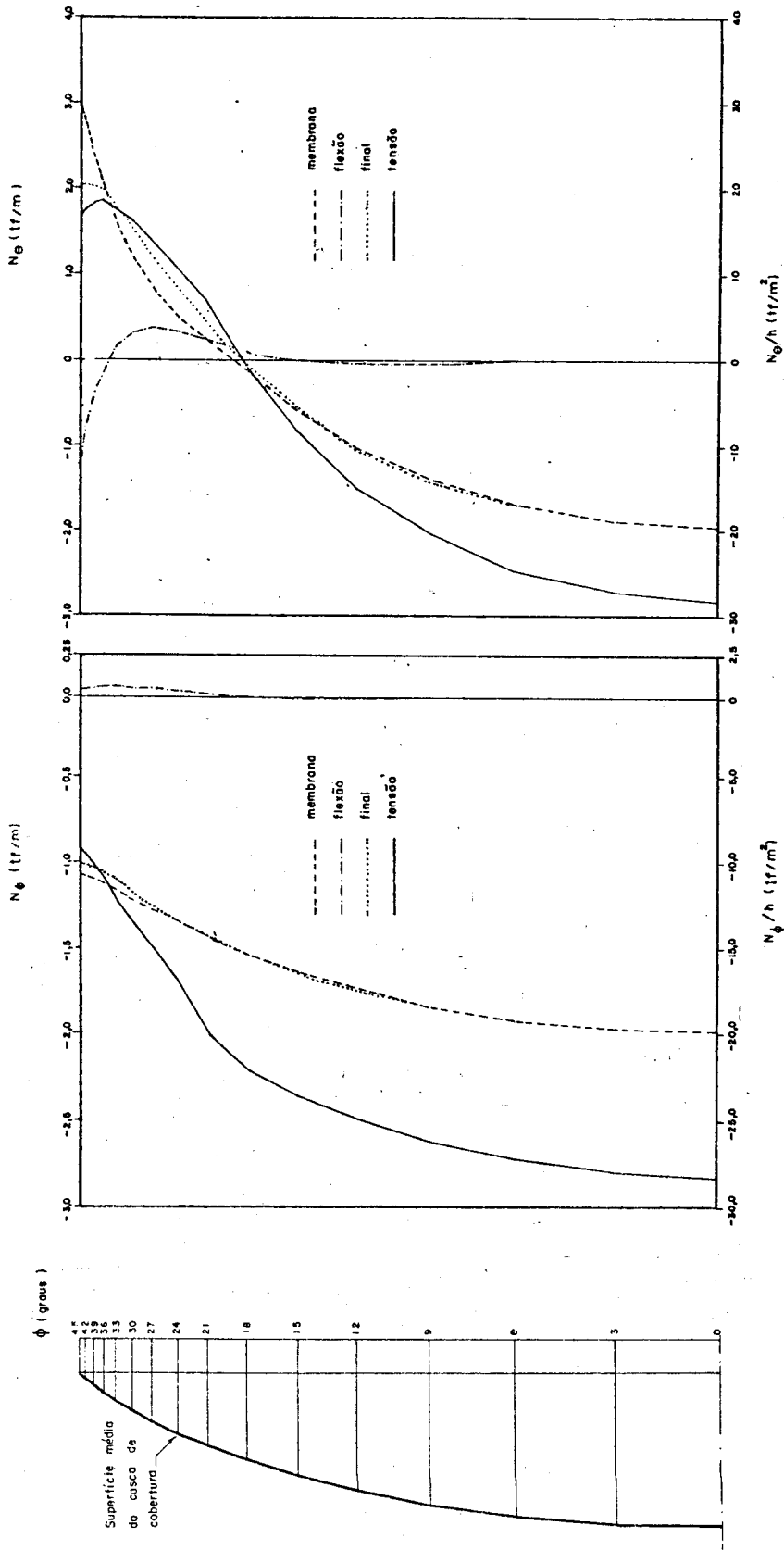
$$X_3 = 0,5205 \text{ tf/m} \quad X_4 = -0,3146 \text{ tf}$$

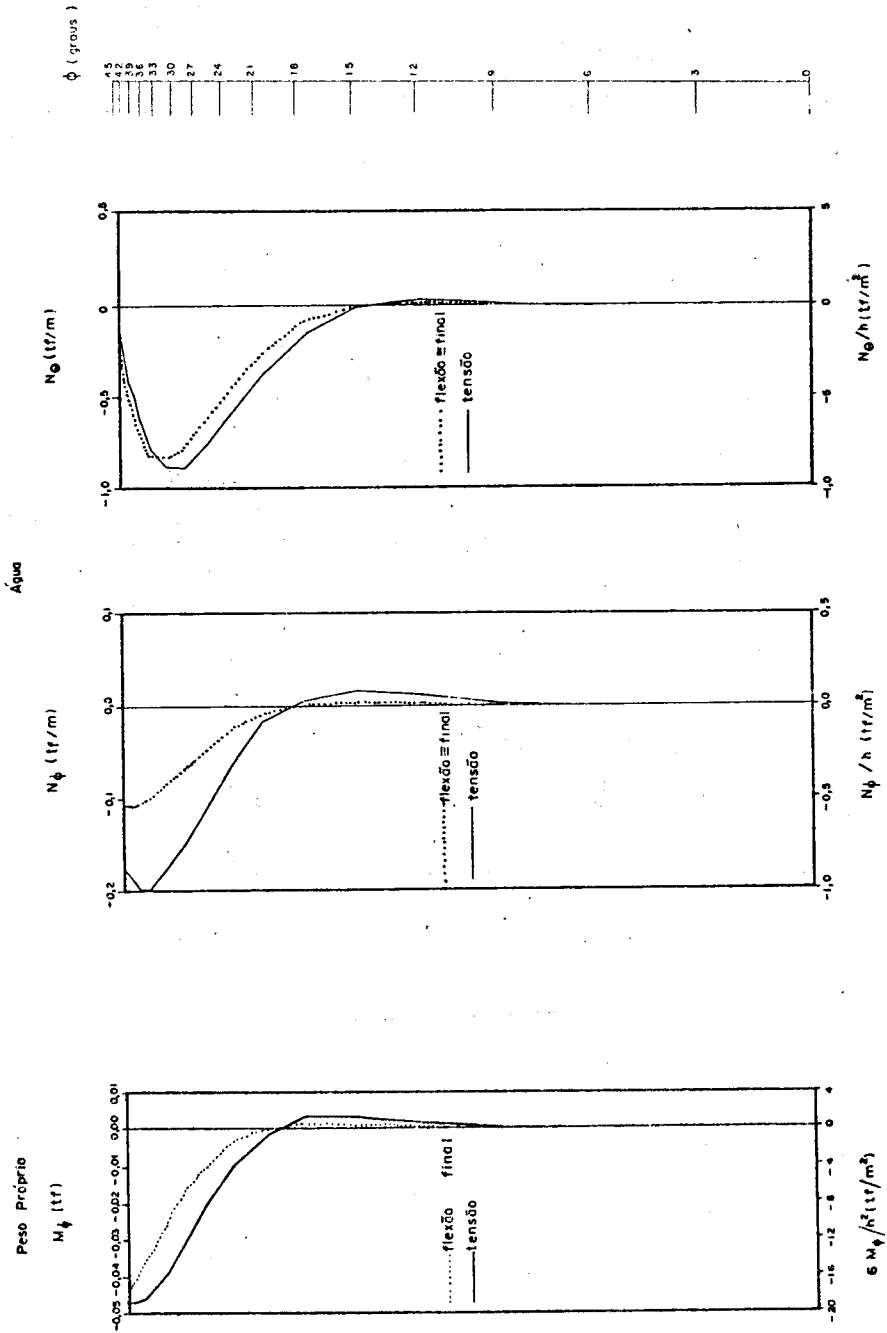
$$X_5 = 0,0000 \text{ tf/m} \quad X_6 = 0,0000 \text{ tf}$$

