

DIMENSIONAMENTO ECONÔMICO DE
VIGAS PROTENDIDAS DE AÇO

ENGº CASSIO FERRAZ SAMPAIO JR.

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obten-
ção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas"

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Orientador
Dr. Tioeturo Yagui

Comissão Examinadora:
Dr. Tioeturo Yagui
Dr. Walter Savassi
Dr. Paulo Seleguin

São Carlos, novembro de 1976

A meus pais, esposa e filhos

Agradecimentos

Queremos expressar nossos agradecimentos ao prof. Dr. Tioeturro Yagui pela precisa e eficiente orientação durante toda a execução deste trabalho.

Agradecemos a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela concessão de bolsa de estudos que muito nos auxiliou.

Agradecemos a Faculdade de Engenharia de Limeira pelo apoio recebido, e ao Centro de Computação da Universidade de Campinas pelo uso que fizemos de seus equipamentos.

Agradecemos à Srta. Dalva Maria Michel pelo trabalho de desenhista e à Sra. Isabel Cristina Delle Vedove pelo trabalho de datilografia.

Sumário

O presente trabalho apresenta um processo de dimensionamento econômico de vigas protendidas de aço utilizando técnicas computacionais.

São consideradas vigas simplesmente apoiadas, com cabo de protensão paralelo à aba inferior, com excentricidade constante. O processo consiste em se reduzir a uma única equação, função de dois parâmetros da seção transversal, as equações de resistência que fornecem as tensões em várias seções da viga. Esta equação é resolvida, por meio de métodos numéricos, juntamente com uma equação de otimização.

O capítulo II fornece o desenvolvimento analítico para o problema, para dois casos de dimensionamento: viga protendida com cabo de protensão menor que seu comprimento e viga protendida com cabo de protensão igual ao seu comprimento. O capítulo III descreve os materiais usados, analisa um método de protensão que pode ser aplicado e dá uma descrição sucinta sobre o problema da instabilidade da viga. O capítulo IV fornece o diagrama de blocos e apresenta exemplos numéricos com resultados obtidos por computador e por meio de gráficos. No apêndice estão as listagens dos programas e diversos gráficos.

Abstrats

This paper presents a method of economical design of prestressed steel girders, using computer techniques.

Simply supported girders are considered, with the tendon located parallel to the lower chord, with constant eccentricity. The method consists in reducing to a single equation, function of two parameters of the cross section, the strength equations governing the stress behavior of the girder. This equation is solved by numerical methods, in conjunction with an optimization equation.

The chapter II gives the analitical development of the problem for two cases of design: prestressed girders with short tendon and prestressed girders with the tendon equal to its length. The chapter III describes the materials, a prestressing method that might be used and the problem of buckling of the girders. The chapter IV gives the computer flow chart and shows numerical examples obtained through the computer and the graphics. In the Appendix are shown the computer listings and several graphics.

Índice

Capítulo I - Introdução	
1 - Introdução	1
Capítulo II - Dimensionamento Econômico	
1 - Generalidades	3
2 - Nomenclatura	3
3 - Propriedades da Seção Transversal	6
3.1 - Cálculo das Áreas A_1 , A_2 e A_w	7
3.2 - Cálculo da Altura da Viga	8
3.3 - Cálculo das Excentricidades	8
3.4 - Cálculo do Momento de Inércia	9
3.5 - Cálculo dos Módulos de Resistência	9
4 - Cálculo da Força Redundante no Cabo de Protensão	10
5 - Formulação da Solução	13
5.1 - Generalidades	13
5.2 - Parâmetros Seletivos	13
5.3 - Variáveis envolvidas no Dimensionamento	14
6 - Dedução da Equação Governante - $l_c < l$	15
6.1 - Generalidades	15
6.2 - Cálculo das Tensões nas Fibras mais solicitadas	17
6.3 - Cálculo da Área total da Seção Transversal	18
6.4 - Cálculo da Força Efetiva de Protensão	21
6.5 - Cálculo da Força Redundante	21
6.6 - Cálculo das Áreas da Seção Transversal do cabo	22
6.7 - Cálculo da expressão de m_1	23
6.8 - Dedução da Equação Governante	23

7 - Dedução da Equação Governante - $l_c = l$	26
7.1 - Generalidades	26
7.2 - Condições de Resistência	27
7.3 - Condição de Compatibilidade de Deslocamentos do Cabo de Protensão	29
7.4 - Cálculo da Seção Transversal do Cabo de Protensão ...	30
7.5 - Cálculo da Força Redundante	31
7.6 - Cálculo da Força Efetiva de Protensão	32
8 - Funções Objetivas	33
8.1 - Generalidades	33
8.2 - Mínimo Volume ou Mínimo Pêso	34
8.3 - Mínimo Preço do Material Consumido	35
8.4 - Mínima Capacidade de Carga da Viga	35
8.5 - Função Objetiva Última	36
9 - Solução da Equação Governante e da Função Objetiva	36
9.1 - Generalidades	36
9.2 - Método da Seção Dourada	37
9.3 - Método Iterativo para Resolver a Equação Governante..	41
 Capítulo III - Considerações Gerais	
1 - Materiais Usados	45
2 - Forma da Seção Transversal da Viga	47
3 - Ancoragem e Protensão do Cabo	49
4 - Tensões de Projeto	51
5 - Cargas	52
6 - Considerações sobre a Estabilidade da Viga	53
6.1 - Generalidades	53
6.2 - Estabilidade da Alma	53
6.3 - Estabilidade Geral da Viga	55

7 - Coeficientes de Segurança da Protensão	56
Capítulo IV - Diagrama de Blocos e Exemplos	
1 - Generalidades	57
2 - Diagrama de Blocos para a viga com cabo de protensão menor que seu comprimento	58
3 - Diagrama de Blocos para a viga com cabo de protensão igual ao seu comprimento	68
4 - Exemplos	78
4.1 - Dimensionamento da viga com carga uniformemente dis- tribuída	78
4.2 - Dimensionamento da viga com duas cargas concentradas	85
4.3 - Dimensionamento da viga com carga uniformemente dis- tribuída usando os gráficos	93
Conclusões	96
Bibliografia	98
Apêndice	100

CAPÍTULO I

1 - Introdução

O uso da protensão em estruturas de aço tem por finalidade a obtenção de economia de material, ou em certos casos atender às imposições arquitetônicas ou construtivas. O seu princípio consiste em se criar, em determinadas regiões da estrutura, tensões de sinais opostos às produzidas pelas cargas externas. Isto é obtido pelo emprego de fios de aço de alta resistência que são ancorados na estrutura, de modo que eles possam ser pré-tensionados e produzam esforços de sentido oposto ao dos causados pelas cargas externas, em trechos convenientes.

Embora em estruturas metálicas esse princípio tenha sido aplicado, até agora, mais em treliças, o presente trabalho considerará somente as vigas de seção composta de chapas e, nesse particular será abordado principalmente o seu dimensionamento ótimo.

O uso da protensão com o objetivo de aumentar a resistência de elementos tracionados, foi estudado primeiramente por G. Magnel^{(1), (2)}, que ensaiou uma viga em treliça, protendida com 16 fios de aço de 5 mm de diâmetro. Essa estrutura entrou em ruína por flambagem do banzo superior, antes que ali se atingisse a tensão de escoamento do material. Posteriormente, R. Barnett⁽³⁾ propôs um método de dimensionamento de vigas protendidas de aço, simplesmente apoiadas, baseado em tentativas. P. Fergencik⁽⁴⁾ analisou uma viga, cujo cabo de protensão variava de posição em função do diagrama de momentos fletores introduzindo, em determinadas seções ao longo da viga, cargas concentradas nos pontos de mudança de direção do cabo e momentos concentrados na região de ancoragem do cabo. P. Hodley^{(5), (6)}, ao analisar vigas protendidas de aço, obteve expressões para a obtenção de curvas carga-deformação e estudou a relação entre o vão da viga e sua altura e propôs ábacos para o seu dimensionamento. Mas só recentemente é que foram propostos por M. Tochacek e Mehta⁽⁷⁾, métodos mais diretos e racionais visando a otimização do projeto.

O dimensionamento que esgota a capacidade da viga protendi-

da de aço é alcançado quando uma ou mais seções tem nas suas fibras extremas tensões iguais à tensão de escoamento do material. Isto se consegue resolvendo-se simultaneamente uma série de equações de resistência, as quais fornecem a tensão resultante nas diversas fases de carregamento. Essas equações são tomadas em função de uma seção idealizada, formando um perfil I de abas desiguais, que substitue satisfatoriamente as mais variadas formas que possa ter a seção transversal de uma viga protendida de aço. Para esta mesma seção idealizada, suas propriedades geométricas são expressas em função de duas variáveis. As equações de resistência são reduzidas a uma única, chamada "Equação Governante", função das mesmas duas variáveis.

O processo de otimização consiste em se resolver a Equação Governante com uma equação de otimização (mínimo peso, máxima capacidade de carga da viga, etc.), chamada aqui "Função Objetiva", que é função das mesmas variáveis. Resolvendo-se simultaneamente essas duas equações, o que é feito através de métodos numéricos, devido à complexidade da Equação Governante e da Função Objetiva, chega-se aos valores dos parâmetros que otimizam o projeto, fornecendo as dimensões da viga que satisfazem as equações de resistência e minimizam a Função Objetiva escolhida.

O objetivo do presente trabalho visa portanto, divulgar o processo de dimensionamento econômico de vigas de seção composta protendidas, tornando-o acessível aos engenheiros brasileiros, uma vez que bibliografia mais completa sobre o assunto são existentes somente em línguas russa, eslovaca e germânica.

CAPÍTULO II - DIMENSIONAMENTO ECONÔMICO

1 - Generalidades

A protensão da viga é feita por meio de um cabo de aço de alta resistência, colocado paralelamente e próximo à aba da viga que seria tracionada sob o efeito das cargas externas, de modo que a força de compressão resultante desse cabo ancorado na viga, tenha excentricidade constante.

O dimensionamento econômico da viga é alcançado quando em uma ou mais seções é atingida a tensão limite do material. As equações deduzidas das condições de resistência, são as mínimas necessárias para um dimensionamento que esgote a capacidade do material. Através delas nota-se que o número máximo de variáveis independentes envolvidas no problema de otimização da viga protendida é no máximo sete para o caso da viga com cabo de protensão menor que seu comprimento e o número de equações deduzidas através das condições de resistência é no máximo cinco para o mesmo caso. Resolvendo simultaneamente essas equações, juntamente com a equação de compatibilidade de deslocamentos, chega-se a uma única equação que é função de apenas duas variáveis independentes. Esta equação foi chamada de Equação Governante e, resolvida simultaneamente com uma equação de otimização ou de estabilidade fornece a solução do problema proposto.

Devido ao caráter não linear e à complexidade dessas equações, são empregados dois métodos numéricos: o Método da Seção Dourada (The Golden Section Search Method) que minimiza a condição de otimização e um método de iteração que resolve a equação governante.

2 - Numenclatura

A notação usada nas deduções que se seguem é a seguinte:

A área total da seção transversal

A_1 área da seção transversal da aba superior,
Aba 1

- A_2 área da seção transversal da aba inferior,
Aba 2
- A_w área da seção transversal da alma
- A_c área da seção transversal do cabo de pro-
tensão
- h altura da seção transversal da viga
- δ espessura da alma
- e_1 distância do centro de gravidade da aba 1
ao centro de gravidade da seção transversal
da viga
- e_2 distância do centro de gravidade da aba 2
ao centro de gravidade da seção transversal
da viga
- e excentricidade do cabo de protensão em rela-
ção ao centro de gravidade da seção trans-
versal da viga
- λ esbeltez da alma
- X força redundante no cabo de protensão
- N força efetiva de protensão
- l comprimento da viga
- l_c comprimento do cabo de protensão
- s, t parâmetros de localização do cabo de proten-
são
- M_0 momento fletor máximo na viga isostática
- M_1 momento fletor na viga isostática na altura
da ancoragem do cabo de protensão

M_2	momento fletor médio na viga isostática, no trecho situado entre os pontos de ancoragem do cabo de protensão
E	módulo de elasticidade longitudinal do aço estrutural
E_c	módulo de elasticidade longitudinal do aço de alta resistência
Z	parâmetro de localização do cabo de protensão
R	tensão de projeto
ρ_1, ρ_2, ρ_c	relação entre as tensões de projeto
m_1, m_2	relação entre os momentos fletores
n_s, n_i	coeficientes de precisão da protensão
a_1, a_2, a_3	coeficientes de proporcionalidade
a, a_n, a_x, a_c, a_w	coeficientes de proporcionalidade
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_c$	tensões máximas na viga protendida
W_1	módulo de resistência em relação a aba 1
W_2	módulo de resistência em relação a aba 2
J	momento de inércia da seção transversal
K, b, c, d, w	expressões simplificadoras
G	equação governante
0	condição de otimização

3 - Propriedades da Seção Transversal

As propriedades da seção transversal da viga podem ser deduzidas através de relações geométricas; da condição de localização do centro de gravidade e das fórmulas para a determinação do momento de inércia e do módulo de resistência da seção em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade da seção transversal da viga.

Para simplificar a análise das abas considera-se que elas estejam concentradas nos seus respectivos centros de gravidade. Esta assertiva é aceitável desde que as espessuras das abas sejam muito menores que a altura total da viga.

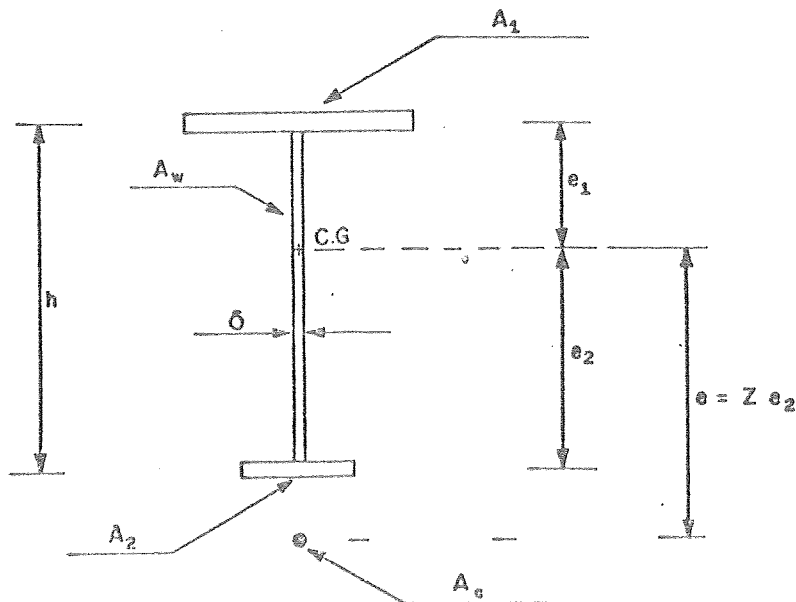
Todas as propriedades da seção transversal, dizem respeito à seção I idealizada, fig. 1, e podem ser expressas em função de três parâmetros:

$$a = \frac{e_2}{e_1} \dots \dots \dots \text{assimetria da seção.}$$

$$a_2 = \frac{A_2}{A} \dots \dots \dots \text{parâmetro da aba.}$$

$$\lambda = \frac{h}{\delta} \dots \dots \dots \text{esbeltez da alma.}$$

Fig. 1 — Seção Idealizada.



3.1 - Cálculo das Áreas A_1 , A_2 e A_w em função de a e a_2 .

Expressando o momento estático da seção total idealizada em relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade, fig. 1 tem-se:

$$M_S \equiv A_1 e_1 + \delta e_1 \frac{e_1}{2} - A_2 e_2 - \delta e_2 \frac{e_2}{2} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

Como:

$$A = A_1 + A_2 + A_w \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

e

$$A_w = h \equiv \delta(e_1 + e_2) \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

Tem-se:

$$A_1 \left(1 + \frac{e_2}{e_1}\right) - A \frac{e_2}{e_1} + A_w \frac{e_2}{e_1} + \frac{A_w}{2} - \frac{A_w}{2} \frac{e_2}{e_1} = 0 \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

$$\text{Substituindo o valor de } a = \frac{e_2}{e_1} \quad \dots \dots \dots (2.5)$$

na expressão (2.4) e simplificando-se, obtêm-se:

$$A_1 = A \left[\frac{a}{a+1} - \frac{A_w}{2A} \right] \quad \dots \dots \dots (2.6)$$

$$\text{Definindo: } K = \frac{A_w}{A} \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

e substituindo em (2.6) acha-se a expressão definitiva para A_1 .

$$A_1 = A \left[\frac{a}{a+1} - \frac{K}{2} \right] \quad \dots \dots \dots \text{eq. (2.8)}$$

Analogamente acha-se a expressão para A_2 .

$$A_2 = A \left[\frac{1}{a+1} - \frac{K}{2} \right] \quad \dots \dots \dots \text{eq. (2.9)}$$

Determina-se K a partir da eq. 2,9

$$\frac{A_2}{A} = a_2 = \frac{1}{a+1} - \frac{K}{2} \dots \dots \dots \text{eq. 2.10}$$

donde se tira que

$$K = 2 \left[\frac{1 - a_2(a+1)}{a+1} \right] \dots \dots \dots \text{eq. 2.11}$$

3.2 - Cálculo da Altura da Viga, h

$$\text{Com } A_w = h \cdot \delta \dots \dots \dots \text{eq. 2.12}$$

e

$$\lambda = \frac{h}{\delta} \dots \dots \dots \text{eq. 2.13}$$

acha-se a expressão para h, eliminando δ ;

$$h = \sqrt{\lambda K A} \dots \dots \dots \text{eq. 2.14}$$

3.3 - Cálculo das excentricidades e_1 e e_2

Definiu-se assimetria da seção

$$a = \frac{e_2}{e_1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.15}$$

$$a + 1 = \frac{e_1 + e_2}{e_1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.16}$$

$$a + 1 = \frac{h}{e_1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.17}$$

substituindo na expressão acima a eq. 2.14, tem-se:

$$e_1 = \frac{\sqrt{\lambda K A}}{a + 1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.18}$$

e substituindo a eq. 2.18 na expressão 2.15, obtêm-se e_2

$$e_2 = \frac{a}{a + 1} \sqrt{\lambda K A} \dots \dots \dots \text{eq. 2.19}$$

3.4 - Cálculo do Momento de Inércia J

Pela expressão do momento de inércia tem-se:

$$J \equiv A_1 e_1^2 + A_2 e_2^2 + \frac{\delta h^3}{12} + A_w \left(e_2 - \frac{h}{2} \right)^2 \dots \dots \dots 2.20$$

Desenvolvendo o termo ao quadrado e substituindo a relação 2.12, tem-se:

$$J = A_1 e_1^2 + A_2 e_2^2 + A_w \left[e_2^2 - e_2 h + \frac{h^2}{3} \right] \dots \dots \dots 2.21$$

Substituindo em 2.21 as equações 2.7, 2.8 e 2.9, resulta:

$$J = A \left[\frac{a}{a+1} - \frac{K}{2} \right] e_1^2 + A \left[\frac{1}{a+1} - \frac{K}{2} \right] e_2^2 + AK \left[e_2^2 - e_2 h + \frac{h^2}{3} \right] \dots \dots \dots 2.22$$

Dividindo todos os termos por e_1^2 e lembrando que $a = \frac{e_2}{e_1}$ e

$h = e_1 + e_2$, tem-se:

$$J = \frac{A e_1^2}{6} \left[6a - K(a+1)^2 \right] \dots \dots \dots 2.23$$

E substituindo em 2.23 a eq. 2.18, resulta a expressão final para o momento de inércia:

$$J = \frac{\lambda K A^2}{6(a+1)^2} \left[6a - K(a+1)^2 \right] \dots \dots \dots 2.24$$

3.5 - Cálculo dos Módulos de Resistência W_1 e W_2 .

$$\text{Lembrando que: } W_1 \equiv \frac{J}{e_1} \dots \dots \dots 2.25$$

e

$$W_2 \equiv \frac{J}{e_2} \dots \dots \dots 2.26$$

E substituindo nas expressões acima as equações 2.18, 2.19 e 2.24 obtêm-se:

$$W_1 = \frac{6a - K(a+1)^2}{6(a+1)} \sqrt{\lambda K A^3} \dots \dots \dots \text{eq. 2.27}$$

$$W_2 = \frac{6a - K(a+1)^2}{6a(a+1)} \sqrt{\lambda K A^3} \dots \dots \dots \text{eq. 2.28}$$

4 - Cálculo da Força Redundante no Cabo de Protensão

Desde que a viga tenha capacidade de suportar parte o carregamento sem a ajuda do cabo de protensão, ela poderá ser protendida com um cabo de comprimento menor que o seu, colocado em lugar apropriado; esta estrutura será mais econômica que a viga protendida com um cabo disposto em toda a sua extensão. Geralmente uma viga com um cabo de protensão do mesmo comprimento que o seu é preferida em virtude da maior facilidade de colocação da ancoragem (7).

Serão analisados os dois tipos: cabo de protensão de comprimento igual ao da viga e cabo de protensão de comprimento menor.

A força N de protensão efetiva é aumentada por causa da deformação da viga protendida quanto esta é carregada. O aumento da força no cabo de protensão é chamado de X.

A fig. 2 mostra uma viga simplesmente apoiada, com cabo de protensão mais curto. O momento fletor e a força normal produzidos pela força de protensão são mostrados na fig. 2.b e os esforços na viga devidos à força de protensão e ao aumento X, na fig. 2.c.

A expressão da força redundante, X, pode ser obtida aplicando o teorema de Castigliano à viga no seu estado deformado.

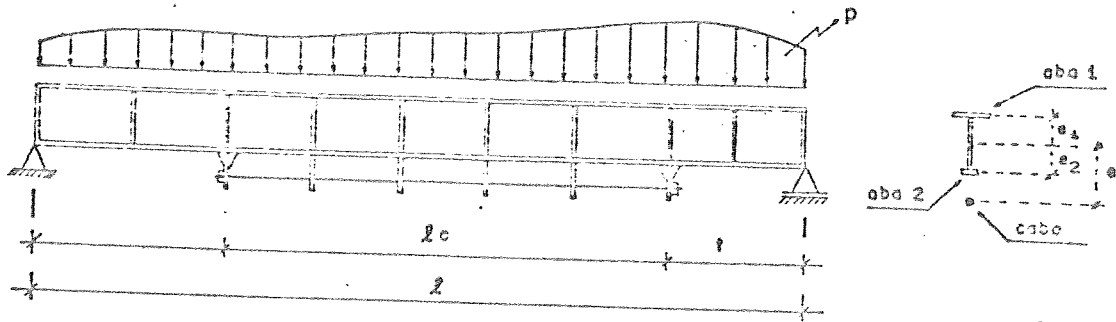
A energia de deformação devida ao momento fletor e à força axial é:

$$U = \frac{1}{2 E J} \left[\int_0^s M^2 dx + \int_s^{s+l} (M - Xe)^2 dx + \int_{s+l_c}^l M^2 dx \right] + \frac{X^2 l_c}{2 E A} + \frac{X^2 l_c}{2 E_c A_c} \dots \dots \dots 2.28$$

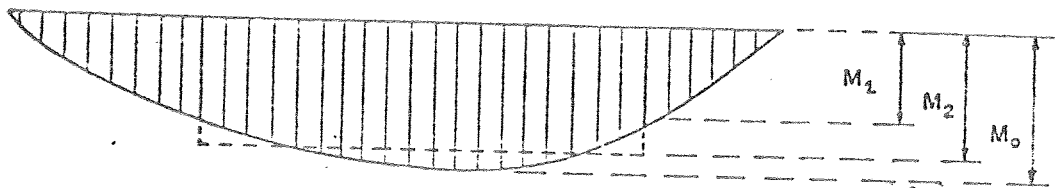
onde:

- A_c área da seção transversal do cabo
- E_c módulo de elasticidade do cabo de protensão
- e excentricidade do cabo de protensão em relação ao centro de gravidade da seção transversal da viga.

Fig. 2 —Viga Protendida com Cabo Menor que Seu Comprimento.

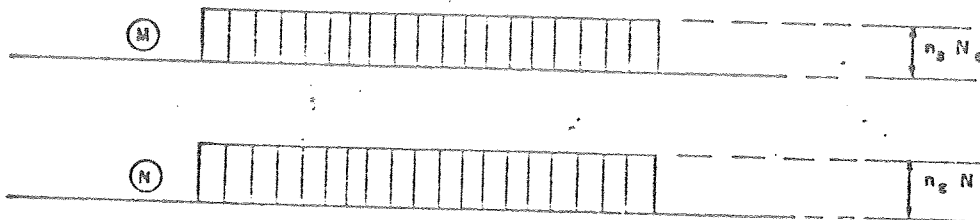


a) Diagrama de Momentos na Viga Isostática.

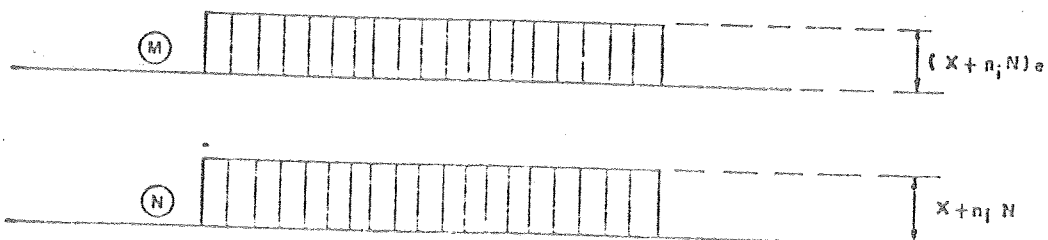


Esforços na Viga Devido às Forças no Cabo.

b) Estrutura Descarregada e Protendida



c) Estrutura Carregada e Protendida.



- J momento de inércia da seção transversal da viga,
 l comprimento da viga.
 l_c comprimento do cabo de protensão.
 M momento fletor devido às cargas externas numa seção genérica.
 s,t comprimentos que definem a posição do cabo de protensão.

Aplicando o teorema de Castigliano para a eq. 2.28, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{E J} \int_s^{s+l_c} (M - X e) e \, dx + \frac{X l_c}{E A} + \frac{X l_c}{E_c A_c} = 0 \dots \dots \dots 2.29$$

$$X l_c \left[\frac{e^2}{E J} + \frac{1}{E A} + \frac{1}{E_c A_c} \right] = \frac{1}{E J} \int_s^{s+l_c} M e \, dx \dots \dots \dots 2.30$$

$$X = \frac{\frac{1}{l_c} \int_s^{s+l_c} M \, dx}{e + \frac{J}{A e} \left[1 + \frac{E A}{E_c A_c} \right]} \dots \dots \dots \text{eq. 2.31}$$

O numerador da eq. 2.31 representa o valor médio do diagrama de momentos fletores da viga isostática, devido às cargas transversais, no trecho compreendido entre as ancoragens do cabo de protensão, isto é:

$$M_2 = \frac{1}{l_c} \int_s^{s+l_c} M \, dx \dots \dots \dots \text{eq. 2.32}$$

Define-se então:

$$m_1 = \frac{M_1}{M_0} \dots \dots \dots \text{eq. 2.33}$$

e

$$m_2 = \frac{M_2}{M_0} \dots \dots \dots \text{eq. 2.34}$$

onde:



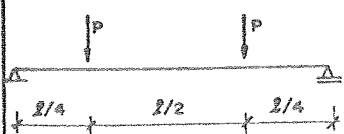
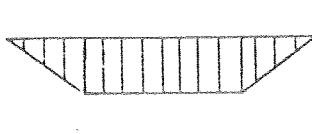
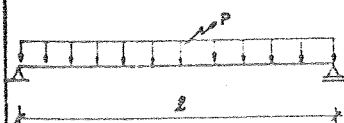
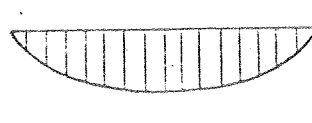

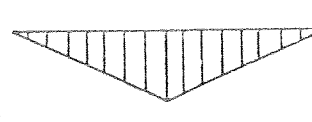
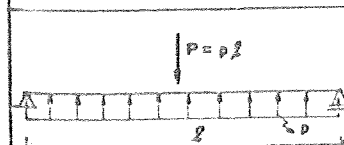
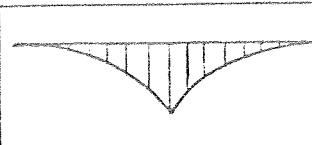
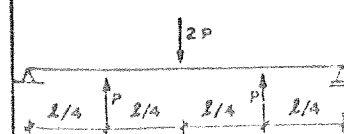
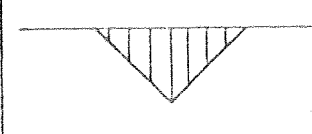
M_0 momento fletor máximo devido às cargas transversais na viga isostática.

M_1 valor do momento fletor produzido pelas cargas transversais na viga isostática, na seção de aplicação da ancoragem.

É sempre possível expressar m_1 em função de m_2 , para um determinado diagrama de momentos fletores. Também as relações $\frac{t}{l}$, $\frac{s}{l}$, e $\frac{lc}{l}$, que exprimem a posição do cabo e o seu comprimento, podem ser obtidas em função de m_1 .

Para exemplificar são apresentadas na tabela 1 essas relações para seis formas básicas de diagrama de momentos fletores.

Tabela 1 — Relação Entre $\frac{s}{l}$, $\frac{t}{l}$, $\frac{lc}{l}$ e m_2 , em Função de m_1 para Seis Formas Básicas de Diagramas de Momento Fletor

CARREGAMENTO	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES	$m_2 = f(m_1)$		$\frac{lc}{l}$	$\frac{s}{l} = \frac{t}{l}$
		$lc = l$	$lc < l$		
		1,0	1,0	1,0	-
		0,75	$\frac{2+m_1}{2} - \frac{1}{2(2-m_1)}$	$1 - \frac{m_1}{2}$	$\frac{1}{2} (1 - \frac{lc}{l})$
		0,667	$\frac{2+m_1}{3}$	$\sqrt{1-m_1}$	
		0,5	$\frac{1+m_1}{2}$	$1 - m_1$	
		0,333	$\frac{1+m_1+\sqrt{m_1}}{3}$	$1 - \sqrt{m_1}$	
		0,25	$\frac{1+m_1}{2}$	$\frac{1-m_1}{2}$	

5 - Formulação da Solução

5.1 - Generalidades

Considera-se que a viga seja protendida no seu estado descarregado, em fábrica ou no local da obra. O método pelo qual a viga é protendida, é aqui de importância secundária. Todavia, o conceito básico é que um ou mais cabos sejam tracionados e estejam paralelos ou inclusos na aba tracionada, com comprimentos que podem ser igual ou menor que o comprimento da viga. Considera-se também que os vários tipos de aço que a compõem trabalhem sempre no regime elástico.

Na seção idealizada da fig. 1, o cabo tracionado é colocado perto e paralelo à aba 2. A posição do cabo é definida através de um parâmetro Z , indicado na figura, onde $Z = \frac{e}{e_2}$.

5.2 - Parâmetros Seletivos

Determinados parâmetros encontrados na análise do dimensionamento econômico das vigas protendidas, devem ser escolhidos a priori pelo projetista. Esses parâmetros são escolhidos em função da estabilidade transversal da viga, das características construtivas, do tipo de aço a ser usado, etc.

Esses parâmetros são os seguintes:

- Z parâmetro de localização do cabo de protensão
- n_s, n_i coeficientes de precisão da protensão
- λ esbeltez da alma (Eventualmente pode-se escolher h ou δ).
- R máxima tensão de tração na aba 2. Esta é a tensão de referência.
- ρ_1, ρ_2, ρ_c relação entre as tensões de projeto definidas nas equações 2.35, 2.37 e 2.38.

Todos os outros parâmetros necessários para a complementação do projeto e possivelmente controlar a estabilidade da viga, força cortante e deflexões, são expressos em função dos parâmetros seletivos, do máximo valor do momento fletor e das propriedades da seção transversal (particularmente a_2 e a). Esses parâmetros são os seguintes:

$$A = a_3 \sqrt[3]{\frac{M_o^2}{R^2 \lambda}} \dots \text{área da seção transversal da viga.}$$

$$A_1 = a_1 A \dots \text{área da seção transversal da aba 1.}$$

$$A_2 = a_2 A \dots \text{área da seção transversal da aba 2.}$$

$$A_w = a_w A \dots \text{área da seção transversal da alma.}$$

$$A_c = a_c A \dots \text{área da seção transversal do cabo de protensão.}$$

$$N = a_n A \dots \text{força efetiva de protensão.}$$

$$X = a_x A \dots \text{força redundante no cabo de protensão.}$$

5.3 - Variáveis Independentes envolvidas no dimensionamento

Os dimensionamentos de estruturas estáticamente indeterminadas, como neste caso, onde se quer esgotar a capacidade do material, são governados unicamente pelas condições de resistência. O melhor resultado (por exemplo peso mínimo) é obtido pela procura de um dimensionamento que permita o escoamento das fibras extremas do material numa determinada seção. Outras condições, tais como deflexões, flambagem, resistência à força cortante não precisam ser controladas no dimensionamento que esgote a capacidade do material, pois isto é feito através dos parâmetros seletivos (escolha adequada de λ vigas de contraventamento, controle da tensão máxima nas abas comprimidas, etc.). Posteriormente essas condições poderão ser verificadas.

Para o caso de cabo de protensão de comprimento menor que o da viga, o número máximo de variáveis independentes é sete e são relacionadas abaixo:

$$A \dots \text{área da seção transversal da viga.}$$

$$A_c \dots \text{área da seção transversal do cabo de protensão.}$$

$$X \dots \text{aumento da força no cabo de protensão}$$

$$N \dots \text{força efetiva de protensão}$$

- m_1 , razão entre momentos
- a , assimetria da seção
- a_2 , parâmetro que define a aba 2

O número de equações envolvidas é seis, das quais cinco são resultantes das condições de resistência e uma de compatibilidade de deslocamentos. Esse número é menor que o de variáveis independentes. Para se obter o dimensionamento ótimo, o cálculo é executado em função de uma variável extra, que pode ser, por exemplo, a_2 .

Em certas situações, as equações de resistência fornecem para uma variável ou várias delas, valores no limite de utilização ou até além deste. Por exemplo, a variável a_2 que define a área da seção transversal da aba 2, pode fazer com que esta área seja tal, que as condições construtivas ou de estabilidade vetem seu uso. Neste caso a variável a_2 é obtida de uma condição imposta ao invés de uma condição de otimização.

A técnica usada para a otimização tem por princípio, reduzir as equações envolvidas, através da eliminação de algumas variáveis, a uma única, chamada Equação Governante. Esta equação governante junto a uma condição de otimização (ou uma condição de estabilidade), que é função das mesmas variáveis que definem a equação governante, devem ser tratadas numericamente porque a sua complexidade exclui qualquer condição explícita.

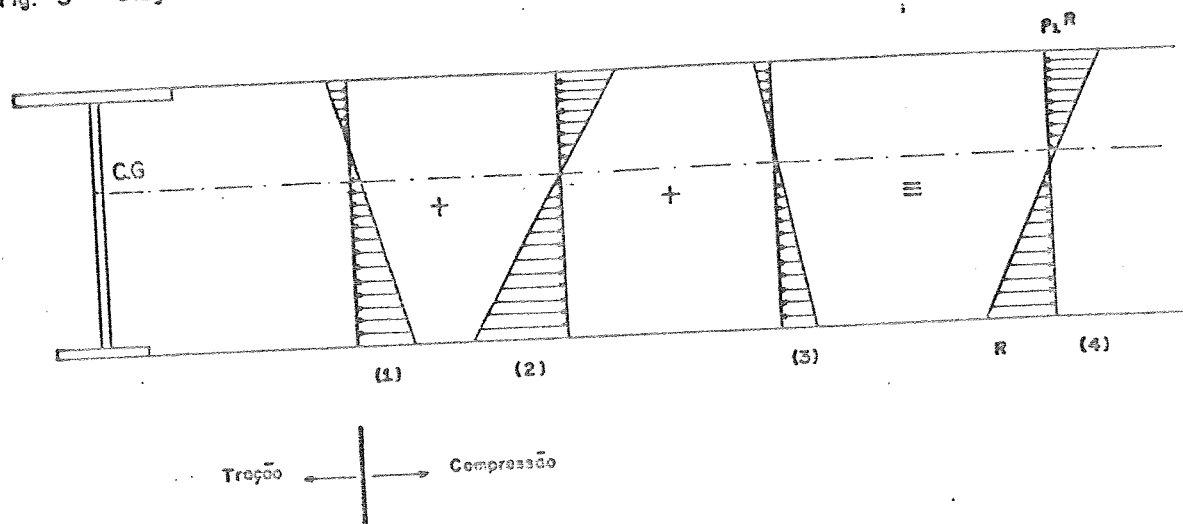
Para a viga protendida de aço, com cabo menor que o seu comprimento, seis equações são reduzidas à equação governante em função de a e a_2 .

6 - Dedução da Equação Governante para uma Viga Protendida com cabo de Protensão menor que o seu comprimento.

6.1 - Generalidades

Os diagramas de tensões normais para os vários estágios de carregamento na seção do máximo momento fletor estão esquematizados na fig. 3.

