

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ASSOCIAÇÃO PLANA DE
PÓRTICOS COM PILARES PAREDES**

Eng.º L. F. O. FERREIRA

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS, SETEMBRO DE 1975

PHI
SUI
F441a
e.2
Tombo 288 192-157

ASSOCIAÇÃO PLANA DE
PÓRTICOS COM PILARES PAREDES

ENGº L.F.O. FERREIRA

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador

Prof. Ticoeturo Yagui

Comissão Examinadora

Prof. Ticoeturo Yagui

Prof. Walter Savassi

Prof. Ronaldo G. de Figueiredo

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

São Carlos, setembro de 1975

Agradeço:

Ao saudoso Professor Miguel Carlos Stamato, meu primeiro orientador, que propôs o desenvolvimento do presente tema; ao Professor Tioeturo Yagui pela orientação na conclusão deste trabalho; ao Professor Eddie Mancini, meus agradecimentos, não são pelas preciosas sugestões mas também, sobretudo, pelas palavras de incentivo ditas no momento certo; à FAPESP, pela concessão da bolsa de aperfeiçoamento, que me proporcionou condições de estudo e pesquisa em nível de pós-graduação; ao C.P.D. da Escola de Engenharia de São Carlos, pela utilização de seu equipamento.

RESUMO

O presente trabalho estuda a determinação dos esforços em estruturas planas formadas pela associação de pórticos com pilares paredes.

No Capítulo I são apresentados dois diferentes processos e a análise é efetuada com base no tratamento contínuo. O número discreto de lajes é substituído por um meio contínuo com rigidez admitida equivalente, uniformemente distribuída ao longo da altura do edifício. Admite-se que o meio contínuo equivalente às lajes dos andares seja constituído por elementos com rigidez horizontal infinita (diagramas) e sem rigidez transversal. Os esforços transmitidos as paredes e aos pórticos passam, então, a ser continuamente distribuídos ao longo da altura. A solução pode ser expressa através de funções analíticas.

Os processos apresentados no Capítulo II se aproximam mais da situação real da estrutura, isto é, solicitada por um número infinito de cargas concentradas, aplicadas ao nível das lajes (tratamento discreto). Empregam-se técnicas matriciais na análise da estrutura pelo Processo dos Deslocamentos. Estudam-se casos de apoios elásticos e recalques das fundações.

Diversos exemplos são resolvidos e a precisão de cada técnica é avaliada através de resultados comparativos.

ABSTRACT

The present work studies the determination of the actions on plane structures formed by the combination of shear walls and frames.

Two different techniques are shown in Chapter I and the analysis is carried out based on continuous treatment. The discrete number of floor slabs is substituted by "continuous medium" of equivalent stiffness, uniformly distributed along the height of the building. It is admitted that the "continuous medium" equivalent to the floor slabs is constituted by elements of infinite horizontal stiffness (diaphragms) and without any transverse stiffness. The actions transmitted to walls and frames are now continuously distributed throughout its height. The solution can be expressed by analytical functions.

The techniques shown in the Chapter II consider the actual situation of the structure, that is to say, it is loaded by a finite number of concentrated loads, applied at the level of the floor slabs (discrete treatment).

Matrix techniques are used in analysis of the structure by the Stiffness Method.

Cases of elastic supports and support displacements are studied.

Several examples are solved and the accuracy of each technique is evaluated through comparative results.

Í N D I C E

	pág.
INTRODUÇÃO.....	I
I - TÉCNICAS CONTÍNUAS.....	1.1
I.1 - TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA.....	1.2
I.1.1 - Parede.....	1.2
I.1.2 - Pórtico.....	1.3
I.1.3 - Pórtico e parede ligados por barras biarticuladas.....	1.6
I.1.4 - Pilares paredes unidos por lintéis	1.12
I.1.5 - Pilar de pórtico entre dois pilares paredes.....	1.17
I.1.6 - Pórtico e pilar parede ligados por lintéis.....	1.24
I.1.7 - Associação plana de pórticos com pilares paredes.....	1.31
I.1.8 - Solução da equação diferencial - Casos particulares de carregamento.....	1.33
I.1.9 - Retorno à estrutura discreta.....	1.39
I.1.10 - Exemplo numérico 1.....	1.48
I.2 - TÉCNICA CONTÍNUA - UM NOVO ENFOQUE.....	1.61
I.2.1 - O sistema "w" (parede).....	1.63
I.2.2 - O sistema "f" (pórtico).....	1.64
I.2.3 - Equações de equilíbrio do conjunto.....	1.65
I.2.4 - Equações de compatibilidade.....	1.66
I.2.5 - Equação diferencial característica da associação.....	1.70
I.2.6 - Determinação das constantes de rigidez (s_f e r_f) e dos parâmetros adimensionais (α, β).....	1.73
I.2.7 - Exemplo numérico 1.....	1.89
II - TÉCNICAS DISCRETAS.....	2.1
II.1 - TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA.....	2.2
II.1.1 - Considerações gerais.....	2.2
II.1.2 - O pilar parede tratado como um consolo.....	2.5

	pág.
II.1.3 - Obtenção de $[S]$	2.13
II.1.4 - Exemplo numérico 1.....	2.17
II.1.5 - Exemplo numérico 2.....	2.18
II.1.6 - Exemplo numérico 3.....	2.25
II.2 - TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS.....	2.30
II.2.1 - Considerações preliminares.....	2.30
II.2.2 - Numerações gerais da estrutura e de seus componentes.....	2.32
II.2.3 - Deslocamentos possíveis dos nós do pórtico.....	2.34
II.2.4 - Matrizes de rigidez das barras.	2.38
II.2.5 - Montagem da matriz de rigidez da estrutura.....	2.43
II.2.6 - Informações sobre os apoios - Vínculos elásticos.....	2.49
II.2.7 - Recalques de apoio.....	2.54
II.2.8 - Redução da matriz de rigidez...	2.55
II.2.9 - Esforços nas extremidades das barras.....	2.64
II.2.10- Exemplo numérico 1.....	2.65
II.2.11- Exemplo numérico 2.....	2.70
III - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	3.1
APÊNDICE 1 - "TÉCNICAS CONTÍNUAS" - PAREDES COM ENGASTAMENTO ELÁSTICO.....	A.1.1
APÊNDICE 2 - "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" - PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO.....	A.2.1
APÊNDICE 3 - "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS" - PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO.....	A.3.1
IV - BIBLIOGRAFIA.....	4.1

INTRODUÇÃO

A formação de grandes centros urbanos com alta concentração demográfica exige, dos arquitetos e planejadores, soluções orientadas no sentido do crescimento vertical das cidades. Não cabe aqui a discussão da validade destas soluções, mas sim da sua realidade perante a engenharia estrutural. O aparecimento de edifícios cada vez mais altos envolve o engenheiro no estudo cuidadoso da segurança dos mesmos. A ação do vento em edifícios altos, torna-se objeto de constante preocupação para os calculistas. Nota-se em quase todos os projetos o aparecimento, cada vez mais frequente, de pilares de grande rigidez (pilares paredes) que, por motivos arquitetônicos e construtivos, como, por exemplo, no caso de poços de elevadores, associam-se às estruturas aperticadas. Daí então, o interesse dos pesquisadores nos processos que traduzam, de maneira mais apropriada, a contribuição destes elementos para a rigidez de conjunto da estrutura.

O leitor poderá encontrar vasta indicação bibliográfica nos "PROCEEDINGS OF SYMPOSIUM ON TALL BUILDINGS"¹, no "REPORTED BY ACI COMMITTEE 442"² e nos "PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON PLANNING AND DESIGN OF TALL BUILDINGS"³ que reúnem os principais trabalhos realizados no setor.

É prática corrente classificar os diversos processos de análise em contínuos e discretos.

"Nos processos contínuos os elementos horizontais, que ligam os elementos resistentes verticais, são substituídos por um meio contínuo de rigidez equivalente, continuamente distribuída ao longo da altura do edifício. Estes processos conduzem a um sistema de poucas equações diferenciais, as quais, depois de integradas, fornecem deslocamentos e esforços em toda a estrutura"(STAMATO⁴).

"Nos processos discretos são usadas técnicas matriciais conhecidas, predominando a preferência da maioria

dos auteras pelo método dos deslocamentos. Estes processos conduzem a um sistema de muitas equações lineares as quais, depois de resolvidas, fornecem deslocamentos e esforços em toda a estrutura" (STAMATO⁴).

Dentre as técnicas contínuas analíticas, várias tratam do caso particular de pilares-paredes ligados por lintéis. Neste sentido desenvolve-se o trabalho de ALBICÉS e COULET⁵ que considera as deformações axiais das paredes e resolve uma equação diferencial de segunda ordem, tendo como incógnita a força cortante nos lintéis. Os casos de paredes elasticamente engastadas na base ou submetidas a recalques de apoio são estudados por COULL^{6,7} e TSO^{8,9}. Paredes com rigidez variável segundo a altura (variação brusca de seção) e ligadas através de barras biarticuladas são analisadas por GLUCK¹⁰. O processo proposto por GLUCK divide-se em duas etapas: na primeira, a distribuição de cargas entre as paredes é determinada admitindo-se para todas

Pode-se classificar como técnica contínua numérica, o trabalho de GOULD¹⁴ que amplia o de CARDAN¹³ permitindo a variação das características elasto-geométricas da estrutura ao longo da altura. Obtém, assim, uma equação diferencial de quarta ordem nos deslocamentos horizontais, que é resolvida por diferenças finitas.

Como exemplos de processos discretos, incluem-se os trabalhos de CLOUGH¹⁵, BORGES e RAVARA¹⁶, KHAN e SBAROUNIS¹⁷, AVRAM¹⁸.

Os dois primeiros substituem a parede por pilar de pórtico, adicionando, aos tramos adjacentes das vigas, mísulas de rigidez infinita nos trechos em que o prolongamento das vigas atravessam as paredes. Consideram, ainda, deformações por força cortante nos pilares-paredes. A hipótese das mísulas de rigidez infinita nas vigas é equivalente a admitir que as seções transversais das paredes permaneçam planas depois de serem solicitadas e deformadas.

KHAN e SBAROUNIS¹⁷ apresentam estudo bastante amplo, utilizando um processo de aproximações sucessivas. Consideram deformações axiais dos pilares, flexão das vigas adjacentes às paredes e variação dos parâmetros elasto-geométricos e apresentam, em seu trabalho, gráficos que permitem simplificações de cálculo.

AVRAM¹⁸ e outros optam pelo processo simplificado do "pórtico equivalente", adotando também a técnica de aproximações sucessivas.

Evidentemente, a solução mais apropriada é a que trata as paredes por elementos finitos, dispensando a hipótese de permanência plana de suas seções transversais. O uso dos elementos finitos, todavia, aumenta consideravelmente as dimensões e dificuldades numéricas do problema.

Cumprе ressaltar que edifícios com um plano vertical de simetria e cargas também simétricas podem ser tratados como casos de "ASSOCIAÇÃO PLANA DE PÓRTICOS COM PILARES PAREDES".

Sem a pretensão de sugerir a mais completa e sofisticada técnica de análise para uma associação plana de

pórticos com pilares paredes, pois outros autores já o fizeram com êxito, este trabalho apresenta quatro processos diferentes: dois contínuos e dois discretos.

Parte do primeiro capítulo - TÉCNICAS CONTÍNUAS é desenvolvida, por este autor, a partir da idéia de CARDAN¹³, complementando o trabalho de STAMATO¹¹ na medida em que é considerada a flexão das vigas adjacentes às paredes. Ainda neste capítulo, apresenta-se uma técnica nova, bastante semelhante ao Processo dos Esforços, pois que, como este, impõe a compatibilidade, ao longo da altura, dos deslocamentos das seções dos lintéis contíguos ao pórtico.

Como introdução ao segundo capítulo - TÉCNICAS DISCRETAS -, apresenta-se um tratamento discreto simplificado. Com base no trabalho de GOULD¹⁴, procura-se dar uma interpretação matricial para o seu modelo físico. Desta maneira, o sistema de equações obtido por aquele autor utilizando diferenças finitas, pode ser montado de forma mais automática e a análise de estruturas com carga e propriedades elasto-geométricas variáveis com a altura, torna-se imediata, enquanto que o emprego das diferenças finitas conduz a solução mais longa e mais trabalhosa.

Por último, apresenta-se uma técnica mais requintada que é aqui chamada "Técnica Discreta de Pórticos". A análise matricial de estruturas é aplicada, através do Método dos Deslocamentos, tomando como incógnitas, rotações, deslocamentos verticais dos nós (se os pilares forem considerados axialmente deformáveis) e translações horizontais dos andares. O tratamento permite analisar casos de recalques de apoio e engastamentos elásticos.

Cada técnica vem acompanhada de exemplos numéricos e a ordem em que são apresentadas obedece a um critério crescente de sofisticação, procurando mostrar algumas alternativas que o engenheiro dispõe ao analisar a interação de pórticos com pilares paredes.

I - TÉCNICAS CONTÍNUAS

INTRODUÇÃO

As técnicas contínuas caracterizam-se pela substituição do sistema discreto de lajes, vigas e pilares que compõem a estrutura do edifício, por meios contínuos com rigidezes equivalentes, uniformemente distribuídos ao longo da altura do prédio. As lajes são assimiladas a diafragmas horizontais, sem rigidez transversal. Desta maneira, as cargas a elas aplicadas e transmitidas aos elementos resistentes verticais passam a ser consideradas como continuamente distribuídas na altura.

Os elementos resistentes verticais chamar-se-ão "painéis" e ficarão caracterizados por determinadas constantes de rigidez que traduzem, aproximadamente, seus comportamentos elásticos. São estudados dois tipos de painéis e as diversas possibilidades de associá-los: a) painéis que se deformam predominantemente por momento fletor que são as paredes; b) painéis rígidos ao momento fletor, deformáveis predominantemente pelo efeito da força cortante e que simulam o comportamento dos pórticos de nós rígidos.

Admitindo-se que as características elasto-geométricas das paredes mantenham-se constantes ao longo da altura, as técnicas contínuas conduzem a equações diferenciais facilmente integráveis e que descrevem, com boa aproximação, o comportamento da estrutura em função de um número relativamente pequeno de parâmetros.

São apresentadas duas técnicas de tratamento contínuo. A primeira, introduz algumas simplificações no trabalho de CARDAN¹³, visando enquadrá-lo, convenientemente, na sistemática adotada por STAMATO¹¹ e MANCINI^{12,19}. A segunda técnica, dá ênfase especial ao comportamento do painel pórtico e obtém as equações diferenciais que resolvem a estrutura contínua através de procedimento análogo ao do Processo dos Esforços.

1.1 - TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA

1.1.1 - Parede

Dar-se-á o nome "parede" ao painel plano, contínuo, sem rigidez transversal, deformável, predominantemente, ao momento fletor, de seção constante ao longo da altura e rigidamente engastado na base. Usar-se-á o índice "w" para caracterizar os esforços e deslocamentos relativos às paredes. As deformações por força cortante na parede, por ora, serão desprezadas, tendo em vista algumas simplificações que favorecem a exposição didática do trabalho e que não comprometam, de maneira apreciável, os resultados. Como carregamento externo será admitida uma carga distribuída q_w e uma carga concentrada P_w aplicada no topo. A notação e sentidos positivos para esforços e deslocamentos são os indicados na figura 1.1.

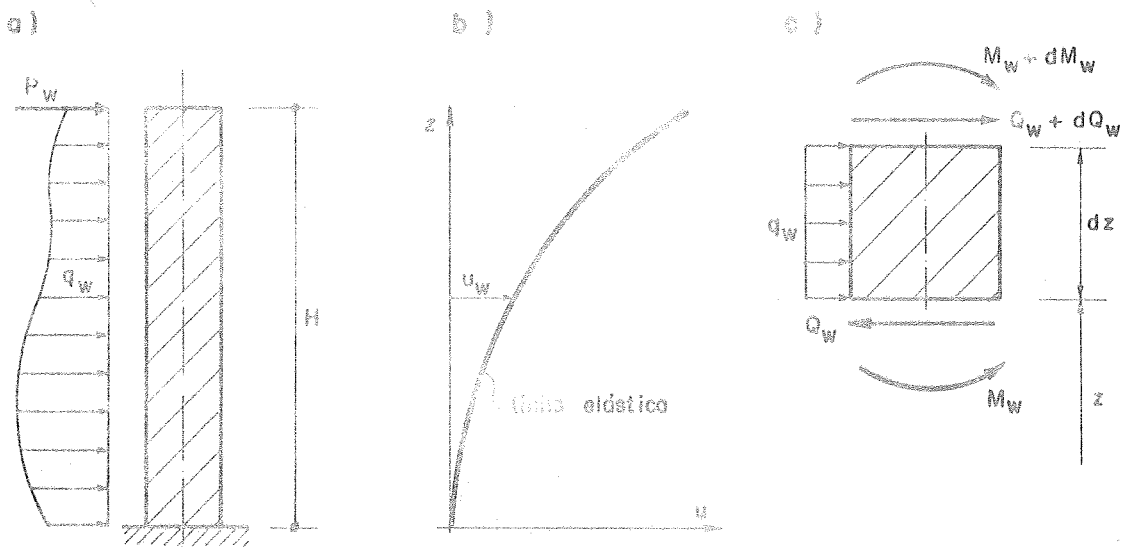


FIG. 4.4 - PAINEL PAREDE

O equilíbrio de um elemento infinitesimal no sentido da dimensão z , fornece:

$$\frac{dM_w}{dz} = -Q_w \dots \dots \dots (1.1)$$

$$\frac{dQ_w}{dz} = -q_w \dots\dots\dots(1.2)$$

$$\frac{d^2M_w}{dz^2} = q_w \dots\dots\dots(1.3)$$

O comportamento da parede fica definido pela equação da elástica:

$$\frac{d^2u_w}{dz^2} = u_w'' = \frac{M_w}{j_g} \dots\dots\dots(1.4)$$

onde j_g representa o produto de rigidez à flexão EJ com dimensão FL^2 . No caso da parede isolada M_w é uma função conhecida de z permitindo facilmente a integração com a conseqüente determinação dos deslocamentos horizontais u_w .

Combinando-se a equação (1.4) com (1.1) determina-se a expressão para a força cortante na parede.

$$Q_w = -j_g u_w''' \dots\dots\dots(1.5)$$

1.1.2 - Pórtico

Dar-se-á o nome "pórtico", ao painel plano, sem rigidez transversal, elasticamente equivalente, para cargas horizontais, a um consolo deformável apenas à força cortante. Para caracterizar os esforços e deslocamentos relativos ao pórtico usar-se-á o índice "f".

Os sentidos positivos para os esforços M_f e Q_f coincidem com aqueles definidos para M_w e Q_w (figura 1.1-c).

Convém observar que a hipótese de indeformabilidade do painel pórtico ao momento fletor não deve ser confundida com indeformabilidade das vigas e pilares que constitui o sistema discreto, sendo que aqueles elementos (vigas e pilares) deformam-se, essencialmente, por flexão.

As equações de equilíbrio para um elemento dz do pórtico são semelhantes às equações (1.1), (1.2) e (1.3)

por independerem do comportamento elástico da estrutura

$$\frac{dM_f}{dz} = -Q_f \dots\dots\dots (1.6)$$

$$\frac{dQ_f}{dz} = -q_f \dots\dots\dots (1.7)$$

$$\frac{d^2M_f}{dz^2} = q_f \dots\dots\dots (1.8)$$

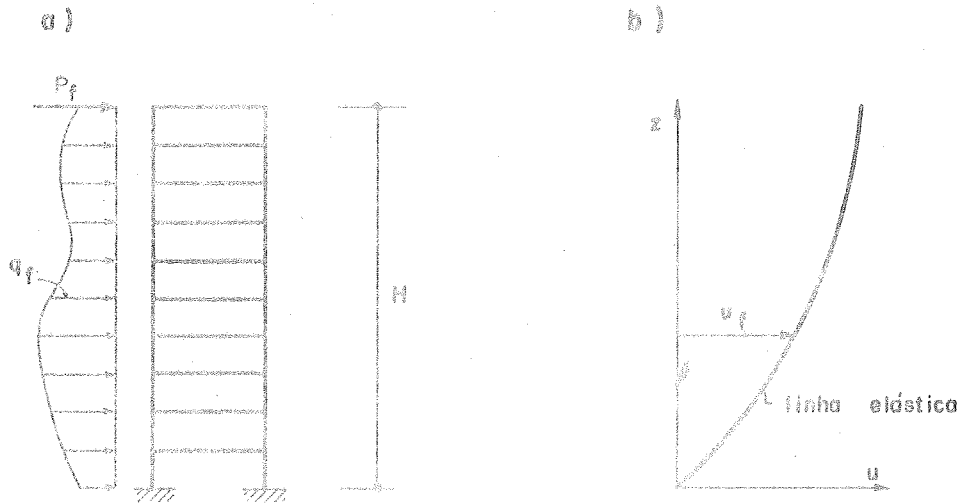


FIG. 1.2 - PAINEL PÓRTICO

A equação da linha elástica se escreve:

$$\frac{du_f}{dz} = u'_f = \frac{Q_f}{s} \dots\dots\dots (1.9)$$

que derivada em relação a z e combinada com a equação (1.7) fornece:

$$u''_f = - \frac{q_f}{s} \dots\dots\dots (1.9-a)$$

onde "s" representa a rigidez global (dimensão F) do meio contínuo (pórtico) à força cortante. Observe-se a analogia de u'_f com o efeito da força cortante sobre a elástica de u na viga através da conhecida expressão:

$$u' = c \cdot \frac{Q}{GS} \dots\dots\dots (1.10)$$

onde C é o módulo de elasticidade transversal e c coeficiente que depende da forma da seção transversal de área S .

Pode-se justificar a equação (1.9) considerando, por exemplo, o caso de um pórtico formado por dois pilares iguais e vigas de rigidez infinita (figura 1.3). Desprezam-se as deformações axiais dos pilares se os centros dos vãos dos pilares (supostos prismáticos) são pontos de momento nulo. Nestas condições as vigas deslocam-se horizontalmente e não existem rotações dos nós.

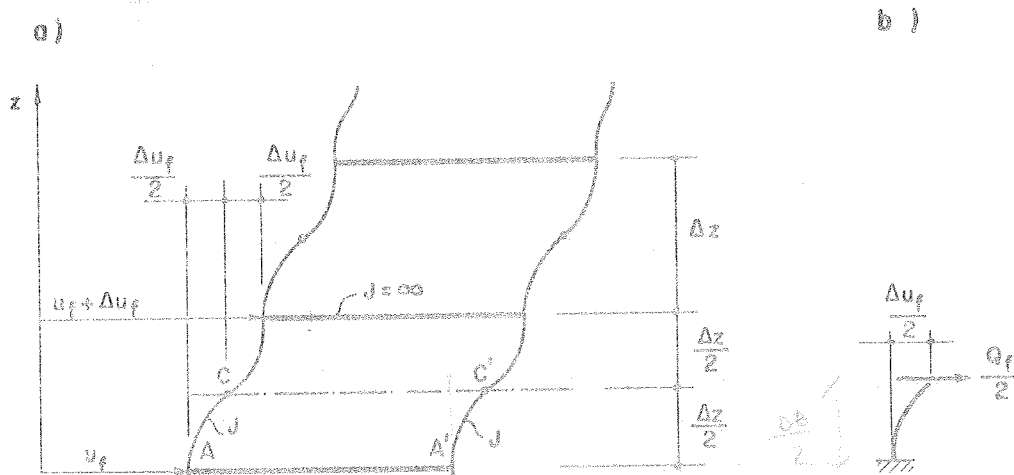


FIG. 1.3 - PÓRTICOS COM VIGAS DE RIGIDEZ INFINITA

Os semi-vãos dos pilares, AC e $A'C'$, comportam-se como consolos:

$$\frac{\Delta u_f}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_f}{2} \cdot \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^3$$

ou

$$\frac{\Delta u_f}{\Delta z} = u'_f = \frac{Q_f}{s} \dots \dots \dots (1.11)$$

onde

$$s = cte = \frac{24EJ}{\Delta z^2} \dots \dots \dots (1.12)$$

$Q = \frac{3eJ}{L^3} \cdot \Delta z$
 $s = \frac{3eJ}{3eJ} \cdot L^3$
 $\frac{\Delta u}{2} = \frac{Q_f}{3eJ} \cdot \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^3$
 $\Delta u = \frac{2}{3} \cdot \frac{Q_f}{eJ} \cdot \frac{\Delta z^3}{8}$
 $\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{Q_f}{24eJ} \cdot \frac{\Delta z^2}{4}$
 $\Delta z : s = 24eJ$
 $\frac{\Delta z^2}{4}$

Fica assim demonstrada a validade da expressão (1.9) para este particular tipo de pórtico. Podem-se demonstrar, e é o que se fará no desenvolver deste capítulo, equações semelhantes, válidas para pórticos usuais regulares, em que as rigidezes J/ℓ dos tramos de vigas e pilares, em cada andar, apresentam certa regularidade, não sendo excessivamente heterogêneos no que respeita à sua ordem de grandeza. Note-se que todo conjunto de pilares e vigas que apresente comportamento elástico passível de ser representado através de uma equação do tipo da (1.9) contribui para a rigidez global " s_g " de um meio elástico, aqui chamado "painel pórtico".

1.1.3 - Pórtico e parede ligados por barras biarticuladas

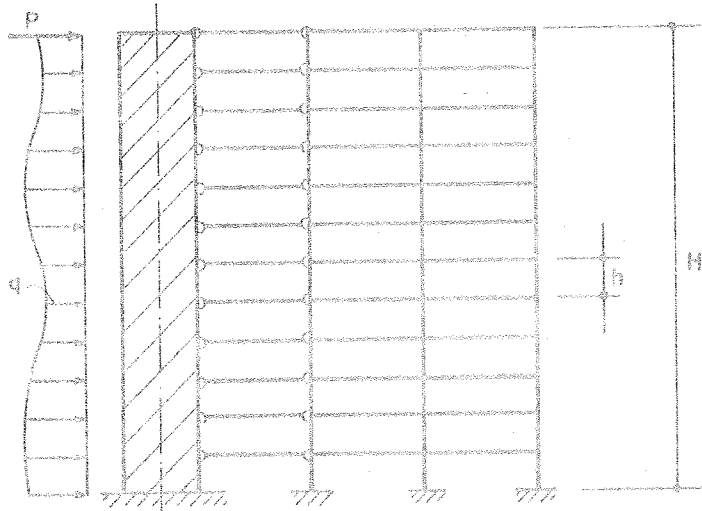
A associação de pórticos e paredes - painéis que, isoladamente, comportam-se de maneira bastante diversa - contribui, favoravelmente, para a rigidez lateral da estrutura e tende a diminuir a disparidade de esforços entre o topo e a base.