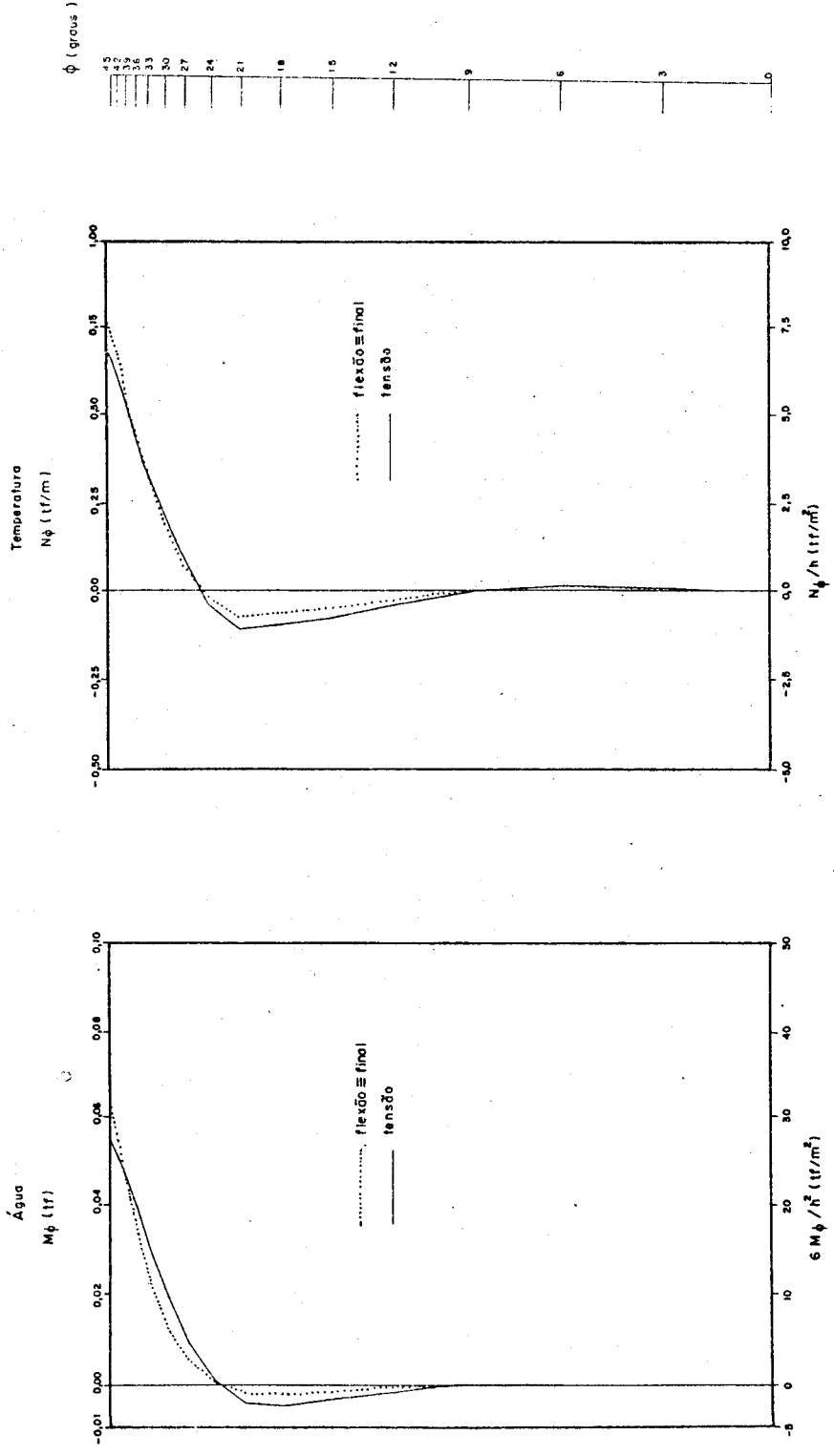
Apresentam-se, a seguir, para a variante 1, os diagramas dos esforços (esforços de membrana, esforços de flexão, esforços finais que corresponde a superposição dos dois anteriores), bem como as tensões produzidas pelos esforços finais, devidos às ações consideradas.