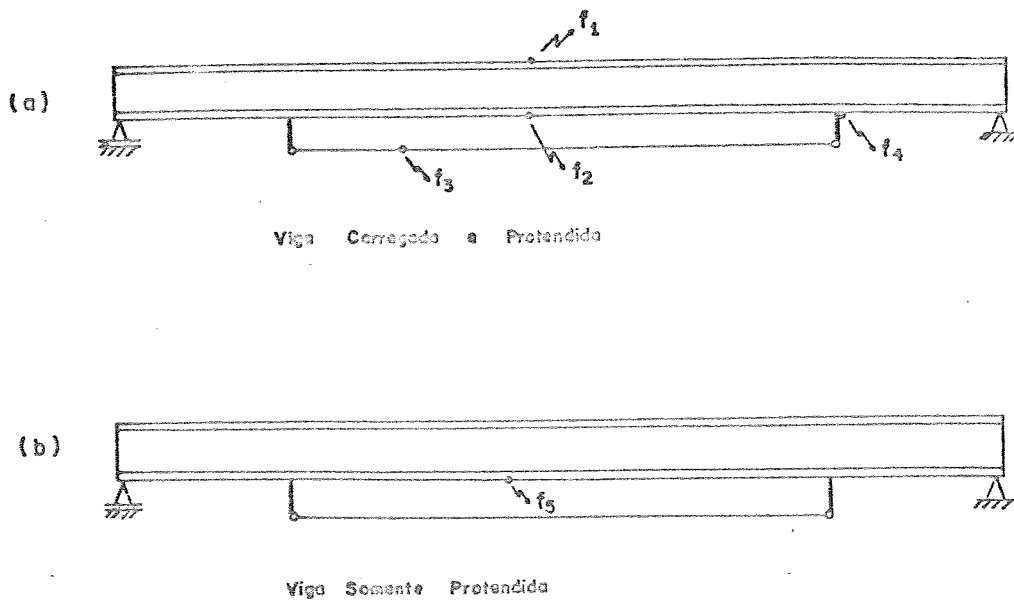
Fig. 3 -- Diagramas de Tensões nos Vários Estágios de Carregamento.



- (1) diagrama de tensões produzidos pela força efetiva de protensão, N.
- (2) diagrama de tensões produzidos pelo carregamento externo.
- (3) diagrama de tensões produzidas pela força redundante, X.
- (4) diagrama de tensões resultante.

As fibras analisadas são chamadas de f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 e são mostradas na fig. 4 para uma viga protendida com cabo de protensão de comprimento menor que o da viga. As deduções que se seguem são válidas para um carregamento genérico.

Fig. 4 — Pontos da Viga Analisados pelas Equações de Resistência.



6.2 - Cálculo das Tensões nas Fibras mais Solicitadas

a) Tensão de compressão na aba 1, na seção do máximo momento fletor resultante do carregamento total, fibras f_1 da fig. 4.a.

$$\sigma_1^- = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X)e}{W_1} + \frac{M_o}{W_1} \leq \rho_1 R \dots \text{eq. 2.35}$$

b) Tensão de tração na aba 2, na seção do máximo momento fletor resultante do carregamento total, fibras f_2 da fig. 4.a.

$$\sigma_2^+ = \frac{M_o}{W_2} - \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X)e}{W_2} \leq R \dots \text{eq. 2.36}$$

c) Tração no cabo de protensão resultante do carregamento total, fibras f_3 da fig. 4.a.

$$\sigma_c^+ = \frac{n_s N + X}{A_c} \leq \rho_c R \dots \text{eq. 2.37}$$

d) Compressão na aba 2, numa seção qualquer que esteja entre os suportes de ancoragem, no estado descarregado da viga, fibras f_5 da fig. 4.b.

$$\sigma_2^- = \frac{n_s N}{A} + \frac{n_s N e}{W_2} \leq \rho_2 R. \dots \dots \dots \text{eq. 2.38}$$

e) Tração na aba 2, na altura do suporte de ancoragem, fora da parte protendida da viga, fibras f_4 da fig. 4.a.

$$\sigma_2^+ = \frac{m_1 M_0}{W_2} \leq R. \dots \dots \dots \text{eq. 2.39}$$

6.3 - Cálculo da Área Total da Seção Transversal da Viga em Função dos Parâmetros Seletivos, do Máximo Momento Fletor e de a_2 e a .

Resolvendo simultaneamente as equações 2.35 e 2.36, tem-se:

$$(n_i N + X) \left[\frac{1}{A} - \frac{e}{W_1} \right] = \rho_1 R - \frac{M_0}{W_1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.40}$$

$$(n_i N + X) \left[-\frac{1}{A} - \frac{e}{W_2} \right] = R - \frac{M_0}{W_2} \dots \dots \dots \text{eq. 2.41}$$

Dividindo membro a membro as expressões acima, resulta:

$$\left(\rho_1 R - \frac{M_0}{W_1} \right) \left(-\frac{1}{A} - \frac{e}{W_2} \right) = \left(R - \frac{M_0}{W_2} \right) \left(\frac{1}{A} - \frac{e}{W_1} \right). \text{ 2.42}$$

Efetuando o produto e reagrupando, tem-se:

$$-\frac{R}{A} (\rho + 1) + \frac{M_0}{A} \left(\frac{W_2 + W_1}{W_2 W_1} \right) + R e \left(\frac{W_2 - \rho_1 W_1}{W_2 W_1} \right) = 0. \dots \dots \text{2.43}$$

Substituindo na expressão acima o valor:

$$a = \frac{W_1}{W_2} \dots \dots \dots \text{2.44}$$

Resulta

$$-\frac{R}{A} (\rho_1 + 1) + \frac{M_0}{A} \left(\frac{a + 1}{W_1} \right) + R e \left(\frac{1 - \rho_1 a}{W_1} \right) = 0 \dots \dots \text{2.45}$$

Substituindo W_1 pelo seu valor expresso pela equação 2.26 e $e = Z e_2$ na expressão 2.45 e em seguida dividindo todos os termos por R, tem-se:

$$-\frac{\rho_1 + 1}{A} + \frac{M_0}{A R} \left[\frac{6(a+1)^2}{6a - K(a+1)^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda K A^3}} \right] + \frac{Za \cdot 6(1 - \rho_1 a)}{A \cdot 6a - K(a+1)^2} = 0 \quad \dots \dots \dots 2.46$$

Cancelando os fatores comuns e multiplicando todos os termos por $\frac{6a - K(a+1)^2}{6(a+1)^2}$, chega-se a:

$$\frac{M_0}{R} \frac{1}{\sqrt{\lambda K A^3}} = \frac{(\rho_1 + a) [6a - K(a+1)^2] + 6 \cdot Za(\rho_1 a - 1)}{6(a+1)^2} \quad \dots \dots \dots 2.47$$

Desenvolvendo o segundo termo:

$$\frac{M_0}{R} \frac{1}{\lambda A^3} = \sqrt{K} \frac{6 \left[1 + (\rho_1 a + 1) \frac{Za + 1}{a + 1} \right] - K(\rho_1 + 1)(a + 1)}{6(a + 1)}$$

Chamando de "c" ao segundo termo:

$$c = \sqrt{K} \frac{6 \left[1 + (\rho_1 a + 1) \frac{Za + 1}{a + 1} \right] - K(\rho_1 + 1)(a + 1)}{6(a + 1)} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.49}$$

Chega-se à expressão para A

$$A = \sqrt[3]{\frac{M_0^2}{c^2 \lambda R^2}} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.50}$$

ou

$$A = a_3 \sqrt[3]{\frac{M_0^2}{\lambda R^2}} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.51}$$

donde se conclui que

$$a_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{c^2}} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.52}$$

6.4 - Cálculo da Força Efetiva de Protensão

Isolando N da equação 2.38, tem-se:

$$n_s N \left[\frac{1}{A} + \frac{e}{W_2} \right] = \rho_2 R \dots \dots \dots 2.53$$

E lembrando que $e = Ze_2$ e substituindo os valores de e_2 , eq. 2.19 e W_2 , eq. 2.27 na expressão acima tem-se:

$$n_s N \left[\frac{6a - K(a+1)^2 + 6Za^2}{6a - K(a+1)^2} \right] = \rho_2 R A \dots \dots \dots 2.54$$

ou

$$\frac{n_s N}{\rho_2 R A} = \frac{6a - K(a+1)^2}{(a+1) \left[6a \frac{Za+1}{a+1} - K(a+1) \right]} \dots \dots \dots 2.55$$

Chamando "d" ao segundo termo da expressão 2.55,

$$d = \frac{6a - K(a+1)^2}{(a+1) \left[6a \frac{Za+1}{a+1} - K(a+1) \right]} \dots \dots \dots 2.56$$

Chega-se à expressão para N.

$$N = d \frac{R}{n_s} A \dots \dots \dots \text{eq. 2.57}$$

ou

$$N = a_n A \dots \dots \dots \text{eq. 2.58}$$

$$\text{onde } a_n = d \frac{R}{n_s} \dots \dots \dots \text{eq. 2.59}$$

6.5 - Cálculo da Força Redundante X, no Cabo de Protensão

Resolvendo simultaneamente as equações 2.35 e 2.36, tem-se:

$$(n_i N + X) \frac{W_1 + W_2}{A} = R(\rho_1 W_1 - W_2) \dots \dots \dots 2.60$$

Isolando X, acha-se:

$$X = R A \frac{\rho_1 W_1 - W_2}{W_1 + W_2} - n_i N \dots \dots \dots 2.61$$

Substituindo o valor de N encontrado na equação 2.57

acha-se:

$$X = R A \left[\frac{\rho_1 W_1 - W_2}{W_1 + W_2} - \frac{n_i}{n_s} d \right] \dots \dots \dots 2.62$$

Substituindo W_1 e W_2 por seus valores indicados nas equações 2.26 e 2.27, encontra-se a expressão para X:

$$X = R A \left[\frac{\rho_1 a - 1}{a + 1} - d \frac{n_i}{n_s} \right] \dots \dots \dots \text{eq. 2.63}$$

ou

$$X = a_x A \dots \dots \dots \text{eq. 2.64}$$

onde

$$a_x = R \left[\frac{\rho_1 a - 1}{a + 1} - d \frac{n_i}{n_s} \right] \dots \dots \dots \text{eq. 2.65}$$

6.6 - Cálculo da Área da Seção Transversal do Cabo de Protensão.

Substituindo na equação 2.37 os valores de N e de X, expressões pelas equações 2.57 e 2.63, respectivamente, tem-se:

$$A_c = \frac{A}{\rho_c} \left[d \left(1 - \frac{n_i}{n_s} \right) + \frac{\rho_1 a - 1}{a + 1} \right] \dots \dots \dots \text{eq. 2.67}$$

e chamando

$$b = d \left(1 - \frac{n_i}{n_s} \right) + \frac{\rho_1 a - 1}{a + 1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.68}$$

Acha-se a expressão para A_c :

$$A_c = \frac{b}{\rho_c} A \dots \dots \dots \text{eq. 2.69}$$

ou

$$A_c = a_c A \dots \dots \dots \text{eq. 2.70}$$

sendo

$$a_c = \frac{b}{\rho_c} \dots \dots \dots \text{eq. 2.71}$$

6.7 - Cálculo da Expressão de m_1 , Relação Entre o Momento Fletor Máximo e o Momento Fletor na Altura dos Suportes de Ancoragem

Na altura dos suportes de ancoragem, as fibras extremas da aba 2 tem sua capacidade esgotada pelo momento fletor a_1 atuante, isto é:

$$M_1 = R W_2 \text{ ou } \frac{M_o}{R} = \frac{W_2}{m_1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.72}$$

Substituindo esta relação na equação 2.50, tem-se:

$$\sqrt{\lambda K A^3} = \frac{\sqrt{K}}{c} \frac{W_2}{m_1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.73}$$

Isolando m_1 e substituindo W_2 por seu valor expresso pela equação 2.27, acha-se:

$$\frac{1}{m_1} = \frac{c}{\sqrt{K}} \frac{6a(a+1)}{6a-K(a+1)^2} \dots \dots \dots \text{eq. 2.74}$$

6.8 - Dedução da Equação Governante

No item 4 chegou-se à seguinte expressão para a força redundante X

$$X = \frac{\frac{1}{l_c} \int_s^{s+l_c} M dx}{e + \frac{J}{Ae} \left(1 + \frac{EA}{E_c A_c}\right)} \dots \dots \dots \text{eq. 2.31}$$

O numerador desta expressão é o valor médio do diagrama de momentos fletores da viga protendida, no trecho compreendido entre os suportes de ancoragem, isto é:

$$M_2 = \frac{1}{l_c} \int_s^{s+l_c} M dx \dots \dots \dots \text{eq. 2.75}$$

e

$$M_2 = M_o m_2 = \frac{m_2}{m_1} M_1 = \frac{m_2}{m_1} R W_2 \dots \dots \dots \text{eq. 2.76}$$

Entrando com estes valores na equação 2.31; chamando

$$\epsilon = \frac{E_o}{E_c}, \text{ e considerando-se a equação 2.69, tem-se:}$$

$$X = R \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{Z \frac{e_2}{W_2} + \frac{1}{ZA} \left(1 + \frac{\epsilon}{b}\right)} \dots \dots \dots \text{eq. 2.77}$$

Substituindo agora as propriedades da seção transversal e_2 e W_2 , pelas equações 2.19 e 2.27, respectivamente, tem-se:

$$X = R A \frac{m_1}{m_2} \frac{Z}{\left[Z \frac{6a(Za+1)-6a}{6a-K(a+1)^2} \right] + \frac{\epsilon}{b} + 1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.78}$$

Somando e subtraindo $K(a+1)^2$ no numerador da expressão entre colchetes da equação 2.78, tem-se:

$$X = R A \frac{m_1}{m_2} \frac{Z}{\left\{ Z \frac{(a+1) \left[6a \frac{Za+1}{a+1} - K(a+1) \right] - 6a + K(a+1)^2}{6a-K(a+1)^2} \right\} + \frac{\epsilon}{b} + 1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.79}$$

Dividindo-se o denominador e o numerador da expressão entre chaves por

$$\frac{a+1}{\rho_c} \left[6a \frac{Za+1}{a+1} - K(a+1) \right] \text{ e sabendo-se que:}$$

$$d = \rho_c \frac{6a - K(a+1)^2}{(a+1) \left[6a \frac{Za+1}{a+1} - K(a+1) \right]}$$

chega-se a:

$$X = R A \frac{m_2}{m_1} \frac{Z}{Z \left(\frac{\rho_c}{d} - 1 \right) + \frac{\epsilon}{b} + 1} \dots \dots \dots \text{eq. 2.80}$$

Igualando-se as duas expressões de X, equações 2.63 e 2.80, tem-se:

$$R A \frac{m_2}{m_1} \frac{Z}{Z \left(\frac{\rho_c}{d} - 1 \right) + \frac{\epsilon}{b} + 1} = R A \left(\frac{\rho_1 a - 1}{a+1} - d \frac{n_i}{n_s} \right) =$$

$$= R A (b - d) \dots \dots \dots \text{eq. 2.81}$$

Portanto

$$\frac{m_2}{m_1} \frac{Z}{Z \left(\frac{\rho_c}{d} - 1 \right) + \frac{\epsilon}{b} + 1} = b - d \dots \dots \dots \text{eq. 2.82}$$

ou

$$\frac{m_2}{m_1} \frac{Z \left(\frac{\rho_c}{d} - 1 \right) + \frac{\epsilon}{b} + 1}{Z} (b - d) = 0 \dots \dots \dots \text{eq. 2.83}$$

Através de passos algébricos chega-se a:

$$\frac{m_2}{m_1} - \frac{\rho_c}{d} (b - d) \left[1 + \left(\frac{1 - Z}{Z \rho_c} \right) d + \frac{\epsilon}{Z \rho_c \frac{b}{d}} \right] = 0 \dots \dots \dots \text{eq. 2.84}$$

Chamando $W = \rho_c \left(\frac{b}{d} - 1 \right)$ tem-se a Equação Governante

$$G(a, a_2) = \frac{m_2}{m_1} - W \left[1 + \left(\frac{1-Z}{Z \rho_c} \right) d + \frac{\epsilon}{Z(W + \rho_c)} \right] = 0 \quad \dots \text{eq. 2.85}$$

Todavia, para as vigas protendidas com cabo de protensão menor que o seu comprimento, o valor de m_1 é função de m_2 (tabela 1), variando portanto para cada tipo de diagrama de momentos fletores.

7 - Dedução da Equação Governante para um Viga Protendida com Cabo de Protensão Igual ao seu Comprimento.

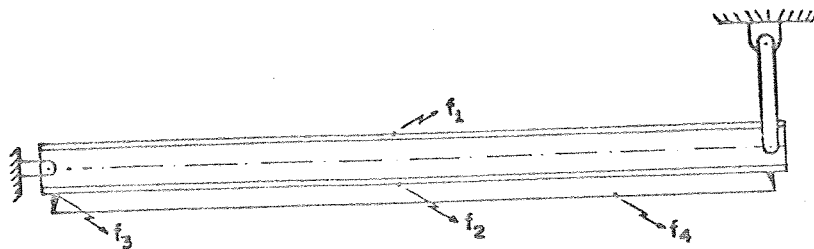
7.1 - Generalidades

A viga protendida com cabo de protensão igual ao seu comprimento, fig. 5, tem os suportes de ancoragem junto aos apoios. Devido a este fato, o número de condições de resistência é diminuído de uma equação, em relação ao caso da viga protendida com cabo de protensão menor que o seu comprimento. Por outro lado, o número de incógnitas também sofre diminuição. Sendo o momento fletor, devido às cargas externas, nulo nos apoios, a relação entre o momento fletor junto aos suportes de ancoragem, M_1 e o momento fletor máximo, M_0 , também é nula.

As variáveis independentes são agora em número de seis.

- A área da seção transversal da viga.
- A_c área da seção transversal do cabo de protensão
- N força efetiva de protensão.
- a assimetria da seção.
- a_2 parâmetro da aba 2.
- X força redundante no cabo de protensão

Fig. 5 - Pontos da Vigas Analisados pelas Equações de Resistência.



7.2 - Condições de Resistência

a) Tensão de compressão na aba 1, na seção do máximo momento fletor, resultante do carregamento total, fibras f_1 da fig. 5.

$$\sigma_1^- = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X)e}{W_1} + \frac{M_o}{W_1} \leq \rho_1 R \dots \dots \dots \text{eq. 2.86}$$

b) Tensão de tração na aba 2, na seção do máximo momento fletor, resultante do carregamento total, fibras f_2 da fig. 5.

$$\sigma_2^+ = \frac{M_o}{W_2} - \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X)e}{W_2} \leq R \dots \dots \dots \text{eq. 2.87}$$

c) Tensão de tração no cabo de protensão, resultante do carregamento total, fibras f_4 da fig. 5.

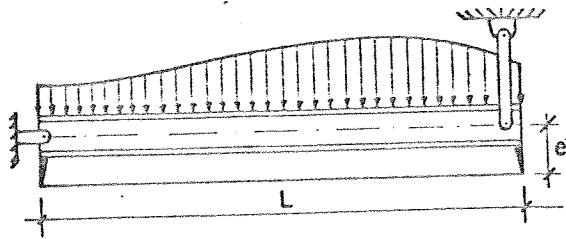
$$\sigma_c^+ = \frac{n_s N + X}{A_c} \leq \rho_c R \dots \dots \dots \text{eq. 2.88}$$

d) Tensão de compressão da aba 2, junto dos apoios de ancoragem, resultante do carregamento total, fibras f_3 da fig. 5.

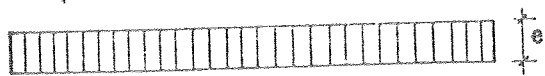
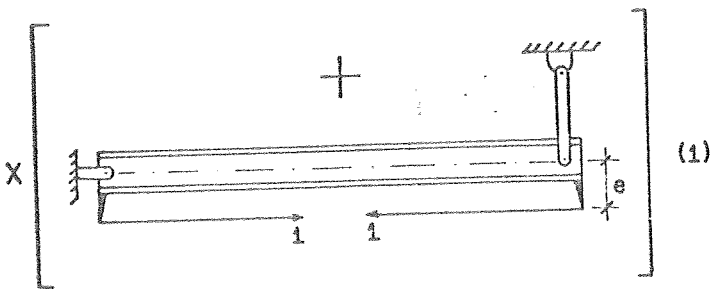
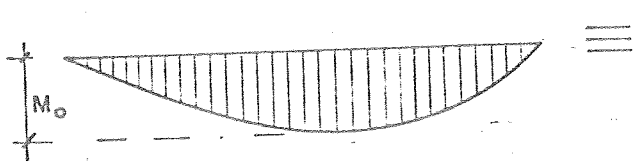
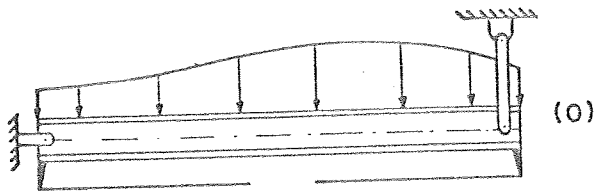
$$\sigma_2^- = \frac{n_s N + X}{A} + \frac{(n_s N + X)e}{W_2} \leq \rho_2 R \dots \dots \dots \text{eq. 2.89}$$

A expressão para o cálculo da área da seção transversal da viga não sofre variação em relação à viga com cabo de protensão menor que seu comprimento, pois há coincidência entre as equações 2.35 e 2.86, e 2.36 e 2.87, respectivamente, tendo portanto:

Fig. 6 — Viga com cabo de protensão igual ao seu comprimento.



III



$$A = \sqrt{\frac{3 M_0^2}{c^2 \lambda R^2}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.50}$$

7.3 - Condição de Compatibilidade de Deslocamentos do Cabo de Protensão.

O valor da força X, induzida no cabo de protensão pela ação das cargas externas, pode ser calculada pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, Fig.6.

Os deslocamentos Δ_{10} e δ_{11} necessários para o cálculo da força X são calculados pelas expressões:

$$\Delta_{10} = \int_0^l \frac{M M_1}{E J} ds \dots \dots \dots \text{eq. 2.90}$$

e

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1^2}{E J} ds + \int_0^l \frac{N_1^2}{E A} ds + \int_0^l \frac{N_1^2}{E_c A_c} ds \dots \dots \dots \text{eq. 2.91}$$

Os valores destas integrais podem ser calculados pela regra de Vereschaguin para o cálculo da integral do produto de duas funções: Área do primeiro diagrama vezes a ordenada do segundo diagrama na cota do centro de gravidade do primeiro. Para a área do primeiro diagrama toma-se o valor médio dos momentos fletores em cada seção, multiplicado pelo comprimento da viga. Obtendo com isto:

$$\Delta_{10} = -\frac{1}{E J} M_2 l e \dots \dots \dots \text{eq. 2.92}$$

e

$$\delta_{11} = \frac{e^2 l}{E J} + \frac{l}{E A} + \frac{l}{E_c A_c} \dots \dots \dots \text{eq. 2.93}$$

Por compatibilidade de deslocamentos no cabo de protensão, tem-se:

$$X = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{M_2 l e}{E J}}{\frac{e^2 l}{E J} + \frac{l}{E A} + \frac{l}{E_c A_c}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.94}$$

ou

$$X = \frac{\dots\dots\dots M_2 \dots\dots\dots}{e + \left[\frac{J}{A} + \frac{E J}{E_c A_c} \right] \frac{1}{e}} \dots\dots\dots \text{eq. } 2.95$$

7.4 - Cálculo da Seção Transversal do Cabo de Protensão, A_c

Das equações 2.88 e 2.89, obtêm-se:

$$n_s N+X = \rho_c R A_c \dots\dots\dots \text{eq. } 2.96$$

e

$$n_s N+X = \frac{\rho_2 R}{\frac{1}{A} + \frac{e}{W_2}} \dots\dots\dots \text{eq. } 2.97$$

Pela igualdade das expressões acima, tem-se:

$$\rho_c R A_c = \frac{\rho_2 R}{\frac{1}{A} + \frac{e}{W_2}} \dots\dots\dots \text{eq. } 2.98$$

lembrando que:

$$W_2 = \frac{6a-K(a+1)^2}{6a(a+1)} \sqrt{\lambda K A^3} \dots\dots\dots \text{eq. } 2.27$$

e

$$e = \frac{Za}{a+1} \sqrt{\lambda K A} \dots\dots\dots \text{eq. } 2.99$$

O denominador da equação 2.97 pode ser escrito de outra forma quando nele se substituir as equações 2.27 e 2.99:

$$\frac{1}{A} + \frac{e}{W_2} = \frac{1}{A} \left[1 + \frac{6Za^2}{6a-K(a+1)^2} \right] \dots\dots\dots \text{eq. } 2.100$$

Tem-se portanto:

$$A_c = A \frac{\rho_2}{\rho_c} \frac{6a-K(a+1)^2}{6a(Za+1)-K(a+1)^2} \dots\dots\dots \text{eq. } 2.101$$

chamando

$$a_c = \frac{\rho_2}{\rho_c} \frac{6a - K(a+1)^2}{6a(Za+1) - K(a+1)^2} \dots \dots \dots \text{eq. 2.102}$$

tem-se a expressão final para A_c

$$A_c = a_c A \dots \dots \dots \text{eq. 2.103}$$

7.5 - Cálculo da Força Redundante, X

A expressão para a força no cabo de protensão devido às cargas transversais é encontrada desenvolvendo-se a eq. 2.95.

$$X = \frac{M_2}{e + \left[\frac{J}{A} + \frac{E J}{E_c A_c} \right] \frac{1}{e}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.95}$$

Substituindo em 2.95 as relações:

$$e = Z e_2 \dots \dots \dots \text{eq. 2.104}$$

e

$$W_2 = \frac{J}{e_2} \dots \dots \dots \text{eq. 2.25}$$

e substituindo ainda as expressões de e_2 e W_2 , equações 2.19 e 2.27, respectivamente, encontra-se:

$$X = \frac{M_2}{\frac{Za}{a+1} \sqrt{\lambda K A} + \frac{6a - K(a+1)^2}{6aZ(a+1)} \left[1 + \frac{E A}{E_c A_c} \right] \sqrt{\lambda K A}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.105}$$

Substituindo em 2.97 as equações 2.34 e 2.103 e colocando $\lambda K A$ em evidência, tem-se:

$$X = \frac{m_2 M_o (a+1)}{\sqrt{\lambda K A} \left\{ Za + \frac{6a - K(a+1)^2}{6aZ} \left[1 + \frac{E}{E_c A_c} \right] \right\}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.106}$$

Tirando o valor de M_o da eq. 2.50 e substituindo em 2.105 e lembrando ainda que

$$\epsilon = \frac{E}{E_c} \rho_c \dots \dots \dots \text{eq. 2.107}$$

tem-se a expressão final para X

$$X = \frac{R m_2 c (a+1)}{\sqrt{K} \left\{ Z a + \frac{6a - K(a+1)^2}{6aZ} \left[1 + \frac{\epsilon}{\rho_c a_c} \right] \right\}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.108}$$

chamando

$$a_x = \frac{R m_2 c (a+1)}{\sqrt{K} \left\{ Z a + \frac{6a - K(a+1)^2}{6aZ} \left[1 + \frac{\epsilon}{\rho_c a_c} \right] \right\}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.109}$$

Portanto: $X = a_x A \dots \dots \dots \text{eq. 2.110}$

7.6 - Cálculo da força efetiva de protensão

Da equação 2.87, resulta:

$$(n_i N + X) \left[\frac{1}{A} + \frac{e}{W_2} \right] = \frac{M_o}{W_2} - R \dots \dots \dots \text{eq. 2.111}$$

Substituindo em 2.111 a equação 2.100 e tirando-se o valor de M_o da equação 2.50, tem-se:

$$\frac{(n_i N + X)}{A} \left[1 + \frac{6a^2 Z}{6a - K(a+1)^2} \right] = R \frac{6a(a+1)c - \sqrt{K} [6a - K(a+1)^2]}{\sqrt{K}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.112}$$

ou

$$\frac{n_i N + X}{A} = \frac{6a(a+1)c + \sqrt{K} [6a - K(a+1)^2]}{\sqrt{K} [6a - K(a+1)^2 + 6a^2 Z]} \dots \dots \dots \text{eq. 2.113}$$

Substituindo X pelo seu valor dado pela equação 2.110, tem-se:

$$N = \frac{A}{n_i} \left\{ \frac{R}{\sqrt{K}} \frac{6a(a+1)c - \sqrt{K} [6a - K(a+1)^2]}{6a - K(a+1)^2 + 6a^2 Z} - a_x \right\} \dots \dots \dots \text{eq. 2.114}$$

chamando

$$a_n = \frac{1}{n_i} \left\{ \frac{R}{\sqrt{K}} \frac{6a(a+1)c - \sqrt{K} [6a - K(a+1)^2]}{6a - K(a+1)^2 + 6a^2 Z} - a_x \right\} \dots \dots \dots \text{eq. 2.115}$$

tem a expressão final para N:

$$N = a_n A \dots \dots \dots \text{eq. 2.116}$$

7.7 - Determinação da Equação Governante

A expressão da Equação Governante pode sair de qualquer das condições de resistência, desde que substitua as incógnitas por suas expressões em função de a e a₂.

Tomando a equação 2.88 e nela substituindo as expressões 2.103, 2.110 e 2.116 que determinam os valores de A_c, X e N, respectivamente, tem-se:

$$n_s a_n A + a_x A = a_c A \rho_c R \dots \dots \dots \text{eq. 2.117}$$

Cancelando o fator comum obtêm-se:

$$G(a, a_2) = n_s a_n + a_x - a_c \rho_c R = 0 \dots \dots \dots \text{eq. 2.118}$$

que é a expressão final para a Equação Governante.

8 - Funções Objetivas

8.1 - Generalidades

Chamou-se função objetiva a nova condição que se deve impor ao problema. A escolha do tipo desta função é que norteará a utilidade do projeto. Será analisada uma condição de otimização, mas poderia ser uma condição de estabilidade se assim o fosse exigido pelo problema.

Essas funções objetivas são equações em função de apenas duas variáveis, que deverão ser resolvidas conjuntamente com a Equação Governante, função das mesmas variáveis.

Foi mencionado no item 5.2 que λ é um parâmetro seletivo, todavia, dependendo do tipo ou da utilização do projeto proposto, h ou δ também o poderão ser. Como exemplo, mostra-se abaixo a substituição, na equação 2.50, da esbeltez λ pela altura h.

$$\lambda = \frac{h}{\delta} \quad e \quad A_{\omega} = K A = h \delta \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.119}$$

Portanto

$$K A = \frac{h^2}{\lambda} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.120}$$

Pela equação 2.50 consegue-se o valor de λ

$$\lambda = \frac{M_o^2}{A^3 c^2 R^2} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.121}$$

Substituindo 2.121 em 2.120, tem-se:

$$K A = \frac{\lambda^2 A^3 c^2 R^2}{M_o^2} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.122}$$

Isolando a área A, acha-se:

$$A = \frac{M_o \sqrt{K}}{h c R} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.123}$$

Da mesma forma que $A = f(h)$, pode colocar todas as outras expressões também em função de h. Haverá uma mudança também nas propriedades da seção transversal, por exemplo, o módulo de resistência W_2 será expresso como:

$$W_2 = \frac{A h [a_2 (a+1)^2 + 2a - 1]}{3a(a+1)} \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.124}$$

Serão considerados quatro tipos de funções objetivas: mínimo peso, mínimo preço, máxima capacidade de carga e função objetiva última.

8.2 - Mínimo Volume ou Mínimo Pêso

O volume V, da viga de aço e do cabo de protensão pode ser expresso como:

$$V = A l + A_c l_c \quad \dots \dots \dots \text{eq. 2.125}$$

Substituindo em 2.125 as equações 2.50 e 2.103, tem-se:

$$V = a_3 \sqrt[3]{\frac{M_o^2}{\lambda R^2}} l + a_c a_3 \sqrt[3]{\frac{M_o^2}{\lambda R^2}} l_c \dots \dots \dots \text{eq. 2.126}$$

$$V = \sqrt[3]{\frac{M_o^2}{\lambda R^2}} a_3 (l + a_c l_c) \dots \dots \dots \text{eq. 2.127}$$

Na expressão acima, os valores de M_o , R e λ são constantes ou são parâmetros seletivos para um determinado problema, e a função p_o de ser escrita como:

$$O_v = a_3 \left(1 + a_c \frac{l_c}{l}\right) l \dots \dots \dots \text{eq. 2.128}$$

Onde O_v é a função objetiva que fornece quando resolvida conjuntamente com a Equação Governante, para a viga protendida com cabo de protensão menor que seu comprimento, o menor peso possível.

Para a viga com cabo de protensão igual ao seu comprimento, a função objetiva passa a ser escrita como:

$$O_v = a_3 (1 + a_c) l \dots \dots \dots \text{eq. 2.129}$$

8.3 - Mínimo Preço do Material Consumido

A função objetiva neste caso é derivada da equação 2.128 ou 2.129:

$$O_p = a_3 \left(p_v + p_c a_c \frac{l_c}{l}\right) l \dots \dots \dots \text{eq. 2.130}$$

ou

$$O_p = a_3 (p_v + p_c a_c) l \dots \dots \dots \text{eq. 2.131}$$

onde p_v é o preço por unidade de volume do aço usado na fabricação da viga e p_c o preço do aço de alta resistência, também por unidade de volume.

8.4 - Máxima Capacidade de Carga da Viga

Admitindo-se que seja provido o cabo de protensão com o vo-

lume necessário, a máxima capacidade de carga será função apenas da seção transversal da viga de aço.

$$0_c = a_3 \dots \dots \dots \text{eq. 2.132}$$

8.5 - Função Objetiva Última

Caso as funções objetivas anteriores, quando resolvidas com a Equação Governante, levem as seções da viga de aço muito pequenas, de tal maneira que seu uso seja vedado por questões construtivas ou de estabilidade, a função objetiva deixará de ser uma condição de otimização para passar a ser uma condição imposta.

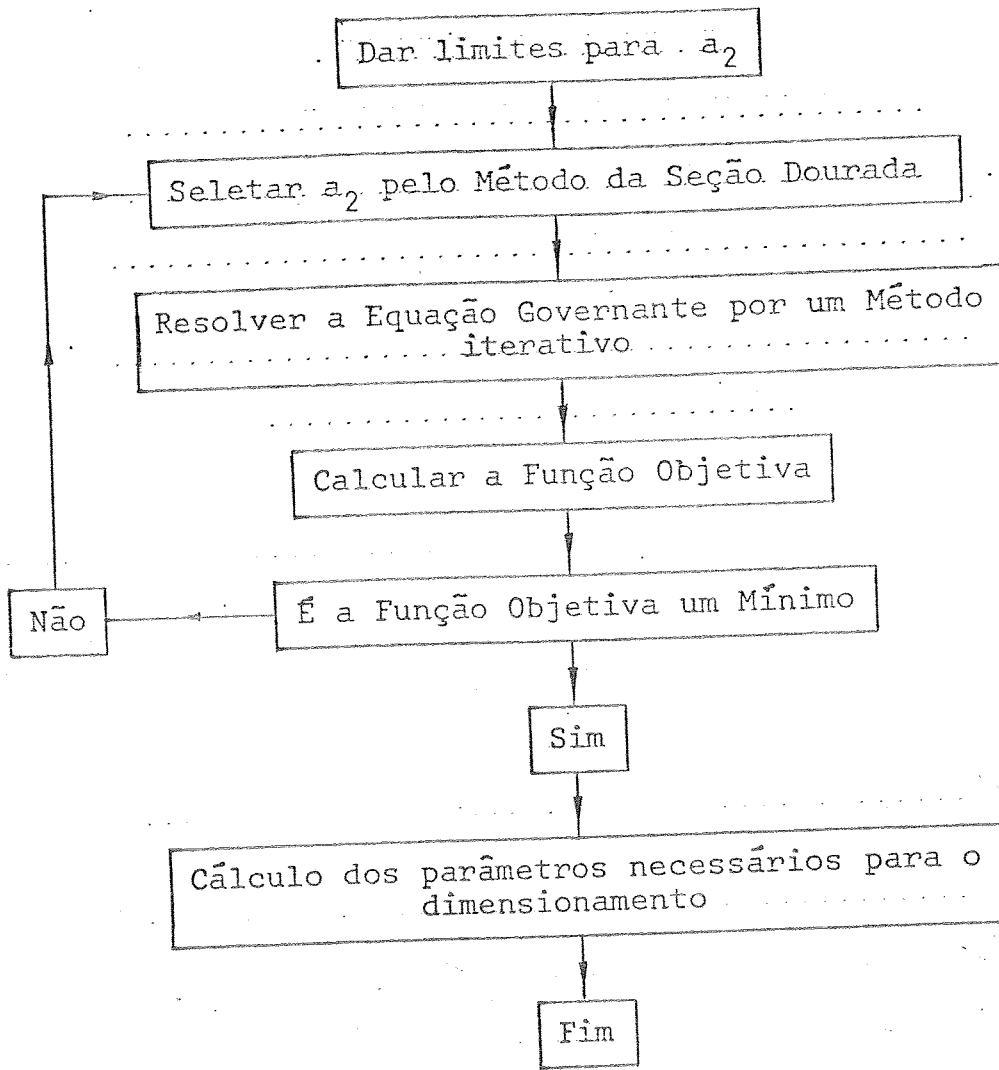
$$0_u = a_2 \dots \dots \dots \text{eq. 2.133}$$

sendo a_2 uma das variáveis envolvidas na Equação Governante ou nas Funções Objetivas; a_2 - parâmetro da aba 2.

9 - Solução da Equação Governante e da Função Objetiva - Métodos de Cálculo

9.1 - Generalidades

A solução da viga de aço pretendida é achada quando se encontram valores para a_2 e a , que satisfazem a Equação Governante $G(a, a_2) = 0$, e tornam mínima a Função Objetiva escolhida, $0(a, a_2)$. Estas duas equações são muito complexas e não é possível colocá-las numa forma explícita. Portanto os valores de a_2 e a são encontrados por meio de métodos numéricos. O procedimento de cálculo é o seguinte: o valor de a_2 que satisfaz a Equação Governante está compreendido entre valores conhecidos, isto é, a_2 , o parâmetro da aba 2 fornece o valor da porcentagem que a área da seção transversal da aba 2 perfaz na área total da seção transversal da viga. À primeira vista, nota-se que $0 < a_2 < 1$, mas estes valores na realidade são mais restritos, como pode-se notar nos exemplos. O método consiste em fornecer valores para a_2 e calcular qual é o valor de a que satisfaz a Equação Governante; e ao mesmo tempo, estes dois valores de a_2 e a devem fazer com que a Função Objetiva, seja um mínimo. Sucintamente, o método de cálculo é apresentado abaixo:



9,2 - Método da Seção Dourada⁽³¹⁾, Localização do Mínimo da Função Objetiva

A condição para aplicação deste método é que a função em questão seja unimodal no intervalo considerado e que se conheçam dois pontos deste intervalo antes que o mínimo seja localizado.