Serão apresentadas várias situações em que pórticos e paredes se associam numa única estrutura. Um modo de associá-los é através de barras biarticuladas, conforme a figura 1.4-a. A indeformabilidade axial destas barras garante a igualdade dos deslocamentos horizontais " u_w " da parede e " u_f " do pórtico ($u_w = u_f = u$).

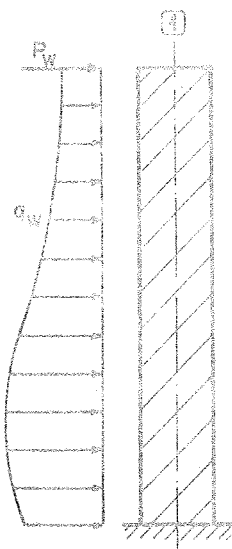
Os números, na figura 1.4, inscritos em pequenos círculos, identificam as prumadas de pilares do pórtico, a quele dentro do quadrado identifica a parede. Os esforços solicitantes (Q_w e M_w) e (Q_f e M_f) são positivos quando atuam conforme sentidos esquematizados na figura 1.1-c. O carregamento é composto por uma carga distribuída q e carga concentrada P , no topo. Como a força cortante Q proveniente das cargas externas é, em qualquer cota z , equilibrada pelas forças cortantes Q_w na parede e Q_f no pórtico, a seguinte equação é válida:

$$Q = Q_w + Q_f \dots\dots\dots(1.13)$$

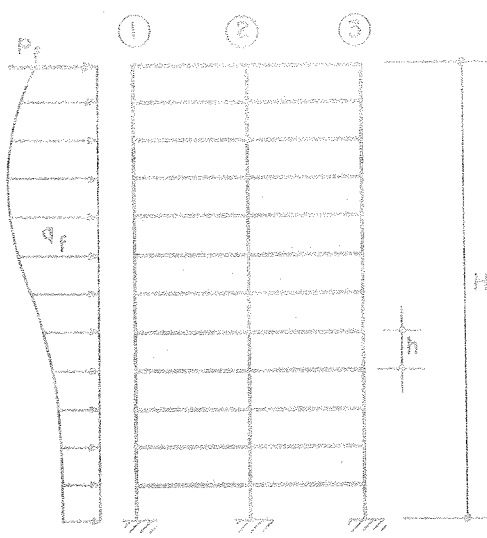
a)



b)



c)



d)

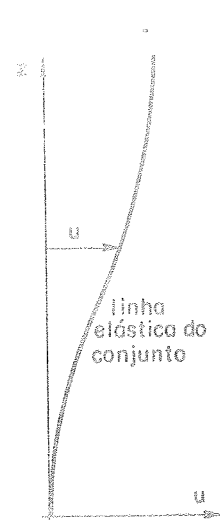


FIG. 1.4 - PÓRICO E PAREDE LIGADOS POR BARRAS BIARTICULADAS

Decorre também do equilíbrio das cargas internas e externas que:

$$q = q_w + q_f \dots\dots\dots(1.13-a)$$

A expressão (1.13), juntamente com as (1.5) e (1.9), fornece como solução para este tipo de associação, a seguinte equação diferencial:

$$Q = -j_g u'''' + s_g u' \dots\dots\dots(1.14)$$

onde Q é uma expressão conhecida de z .

Resta saber como determinar a rigidez s_g do pórtico à força cortante. Admitem-se que as rotações dos nós da viga de um determinado andar sejam iguais e que as rotações de três nós consecutivos de uma prumada de pilar sejam próximas. A primeira hipótese é bastante razoável para os pórticos regulares carregados com cargas horizontais; a segunda, é justificável na medida em que se observa a pequena altura do andar comparada com a altura total do edifício.

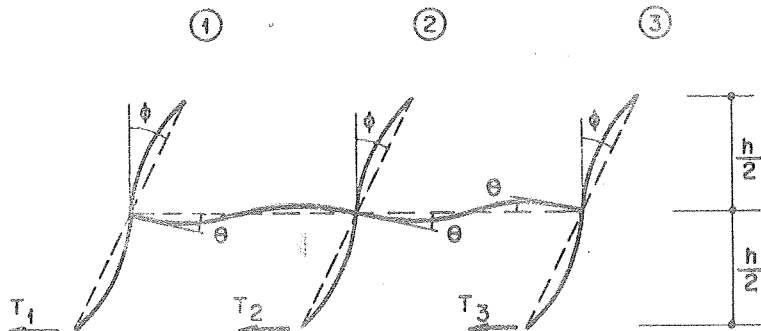


FIG.1.5 - DEFORMAÇÃO DO ANDAR GENÉRICO DO PÓRTICO

Das considerações relativas às rotações dos nós, tanto das vigas como dos pilares, segue que os centros dos vãos destas barras são pontos de momentos nulos. Seccionando o andar do pórtico à meia altura, as únicas incógnitas serão as forças cortantes T_i ($i=1,2,3$) em cada prumada de pilar, que somadas resultam na força cortante total Q_f absorvida pelo painel, naquele andar (figura 1.5).

Análise-se por exemplo o quinhão T_2 absorvido pela prumada 2 (figura 1.6).

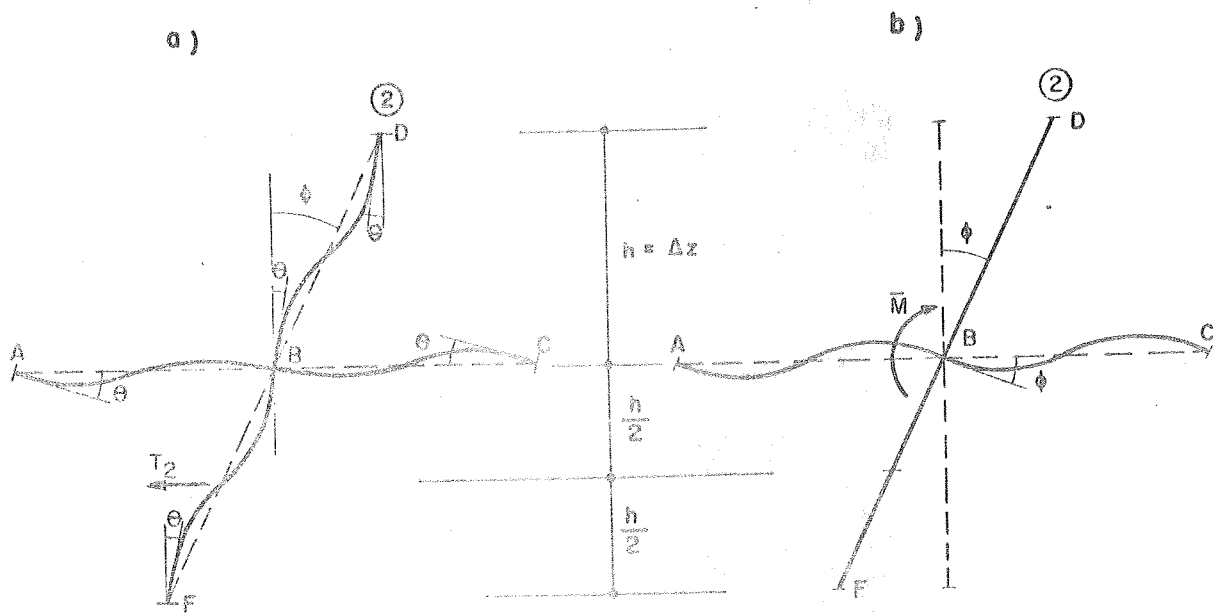


FIG. 1.6 - CONTRIBUIÇÃO PARA A RIGIDEZ s_f DO PÓRTICO

Convencionam-se como positivos os momentos anti-horários que as barras aplicam sobre os nós e designa-se com a letra k as rigidezes J/l das barras. O momento externo \bar{M} impõe a rotação ϕ sem curvatura do pilar, em correspondência com o deslocamento horizontal do andar (figura 1.6-b). Ao liberar o nó B, o que significa aplicar um momento igual e de sentido contrário a \bar{M} , as barras que aí concorram recebem parcelas de momento proporcionais às rigidezes de cada uma. Observe-se a configuração final do elemento de pórtico, esquematizada na figura 1.6-a.

$$\bar{M} = 6E(k_A + k_C)\phi \dots\dots\dots(1.15)$$

$$M_{BF} = \bar{M} \frac{k_F}{\sum k} \dots\dots\dots(1.16)$$

$$\text{onde } \sum k = k_A + k_C + k_D + k_F \dots\dots\dots(1.17)$$

Sendo a força cortante no pilar 2 dada pela expressão:

$$T_2 = \frac{2M_{BF}}{h} \dots\dots\dots(1.18)$$

conclui-se, pelas equações (1.15) e (1.16), que

$$T_2 = s_2 \phi \dots\dots\dots(1.19)$$

$$\text{onde } s_2 = \frac{12E}{h} \cdot k_F \cdot \frac{k_A+k_C}{\Sigma k} \dots\dots\dots(1.20)$$

representa a contribuição do pilar 2 para a rigidez global s_g do pórtico.

Procedimento análogo para as prumadas de pilares 1 e 3 permite o cálculo de T_1 e T_3 em função da rotação ϕ da corda do pilar.

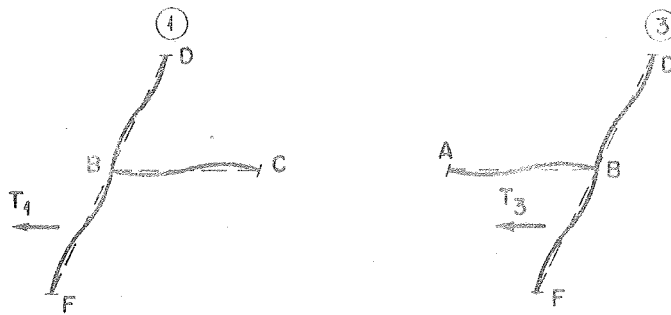


FIG. 1.6a - CASOS PARTICULARES

Deste modo a expressão (1.20) aplicada à prumada 1 fornece:

$$s_1 = \frac{12E}{h} \cdot k_F \cdot \frac{k_C}{\Sigma k} \dots\dots\dots(1.20-a)$$

$$\text{onde } \Sigma k = k_C + k_D + k_F \dots\dots\dots(1.20-b)$$

enquanto que para a prumada \underline{j} tem-se:

$$s_j = \frac{12E}{h} \cdot k_F \frac{k_A}{\sum k} \dots\dots\dots(1.20-c)$$

onde $\sum k = k_A + k_D + k_F \dots\dots\dots(1.20-d)$

É claro que subentende-se a seguinte notação (figura 1.6 e 1.6-a):

- "B" - intersecção da prumada em questão com a viga do andar considerado;
- "A", "C" - respectivamente, não a direita e a esquerda de "B";
- "D", "F" - respectivamente, não acima e abaixo de "B".

A força cortante total no pórtico será

$$Q_i = T_1 + T_2 + T_3 = s_g \phi \dots\dots\dots(1.21)$$

com $s_g = s_1 + s_2 + s_3 \dots\dots\dots(1.22)$

Confundindo-se a distorção média do andar $\phi \approx \Delta u / \Delta z$ com u' , procedimento bastante lógico quando se compara o pó direito do andar com a altura total do painel, evidencia-se a semelhança entre as equações (1.21) e (1.9). Os pórticos quando ligados às paredes através de barras biarticuladas, constituem um meio elástico com rigidez s_g a força cortante calculada a partir da contribuição de cada pilar segundo a equação (1.20) e que pode ser expressa, de uma maneira geral, pela expressão (STAMATO¹¹):

$$s_g = \frac{12E}{h} \sum_{n.a.} \left[k_{p.n.} \frac{\sum_{v.n.} k}{\sum_{b.n.} k} \right] \dots\dots\dots(1.23)$$

onde usa-se a notação

- h = pé direito do andar
- k = relação J/l do tramo de viga ou pilar considerado
- n.a. = somatória estendida a todos os nós do andar considerado.
- k_{p.n.} = relação J/l do tramo de pilar logo abaixo do nó considerado.
- v.n. = somatória que se estende aos tramos (lou 2) de vigas que concorrem no nó considerado.
- b.n. = somatória que se estende aos tramos (2, 3 ou 4) de todas as barras (vigas e pilares) que concorrem no nó considerado.

Esta expressão, vale lembrar, é válida quando são iguais (ou admitidas iguais) as rotações dos nós da viga de determinado andar. No item 1.2 discutir-se-ão as circunstâncias em que isto ocorre. Para os casos em que estas rotações são diferentes será desenvolvida uma técnica que sistematiza e generaliza o cálculo de s_g .

1.1.4 - Pilares paredes unidos por lintéis

Encontram-se, frequentemente, em edifícios, painéis planos cujos únicos elementos verticais resistentes às cargas laterais são os pilares paredes. Se as paredes forem ligadas entre si através de barras biarticuladas (indefornáveis axialmente) é imediata a conclusão de que o conjunto funcionaria como se existisse uma única parede equivalente (momento de inércia igual a soma dos J de cada parede) solicitada pelas cargas externas.

Um procedimento mais eficiente, quanto a rigidez daqueles painéis às cargas laterais, consiste em ligá-los através de lintéis: vigas horizontais submetidas à flexão composta (M,N,Q).

Seja o caso particular de duas paredes, com larguras diferentes, unidas por lintéis (figura 1.7).

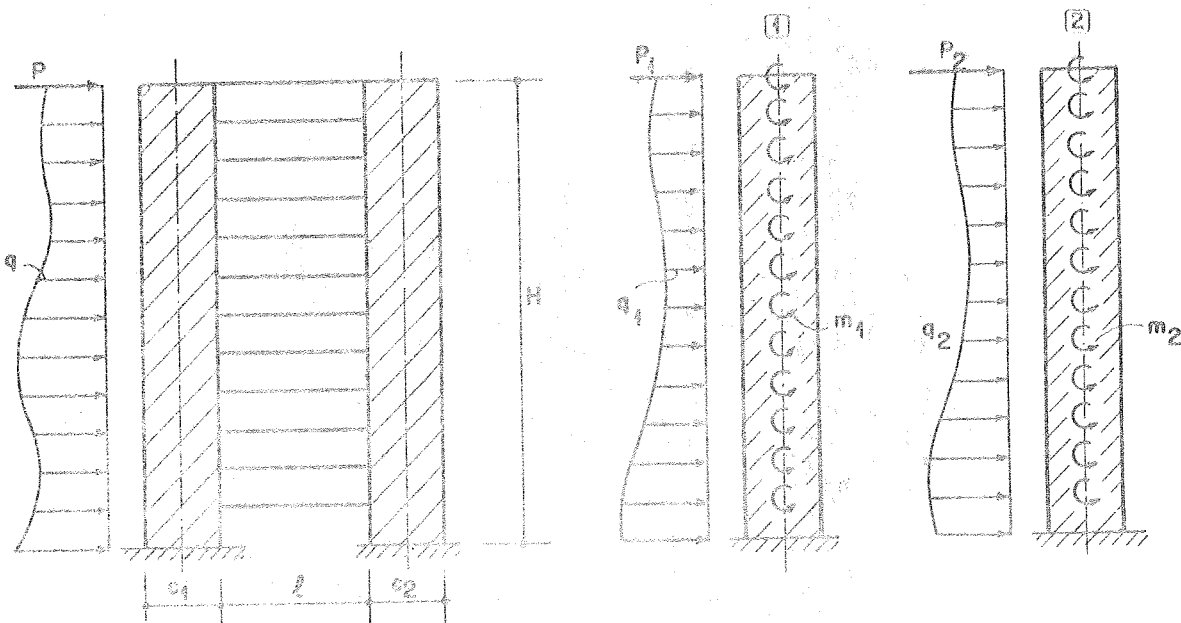


FIG. 1.7 - DUAS PAREDES UNIDAS POR LINTEIS

Este painel caracteriza-se pela ausência das prumadas de pilares que definem o pórtico, portanto a rigidez s_g é nula. Designar-se-á pela letra k a rigidez J/l dos lintéis. Estes são perfeitamente engastados nas paredes e suas reações elásticas (m_1 e m_2) consideradas distribuídas continuamente ao longo dos eixos das mesmas, caracterizam a técnica contínua.

Evidentemente também existirão interações verticais entre lintéis e paredes através de cargas verticais distribuídas, aplicadas nos centros de gravidade destas, e que produzem forças normais nas paredes (supostas indeformáveis axialmente).

O equilíbrio à rotação de um elemento genérico da parede esquerda, com os esforços positivos obedecendo os sentidos indicados na figura 1.8, fornece:

$$\frac{dN_1}{dz} = -Q_1 + m_1 \dots \dots \dots (1.24-a)$$

Para a parede da direita, expressão análoga é válida:

$$\frac{dM_2}{dz} = -Q_2 + m_2 \dots \dots \dots (1.24-b)$$

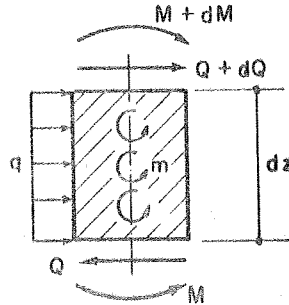


FIG. 1.8 - ELEMENTO GENÉRICO DE PAREDE

Desprezando-se as deformações por cisalhamento, a situação deformada de um elemento do painel é a esquematizada na figura 1.9, e os momentos fletores nas paredes de acordo com a equação (1.4) serão respectivamente:

$$M_1 = j_1 u'' \dots\dots\dots(1.25-a)$$

$$M_2 = j_2 u'' \dots\dots\dots(1.25-b)$$

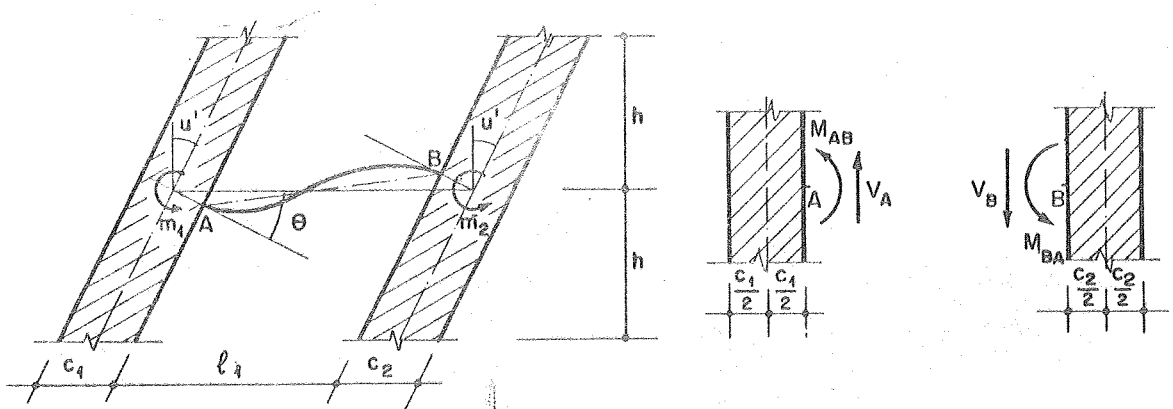


FIG. 1.9 - DEFORMAÇÃO DO ANDAR GENÉRICO

$$\theta = \left(1 + \frac{c_1 + c_2}{2l_1} \right) u' \dots\dots\dots(1.26)$$

$$M_{AB} = M_{BA} = 6Ek_1 \left(1 + \frac{c_1 + c_2}{2\ell_1} \right) u' \dots\dots\dots(1.27)$$

O equilíbrio à rotação da barra fornece

$$V_A = V_B = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_1} \dots\dots\dots(1.28)$$

então

$$V_A = V_B = \frac{12Ek_1}{\ell_1} \left(1 + \frac{c_1 + c_2}{2\ell_1} \right) u' \dots\dots\dots(1.28-a)$$

Com os momentos e forças cortantes nas extremidades dos lintéis, calculam-se os momentos hm_1 e hm_2 concentrados ao nível de cada andar.

$$hm_1 = M_{AB} + V_A \frac{c_1}{2} \dots\dots\dots(1.29-a)$$

$$hm_2 = M_{BA} + V_B \frac{c_2}{2} \dots\dots\dots(1.29-b)$$

As expressões (1.29-a, b), juntamente com (1.27) e (1.28) fornecem:

$$m_1 = r_1 u' \dots\dots\dots(1.30-a)$$

$$m_2 = r_2 u' \dots\dots\dots(1.30-b)$$

que são as expressões de CARDAN¹³ para momentos distribuídos nas paredes, desprezando-se a deformação por cisalhamento, e onde:

$$r_1 = 6E\bar{k}_1 \left(1 + \frac{c_1 + c_2}{2\ell_1} \right) \left(1 + \frac{c_1}{\ell_1} \right) \dots\dots\dots(1.31-a)$$

$$r_2 = 6E\bar{k}_1 \left(1 + \frac{c_1 + c_2}{2\ell_1} \right) \left(1 + \frac{c_2}{\ell_1} \right) \dots\dots\dots(1.31-b)$$

com \bar{k}_1 igual à rigidez $k_1 = J/\ell_1$ dos lintéis por unidade de

comprimento, ou seja, rigidez do meio contínuo equivalente

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1}{h} \dots \dots \dots (1.32)$$

Operando-se convenientemente sobre os pares de equações (1.24-a,b), (1.25-a,b), (1.30-a,b) determinam-se as forças cortantes nas paredes:

$$Q_1 = -j_1 u'''' + r_1 u' \dots \dots \dots (1.33-a)$$

$$Q_2 = -j_2 u'''' + r_2 u' \dots \dots \dots (1.33-b)$$

Por equilíbrio, a força cortante externa Q se escreve:

$$Q = Q_1 + Q_2 = -(j_1 + j_2) u'''' + (r_1 + r_2) u' \dots \dots \dots (1.34)$$

$$\text{ou ainda } Q = -j_g u'''' + r_g u' \dots \dots \dots (1.35)$$

Compare-se as equações (1.14) e (1.35), as duas são formalmente idênticas: a primeira descreve a associação de uma parede com rigidez j_g e um pórtico com rigidez s_g à força cortante; enquanto que a segunda, por analogia, pode ser entendida como resultante da associação de uma parede equivalente ($j_g = j_1 + j_2$) com um outro meio contínuo, de rigidez $r_g = r_1 + r_2$ à força cortante, constituído pelos lintéis.

A estrutura da figura 1.7 pode ser generalizada para o caso de "n" paredes unidas por lintéis. Considere-se uma parede genérica i desta série (figura 1.10). Por extensão, a força cortante Q_i na parede i se escreve:

$$Q_i = -j_i u'''' + r_i u' \dots \dots \dots (1.36)$$

onde r_i é calculado a partir de equações semelhantes às (1.30-a,b) aplicadas, sucessivamente, aos lintéis à esquerda e à direita da parede.

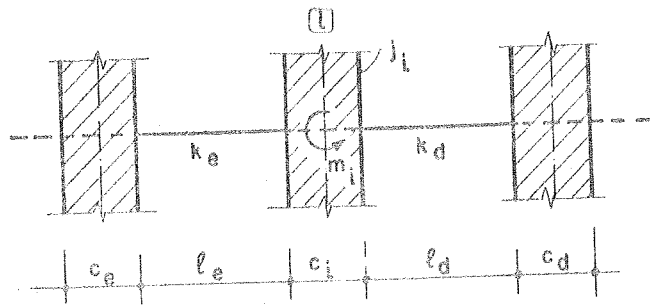


FIG. 1.10 - "n" PAREDES UNIDAS POR LINTEIS

$$r_i = 6E\bar{k}_e \left(1 + \frac{c_e + c_i}{2l_e} \right) \left(1 + \frac{c_i}{l_e} \right) + 6E\bar{k}_d \left(1 + \frac{c_i + c_d}{2l_d} \right) \left(1 + \frac{c_i}{l_d} \right) \dots \dots (1.37)$$

A expressão para a força cortante total no painel será dada pela soma da contribuição de cada parede.

$$Q = - \left(\sum_{i=1}^n j_i \right) u'''' + \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) u' \dots \dots \dots (1.38)$$

1.1.5 - Pilar de pórtico entre dois pilares paredes

Um outro tipo de associação (figura 1.11) é aquele em que ficam caracterizados três tipos de elementos: as paredes (1, 2), uma prumada de pilar de pórtico (1) e vigas (lintéis) adjacentes às paredes, solicitadas à flexão composta. Em vista do exposto até agora, pode-se concluir que estes elementos contribuirão, de alguma forma, para as rigidezes "j_g", "s_g" e "r_g", características dos diferentes meios contínuos envolvidos no trabalho do painel resultante.

Evidentemente, as paredes, neste painel, comportam-se elasticamente da mesma maneira que no exemplo do item anterior. Desta maneira, as equações (1.33-a,b) são válidas e serão reescritas cuidando-se em determinar as constantes r₁ e r₂ para este tipo de associação.