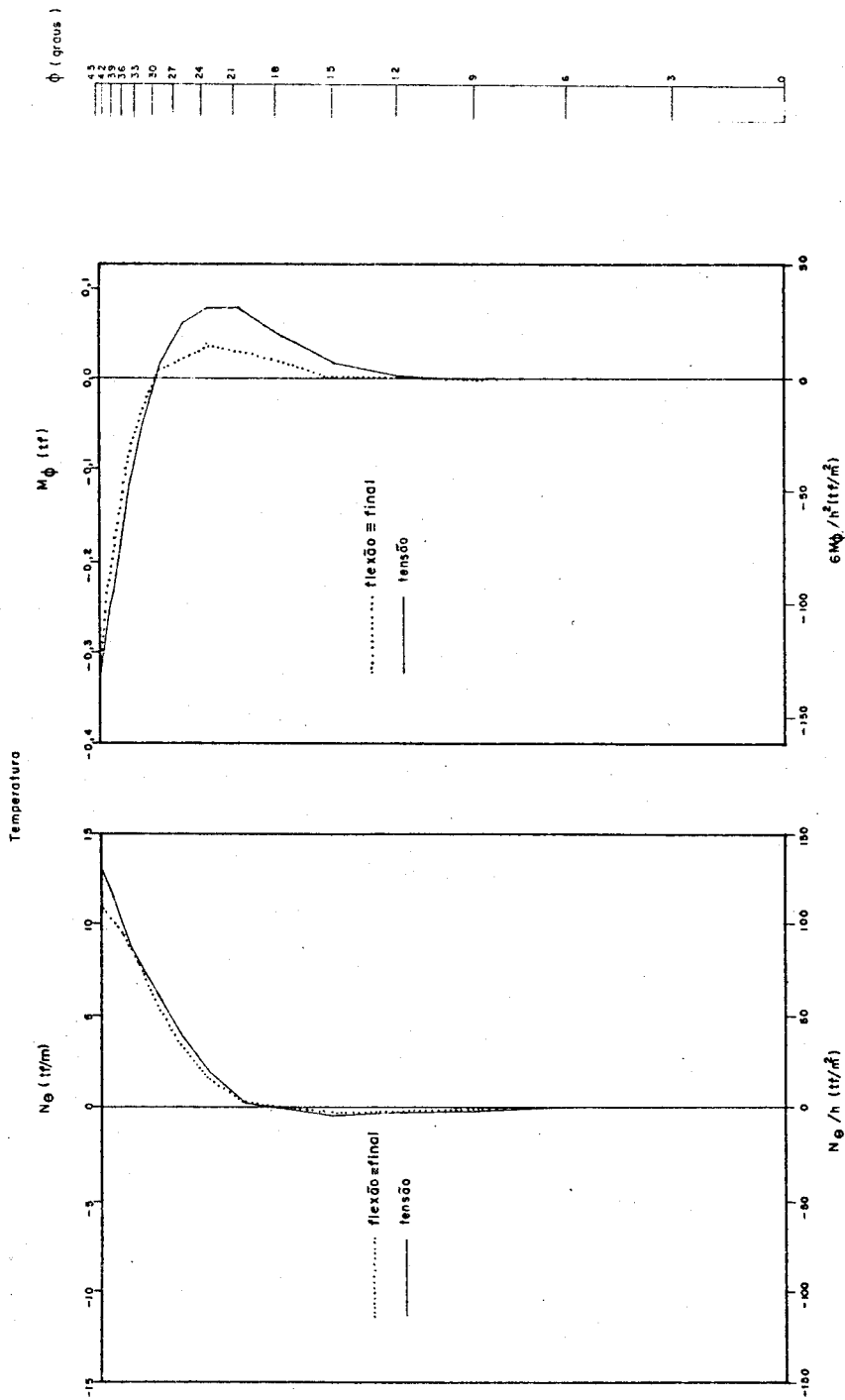
Esforços e tensões na casca de cobertura - Variante 1