Se a função é calculada para um ponto interior, por exemplo x_1 , o mínimo da função pode estar em qualquer lado deste ponto. Para determinar o lado em que o mínimo deve estar, é necessário outro valor da função; figuras 7 e 8.

Seja $C_1 < x_1 < x_2 < C_2$, se $F(x_1) > F(x_2)$, então o mínimo está no intervalo (x_1, C_1) . Por outro lado, se $F(x_1) < F(x_2)$, o mínimo deve estar no intervalo (C_1, x_2) .

Torna-se claro que para repetidos cálculos da função $F(x)$, pode-se localizar o mínimo com qualquer precisão; e a eficiência do

processo depende da escolha dos pontos em que se deve calcular $F(x)$. Nota-se que, sempre que um dos pontos é usado para repetir o intervalo em questão, ele permanece no interior deste intervalo. Este ponto servirá como um dos pontos de tentativa no estágio seguinte. Dos dois valores da função usados inicialmente, apenas um será usado no estágio seguinte.

Fig. 7 — Possíveis Localizações de $F(x)$, se $F(x)$ é unimodal e $F(x_1) > F(x_2)$.

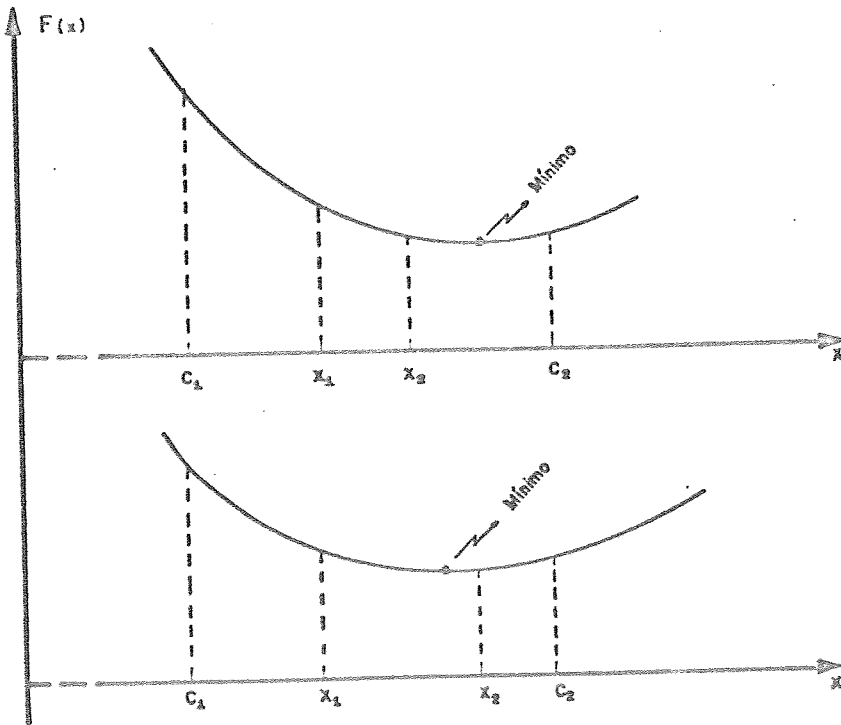
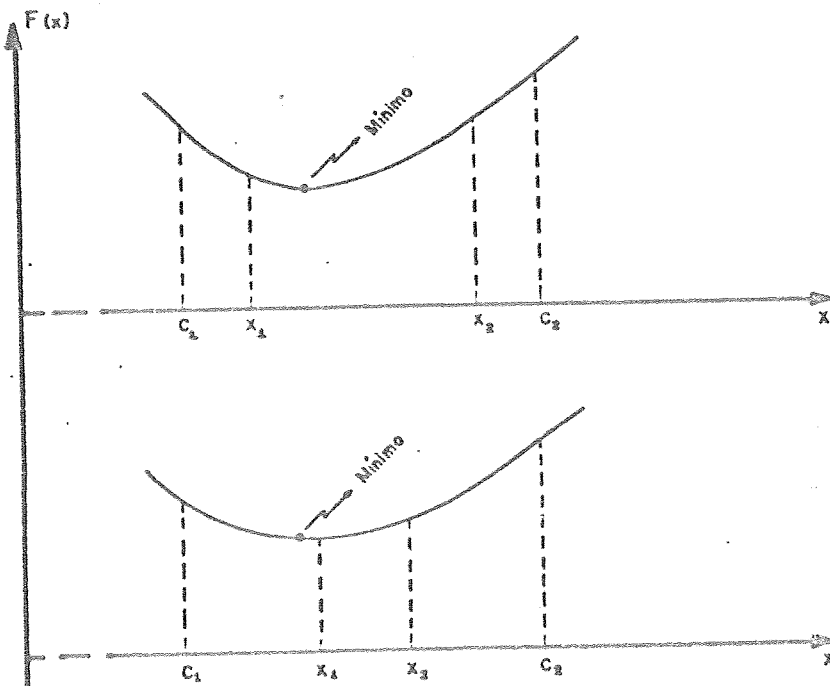


Fig. 8 — Possíveis Localizações do Mínimo de $F(x)$, $F(x_2) > F(x_1)$.



Para determinar a lei de diminuição do intervalo em que o mínimo está, considera-se que o intervalo em questão deve ser diminuído de um valor constante, τ .

Seja $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$, o intervalo em que o mínimo deve estar e $x_1^{(i)}$ e $x_2^{(i)}$, os pontos que dão valores à função $F(x)$ e $x_1^{(i)} < x_2^{(i)}$.

Estes pontos devem satisfazer a relação:

$$\frac{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}}{C_2^{(i)} - C_1^{(i)}} = \frac{C_2^{(i)} - x_1^{(i)}}{C_2^{(i)} - C_1^{(i)}} = \tau \dots \dots \dots \text{eq. 2.134}$$

Donde tiramos o seguinte:

$$x_1^{(i)} - C_1^{(i)} = C_2^{(i)} - x_2^{(i)} \dots \dots \dots \text{eq. 2.135}$$

Se for assumido que $F(x_2^{(i)}) > F(x_1^{(i)})$, tem-se:

$$C_2^{(i+1)} = x_2^{(i)} \dots \dots \dots \text{eq. 2.136}$$

e

$$C_1^{(i+1)} = C_1^{(i)} \dots \dots \dots \text{eq. 2.137}$$

Toma-se então:

$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)} \dots \dots \dots \text{eq. 2.138}$$

E procura-se um valor de $x_1^{(i+1)}$ que satisfaça a equação 2.134 e as relações 2.136 e 2.137, tem-se:

$$\frac{C_2^{(i+1)} - x_1^{(i+1)}}{C_2^{(i+1)} - C_1^{(i+1)}} = \tau \dots \dots \dots \text{eq. 2.139}$$

Tirando o valor de $x_1^{(i+1)}$, acha-se

$$x_1^{(i+1)} = C_2^{(i+1)} - \tau (C_2^{(i+1)} - C_1^{(i+1)}) \dots \dots \dots \text{eq. 2.140}$$

Levando-se em conta a equação 2.137, tem-se

$$x_1^{(i+1)} = C_1^{(i)} + (1-\tau) (C_2^{(i+1)} - C_1^{(i+1)}) \dots \dots \dots \text{eq. 2.141}$$

O valor de τ pode ser encontrado através da equação 2.134:

$$\frac{x_2^{(i+1)} - C_1^{(i)}}{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}} = \frac{x_1^{(i)} - C_1^{(i)}}{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}} = \frac{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}}{C_2^{(i)} - C_1^{(i)}} = \tau \dots \dots \text{eq. 2.142}$$

Da equação 2.135, somando e subtraindo $C_1^{(i)}$, tem-se:

$$x_1^{(i)} - C_1^{(i)} = C_2^{(i)} - C_1^{(i)} - (x_2^{(i)} - C_1^{(i)}) \dots \dots \dots \text{eq. 2.143}$$

Dividindo ambos os termos da equação 2.143 por $x_2^{(i)} - C_1^{(i)}$,

vem:

$$\frac{x_1^{(i)} - C_1^{(i)}}{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}} = \frac{C_2^{(i)} - C_1^{(i)}}{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}} - \frac{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}}{x_2^{(i)} - C_1^{(i)}} \dots \dots \dots \text{eq. 2.144}$$

Substituindo em 2.144 a equação 2.142, tem-se:

$$\tau = \frac{1}{\tau} - 1 \dots \dots \dots \text{eq. 2.145}$$

ou

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0 \dots \dots \dots \text{eq. 2.146}$$

Pega-se somente a raiz positiva desta equação

$$\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0,618 \dots \dots \dots \text{eq. 2.147}$$

Em Resumo

a) Se $F(x_2^{(i)}) > F(x_1^{(i)})$ eq. 2.148

$$C_2^{(i+1)} = x_2^{(i)}$$

$$x_2^{(i+1)} = x_1^{(i)}$$

$$x_1^{(i+1)} = C_1^{(i)} + (1 - \tau)(C_2^{(i+1)} - C_1^{(i)})$$

b) Se $F(x_2^{(i)}) < F(x_1^{(i)})$ eq. 2.149

$$C_1^{(i+1)} = x_1^{(i)}$$

$$x_1^{(i+1)} = x_2^{(i)}$$

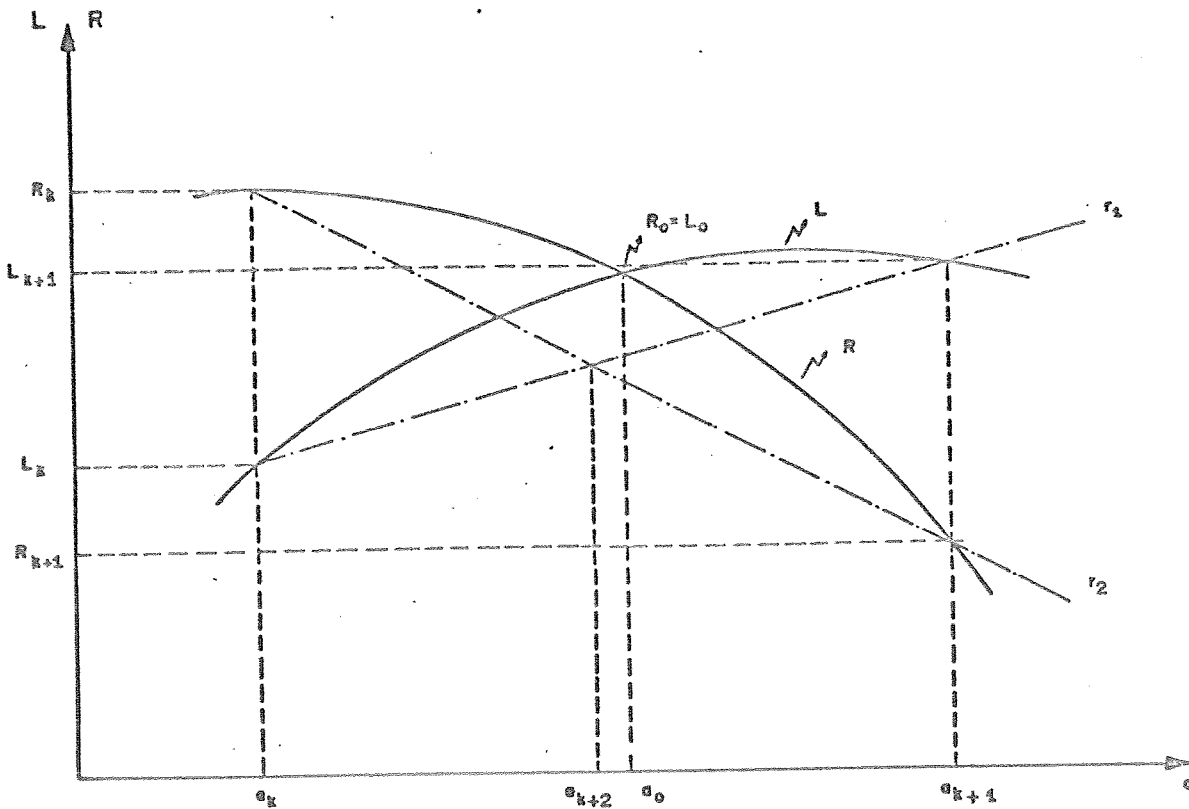
$$x_2^{(i+1)} = C_2^{(i)} - (1 - \tau)(C_2^{(i+1)} - C_1^{(i)})$$

Sendo $F(x)$ a Função Objetiva, as equações 2.148 e 2.149 tem o objetivo de localizar o mínimo desta função (x é equivalente a variável a_2 , parâmetro da aba 2.

9.3 - Método Iterativo para Resolver a Equação Governante $G(a_2, a)$

Sendo a variável a_2 já pré-determinada pelo Método da Seção Dourada, a Equação Governante torna-se função apenas da variável a e pode ser colocada na forma $L(a) = R(a)$, onde $L(a)$ e $R(a)$ designam o primeiro e segundo termos das equações 2.85 e 2.118. As curvas $L(a)$ e $R(a)$ são contínuas, crescentes ou decrescentes no intervalo considerado e tem apenas uma interseção no intervalo de interesse, fig. 9.

Fig.9 — Solução Iterativa da Equação Governante.



O valor de a que satisfaz as duas curvas deve estar compreendido no intervalo a_k, a_{k+1} , e lembrando do significado de a , assimetria da seção transversal, pode-se prever em que valores o intervalo da solução da equação deve estar; por exemplo, para $a=1,0$, tem-se uma viga simétrica, para $a=3,4,5$ ou 6 , a viga será altamente assimétrica.

Sejam r_1 e r_2 as retas formadas por pontos pertencentes às curvas $L(a)$ e $R(a)$ originados dos extremos do intervalo.

$$r_1 = \frac{L_{k+1} - L_k}{a_{k+1} - a_k} (x - a_k) + L_k \dots \dots \dots \text{eq. 2.150}$$

$$r_2 = \frac{R_{k+1} - R_k}{a_{k+1} - a_k} (x - a_k) + R_k \dots \dots \dots \text{eq. 2.151}$$

A solução do sistema de equações formado por 2.150 e 2.151 será o ponto $x = a_{k+2}$ pertencente às retas r_1 e r_2 .

$$\frac{(L_{k+1} - L_k)(a_{k+2} - a_k)}{a_{k+1} - a_k} + L_k \frac{(R_{k+1} - R_k)(a_{k+2} - a_k)}{a_{k+1} - a_k} + R_k \dots$$

. eq. 2.152

Reduzindo a equação 2.152 ao mesmo denominador, tem-se:

$$(L_{k+1} - L_k)(a_{k+2} - a_k) + L_k (a_{k+1} - a_k) = (R_{k+1} - R_k)(a_{k+2} - a_k) + R_k (a_{k+1} - a_k) \dots$$

. eq. 2.153

ou

$$(a_{k+2} - a_k)(L_{k+1} - L_k + R_k - R_{k+1}) = (R_k - L_k)(a_{k+1} - a_k) \dots$$

. eq. 2.154

Isolando o termo a_{k+2} , obtem-se:

$$a_{k+2} = a_k - \frac{a_{k+1} - a_k}{\frac{L_{k+1} - R_{k+1}}{L_k - R_k} - 1} \dots$$

. eq. 2.155

que será o ponto comum às retas r_1 e r_2 .

O processo de iteração pode ser resumido nos seguintes passos:

- a) Indicar a precisão desejada para o cálculo de a (por exemplo, 0,001).
- b) Fornecer os extremos do intervalo (por exemplo, $a_1 = 1,0$ e $a_2 = 3,0$).
- c) Calcular os valores de L_1, R_1, L_2 e R_2 pelas equações de $L(a)$ e $R(a)$ e substituí-los na equação 2.155 e calcular a_3 .
- d) Com os valores de a_2 e a_3 , calcular a_4 .
- e) Parar a iteração para um certo valor de $K=k$, de modo que a diferença $a_{k+2} - a_{k+1}$, seja menor ou igual à precisão requerida; então $a_{k+2} \approx a$ será a solução da equação governante.

Os limites do intervalo são de importância secundária, pois o processo de iteração localiza a solução mesmo que esta esteja fora do intervalo fornecido.

CAPÍTULO III - CONSIDERAÇÕES GERAIS

1 - Materiais Usados

Dois tipos de aço são usados nas estruturas protendidas. A viga é constituída de aço estrutural, enquanto que os cabos de protensão são constituídos de fios de aço de alta resistência. A tabela 2 mostra as principais propriedades mecânicas dos aços estruturais fabricados no Brasil (³⁴).

Tabela 2 - Tipos de Aços Estruturais						
Tipo do Aço	Características Mecânicas das Chapas Grossas					
	Limite de Escoamento	Limite de Ruptura	Alongamento Mínimo em 203 mm	Espessura	Qualidade do aço	
	kg/mm ²	kg/mm ²	%	mm		
ASTM A-7	23,2	42,2-50,6	18 a 21	<38,1	Aço Carbono	
		42,2-52,6	18 a 21	>38,1		
ASTM A-36	25,3	40,8-56,2	17 a 20	-	Aço Carbono	
DIN-17100 ST-37	24	37-45	25	-	Aço Carbono	
DIN-17100 ST-52	36	52-62	22	-	Alta Resistência	
ASTM A-242	32	47,1	19	< 25	Alta Resistência	
	35	49,2	18	< 19		
	35,2	49,2	19	<12,7		
COR-TEN	A	35,2	49,2	19	<12,7	Alta Resistência
	B	35,2	49,2	19	>12,7	
	C	42,2	56,3	16	<25,4	Elevada Resistência à corrosão

O aço de alta resistência, assim chamado devido às suas elevadas propriedades mecânicas, é encontrado comercialmente em forma de arames e cordoalhas condicionados em rolos de grande diâmetro.

Os arames simplesmente trefilados e já aliviados de tensão, são encontrados nas bitolas de 4 a 8 mm e suas propriedades mecânicas são mostradas na tabela 3.

Tabela 3 - Propriedades Mecânicas dos Arames de Alta Resistência					
Diâmetro Nominal	Limite Mínimo de Resistência	Limite Mínimo a 0,2 %	Alongamento na Ruptura em 10 d	Área da Seção transversal	Peso por 1000 m
mm	kg/mm ²	kg/mm ²	%	mm ²	kg
8,0	150	128	6	50,27	394,6
7,0			6	38,48	302,1
5,0			6	19,64	154,1

As cordoalhas são normalmente constituídas de 2,3 e 7 fios encordoados concêntricamente em hélice, com passo uniforme. A Tabela 4 fornece as propriedades mecânicas das cordoalhas de 7 fios, já aliviadas de tensão.

Tabela 4 - Características Mecânicas das Cordoalhas de 7 fios						
Diâmetro	Carga Mínima de Ruptura	Carga Mínima a 1% de alongamento	Área da Seção Transversal	Peso por 1000 m	Limite Mínimo de Resistência	Limite Mínimo a 0,2%
mm	kg	kg	mm ²	kg	kg/mm ²	kg/mm ²
6,3	4080	3400	23,2	181	176	160
7,9	6580	5590	37,4	293		
9,5	9070	7710	51,6	405		
11,1	12250	10410	69,7	546		
12,7	16330	13880	92,9	729		
15,2	24490	20820	138,7	1100		

Os aços de alta resistência quando submetidos a grandes tensões iniciais, sofrem uma perda de tensão conhecida como relaxação (perda de tensão sob um comprimento constante). Esta perda de tensão é diretamente proporcional à tensão inicial, varia com o tempo, com a temperatura e com o tipo de tratamento a que o aço foi submetido. A tabela 5 mostra a variação da relaxação em função

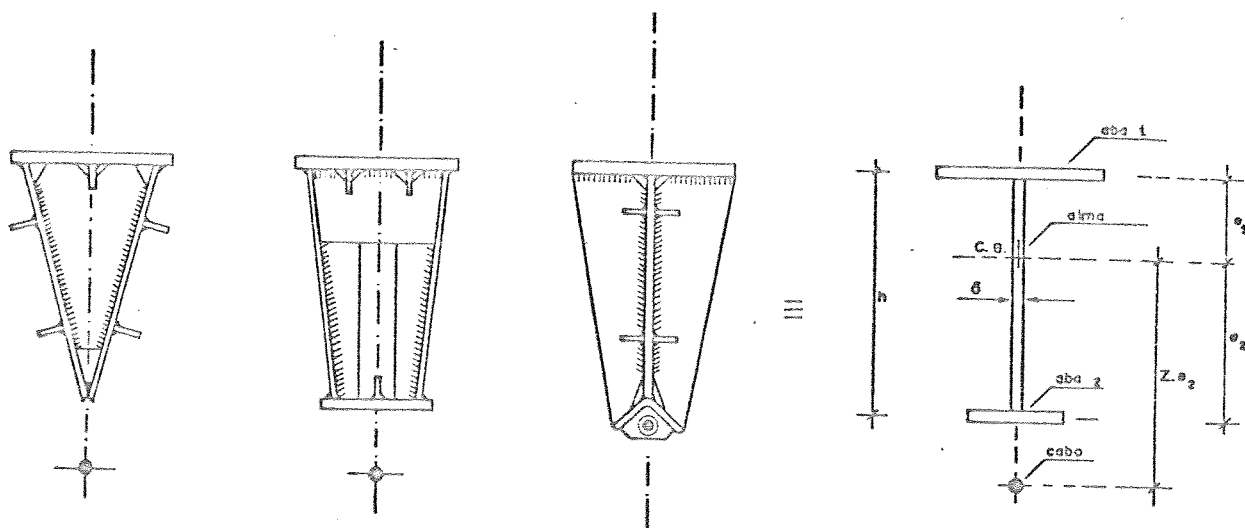
destes fatores para um arame de 5 mm de diametro. (32)(33)

Tabela 5 - Relaxação de Tensão em Arames de Ø5 mm					
% de σ_R	70 %		80 %		Temperatura
tempo (horas)	1000	10000	1000	10000	20°C
trefilado	5,8	8,4	8,0	11,9	
aliviado	5,0	8,0	8,2	12,1	
estabilizado	1,0	1,5	1,8	2,1	
trefilado	20,0	23,8	25,0	29,4	100°C
aliviado	19,0	22,6	28,0	52,0	
estabilizado	7,8	10,2	14,4	17,4	

2 - Forma da Seção Transversal da Viga

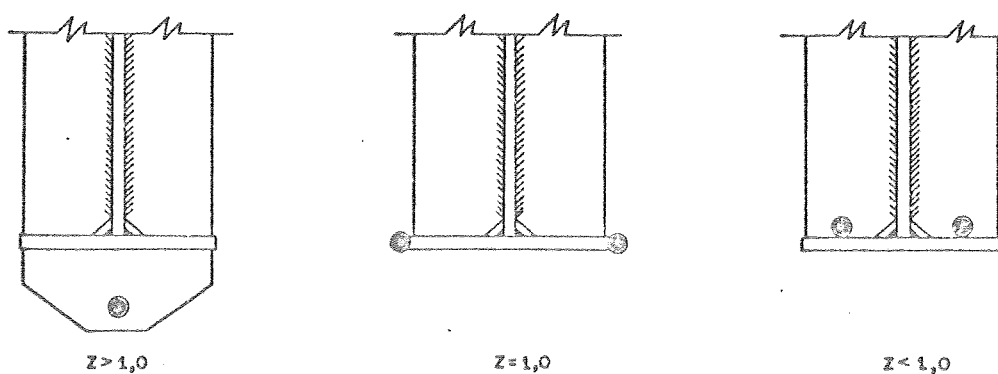
O uso de vigas da seção composta é feito, quando as cargas envolvidas não permitem o uso de vigas laminadas por motivos de resistência ou de economia. Além disso, o uso de vigas de seção composta dá ao projetista a vantagem de poder selecionar as dimensões de cada uma das partes da seção transversal da viga, permitindo portanto um dimensionamento mais racional. As seções transversais das vigas protendidas de aço podem ser fabricadas em diferentes formas fig. 10.

Fig: 10 - Possíveis Formas da Seção Transversal e Seção Idealizada.



O cabo de protensão disposto paralelamente à aba inferior, ancorado em sistemas apropriados, com excentricidade constante em relação ao centro de gravidade da seção transversal da viga, pode ser colocado acima, abaixo ou na altura do centro de gravidade da aba inferior, fig. 11.

Fig. 11 - Localização do Cabo da Protensão.



Z - Parâmetro que define a posição do cabo.

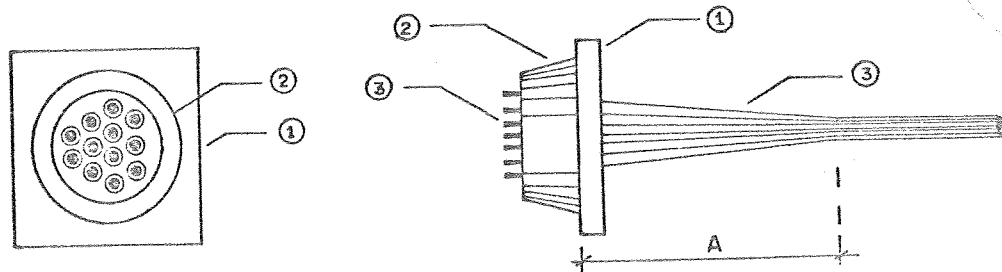
3 - Ancoragem e Protensão do Cabo de Aço

Os cabos podem ser tracionados por meio de um macaco hidráulico, idêntico ao usado no sistema VSL para vigas de concreto protendido. Neste sistema os cabos usados são formados por cordoalhas de 12,7 mm e solicitados com uma tensão inicial igual a 75% da tensão de ruptura à tração do material. De acordo com o tipo de cabo usado, a força inicial de protensão pode variar entre 12,6 t até 389,2 t, quando se usam cabos de 1 até 31 cordoalhas respectivamente, tabela 6⁽³⁰⁾.

Tabela 6 - Capacidade dos cabos usados no Sistema VSL			
Número de Cordoalhas	Seção das Cordoalhas mm ²	Peso das Cordoalhas kg/m	Força inicial de Protensão (t)
1	93	0,7	12,1
2	186	1,5	25,1
3	279	2,2	37,7
4	372	2,9	50,2
5	465	3,7	62,8
6	558	4,4	75,3
7	651	5,1	87,9
8	744	5,8	100,4
9	837	6,6	113,0
10	930	7,3	125,6
11	1023	8,0	138,1
12	1116	8,8	150,7
13	1209	9,5	163,7
14	1302	10,2	175,8
15	1395	10,9	188,3
16	1488	11,7	200,9
17	1581	12,4	213,4
18	1674	13,1	226,0
19	1767	13,9	238,5
20	1860	14,6	251,1
21	1953	15,3	263,7
22	2046	16,1	276,2
23	2139	16,8	288,8
24	2232	17,5	301,3
25	2325	18,3	313,9
26	2418	19,0	326,4
27	2511	19,7	339,0
28	2604	20,4	351,5
29	2697	21,2	364,1
30	2790	21,9	376,7
31	2883	22,6	389,2

O macaco hidráulico após tracionar o cabo, ancora as cordoalhas a um cabeçote metálico por meio de cunhas, fig. 12. As perdas de protensão que aparecem no macaco hidráulico durante a operação, chegam a 3% e podem ser compensadas com um aumento da tensão inicial. No instante em que se alivia a tensão no macaco, as cordoalhas recuam puxando as cunhas para dentro do cabeçote. O deslocamento destas cunhas é constante e igual a 6 mm para qualquer quantidade ou diâmetro das cordoalhas. Todavia esta perda pode ser eliminada com o uso de calços colocados entre o cabeçote e a placa de ancoragem. Isto é conseguido acionando-se novamente o macaco (com as cunhas já cravadas) e introduzindo-se entre a placa de ancoragem e o cabeçote uma chapa metálica de 6 mm de espessura (30).

Fig. 12 — Cabeçote e Placa de Ancoragem.

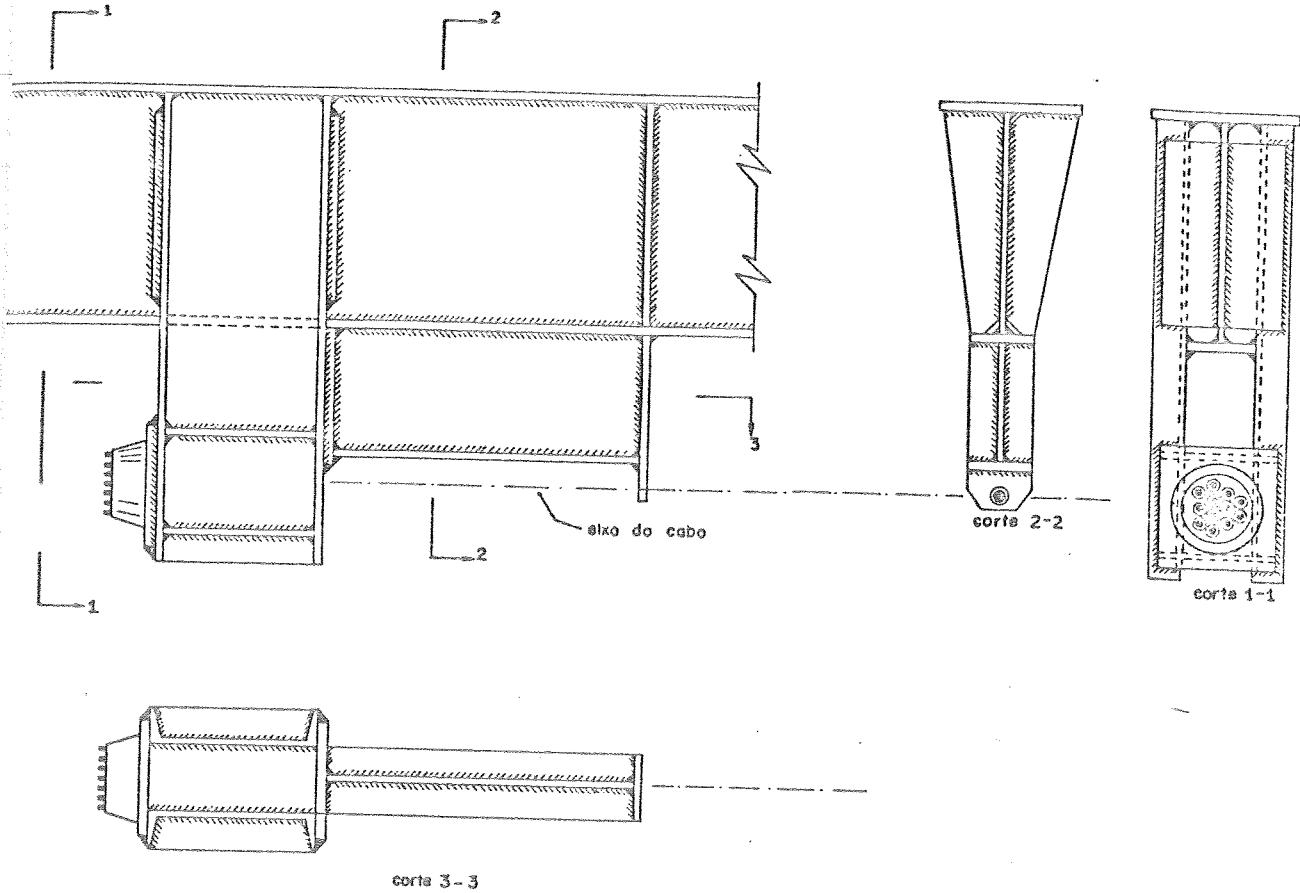


- ① Placa de Ancoragem.
- ② Cabeçote de Ancoragem.
- ③ Cordoalhas.
- ④ Espaçamento Necessário para Alinhamento das Cordoalhas.

O sistema de transmissão dos esforços do cabo de protensão à viga é feito por meio de um console ao qual se acha ancorado o cabo. Este sistema deve ter grande rigidez, visto que para simplificação do dimensionamento não se levou em conta sua deformação. Os detalhes da ancoragem podem variar em função da seção transversal da viga, da excentricidade do cabo e da sua localização em relação ao eixo longitudinal da viga. Na figura 13 é dada como ilustração a ancoragem de um cabo com comprimento menor que o da viga e colocado abaixo de sua aba inferior; a viga em questão tem seção transversal em forma de um perfil I de abas desiguais. Nesta

ancoragem preocupou-se em transmitir o momento fletor devido à excentricidade do cabo às abas da viga, por meio de dois perfis U. A flambagem transversal da alma neste trecho é evitada por meio de nervuras soldadas às abas dos perfis U e na alma.

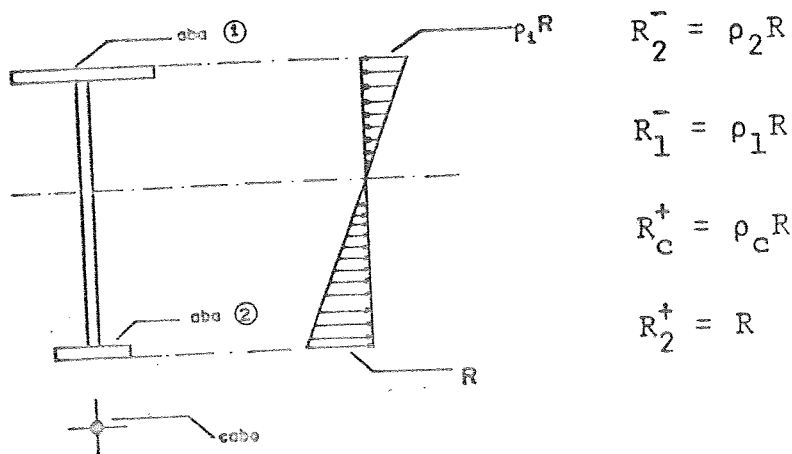
Fig. 13 — Ancoragem do Cabo de Protensão.



4 - Tensões de Projeto

Tendo em vista simplificar as deduções necessárias para a formulação de solução, as tensões máximas admissíveis na viga são expressas em função da tensão de tração máxima da aba 2, no estado final de carregamento da viga. As tensões em outros pontos da estrutura são expressas em função desta tensão chamada de R.

Fig. 14



- onde: R_2^+ - Tensão de Projeto para a aba 2 quando esta é tracionada
 R_2^- - Tensão de Projeto para a aba 2 quando esta é comprimida
 R_1^- - Tensão de Projeto para a aba 1 quando esta é comprimida
 R_c^+ - Tensão de Projeto para o cabo de protensão
 ρ_1, ρ_2, ρ_c - Fatores de Proporcionalidade

5 - Cargas

Uma das características do dimensionamento ótimo de vigas metálicas protendidas, é que somente o valor máximo do diagrama de momentos fletores, M_o , é levado em conta quando se utiliza cabo de igual comprimento. Para vigas protendidas com cabo menor que seu comprimento, além do valor de M_o , a forma do diagrama de momentos fletores influi na localização e no comprimento do cabo de protensão, tabela 1.

O fato que no dimensionamento somente um valor característico do momento fletor seja levado em conta, impede de se aplicar

o presente método na solução de vigas contínuas ou em determinadas vigas simplesmente apoiadas com balanços sucessivos, quando não se queira fazer uma variação na seção transversal da viga.

Todavia, os tipos de suportes das vigas são de importância secundária, pois através de carregamentos adequados em uma viga isostática é possível obter qualquer forma de diagramas de momentos fletores. Razão pela qual as presentes deduções valem para uma viga em balanço.

Por conveniência e sem perda da generalidade, foi abordado o problema para uma viga simplesmente apoiada.

6 - Considerações sobre a estabilidade da viga.

6.1 - Generalidades

A viga protendida de aço é sujeita a esforços solicitantes em dois estágios diferentes. Durante a aplicação da protensão no cabo, somente a força de protensão e o momento fletor devido à sua excentricidade atuam na viga, fazendo com que a aba inferior seja comprimida. Posteriormente quando a viga é carregada pelas cargas externas, a resultante dos esforços comprime a aba superior. Devido à esta sequência de carregamentos, as duas abas ficam sujeitas à perda de estabilidade devido à resultante das tensões normais de compressão nelas atuantes. Analogamente, a alma fica também sujeita à tensões normais e de cisalhamento, que podem comprometer a sua utilização. Na análise do dimensionamento ótimo da seção da viga não é levado em conta o problema da instabilidade local das abas e da alma pois é possível evitá-lo por meio de contraventamentos adequados, limitações das tensões máximas ou colocação de nervuras de rigidez.

6.2 - Estabilidade da alma.

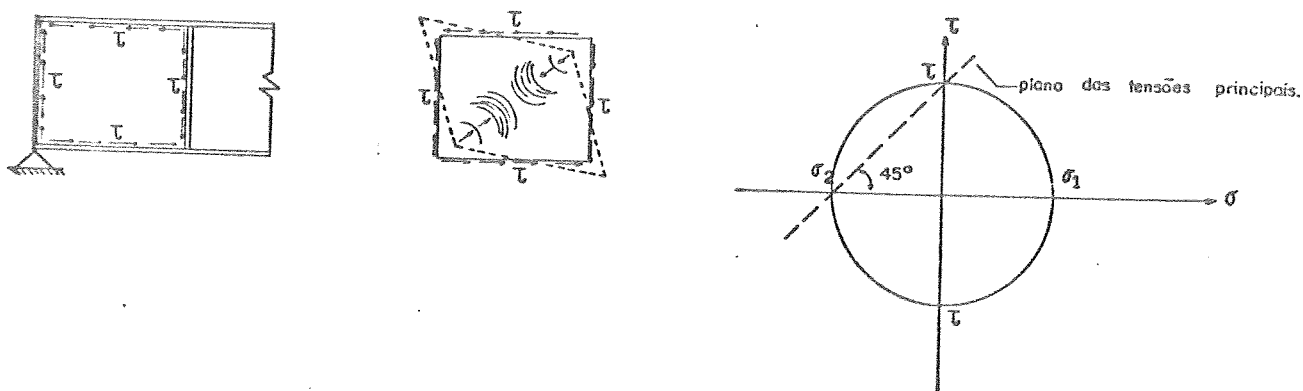
Uma escolha adequada da esbeltez da alma, previne a perda de estabilidade longitudinal da alma. As regiões mais críticas são aquelas nas quais os momentos fletores são grandes. Neste caso as tensões aí originadas podem superar a tensão crítica de flambagem da alma. O valor desta tensão crítica é, segundo Timoshenko, função

da relação h/δ . O valor máximo da esbeltez da alma, quando se admitem nervuras verticais colocadas a uma distância máxima igual à altura da viga, e aço com tensão de escoamento, $\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$, é 140. Caso se necessite adotar um valor de λ que supere 140, é necessário a colocação de nervuras de rigidez horizontais, na altura do centro de empuxo das tensões normais de compressão, nos trechos em que $\sigma > \sigma_{fl}$, para que seja evitada a flambagem longitudinal da alma.