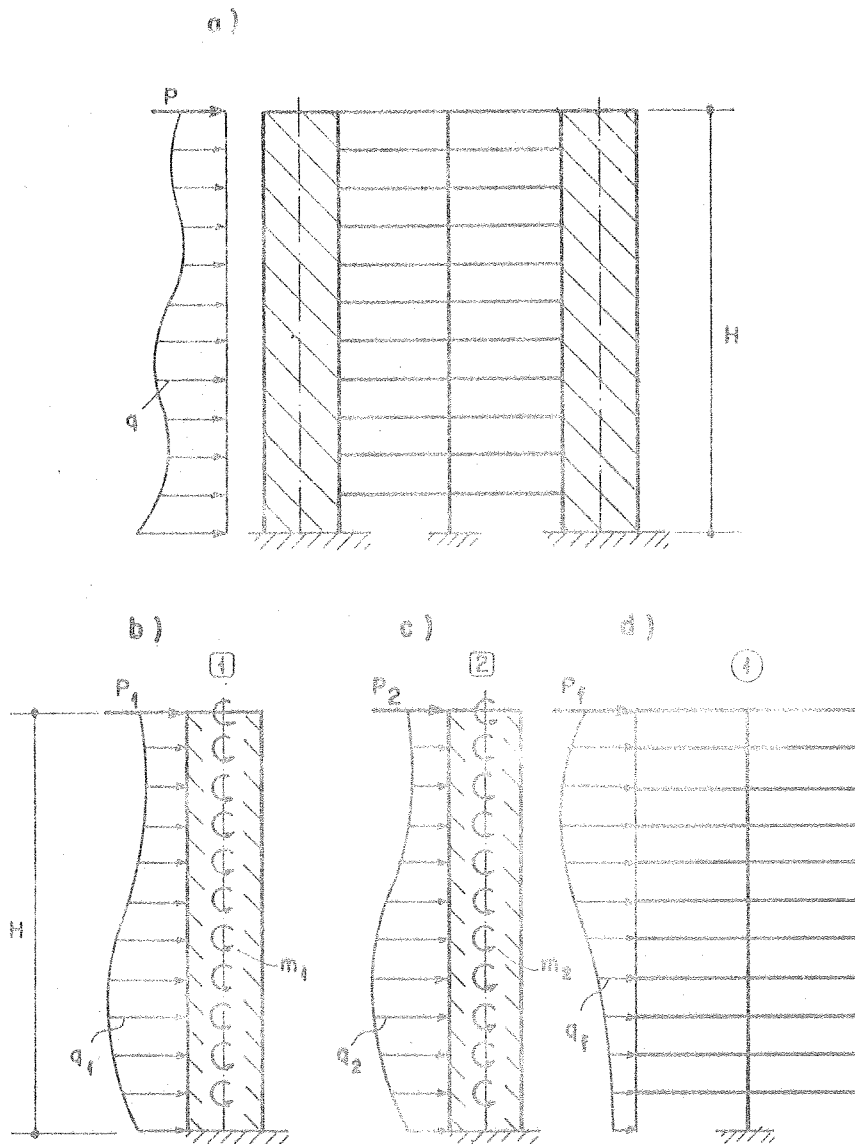


FIG.1.14 - PILAR DE PÓRTICO LIGADO A DUAS PAREDES

$$Q_1 = -j_1 u'''' + r_1 u' \dots\dots\dots(1.39-a)$$

$$Q_2 = -j_2 u'''' + r_2 u' \dots\dots\dots(1.39-b)$$

O pilar de pórtico 1 enquadra-se na definição de "painel pórtico" (item I.2.1) se for possível a determinação de uma constante de rigidez s_g que relacione a força cortante Q_f em cada nível com a distorção do andar u' , como

indica a equação (1.9). No que se segue, demonstrar-se-á a validade desta relação. Atente-se, no momento, para a obtenção da equação diferencial que resolve o painel.

A força cortante externa será equilibrada pelas forças cortantes que atuam em cada elemento resistente vertical:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_f \dots \dots \dots (1.40)$$

As equações (1.39-a,b) juntamente com (1.9) fornece:

$$Q = -j_g u'''' + s_g^* u' \dots \dots \dots (1.41)$$

onde

$$j_g = j_1 + j_2 \dots \dots \dots (1.42)$$

$$s_g^* = r_g + s_g \dots \dots \dots (1.42)$$

e r_g igual a soma das contribuições (r_1 e r_2) dos lintéis adjacentes às paredes.

DETERMINAÇÃO DAS CONTRIBUIÇÕES PARA A RIGIDEZ r_g

Observe-se a figura 1.12 que mostra um andar genérico do painel deformado pelo efeito de flexão.

O momento \bar{M} (figura 1.12-a) é o momento de "bloqueio" aplicado ao nó B quando se impõe a rotação u' sem curvatura no pilar, em correspondência com o deslocamento horizontal do andar. Posteriormente, o nó será liberado à rotação, segundo a técnica de CROSS, mantendo-se fixo o deslocamento do andar (figura 1.12-b). Liberar o nó B é o mesmo que aplicar um momento igual mas de sentido contrário ao de \bar{M} que será repartido entre as barras que concorrerem neste nó, levando-se em conta as rigidezes de cada uma. A configuração final do segmento de painel (figura 1.12-b) mostra que as barras AB e BC (lintéis) permanecem engasta-

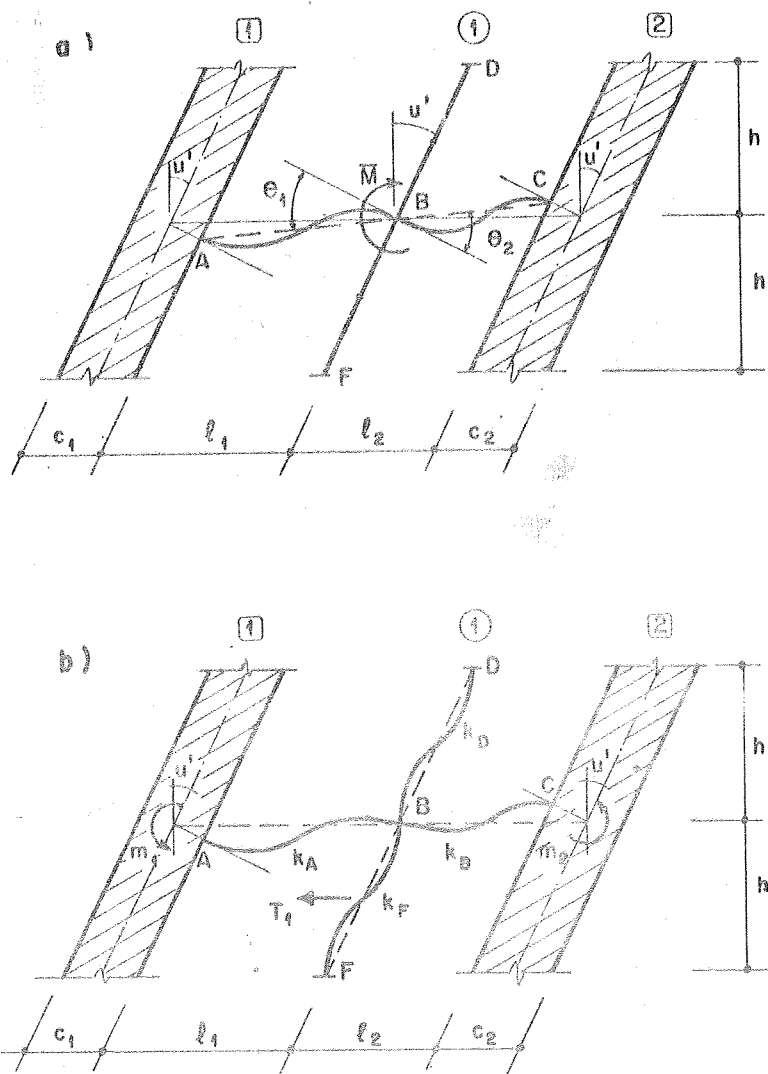


FIG. 1.12 - ANDAR GÊNÉRICO DO PAINEL

das nas paredes, sugerindo as respectivas rigidezes: $4Ek_A$ e $4Ek_C$. Os nós D, B, F da prumada de pilar, na posição deslocada final, sofrerão rotações próximas, que serão admitidas iguais de acordo com hipóteses já discutidas. Desta maneira, as rigidezes dos tramos BD (superior) e BF (inferior) da prumada 1 são respectivamente $6Ek_D$ e $6Ek_F$.

O momento externo \bar{M} será:

$$\bar{M} = 6Ek_A \theta_1 + 6Ek_C \theta_2 \dots \dots \dots (1.44)$$

onde os ângulos θ_1 e θ_2 são facilmente calculados tendo em vista relações geométricas implícitas na figura 1.12-a.

$$\theta_1 = \left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) u' \dots\dots\dots(1.45)$$

e

$$\theta_2 = \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2}\right) u' \dots\dots\dots(1.46)$$

logo, o momento \bar{M} será expresso da seguinte maneira:

$$\bar{M} = 6E \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) k_A + \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2}\right) k_C \right] u' \dots\dots\dots(1.47)$$

Liberando o nó B da ação deste momento externo, obtêm-se:

$$M_{BA} = 6Ek_A \left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) u' - \frac{k_A}{\Sigma k} \bar{M} \dots\dots\dots(1.48)$$

$$\text{onde } \Sigma k = k_A + k_C + 1,5k_D + 1,5k_F \dots\dots\dots(1.49)$$

ou ainda

$$M_{BA} = 6Ek_A \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) \left(1 - \frac{k_A}{\Sigma k}\right) - \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2}\right) \frac{k_C}{\Sigma k} \right] u' \quad (1.50)$$

Lembrando que o coeficiente de propagação de B para A é igual a 1/2, tem-se:

$$M_{AB} = 6Ek_A \left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) u' - \frac{1}{2} \frac{k_A}{\Sigma k} \bar{M} \dots\dots\dots(1.51)$$

$$M_{AB} = 6Ek_A \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) \left(1 - \frac{k_A}{2\Sigma k}\right) - \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2}\right) \frac{k_C}{2\Sigma k} \right] u' \quad (1.52)$$

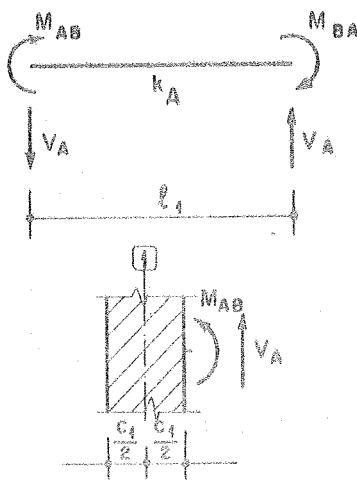


FIG. 1.43

O equilíbrio a rotação da barra AB implica na equação:

$$V_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l_1}$$

ou

$$V_A = \frac{6Ek_A}{l_1} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2l_1} \right) \left(2 - \frac{3k_A}{2\sum k} \right) - \left(1 + \frac{c_2}{2l_2} \right) \frac{3k_C}{2\sum k} \right] u' \quad (1.53)$$

O efeito da flexão do lintel AB sobre a parede 1 (figura 1.13), de acordo com a técnica contínua, é o momento m₁, distribuído segundo a altura do edifício. A resultante desta carga distribuída em um trecho de comprimento igual a altura do andar, pode ser expressa através da equação semelhante à (1.29-a), ou seja:

$$h m_1 = M_{AB} + V_A \frac{c_1}{2}$$

esta, pode ser escrita após usar as equações (1.48), (1.51) e (1.53), da seguinte maneira:

$$m_1 = r_1 u'$$

onde

$$r_1 = 6E\bar{k}_A \left\{ \left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) \left(1 - \frac{k_A}{2\sum k} \right) - \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2} \right) \frac{k_C}{2\sum k} + \frac{c_1}{2\ell_1} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) \left(2 - \frac{3k_A}{2\sum k} \right) - \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2} \right) \frac{3k_C}{2\sum k} \right] \right\} \quad (1.54)$$

Procedendo-se de maneira exatamente igual com o lintel BC, determinam-se os momentos M_{BC} e M_{CB} , a força cortante V_C e a constante de rigidez r_2 . São válidas, respectivamente, as expressões (1.50), (1.52), (1.53) e (1.54) desde que sejam trocados os índices "A" por "C" e "1" por "2" (e vice-versa) nas grandezas que levam estas notações.

DETERMINAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO PARA A RIGIDEZ "s" g

Analise-se agora um elemento do pilar de pórtico 1 (figura 1.11-d), juntamente com as vigas que concorrem no nó B, na posição deformada final (figura 1.14).

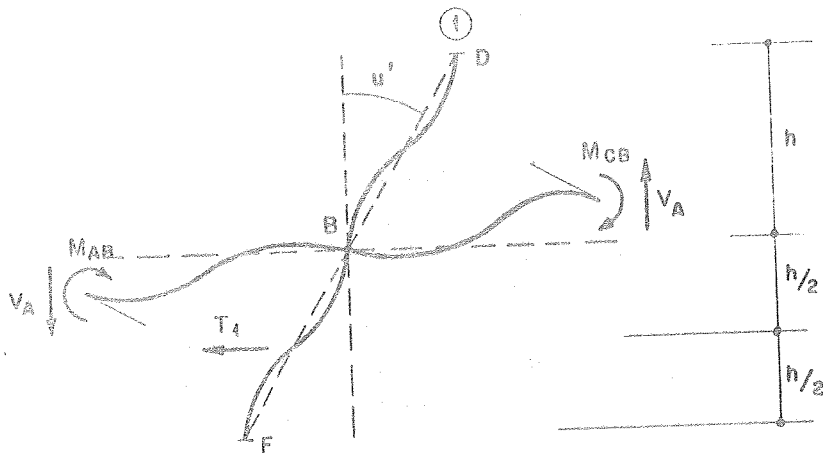


FIG. 1.14 - ELEMENTO DE PILAR

O momento M_{BF} no tramo imediatamente abaixo do andar considerado vale

$$M_{BF} = 1,5 \frac{k_F}{\sum k} \bar{M} \dots \dots \dots (1.55)$$

Substituindo a expressão (1.47) em (1.55) tem-se

$$M_{BF} = \frac{9Ek_F}{\sum k} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) k_A + \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2} \right) k_C \right] u' \quad \dots (1.56)$$

A força cortante neste tramo vale

$$T_1 = \frac{2M_{BF}}{h} \quad \dots (1.57)$$

que com o auxílio da equação (1.56) pode ser escrita

$$T_1 = s_1 u' \quad \dots (1.58)$$

onde

$$s_1 = \frac{18E}{h} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) k_A + \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2} \right) k_C \right] \frac{k_F}{\sum k} \quad \dots (1.59)$$

Concluindo, pode-se afirmar que a prumada de pilar da figura 1.11-d enquadra-se na definição de "painel pórtico" identificando-se Q_f com T_1 e s_g com s_1 .

Para finalizar, algumas observações devem ser feitas e que se relacionam com a obtenção das constantes r_1 , r_2 e s_1 . CARDAN¹³ adota técnica análoga para obtê-las; entretanto, suas expressões são deduzidas a partir de paredes com larguras c iguais e lintéis com rigidezes k também iguais. Outro detalhe importante é o que se refere à distribuição do momento \bar{M} entre as barras que concorrem no nó B. Esta distribuição é feita, naquele trabalho, admitindo rigidezes iguais ($4Ek$) tanto para os tramos de pilar como para os lintéis.

1.1.6 - Pórtico e pilar-parade ligados por lintéis

Um outro exemplo básico de associação de pórtico com pilar parede é o esquematizado na figura 1.15. Este pai

nel difere daquele estudado em I.1.3 pela substituição das barras biarticuladas por lintéis.

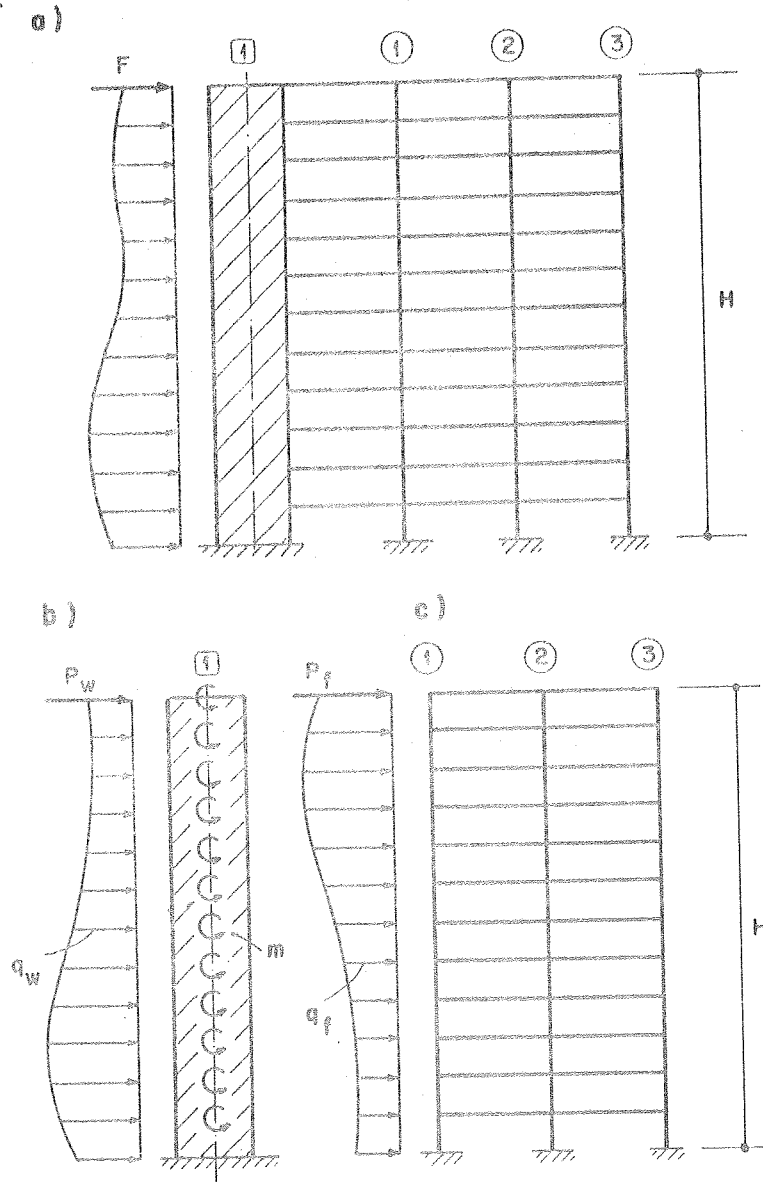


FIG. 4.45 - PÓRTICO E PAREDE LIGADOS POR LINTEIS

O pórtico reage elasticamente através dos lintéis, sobre a parede com carga distribuída horizontal, momento m distribuído ao longo do eixo da parede e força vertical também distribuída segundo este eixo. Esta última força interativa não está representada na figura 1.15 e seu efeito se transforma em força normal na parede (suposta in deformável axialmente). É claro que as forças cortantes nos

pilares do pórtico ficam afetadas pela presença dos lintéis, o que não acontecia quando a ligação era feita através de berras biarticuladas. Entretanto, como será visto a seguir, o conjunto de pilares e vigas que constitui o pórtico comporta-se como um meio contínuo elasticamente equivalente àquele definido em 1.1.3. Este fato justifica a figura 1.15-c que representa o "painel pórtico" carregado unicamente com carga distribuída q_f horizontal.

Será desnecessário mostrar que a equação diferencial da associação é do tipo da equação (1.41), bastando que se conheçam, para resolvê-la, as contribuições para as rigidezes r_g e s_g .

CONTRIBUIÇÃO PARA A RIGIDEZ r_g

Observa-se a figura 1.16. Será mantida a hipótese de igualdade das rotações dos nós do pórtico pertencentes à viga de determinado andar. Este fato justifica, para efeito de cálculo da constante de rigidez r , o não envolvimento das prumadas 2 e 3.

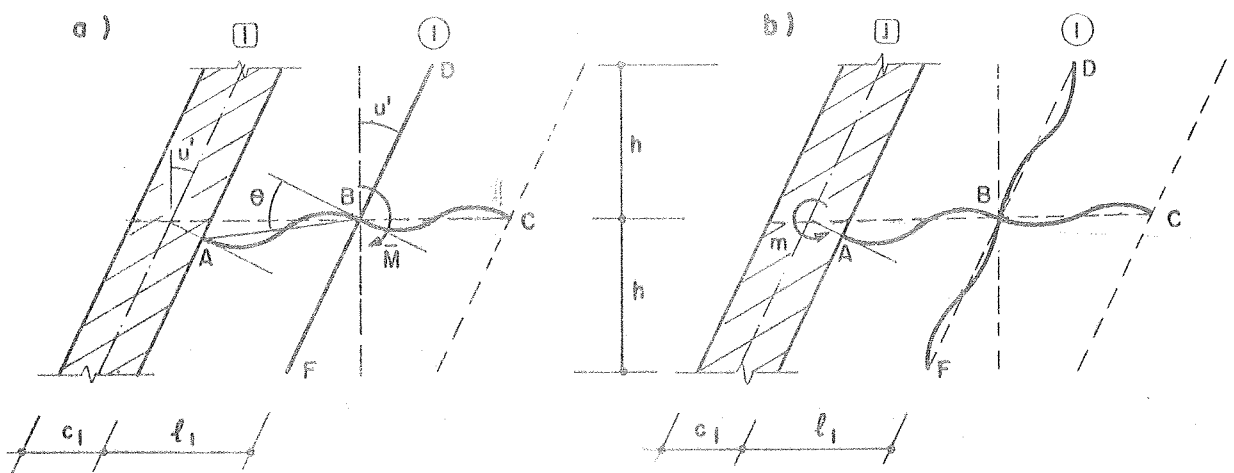


FIG. 1.16 - SEGMENTO DO ANDAR GENÉRICO

Segue-se a mesma técnica desenvolvida no sub-ítem I.1.5 (e também I.1.3). Desta maneira, na situação da figura 1.16-a o momento \bar{M} é calculado da seguinte maneira:

$$\bar{M} = 6Ek_A \theta + 6Ek_C u' \dots\dots\dots(1.60)$$

onde

$$\theta = \left(1 + \frac{c_1}{2L_1} \right) u' \dots\dots\dots(1.61)$$

cujo valor, substituído em (1.60), fornece:

$$\bar{M} = 6E \left[\left(1 + \frac{c_1}{2L_1} \right) k_A + k_C \right] u' \dots\dots\dots(1.62)$$

Ao aplicar o momento $-\bar{M}$ no nó B, e em seguida distribuí-lo proporcionalmente à rigidez de cada barra que concorre neste nó, observe-se que a correta rigidez do traço BC, neste caso, é $6Ek_C$ e não $4Ek_C$ (como na situação da figura 1.12-b), pois os nós B e C, na configuração final, sofrerão, por hipótese, rotações iguais.

O momento fletor na extremidade B da viga AB (figura 1.15-a) é dado pela expressão

$$M_{BA} = 6Ek_A \theta - \frac{k_A}{\sum k} \bar{M} \dots\dots\dots(1.63)$$

enquanto que na extremidade A

$$M_{AB} = 6Ek_A \theta - \frac{1}{2} \frac{k_A}{\sum k} \bar{M} \dots\dots\dots(1.64)$$

$$\text{onde } \sum k = k_A + 1,5k_C + 1,5k_D + 1,5k_F \dots\dots\dots(1.65)$$

Substituindo as equações (1.61) e (1.62) em (1.63) e (1.64) tem-se:

$$M_{BA} = 6Ek_A \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) \left(1 - \frac{k_A}{\sum k} \right) - \frac{k_C}{\sum k} \right] u' \dots\dots(1.66)$$

$$M_{AB} = 6Ek_A \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) \left(1 - \frac{k_A}{2\sum k} \right) - \frac{k_C}{2\sum k} \right] u' \dots(1.67)$$

O equilíbrio à rotação da viga AB é expresso pela equação

$$V_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell_1}$$

que com os valores de M_{AB} e M_{BA} calculados acima, fornece

$$V_A = \frac{6Ek_A}{\ell_1} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) \left(2 - \frac{3k_A}{2\sum k} \right) - \frac{3k_C}{2\sum k} \right] u' \dots(1.68)$$

O momento resultante de M_{AB} mais o momento da força cortante V_A em relação ao centro de gravidade da parede, distribuído segundo o pé-direito do andar, é proporcional à u' . A constante de proporcionalidade, aqui chamada rigidez r , é facilmente calculada a partir das equações (1.67) e (1.68), resultando:

$$r = 6E\bar{k}_A \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) \left(1 + \frac{c_1}{\ell_1} \right) - \left(1 + \frac{3c_1}{2\ell_1} \right) \frac{\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) k_A + k_C}{2\sum k} \right] \dots\dots(1.69)$$

A única diferença entre esta expressão e a deduzida por CARDAN¹³ está no valor de $\sum k$. Naquele trabalho as rigidezes de todas as barras que concorrem em B foram admitidas iguais ($4Ek$) e, desta maneira, $\sum k$ é calculado somando-se simplesmente as relações $k=J/\ell$ destas barras.

CONTRIBUIÇÕES PARA A RIGIDEZ s_g

A rigidez global s_g que caracteriza o "painel p \bar{o} r tico" \bar{e} calculada a partir da contribui \tilde{c} o de cada prumada de pilar. Observe-se a figura 1.17. Nela, est \tilde{a} o desenhadas, isoladamente, as situa \tilde{c} o es deformadas de segmentos de cada prumada de pilar.

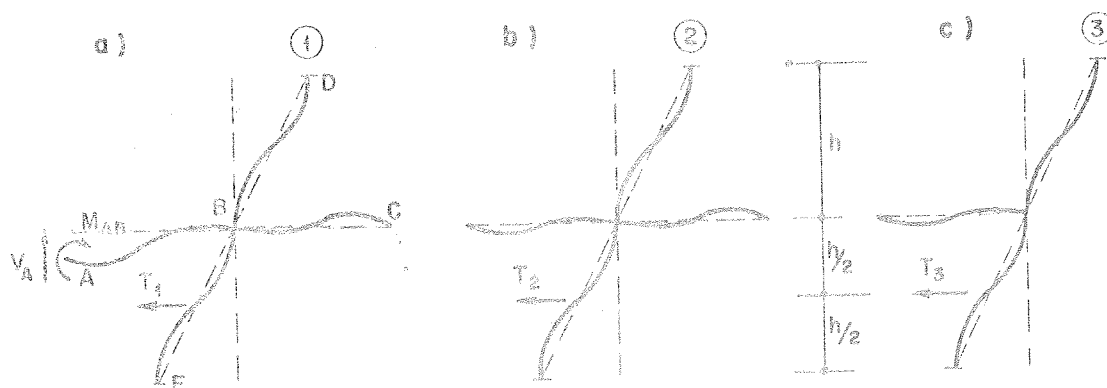


FIG. 1.17 - SEGMENTOS DE PILAR

A for \tilde{c} a cortante T_1 no tramo BF da prumada $\underline{1}$ \bar{e} calculada a partir do momento M_{BF} .

$$T_1 = \frac{2M_{BF}}{h}$$

onde

$$M_{BF} = 1,5 \frac{k_F}{\sum k} \bar{M}$$

e com \bar{M} e $\sum k$ respectivamente dados pelas equa \tilde{c} o es (1.62) e (1.65)

$$T_1 = s_1 u' \dots \dots \dots (1.70)$$

sendo s_1 , rigidez da prumada $\underline{1}$ a for \tilde{c} a cortante, calculada pela express \tilde{a} o:

$$s_1 = \frac{18E}{h} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1} \right) k_A + k_C \right] \frac{k_F}{\sum k} \dots \dots \dots (1.71)$$

É evidente que a prumada 2 (figura 1.17-b) repete a situação esquematizada na figura 1.6-a sendo, portanto, válida a expressão (1.20). A prumada 3 (figura 1.17-c), como já foi dito anteriormente, é um caso particular da figura 1.6-a onde não existe o tramo BC; a ela se aplica a expressão (1.20-c).