opção : peso próprio

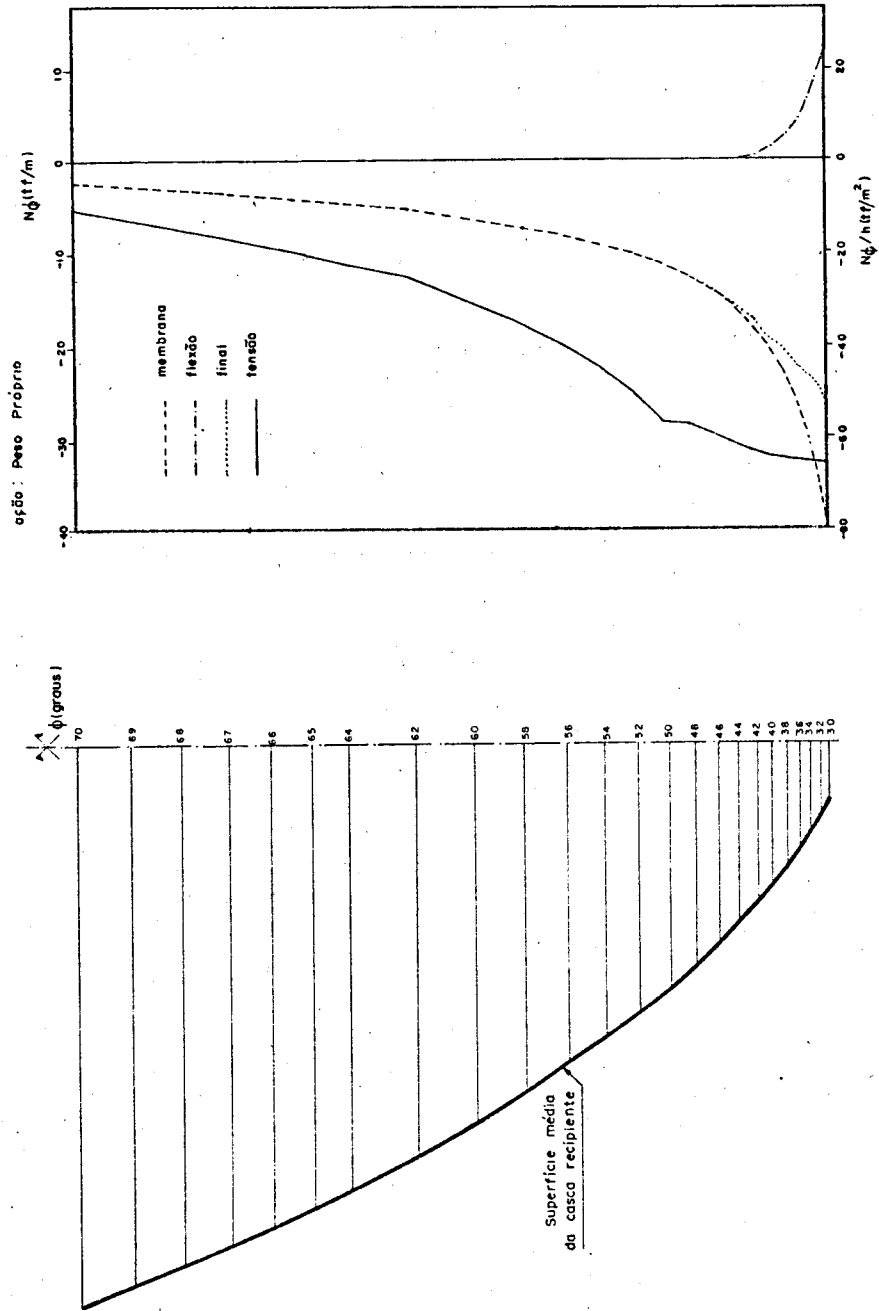


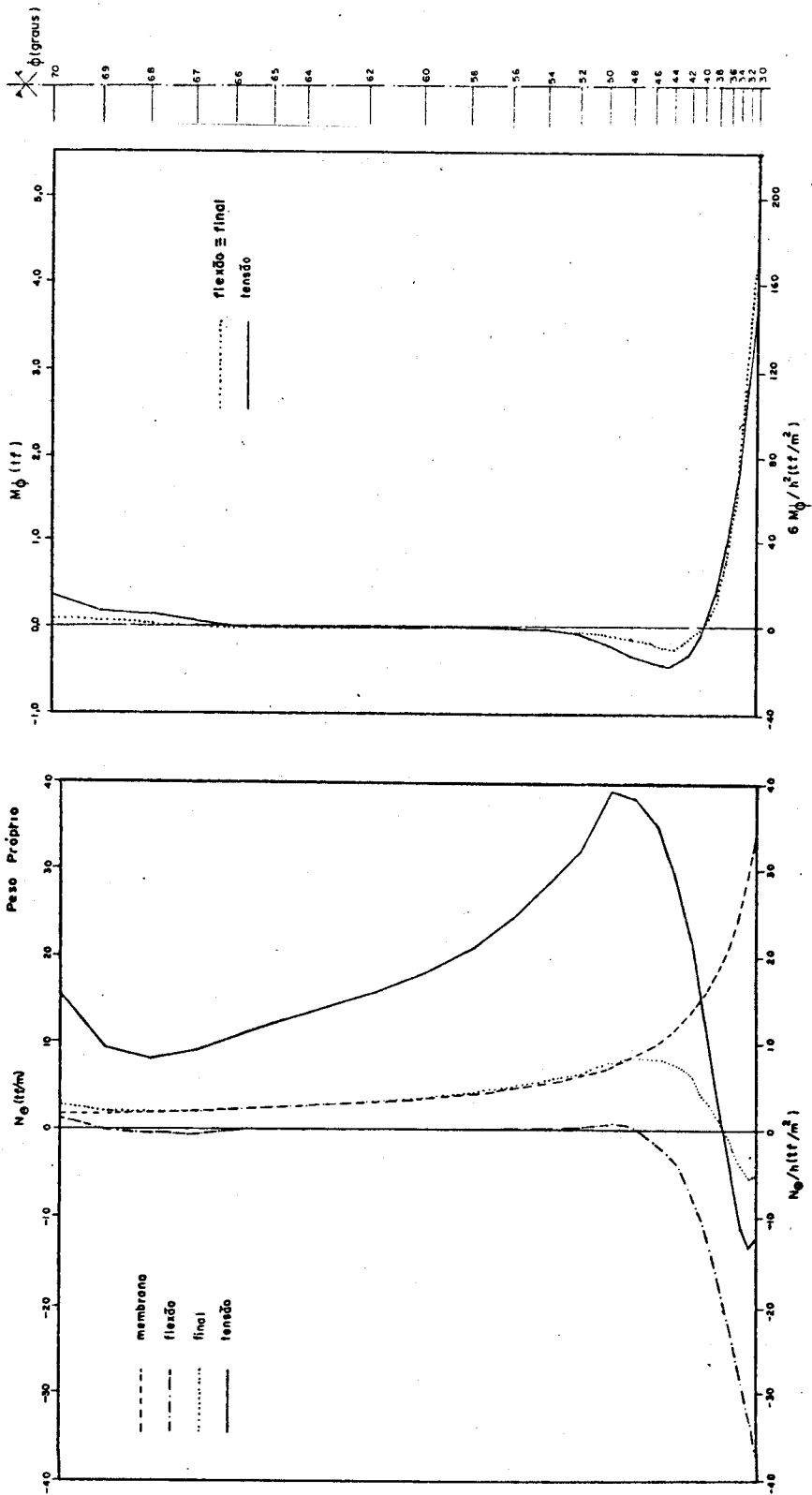