A colocação de nervuras verticais se faz mais necessária nas proximidades de apoio, onde a força cortante tem valores elevados. A colocação destas nervuras impede a flambagem transversal da alma. Nas regiões vizinhas aos apoios, a chapa da alma trabalha como uma placa simplesmente apoiada sujeita a um estado plano de tensão, figura 15. A flambagem dar-se-á, segundo uma direção que forma 45° com a linha neutra, que é o plano das tensões principais para este estado de cisalhamento puro. O dimensionamento poderá ser feito considerando uma faixa de largura e e espessura δ , comprimida com uma tensão normal igual à tensão de cisalhamento na linha neutra ⁽²⁷⁾.

A distância entre as nervuras de rigidez verticais, poderá ser considerando-se as tensões de cisalhamento críticas que ocorrem na alma, de acordo com as fórmulas sugeridas por Timoshenko.

Fig. 15 — Tensões na Alma nas Proximidades dos Apoios



da relação h/δ . O valor máximo da esbeltez da alma, quando se admitem nervuras verticais colocadas a uma distância máxima igual à altura da viga, e aço com tensão de escoamento, $\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$, é 140. Caso se necessite adotar um valor de λ que supere 140, é necessário a colocação de nervuras de rigidez horizontais, na altura do centro de empuxo das tensões normais de compressão, nos trechos em que $\sigma > \sigma_{fl}$, para que seja evitada a flambagem longitudinal da alma.

A colocação de nervuras verticais se faz mais necessária nas proximidades de apoio, onde a força cortante tem valores elevados. A colocação destas nervuras impede a flambagem transversal da alma. Nas regiões vizinhas aos apoios, a chapa da alma trabalha como uma placa simplesmente apoiada sujeita a um estado plano de tensão, figura 15. A flambagem dar-se-á, segundo uma direção que forma 45° com a linha neutra, que é o plano das tensões principais para este estado de cisalhamento puro. O dimensionamento poderá ser feito considerando uma faixa de largura ϵ e a espessura δ , comprimida com uma tensão normal igual à tensão de cisalhamento na linha neutra ⁽²⁷⁾.

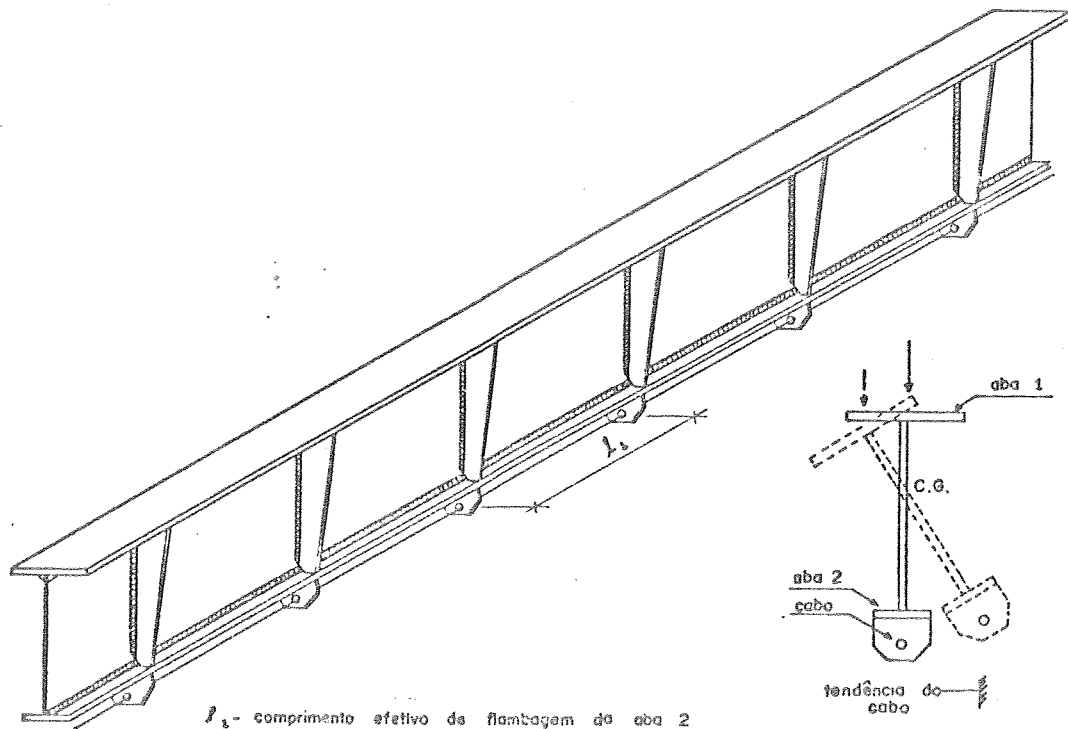
A distância entre as nervuras de rigidez verticais, poderá ser calculada considerando-se as tensões de cisalhamento críticas que ocorrem na alma, de acordo com as fórmulas sugeridas por Timoshenko.

6.3 - Estabilidade Geral da Viga

A perda de estabilidade geral da viga, pode ser evitada através de contraventamentos laterais que fixem determinados pontos da viga. A distância entre estes pontos fixos deve ser tal, que a relação λ_{fl}^y/b_1 sejam menor que 16 ou 27, dependendo da posição da carga, para que a tensão de escoamento $\sigma_e < \sigma_{fl}$. A flambagem local das abas é evitada através de uma escolha conveniente da relação b/Δ (29).

Todavia a perda de estabilidade geral da viga não pode ser evitada com vigas de contraventamento, quando a aba 2 é comprimida. Contudo, se o furo pelo qual deve passar o cabo de protensão nas nervuras inferiores, for suficientemente justo, não folga ao cabo estas nervuras agem como contraventamentos limitando o comprimento de flambagem efetivo da aba 2. A razão disto é que qualquer deslocamento lateral da aba inferior, solicitará o cabo forçando-o a aumentar seu comprimento; o que é difícil estando ele altamente solicitado, fig. 16.

Fig. 16 — Comprimento de Flambagem da Aba 2.



7 - Coeficientes de segurança da protensão

A carga real da estrutura isostática produzirá um diagrama de momentos fletores cujo valor máximo foi chamado de M_0 . A força no cabo de protensão, N , é modificada pelos coeficientes de precisão da protensão, de tal maneira que este forneça a condição de máxima tensão possível quando os efeitos da protensão e das cargas forem combinados. Por exemplo, quando não existe carga e o único esforço atuante é o devido à protensão, deve-se usar o coeficiente superior de precisão de protensão, $n_s N$, para que se produza a máxima tensão de compressão na aba 2, onde n_s é sempre maior que 1,0. Por outro lado, quando a carga de projeto é aplicada, a máxima tensão de tração na aba 2 é determinada pela combinação de M_0 com a força de protensão, seu respectivo momento fletor e pela força redundante X , usa-se o coeficiente inferior de precisão de protensão, $n_i N$, sendo n_i sempre menor que 1,0. Todavia quando o esforço de tração no cabo de protensão for controlado com extensômetros, pode-se adotar em qualquer um dos casos acima descritos, $n_s = n_i = 1,0$.

CAPÍTULO IV - DIAGRAMA DE BLOCOS E EXEMPLOS

1 - Generalidades

Do sistema de equações derivadas das condições de resistência que impõem que as fibras extremas da seção transversal da viga e a seção transversal do cabo estejam solicitadas pelas máximas tensões permissíveis e da equação de compatibilidade de deslocamento do cabo, chega-se à Equação Governante, desenvolvida no cap. II, função de apenas duas variáveis:

a_2 - parâmetro que fornece a área da seção transversal (da aba 2, em função da área da seção transversal da viga).

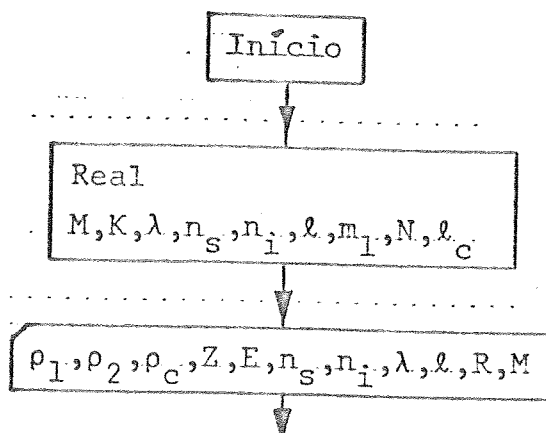
a - assimetria da seção transversal da viga, relação entre seus módulos de resistência.

Essa equação é resolvida pela subrotina LIN, para cada valor de a_2 fornecido pelas expressões 2.148 e 2.149, usando o processo de iteração desenvolvido no ítem 9.2 do cap. II. Os valores de a_2 e a que satisfazem a equação governante são soluções para a viga proposta; todavia, os valores ótimos de a_2 e a são aqueles que minimizam a função objetiva imposta ao problema. A subrotina ISA é usada para a determinação do valor da função objetiva 0.

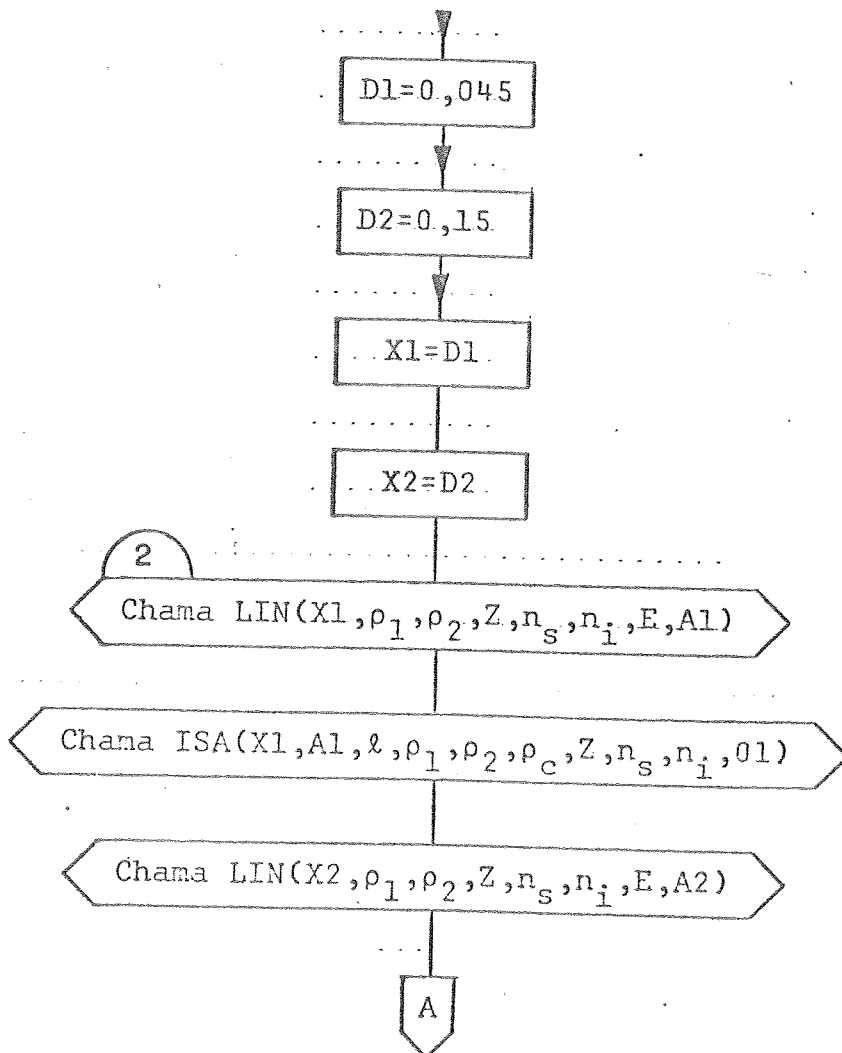
Os cálculos foram feitos no computador PDP-10 da Universidade Estadual de Campinas usando linguagem FORTRAN, com um gasto de tempo de aproximadamente 10 segundos para o processamento do programa e listagem final dos resultados.

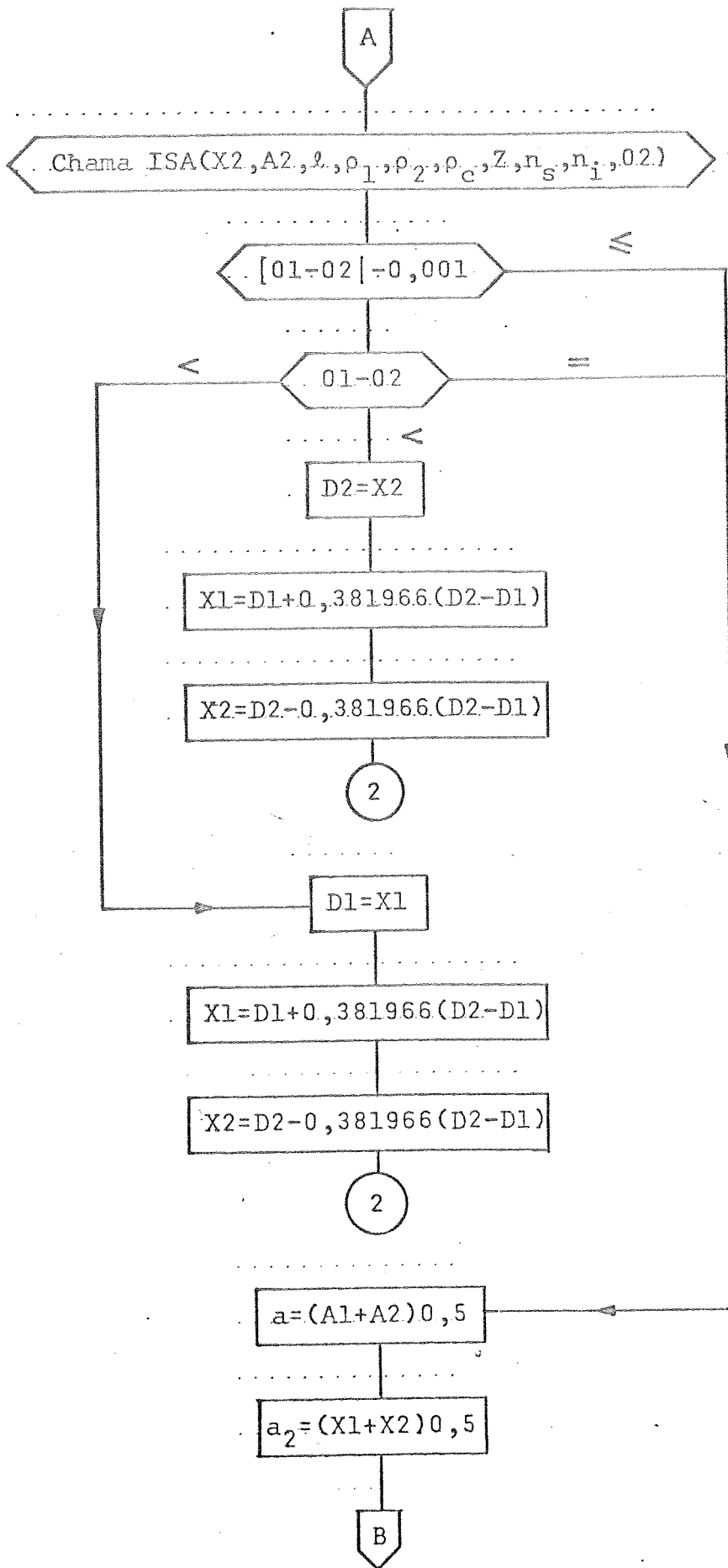
2 - Diagrama de blocos para a viga com cabo de protensão menor que seu comprimento.

a - Programa Principal



b - Valores que podem variar a₂







$$K=2 \frac{1+a_2(a+1)}{a+1}$$

$$C = \sqrt{K} \frac{6 [1+(\rho_1 a-1)(Za+1)(a+1)] - K(\rho_1+1)(a+1)}{6(a+1)}$$

$$D = \frac{[\rho_2 6a - K(a+1)^2]}{(a+1) [6a(Za+1)/(a+1) - K(a+1)]}$$

$$B = D \left(1 - \frac{n_i}{n_s} \right) + \frac{\rho_1 a - 1}{a+1}$$

$$M1 = \frac{\sqrt{K}}{C} \frac{6a - K(a+1)^2}{6a(a+1)}$$

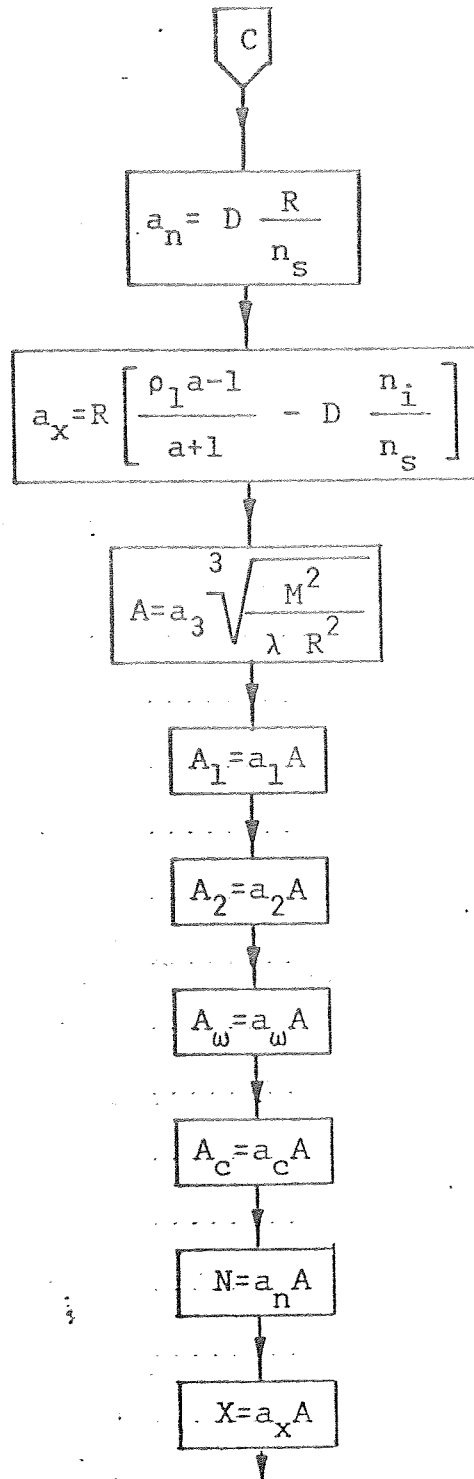
$$a_1 = \frac{a}{a+1} - \frac{K}{2}$$

$$a_3 = C^{(-2/3)}$$

$$a_\omega = K$$

$$a_c = \frac{B}{\rho_c}$$





c - Cartões que deverão ser trocados em função do tipo de carregamento: $l_c = f(m_1)$, $s = f'(m_1)$, $t = f''(m_1)$



D

Cabeçalho:
Área da aba 1, Área da aba 2
Área da alma, Área do cabo
Força Efetiva de Protensão
Comprimento do cabo
Localização do cabo
Força Redundante

A_1, A_2, A_w, A_c
 N, l_c, s, t, X

d - Cálculo das Propriedades da seção transversal

$$e_1 = \frac{\sqrt{\lambda K A}}{a+1}$$

$$e_2 = e_1 a$$

$$H = e_1 + e_2$$

$$J = \lambda K A^2 \frac{6a - K(a+1)^2}{6(a+1)^2}$$

$$W_1 = \frac{J}{e_1}$$

E

E

$$W_2 = \frac{J}{e_2}$$

$$\delta = \frac{H}{\lambda}$$

$$M_s = A_1 e_1 \frac{\delta e_1^2}{2}$$

e - Peso por unidade de comprimento da seção transversal e peso total da viga

$$G = 0.789A$$

$$P = 0.789(A\lambda + A_c \lambda_c)$$

Cabeçalho

- Localização do C.G. da seção transversal
- Altura da seção transversal
- Peso por unidade de comprimento da seção transversal
- Peso total da viga
- Momento de inércia em relação ao eixo x-x
- Módulos de Resistência da seção transversal
- Momento Estático da Seção Transversal

$$e_1, e_2, h, \\ P, J, W_1, W_2, M_s$$

F



f - Verificação das tensões nas fibras F_1, F_2, F_3, F_4, F_5

$$\sigma_{f1} = \frac{n_s N + X}{A} - \frac{(n_s N + X)}{W_1} Z e_2 + \frac{M}{W_1}$$

$$\sigma_{f2} = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X)}{W_2} Z e_2 + \frac{M}{W_2}$$

$$\sigma_{f3} = \frac{n_s N + X}{A_c}$$

$$\sigma_{f4} = \frac{m_1 \cdot M}{W_2}$$

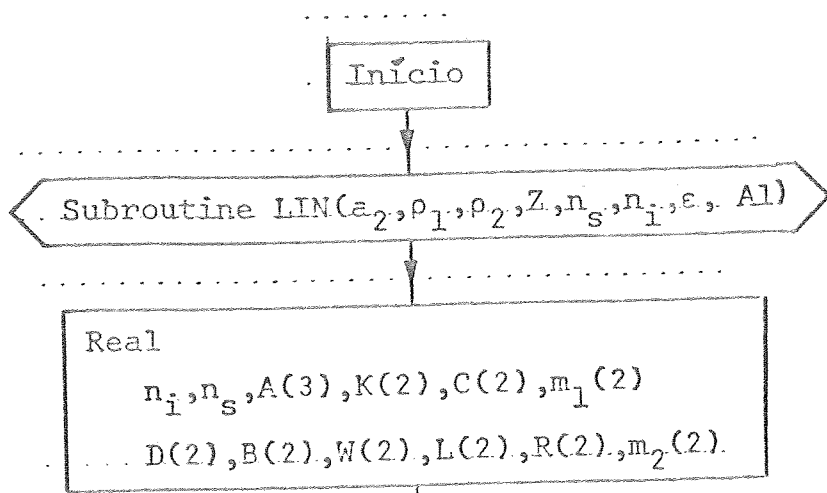
$$\sigma_{f5} = \frac{n_s N}{A} + \frac{n_s N Z e_2}{W_2}$$

Cabeçalho:
Tensões nas fibras:
 F_1, F_2, F_3, F_4, F_5

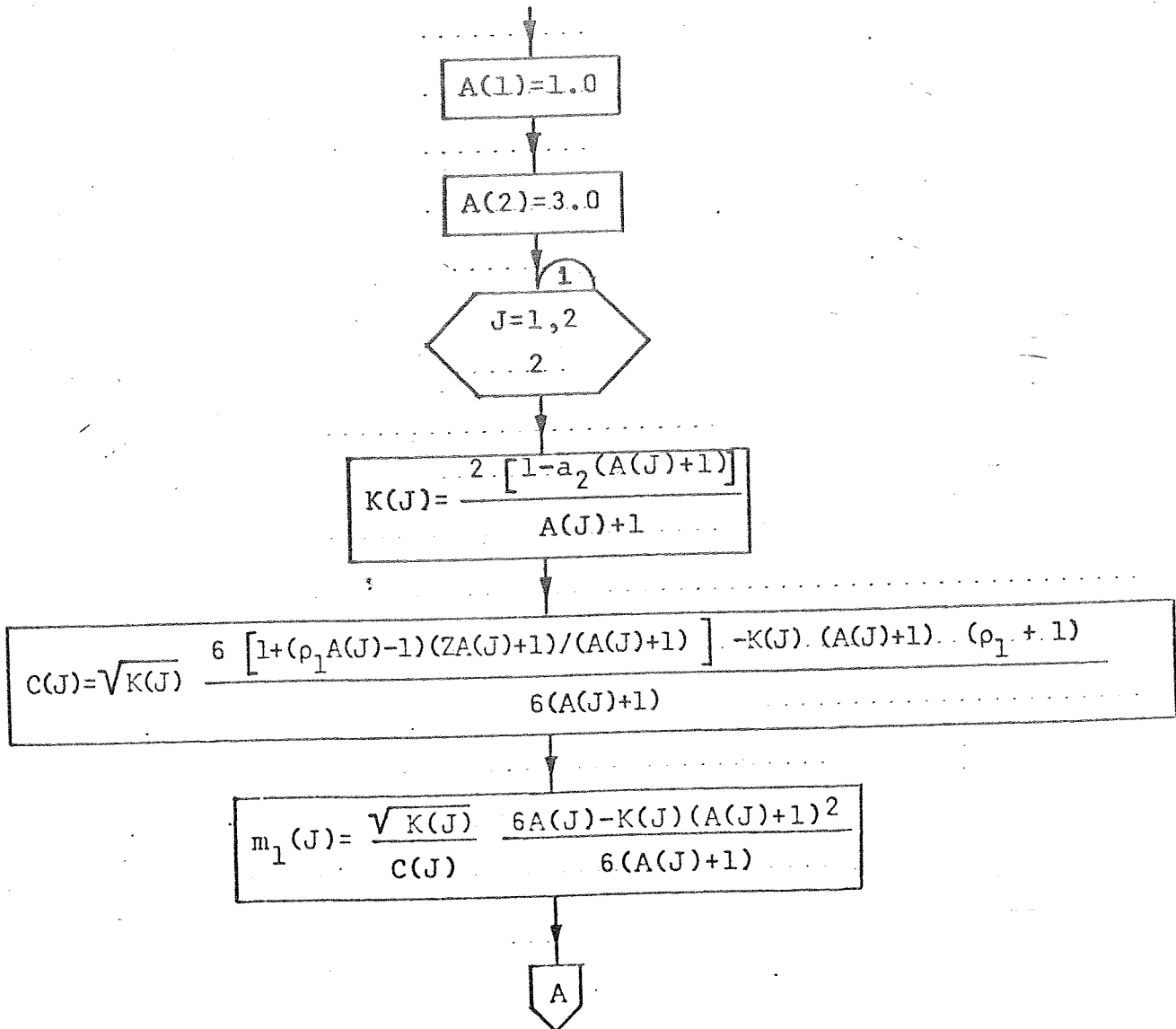
F_1, F_2, F_3
 F_4, F_5

Fim

g - Subrotina LIN



h - Valores que podem variar A - assimetria da seção





i - Segue cartão que deverá ser trocado em função do tipo de carregamento: $m_2 =$ função de m_1

$$D(J) = \frac{\rho_2 \cdot [6A(J) - K(J)(A(J)+1)^2]}{(A(J)+1)+1 \cdot [6A(J)(Z(A(J)+1)/(A(J)+1) - K(J)(A(J)+1)]}$$

$$B(J) = D(J) \left[1 - \frac{n_i}{n_s} \right] + \frac{\rho_1 A(J) - 1}{A(J) + 1}$$

$$W(J) = \rho_2 \frac{B(J)}{D(J)} - 1$$

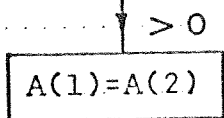
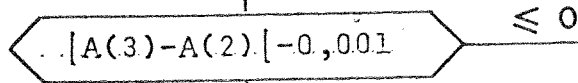
j - Equação Governante $G(A, A_2) = L(J) - R(J)$

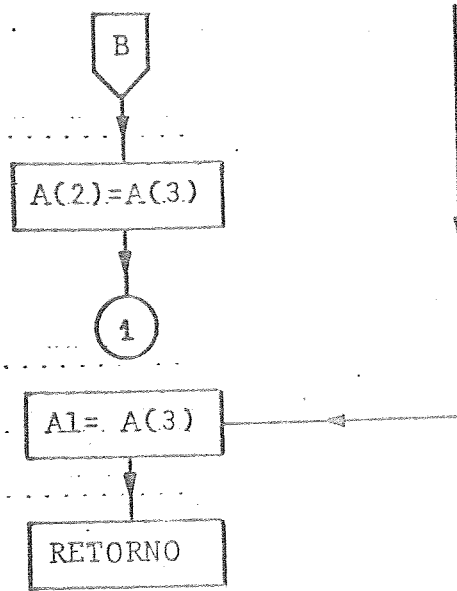
$$L(J) = \frac{m_2(J)}{m_1(J)}$$

2

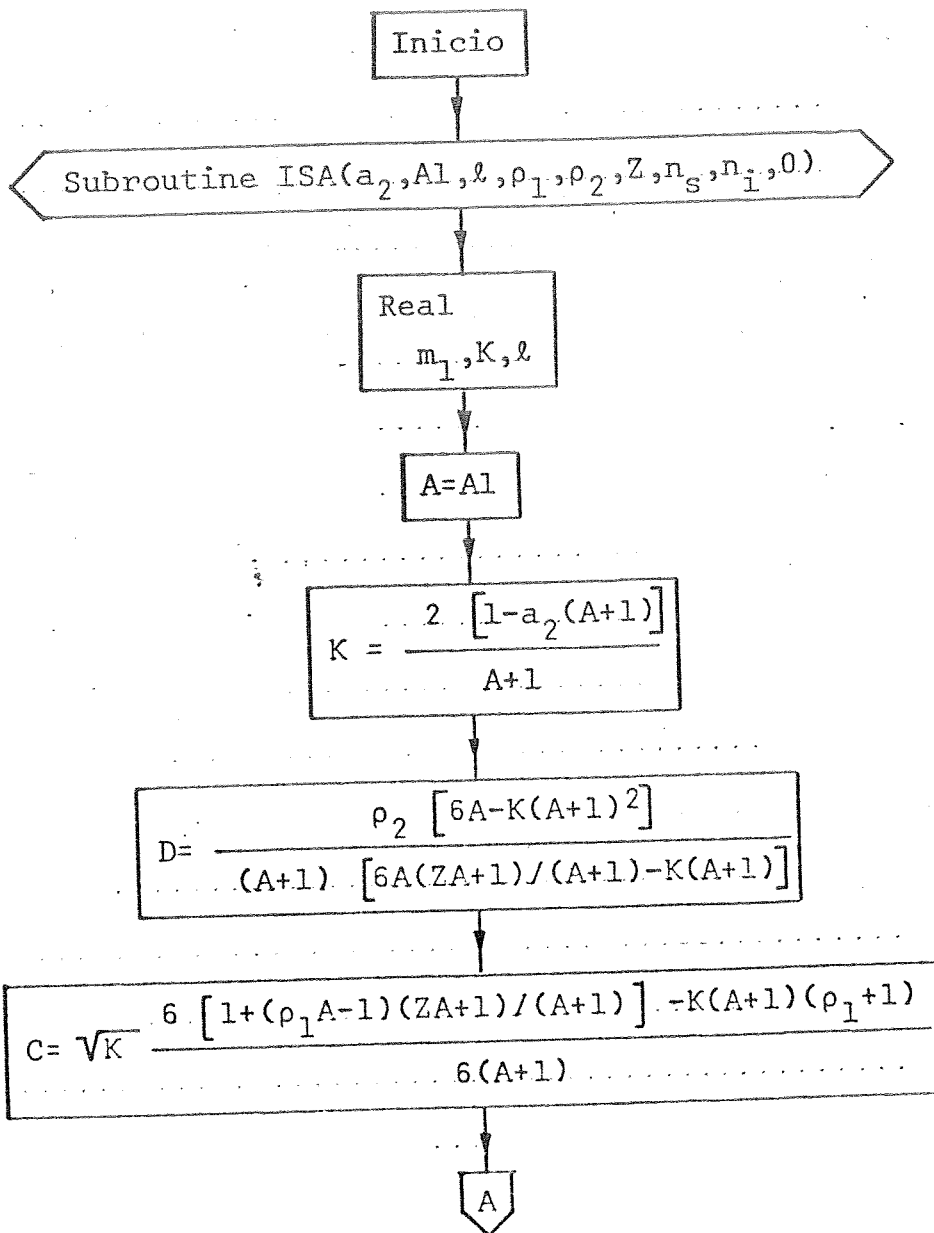
$$R(J) = W(J) \frac{1+(1-Z)D(J)}{Z \rho_2} + \frac{\epsilon}{Z(\rho_2+W(J))}$$

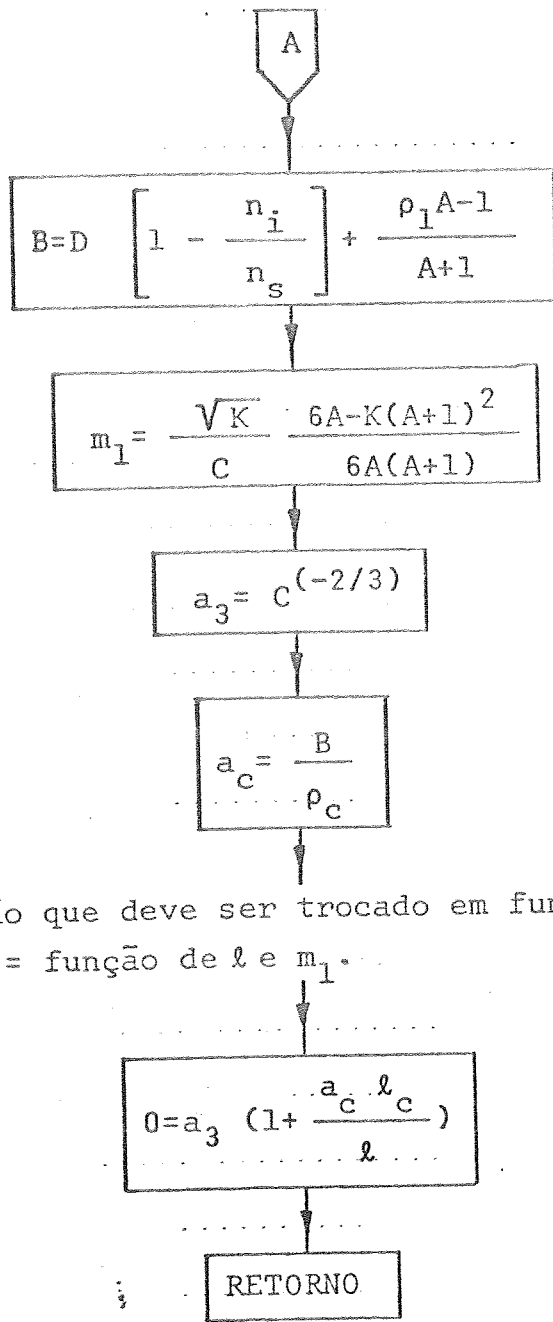
$$A(3) = A(1) - \frac{A(2) - A(1)}{\frac{L(2)-R(2)}{L(1)-R(1)} - 1}$$