Desta maneira, a força cortante Q_f no pórtico, ao nível de determinado andar, é a soma das forças cortantes nos tramos de pilares deste andar

$$Q_f = T_1 + T_2 + T_3 \dots \dots \dots (1.72)$$

ou ainda

$$Q_f = (s_1 + s_2 + s_3)u' \dots \dots \dots (1.73)$$

resultando, finalmente, na conhecida equação característica do comportamento elástico do "painel pórtico"

$$Q_f = s_g u'$$

A parede ligada a uma única prumada de pilar de pórtico, constitui um caso particular da estrutura esquematizada na figura 1.15.

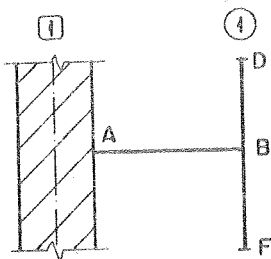


FIG.1.18 - CASO PARTICULAR

Continuam válidas as expressões para r e s_1 , respectivamente equações (1.69) e (1.71), assumindo valor nulo para a rigidez k_c .

Obviamente, a única contribuição para a rigidez global s_f é a da prumada 1 (s_1).

Para pórtico e parede ligados por lintéis, a hipótese que supõe iguais as rotações dos nós da viga de determinado andar foge um pouco à realidade, principalmente para aqueles nós mais próximos da parede. MANCINI¹⁹ obteve

as rigidezes s e r , para parede associada a pórtico formado por duas prumadas de pilares, levando em conta as diferentes rotações dos nós da viga. No item I.2 deste trabalho será desenvolvida uma técnica mais apurada, voltada principalmente para associações do tipo da figura 1.15.

I.1.7 - Associação plana de pórticos com pilares-paredes

Observe-se que os exemplos estudados nos itens anteriores são, de uma maneira geral, passíveis de serem representados pelo seguinte conjunto de equações, característico de uma associação de pórtico com pilares paredes.

$$\left. \begin{aligned} Q_w &= -j_g u'''' + m \\ m &= r_g u' \\ Q_f &= s_g u' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.74)$$

que juntamente com a equação de equilíbrio

$$Q = Q_w + Q_f \dots\dots\dots(1.75)$$

fornece a equação diferencial da associação

$$Q = -j_g u'''' + s_g^* u' \dots\dots\dots(1.76)$$

onde Q é uma função conhecida de z e

$$s_g^* = r_g + s_g \dots\dots\dots(1.77)$$

Em I.1.3 estudou-se a associação de pórtico e parede ligados por barras biarticuladas e os parâmetros que definiam este painel eram j_g e s_g . No sub-item I.1.4 verificou-se que a presença dos lintéis (o mesmo que vigas ad-

jacentes às paredes) introduzia o conceito da rigidez r . Em seguida (I.1.5), observou-se que o painel resultante da associação, através de lintéis, de um pilar entre duas paredes, ficava caracterizado pelas rigidezes j_g , s_g e r_g . Por último, com o exemplo do item I.1.6, mostrou-se que a rigidez s_g era obtida a partir das contribuições das duas prumadas de pilar, e que o conjunto de pilares e vigas adjacentes a parede (desde que ligadas a ela através de lintéis) contribuía tanto para s_g como para r_g .

O caso mais geral de uma associação de pórticos com pilares paredes é o representado na figura 1.19.

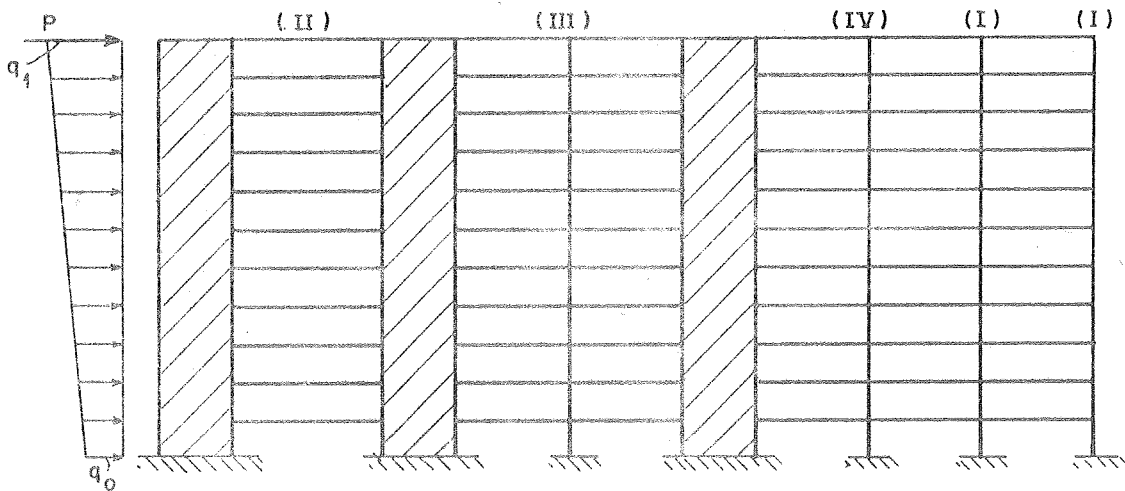


FIG.1.19 - ASSOCIAÇÃO PLANA DE PÓRTICOS COM PILARES - PAREDES

Para maior clareza, repetem-se, ordenada e concisamente, as principais observações feitas até agora. Nota-se, nesta estrutura, a ocorrência de prumadas de pilares onde concorrem vigas (lintéis) ligadas diretamente às paredes: são as do tipo (III) e (IV) da figura 1.19. Em outras, como a do tipo (I), concorrem vigas não conectadas às paredes. Observa-se ainda, o caso particular do conjunto de vigas que ligam paredes adjacentes que, por extensão, será chamado de "prumada" do tipo (II).

Esta associação, pode então ser imaginada como composta de dois tipos de painéis: a) painéis que se deformam ao momento fletor que são as paredes; b) painéis rígi-

dos ao momento fletor e deformáveis apenas à força cortante que simulam, aproximadamente, o comportamento nos pórticos usuais. Contribuem para rigidez s_g dos pórticos à força cortante, as prumadas de pilares do tipo I, III e IV. Os conjuntos de pilares e vigas adjacentes às paredes, além de contribuírem para a rigidez s_g dos pórticos também contribuem para r_g , rigidez às rotações u' impostas às paredes. Pertencem a esta categoria as prumadas do tipo II, III e IV. A participação da prumada tipo II para s_g é nula. Contribuem para a "rigidez" j_g das paredes os produtos EJ de todas as paredes.

As determinações destas constantes de rigidez são feitas para cada prumada de pilar de pórtico e/ou pilar parede (inclusive o caso da "prumada" II); somando-se, depois, as contribuições de cada uma delas para os valores globais de j_g , s_g e r_g (TABELA 1.1).

Tendo em vista as equações (1.14) e (1.76), note-se que qualquer associação de pórticos com pilares paredes caracterizada pelos parâmetros j_g e s_g^* é equivalente à associação de uma parede e um pórtico (com rigidez $s_g = s_g^*$) ligados por barras biarticuladas.

1.1.8 - Solução da equação diferencial - Casos particulares de carregamento

A equação diferencial (1.76) é do tipo:

$$u'''' - k^2 u'' = -f(z) \dots \dots \dots (1.78)$$

onde, de maneira geral, $f(z) = mz^2 + nz + p$.

E o coeficiente (constante) do termo u'' é dado por:

$$k^2 = \frac{s_g^*}{j_g} \dots \dots \dots (1.79)$$

TABELA 1.1 - CONTRIBUIÇÕES PARA s_g e r_g

TIPO	ESQUEMA	s_g	r_g	OBSERVAÇÕES
I		$\frac{12E}{h} \frac{k_A + k_C}{\sum k}$ <p>onde $\sum k = k_A + k_C + k_D + k_F$</p>	não contribui	Quando não existir o tramo AB (ou BC) será válida a mesma expressão fazendo-se $k_A = 0$ (ou $k_C = 0$)
II		não contribui	$6E\bar{k} \left(1 + \frac{c_1 + c_2}{2\ell} \right) \left(1 + \frac{c_1}{\ell}\right)$ <p>para parede da esquerda onde $\bar{k} = \frac{k}{n}$</p>	Para a parede da direita será válida a mesma expressão trocando-se o índice "1" por "2", "A" por "C", e vice-versa.
III		$\frac{18E}{h} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) k_A + \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2}\right) k_C \right] \frac{k_F}{\sum k}$ <p>onde $\sum k = k_A + k_C + 1,5k_D + 1,5k_F$</p>	$6E\bar{k}_A \left\{ \left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) \left(1 - \frac{k_A}{\sum k}\right) - \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2}\right) \frac{k_C}{2\sum k} + \frac{c_1}{2\ell_1} \left[k + \frac{c_1}{2\ell_1} \left(2 - \frac{5k_A}{2\sum k}\right) - \left(1 + \frac{c_2}{2\ell_2}\right) \frac{5k_C}{2\sum k} \right] \right\}$ <p>onde $\sum k = k_A + k_C + 1,5k_D + 1,5k_F$ e $\bar{k}_A = \frac{k_A}{n}$</p>	Válidas para a parede da direita trocando-se o índice "1" por "2", "A" por "C", e vice-versa.
IV		$\frac{18E}{h} \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) k_A + k_C \right] \frac{k_F}{\sum k}$ <p>onde $\sum k = k_A + 1,5k_C + 1,5k_D + 1,5k_F$</p>	$6E\bar{k}_A \left[\left(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}\right) \left(1 + \frac{c_1}{\ell_1}\right) + \frac{3c_1}{(1 + \frac{c_1}{2\ell_1}) k_A + k_C} \frac{1}{2\sum k} \right]$ <p>onde $\sum k = k_A + 1,5k_C + 1,5k_D + 1,5k_F$</p>	Quando não existir o tramo BC, serão válidas as mesmas expressões fazendo-se $k_C = 0$

A solução geral de (1.78) é:

$$u = F(z) + C_1 + C_2 e^{kz} + C_3 e^{-kz} \dots\dots\dots (1.80)$$

Também é solução a expressão:

$$u = F(z) + C_1 + C_2 e^{KZ} + C_3 e^{-KZ} \dots\dots\dots (1.81)$$

definindo

$$Z = \frac{z}{H} \text{ (variável adimensional) } \dots\dots\dots (1.81-a)$$

$$K = kH \text{ (variável adimensional) } \dots\dots\dots (1.81-b)$$

e onde H é a altura total do edifício.

No caso particular em que só existe

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

$$q_0 = q_1 = q$$

$$P = 0$$

$$Q = qH(1-Z)$$

A expressão para o deslocamento horizontal se escreve:

$$u = \frac{qH^4}{j_B K^4} \left[C_1 + C_2 e^{KZ} + C_3 e^{-KZ} + K^2 \left(1 - \frac{Z}{2}\right) Z \right] \dots\dots (1.82)$$

onde as constantes C_1 , C_2 , C_3 são adimensionais, determinadas a partir das seguintes condições de contorno:

Na base ($Z=0$)

a) $u = 0$

b) $u' = 0$, pois a parede é suposta perfeitamente engastada na fundação.

No topo (Z=1)

c) $u''=0$, pois $M_w = 0$

Estas três condições de contorno levam às seguintes equações:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_2 - C_3 + K &= 0 \\ C_2 e^K + C_3 e^{-K} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.83)$$

que resolvidas fornecem os valores de C_i ($i=1,2,3$).

A introdução da seguinte notação simplifica a escrita das expressões

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{e^K + e^{-K}}{2} \\ S &= \frac{e^K - e^{-K}}{2} \\ C - S &= e^{-K} \\ C + S &= e^K \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.84)$$

As constantes C_i se escrevem

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= - \frac{1 + KS}{C} \\ C_2 &= \frac{1 - K(C-S)}{2C} \\ C_3 &= \frac{1 + K(C+S)}{2C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.85)$$

Definindo as seguintes expressões

$$\left. \begin{aligned} C^* &= C_2 e^{KZ} + C_3 e^{-KZ} \\ S^* &= C_2 e^{KZ} - C_3 e^{-KZ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.86)$$

as derivadas feitas em relação à variável z levam a

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC^*}{dz} &= \frac{KS^*}{H} \\ \frac{dS^*}{dz} &= \frac{KC^*}{H} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.87)$$

Desta maneira escrevem-se a função u e suas derivadas em relação a z

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{qH^4}{j_s K^4} \left[C_1 + C^* + K^2 \left(1 - \frac{z}{2} \right) z \right] \\ u' &= \frac{qH^3}{j_s K^3} \left[S^* + (1-z)K \right] \\ u'' &= \frac{qH^2}{j_s K^2} (C^* - 1) \\ u''' &= \frac{qH}{j_s K} S^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.88)$$

No caso particular em que só existe

CARGA CONCENTRADA NO TOPO

$$q_1 = q_0 = 0$$

$$Q = P \dots\dots\dots (1.89)$$

O deslocamento horizontal será:

$$u = \frac{PH^3}{j_s K^3} (C_1 + C_2 e^{KZ} + C_3 e^{-KZ} + KZ) \dots\dots\dots (1.90)$$

As condições de contorno são as mesmas que as do carregamento anterior e permitem calcular as constantes C_i

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{S}{C} \\ C_2 &= -\frac{C-S}{2C} \\ C_3 &= \frac{C+S}{2C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.91)$$

As derivadas da função u serão:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{PH^2}{j_g K^2} (S^* + 1) \\ u'' &= \frac{PH}{j_g K} C^* \\ u''' &= \frac{P}{j_g} S^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.92)$$

No caso particular em que $s\bar{o}$ existe

CARGA LINEARMENTE DISTRIBUIDA

$P = 0$

$q_0 = 0$ e $q_1 \neq 0$

$q = \frac{q_1}{H} z = q_1 z \dots\dots\dots (1.93)$

$Q = \frac{H^2 - z^2}{2H} q_1 = \frac{(1-z^2)}{2} q_1 H \dots\dots\dots (1.94)$

A função u será expressa por

$u = \frac{q_1 H^4}{2j_g K^4} \left[C_1 + C_2 e^{Kz} + C_3 e^{-Kz} + \left(1 - \frac{z^2}{3}\right) K^2 z \right] \dots (1.95)$

Para as mesmas condições de contorno as constantes C_i serão:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{2+KS}{C} \\ C_2 &= \frac{2-K(C-S)}{2C} \\ C_3 &= \frac{2+K(C+S)}{2C} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.96)$$

e as derivadas da função u

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{q_1 H^3}{2j_g K^3} \left[S^n + (1-z^2)K \right] \\ u'' &= \frac{q_1 H^2}{2j_g K^2} (C^n - 2Z) \\ u''' &= \frac{q_1 H}{2j_g K} \left(S^n - \frac{2}{K} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.97)$$

1.1.9 - Retorno à estrutura discreta

Este trabalho estuda um reticulado retangular, plano e regular, de vigas e pilares sujeitos à flexão composta (M,N,Q). Os pilares são chamados pilares paredes, ou simplesmente paredes, quando a dimensão da seção transversal, medida no plano da estrutura, for excessivamente maior que a espessura. As vigas são chamadas lintéis quando forem adjacentes às paredes. As paredes são contínuas, segundo a altura do edifício, enquanto que os lintéis e demais vigas e pilares que constituem o que se convencionou chamar "pórtico" formam conjuntos discretos de barras. A técnica deste capítulo, que permite a análise de estruturas constituídas pela associação de "pórticos" e "paredes", se diz contínua, justamente por substituir, partindo de determinadas hipóteses, os conjuntos discretos (lintéis e pórticos) por meios elásticos contínuos com rigidezes equivalentes.

Desta maneira, os esforços transmitidos passam a ser continuamente distribuídos segundo a altura sendo possível determinar a equação diferencial da estrutura contínua que, resolvida, fornece a função representativa dos deslocamentos horizontais. O conhecimento desta função é suficiente para a determinação daqueles esforços.

Conforme ficou evidenciado no estudo de cada tipo particular de associação, admitiu-se que as rigidezes s_g e r_g dos pórticos e lintéis mantivessem valores constantes, desde que as peças tivessem seção uniforme ao longo da altura. Somente na base e no topo estas rigidezes sofrerão variações mais sensíveis: na base pela proximidade do engastamento rígido; no topo, pela falta dos tramos de pilares acima dos nós do último andar. Por outro lado, como bem afirma STAMATO¹¹ "tais variações locais não deverão afetar, sensivelmente, o desempenho macroscópico do painel". Deste modo as funções contínuas obtidas a partir da função u fornecirão, com razoável aproximação, os esforços na parede (M_w, Q_w) e no pórtico (Q_f). Estes esforços, evidentemente, pela própria concepção da técnica empregada, serão idealizações contínuas de distribuições discretas.

A etapa final a ser cumprida na análise de uma associação plana de pórticos com pilares paredes é a determinação dos esforços solicitantes em cada barra da estrutura discreta partindo, agora, daquelas idealizações contínuas.

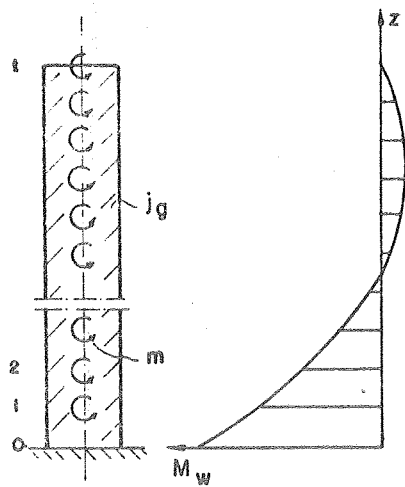
A natureza sintética, característica da técnica contínua, poderia ficar seriamente comprometida, se esta "volta" a estrutura discreta enveredasse por caminhos sofisticados. Refinamentos na determinação dos esforços solicitantes são discutíveis, considerando que o "trajeto de ida" foi determinado a partir de hipóteses que simplificam o complexo comportamento da estrutura discreta.

Seguem-se algumas sugestões para a determinação dos esforços solicitantes na estrutura discreta.

ESFORÇOS NAS PAREDES

O momento fletor na parede equivalente (M_w) é expressa por uma função contínua de z , conforme expressão (1.4). Entretanto as cargas aplicadas às paredes estão concentradas ao nível de cada laje: cargas horizontais transmitidas pelas próprias lajes e momentos flectores provenientes das solicitações nos lintéis, se estes existirem. Desta feita, os diagramas de momentos nas paredes são lineares - desprezando-se as possíveis cargas diretamente aplicadas às paredes pela pressão do vento - e sofrem descontinuidades ao nível de cada laje (figura 1.20).

a) contínuo



b) discreto

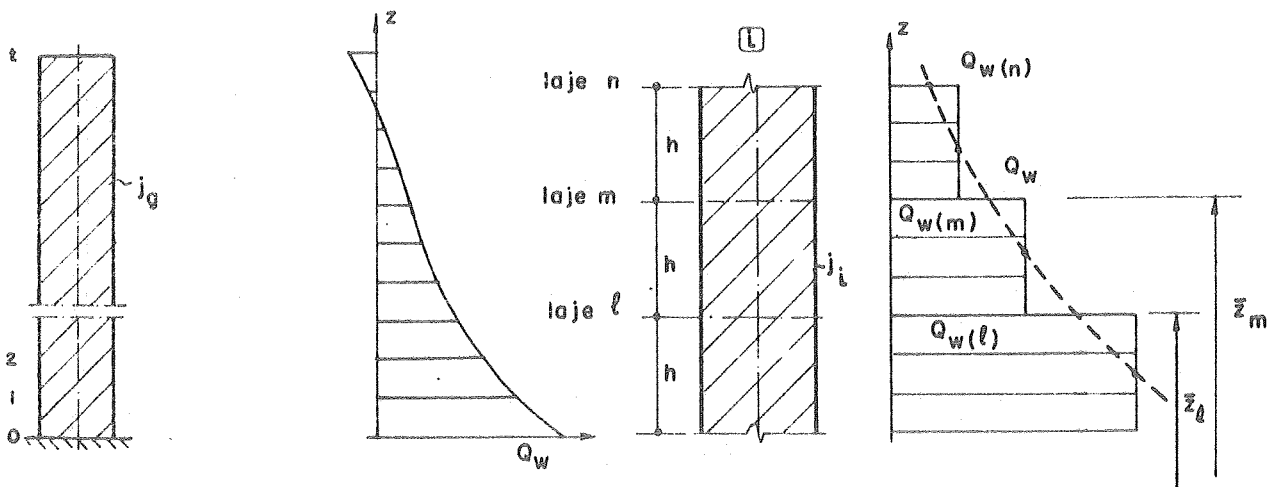
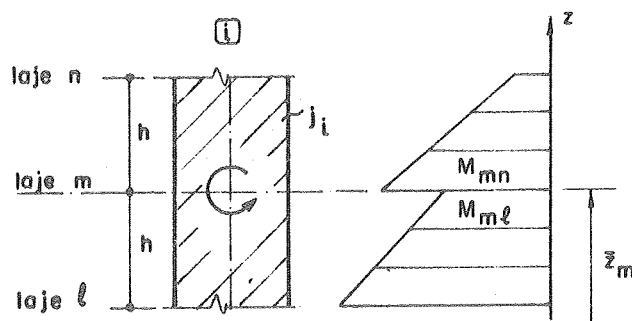


FIG. 1.20 - ESFORÇOS NA PAREDE

Ao nível da laje m ($z=\bar{z}_m$) a parede i , com produto de rigidez j_i , apresenta os seguintes momentos fletores:

$$\left. \begin{aligned} M_{mn} &\approx \frac{j_i}{j_g} M_w(\bar{z}_m) + \frac{r_i}{2r_g} h_m(\bar{z}_m) \\ M_{m\ell} &\approx \frac{j_i}{j_g} M_w(\bar{z}_m) - \frac{r_i}{2r_g} h_m(\bar{z}_m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.90)$$

onde r_i representa a parcela de contribuição para a rigidez global r_g dos lintéis adjacentes a esta parede.

No topo ($z=H$)

$$M_e \approx \frac{r_i}{2r_g} h_m(H) \dots\dots\dots(1.91)$$

Ao nível da primeira laje ($z=\bar{z}_1$), considera-se a rigidez adicional que o engastamento na base proporciona ao tramo inferior do pilar parede.

$$M_{12} \approx \frac{j_i}{j_g} M_w(\bar{z}_1) + 0,4 \frac{r_i}{r_g} h_m(\bar{z}_1) \dots\dots\dots(1.92)$$

$$M_{10} \approx \frac{j_i}{j_g} M_w(\bar{z}_1) - 0,6 \frac{r_i}{r_g} h_m(\bar{z}_1)$$

Uma boa aproximação para a força cortante $Q_{w(m)}$ ao nível do tramo m da parede i , é a média dos valores fornecidos pela função

$$Q_i(z) \approx -j_i u''''(z) + r_i u'(z)$$

quando $z=\bar{z}_m$ e $z=\bar{z}_\ell$. Note-se que nesta etapa $u''''(z)$ e $u'(z)$ são funções conhecidas de z .

Em alguns casos particulares - painéis com uma única parede ou painéis simétricos do tipo apresentado em

1.1.5 - a força cortante na parede pode ser estimada, por equilíbrio das cargas horizontais, conhecendo-se o quinhão da força cortante absorvido pelo pórtico.

A força normal em cada tramo do pilar parede pode ser estimada, partindo do topo para base, pela soma algébrica acumulada das forças cortantes nos lintéis que correm nesta parede, acima do tramo considerado.

ESFORÇOS NOS LINTÉIS

Os momentos e forças cortantes nos lintéis são determinados através das expressões deduzidas por ocasião da determinação das constantes r , conforme as equações (1.27), (1.28-a), (1.50), (1.52), (1.53), (1.66), (1.67), (1.68).

ESFORÇOS NAS BARRAS DO "PÓRTICO"

As forças cortantes nos pilares do pórtico são estimadas, ao nível de cada andar, a partir dos valores parciais de s_g para cada tipo de prumada (Tipos I, II ou III).

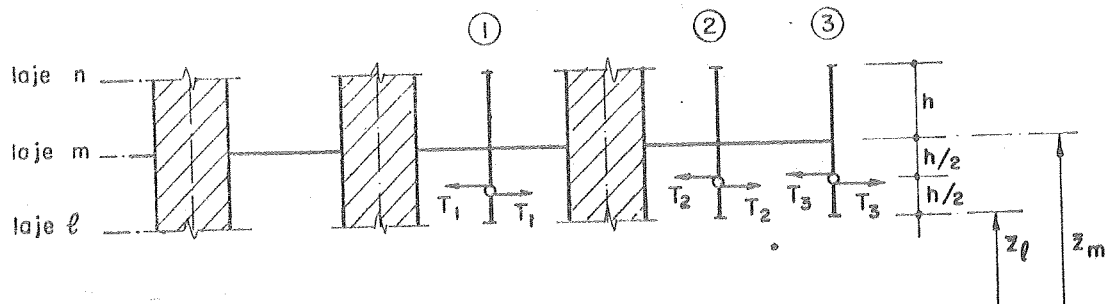


FIG. 4.21 - FORÇAS CORTANTES NOS PILARES DO PÓRTICO

A força cortante total Q_f em todos os tramos de pilares do andar m (imediatamente abaixo da laje m) é calculada por

$$Q_{f(m)} = s_g \frac{u(z_m) - u(z_l)}{h} \dots \dots \dots (1.93)$$

A força cortante no tramo m de cada pilar será dada por

$$T_i = \frac{s_i}{s_g} Q_f(m) \dots\dots\dots(1.94)$$

Para a estimativa dos esforços solicitantes nas barras do pórtico, mantém-se a hipótese de pontos de momentos nulos nos centros das vigas não adjacentes às paredes e nos centros dos tramos de pilares, exceto naqueles do primeiro andar (térreo). Determinam-se, então, por equilíbrio, os momentos fletores, forças cortantes e as forças normais nestas barras (STAMATO²⁰).