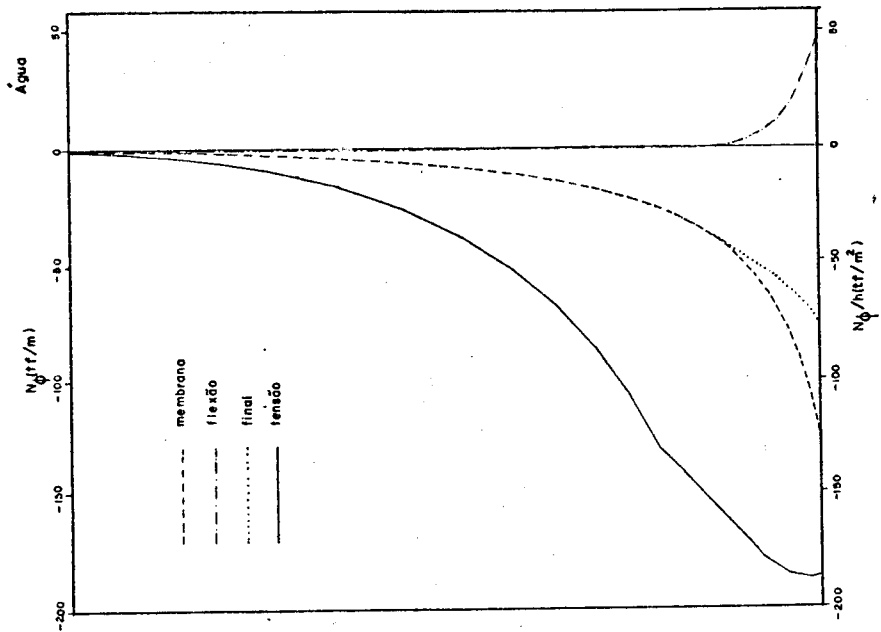
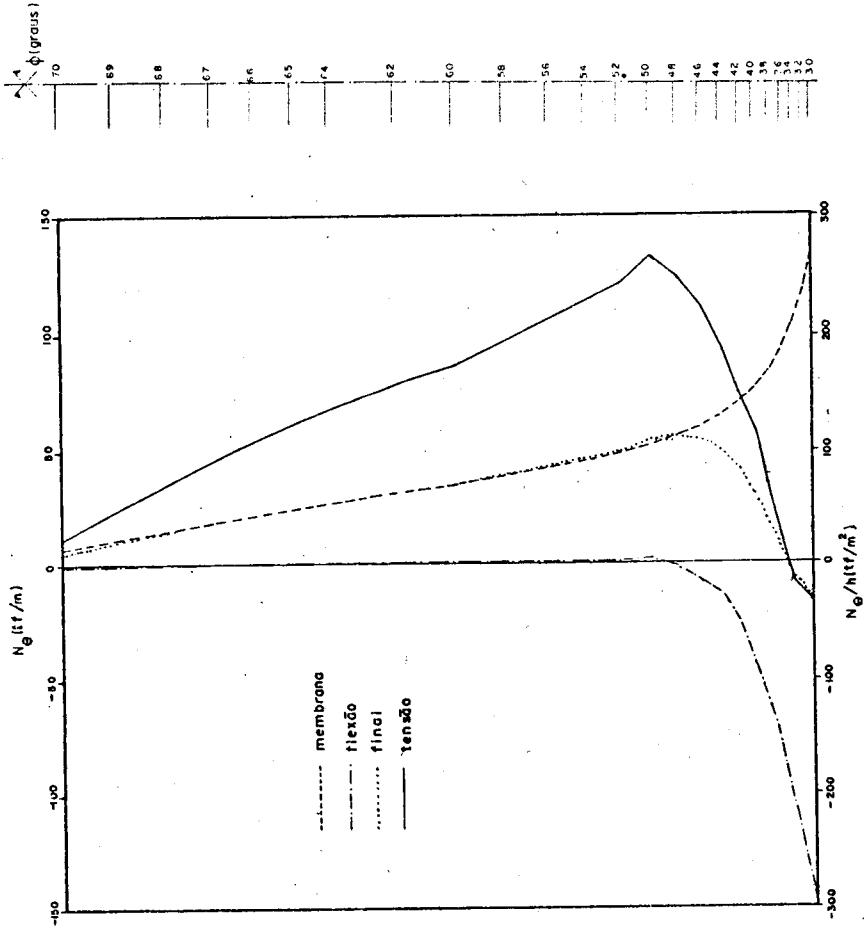