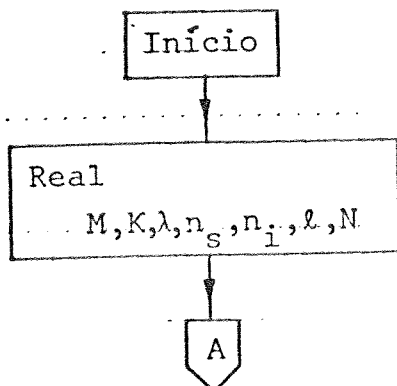
K - Subrotina ISA

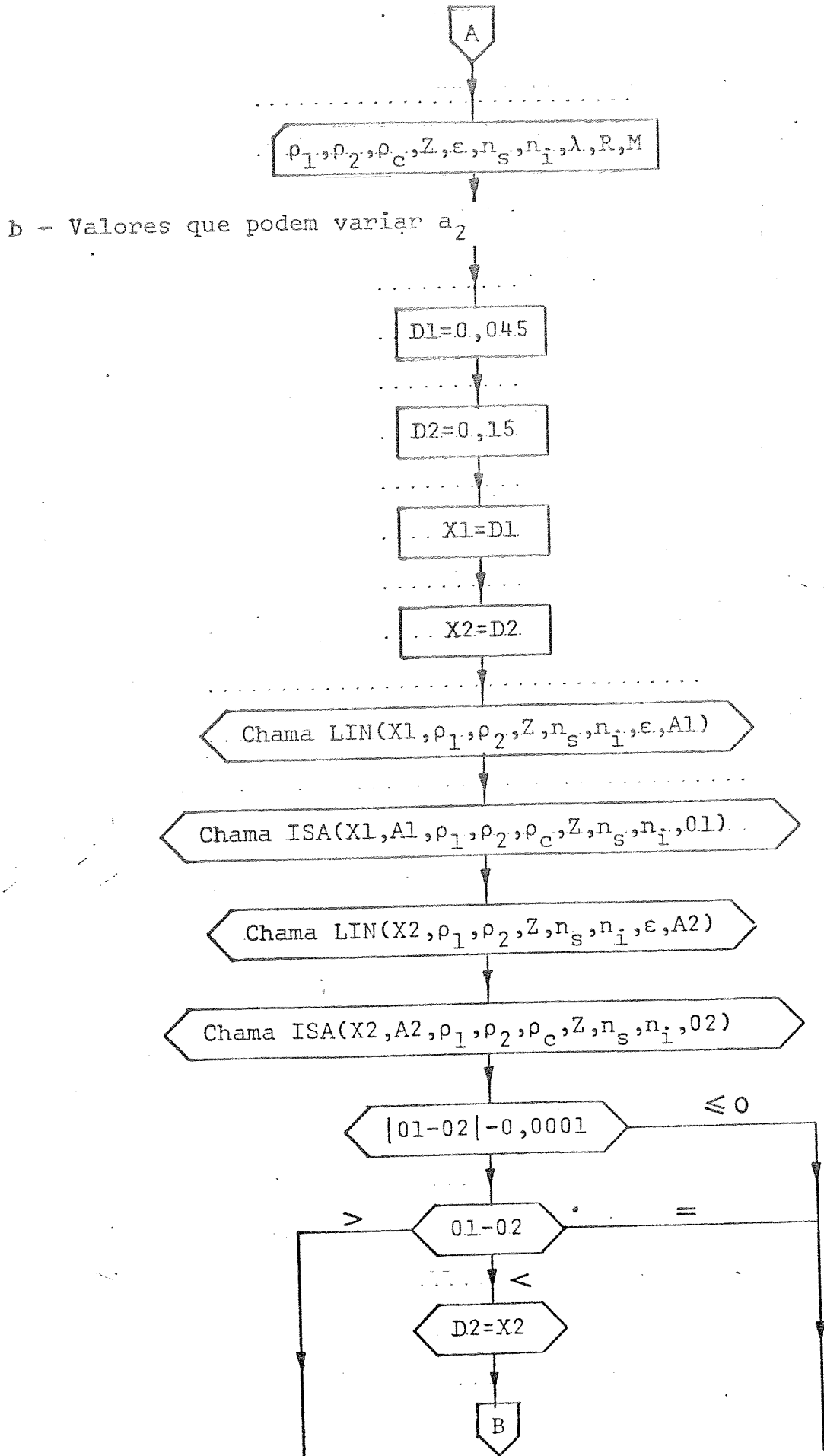


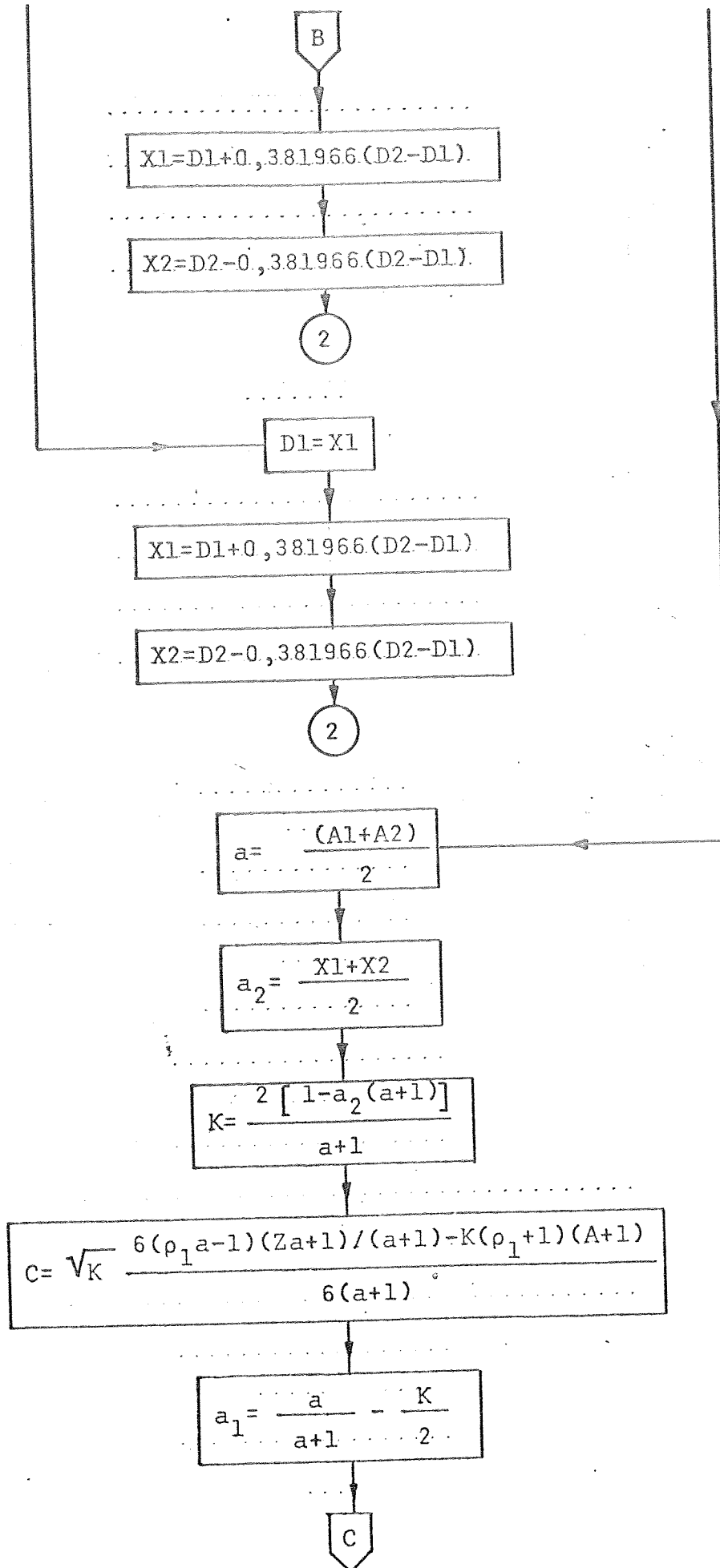


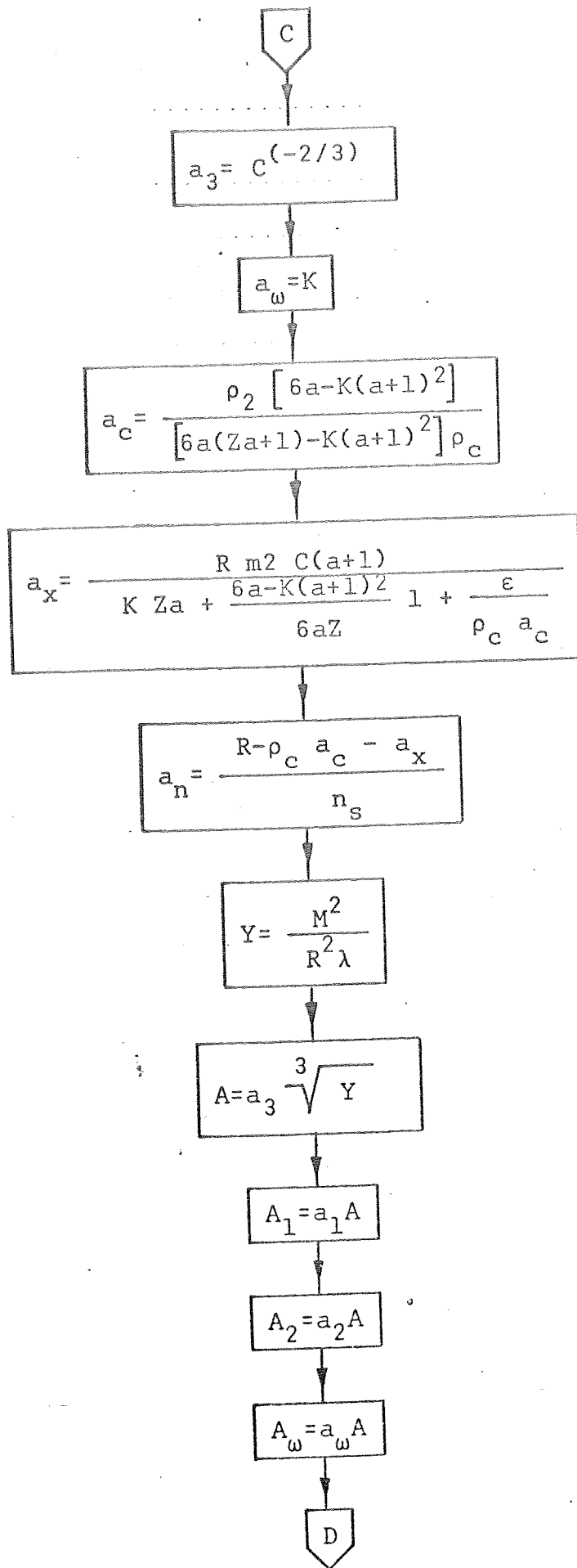
3 - Diagrama de Blocos para a viga com cabo de protensão igual ao seu comprimento.

a - Programa Principal









D

$$A_c = a_c A$$

$$N = a_n A$$

$$X = a_x A$$

Cabeçalho:

Área da aba 1, Área da aba 2

Área da alma, Área do cabo

Força efetiva de Protensão, Força Redundante

c - Cálculo das propriedades da seção transversal

$$e_1 = \frac{\lambda K A}{a+1}$$

$$e_2 = e_1 a$$

$$H = e_1 + e_2$$

$$J = \frac{\lambda K A^2 [6a - K(a+1)^2]}{6(a+1)^2}$$

$$W_1 = \frac{J}{e_1}$$

E

E

$$W_2 = \frac{J}{e_2}$$

$$O_\omega = 0,789 A$$

Cabeçalho:

Momento de Inércia em relação ao eixo x-x
Módulos de resistência em relação ao eixo x-x
Altura da seção transversal
Localização do centro de Gravidade da seção transversal

d - Verificação das Tensões nas fibras mais solicitadas

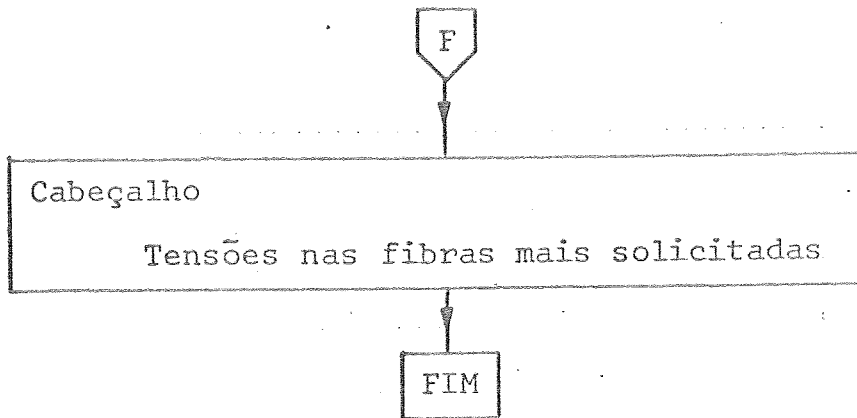
$$\sigma_{f1} = \frac{n_i N+X}{A} - \frac{(n_i N+X) Z e_2}{W_1} + \frac{M}{W_1}$$

$$\sigma_{f2} = \frac{n_i N+X}{A} - \frac{(n_i N+X) Z e_2}{W_2} + \frac{M}{W_2}$$

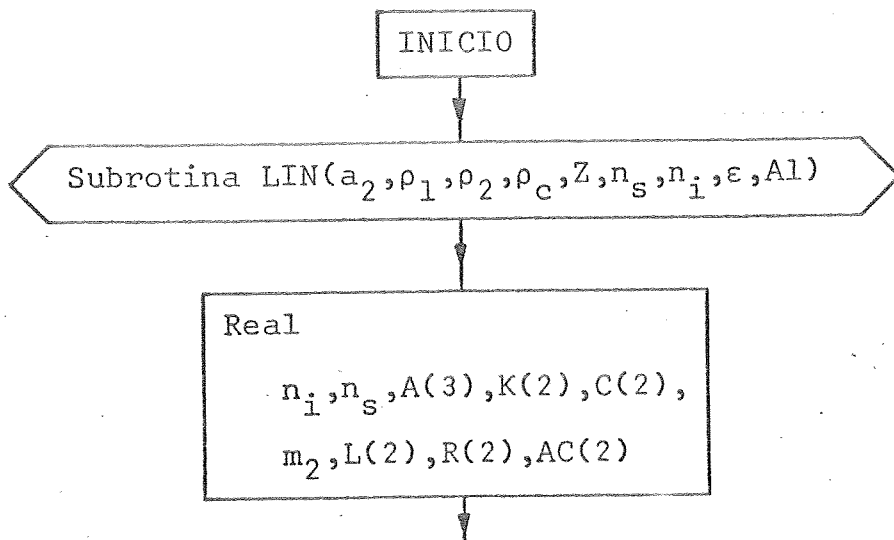
$$\sigma_{f3} = \frac{n_s N+X}{A} + \frac{(n_s N+X) Z e_2}{W_2}$$

$$\sigma_{f4} = \frac{n_s N+X}{A_c}$$

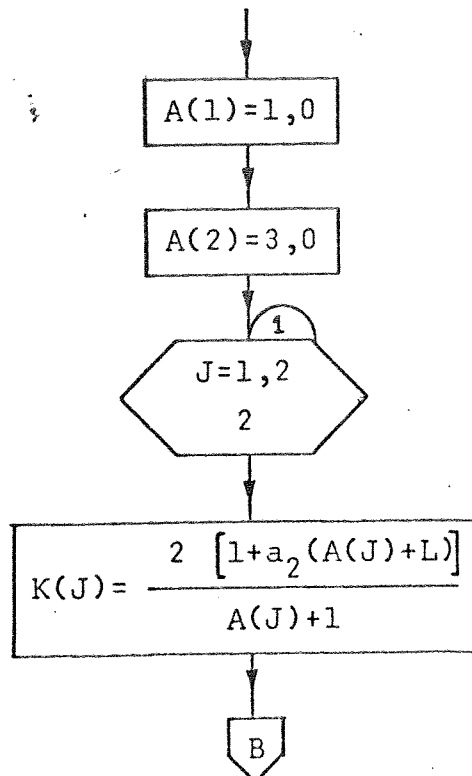
F



e - Subrotina LIN



f - Valores que podem variar A - assimetria da seção





$$C(J) = \sqrt{K(J)} \frac{6(1+(\rho_1 A(J)-1)(ZA(J)+1)/(A(J)+1)-K(J)(A(J)+1)(\rho_1+1)}{6(A(J)+1)}$$

g - Segue cartão que deve ser trocado em função do tipo de carregamento: $m_2 = \text{constante}$

$$AC(J) = \frac{\rho_2 [6 A(J) - K(J)(A(J)+1)^2]}{6 A(J) (ZA(J)+1) - K(J)(A(J)+1)^2 \rho_c}$$

$$AX(J) = \frac{R m_2 C(J)(A(J)+1)}{\sqrt{K(J)} \left\{ ZA(J) + \frac{6A(J) - K(J)(A(J)+1)^2}{6 A(J) Z} \left[1 + \frac{\epsilon}{\rho_c A_c(J)} \right] \right\}}$$

$$AN(J) = \frac{R \rho_c A_c(J) - AX(J)}{n_s}$$

$$L(J) = [n_i AN(J) + AX(J)] [6A(J)(Z+1) - K(J)(A(J)+1)]^2$$

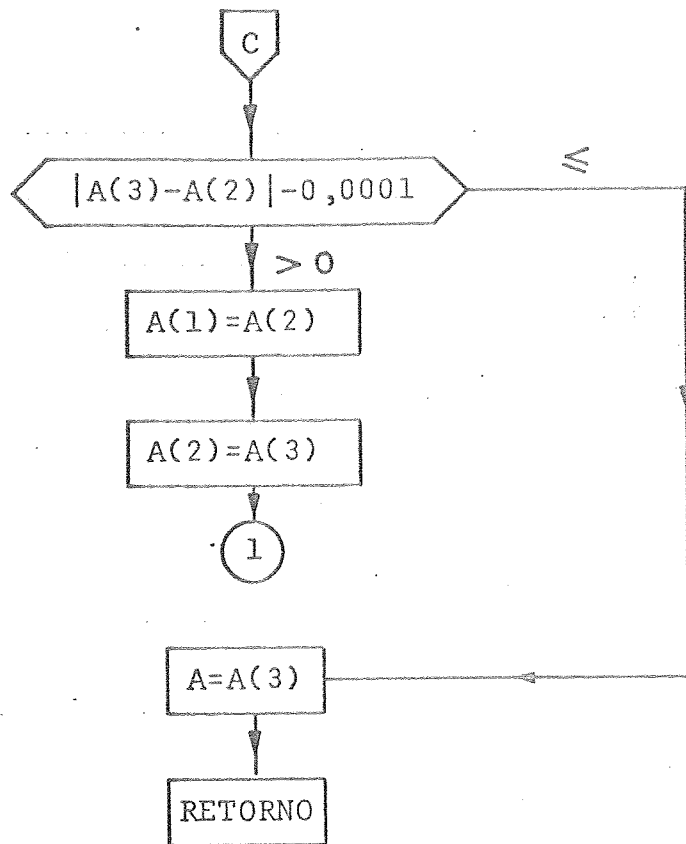
2

$$R(J) = \frac{R}{K(J)} \left\{ 6C(J)A(J)(A(J)+1) - \sqrt{K(J)} [6A(J) - K(J)(A(J)+1)^2] \right\}$$

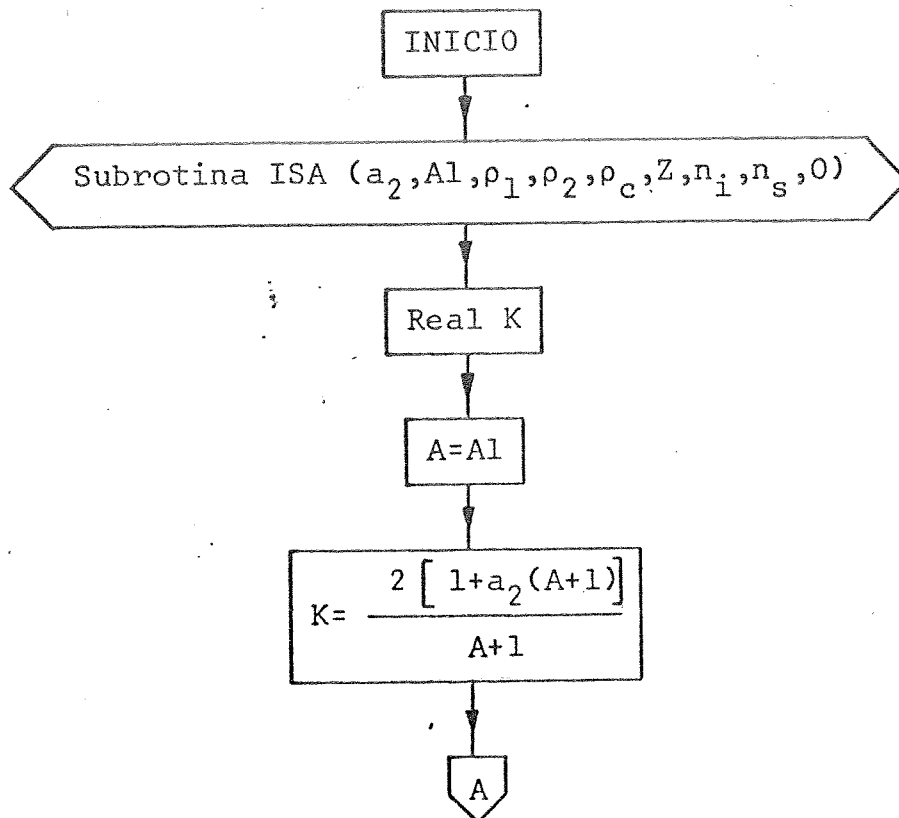
h - Equação Governante $G(A, a_2) = L(J) - R(J)$

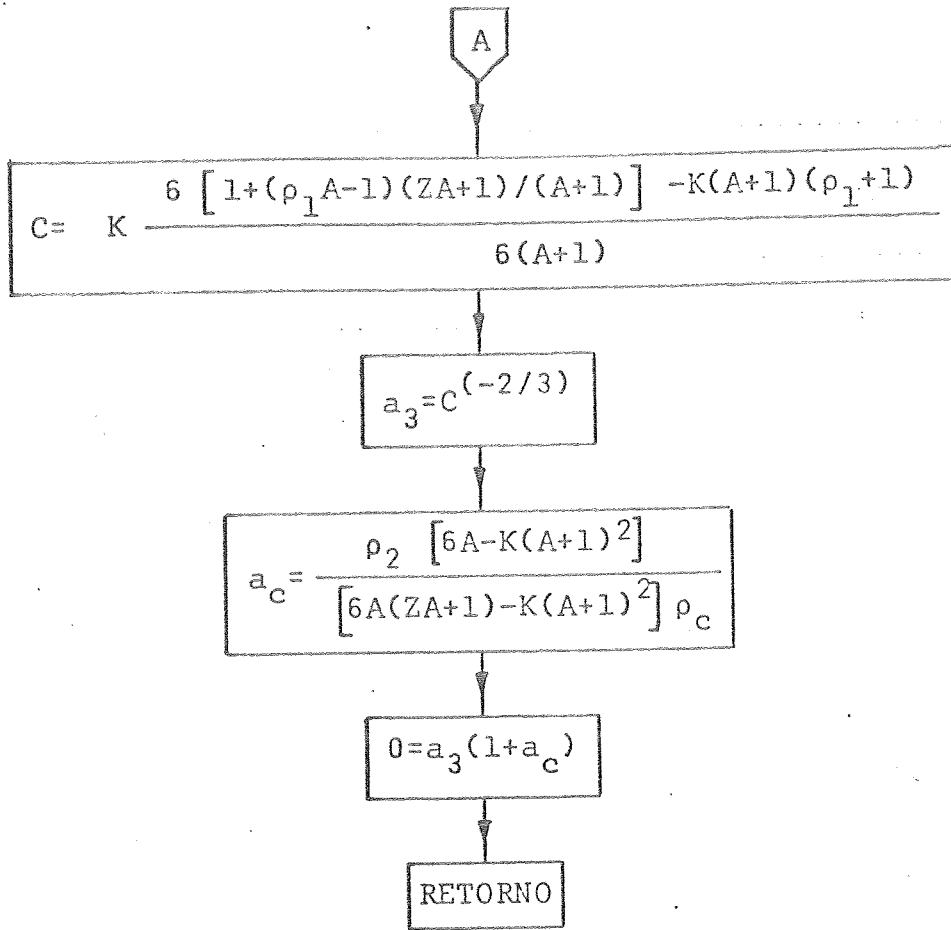
$$A(3) = A(1) - \frac{A(2) - A(1)}{\frac{L(2) - R(2)}{L(1) - R(1)} - 1}$$





i - Subrotina ISA

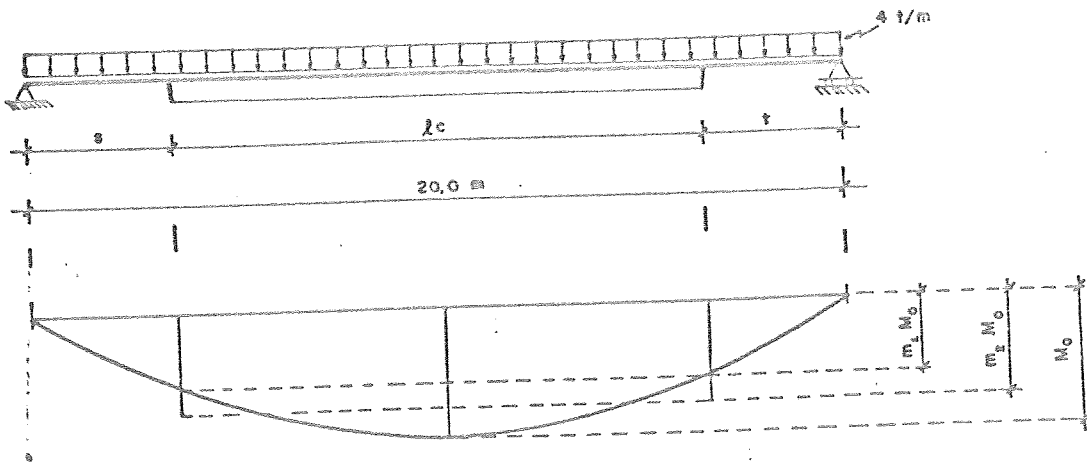




4 - Exemplos

4.1 - Dimensionamento de uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

a) Dimensionamento considerando o cabo de protensão menor que o comprimento da viga.



a.1 - Determinação de m_2 em função de m_1

$$m_2 M_0 l_c = m_1 M_0 l_c + \frac{2}{3} (M_0 - m_1 M_0) l_c$$

$$m_2 = m_1 + \frac{2}{3} (1 - m_1)$$

ou

$$m_2 = \frac{2 + m_1}{3}$$

a.2 - Determinação de s , t e l_c em função de m_1

$$m_1 M_0 = \frac{pl}{2} s - \frac{ps^2}{2}$$

$$m_1 \frac{pl^2}{8} = \frac{pl}{2} s - p \frac{s^2}{2}$$

$$m_1 \frac{pl^2}{8} = \frac{pl^2}{2} \frac{s}{l} - \frac{pl^2}{2} \left(\frac{s}{l}\right)^2$$

Resolvendo a equação acha-se

$$\frac{s}{l} = \frac{t}{l} = \frac{1 - \sqrt{1 - m_1}}{2}$$

Portanto $\frac{l_c}{l} = \sqrt{1 - m_1}$

Adotando-se:

R = 2160 Kg/cm² λ = 140 Z = 1,3 ρ₁ = 1,0
 Rc = 16000 Kg/cm² n_s = 1.1 n_i = 0,9 ρ₂ = 1,0

Obtem-se:

A ₁	A ₂	A _w	A _c	A
58,23cm ²	19,27cm ²	93,31cm ²	6,22cm ²	170,81cm ²
N	X	l _c	s=t	G
76955,75Kg	14891,06Kg	1412,12cm	293,94cm	134,77Kg/m
e ₁	e ₂	J	W ₁	W ₂
44,11cm	70,18cm	325661,91cm ⁴	7382,42cm ³	4660,25cm ³

a.3 - Verificação das tensões nas fibras mais solicitadas, fig.

$$\sigma_{f1}^- = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X) Ze_2}{W_1} + \frac{M_0}{W_1}$$

$$\sigma_{f1}^- = \frac{0,9 \times 76955,75 + 14891,06}{170,81} - \frac{(0,9 \times 76955,75 + 14891,06) 1,3 \times 70,18}{7382,42}$$

$$\frac{20000000}{7382,42}$$

$$\sigma_{f1}^- = 2161,83 \text{ Kg/cm}^2 \approx R$$

$$\sigma_{f2}^+ = \frac{M_0}{W_2} - \frac{(n_i N + X) Ze_2}{W_2} - \frac{n_i N + X}{A}$$

$$\sigma_{f_2}^+ = \frac{20000000}{4640,25} - \frac{(0,9 \times 76955,75 + 14891,06) 1,3 \times 70,18}{4640,25}$$

$$\frac{0,9 \times 76955,75 + 14891,06}{170,81}$$

$$\sigma_{f_2}^+ = 2162,92 \text{ Kg/cm}^2 \approx R$$

$$\sigma_{f_3}^+ = \frac{n_s N + X}{A_c}$$

$$\sigma_{f_3}^+ = \frac{1,1 \times 76955,75 + 14891,06}{6,22} = 16003,6 \text{ Kg/cm}^2 \approx R_c$$

$$\sigma_{f_4}^+ = \frac{m_1 M_0}{W_2}$$

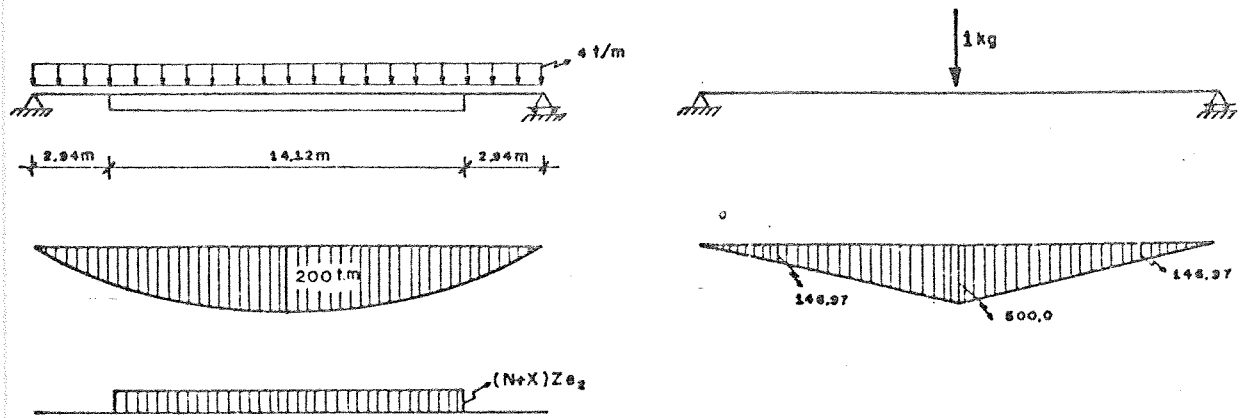
$$\sigma_{f_4}^+ = \frac{0,50 \times 20000000}{4640,25} = 2161,43 \text{ Kg/cm}^2 \approx R$$

$$\sigma_{f_5}^- = \frac{n_s N Z e_2}{W_2} + \frac{n_s N}{A}$$

$$\sigma_{f_5}^- = \frac{1,1 \times 76955,75 \times 1,3 \times 70,18}{4640,25} + \frac{1,1 \times 76955,75}{170,81} = 2160 \text{ Kg/cm}^2 \approx R$$

a.4 - Determinação da flecha no meio do vão - Cálculo pelo

Princípio dos Trabalhos Virtuais



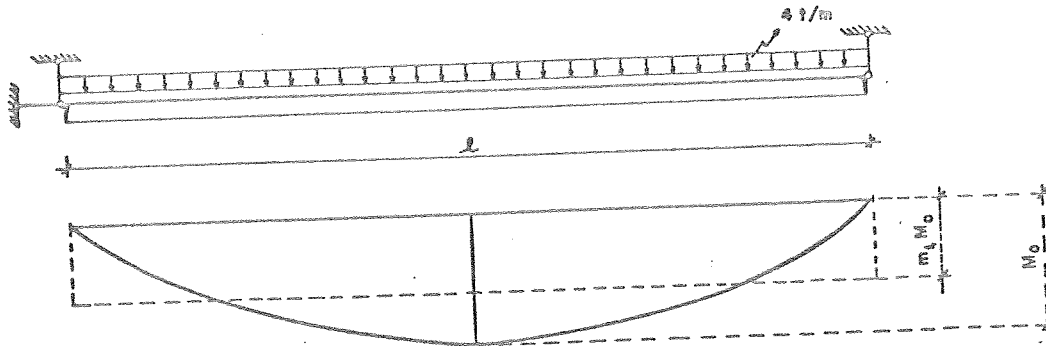
$$EJF = M_0 \bar{M}_{ds} + NXZe_2 \bar{M}_{ds}$$

$$EJf = 2000 \times \frac{5}{12} \times 20000000 \times 500 - 2 \frac{500+146,97}{2} \times \frac{1412,12}{2} \times$$

$$(76955,75+14891,06) \times 1,3 \times 70,18$$

$$f = 6,59\text{cm}$$

b) Dimensionamento considerando o cabo de protensão de comprimento igual ao da viga.



b.1) Determinação de m_2

$$m_2 M_0 l = \frac{2}{3} M_0 l \rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$$

Conservando-se os mesmos valores adotados para o exemplo anterior, obtem-se:

A_1	A_2	A_w	A_c	A
55,98cm ²	25,32cm ²	100,33cm ²	6,22cm ²	181,63cm ²
N	X	G	e_1	e_2
75308,53Kg	16638,03Kg	142,76Kg/m	49,26cm	69,26cm
J	W_1	W_2		
384757,85cm ⁴	7811,29cm ³	5555,25cm ³		

b.2 - Verificação das Tensões nas fibras mais solicitadas

$$\sigma_{f_1}^- = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X) Z e_2}{W_1} + \frac{M_0}{W_1}$$

$$\sigma_{f_1}^- = \frac{0,9 \times 75308,05 + 16638,83}{181,63} - \frac{(0,9 \times 75308,5 + 16638,83) \times 1,3 \times 69,26}{7811,29} +$$

$$\frac{20000000}{7811,29}$$

$$\sigma_{f_1}^- = 2052 \text{ Kg/cm}^2 < R (5\%)$$

$$\sigma_{f_2}^+ = \frac{M_0}{W_2} - \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X) Z e_2}{W_2}$$

$$\sigma_{f_2}^+ = \frac{20000000}{5555,25} - \frac{0,9 \times 75308,5 + 16638,83}{181,63} -$$

$$\frac{(0,9 \times 75308,5 + 16638,83) \times 1,3 \times 69,26}{5555,25}$$

$$\sigma_{f_2}^+ = 1767,2 \text{ Kg/cm}^2 < R (18\%)$$

$$\sigma_{f_3}^- = \frac{n_s N + X}{A} + \frac{(n_s N + X) Z e_2}{W_2}$$

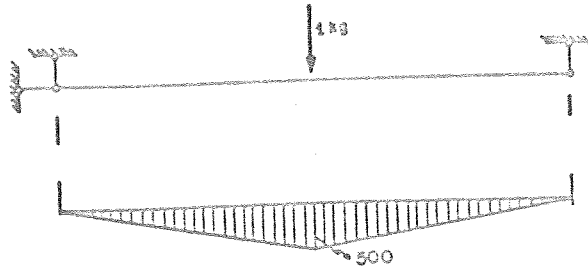
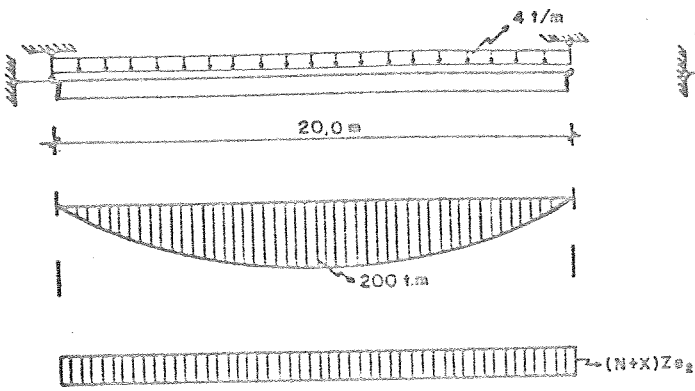
$$\sigma_{f_3}^- = \frac{1,1 \times 75308,5 + 16638,83}{181,63} + \frac{(1,1 \times 75308,5 + 16638,83) \times 1,3 \times 69,26}{5555,25}$$

$$\sigma_{f_3}^- = 2160 \text{ Kg/cm}^2 = R$$

$$\sigma_{f_4}^+ = \frac{n_s N + X}{A_c}$$

$$\sigma_{f_4}^- = \frac{1,1 \times 75308,5 + 16638,83}{6,22} = 15999 \text{ Kg/cm}^2 = R$$

b.2 - Determinação da flecha no meio do vão



$$EJf = M_0 \bar{M} dx + (N+X)Ze_2 \bar{M} dx$$

$$EJf = 2000 \times \frac{5}{12} \times 20000000 \times 500 - 500 \times (1,3 \times 69,26 \times 75308,5 + 16638) \times 1000$$

$$f = 5,19 \text{ cm}$$

c - Dimensionamento da mesma viga sem o cabo de protensão

c.1 - Cálculo da altura econômica

$$h_i = 1,1 \sqrt{\frac{M}{\delta R}}$$

$$e \delta = \frac{h}{\lambda}$$

Das expressões acima, tomando-se $\lambda = 140$, acha-se:

$$h = 5,53 \sqrt[3]{\frac{M}{R}}$$

$$h = 5,53 \sqrt[3]{\frac{20000000}{2160}} = 116 \text{ cm}$$

c.2 - Cálculo das dimensões das abas

$$J_{\text{nec}} = \frac{M}{R} \left(\frac{h}{2} + \Delta \right) - \frac{\delta h^3}{12}$$

2 abas

$$\delta = \frac{h}{\lambda} = \frac{116}{140} = 0,83 \text{ cm}$$

adotando $\Delta = 2,54 \text{ cm (1")}$

$$J_{nec} = \frac{20000000}{2160} \left(\frac{116}{2} + 2,54 \right) - \frac{0,83 \times 116^3}{12}$$

2 abas

$$J_{nec} = 452594 \text{ cm}^4$$

2 abas

$$b \geq \frac{2 J_{nec}}{\Delta(h+\Delta)^2}$$

$$b \geq \frac{2 \times 452594}{2,54(116+2,54)^2} = 25,4 \text{ cm}$$

c.3 - Verificação

$$J = b\Delta \frac{(h+\Delta)^2}{2} + \frac{\delta h^3}{12}$$

$$J = 25,4 \times 2,54 \frac{(116+2,54)^2}{2} + \frac{0,83 \times 116^3}{12}$$

$$J = 561243 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = \frac{M}{J} \left(\frac{h}{2} + \Delta \right)$$

$$\sigma = \frac{20000000}{561243} \left(\frac{116}{2} + 2,54 \right)$$

$$\sigma = 2157 \text{ Kg/cm}^2 < R$$

c.4 - Determinação da flecha máxima

$$f = \frac{5p\ell^4}{384EJ}$$

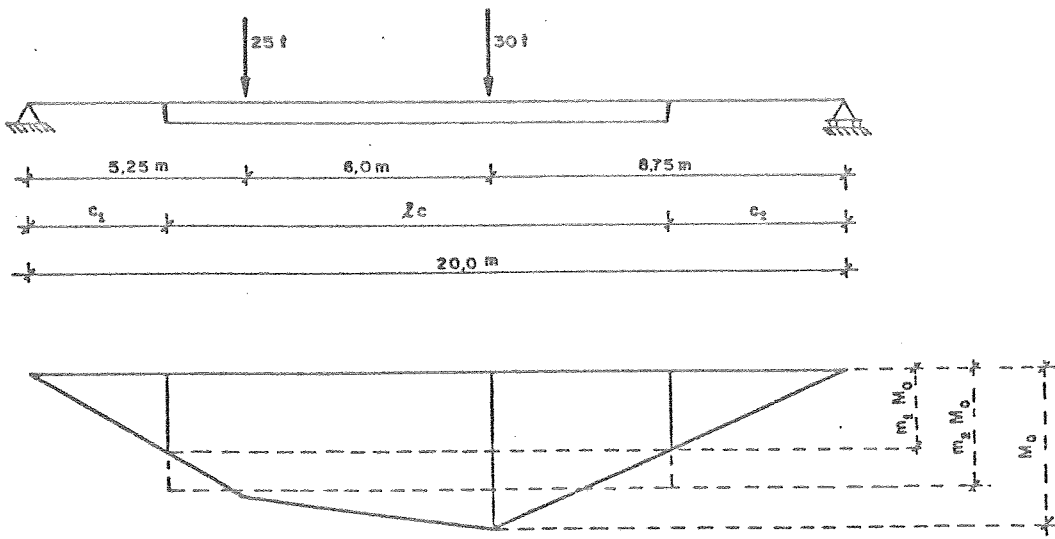
$$f = \frac{5 \times 40 \times 2000^4}{384 \times 2100000 \times 561243} = 7,07 \text{ cm}$$

Comparando-se os três dimensionamentos, verifica-se uma diferença em peso do primeiro (viga protendida, $\ell_c < \ell$) em relação ao terceiro (viga sem cabo de protensão) de 22,2%; do primeiro em relação ao segundo (viga protendida, $\ell_c = \ell$) de 6,7% e do segundo em

relação ao terceiro de 16,6%. Fazendo-se uma diferença de 6,8% do primeiro em relação ao terceiro; de 26,6% do segundo em relação ao terceiro e de 21,21% do segundo em relação ao primeiro.