Supor pontos de inflexão à meia altura do primeiro andar seria, para efeito de cálculo dos momentos fletores nos pilares, incorrer em erro por demais grosseiro. O engastamento rígido na base altera, sensivelmente, esta situação: os pontos de inflexão nas elásticas dos pilares se deslocam em direção à primeira laje, dependendo das rigidezes J/l dos tramos das barras (e também da largura da eventual parede adjacente) que concorrem no primeiro nó de cada prumada. A hipótese de pontos de momentos nulos à meia altura do primeiro pé-direito só seria real se a viga da primeira laje tivesse rigidez infinita.

Asposições z^* dos pontos de inflexão nas elásticas dos pilares do andar térreo, medidas a partir da base, podem ser estimadas através dos coeficientes $\eta = z^*/h$, característicos de cada tipo de prumada.

Note-se que estes coeficientes η representam, tão somente, uma tentativa de analisar efeitos locais; efeitos estes que não afetam o comportamento global da estrutura.

As rotações ϕ_1 e ϕ_2 das cordas dos pilares; figura 1.22, são conhecidas e valem respectivamente

$$\phi_1 = \frac{u(\bar{z}_1)}{h} \dots\dots\dots(1.95)$$

$$\phi_2 = \frac{u(\bar{z}_2) - u(\bar{z}_1)}{h} \dots\dots\dots(1.96)$$

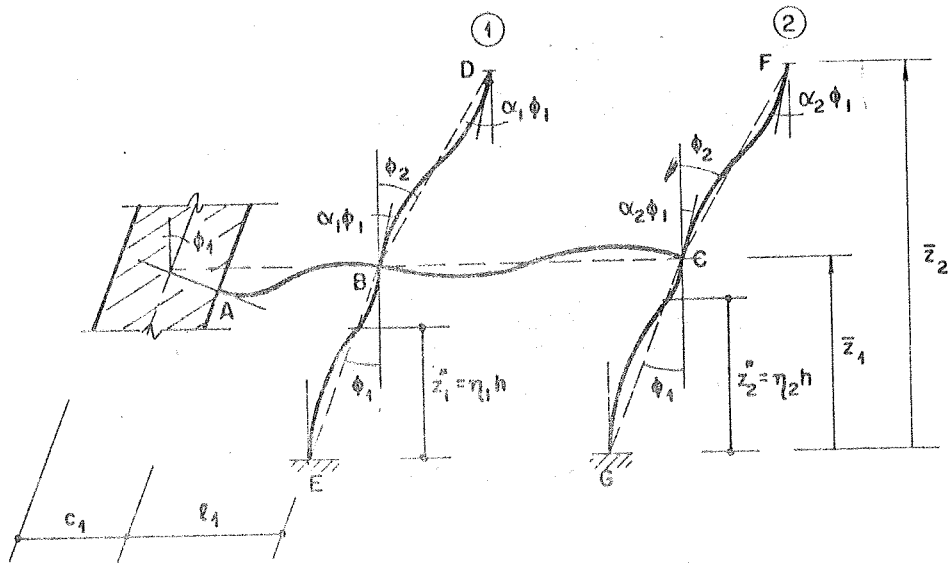


FIG. 1.22 - PERTURBAÇÕES LOCAIS

As rotações dos nós B e D, pertencentes a prumada 1, e dos nós C e F, pertencentes a prumada 2, são admitidas iguais e valem respectivamente $\alpha_1 \phi_2$ e $\alpha_2 \phi_2$. Os nós E e G estão rigidamente engastados, portanto suas rotações são nulas.

Consideram-se positivos os momentos horários que as barras aplicam sobre os nós, desta maneira em B tem-se:

$$M_{BA} = -6Ek_{AB} \frac{c_1}{2l_1} \phi_1 - 2Ek_{AB} \phi_1 - 4Ek_{AB} \alpha_1 \phi_1$$

$$M_{BD} = 6Ek_{BD} \phi_2 - 6Ek_{BD} \alpha_1 \phi_1$$

$$M_{BC} = -4Ek_{BC} \alpha_1 \phi_1 - 2Ek_{BC} \alpha_2 \phi_1$$

$$M_{BE} = 6Ek_{BE} \phi_1 - 4Ek_{BE} \alpha_1 \phi_1$$

O equilíbrio do nó B fornece a seguinte equação

$$K_{11} \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 \dots \dots \dots (1.97)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{3k_{BE} - k_{AB} \left(1 + \frac{3c_1}{2l_1}\right)}{k_{BC}} + \frac{3k_{BD}}{k_{BC}} \frac{\phi_2}{\phi_1} \dots\dots\dots (1.98)$$

e

$$K_{11} = \frac{2(k_{AB} + k_{BC} + k_{BE}) + 3k_{BD}}{k_{BC}} \dots\dots\dots (1.99)$$

De maneira análoga, resulta do equilíbrio do nó C

$$\alpha_1 + K_{22} \alpha_2 = \lambda_2 \dots\dots\dots (1.100)$$

onde

$$\lambda_2 = \frac{3 \left(k_{CG} + k_{CF} \frac{\phi_2}{\phi_1} \right)}{k_{BC}} \dots\dots\dots (1.101)$$

e

$$K_{22} = \frac{2(k_{BC} + k_{CG}) + 3k_{CF}}{k_{BC}} \dots\dots\dots (1.102)$$

As equações (1.97) e (1.100) permitem determinar as incógnitas α_1 e α_2

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1 K_{22} - \lambda_2}{K_{11} K_{22} - 1} \dots\dots\dots (1.103)$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2 K_{11} - \lambda_1}{K_{11} K_{22} - 1} \dots\dots\dots (1.104)$$

Os momentos fletores nas extremidades das barras ficam determinados em função da relação

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{u(\bar{z}_2)}{u(\bar{z}_1)} - 1$$

e o equilíbrio dos tramos de pilar do andar térreo fornece

$$\eta_i = \frac{3 - \alpha_i}{6 - 3\alpha_1} \dots \dots \dots (1.105)$$

onde $i=1$ se o tramo em estudo pertencer a prumada 1 e $i=2$ se pertencer a prumada 2.

Para prumadas do tipo da figura 1.23-a e 1.23-b os valores de α , a serem substituídos na equação (1.105), são respectivamente

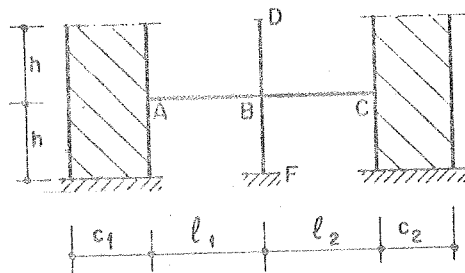


FIG. 1.23 a

$$\alpha = \frac{\left[3k_{BC} - k_{AB} \left(1 + \frac{3c_1}{2l_1} \right) - k_{BC} \left(1 + \frac{3c_2}{2l_2} \right) \right] + 3k_{BD} \frac{\phi_2}{\phi_1}}{2(k_{AB} + k_{BC} + k_{BF}) + 3k_{BD}} \dots \dots (1.106)$$

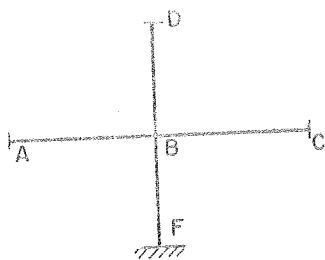


FIG. 1.23 b

$$\alpha = \frac{3k_{BF} + k_{BD} \frac{\phi_2}{\phi_1}}{3(k_{AB} + k_{BC} + k_{BD}) + 2k_{BF}} \quad (1.107)$$

I.1.10 - Exemplo numérico 1

Resolve-se o painel plano da figura (1.24) constituído de 10 andares de pé-direito 3,00m. O pilar parede, os pilares, vigas e lintéis mantêm suas características elasto-geométricas constantes com a altura do edifício. A seção transversal do pilar parede mede 20x250cm, enquanto que as dos pilares do pórtico medem 40x40cm. Tanto os lintéis como as vigas possuem seções transversais de 20x50cm. Admita-se como carregamento externo carga uniformemente distribuída de valor unitário 1 t/m (ou 3 t/andar). Para o módulo de elasticidade transversal de todas as peças adota-se o valor $E=200 \text{ t/cm}^2$.

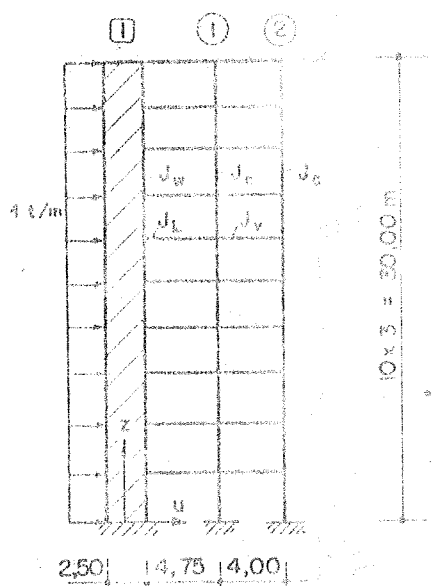


FIG. I.24 - EXEMPLO 1

A seguir, determinam-se os parâmetros j_g e s_g^* que definem a associação.

DETERMINAÇÃO DE j_g

No caso em questão, existe uma única parede, portanto, a contribuição para j_g resume-se apenas a:

$$J_w = \frac{2 \cdot 25^3}{12} = 2604 \text{ dm}^4$$

$$j_g = EJ = 20000 \cdot 2604 = 5208 \cdot 10^4 \text{ tdm}^2$$

No caso de existir mais de uma parede o valor de j_g seria dado pela soma dos produtos de rigidez EJ de cada uma.

DETERMINAÇÃO DE s_g^*

A determinação de s_g^* será feita em duas etapas: encontra-se o valor de r_g devido a presença dos lintéis; obtem-se o valor global de s_g a partir das contribuições das prumadas 1 e 2.

Calculam-se, primeiramente, os valores das rigidezes J/l das diversas barras.

Para os lintéis:

$$J_L = \frac{2 \cdot 5^3}{12} = 20,83 \text{ dm}^4$$

$$k_L = \frac{20,83}{47,5} = 0,438 \text{ dm}^3$$

e a "rigidez distribuída"

$$\bar{k}_L = \frac{k_L}{h} = \frac{0,438}{30} = 0,0146 \text{ dm}^2$$

Para as vigas:

$$J_V = 20,83 \text{ dm}^4$$

$$k_V = \frac{20,83}{40} = 0,521 \text{ dm}^3$$

Para os pilares:

$$J_C = \frac{4 \cdot 4^3}{12} = 21,33 \text{ dm}^4$$

$$k_C = \frac{21,33}{30} = 0,711 \text{ dm}^3$$

A única contribuição para r_g se faz pela "prumada tipo IV", conforme TABELA 1.1.

$$\sum k = 0,438 + 1,5(0,521 + 0,711 + 0,711) = 3,352 \text{ dm}^3$$

$$r_g = 6 \cdot 20000 \cdot 0,0146 \left[\left(1 + \frac{25}{2 \cdot 47,5} \right) \left(1 + \frac{25}{47,5} \right) + \left(1 + \frac{3 \cdot 25}{2 \cdot 47,5} \right) \frac{\left(1 + \frac{25}{2 \cdot 47,5} \right) 0,438 + 0,521}{2 \cdot 3,352} \right]$$

$$r_g = 2875 \text{ t}$$

O valor de s_g é obtido a partir das contribuições

a) prumada 1 (TABELA 1.1 - TIPO IV)

$$s_1 = \frac{18 \cdot 20000}{30} \left[\left(1 + \frac{25}{2 \cdot 47,5} \right) 0,438 + 0,521 \right] \frac{0,711}{3,352}$$

$$s_1 = 2734 \text{ t}$$

b) prumada 2 (TABELA 1.1 - TIPO I)

$$\sum k = 0,521 + 0,711 + 0,711 = 1,943 \text{ dm}^3$$

$$s_2 = \frac{12 \cdot 20000}{30} \cdot \frac{0,711 \cdot 0,521}{1,943}$$

$$s_2 = 1525 \text{ t}$$

Então

$$s_g = s_1 + s_2 = 2734 + 1525$$

$$s_g = 4259 \text{ t}$$

obtendo-se, finalmente s_g^* :

$$s_g^* = r_g + s_g = 2875 + 4259$$

$$s_g^* = 7131 \text{ t}$$

O coeficiente k - equação diferencial (1.78) - vale

$$k = \sqrt{\frac{s_g^*}{J_g}} = \sqrt{\frac{7131}{5208 \cdot 10^4}} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ dm}^{-1}$$

e o adimensional K

$$K = kH = 1,17 \cdot 10^{-2} \cdot 300 = 3,51$$

Os valores auxiliares, relacionados pelas (1.84), são calculados

$$C = \frac{e^{3,51} + e^{-3,51}}{2} = 16,7390$$

$$S = \frac{e^{3,51} - e^{-3,51}}{2} = 16,7092$$

$$C-S = 0,0298$$

$$C+S = 33,4482$$

As constantes C_i ($i=1,2,3$) são calculadas pelas fórmulas (1.85).

$$C_1 = - \frac{1+3,51 \cdot 16,7092}{16,7390} = -3,5634$$

$$C_2 = \frac{1-3,51 \cdot 0,0298}{2 \cdot 16,7390} = 0,02674$$

$$C_3 = \frac{1+3,51 \cdot 33,4482}{2 \cdot 16,7390} = 3,5367$$

que substituídas nas expressões (1.86) fornecem:

$$C^* = 0,02674 \cdot e^{3,51 \cdot Z} + 3,5367 \cdot e^{-3,51 \cdot Z}$$

$$S^* = 0,02674 \cdot e^{3,51 \cdot Z} - 3,5367 \cdot e^{-3,51 \cdot Z}$$

onde $Z = z/H$

A TABELA 1.2 relaciona os valores dos deslocamentos horizontais u , das reações elásticas $h \cdot m$ dos lintéis sobre a parede, dos momentos fletores M_w na parede; todos ao nível de cada laje, a partir das expressões:

$$u = 1,0246 \left[-3,5634 + C^* + 12,3201 \left(1 - \frac{Z}{2} \right) Z \right]$$

$$u' = 0,1199 \cdot 10^{-2} \left[S^* + 3,51(1-Z) \right]$$

$$h \cdot m = 8625 \cdot 10^2 u'$$

$$M_w = 7305,13 (C^* - 1)$$

Relaciona ainda, as parcelas de força cortante Q_p absorvida pelo pórtico e Q_w absorvida pela parede, constantes em cada andar, observando as considerações do sub-item 1.1.9.

Z=z/H	C*	S*	u (cm)	u' (10 ⁻² rad)	hxm (txcm)	M _w (txcm)	Q _f (t)	Q _w (t)
0	3,5634	-3,5100	0	0	0 *	18726	0 *	30,00 *
0,1	2,5277	-2,4517	0,1380	0,0848	731	11160	1,96	26,54
0,2	1,8067	-1,6988	0,4722	0,1329	1147	5893	4,74	20,76
0,3	1,3105	-1,1572	0,9105	0,1558	1344	2268	6,22	16,28
0,4	0,9775	-0,7597	1,3899	0,1614	1392	-164	6,80	12,70
0,5	0,7661	-0,4568	1,8675	0,1556	1342	-1708	6,78	9,72
0,6	0,6501	-0,2108	2,3167	0,1430	1233	-2556	6,38	7,12
0,7	0,6151	0,0089	2,7227	0,1273	1098	-2812	5,76	4,74
0,8	0,6566	0,2299	3,0808	0,1117	963	-2508	5,08	2,42
0,9	0,7798	0,4798	3,3963	0,0995	858	-1608	4,48	0,02
1,0	1,0000	0,7886	3,6851	0,0945	815	0	4,10	-2,60

* Observação: Estes valores não tem significado na estrutura real

TABELA 1.2 - RESULTADOS PARA O EXEMPLO NUMÉRICO

b) Momentos flectores

a) Forças cortantes

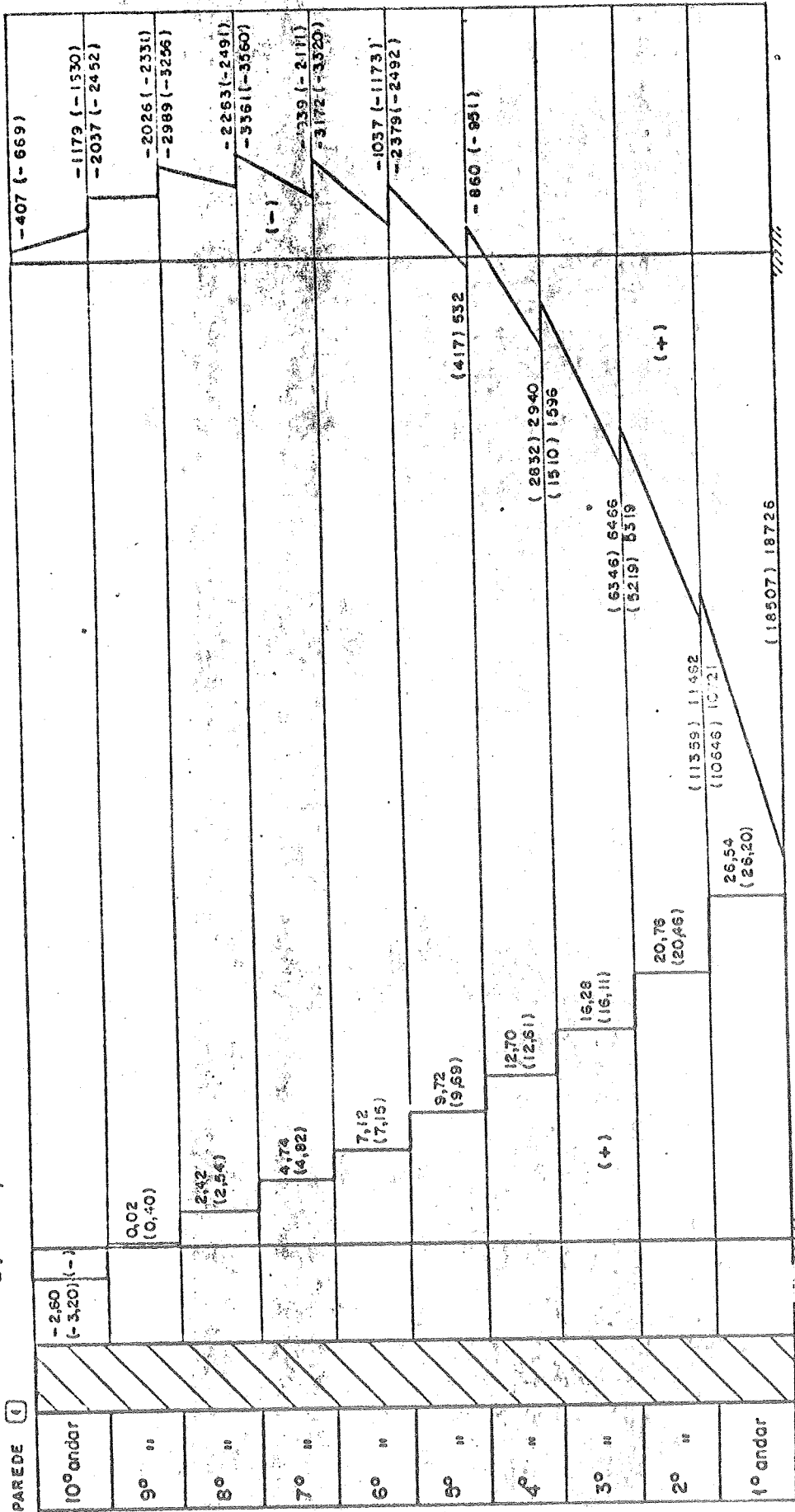


FIG. 1.25 - FORÇAS CORTANTES E MOMENTOS FLECTORES NA PAREDE

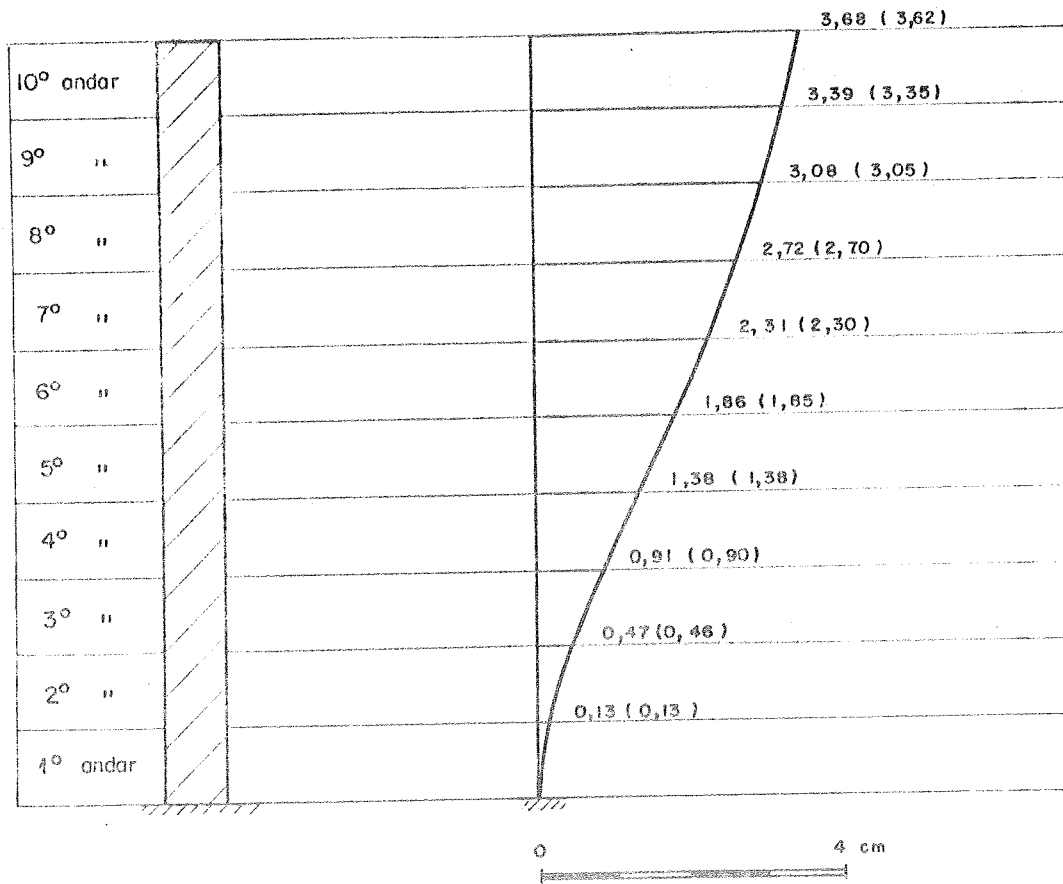


FIG. 1.26 - DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS (cm)

As figuras 1.25 e 1.26 mostram os esforços na parede e os deslocamentos horizontais ao nível de cada laje. Nestas figuras, os números entre parênteses representam os correspondentes resultados obtidos segundo a "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS". Esta técnica será desenvolvida no Capítulo II e, como se verá justifica-se tomá-la - por ser a mais refinada de todas as outras aqui apresentadas - como referência para comparação.

A figura 1.25-a mostra a distribuição de forças cortantes na parede. Ilustra-se, numericamente, como foi obtido o valor deste esforço ao nível do 3º andar. A TABELA 1.2 fornece, para $Z=0,3$ a força cortante total Q_f nos pilares do pórtico pela expressão:

$$Q_f \approx s_g \frac{u(\bar{z}_3) - u(\bar{z}_2)}{h}$$

logo

$$Q_f = 4259 \frac{0,9105 - 0,4722}{300} = 6,22 \text{ t}$$

O equilíbrio horizontal com a força cortante externa (resultante das cargas aplicadas ao nível de cada laje) fornece

$$Q_w = 22,50 - 6,22 = 16,28 \text{ t}$$

O momento fletor no tramo de pilar parede situado ao nível do 3º andar (figura 1.25-b) é calculado a partir da função M_w (TABELA 1.2) acrescentando-se o efeito dos momentos concentrados h.m nas extremidades desta barra:

$$N_{23} = 5893 + 0,5 \cdot 1147 = 6466 \text{ tcm}$$

$$M_{32} = 2268 - 0,5 \cdot 1344 = 1596 \text{ tcm}$$

Observe-se, em ambas as figuras, que os esforços obtidos segundo a "TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA", de maneira geral, praticamente coincidem com aqueles obtidos pela "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS". As distorções se acentuam no topo, justamente onde ocorrem os menores valores e onde a técnica contínua se torna menos adequada. As perturbações locais que aí ocorrem não são levadas em consideração - como já foi observado anteriormente - por esta técnica.

A figura 1.26 se torna interessante na medida em que é analisada juntamente com as figuras 1.1-b e 1.2-b. A figura 1.1-b, justificada pela equação (1.4), mostra que para a parede isolada, submetida ao carregamento indicado, a linha elástica apresenta concavidade voltada para sota-vento. A figura 1.2-b e a equação (1.9-a) permitem afirmar que o pórtico isolado, submetido ao carregamento indicado, apresenta uma linha elástica com concavidade voltada para barlavento. Ora, a figura 1.26 representa a linha e-

lástica de uma associação de pórtico com pilar parede, e nela observa-se que nas proximidades da base a concavidade volta-se para sotavento - comportamento típico da parede - enquanto que na região superior a concavidade volta-se para barlavento - característica típica do pórtico. Este fato explica o aparecimento da elevada força (4,1t) que parede e pórtico trocam no topo do edifício e que está indicada na figura 1.27: a parede, extremamente flexível no topo, fica parcialmente impedida de se deformar pela presença do pórtico cujo comportamento sugere grande rigidez nesta região. Estas observações vêm comprovar o interesse em associar pórticos e paredes numa única estrutura.