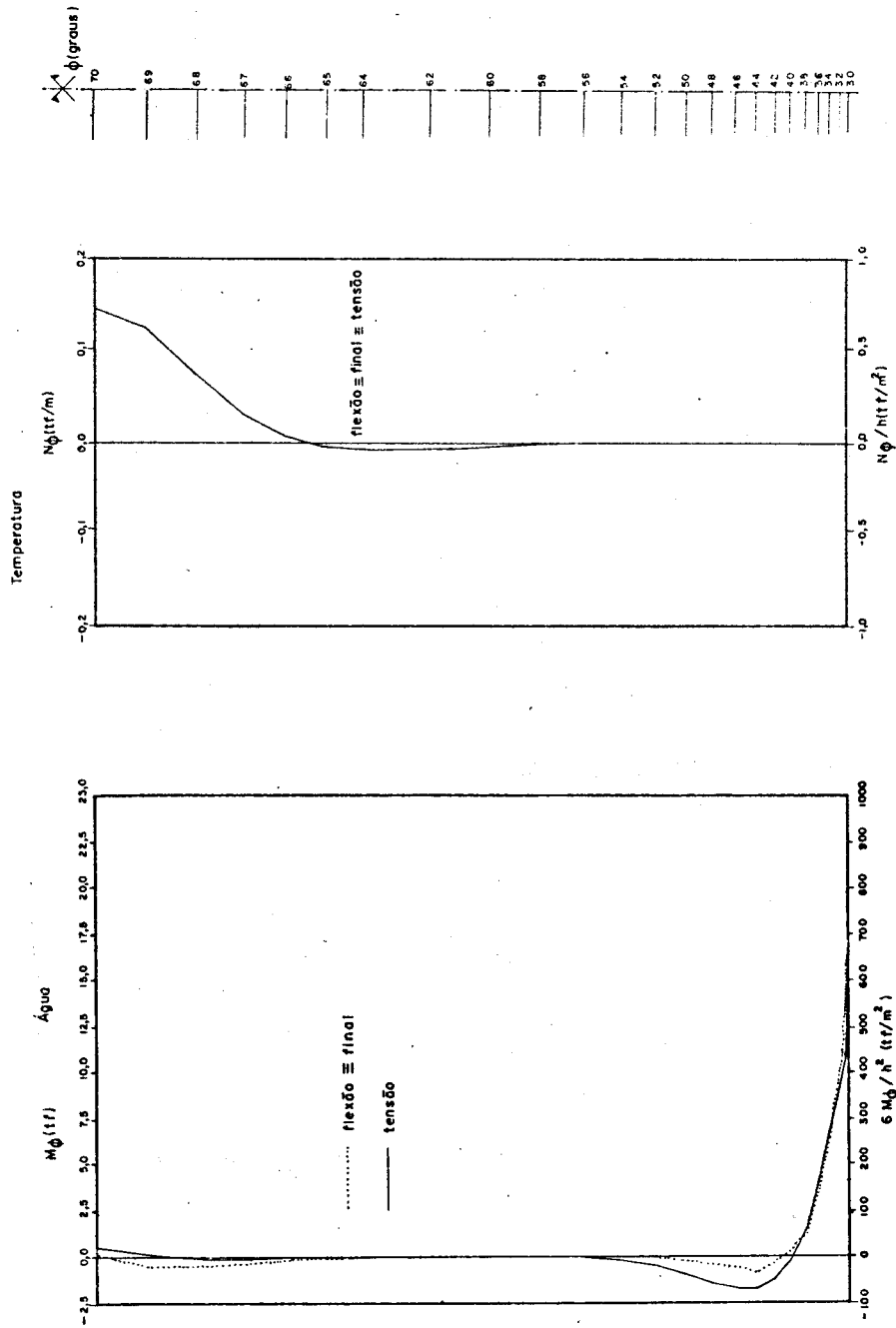


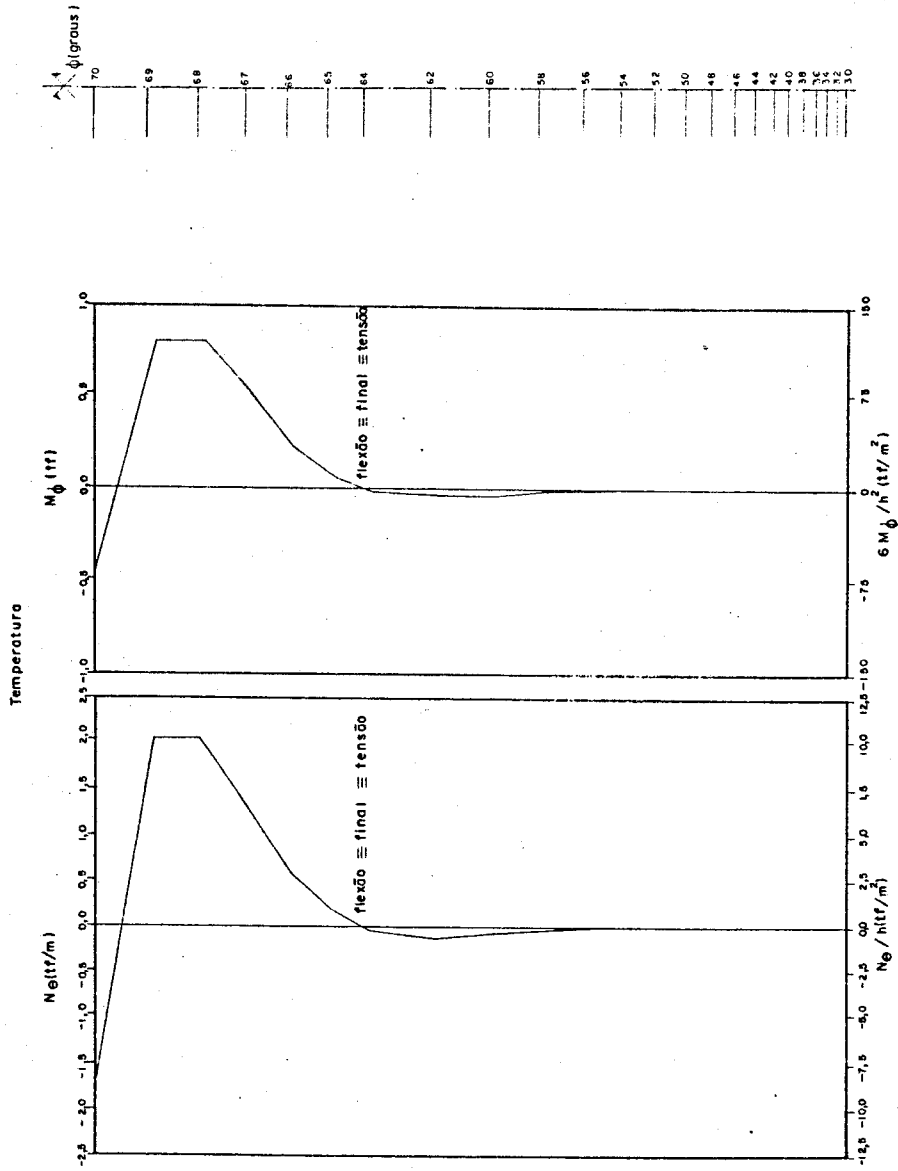
Esforços e tensões na casca recipiente - Variante 1











Apresentam-se, também, para a casca recipiente, que é a mais crítica, as tensões máximas produzidas pelos esforços solicitantes N_ϕ , N_θ , M_ϕ . Esta apresentação é feita, fornecendo-se a tensão máxima produzida por um esforço solicitante, juntamente com as tensões produzidas pelos outros esforços, que surgem no ponto em que ocorre esta tensão máxima.

Variante 1 (tensões em tf/m^2)

ação: peso próprio

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|--------|------------|--------------|----------------|
| 30° | -65,44 | -12,38 | max 153,43 |
| 30° | max-65,44 | -12,38 | 153,43 |
| 50° | -56,64 | max 39,11 | - 8,13 |

ação: água

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|--------|------------|--------------|----------------|
| 30° | -187,22 | -12,54 | max 606,76 |
| 32° | max-187,79 | -11,74 | 435,30 |
| 50° | 130,25 | max267,78 | -31,94 |

Como o efeito da variação de temperatura não afeta muito a casca recipiente, não se apresentam as respectivas tensões máximas.

Variante 2 (tensões em tf/m^2)

ação: peso próprio

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|--------|------------|--------------|----------------|
| 16° | -166,86 | -113,92 | max. 825,08 |
| 16° | max-166,86 | -113,92 | 825,08 |
| 40° | - 94,77 | max 74,48 | -37,81 |

ação: água

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|--------|------------|--------------|----------------|
| 16° | -569,10 | -356,41 | max3023,33 |
| 20° | max-581,30 | -335,60 | max3023,33 |
| 40° | -278,77 | max 378,21 | -138,59 |

Variante 3 (tensões em tf/m^2)

ação: peso próprio

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|---------|------------|--------------|----------------|
| 30° | -89,89 | -16,90 | max198,61 |
| 30° max | -89,89 | -16,90 | 198,61 |
| 46° | -64,69 | max 41,31 | -20,53 |

ação: água

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|---------|------------|--------------|----------------|
| 30° | -265,28 | -44,05 | max809,42 |
| 30° max | -265,28 | -44,05 | 809,42 |
| 50° | -129,94 | max270,49 | -24,55 |

Variante 4 (tensões em tf/m^2)

ação: peso próprio

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|---------|------------|--------------|----------------|
| 30° | -58,85 | -11,05 | max141,32 |
| 30° max | -58,85 | -11,05 | 141,32 |
| 50° | -38,28 | max 27,73 | -10,91 |

ação: água

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|---------|------------|--------------|----------------|
| 30° | -159,30 | -26,41 | max531,61 |
| 30° max | -159,30 | -26,41 | 531,61 |
| 52° | - 76,05 | max175,49 | -23,44 |

Variante 5 (tensões em tf/m^2)

ação: peso próprio

| ϕ | N_ϕ/h | N_θ/h | $6 M_\phi/h^2$ |
|---------|------------|--------------|----------------|
| 52° | - 52,30 | - 9,01 | max 73,78 |
| 52° max | - 52,30 | - 9,01 | 73,78 |
| 66° | - 40,19 | max 14,50 | -6,10 |

ação: água

| ϕ | N_{ϕ}/h | N_{θ}/h | $6 M_{\phi}/h^2$ |
|---------|--------------|----------------|------------------|
| 52° | -121,75 | -20,32 | max359,09 |
| 54° max | -121,85 | -15,56 | 221,31 |
| 76° | - 32,80 | max174,55 | 0,24 |