4.2 - Dimensionamento de uma viga simplesmente apoiado sujeita a duas cargas concentradas.

a) Considerando o cabo de protensão de comprimento menor que o da viga.



a.1 - Determinação de s , t e l_c em função de m_1

$$m_1 M_0 = 33,75s \quad s = 6,8056m_1 \quad \text{ou} \quad s = 0,3403m_1 l$$

$$m_1 M_0 = 26,25t \quad t = 8,75 m_1 \quad \text{ou} \quad t = 0,4375m_1 l$$

$$l_c = l - s - t$$

$$l_c = l - 0,7778m_1 l \quad \text{ou} \quad l_c = (1 - 0,7778m_1) l$$

a.2 - Determinação de m_2 em função de m_1

Pela equivalência de áreas, acha-se:

$$m_2 M_0 l_c = m_1 M_0 l_c + \frac{M_0 - m_1 M_0}{2} (8,75 - s) + \frac{(1,7714M_0 - 2m_1 M_0)}{2} \times 6,0$$

$$+ \frac{0,7714M_0 - m_1 M_0}{2} (5,25 - t)$$

substituindo na expressão acima os valores de s, t e l_c , tem-se:

$$m_2 (20 - 15,5556m_1) = m_1 (20 - 15,5556m_1) + (1 - m_1) (4,375 - 3,4028m_1) + 5,3142 - 6m_1 + (0,7714m_1) (2,625 - 4,375m_1)$$

efetuando as multiplicações e simplificando, tem-se:

$$m_2 (20 - 15,5556m_1) = 11,7141 + 0,2223m_1 - 7,7778$$

ou

$$m_2 = \frac{0,5857 + 0,0111m_1 - 0,3889m_1^2}{1 - 0,7778m_1}$$

Adotando-se:

$$R = 2160 \text{ Kg/cm}^2 \quad \lambda = 140 \quad Z = 1,3 \quad \rho_1 = 1,0$$

$$R_c = 16000 \text{ Kg/cm}^2 \quad n_s = 1,1 \quad n_i = 0,9 \quad \rho_2 = 1,0$$

Obtem-se:

A_1	A_2	A_w	A_c	A
63,66cm ²	21,16cm ²	102,74cm ²	6,80cm ²	187,56cm ²
N	X	l_c	s	t
84625,7Kg	15638,5Kg	1216,8cm	342,7cm	440,5cm
e_1	e_2	J	W_1	W_2
46,38cm	73,55cm	393527,5cm ⁴	8485,3cm ³	5350,2cm ³
G				
148Kg/m				

a.3 - Verificação das tensões nas fibras mais solicitadas

$$\sigma_{f_1} = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X) Z e_2}{W_1} + \frac{M_0}{W_1}$$

$$\sigma_{f1}^- = \frac{0,9 \times 84625,7 + 15638,5}{A} + \frac{(0,9 \times 84625,7 + 15638,5) \times 1,3 \times 73,55}{8485,3} +$$

$$\frac{22968750}{8485,3}$$

$$\sigma_{f1}^- = 2161,9 \text{ Kg/cm}^2 \approx R$$

$$\sigma_{f2}^+ = \frac{M_0}{W_2} - \frac{(n_i N + X) Z e_2}{W_2} - \frac{n_i N + X}{A}$$

$$\sigma_{f2}^+ = \frac{22968750}{5350,2} - \frac{(0,9 \times 84625,7 + 15638,5) \times 1,3 \times 73,55}{5350,2} -$$

$$\frac{0,9 \times 84625,7 + 15638,5}{187,56}$$

$$\sigma_{f2}^+ = 2163 \text{ Kg/cm}^2 \approx R$$

$$\sigma_{f3}^+ = \frac{n_s N + X}{A_c}$$

$$\sigma_{f3}^+ = \frac{1,1 \times 84625,7 + 5638,5}{6,80} = 15989,2 \text{ Kg/cm}^2 \approx R_c$$

$$\sigma_{f4}^+ = \frac{m_1 M_0}{W_2}$$

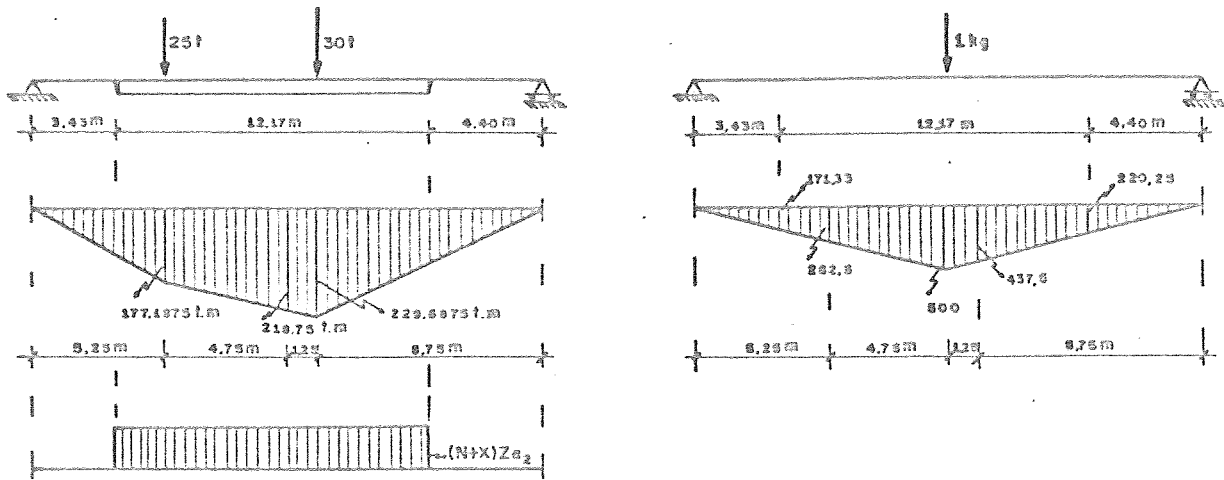
$$\sigma_{f4}^+ = \frac{0,50 \times 22968750}{5350,2} = 2161 \text{ Kg/cm}^2 \approx R$$

$$\sigma_{f5}^- = \frac{n_s N Z e_2}{W_2} + \frac{n_s N}{A}$$

$$\sigma_{f5}^- = \frac{1,1 \times 84625,7 \times 1,3 \times 73,55}{5350,2} + \frac{1,1 \times 84625,7}{187,56}$$

$$\sigma_{f5}^- = 2160 \text{ Kg/cm}^2$$

a.4 - Determinação da flecha no meio do vão



$$EJf = M_0 \bar{M}_{ds} + (N+X)Z_{e2} \bar{M}_{ds}$$

$$EJf = 525 \times \frac{1}{3} \times 262,5 \times 17718750 + 475 \times \frac{1}{6} \times 17718750 (2 \times 262,5 + 500) +$$

$$21875000 (2 \times 500 + 262,5)$$

$$+ 125 \times \frac{1}{6} \times 21875000 (2 \times 500 + 437,50) + 22968750 (2 \times 437,5 + 500) +$$

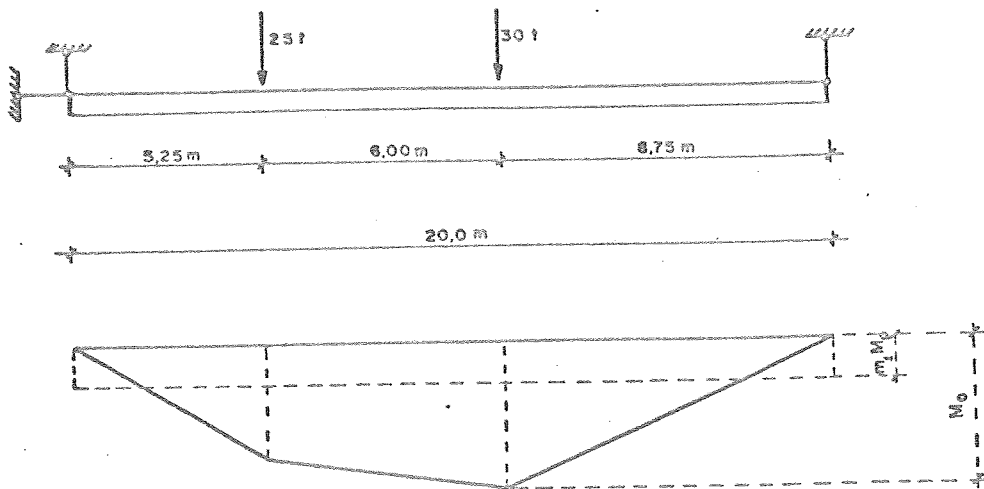
$$+ 875 \times \frac{1}{3} \times 22968750 \times 437,50 - \frac{500 + 171,35}{2} \times 657,3 \times$$

$$\times (84625,7 + 15638,5) \times 1,3 \times 73,55$$

$$- \frac{500 + 220,25}{2} \times 559,5 \times (84625,7 + 15638,5) \times 1,3 \times 73,55$$

$$f = 5,61 \text{ cm}$$

b - Dimensionamento considerando o cabo de protensão de comprimento igual ao da viga.



b.1 - Determinação de m_2

$$m_2 M_0 l = \frac{8,75 M_0}{2} + \frac{0,7714 M_0}{2} \times 5,25 + \frac{M_0 + 0,7714 M_0}{2} \times 6$$

$$m_2 l = 11,71 \text{ ou } m_2 = 0,5857$$

Adotando-se os mesmos valores do exemplo anterior, encontra-se:

A_1	A_2	A_w	A_c	A
61,31cm ²	27,78cm ²	119,19cm ²	6,83cm ²	199,29cm ²
N	X	e_1	e_2	J
84707Kg	16023Kg	51,65cm	72,55cm	463530cm ⁴
W_1	W_2	G		
9022cm ³	6389cm ³	156,64Kg/m		

b.2 Verificação das tensões nas fibras mais solicitadas

$$\sigma_{f_1} = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X) Z e_2}{W_1} + \frac{M_0}{W_1}$$

$$\sigma_{f_1}^- = \frac{0,9 \times 84707 + 16023}{199,29} - \frac{(0,9 \times 84707 + 16023) \times 1,3 \times 72,55}{8974} + \frac{22968750}{8974}$$

$$\sigma_{f_1}^- = 2053 \text{ Kg/cm}^2 < R \text{ (5\%)}$$

$$\sigma_{f_2}^+ = \frac{M_0}{W_2} - \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X) Z e_2}{W_2}$$

$$\sigma_{f_2}^+ = \frac{22968750}{6389} - \frac{0,9 \times 84707 + 16023}{199,29} - \frac{(0,9 \times 84707 + 16023) \times 1,3 \times 72,55}{6389}$$

$$\sigma_{f_2}^+ = 1770 \text{ Kg/cm}^2 < R \text{ (18\%)}$$

$$\sigma_{f_3}^- = \frac{n_s N + X}{A} + \frac{(n_s N + X) Z e_2}{W_2}$$

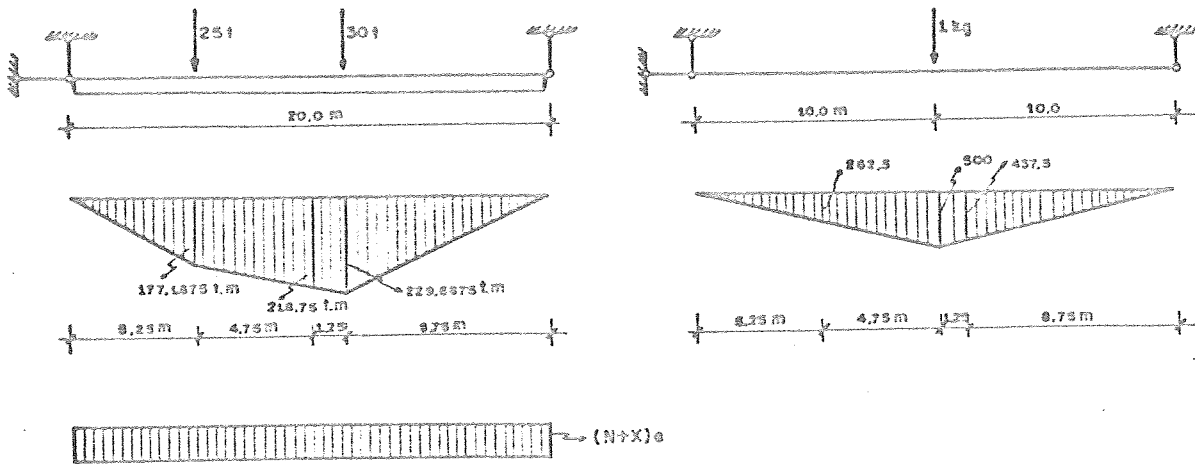
$$\sigma_{f_3}^- = \frac{1,1 \times 84707 + 16023}{199,29} + \frac{(1,1 \times 84707 + 16023) \times 1,3 \times 72,55}{6389}$$

$$\sigma_{f_3}^- = 2160 \text{ Kg/cm}^2 = R$$

$$\sigma_{f_4}^- = \frac{n_s N + X}{A_c}$$

$$\sigma_{f_4}^+ = \frac{1,1 \times 84707 + 16023}{6,83} = 15999 \text{ Kg/cm}^2 = R_c$$

b.3 - Determinação da flecha no meio do vão



$$EJf = M_0 \bar{M}_{ds} + (N+X)Ze_2 \bar{M}_{ds}$$

$$EJf = 525 \times \frac{1}{3} \times 262,5 \times 1771875 + 475 \times \frac{1}{6} \times 1771875 (2 \times 262,5 + 500) +$$

$$+ 21875000 (2 \times 500 + 262,5)$$

$$+ 125 \times \frac{1}{6} \times 21875000 (2 \times 500 + 437,5) + 22968750 (2 \times 437,5 + 500)$$

$$+ 875 \times \frac{1}{3} \times 22968750 \times 437,5 - 2 \times \frac{500 \times 1000}{2} (84707 + 16022) \times 1,3 \times 72,55$$

$$f = 4,04 \text{ cm}$$

c - Dimensionamento da mesma viga sem o cabo de protensão

c.1 - Cálculo da altura econômica

$$h = 5,53 \sqrt[3]{\frac{M}{R}}$$

$$h = 5,53 \sqrt[3]{\frac{22968750}{2160}} = 121,6 \text{ cm}$$

c.2 - Cálculo das dimensões das abas

$$J_{nec} = \frac{M}{R} \left(\frac{h}{2} + \Delta \right) - \frac{\delta h^3}{12}$$

2 abas

$$= \frac{h}{\lambda} = \frac{121,6}{140} = 0,87\text{cm}$$

Adotando $\Delta = 2,54\text{cm}$ (1")

$$J_{\text{nec}} = \frac{22969750}{2160} \left(\frac{121,6}{2} + 2,54 \right) - \frac{0,87 \times 121,6^3}{12}$$

$$J_{\text{nec}} = 543208\text{cm}^4$$

$$b \geq \frac{2 J_{\text{nec}}}{\Delta(h+\Delta)^2}$$

$$b \geq \frac{2 \times 543208}{2,54(121,6+2,54)^2} = 27,75\text{cm}$$

c.3 - Verificação

$$J = \frac{b\Delta(h+\Delta)^2}{2} + \frac{\delta h^3}{12}$$

$$J = \frac{27,75 \times 2,54(121,6+2,54)^2}{2} + \frac{0,87 \times 121,6^3}{12}$$

$$J = 673471\text{cm}^4$$

$$\sigma = \frac{M}{J} \left(\frac{h}{2} + \Delta \right)$$

$$\sigma = \frac{22968750}{673471} \left(\frac{121,6}{2} + 2,54 \right)$$

$$\sigma = 2160 \text{ Kg/cm}^2 = R$$

c.4 - Determinação da flecha máxima

$$EJf = M_0 \bar{M} ds$$

$$EJf = 525x \frac{1}{3} x 262,5 x 17718750 + 475x \frac{1}{6} x 17718750(2x262,5+500) +$$

$$+ 21875000(2x500+262,5) + 125x \frac{1}{6} x 21875000(2x500+437,5) +$$

$$+ 22968750(2x437,5+500) + 875x \frac{1}{3} x 22968750 x 437,5$$

$$f = 6,14 \text{ cm}$$

Comparando-se os três dimensionamentos nota-se:

- a) Em relação ao peso
- primeiro dimensionamento em relação ao terceiro - 26,7%
 - segundo dimensionamento em relação ao terceiro - 16,5%
 - primeiro dimensionamento em relação ao segundo - 7,0%
- b) Em relação à flecha
- primeiro dimensionamento em relação ao terceiro - 8,6%
 - segundo dimensionamento em relação ao terceiro - 34,2%
 - segundo dimensionamento em relação ao primeiro = 28,0%

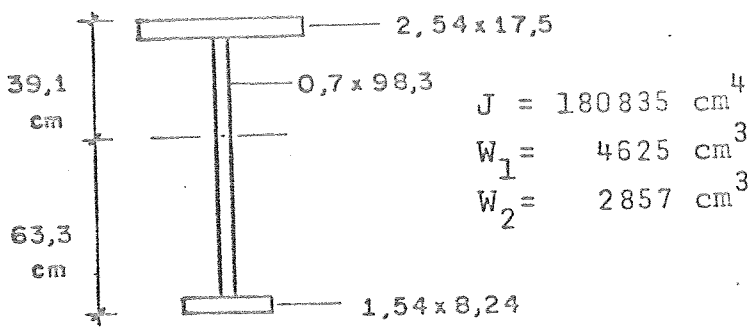
4.3 - Dimensionamento de uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída com auxílio dos gráficos.

Adotando-se $R = 2160 \text{ Kg/cm}^2$ $\lambda = 140$
 $R_c = 16000 \text{ Kg/cm}^2$ $Z = 1,25$

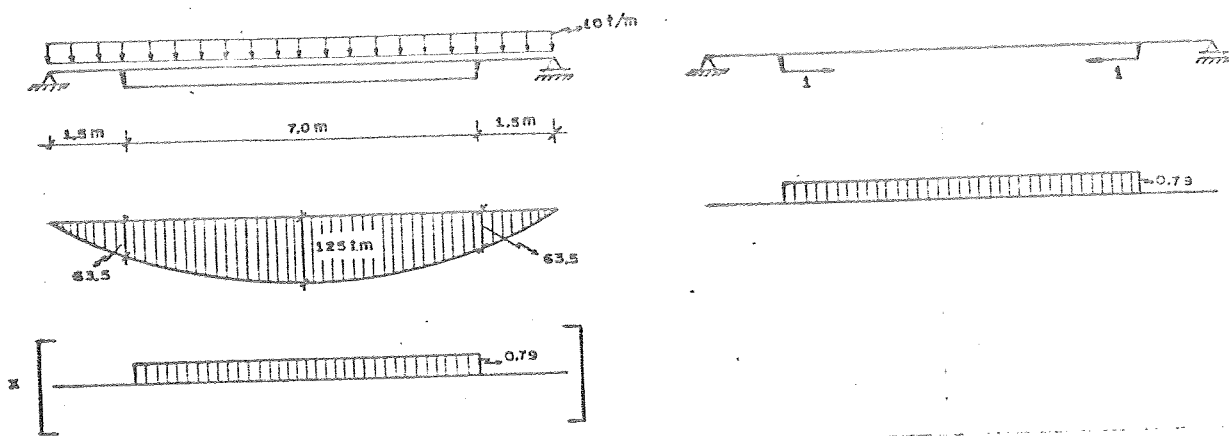
Pelos gráficos acha-se: $N = 58000 \text{ Kg}$
 $A_c = 4,8 \text{ cm}^2$
 $A = 126 \text{ cm}^2$

Donde se conclui que $A_w = 126 x 0,55 = 69 \text{ cm}^2$
 $A_2 = 126 x 0,35 = 44$
 $A_1 = 13 \text{ cm}^2$
 $l_c = 7,0 \text{ m}$

Adotando-se a seguinte seção transversal:



Determinação da força redundante no cabo



$$X = - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EJ} \left[0,79 \times 63,75 \times 7 + \frac{2}{3} \times 61,50 \times 0,79 \right] = \frac{348,9}{EJ}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[0,79 \times 7 \times 0,79 + \frac{18,0835}{4,8} \times 0,79^2 \times 7 \right] = \frac{20,83}{EJ}$$

$$X = 16750 \text{ Kg}$$

Verificação das tensões

$$\sigma_1 = \frac{n_i N + X}{A} - \frac{(n_i N + X)e}{W_1} + \frac{M_o}{W_1}$$

$$\sigma_1^- = \frac{0,9 \times 58000 + 16750}{126} - \frac{(0,9 \times 58000 + 16750) \times 1,25 \times 63,3}{4625} + \frac{12500000}{4625}$$

$$\sigma_1^- = 2070 \text{ Kg/cm}^2 < R (4\%)$$

$$\sigma_2^+ = \frac{n_1 N + X}{A} - \frac{(n_1 N + X)e}{W_2} + \frac{M_o}{W_2}$$

$$\sigma_2^+ = \frac{0,9 \times 58000 + 16750}{126} - \frac{(0,9 \times 58000 + 16750) \times 1,25 \times 63,3}{2857} + \frac{12500000}{2857}$$

$$\sigma_2^+ = 1918 \text{ Kg/cm}^2 < R (11\%)$$

$$\sigma_2^- = \frac{n_s N}{A} + \frac{n_s Ne}{W_2}$$

$$\sigma_2^- = \frac{1,1 \times 58000}{126} + \frac{1,1 \times 58000 \times 1,25 \times 63,3}{2857}$$

$$\sigma_2^- = 2273 \text{ Kg/cm}^2 \text{ ou } R (5\%)$$

$$\sigma_c^+ = \frac{n_s N + X}{A_c}$$

$$\sigma_c^+ = \frac{1,1 \times 58000 + 16750}{4,8} = 16781 \text{ Kg/cm}^2 \approx R_c (5\%)$$

$$\sigma_2^+ = \frac{m_1 M_o}{W_2}$$

$$m_1 M_o = 10 \times 5 \times 1,5 - \frac{10 \times 1,5^2}{2} = 63,75 \text{ t.m}$$

$$\sigma_2^+ = \frac{6375000}{2857} = 2231 \text{ Kg/cm}^2 - R (3\%)$$

Conclusões

As vigas protendidas de aço possibilitam uma economia em peso que varia desde 15% até pouco mais de 30% em relação às vigas dimensionadas da maneira convencional, dependendo esta economia, principalmente da esbeltez da alma e da excentricidade do cabo adotadas. Acredita-se que uma economia em custo será bem menor, e praticável apenas para vigas sujeitas a grande momento fletor, nas quais o custo adicional dos sistemas de ancoragem e protensão sejam diluídos no custo total. Cre-se também que um processo racional de industrialização deste tipo de estrutura, contribuirá para uma minimização do custo.

Dos exemplos calculados verifica-se que o comprimento do cabo depende principalmente da forma do diagrama de momentos fletores, independentemente da esbeltez da alma e variando muito pouco com a excentricidade do cabo e do valor do momento fletor.

Para vigas simplesmente apoiada sujeitas somente a cargas uniformemente distribuídas o comprimento ideal do cabo de protensão é cerca de 70% do vão da viga; quando sujeitas a cargas concentradas o comprimento do cabo é cerca de 50% do vão da viga.

A área da seção transversal do cabo, varia principalmente em função do valor do momento fletor, da esbeltez da alma e da excentricidade do cabo.

A força efetiva de protensão varia principalmente com a excentricidade do cabo e com o valor do momento fletor.

Quanto à área da seção transversal da viga, cerca de 55% desta está concentrada na alma, 10% na aba inferior e o restante, 35% na aba superior, havendo alguma variação para cada tipo de dimensionamento.

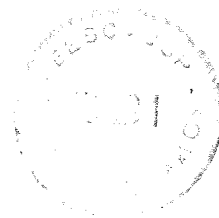
As vigas protendidas de aço são menos deformáveis que as vigas dimensionadas da maneira convencional; e dentre aquelas, as vigas com cabo de protensão igual ao seu comprimento são menos deformáveis que as com cabo de protensão menor que o da viga. Ainda em relação a essas vigas, notamos que elas são de 5% a 7% mais pesadas que aquelas com cabo de protensão menor que seu comprimento, mas por outro lado, torna-se provavelmente, mais fácil a ancoragem dos cabos nas extremidades da viga, desde que a excentricidade o permita.

O dimensionamento utilizando os gráficos, que poderão ser estendidos para diferentes tipos de carregamento, possibilitam o dimensionamento de vigas com seção transversal bem próximas daquelas fornecidas pelo computador.

Bibliografia

- 1- G. Magnel, "Prestressed Steel Structures", The Structural Engineer, vol. 28, 1950.
- 2- G. Magnel, "Les Charpentes en Acier Precomprimé", L'Ossature Metallique, vol. 18, 1953.
- 3- R. Barnett, "Prestressed Truss-Beams", American Society of Civil Engineers-Transactions - paper n° 2989.
- 4- P. Ferjencik - "Travi Armate Presollecitate" - Costruzione Metallique - n° 5, 1970.
- 5- P. Hoadley - "An Analytical Study of the Behavior of Prestressed Steel Beams" - tese de doutoramento - University of Illinois - 1961.
- 6- P. Hoadley - "Behavior of Prestressed Composite Steel Beams", Journal of the Structural Division - June, 1963.
- 7- M. Tochacek e C. Mehta - "Economical Design of Prestressed Plate Girders" - Journal of the Structural Division - June, 1972.
- 8- J. Sims - "A Study of Prestressed Metal Structures for Buildings", tese de doutoramento - University of Illinois, 1951.
- 9- R. Szilard - "Strengthening Steel Structures by Means of Prestressing" - The Engineer Journal, October, 1955.
- 10- Eckberg, Hoadley e outros - "Development and Use of Prestressed Steel Flexural Members" - Journal of the Structural Division - September, 1968.
- 11- K. Mukhanov - "Design of Metal Structures" - Mir Publishers Moscow, 1968.
- 12- L. Mascia - "Structure in Acciaio Presollecitate" - Costruzione Metallique - n° 6, 1973.
- 13- F. Miranda e M. Mele - "Travate da Ponte Presollecitate in Acciaio e Cemento Armato Collaborante". Costruzioni Metallique - n° 5, 1972.
- 14- M. Tochacek - "Progetto di Strutture Metalliche Presollecitate" Costruzioni Metallique - n° 1, 1966.
- 15- G. Magnel - "Construcion em Acier' Precomprimé", L'Ossature Metallique - vol. 15 - June, 1950.
- 16- F. Samuely - "Structural Prestressing", The Structural Engineer vol. 36 - February, 1955.
- 17- R. Szilard - "Design of Prestressed Composite Steel Structures" Journal of the Structural Division - November, 1959.

- 18- Z. Levinton - "Terminal's Prestressed Steel Roof" - Engineer News-Record - March, 1959.
- 19- C. Zollman - "Prestressing is Applied to Structural Steel" Civil Engineer - September, 1950.
- 20- C. Eckberg e D. Reneker - "Flexural Fatigue tests of Prestressed Steel I-beams" - Journal of the Structural Division - April, 1964.
- 21- F. Gifford - "Creep Tests on Prestressing Steel", Magazine of Concrete Research - December, 1953.
- 22- P. Barnard - "Prestressing Steel Stringers", Engineering News-Record - October, 1961.
- 23- T. Higgins - "More Strength, Less Weight in Prestressing Steel", Achitectoral Record - January, 1962.
- 24- M. Cetra - "Bus Terminal Extended", Civil Engineering - October, 1961.
- 25- S. Jenkins - "Prestressed Steel Lattice Girders", The Structural Engineer - February, 1951.
- 26- E. Finn - "The Use of Prestressed Steel in Elevated Roadways" - The Structural Engineer - January, 1964.
- 27- Timoshenko e Gere - "Theory of Elastic Estability" - Mac Graw-Hill, 1961 - pp 429-439.
- 28- D. Luenberger - "Introduction to Linear Programing" - Addison-Wesley Publishing Co. - California, 1973.
- 29- H. Schulte e T. Yagui - Elementos de Estrutura Metalica - São Carlos, 1961.
- 30- V.S.L. - "Sistemas de Protensão" - Catálogos de Losinger e Co.
- 31- J. Kowalik e M. Osborne - "Modern Analytic and Computation Methods in Science and Mathematics" - American Elsevier Publishing, Inc. 1969 - New York.
- 32- M. Malaguti e outros - "Ensaíos de Arames e Cordoalhas de Aço para Concreto Protendido" - Simpósio sobre Concreto Protendido do IBRACON - São Paulo, 1975.
- 33- R. Fiuza - "Propriedades Mecânicas dos Aços para Armaduras de Concreto Protendido" - Simpósio sobre Concreto Protendido do IBRACON - São Paulo, 1975.
- 34- C.S.N. - Catálogos de Produtos da Companhia Siderúrgica Nacional.



Apêndice

Os gráficos foram elaborados com o objetivo de fornecer in formações sobre o valor de cada elemento da viga protendida de aço com cabo de protensão menor que o seu, em função dos parâmetros que deverão ser adotados pelo projetista. Eles foram feitos para dois tipos de carregamento: carga uniformemente distribuída e carga concentrada no meio do vão. As dimensões das vigas praticamente independem do vão, como foi observado traçando-se gráficos nos quais o momento fletor máximo ficou constante e o vão variou.

Os gráficos 16, 17 e 18 foram elaborados para uma esbeltez constante, $\lambda = 140$, que é a máxima permitida sem perigo de flambagem longitudinal da alma, e permitem o dimensionamento da viga protendida sem o uso de computadores.

Para todos os gráficos, a função objetiva escolhida, foi aquela que fornece o menor peso da viga.

Gráfico - 1

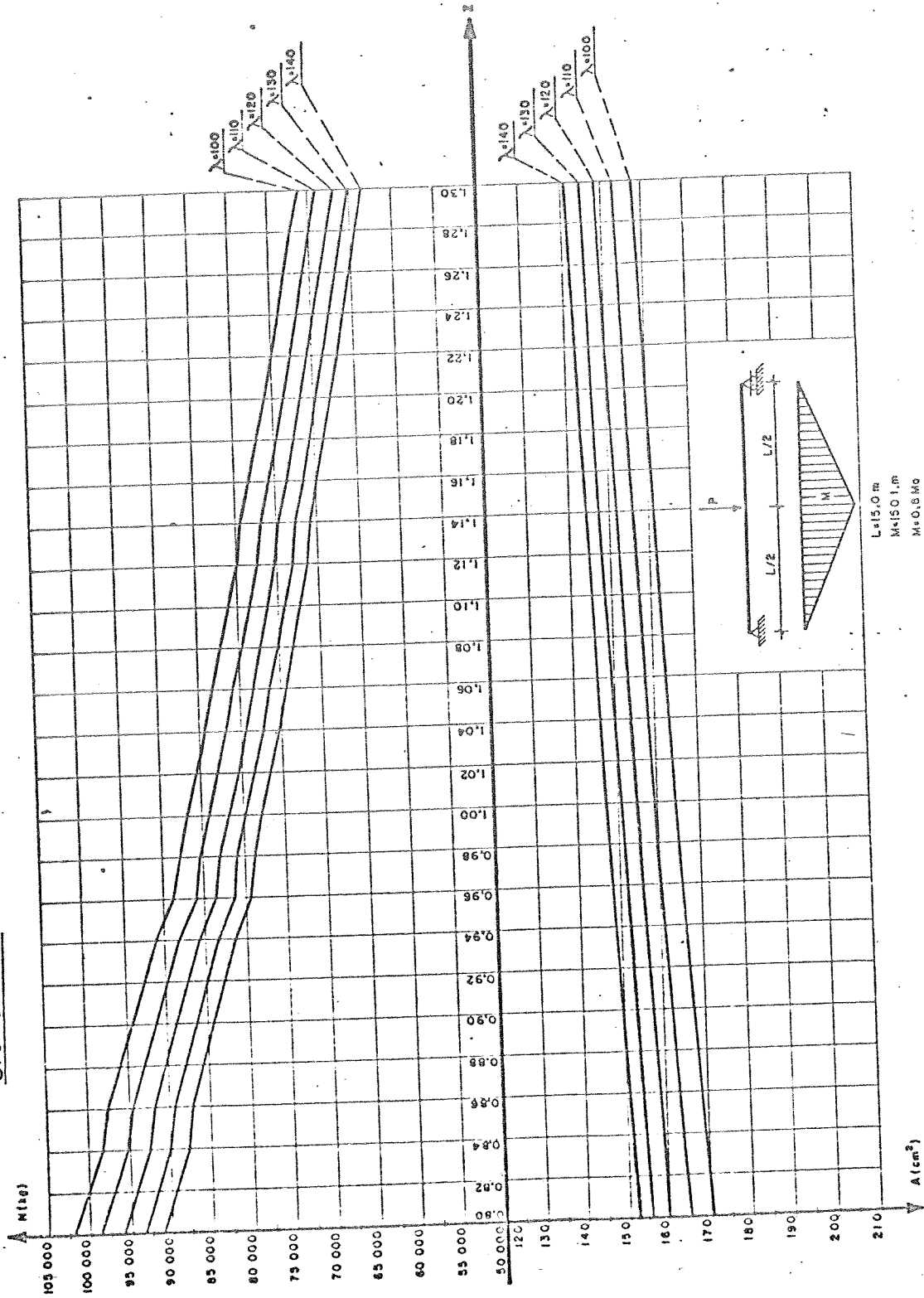


Gráfico - 2

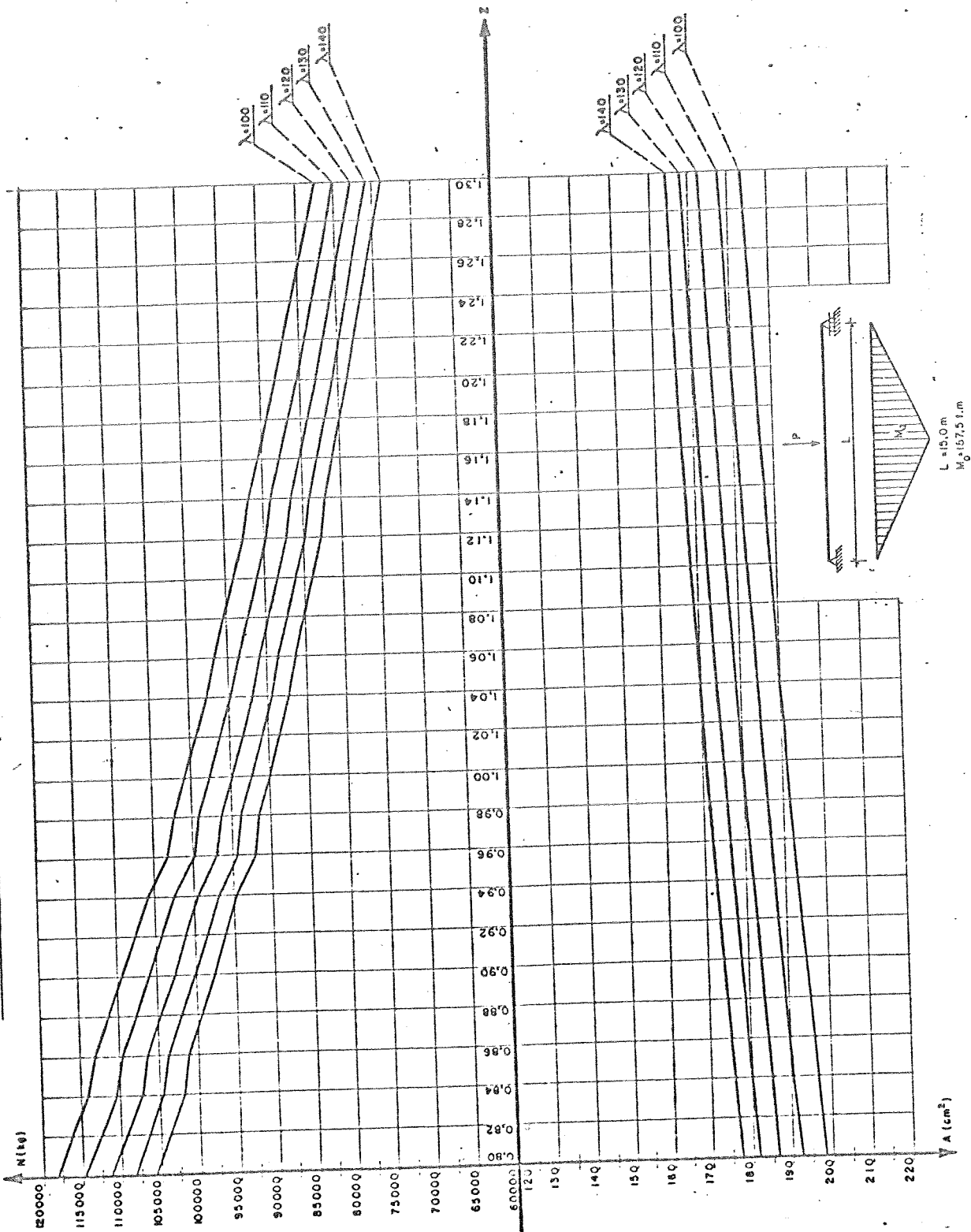
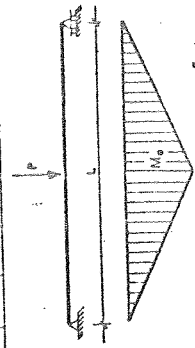
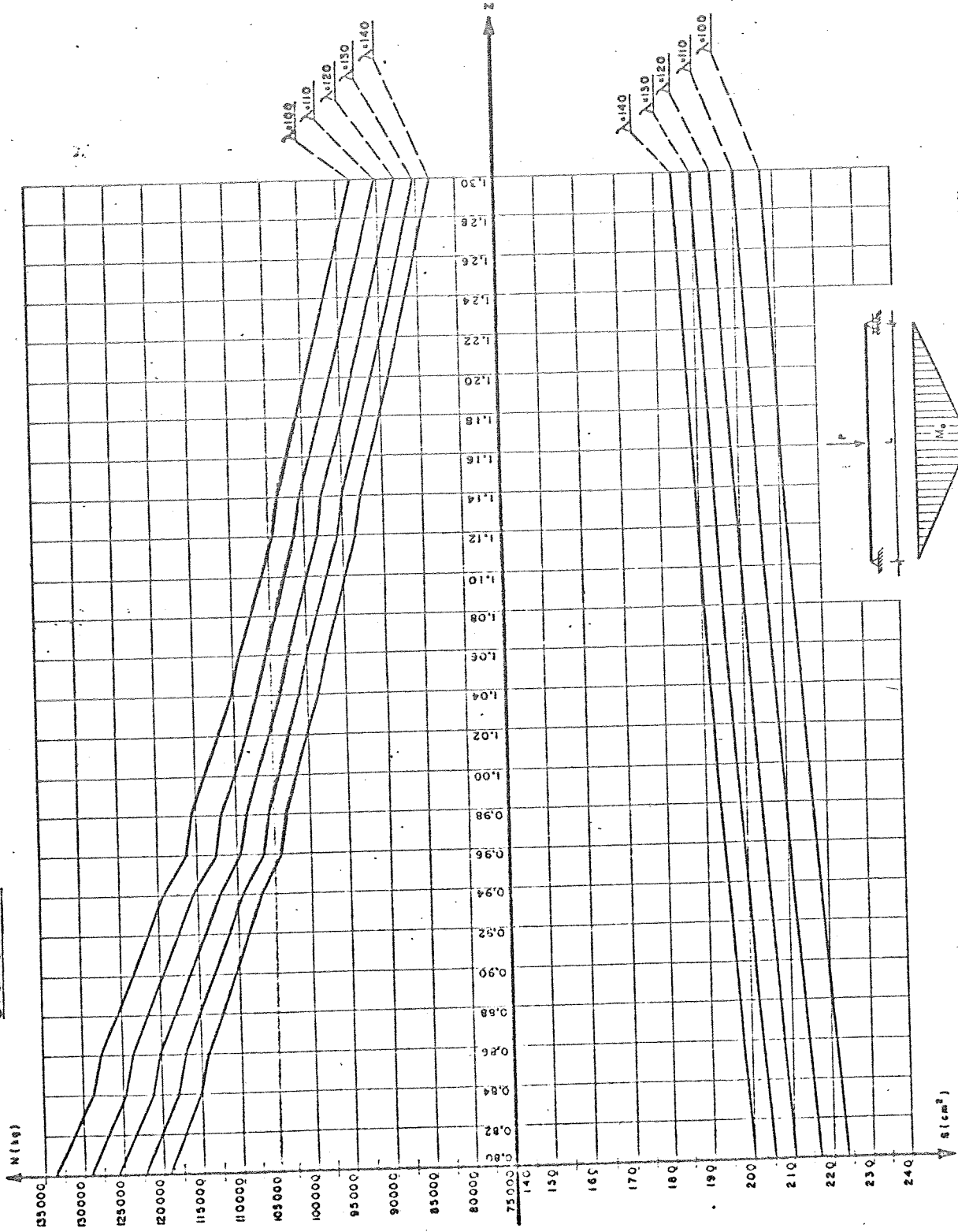