Os momentos fletores e forças cortantes nos lindeais - figura 1.27 - foram determinados, ao nível de cada laje, através das equações (1.66), (1.67) e (1.68). Substituindo-se os valores numéricos estas expressões fornecem:

$$M_{AB} = 5796 \cdot 10^2 u'(z)$$

$$M_{BA} = 4954 \cdot 10^2 u'(z)$$

ambos os momentos em tcm, e

$$V_A = V_B = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{475}$$

em t.

As forças cortantes T_1 e T_2 , respectivamente nas prumadas 1 e 2, são calculadas, para cada andar, a partir da força cortante total Q_f :

$$T_1 = \frac{s_1}{s_g} Q_f = \frac{2734}{4259} Q_f$$

$$T_2 = \frac{s_2}{s_g} Q_f = \frac{1525}{4259} Q_f$$

Os momentos fletores nos pilares são calculados mantendo-se a hipótese de pontos de momentos nulos à meia

altura do pé-direito; por equilíbrio dos nós a rotação determinam-se os momentos fletores nas extremidades das vigas e, conseqüentemente, as forças cortantes nestas barras.

Estimam-se as posições dos pontos de momentos nulos, ao nível do primeiro andar, para as prumadas 1 e 2, segundo a equação (1.105) onde:

$$\alpha_1 = 1,34$$

$$\alpha_2 = 1,46$$

de maneira que

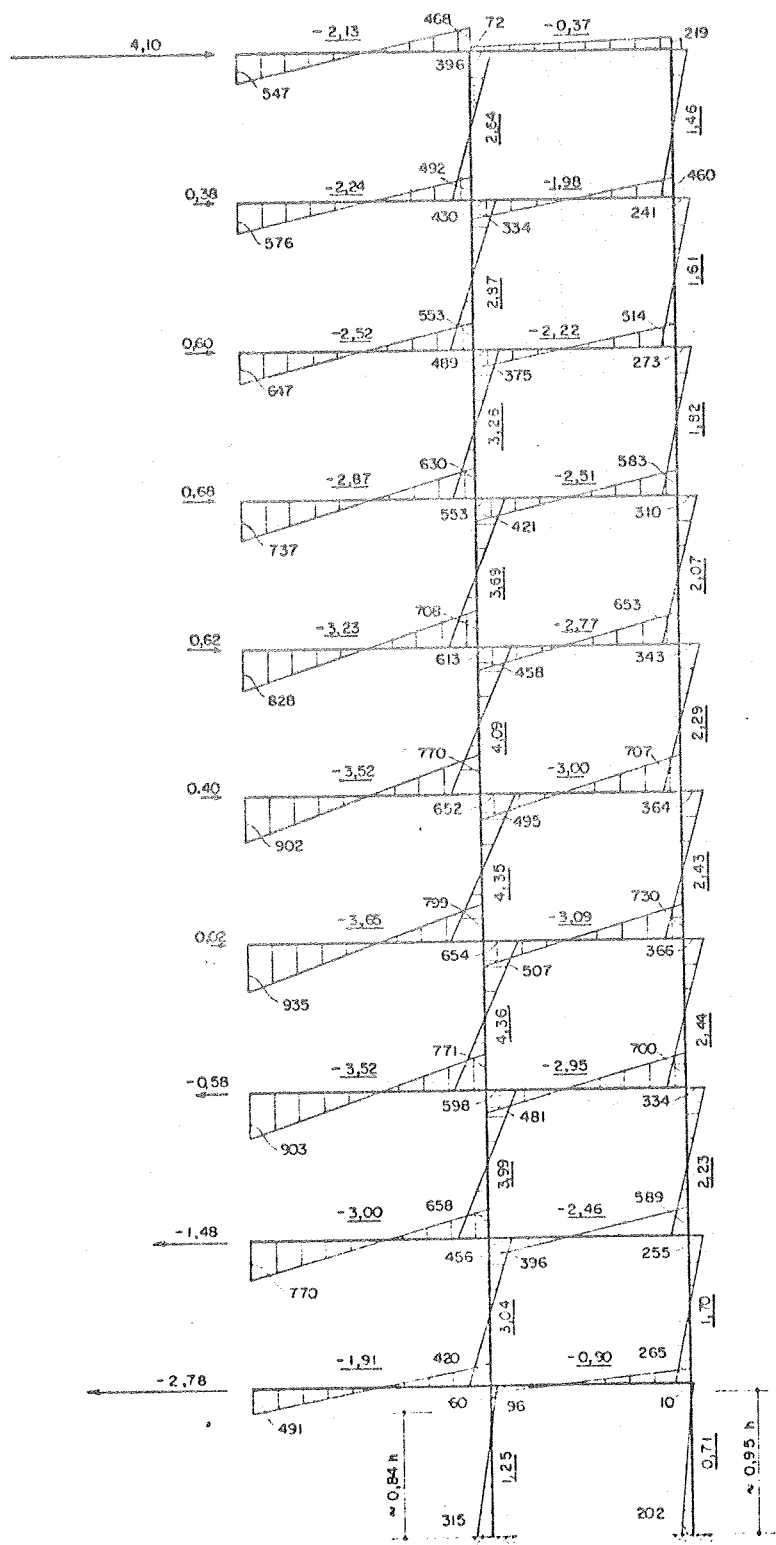
$$\eta_1 = \frac{z_1^*}{h} = 0,84 \quad (\text{para a prumada } \underline{1})$$

e

$$\eta_2 = \frac{z_2^*}{h} = 0,95 \quad (\text{para a prumada } \underline{2})$$

A figura 1.28 mostra os esforços nos tramos de pilares e vigas do pórtico obtidos segundo a "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS". As discrepâncias entre os dois resultados são realmente bastante acentuadas no topo e na base. Entretanto, na região central do edifício - 49 a 69 andar - onde os esforços são maiores, a "TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA" dá uma boa indicação da ordem de grandeza destes valores.

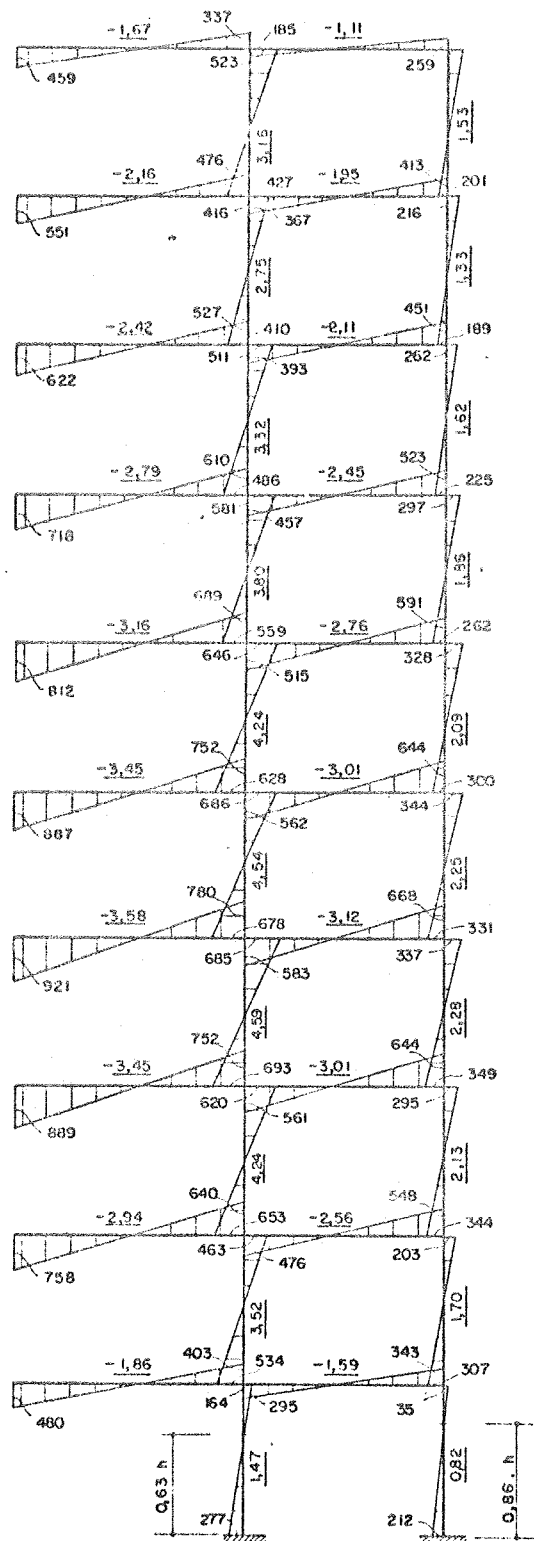
Ressalte-se, oportunamente, que nesta fase do trabalho interessa mostrar, tão somente, que a "TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA" fornece resultados bastante convenientes se comparados com os obtidos pela "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS", respeitando-se, em ambas, as mesmas hipóteses iniciais: indeformabilidade axial de todas as barras e não consideração das deformações por força cortante no pilar parede. Isto não significa dizer que a "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS", a ser apresentada no Capítulo II, estará restrita a estas hipóteses.



Unidades : M (tcm)
Q (t)

Obs. O valor da força cortante em cada barra é identificado pelo número grifado

FIG.1.27 - FORÇAS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES NAS BARRAS DO PÓRICO



Unidades : M (t cm)
Q (t)

FIG. 1.28 - RESULTADOS OBTIDOS PELA TÉCNICA DISCRETA

1.2 - TÉCNICA CONTÍNUA:- UM NOVO ENFOQUE

O leitor - nesta altura já familiarizado com a técnica contínua - pode prescindir da desnecessária repetição de conceitos que já foram suficientemente discutidos quando se tratou da "TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA". Claro que algumas vezes, para que a clareza e lógica da exposição não fiquem prejudicadas, idéias já conhecidas voltarão a ser repisadas. Entretanto o que se pretende, e o próprio título deste item sugere, é indicar um novo e, porque não dizer, fértil procedimento que pode ser adotado na análise contínua de associações planas de pórticos com pilares paredes.

Observe-se a figura 1.29-a: tanto pilar parede como os pilares do pórtico são supostos engastados na base e mantêm suas características elasto-geométricas constantes com a altura. Nesta fase do trabalho não serão consideradas as deformações por força cortante e força normal. Aquelas, realmente são desprezíveis face as deformações por flexão. Não considerar deformações por força normal nas vigas é plenamente justificável, enquanto que nos pilares essas deformações somente são significativas nos pilares do pórtico e em edifícios de grande altura.

Na estrutura da figura 1.29-a as vigas ligadas diretamente à parede (lintéis) podem ser seccionadas, ao longo do eixo Oz, por um plano vertical adjacente ao pórtico. A estrutura original não ficará alterada se, de modo análogo ao do Processo dos Esforços, forem introduzidas as "incógnitas q_f , q_v e q_m ", todas funções contínuas de z. Obtém-se assim, conforme mostra a figura 1.29-b, dois sistemas básicos: um constituído da parede e lintéis (supostos distribuídos continuamente segundo a vertical) e que chamar-se-á sistema "w" (do inglês "wall") ou simplesmente parede; o outro representado pelo pórtico ou sistema "f" (do inglês "frame"). Observe-se que para ficar caracterizado o sistema "f" são necessárias, pelo menos, duas prumadas de pilar.

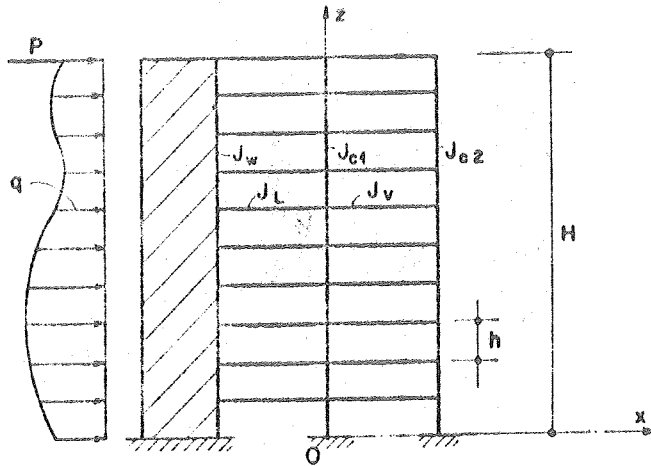


FIG. 1.29a - ASSOCIAÇÃO PLANA DE PÓRTICOS COM PILAR-PAREDE

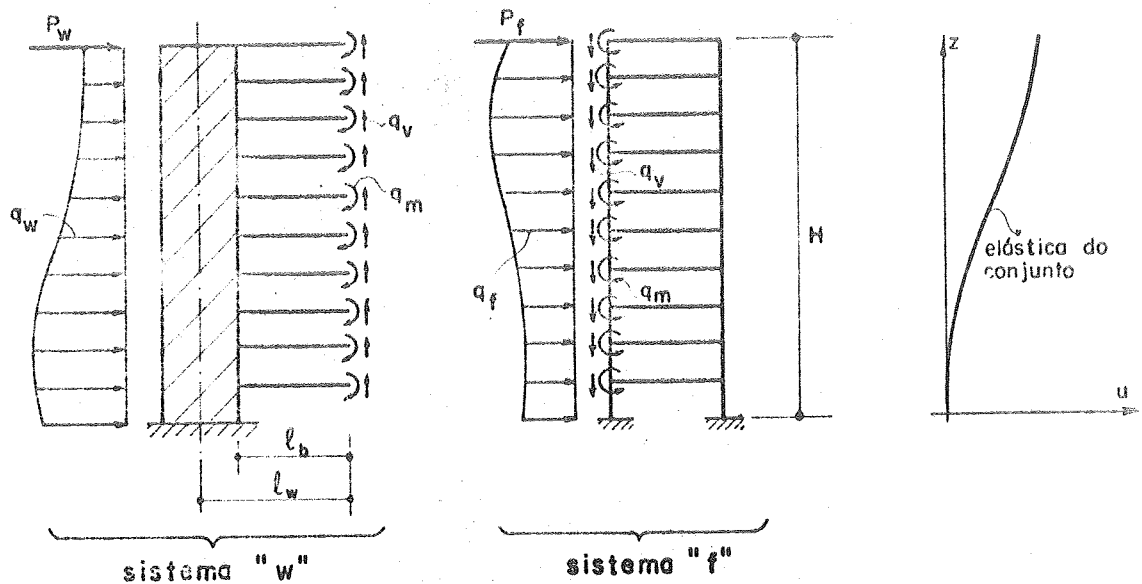


FIG. 1.29 b - SISTEMA "w" (PAREDE) E SISTEMA "f" (PÓRTICO)

O procedimento a ser adotado na determinação das "incôgnitas" q_f , q_v e q_m reside na compatibilidade dos deslocamentos dos pontos seccionados (equações de compatibilidade de deslocamentos).

A notação e sentidos positivos para esforços e deslocamentos são os indicados nas figuras 1.29-b e 1.30. Sempre que possível será respeitada a notação, bem como de mais convenções utilizadas no item I.1.

I.2.1 - O sistema "w" (parede)

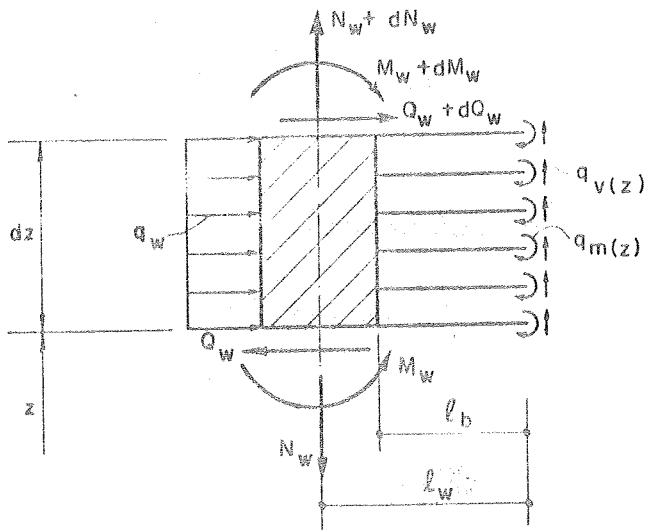


FIG.1.30 - ELEMENTO GENÉRICO DE PAREDE

O equilíbrio de um elemento genérico de parede de altura dz fornece:

$$\frac{dN_w}{dz} = -q_v \dots\dots\dots(1.108)$$

$$\frac{dQ_w}{dz} = -q_w \dots\dots\dots(1.109)$$

$$\frac{dM_w}{dz} = -Q_w - q_m + l_w q_v \dots\dots\dots(1.110)$$

onde l_w representa a distância do ponto de corte ao eixo da parede.

Desprezando-se a deformação por força cortante, a equação da elástica do sistema "w" se escreve:

$$u_w'' = \frac{d^2 u_w}{dz^2} = \frac{M_w}{j_w} \dots\dots\dots(1.111)$$

onde j_w representa o produto de rigidez a flexão $E_w J_w = cte$, com dimensão FL^2 .

Combinando as equações (1.110) e (1.111) obtém-se a expressão da força cortante na parede

$$Q_w = -j_w u_w'''' - q_m + l_w q_v \dots\dots\dots(1.112)$$

1.2.2 - O sistema "f" (pórtico)

O equilíbrio de um elemento genérico de altura da fornaça:

$$\frac{dQ_f}{dz} = -q_f \dots\dots\dots(1.113)$$

O pórtico deformatar-se-á pelo efeito de q_f e q_m apresentando, ao nível de cada cota z , deslocamentos horizontais, respectivamente chamados u_{ff} e u_{fm} , tais que:

$$u_{ff}' = \frac{Q_f}{s_f} \dots\dots\dots(1.114)$$

$$u_{fm}' = -\frac{q_m}{r_f} \dots\dots\dots(1.115)$$

Em primeira hipótese, considerar-se-á o pórtico indeformável devido a q_v , absorvida diretamente pelo pilar suporte infinitamente rígido à força normal.

A configuração final da plástica do sistema "f" será

$$u_f = u_{ff} + u_{fm} \dots\dots\dots(1.116)$$

expressão que derivada em relação a z e combinada com as equações (1.114) e (1.115) fornece a força cortante total absorvida pelo pórtico:

$$Q_f = s_f u_f' + \frac{s_f}{r_f} q_m \dots\dots\dots(1.117)$$

A estimativa das rigidezes s_f e r_f do sistema "f" será apresentada e discutida no item 1.2.3.

1.2.3 - Equações de equilíbrio do conjunto

A força cortante externa Q é, em qualquer nível, equilibrada pelas forças cortantes Q_w na parede e Q_f no pórtico

$$Q = Q_w + Q_f \dots\dots\dots(1.118)$$

Substituindo as equações (1.112) e (1.117) na expressão (1.118), obtém-se

$$Q = -j_w u_w'''' + s_f u_f' - \left(1 - \frac{s_f}{r_f}\right) q_m + l_w q_v \dots\dots\dots(1.119)$$

Decorre também do equilíbrio das cargas internas e externas

$$q = q_w + q_f \dots\dots\dots(1.120)$$

Da hipótese de indeformabilidade axial dos lin-
tões segue que os sistemas "w" e "f", supostos contínuos, apresentam na configuração deformada a mesma linha elástica ($u = u_w = u_f$). A expressão (1.119) pode ser escrita da seguinte forma

$$Q = -j_w u'''' + s_f u' - \left(1 - \frac{s_f}{r_f}\right) q_m + l_w q_v \dots\dots\dots(1.121)$$

Observe-se na equação (1.121) a ocorrência de 3 funções incógnitas, a saber: u , q_v e q_m . Para chegar à solução serão necessárias mais duas equações e que serão fornecidas através da compatibilidade de deslocamentos.

1.2.4 - Equações de compatibilidade

Os pontos à esquerda e à direita da seção de corte deslocam-se "diferentemente" se considerados como pertencentes ao sistema "w" ou ao sistema "f".

O deslocamento vertical (δ_v) da extremidade direita do lintel ocorre por conta da deformação da parede por flexão (δ_{w1}), da deformação por flexão do lintel pela ação de q_v (δ_{w2}) e q_m (δ_{w3}). Não serão consideradas as deformações axiais da parede.

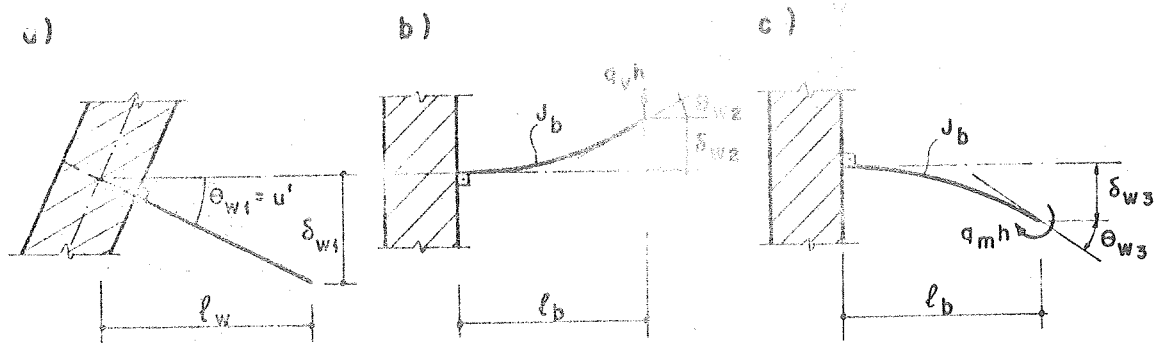


FIG. 1.31 - DESLOCAMENTOS DOS PONTOS DE CORTE NO SISTEMA "w"

Conforme indica a figura 1.31

$$\delta_{w1} = l_w u'$$

e

$$\delta_{w2} = - \frac{h l_b^3}{3 j_b} q_v = - \frac{l_b^2}{3 \bar{j}_b} q_v$$

onde j_b representa o produto de rigidez a flexão do lintel $E_b J_b$ e \bar{j}_b a "rigidez" do lintel suposta distribuída na altura h (constante) do andar.

$$\bar{j}_b = \frac{E_b J_b}{l_b} \frac{1}{h} = \frac{j_b}{h l_b}$$

É imediato que

$$\delta_{w3} = \frac{\ell_b}{2\bar{J}_b} q_m$$

assim, o deslocamento final δ_w escreve-se:

$$\delta_w = \ell_w u' - \frac{\ell_b^2}{3\bar{J}_b} q_v + \frac{\ell_b}{2\bar{J}_b} q_m$$

Os pilares do pórtico são supostos indeformáveis axialmente, portanto o deslocamento vertical δ_f da seção a direita do corte, pertencente ao sistema "f", será nulo. A compatibilidade entre os deslocamentos verticais dos dois sistemas exige que $\delta_w = \delta_f = 0$, portanto

$$\ell_w u' - \frac{\ell_b^2}{3\bar{J}_b} q_v + \frac{\ell_b}{2\bar{J}_b} q_m = 0 \dots\dots\dots(1.122)$$

De modo análogo, há que se considerar a compatibilidade da rotação nos pontos de corte. A seção do lintel pertencente à parede sofre a rotação θ_w expressa, como indica a figura 1.31, da seguinte maneira

$$\theta_w = \theta_{w1} + \theta_{w2} + \theta_{w3}$$

ou

$$\theta_w = u' - \frac{\ell_b}{2\bar{J}_b} q_v + \frac{1}{\bar{J}_b} q_m \dots\dots\dots(1.123)$$

Resta analisar a rotação θ_f dos nós do pórtico, onde concorrem os lintéis, imposta pela ação simultânea de q_f e q_m . Como já foi dito anteriormente, os deslocamentos horizontais do pórtico, ao nível de cada andar, que constituem o que se convencionou chamar elástica u_f do sistema

"f", podem ser interpretados como resultantes dos deslocamentos u_{ff} (devidos a carga q_f) e u_{fm} (provenientes do carregamento q_m). É claro que esta elástica não representa a elástica real das prumadas de pilar. Entretanto, como será mostrado no item 1.2.6, justifica-se admitir que as rotações θ_{ff} (devidas a q_f) e θ_{fm} (devidas a q_m) destes nós sejam respectivamente proporcionais às derivadas primeiras das funções u_{ff} e u_{fm} .

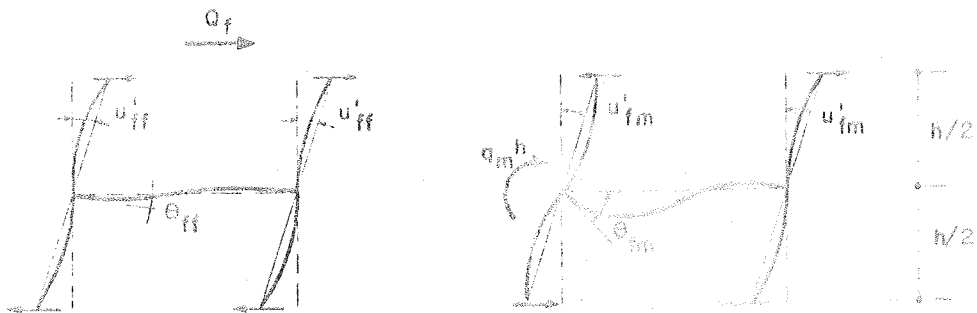


FIG. 1.32 - ROTAÇÕES θ_{ff} e θ_{fm}

Assim

$$\theta_{ff} = \alpha u'_{ff} \dots \dots \dots (1.124)$$

$$\theta_{fm} = \beta u'_{fm} \dots \dots \dots (1.125)$$

Com

$$u'_f = u'_{ff} + u'_{fm}$$

segue que

$$\theta_{ff} = \alpha u'_f - \alpha u'_{fm} \dots \dots \dots (1.126)$$

Substituindo a equação (1.115) em (1.126)

$$\theta_{ff} = \alpha u'_f + \frac{\alpha}{r_f} q_m \dots \dots \dots (1.127)$$

substituindo a equação (1.115) em (1.125)

$$\theta_{fm} = -\frac{\beta}{r_f} q_m \dots\dots\dots(1.128)$$

obtêm-se, finalmente, a rotação $\theta_f = \theta_{ff} + \theta_{fm}$

$$\theta_f = \alpha u'_f - \frac{\beta - \alpha}{r_f} q_m \dots\dots\dots(1.129)$$

Observando que $u = u_f$ e que a compatibilidade de deslocamento exige que a rotação (θ_w) da seção situada na extremidade livre do lintel - no sistema "w" - seja igual a rotação (θ_f) do nó do pórtico, segue que

$$u' - \frac{l_b}{2J_b} q_v + \frac{1}{J_b} q_m = \alpha u' - \frac{\beta - \alpha}{r_f} q_m \dots\dots\dots(1.130)$$

ou ainda

$$(1 - \alpha)u' - \frac{l_b}{2J_b} q_v + \left(\frac{1}{J_b} + \frac{\beta - \alpha}{r_f} \right) q_m = 0 \dots\dots\dots(1.131)$$

As equações (1.131) e (1.122) constituem as duas "equações de compatibilidade" que juntamente com a "equação de equilíbrio" (1.121) possibilitam a solução.