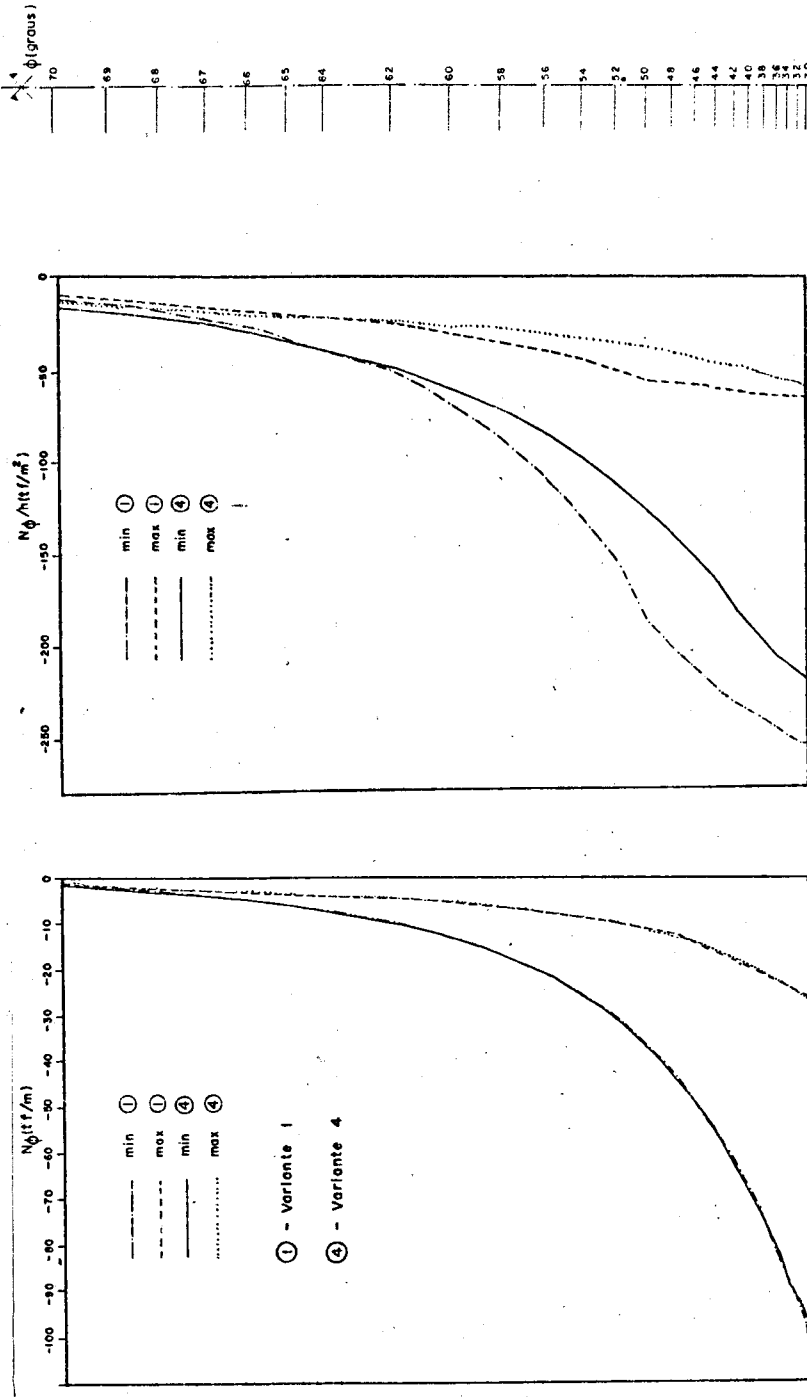
Da análise dos resultados obtidos, ressalta um parâmetro de grande importância neste tipo de estrutura, que é o ângulo que a casca recipiente faz com a laje de fundo (ϕ_s). A influência desta inclinação é vista na comparação dos momentos e das tensões proveniente destes momentos, na junção casca recipiente-torre nas variantes 1 ($\phi_s = 16^\circ$), 2 ($\phi_s = 30^\circ$) e 5 ($\phi_s = 52^\circ$).

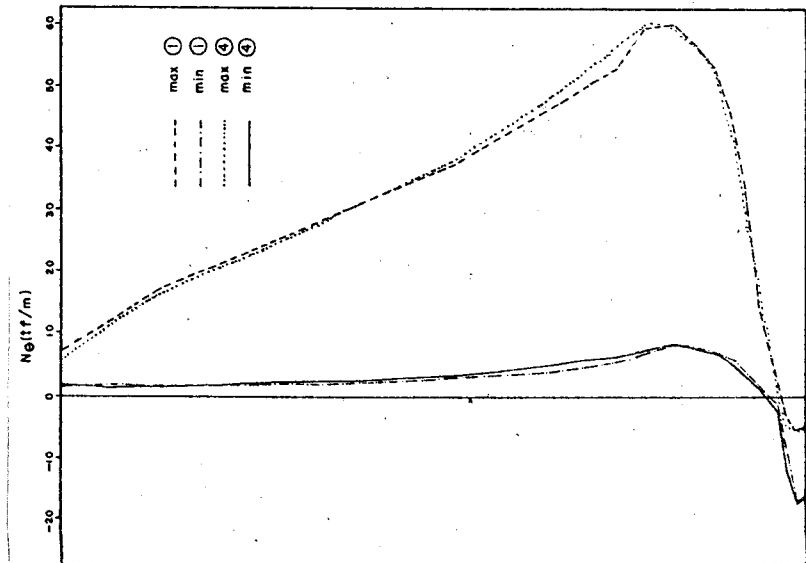
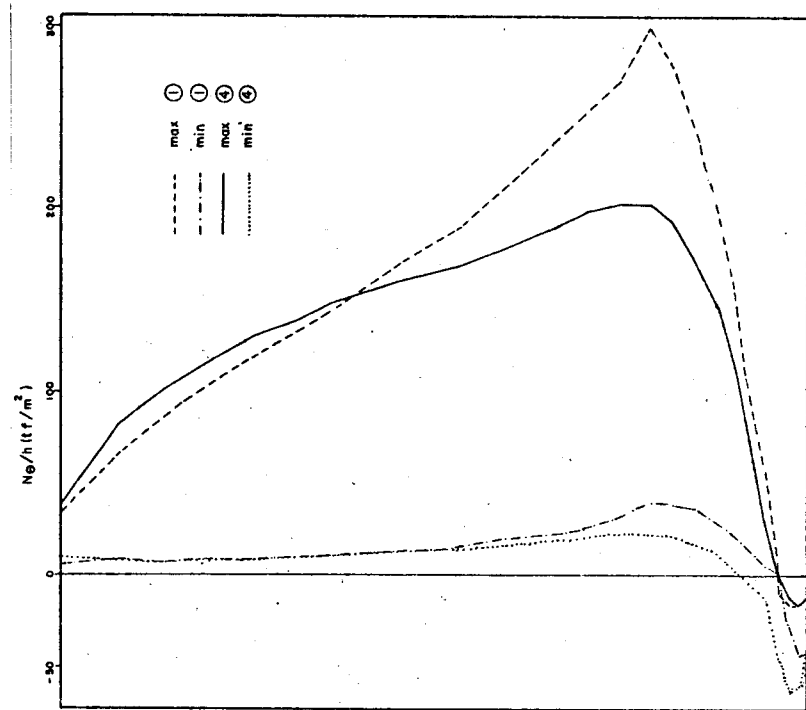
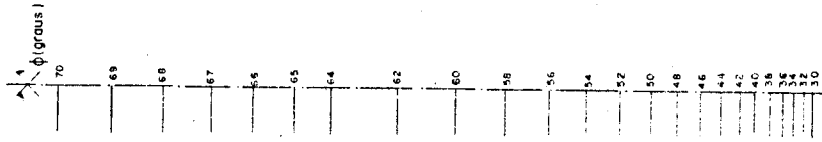
Apesar das tres variantes apresentarem praticamente a mesma capacidade e o mesmo consumo de concreto, nota-se que a variante 5. é estaticamente melhor. Salienta-se, porém, que a laje de fundo, nesta variante, é mais solicitada, pois age sobre ela uma pressão de água bem superior à das variantes 1 e 2.