Gráfico - 3



$L = 15 \text{ m}$
 $M_0 = 225 \text{ t.m}$
 $M = 1.2 M_0$

Gráfico - 4

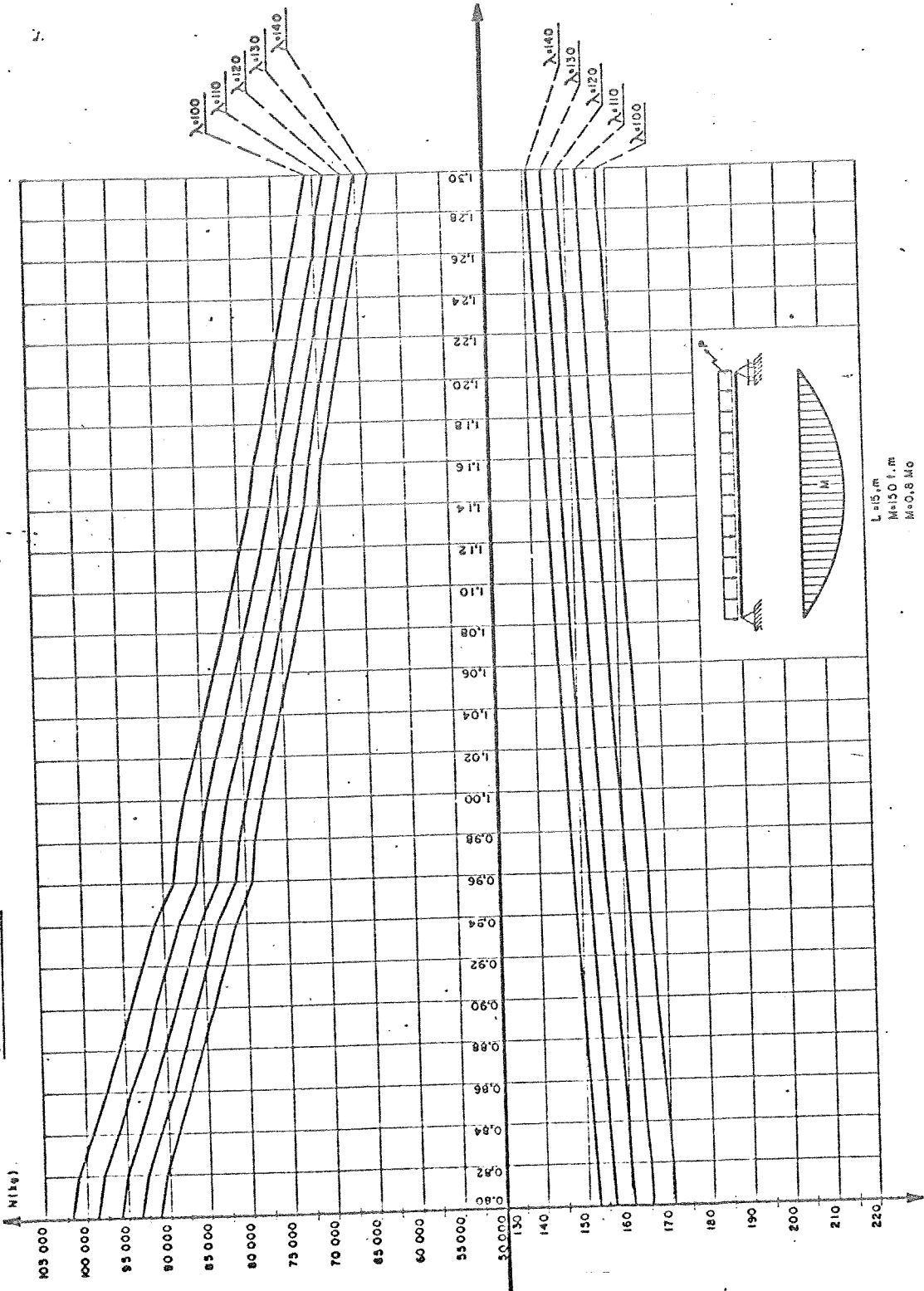


Gráfico - 5

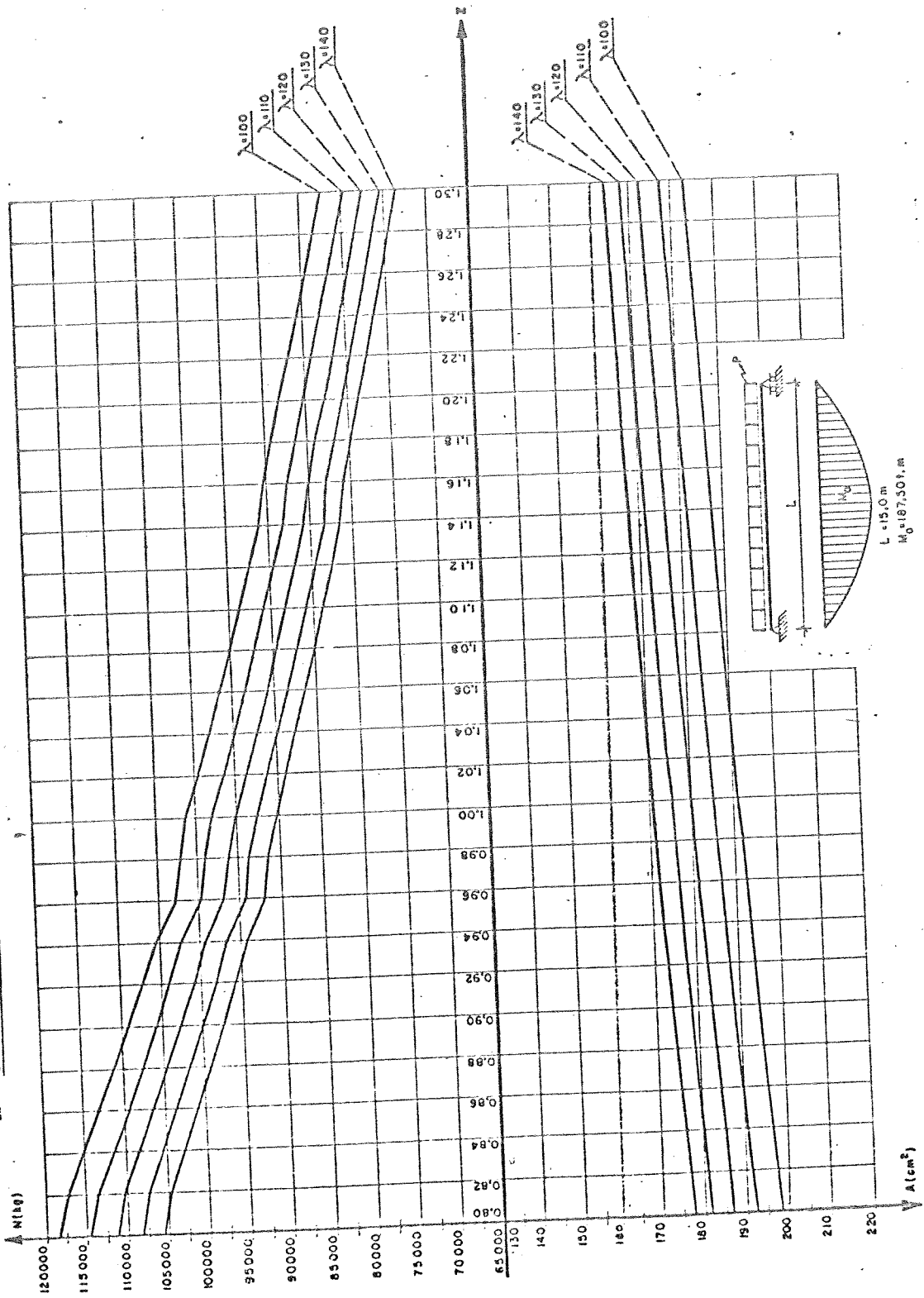


Grafico - 6.

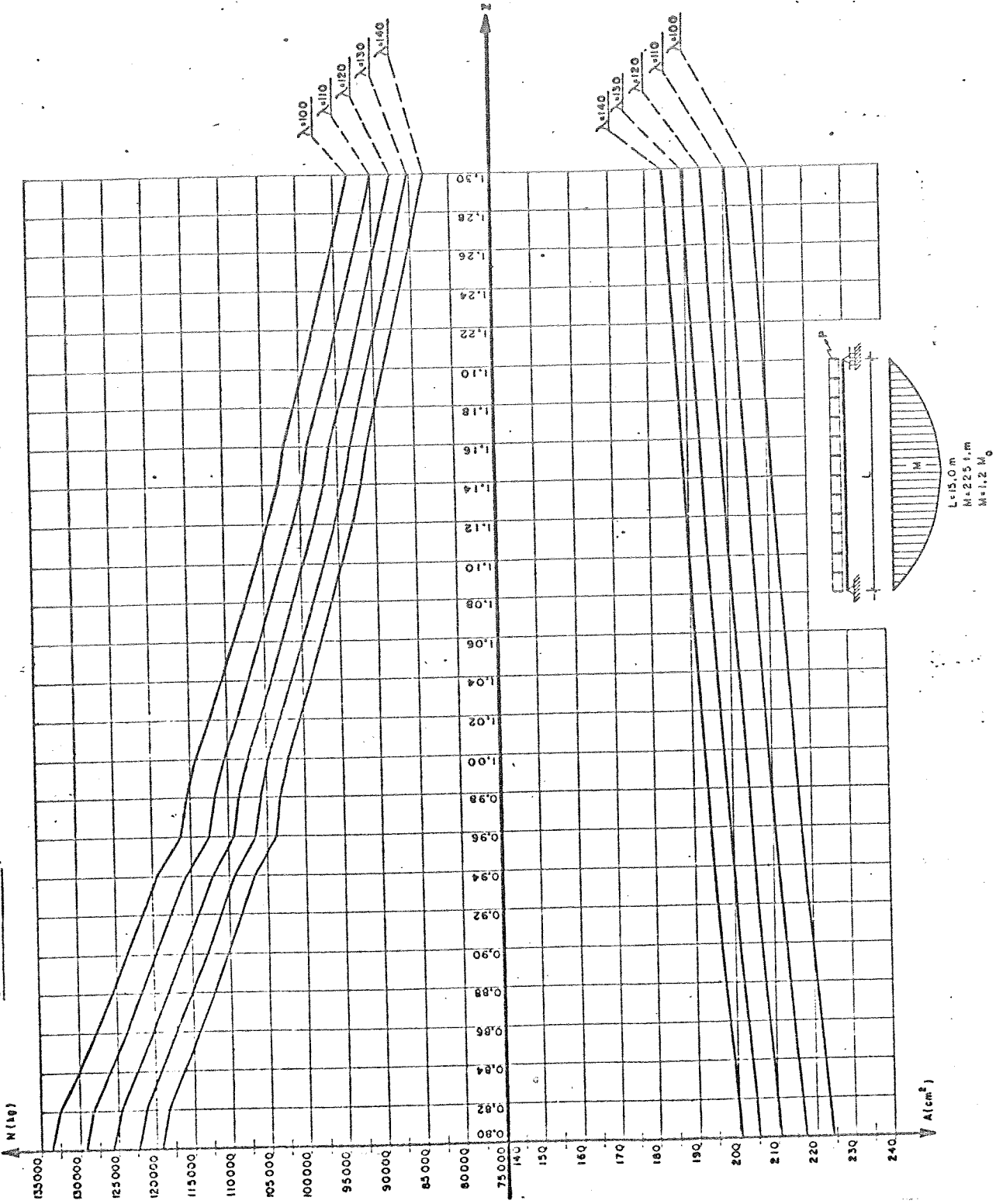


Gráfico - 7

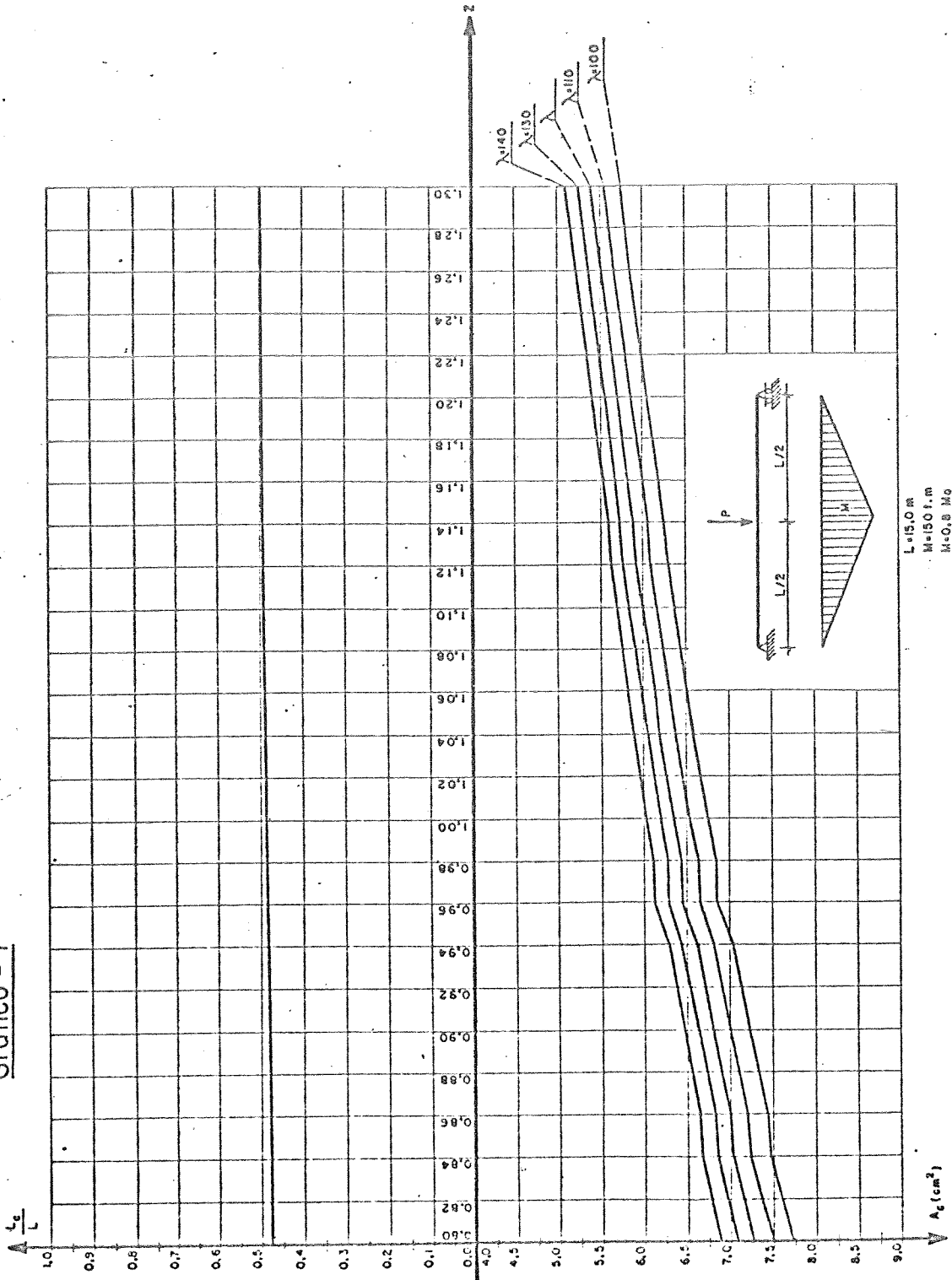


Gráfico - 8

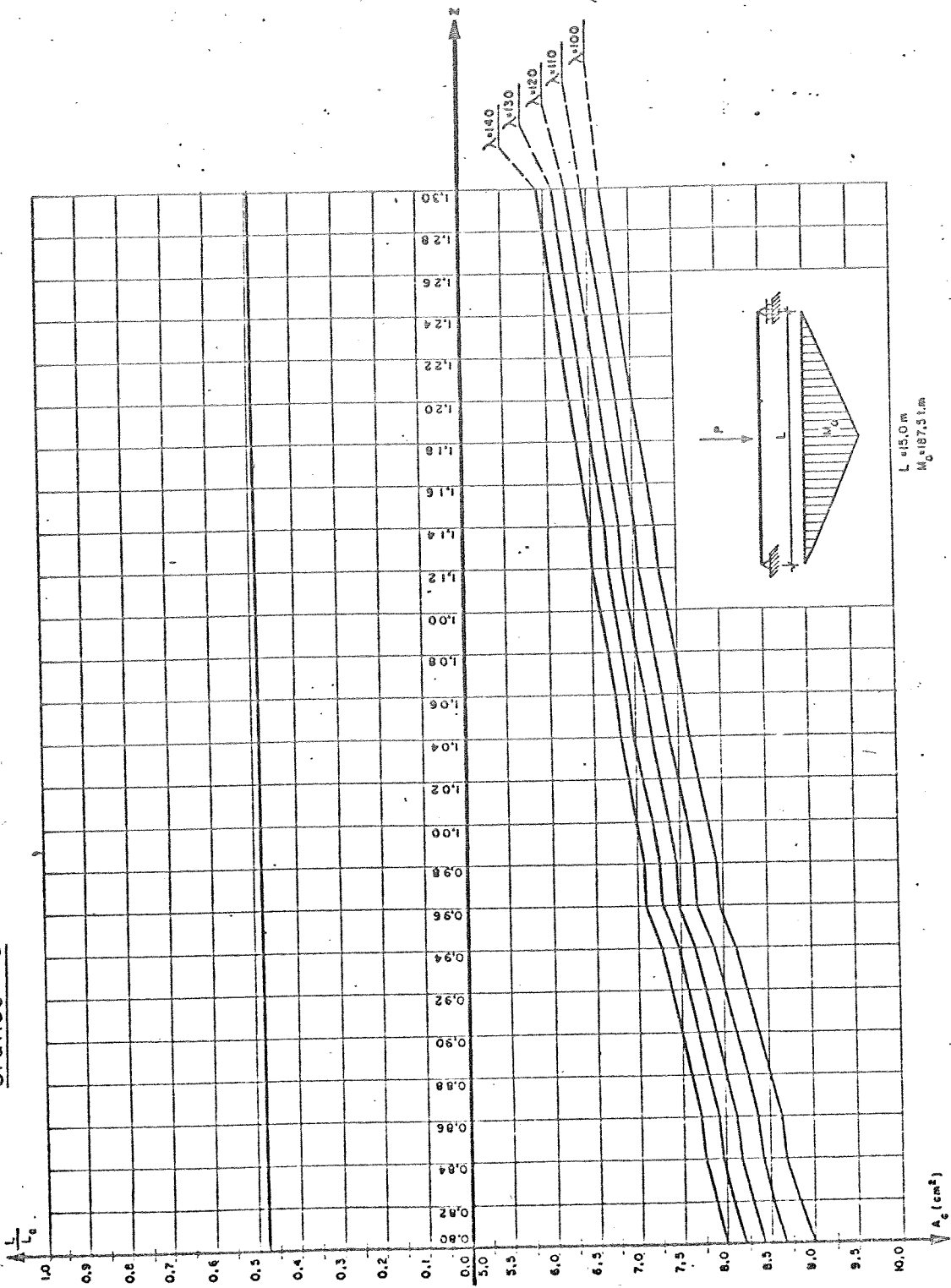
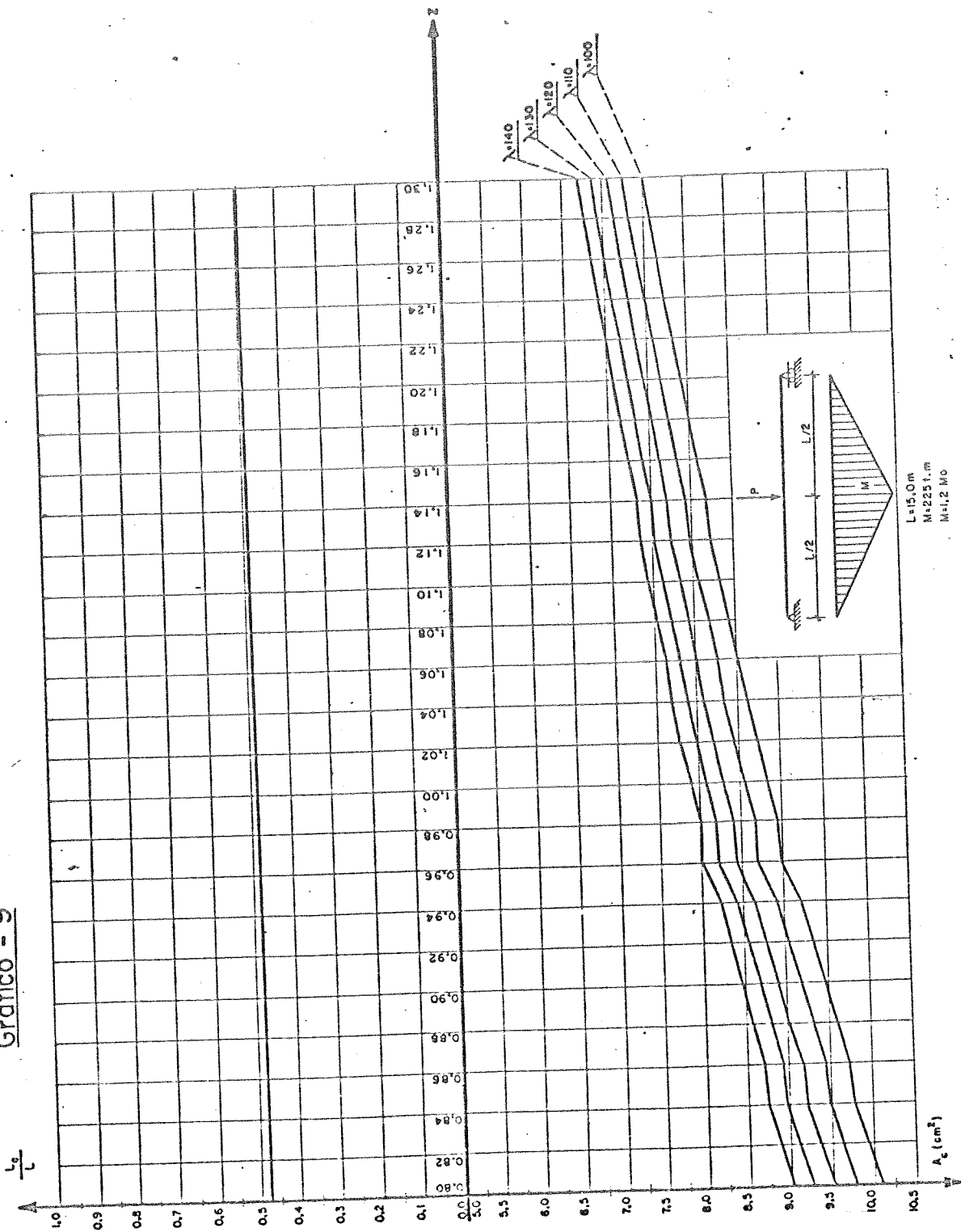