O procedimento adotado sugere alguma semelhança com o Processo dos Esforços, aproximando-se mais, no entanto, do Processo Misto que trabalha com incógnitas esforços e deslocamentos.

Convém notar que subsiste uma relação entre s_f , r_f e α garantida pelo Teorema da Reciprocidade de BETTI: o trabalho da força cortante Q_f nos deslocamentos produzidos pela carga q_m é igual ao trabalho de q_m nos deslocamentos impostos por Q_f . Daí decorre, respeitada a convenção de sinal para esforços e deslocamentos, que:

$$Q_f u'_{fm} = -q_m \theta_{ff} \dots\dots\dots(1.132)$$

Esta equação combinada com as equações (1.114), (1.115) e (1.124) fornece

$$\alpha = \frac{s_f}{r_f} \dots\dots\dots(1.133)$$

A veracidade desta relação será confirmada no item 1.2.6.

1.2.5 - Equação diferencial característica da associação

Repete-se o conjunto de equações diferenciais que resolve o problema

$$\left. \begin{aligned} j_w u'''' - s_f u' - l_w q_v + (1-\alpha)q_m &= -Q \dots\dots\dots(a) \\ l_w u' - \frac{l_b^2}{3j_b} q_v + \frac{l_b}{2j_b} q_m &= 0 \dots\dots\dots(b) \\ (1-\alpha)u' - \frac{l_b}{2j_b} q_v + \left(\frac{1}{j_b} + \frac{\beta-\alpha}{r_f} \right) q_m &= 0 \dots\dots\dots(c) \end{aligned} \right\} (1.134)$$

Da equação (1.134-b) decorre que:

$$u' = \frac{l_b^2}{3l_w j_b} q_v - \frac{l_b}{2l_w j_b} q_m$$

assim como da equação (1.134-c) conclui-se que

$$u' = \frac{l_b}{2(1-\alpha)j_b} q_v - \frac{\frac{1}{j_b} + \frac{\beta-\alpha}{r_f}}{1-\alpha} q_m$$

Igualando as duas expressões e definindo o parâmetro $t=l_b/l_w$, obtêm-se a seguinte equação

$$q_m = \gamma l_w q_v \dots\dots\dots(1.135)$$

onde o adimensional γ tem o seguinte valor

$$\gamma = \left[\frac{t}{2} - (1-\alpha)\frac{t^2}{3} \right] \div \left[1 + (\beta-\alpha)\frac{\bar{J}_b}{r_f} - (1-\alpha)\frac{t}{2} \right] \dots(1.136)$$

Substituindo a equação (1.135) em (1.134-b) obtêm-se

$$q_v = \frac{r_b}{\lambda_w} u' \dots\dots\dots(1.137)$$

onde r_b é uma constante de rigidez (dimensão F) e vale

$$r_b = \frac{6}{2t^2 - 3\gamma t} \bar{J}_b \dots\dots\dots(1.138)$$

Levando as expressões (1.135) e (1.137) em (1.134-a) obtêm-se finalmente

$$u'''' - k^2 u' = - \frac{Q}{J_w} \dots\dots\dots(1.139)$$

com

$$k^2 = \frac{s^*}{J_w} \dots\dots(\text{dimensão } L^{-2}) \dots\dots\dots(1.140)$$

e

$$s^* = s_f + [1 - (1-\alpha)\gamma] r_b \dots\dots(\text{dimensão } F) \dots\dots\dots(1.141)$$

Observe-se as equações (1.139) e (1.78): ambas têm o mesmo aspecto formal, portanto todas as considerações e expressões relacionadas no item 1.1.8 permanecem válidas, sendo totalmente dispensável repeti-las.

Resolvida a equação diferencial (1.139) para determinado caso de carregamento, os esforços finais são determinados:

$$Q_f = s_f^{**} u' \dots\dots\dots(\text{dimensão } F) \dots\dots\dots(a)$$

com

$$s_f^{**} = s_f + \alpha \gamma r_b \dots\dots\dots(b)$$

$$q_m = \gamma r_b u' \dots\dots\dots(c)$$

$$q_v = \frac{r_b}{l_w} u' \dots\dots\dots(d)$$

$$q_f = -s_f^{**} u'' \dots\dots\dots(e)$$

$$Q_w = Q - Q_f \dots\dots\dots(f)$$

$$M_w = j_w u'' \dots\dots\dots(g)$$

} ... (1.142)

A força cortante Q_w na parede pode também ser calculada pela expressão

$$Q_w = -j_w u''' + m \dots\dots\dots(1.143)$$

onde m é uma função contínua de z , representativa das reações elásticas dos lintéis (dimensão F) sobre o eixo da parede (figura 1.33).

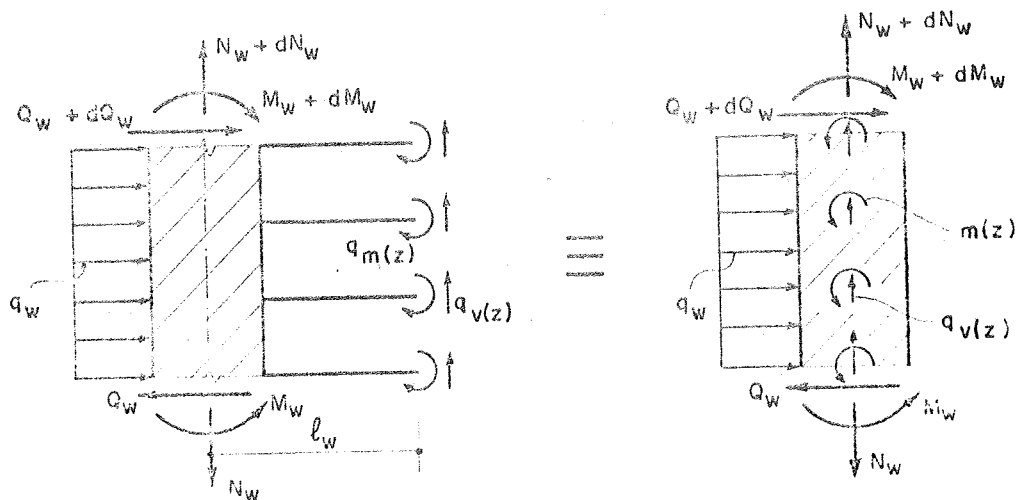


FIG. 1.33 - ESFORÇOS "m" NA PAREDE

É imediato que

$$m = l_w q_v - q_m$$

ou ainda

$$m = r_f^{**} u' \dots\dots\dots(1.144)$$

onde

$$r_f^{**} = (1-\gamma)r_b \dots\dots(\text{dimensão F}) \dots\dots\dots(1.145)$$

As constantes de rigidez s_f^{**} e r_f^{**} têm, respectivamente, o mesmo significado que as constantes s_g e r_g , de finidas no item I.1 - "TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA".

I.2.6 - Determinação das constantes de rigidez (s_f e r_f) e dos parâmetros adimensionais (α, β)

Recordem-se as considerações efetuadas para o pórtico formado por dois pilares iguais e vigas de rigidez infinita (item I.1.2, figura 1.3); s_f é obtida exatamente da mesma maneira. Por outro lado, é fácil concluir que aquela estrutura não se deforma se submetida à ação de momentos concentrados aplicados nos nós de uma das prumadas de pilar. O equilíbrio com as cargas externas é garantido pelo binário produzido pelas forças axiais nos pilares (supostos indeformáveis axialmente). A rigidez r_f , para aquele especial tipo de pórtico, é infinita, e são nulas as constantes α e β apresentadas nas equações (1.124) e (1.125).

Cumpre observar, que em favor de maior simplicidade na notação, omitir-se-á, neste item, o índice "f" (relativo ao sistema "f") quando se fizer referência aos u_{ff} e u_{fm} definidos anteriormente como sendo, respectivamente, deslocamentos horizontais do sistema "f" devidos as cargas horizontais q_f e momentos q_m .

Para o cálculo das constantes de rigidez s_f e r_f adotar-se-á procedimento sugerido por FRANSSON²¹. Introduzir-se-á uma técnica pouco ortodoxa no que diz respeito aos trabalhos que adotam o tratamento contínuo para a análise de estruturas discretas. Entretanto, algumas vantagens, sendo a principal delas a sistematização, justificarão a preferência por tal procedimento.

Segue-se uma formulação matricial e a notação será apresentada na medida em que o texto assim exigir. Admitem-se conhecidos os conceitos básicos do cálculo matricial de estruturas reticulares. Convém esclarecer que, neste capítulo, a técnica matricial deve ser interpretada como "ferramenta" auxiliar e não como peça essencial do desenvolvimento teórico.

DETERMINAÇÃO DE s_f e α

A figura 1.34 mostra um segmento de pórtico obtido pelo seccionamento dos pilares de dois andares vizinhos à meia altura de seus pés-direito - pontos de momentos nulos - e deformados pela ação das cargas horizontais.

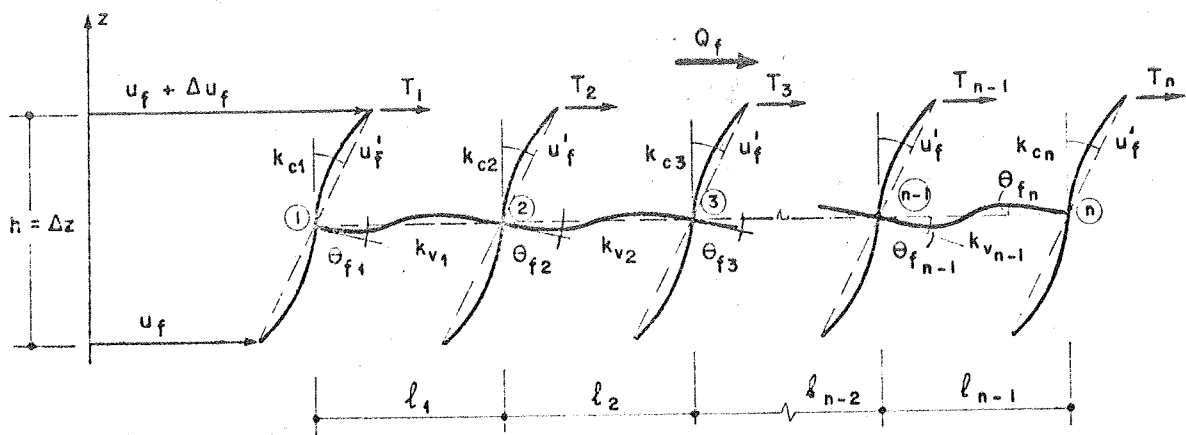


FIG. 1.34 - SEGMENTO DE PÓRTICO (s_f)

Mantém-se a seguinte notação:

E = módulo de elasticidade longitudinal das barras (cte)

$$k_{c_i} = \frac{J_{c_i}}{h}, \text{ rigidez dos tramos de pilares}$$

$$k_{v_i} = \frac{J_{v_i}}{l_i}, \text{ rigidez dos tramos de vigas}$$

onde h = altura do andar (constante). Admitem-se constantes as rigidezes dos tramos de pilares em cada prumada bem como a das vigas, entre duas prumadas.

$$Q_f = \sum_{i=1}^n T_i \dots\dots\dots(1.146)$$

onde n é número de prumadas de pilar e T_i a força cortante em cada tramo.

Os tramos das vigas do segmento de pórtico da figura 1.34 constituem, uma vez desprezados os deslocamentos axiais, tramos de uma viga contínua com n apoios carregada com momentos $M_i = T_i \cdot h$, conforme figura 1.35.

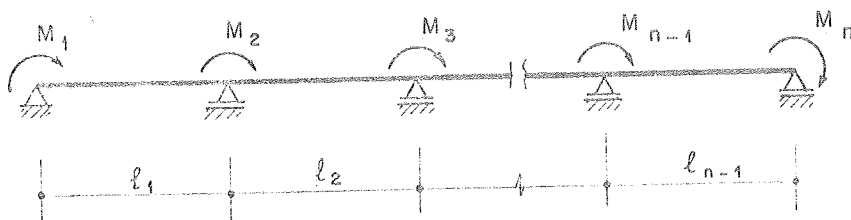


FIG. 1.35 - VIGA CONTÍNUA

A análise desta viga contínua pelo Método dos Deslocamentos leva ao seguinte sistema de equações (equações de equilíbrio) que pode ser expresso, matricialmente, da seguinte forma:

onde [] indica matriz quadrada de ordem nxn e { } matriz coluna.

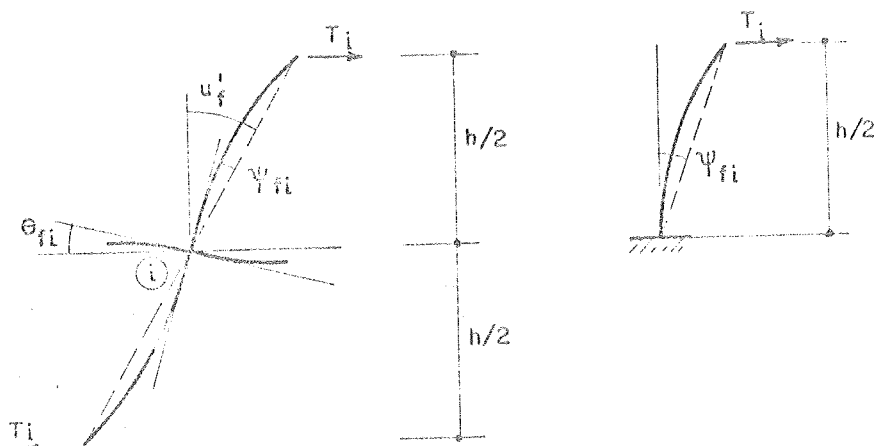


FIG. 4.36 - NÓ GENÉRICO DO PÓRTICO

Como mostra a figura 1.36 a rotação u'_f da corda do pilar é expressa por

$$u'_f = \theta_{fi} + \psi_{fi}$$

com

$$\psi_{fi} = \frac{h^2}{12EJ_{c_i}} T_i = \frac{h}{12Ek_{c_i}} T_i \dots \dots \dots (1.148)$$

As rotações dos nós θ_{fi} são determinadas pela seguinte equação matricial

$$\{ \theta_f \} = \{ 1 \} u'_f - [KC] \{ T \} \frac{h}{12E} \dots \dots \dots (1.149)$$

onde

$$[KC] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{c_1}} & & & & \\ & \frac{1}{k_{c_2}} & & & \\ & & \text{ZEROS} & & \\ & & & \frac{1}{k_{c_{n1}}} & \\ & & & & \frac{1}{k_{c_n}} \end{bmatrix} \dots(1.150)$$

e $\{1\}$ representa uma matriz coluna de ordem $n \times 1$ com todos elementos iguais a unidade.

Substituindo a equação (1.149) em (1.146-a) tem-se

$$\{T\} = \frac{12E}{h} [SF] \{1\} u_f' \dots\dots\dots(1.151)$$

com

$$[SF] = [S]^{-1}[KV] \dots\dots\dots(1.152)$$

e

$$[S] = 6[I] \div [KV] [KC] \dots\dots\dots(1.153)$$

onde $[I]$ representa a "matriz identidade" de ordem $n \times n$.

Lembrando que a equação (1.146) pode ser escrita da seguinte maneira

$$Q_f = \{1\}^t \{T\} \dots\dots\dots(1.154)$$

onde $\{ \}^t$ representa a transposta da matriz coluna.

e substituindo (1.151) em (1.154), obtêm-se

$$Q_f = \frac{12E}{h} \{1\}^T [SF] \{1\} u_f' \dots\dots\dots (1.155)$$

ou ainda

$$Q_f = s_f u_f'$$

com

$$s_f = \frac{12E}{h} \{1\}^T [SF] \{1\} \dots\dots\dots (1.156)$$

A equação (1.156) dá o valor da constante s_f de rigidez à força cortante, considerando o caso geral de um pórtico com n prumadas de pilar.

As rotações dos nós $\{\theta_f\}$ são calculadas combinando-se as equações (1.146-a) e (1.149)

$$\{\theta_f\} = 6[\bar{S}]^{-1} \{1\} u_f' \dots\dots\dots (1.157)$$

com

$$[\bar{S}] = 6\{I\} + [KC] [KV] \dots\dots\dots (1.158)$$

Interessa determinar a rotação θ_{f_1} (ou θ_{f_n}) do primeiro (ou último) nó da viga contínua, onde concorre o lintel. Portanto, de acordo com a equação (1.124)

$$\theta_{f_1} = \alpha u_f'$$

de maneira que

$$\alpha = 6\{N\}^T [\bar{S}]^{-1} \{1\} \dots\dots\dots (1.159)$$

onde $\{N\}$ é uma matriz coluna de ordem $n \times 1$ que, tratando-se da rotação θ_{f1} , tem o seguinte valor

$$\{N\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1.160)$$

Observando as equações (1.153) e (1.158) pode-se concluir que

$$[\bar{S}] = [S]^T \dots \dots \dots (1.161)$$

Para exemplificar, calcula-se o valor de s_f e α para caso particular de um pórtico composto de dois pilares com rigidezes diferentes (figura 1.37).

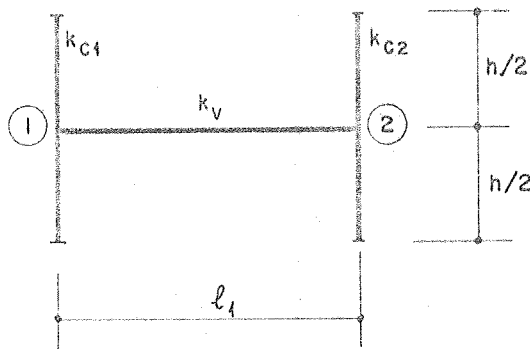


FIG. 1.37 - PÓRTICO SIMPLES

As matrizes $[KV]$ e $[KC]$ são respectivamente

$$[KV] = k_v \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad [KC] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{c1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_{c2}} \end{bmatrix}$$

A expressão (1.153) se escreve

$$[S] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + k_v \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{c1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_{c2}} \end{bmatrix}$$

Efetuando-se as operações matriciais

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{6k_{c1} + 2k_v}{k_{c1}} & \frac{k_v}{k_{c2}} \\ \frac{k_v}{k_{c1}} & \frac{6k_{c2} + 2k_v}{k_{c2}} \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz $[S]$ é facilmente obtida

$$[S]^{-1} = \frac{k_{c1} k_{c2}}{3k_v^2 + 12(k_{c1} + k_{c2})k_v + 36k_{c1}k_{c2}} \begin{bmatrix} \frac{6k_{c2} + 2k_v}{k_{c2}} & -\frac{k_v}{k_{c2}} \\ -\frac{k_v}{k_{c1}} & \frac{6k_{c1} + 2k_v}{k_{c1}} \end{bmatrix}$$

De acordo com a equação (1.152)

$$[SF] = \frac{k_{c1} k_{c2}}{3k_v^2 + 12(k_{c1} + k_{c2})k_v + 36k_{c1}k_{c2}} \begin{bmatrix} \frac{6k_{c2} + 2k_v}{k_{c2}} & -\frac{k_v}{k_{c2}} \\ -\frac{k_v}{k_{c1}} & \frac{6k_{c1} + 2k_v}{k_{c1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} k_v$$

portanto

$$[SF] = \frac{k_v k_{c1} k_{c2}}{k_v^2 + 4(k_{c1} + k_{c2})k_v + 12k_{c1}k_{c2}} \begin{bmatrix} \frac{4k_{c2} + k_v}{k_{c2}} & 2 \\ 2 & \frac{4k_{c1} + k_v}{k_{c1}} \end{bmatrix}$$

A equação (1.156) que define s_f escreve-se

$$s_f = \frac{12E}{h} [1 \quad 1] [SF] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que desenvolvida fornece

$$s_f = \frac{12E}{h} k_v \frac{(k_{c1} + k_{c2})k_v + 12k_{c1}k_{c2}}{k_v^2 + 4(k_{c1} + k_{c2})k_v + 12k_{c1}k_{c2}} \dots (\text{dimensão F}) \quad (1.162)$$

O valor de α é obtido partindo-se de

$$[\bar{S}] = [S]^t = \begin{bmatrix} \frac{6k_{c1} + k_v}{k_{c1}} & \frac{k_v}{k_{c1}} \\ \frac{k_v}{k_{c2}} & \frac{6k_{c2} + 2k_v}{k_{c2}} \end{bmatrix}$$

e de sua inversa

$$[S]^{-1} = \frac{k_{c_1} k_{c_2}}{3k_v^2 + 12(k_{c_1} + k_{c_2})k_v + 36k_{c_1} k_{c_2}} \begin{bmatrix} \frac{6k_{c_2} + 2k_v}{k_{c_2}} & -\frac{k_v}{k_{c_1}} \\ -\frac{k_v}{k_{c_2}} & \frac{6k_{c_1} + 2k_v}{k_{c_2}} \end{bmatrix}$$

que substituída na equação (1.158) fornece

$$\begin{bmatrix} \theta_{f_1} \\ \theta_{f_2} \end{bmatrix} = \frac{2k_{c_1} k_{c_2}}{k_v^2 + 4(k_{c_1} + k_{c_2})k_v + 12k_{c_1} k_{c_2}} \begin{bmatrix} \frac{6k_{c_2} + 2k_v}{k_{c_2}} & -\frac{k_v}{k_{c_1}} \\ -\frac{k_v}{k_{c_2}} & \frac{6k_{c_1} + 2k_v}{k_{c_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u'_f$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \theta_{f_1} \\ \theta_{f_2} \end{bmatrix} = \frac{2k_{c_1} k_{c_2}}{k_v^2 + 4(k_{c_1} + k_{c_2})k_v + 12k_{c_1} k_{c_2}} \begin{bmatrix} \frac{(2k_{c_1} - k_{c_2})k_v + 6k_{c_1} k_{c_2}}{k_{c_1} k_{c_2}} \\ \frac{k_v + 6k_{c_1}}{k_{c_2}} \end{bmatrix} u'_f$$

Finalmente, o valor de $\alpha = \theta_{f_1} / u'_f$ se escreve

$$\alpha = 2 \frac{(2k_{c_1} - k_{c_2})k_v + 6k_{c_1} k_{c_2}}{k_v^2 + 4(k_{c_1} + k_{c_2})k_v + 12k_{c_1} k_{c_2}} \dots \dots \dots (1.163)$$

Observe-se o seguinte: a rigidez s_f tem o mesmo significado da rigidez s_g discutida no item 1.1.3. Naquela ocasião todas as deduções foram feitas admitindo-se que os nós da viga de determinado andar tivessem a mesma rotação, o que justificava a expressão (1.23). Entretanto, a expressão (1.23) somente substituí a (1.156) quando se trata de pórticos ditos "proporcionais". A denominação "pórtico pro

porcional" indica que as rigidezes J/ℓ dos tramos de vigas e pilares guardam as relações mostradas na figura 1.38, on

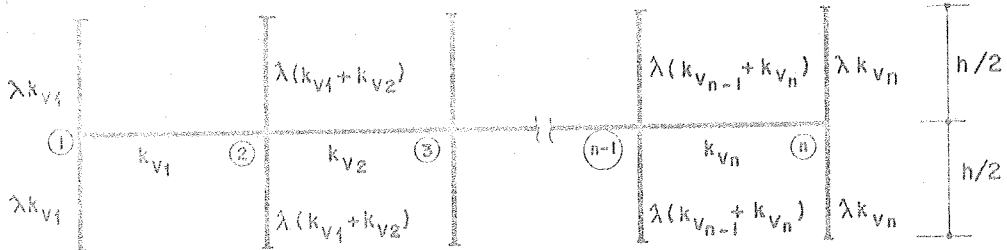


FIG. 1.38 - PÓRTICO PROPORCIONAL

de λ é uma constante arbitrária.

Demonstrar que os nós 1, 2, ..., n têm rotações iguais quando pórticos proporcionais estão carregados com cargas horizontais aplicadas ao nível de cada laje é bastante simples: basta manipular, adequadamente, as equações (1.146-a) e (1.149). Chamando a rotação dos nós de θ_f^* ($\theta_{f1}^* = \theta_{f2}^* = \dots = \theta_{fn}^* = \theta_f^*$) segue que

$$[\bar{S}] \{1\} = \frac{6u_f'}{\theta_f^*} \{1\} \dots \dots \dots (1.164)$$

Desenvolvendo a expressão matricial (1.164) obtêm-se um conjunto de n equações, a saber:

$$\begin{aligned} 2k_{c1} + k_{v1} &= 2 \frac{u_f'}{\theta_f^*} k_{c1} \\ k_{v1} + k_{v2} + 2k_{c2} &= 2 \frac{u_f'}{\theta_f^*} k_{c2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$k_{v_{n-2}} + k_{v_{n-1}} + 2k_{c_{n-1}} = 2 \frac{u'_f}{\theta_f^*} k_{c_{n-1}}$$

$$k_{v_{n-1}} + 2k_{c_{n-1}} = 2 \frac{u'_f}{\theta_f^*} k_{c_n}$$

Explicitando os valores dos k_{c_i} ($i=1, \dots, n$) nas equações acima, obtêm-se as seguintes relações:

$$k_{c_1} = \lambda k_{v_1}$$

$$k_{c_2} = \lambda (k_{v_1} + k_{v_2})$$

·
·
·

$$k_{c_{n-1}} = \lambda (k_{v_{n-2}} + k_{v_{n-1}})$$

$$k_{c_n} = \lambda k_{v_n}$$

com.