A influência da espessura da casca recipiente é vista na comparação dos esforços e tensões das variantes 1, 3 e 4. A influência da forma de variação da espessura é sentida na comparação das variantes 1 e 4, para as quais apresentam-se, nas folhas seguintes, os esforços máximos e mínimos e as tensões máximas e mínimas ao longo da casca recipiente, onde se tenta mostrar que é possível melhorar a distribuição das tensões ao longo da casca através da variação de espessura.

A variação uniforme de temperatura na cúpula afeta muito pouco a casca recipiente, porém é a carga mais crítica que atua na cúpula.

Envoltória de esforços e de tensões na casca recipiente





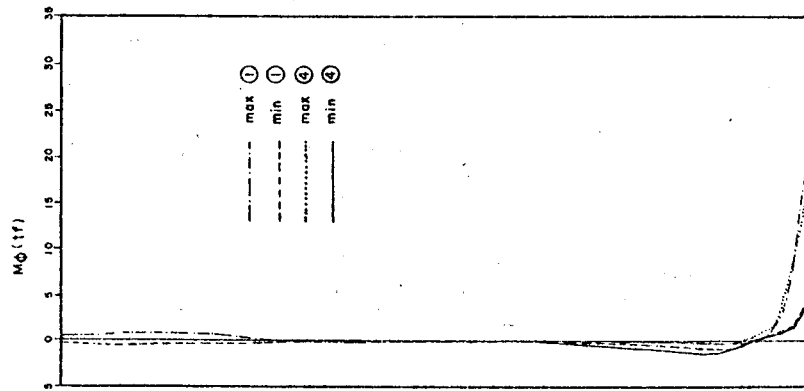
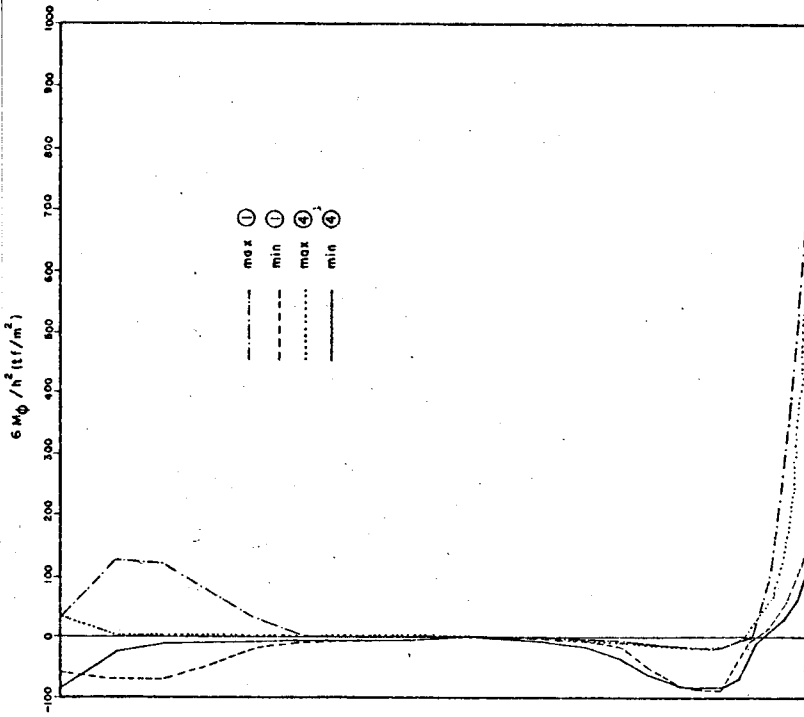


Tabela 1.2: Esforço N_x , a - Solicitação $M=1$

| ψ (Graus) | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | m | n | o |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 1 | -22,01 | -21,17 | | -22,49 | | | -22,05 | | | -21,93 | -22,00 | | -22,00 | |
| 2 | -28,99 | -27,44 | -31,22 | -29,54 | -28,98 | -29,74 | -29,05 | -29,00 | -28,12 | -28,93 | -28,98 | -28,98 | -28,98 | -28,99 |
| 3 | -27,02 | -25,16 | | -27,52 | | | -27,03 | | | -26,99 | -27,02 | | -27,02 | |
| 4 | -20,89 | -19,11 | -22,72 | -21,51 | -20,84 | -21,60 | -20,94 | -20,89 | -20,63 | -20,88 | -20,89 | 20,89 | -20,89 | -20,89 |
| 5 | -15,78 | -12,38 | | -14,15 | | | -13,63 | | | -13,80 | -15,79 | | -15,79 | |
| 6 | -7,53 | -6,62 | -8,99 | -7,85 | -7,47 | -7,95 | -7,56 | -7,53 | -7,72 | -7,55 | -7,53 | 7,53 | -7,53 | -7,52 |
| 8 | 0,07 | 0,08 | -0,96 | -0,16 | 0,10 | -0,04 | 0,07 | 0,88 | -0,14 | 0,05 | 0,07 | 0,06 | 0,07 | 0,07 |
| 10 | 2,11 | 1,73 | 1,57 | 1,08 | 2,16 | 2,16 | 2,12 | 2,12 | 2,03 | 2,11 | 2,11 | 2,12 | 2,11 | 2,11 |
| 14 | 0,59 | 0,42 | 0,69 | 0,61 | 0,58 | 0,65 | 0,59 | 0,59 | 0,64 | 0,59 | 0,59 | 0,59 | 0,59 | 0,59 |
| 20 | -0,16 | -0,09 | -0,12 | -0,15 | -0,16 | -0,17 | -0,16 | -0,16 | -0,16 | -0,16 | -0,16 | -0,16 | -0,16 | -0,16 |
| 30 | 0,05 | 0,01 | 0,01 | 0,04 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,03 | 0,03 | 0,03 |