Gráfico - 9



$L=15,0\text{m}$
 $M=225\text{t.m}$
 $M=1,2\text{Mo}$

Gráfico - 10

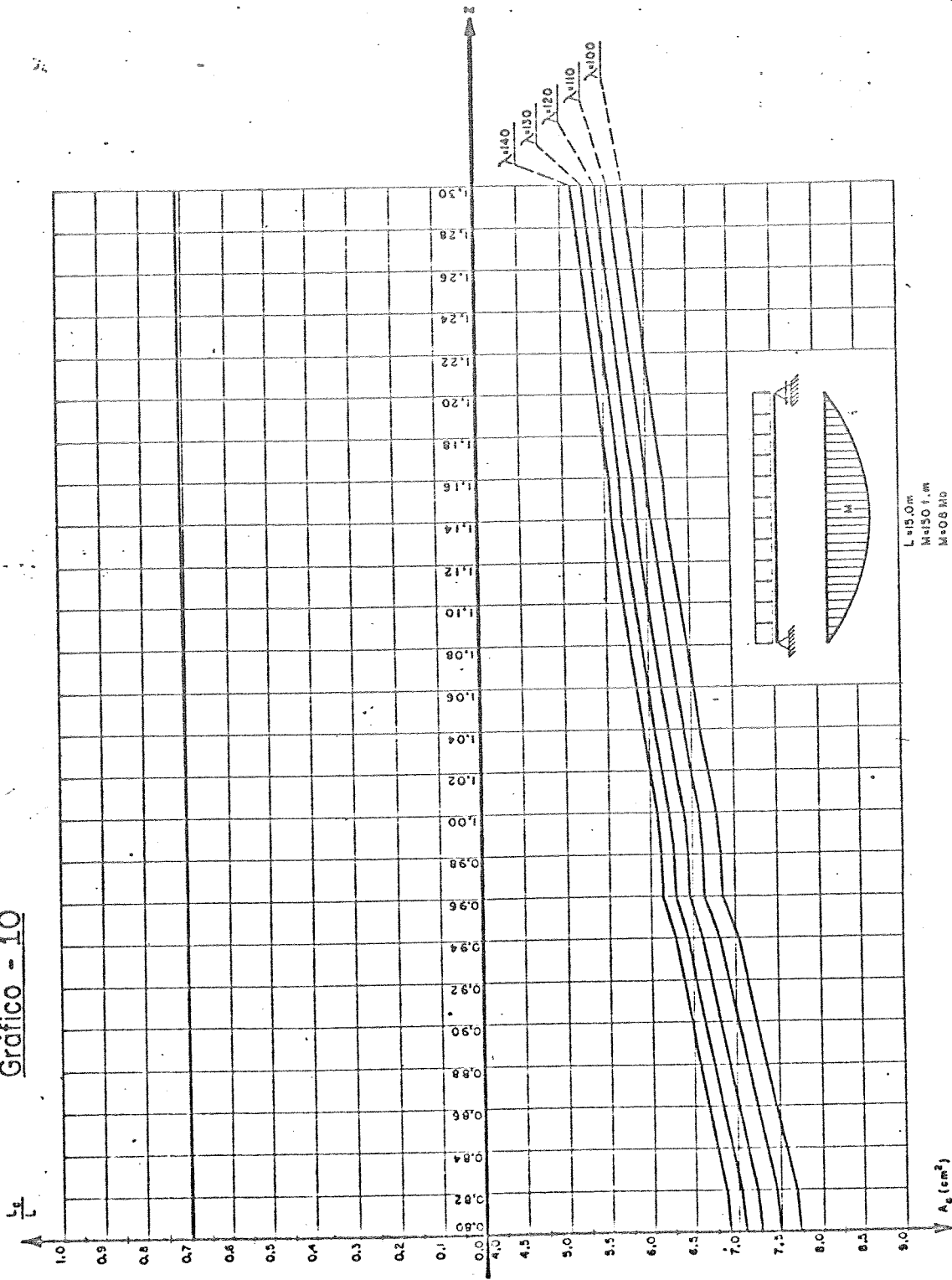


Gráfico - 11

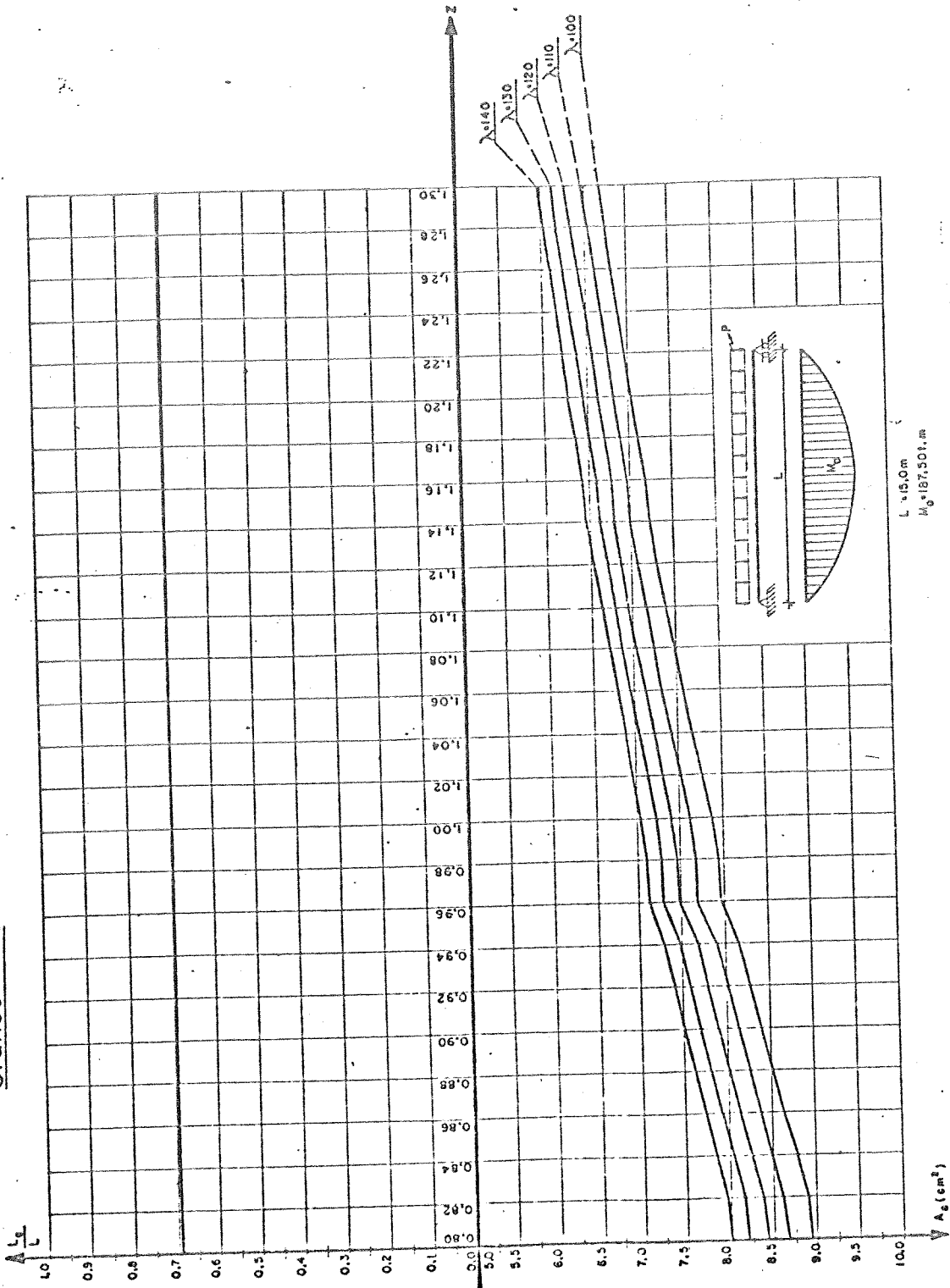


Gráfico - 13

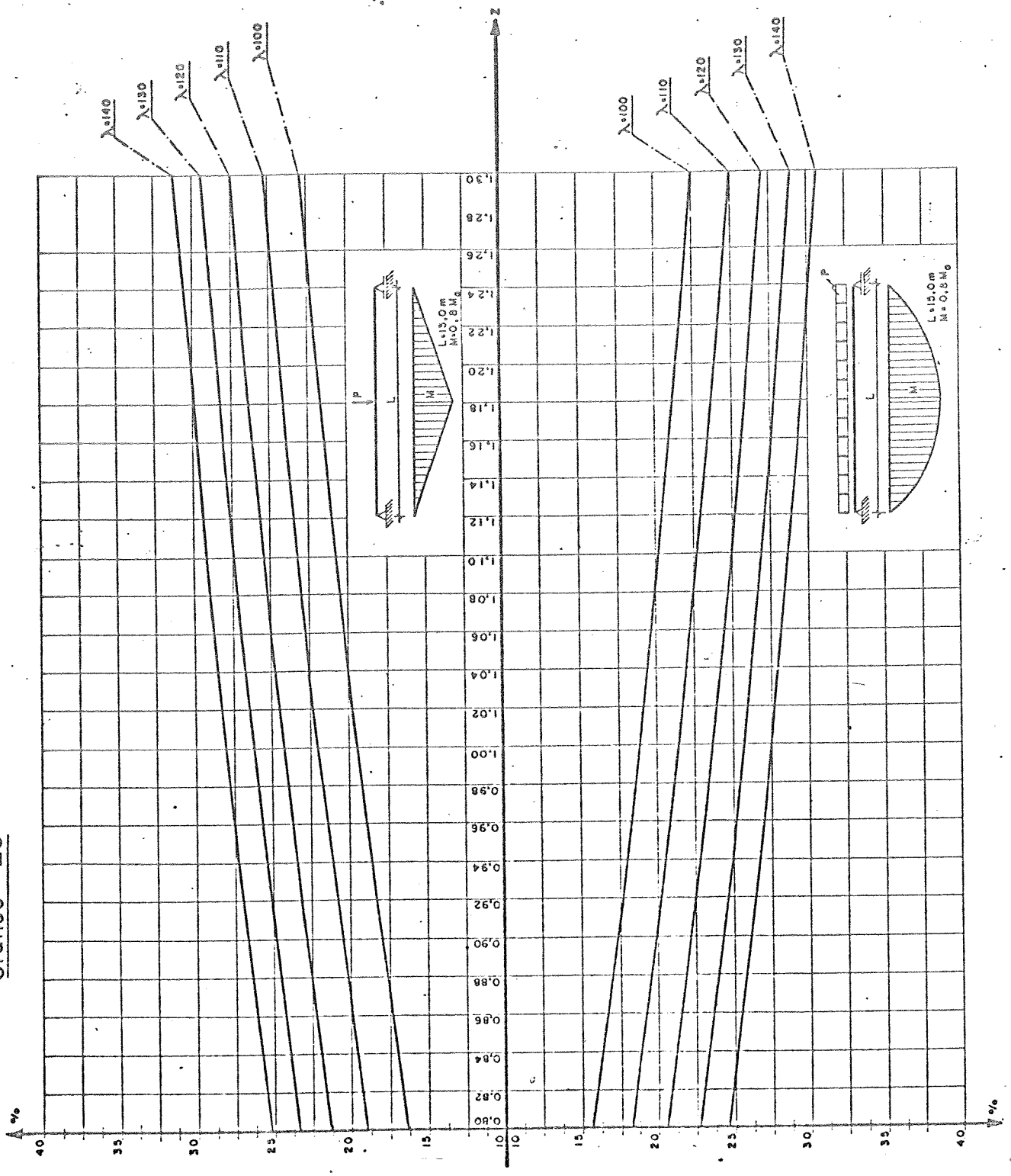


Gráfico - 14

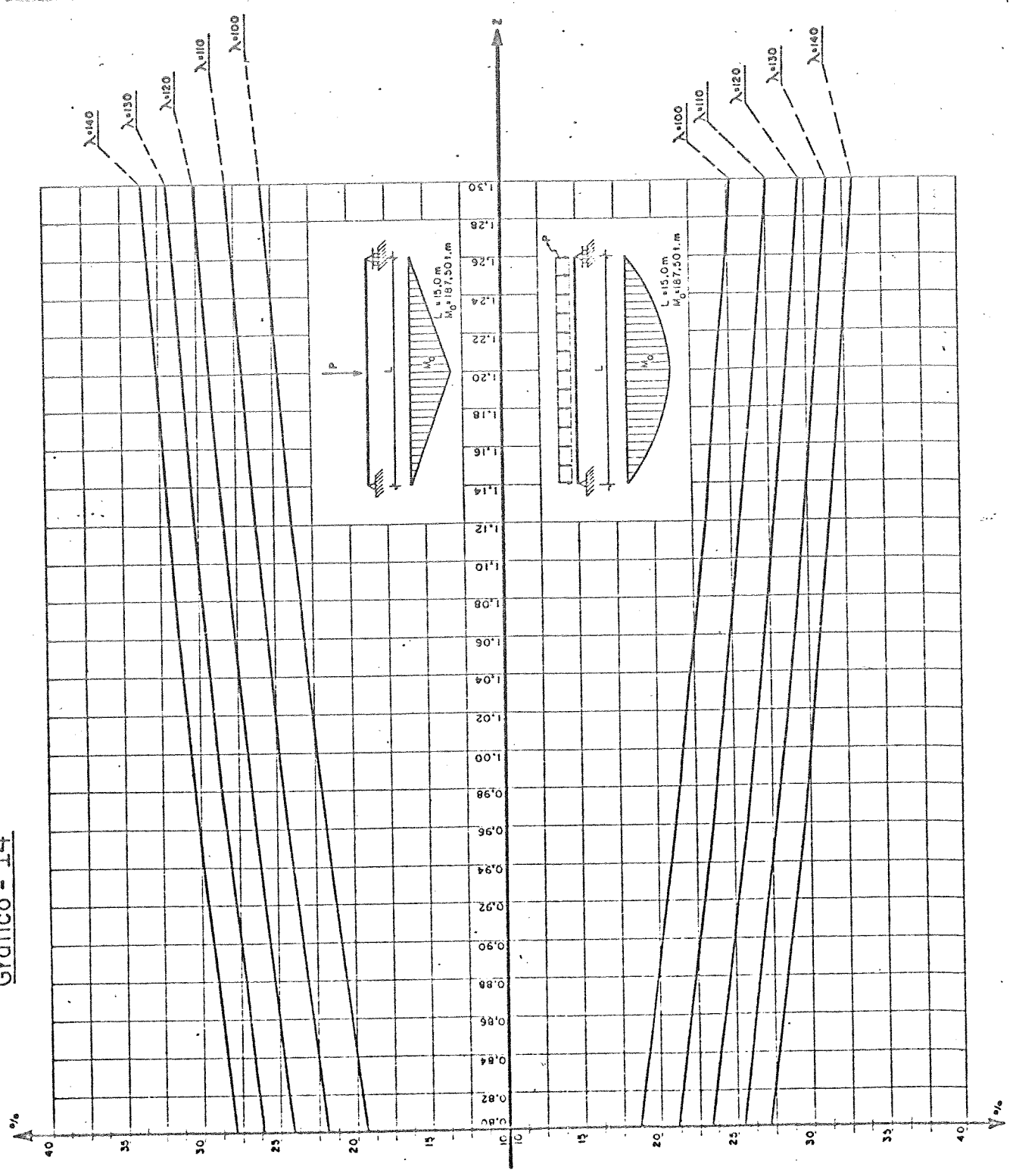


Gráfico - 15

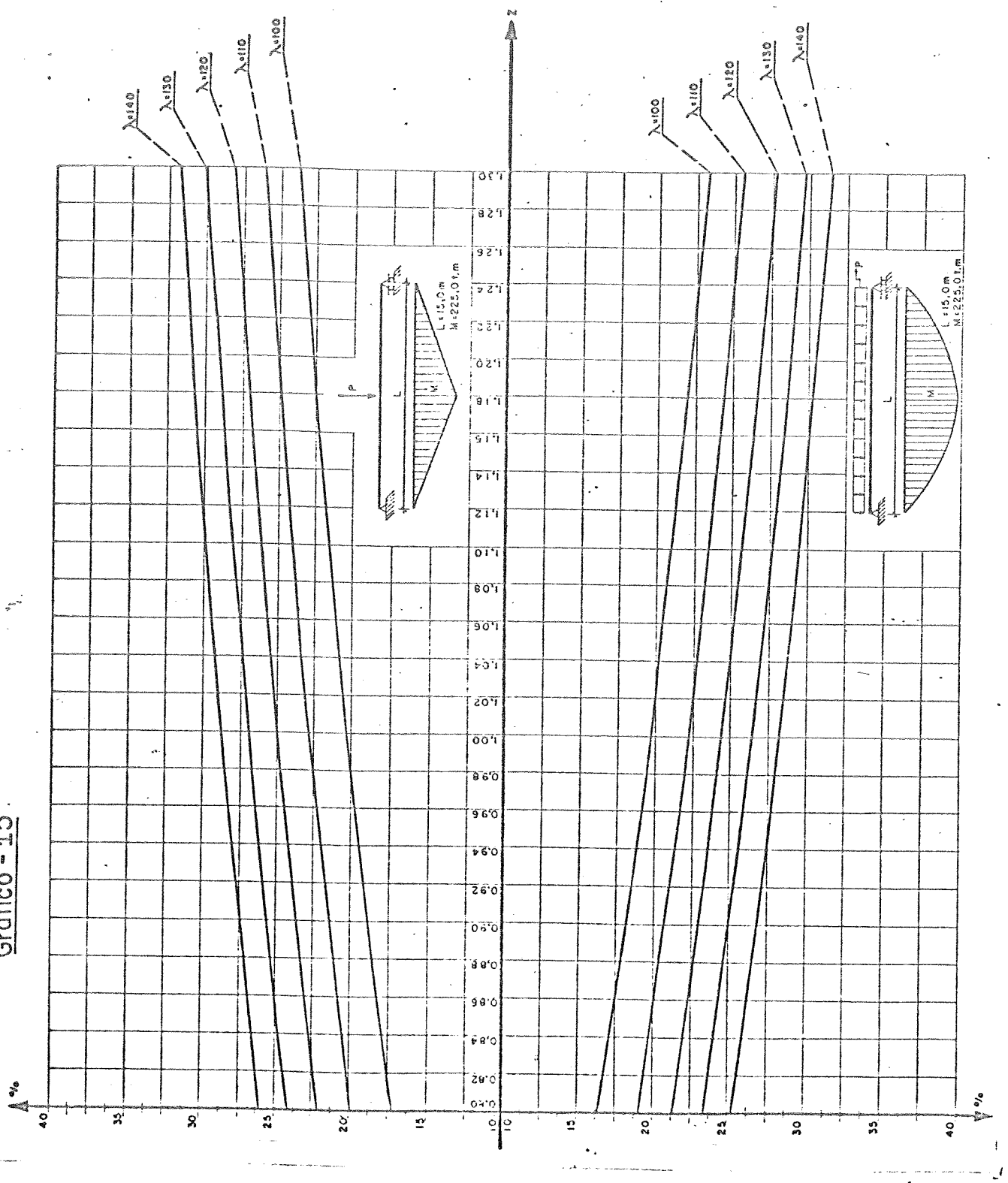


Gráfico - 16

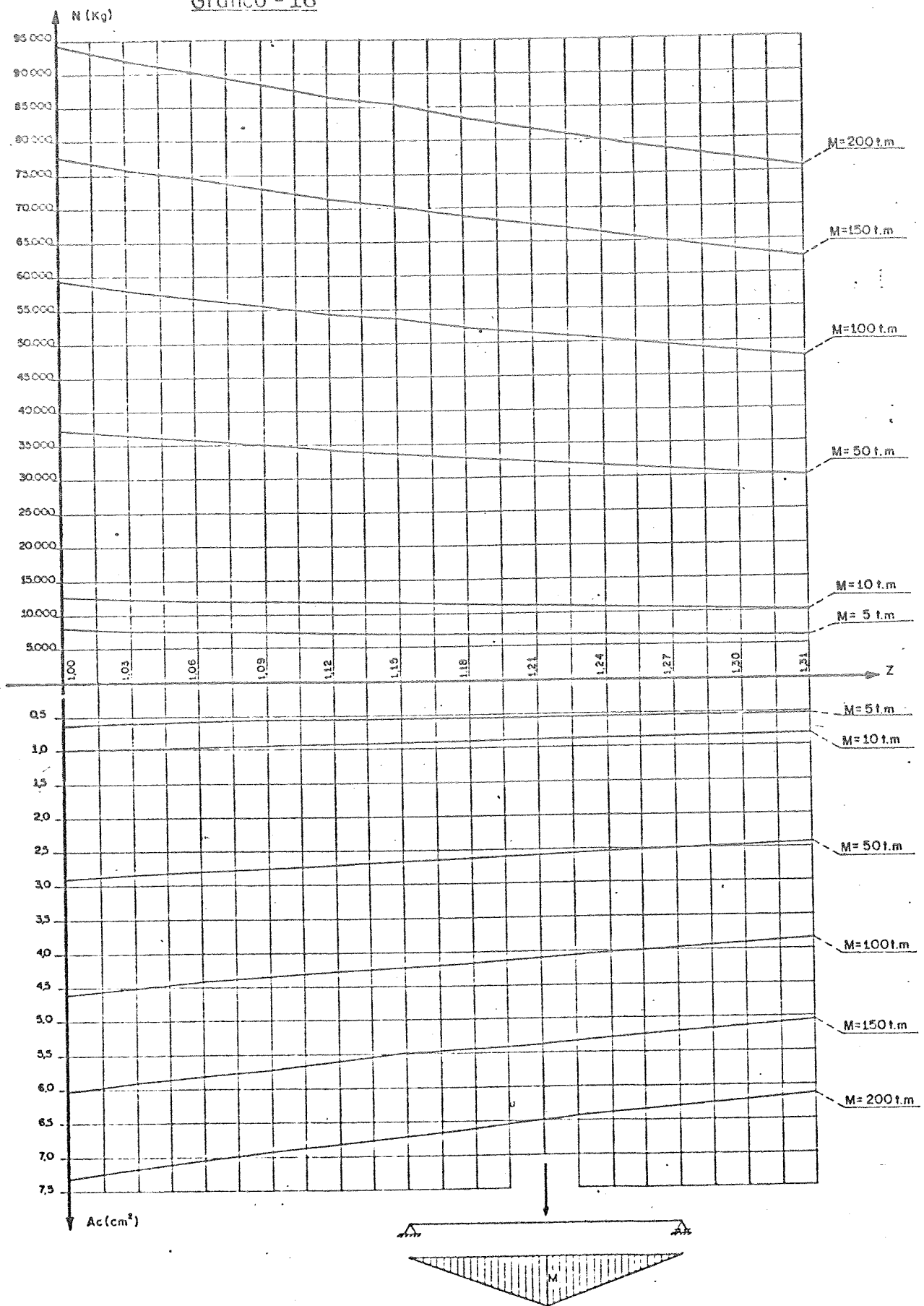


Gráfico - 17

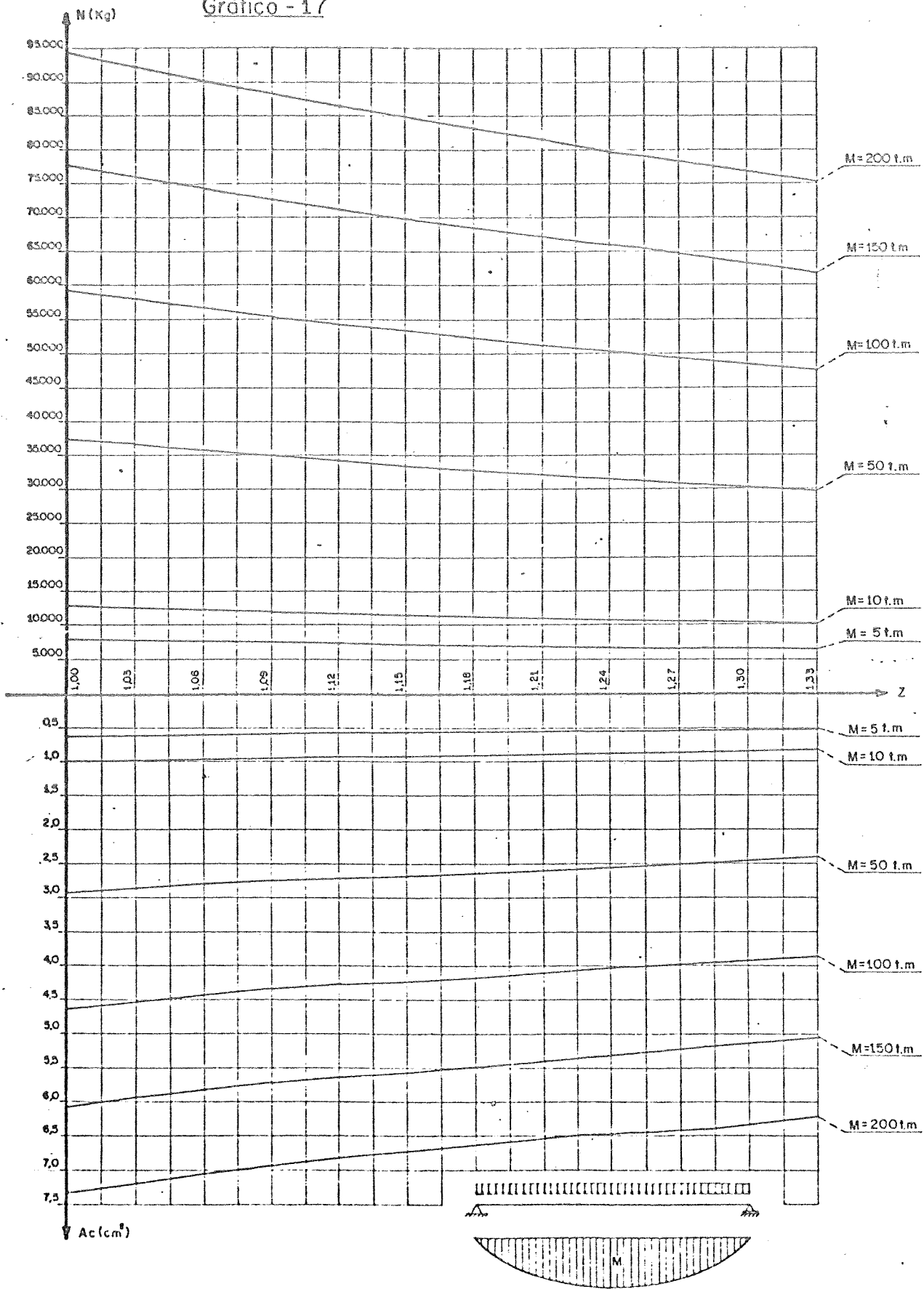
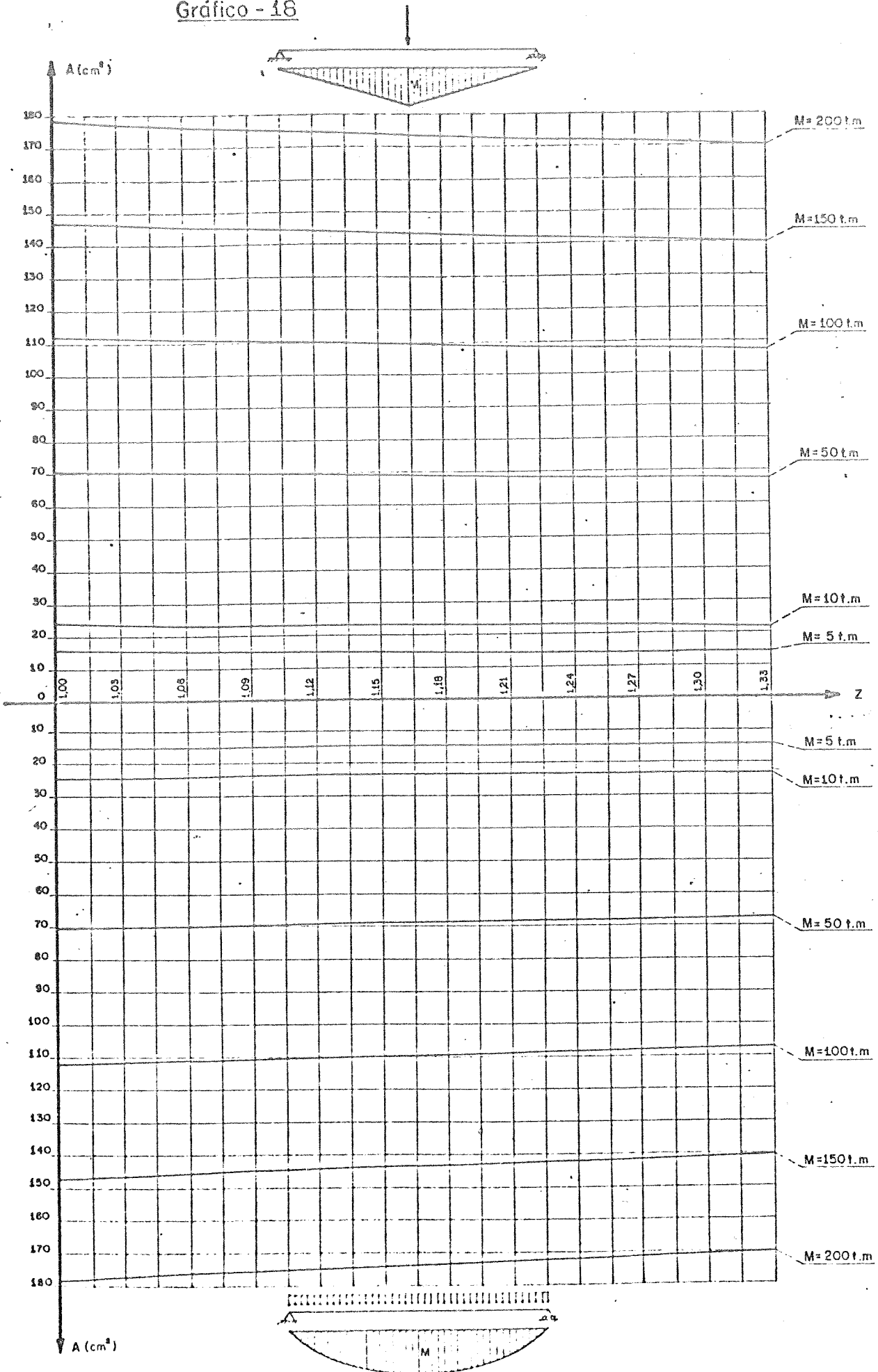


Gráfico - 18



SUBROTINA LIN = RESOLVE A EQUACAO GOVERNANTE

```
SUBROUTINE LIN (A2,RO1,RO2,ROC,Z,NS,NI,E,R,B)
REAL NI,NS,A(3),K(2),C(2),AC(2),M2,L(2),T(2),AX(2),AN(2)
A(1)=1.0
A(2)=3.0
1 DO 2 J=1,2
K(J)=2*(1-A2*(A(J)+1))/(A(J)+1)
C(J)=SQRT(K(J))*(6*(1+(RO1*A(J)-1)*(Z*A(J)+1)/(A(J)+1))-K(J)*(A(J)
**1)*(RO1+1))/6/(A(J)+1)
MAVG=CONSTANTE - DEVE SER TROCADO EM FUNCAO DO CARREGAMENTO
```

CCC M2=

```
M2=2./3.
AC(J)=RO2*(6*A(J)-K(J)*(A(J)+1)**2)/(6*A(J)*(Z*A(J)+1)-K(J)*(A(J)+
*1)**2)/ROC
AX(J)=R*M2*C(J)*(A(J)+1)/SQRT(K(J))/(Z*A(J)+(6*A(J)-K(J)*(A(J)+1)*
**2)/6/Z/A(J)*(1+E/ROC/AC(J)))
A(3)=(ROC*R*AC(J)-AX(J))/NS
L(J)=(NI*AN(J)+AX(J))*(6*A(J)*(Z+1)-K(J)*(A(J)+1)**2)
2 T(J)=R/SQRT(K(J))*(6*C(J)*A(J)*(A(J)+1)-SQRT(K(J))*(6*A(J)-K(J)*[A
*(J)+1]**2))
A(3)=A(1)-(A(2)-A(1))/((L(2)-T(2))/(L(1)-T(1))-1)
IF (ABS(A(3)-A(2))>0.0001) 4,4,3
3 A(1)=A(2)
A(2)=A(3)
GO TO 1
4 B=A(3)
RETURN
END
```

A SUBROTINA ISA = CALCULA O MINIMO DA FUNCAO OBJETIVA "O"

```
SUBROUTINE ISA (A2,A,L,RO1,Z,NI,NS,RO2,ROC,O)
REAL K,L
K=2*(1-A2*(A+1))/(A+1)
C=SQRT(K)*(6*(1+(RO1*A-1)*(Z*A+1)/(A+1))-K*(A+1)*(RO1+1))/6/(A+1)
A3=(C)**(-2./3)
AC=RO2*(6*A-K*(A+1)**2)/(6*A*(Z*A+1)-K*(A+1)**2)/ROC
```

FUNCAO OBJETIVA "O" = NO CASO , MINIMO PESO

```
O=A)*(1+1/AC)
RETURN
END
```


PROGRAMA PRINCIPAL - USA-SE SOMENTE UM CARTAO DE DADOS

REAL M,K,LAM,NS,NI,L,N
 READ(2,1) RO1,RO2,ROC,Z,E,NS,NI,LAM,L,R,M
 1 FORMAT(8F5.0,3F10.0)

VALORES QUE PODEM VARIAR 1A21

D1=0.045

D2=0.15

X1=D1

X2=D2

2 CALL LIN(X1,RO1,RO2,ROC,Z,NS,NI,E,R,B1)

CALL ISA(X1,B1,L,RO1,Z,NI,NS,RO2,ROC,O1)

CALL LIN(X2,RO1,RO2,ROC,Z,NS,NI,E,R,B2)

CALL ISA(X2,B2,L,RO1,Z,NI,NS,RO2,ROC,O2)

IF(ABS(O1-O2)-0.0001)6,6,3

3 IF(O1-O2)4,6,5

4 D2=X2

X1=D1+0.381966*(D2-D1)

X2=D2-0.381966*(D2-D1)

GO TO 2

5 D1=X1

X1=D1+0.381966*(D2-D1)

X2=D2-0.381966*(D2-D1)

GO TO 2

6 A=(B1+B2)*0.5

A2=(X1+X2)*0.5

K=2*(1-A2*(A+1))/(A+1)

C=SQRT(K)*(6*(1+(RO1*A-1)*(Z*A+1)/(A+1))-K*(RO1+1)*(A+1))/6/(A+1)

A1=A/(A+1)-K/2

A3=1/C**(2./3)

AW=K

AC=RO2*(6*A-K*(A+1)**2)/(6*A*(Z*A+1)-K*(A+1)**2)/ROC

AX=R*N2*C*(A+1)/SQRT(K)/(Z*A+(6*A-K*(A+1)**2)/6/Z/A*(1+E/ROC/AC))

AN=(ROC*R*AC-AX)/NS

Y=1/LAM*(N/R)**2

S=A3*(Y)**0.3333

S1=A1*S

S2=A2*S

SW=AW*S

SC=AC*S

N=AN*S

X=AX*S

E1=SQRT(LAM*K*S)/(A+1)

E2=E1*A

H=E1+E2

MI=LAM*K*S**2*(6*A-K*(A+1)**2)/6/(A+1)**2

W1=MI/E1

W2=MI/E2

```

C1=0
C2=C1
LV=L
DELTA=H/LAM
MS=S1*E1+DELTA*E1**2/2
G=S*0.786
PECAB=S*0.789/100
PEVIG=G*L/100
SIGF1=(MI*N+X)/S-(MI*N+X)*Z*E2/W1+M/W1
SIGF2=-(MI*N+X)/S-(MI*N+X)*Z*E2/W2+M/W2
SIGF3=(MS*N+X)/S+(MS*N+X)*Z*E2/W2
SIGF4=(MS*N+X)/AC/S
WRITE(3,7)
FORMAT(9X,105(1*1),/,9X,1*1,5X,1A1,5X,1*1,5X,1A2,5X,1*1,5X,1A3,
5X,1*1,5X,1A4,5X,1*1,5X,1A5,6X,1*1,5X,1H1,6X,1*1,5X,1E1,5X,1*1,5
X,1E2,5X,1*1,/,9X,105(1*1),/,9X,1*1,8(12X,1*1),/)
WRITE(3,8)S1,S2,S*,SC,S,H,E1,E2
FORMAT(9X,1*1,8(2X,F7.2,3X,1*1),/)
WRITE(3,9)
FORMAT(9X,1*1,8(12X,1*1),/,9X,105(1*1),/,9X,1*1,5X,1MS1,5X,1*1,5X,
1MI1,5X,1*1,5X,1W1,5X,1*1,5X,1W2,5X,1*1,4X,1LAM1,5X,1*1,5X,1LC1,
5X,1*1,5X,1C1,5X,1*1,5X,1C2,5X,1*1,/,9X,105(1*1),/,9X,1*1,8(12X,1
*1),/)
WRITE(3,10)MS,MI,W1,W2,LAM,LV,C1,C2
FORMAT(9X,1*1,8(1X,F9.2,2X,1*1),/)
WRITE(3,11)
FORMAT(9X,1*1,8(12X,1*1),/,9X,105(1*1),/,9X,1*1,4X,1SIGF1,3X,1*1,
4X,1SIGF2,3X,1*1,4X,1SIGF3,3X,1*1,4X,1SIGF4,3X,1*1,4X,1SIGF5,3
X,1*1,4X,1SIACO,3X,1*1,4X,1SICAB,3X,1*1,4X,1DELTA,3X,1*1,/,9X,105(
1*1),/,9X,1*1,8(12X,1*1),/)
SIGF5=0
WRITE(3,12)SIGF1,SIGF2,SIGF3,SIGF4,SIGF5,DELTA
FORMAT(9X,1*1,5(3X,F7.2,2X,1*1),3X,12160.00,2X,1*1,2X,116000.00,
2X,1*1,1X,F7.2,4X,1*1,/)
WRITE(3,13)
FORMAT(9X,1*1,8(12X,1*1),/,9X,105(1*1),/,9X,1*1,4X,1P=CAB,3X,1*1,
4X,1P=VIG,3X,1*1,5X,1G,6X,1*1,5X,1L,6X,1*1,4X,1HMAX,4X,1*1,5X,
1Z,6X,1*1,5X,1M,6X,1*1,5X,1X,6X,1*1,/,9X,105(1*1),/,9X,8(12X,1*
1),/)
WRITE(3,14)PECAB,PEVIG,G,L,M,Z,H,X
FORMAT(9X,1*1,4(3X,F7.2,2X,1*1),F12.2,1*1,1X,F7.2,4X,1*1,2(1X,F9.2
,2X,1*1),/)
WRITE(3,15)
FORMAT(9X,1*1,8(12X,1*1),/,9X,105(1*1),/,37X,1UNIDADES USADAS = C
1
M , KG -EXCESSAO : G=(KG/M)1,3(/)
CALL EXIT
END

```

```

SUBROUTINE LIN(A2,RO1,RO2,Z,NS,NI,E,A1)
REAL NI,NS,A(3),K(2),C(2),M1(2),D(2),B(2),W(2),L(2),R(2),M2(2)
A SUBROUTINE LIN RESOLVE A EQUACAO GOVERNANTE PARA DETERMINADO VALOR DE A2
VALORES QUE PODEM VARIAR A = ASSIMETRIA DA SECAO
A(1)=1.0
A(2)=3.0
DO 2 J=1,2
K(J)=2*(1-A2*(A(J)+1))/(A(J)+1)
C(J)=SQRT(K(J))*(6*(1+(RO1*A(J)-1)*(Z*A(J)+1)/(A(J)+1))-K(J)*(A(J)
+1)*(RO1+1))/6/(A(J)+1)
M1(J)=SQRT(K(J))/C(J)*(6*A(J)-K(J)*(A(J)+1)**2)/6/(A(J)+1)
M2=FUNCAO DE M1 = EXPRESSAO QUE VARIA EM FUNCAO DO TIPO DE CARREGAMENTO
M2(J)=1.493*M1(J)+0.407/M1(J)-0.886
D(J)=RO2*(6*A(J)-K(J)*(A(J)+1)**2)/(A(J)+1)/(6*A(J)*(Z*A(J)+1)/(A(
+1)-K(J)*(A(J)+1))
B(J)=D(J)*(1-NI/NS)+(RO1*A(J)-1)/(A(J)+1)
W(J)=RO2*(B(J)/D(J)-1)
L(J)=M2(J)/M1(J)
R(J)=W(J)*(1+(1-Z)*D(J)/Z/RO2+E/Z/(RO2+WHJQ))
A EQUACAO GOVERNANTE G(A,A2)=L(J)-R(J),CUJA SOLUCAO SAE DA FORMULA ITERA=
TIVA ESCRITA ABAIXO
A(3)=A(1)+(A(2)-A(1))/(L(2)-R(2))/(L(1)-R(1))+1)
IF (ABS(A(3)-A(2))=0.0001)4,4,3
A(1)=A(2)
A(2)=A(3)
GO TO 1
A1=A(3)
RETURN
END

```

A SUBROTINA ISA, CALCULA O MINIMO DA FUNCAO OBJETIVA f_0 , CONHECENDO OS VALORES DE A_2 E A_1 , QUE SATISFAZEM A EQUACAO GOVERNANTE

```

SUBROUTINE ISA(A2,A,L,RO1,Z,NI,NS,RO2,ROC,O)
REAL M1,K,L
D=RO2*(6*A-K*(A+1)**2)/(A+1)/(6*A*(Z*A+1)/(A+1)-K*(A+1))
K=2*(1-A2*(A+1))/(A+1)
C=SQRT(K)*(6*(1+(RO1*A-1)*(Z*A+1)/(A+1))-K*(A+1)*(RO1+1))/6/(A+1)
B=D*(1-NI/NS)+(RO1*A-1)/(A+1)
M1=SQRT(K)*(6*A-K*(A+1)**2)/C/(6*A*(A+1))
A3=(C)**(-2./3)
AC=B/ROC
CARTAO QUE DEVE SER TROCADO PARA CADA TIPO DE CARREGAMENTO USADO = EXPRES=
SAO QUE FORNECE O COMPRIMENTO DO CADO EM FUNCAO DE "L" E "M1"
LV=(1.-0.721*M1)*L
O=A3*(1+LV/L*AC)
RETURN
END

```

ROGRAMA PRINCIPAL
ROGRAMA PRIN
OMENTE UM CARTAO DE DADOS E NECESSARIO

EAL M,K,LAM,NS,NI,L,M1,N,LV,HI
EAD(2,1)RO1,RO2,ROC,Z,E,NS,NI,LAM,1,R,M
ORNAT(8F5,0,3F10,0)

ALORES QUE PODEM VARIAR A2

1=0,015

2=0,15

1=D1

2=D2

ALL LIN(X1,RO1,RO2,Z,NS,NI,E,A1)

ALL ISA(X1,A1,L,RO1,Z,NI,NS,RO2,ROC,01)

ALL LIN(X2,RO1,RO2,Z,NS,NI,E,A2)

ALL ISA(X2,A2,L,RO1,Z,NI,NS,RO2,ROC,02)

F(ABS(O1-O2)-0,001)6,6,3

F(O1-O2)4,6,5

2=X2

1=D1+0,381966*(D2-D1)

2=D2-0,381966*(D2-D1)

0 TO 2

1=X1

1=D1+0,381966*(D2-D1)

2=D2-0,381966*(D2-D1)

0 TO 2

=(A1+A2)*0,5

2=(X1+X2)*0,5

=2*(1-A2*(A+1))/(A+1)

=SQRT(K)*(6*(1+(RO1*A-1)*(Z*A+1)/(A+1))-K*(RO1+1)*(A+1))/6/(A+1)

=RO2*(6*A-K*(A+1)**2)/(A+1)/(6*A*(Z*A+1)/(A+1)-K*(A+1))

=D*(1-NI/NS)+(RO1*A-1)/(A+1)

=C*6*A*(A+1)/(6*A-K*(A+1)**2)/SQRT(K)

1=1/F

1=A/(A+1)-K/2

3=1/C**(2./3)

N=K

C=B/ROC

N=D*R/NS

K=R*((RO1*A-1)/(A+1)-D*NI/NS)

=1/LAM*(M/R)**2

=A3*(Y)**0,3333

1=A1*S

2=A2*S

N=AW*S

C=AC*S

=AN*S

=AX*S

EGUEM TRES CARTOES QUE DEVERAO SER TROCADOS EM FUNCAO DO TIPO DE CARR
ENTO DA VIGA ; PARAMETROS DE LOCALIZACAO DO CABO E SEU COMPRIMENTO

LV=(1.00.721*M1)*L

C1=0.305*M1*L

C2=0.421*M1*L

WRITE(3,7)

7 FORMAT(4X,'AREA DA ABA "1"',5X,'AREA DA ABA "2"',5X,'AREA DO CABO'
*5X,'AREA TOTAL DA SECAO TRANSVERSAL',//,8X,'(CM 2)',14X,'(CM 2)',13
*X,'(CM 2)',11X,'(CM 2)',19X,'(CM 2)')

WRITE(3,8) S1,S2,SW,SC,S

8 FORMAT(//,10X,F7.2,10X,F7.2,17X,F7.2,15X,F7.2,23X,F7.2)

WRITE(3,9)

9 FORMAT(4(//),'FORCA EFETIVA DE PROTENSAO',3X,'FORCA REDUNDANTE',3X,
*1COMPRIMENTO DO CABO',3X,'LOCALIZACAO DO CABO : A ESQUERDA , A DIR
*ETA',//,13X,'(KG)',21X,'(KG)',16X,'(CM)',19X,'(CM)')

WRITE(3,10) N,X,LV,C1,C2

10 FORMAT(//,14X,F10.2,22X,F10.2,17X,F7.2,41X,F7.2,9X,F7.2)

CALCULO DAS PROPRIEDADES DA SECAO TRANSVERSAL

E1=SQRT(LAM*K*(S)/(A+1))

E2=E1*A

H=E1+E2

MI=LAM*K*(S)**2*(6*A*K*(A+1)**2)/6/(A+1)**2

W1=MI/E1

W2=MI/E2

PESO POR UNIDADE DE COMPRIMENTO DA SECAO TRANSVERSAL

P=0.00789*(S*W+SC*LV)

G=789*S

WRITE(3,11)

11 FORMAT(4(//),4X,'LOCALIZACAO DO C.G. DA SECAO TRANSVERSAL',4X,'ALTURA
*DA SECAO TRANSVERSAL',4X,'PESO POR METRO DA SECAO TRANSVERSAL',//
*21X,'(CM)',33X,'(CM)',21X,'(KG/M)',//)

WRITE(3,12) E1,E2,H,G

12 FORMAT(12X,F7.2,10X,F7.2,25X,F7.2,33X,F7.2,4(//))

WRITE(3,13)

13 FORMAT(4X,'MOMENTO DE ENERGIA EM RELACAO AO EIXO "X-X"',3X,'MODULO
*OS DE RESISTENCIA DA SECAO TRANSVERSAL',3X,'PESO TOTAL DA VIGA',//,
*22X,'(CM 4)',40X,'(CM 3)',20X,'(KG)',//)

WRITE(3,14) MI,W1,W2,P

14 FORMAT(25X,F10.2,35X,F10.2,14X,F10.2,20X,F7.2)

VERIFICACAO DAS TENSOES NAS FIBRAS F1,F2,F3,F4,F5

SIGF1=(NS*N*X)/S*(NS*N*X)*Z*E2/W1+M/W1

SIGF2=(NI*N*X)/S*(NI*N*X)*Z*E2/W2+M/W2

SIGF3=(NS*N*X)/AC/S

SIGF4=M1*M/W2

SIGF5=NS*N*Z*E2/W2

WRITE(3,15)

15 FORMAT(4(//),4X,'TENSOES NAS FIBRAS',10X,'F1',10X,'F2',10X,'F3',
*10X,'F4',10X,'F5',//,9X,'(KG/CM 2)')

WRITE(3,16) SIGF1,SIGF2,SIGF3,SIGF4,SIGF5

16 FORMAT(18X,F7.2,9X,F7.2,9X,F14.2,2(9X,F7.2))

CALL EXIT

END