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{u'_f}{\theta_f^*} - 1 \right)$$

DETERMINAÇÃO DE r_f e β

Observe-se o segmento de pórtico da figura 1.39, deformado pela ação do momento $q_m h$

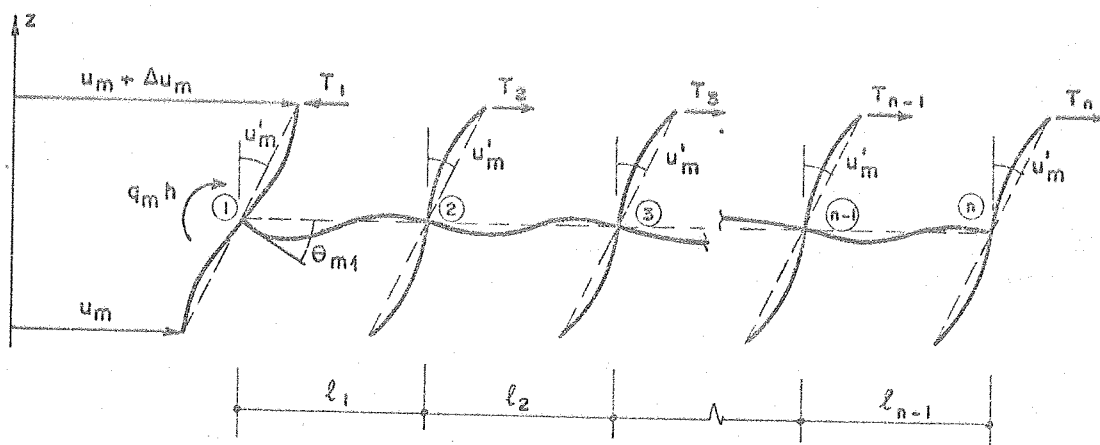


FIG. 1.39 - SEGMENTO DE PÓRTICO (r_f)

Do equilíbrio de forças horizontais conclui-se que

$$\sum T_i = 0$$

ou ainda

$$\{1\}^t \{T\} = 0 \dots\dots\dots (1.164-a)$$

As equações de equilíbrio para a viga contínua obtida a partir do segmento de pórtico são escritas matricialmente sob a forma

$$\{T\} + \{M\} = \frac{2E}{h} [KV] \{\theta_m\} \dots\dots\dots (1.165)$$

onde

$$\{M\} = \{N\} q_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} q_m \dots\dots\dots (1.166)$$

quando o lintel concorre no n^o 1.

As rotações $\{\theta_m\}$ são expressas pela equação

$$\{\theta_m\} = \{1\} u'_m - [KC] \{T\} \frac{h}{12E} \dots\dots\dots(1.167)$$

que combinada com a equação (1.165) fornece

$$\{T\} = \{1\}^{-1} \left(-\frac{12E}{h} [KV] \{1\} u'_m - 6\{N\} \right) \dots\dots\dots(1.168)$$

Pré-multiplicando a equação (1.168) por $\{1\}^t$ e observando (1.164-a) tem-se

$$\frac{12E}{h} \{1\}^t [S]^{-1} [KV] \{1\} u'_m = 6\{1\}^t [S]^{-1} \{N\} q_m$$

ou ainda, identificando o primeiro membro com a equação (1.156),

$$s_f u'_m = 6\{1\}^t [S]^{-1} \{N\} q_m$$

Note-se que segundo a equação (1.159)

$$\alpha = 6\{N\}^T [S]^{-1} \{1\} = 6\{1\}^t [S]^{-1} \{N\}$$

então

$$s_f u'_m = \alpha q_m$$

Da definição de r_f (equação 1.115) segue que

$$r_f = \frac{s_f}{\alpha} \dots\dots\dots \text{(dimensão F)} \dots\dots\dots(1.169)$$

Confirma-se assim, através de um desenvolvimento matricial, a veracidade da expressão (1.133) justificada no item I.2.4 pelo Teorema da Reciprocidade de BETTI.

Para o cálculo do adimensional β definido pela equação (1.125), procede-se da seguinte maneira:

Da equação (1.165)

$$\{T\} = \frac{2E}{h} [KV] \{O_m\} - \{M\} \dots \dots \dots (1.170)$$

que substituída na equação (1.167) fornece

$$\{O_m\} = [S]^{-1} \left(6\{1\} u'_m + \frac{h}{2E} [KC] \{M\} \right) \dots \dots \dots (1.171)$$

Combinando (1.115) com (1.166)

$$\{M\} = \{N\} r_f u'_m \dots \dots \dots (1.172)$$

e levando o resultado na equação (1.171) tem-se

$$\{O_m\} = [S]^{-1} \left(6\{1\} + \frac{h}{2E} [KC] \{N\} r_f \right) u'_m \dots \dots \dots (1.173)$$

A equação matricial (1.173) determina as rotações θ_{m_i} ($i=1,2,\dots,n$) de todos os nós da viga em função da rotação da corda u'_m .

A rotação do nó 1 se escreve

$$\theta_{m_1} = \{N\}^t [S]^{-1} \left(6\{1\} + \frac{h}{2E} [KC] \{N\} r_f \right) u'_m$$

ou ainda

$$\theta_{m_1} = \left(\alpha + \frac{h}{2E} \{N\}^t [S]^{-1} [KC] \{N\} r_f \right) u'_m$$

Finalmente

$$\beta = \alpha + \frac{h}{2E} \{N\}^t [S]^{-1} [KC] \{N\} r_f \dots \dots \dots (1.174)$$

Para o caso particular de pórticos com duas prumadas de pulares com rigidezes diferentes (figura 1.37), ob

têm-se:

$$= \frac{(k_{c_1} + k_{c_2})k_v + 3k_{c_1}k_{c_2}}{(2k_{c_1} - k_{c_2})k_v + 6k_{c_1}k_{c_2}} \dots\dots\dots(1.175)$$

e

$$r_f = \frac{6E}{h} k_v \frac{(k_{c_1} + k_{c_2})k_v + 12k_{c_1}k_{c_2}}{(2k_{c_1} - k_{c_2})k_v + 6k_{c_1}k_{c_2}} \dots\dots\dots(1.176)$$

1.2.7 - Exemplo numérico 1

Resolve-se a estrutura da figura 1.24 - item I.1.
 1.10. Devido a simetria do pórtico a expressão (1.162) se simplifica para

$$s_f = \frac{12E}{h} \frac{2k_c k_v}{2k_c + k_v} = \frac{12 \cdot 20000}{30} \cdot \frac{2 \cdot 0,711 \cdot 0,521}{2 \cdot 0,711 + 0,521}$$

ou

$$s_f = 3050 \text{ t}$$

As rotações dos nós (devidas a Q_f), em determinado lugar, são iguais e se relacionam com a rotação da corda do pilar (u') através da constante $\alpha = \theta_f / u'_f$ conforme a equação (1.163) que fornece

$$\alpha = \frac{2k_c}{k_v + 2k_c} = \frac{2 \cdot 0,711}{0,521 + 2 \cdot 0,711} = 0,732$$

A constante de rigidez r_f vale

$$r_f = \frac{s_f}{\alpha} = \frac{3050}{0,732} = 4167 \text{ t}$$

As rotações de θ_{m_1} e θ_{m_2} - figura 1.40 - devidas a Q_f são diferentes:

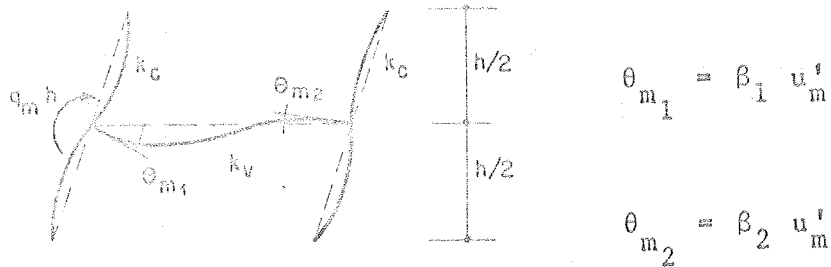


FIG. 1.40

A equação (1.173) fornece para o caso particular de pórticos simétricos com duas prumadas de pilar os seguintes valores:

$$\beta_1 = \frac{2k_v + 3k_c}{k_v + 6k_c} = 2 \frac{2 \cdot 0,521 + 3 \cdot 0,711}{0,521 + 6 \cdot 0,711} = 1,326$$

$$\beta_2 = 2 \frac{3k_c - k_v}{k_v + 6k_c} = 2 \frac{3 \cdot 0,711 - 0,521}{0,521 + 6 \cdot 0,711} = 0,674$$

observando $\beta_1 + \beta_2 = 2$ da condição de equilíbrio das forças cortantes nas prumadas 1 e 2.

O valor do parâmetro t será

$$t = \frac{\ell_b}{L_w} = \frac{475}{600} = 0,792$$

e da "rigidez distribuída" \bar{J}_b

$$\bar{J}_b = \frac{E_b J_b}{h L_b} = \frac{20000 \cdot 20,83}{4 \cdot 30 \cdot 475} = 292,3 \text{ t}$$

portanto, o adimensional γ , calculado segundo a equação (1.136) vale

$$\gamma = \frac{\frac{0,792}{2} - (1-0,732) \frac{0,792^2}{3}}{1 + (1,326 - 0,732) \frac{292,3}{4167} - (1-0,732) \frac{0,792}{2}}$$

$$\gamma = 0,363$$

Finalmente

$$r_b = \frac{6}{2t^2 - 3\gamma t} \bar{J}_b = \frac{6}{2 \cdot 0,792^2 - 3 \cdot 0,363 \cdot 0,792} \cdot 292,3 = 4473 \text{ t}$$

$$s^* = s_f + [1 - (1 - \gamma)] r_b = 3050 + [1 - (1 - 0,732) 0,363] 4473$$

$$s^* = 7088 \text{ t}$$

Calculam-se ainda

$$s_f^{***} = s_f + \alpha \gamma r_b = 3050 + 0,732 \cdot 0,363 \cdot 4473$$

$$s_f^{***} = 4238 \text{ t (enquanto que } s_g = 4259 \text{ t)}$$

$$r_f^{***} = (1 - \gamma) r_b = (1 - 0,363) 4473$$

$$r_f^{***} = 2849 \text{ t (enquanto que } r_g = 2875 \text{ t)}$$

O coeficiente da equação diferencial (1.139) vale

$$k = \sqrt{\frac{s^*}{\bar{J}_w}} = \sqrt{\frac{7088}{5208 \cdot 10^4}} = 1,167 \cdot 10^{-2} \text{ dm}^{-1}$$

e o adimensional K tem o seguinte valor

$$K = kH = 1,67 \times 10^{-2} \times 300 = 3,50$$

enquanto que o valor desta mesma constante calculada segundo a "TÉCNICA CONTÍNUA SIMPLIFICADA" é de 3,51.

Obviamente, os resultados para deslocamentos horizontais e esforços, tanto na parede como nas barras do pórtico, praticamente coincidem com aqueles encontrados no item I.1.10, evidenciando a boa concordância entre as duas técnicas contínuas.

II - TÉCNICAS DISCRETAS

INTRODUÇÃO

Os processos discretos fazem uso de técnicas matriciais na análise do reticulado formado por vigas pilares e paredes que compõem a estrutura. De uma maneira geral, os autores indicam o método dos deslocamentos como caminho adequado quando se pretende eficiente automatização do cálculo.

As técnicas discretas são mais gerais e permitem maior liberdade na variação dos parâmetros que definem a estrutura.

O primeiro item deste capítulo trata do que se convencionou chamar de "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA". Procura-se dar uma interpretação matricial ao trabalho de GOULD¹⁴ que amplia o trabalho de CARDAN¹³ permitindo variação das características elasto-geométricas da estrutura com a altura e chega a uma equação diferencial de quarta ordem nos deslocamentos horizontais, resolvida por diferenças finitas. Desta maneira, o sistema de equações obtido por aquele autor pode ser gerado automaticamente, facilitando a programação para computador. Cabe ainda lembrar que, com o procedimento adotado, a análise de uma estrutura com parâmetros variáveis segundo a altura torna-se imediata, enquanto que o emprego das diferenças finitas conduz a solução mais longa e trabalhosa.

A seguir, apresenta-se uma técnica mais requintada que é aqui chamada "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS". Substitui-se a parede por pilar de pórtico, adicionando aos tramos adjacentes das vigas, mísulas de rigidez infinita nos trechos em que os prolongamentos destas vigas atravessam as paredes. São consideradas as deformações por força cortante nos pilares paredes. A hipótese das mísulas de rigidez infinita nas vigas é equivalente a admitir que as se

ções transversais das paredes permanecem planas depois que são solicitadas e se deformam. Esta técnica parece ser a que traduz mais satisfatoriamente o comportamento elástico do conjunto excluindo, evidentemente, a solução que trata as paredes por elementos finitos e que dispensa a hipótese de permanência das seções planas das paredes. O uso dos elementos finitos, todavia, aumenta consideravelmente as dimensões e dificuldades numéricas do problema.

II.1 - TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA

II.1.1 - Considerações Gerais

Para simular o efeito do pórtico associado à parede, GOULD¹⁴ substitui os pilares e vigas por conjuntos de molas ligadas em paralelo por barras rígidas. Assim, um painel como o da figura 1.19 pode ser representado, esquematicamente, pelo sistema da figura 2.1.

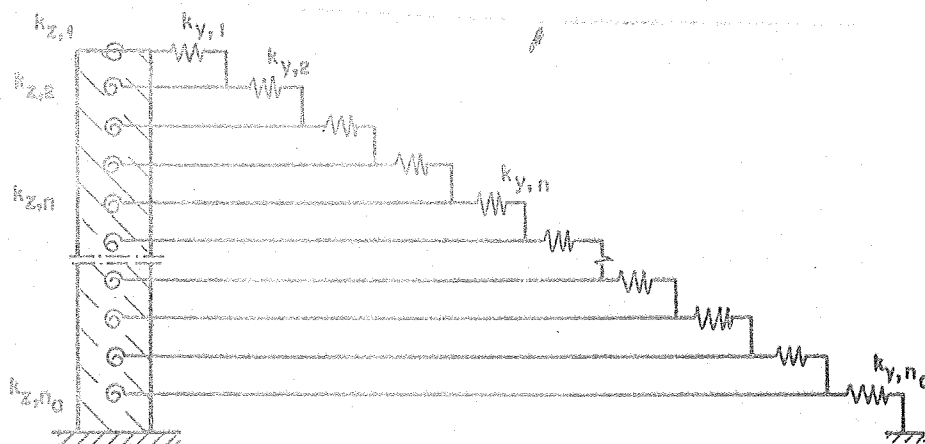


FIG.2.1 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA

Os pilares paredes são substituídos por um único consolo equivalente, rigidamente ligado à fundação. Ao nível de cada laje são introduzidas duas molas: uma horizontal com rigidez $K_{Y,n}$ ao deslocamento relativo do andar n

em relação ao andar imediatamente inferior; outra com rigidez $K_{z,n}$ à rotação, fixada convenientemente a um eixo solidário ao consolo, coincidente com o eixo principal de inércia da seção transversal da parede.

A rigidez $K_{y,n}$ possui significado análogo ao da rigidez s_g definida no capítulo I, item 1.1. Enquanto que naquela capítulo definia-se s_g como rigidez constante do pórtico à força cortante pela expressão

$$s_g = \frac{Q_f}{u'}$$

onde a derivada u' era confundida com a distorção do andar $\Delta u/\Delta z$; neste, são permitidas pequenas variações das características elasto-geométricas do pórtico com a vertical e, por conveniência, a mesma rigidez é definida da seguinte maneira:

$$K_{y,n} = \frac{F_n}{D_{y,n}} \dots \dots \dots (2.1)$$

O índice n refere-se ao andar genérico; o deslocamento horizontal absoluto e a força cortante chamar-se-ão, respectivamente, $D_{y,n}^*$ e F_n e as lajes receberão numeração crescente do topo para a base.

O deslocamento relativo $D_{y,n}$ do andar n em relação ao andar imediatamente inferior escreve-se:

$$D_{y,n} = D_{y,n}^* - D_{y,n+1}^* \dots \dots \dots (2.2)$$

Comparando as expressões de s_g e $K_{y,n}$ e lembrando que Δz para o n -ésimo andar pode ser substituído pelo pé-direito h_n , conclui-se que:

$$K_{y,n} = \frac{s \text{ (determinada para o andar "n")}}{h_n \text{ (altura do andar "n")}} \dots \dots \dots (2.3)$$

Ao nível do andar n a mola de rotação com rigidez $K_{Z,n}$ simula o efeito das vigas (lintéis) adjacentes à parede. A rigidez $K_{Z,n}$ tem significado análogo ao da rigidez r_g discutida no item I.1. Na técnica do capítulo anterior os lintéis eram supostos distribuídos continuamente segundo a vertical, de tal forma que suas reações elásticas sobre as paredes ficavam definidas através de uma função contínua de $z(m)$. O que interessa agora é a resultante deste carregamento num trecho finito de comprimento igual ao pé-direito do andar ($h_n \cdot m$).

Nota-se que no capítulo anterior, a função m era expressa pela equação:

$$m = r_g \cdot u'$$

onde u' representava a rotação da seção transversal da parede à cota z . Neste capítulo, esta rotação ao nível da n -ésima laje será chamada $D_{Z,n}$ e ao momento concentrado aí aplicado (reação elástica dos lintéis sobre a parede) dar-se-á o nome $F_{Z,n}$.

Assim, escreve-se que:

$$F_{Z,n} = K_{Z,n} D_{Z,n} \dots\dots\dots(2.4)$$

e conclui-se que

$$K_{Z,n} = r_g \text{ (determinada para o andar "n")} \cdot h_n \dots\dots\dots(2.5)$$

As rigidezes K_Y e K_Z das molas podem variar de andar para andar, mas de maneira tal que não afetem, sensivelmente, as hipóteses feitas para pórticos regulares. O tratamento discreto simplificado poderia sugerir correções no cálculo K_Y e K_Z : no topo ($K_{Y,1}$ e $K_{Z,1}$) pela ausência do andar imediatamente superior; na base (K_{Y,n_a} e K_{Z,n_a}) pelo engastamento rígido ou eventual articulação do pilar do pórtico à fundação. Acontece porém, como já foi dito anteriormente que

o fato de não se levar em conta estas condições de extremidades não modificará, apreciavelmente, o comportamento macroscópico da estrutura.

II.1.2 - O pilar parede tratado como um consolo

Seja o consolo da figura 2.2 e um sistema de coordenadas global $Oxyz$ com x vertical e y horizontal (ambos contidos no plano da parede).

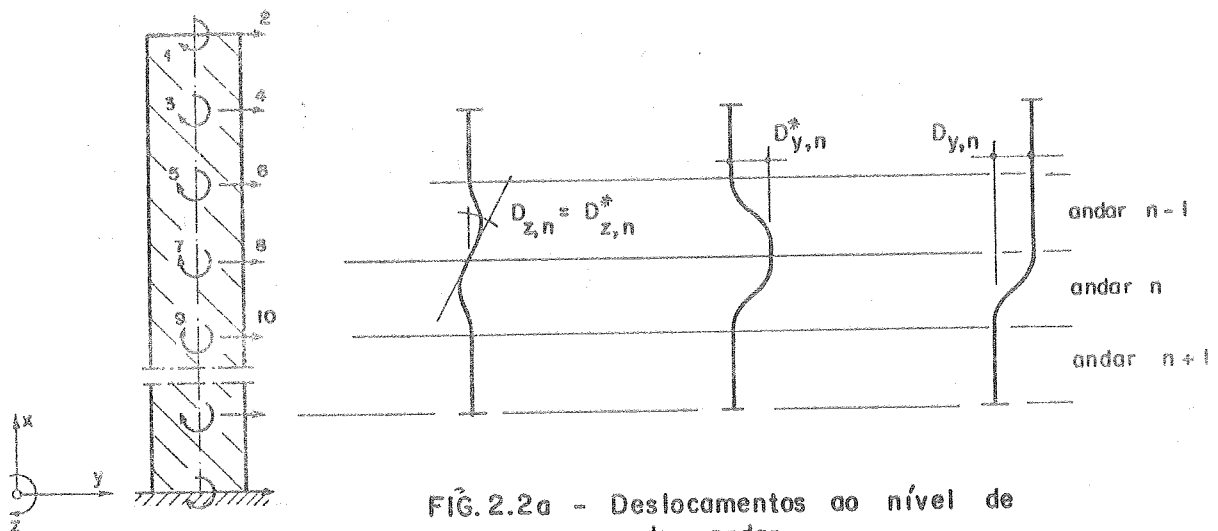


FIG. 2.2a - Deslocamentos ao nível de cada andar

FIG. 2.2 - COORDENADAS DESLOCAMENTO

Ao nível de cada laje são definidas duas coordenadas "deslocamentos": uma para rotação ($D_{z,n}$) e outra para o deslocamento horizontal absoluto ($D_{y,n}^*$). A figura 2.2-a mostra os valores positivos destes deslocamentos segundo as respectivas coordenadas. São numerados todos os deslocamentos possíveis do consolo, inclusive os da base, e esta numeração é feita sequencialmente, do topo para a base, sendo que ao nível de cada laje a rotação antecede o deslocamento horizontal. A numeração dos deslocamentos, assim como dos esforços que lhes correspondem é necessária para que a análise do consolo por processos matriciais

seja levada a bom termo. Somente serão considerados esforços diretamente aplicados aos nós (ao nível de cada laje) e serão positivos quando possuírem os sentidos indicados na figura 2.2.

Seja $[S_J^*]$ a matriz de rigidez global do consolo (para todos os deslocamentos, inclusive os da base) que transforma os deslocamentos $\{D_J^*\}$ nos esforços $\{W_J^*\}$ correspondentes através da equação

$$\begin{matrix} \left\{ W_J^* \right\} \\ "2(n_a+1) \cdot 1" \end{matrix} = \begin{matrix} \left[S_J^* \right] \\ "2(n_a+1) \cdot 2(n_a+1)" \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \left[D_J^* \right] \\ "2(n_a+1) \cdot 1" \end{matrix} \dots (2.6)$$

Os números entre aspas indicam as quantidades de linhas e colunas das matrizes e n_a representa o número de andares da estrutura (número de segmentos do consolo).

Na equação (2.6) a numeração das linhas e colunas das matrizes estão em correspondência com os deslocamentos numerados como na figura 2.2.

A matriz $[S_J^*]$, após sofrer uma reordenação das linhas e colunas poderá ser escrita de maneira particionada como se segue:

$$[S_J^*] = \begin{bmatrix} [S_{ZZ}^*] & [S_{ZY}^*] & [S_{ZR}^*] \\ [S_{YZ}^*] & [S_{YY}^*] & [S_{YR}^*] \\ [S_{RZ}^*] & [S_{RY}^*] & [S_{RR}^*] \end{bmatrix} \dots "2(n_a+1) \cdot 2(n_a+1)" \dots (2.7)$$

onde os índices Z e Y referem-se às rotações e deslocamentos horizontais correspondentes aos graus de liberdade do consolo e o índice R aos deslocamentos de vinculação com a base.

O rearranjo da equação (2.7) indica que primeiramente são numerados sequencialmente, do topo para a base, as rotações; em seguida, na mesma ordem, os deslocamen

tos horizontais e por fim os deslocamentos da base.

Tendo em vista as equações (2.6) e (2.7) pode-se escrever a seguinte equação, fazendo, também, a partição dos vetores $\{W_J^*\}$ e $\{D_J^*\}$:

$$\begin{Bmatrix} \{W_Z^*\} \\ \{W_Y^*\} \\ \{W_R^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{ZZ}^*] & [S_{ZY}^*] & [S_{ZR}^*] \\ [S_{YZ}^*] & [S_{YY}^*] & [S_{YR}^*] \\ [S_{RZ}^*] & [S_{RY}^*] & [S_{RR}^*] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D_Z^*\} \\ \{D_Y^*\} \\ \{D_R^*\} \end{Bmatrix} \dots\dots(2.8)$$

Considera-se o consolo rigidamente ligado à fundação, portanto, as condições de contorno serão expressas através de $\{D_R^*\} = 0$. Assim, pode-se retirar de (2.8) o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} \{W_Z^*\} \\ \{W_Y^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ZZ}^* & S_{ZY}^* \\ S_{YZ}^* & S_{YY}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_Z^* \\ D_Y^* \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.9)$$

ou ainda

$$\begin{Bmatrix} W^* \\ \{W^*\} \end{Bmatrix}_{"2n_a - 1"} = \begin{bmatrix} S^* \\ \{S^*\} \end{bmatrix}_{"2n_a \cdot 2n_a"} \cdot \begin{Bmatrix} D^* \\ \{D^*\} \end{Bmatrix}_{"2n_a - 1"} \dots\dots\dots(2.10)$$

O desenvolvimento deste item mostrará a conveniência de se trabalhar com o deslocamento horizontal relativo de um andar em relação ao imediatamente inferior ao invés de se trabalhar com o deslocamento horizontal absoluto do andar (figura 2.2-a).

Seja $\{D\}$ o vetor coluna que agora reúne as rotações e os deslocamentos horizontais relativos dos andares. Este vetor se relaciona com o vetor dos deslocamentos $\{D^*\}$ através da matriz de transformação $[T]$ pela equação:

$$\{D^*\} = [I] \{D\} \dots \dots \dots (2.11)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \{D_Z^*\} \\ \{D_Y^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [T_Y] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D_Z\} \\ \{D_Y\} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (2.12)$$

"2n_a · 1"
"2n_a · 2n_a"
"2n_a · 1"

onde

[I] = matriz identidade de ordem "n_a · n_a"

[0] = matriz nula de ordem "n_a · n_a"

e

$$[T_Y] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots "n_a \cdot n_a" \dots \dots \dots (2.13)$$

Seja [W] a matriz dos esforços segundo os deslocamentos [D]. Observe-se que ao considerar o deslocamento relativo do andar torna-se necessário que as forças horizontais aplicadas aos diversos andares sejam iguais às forças cortantes no consolo ao nível de cada andar. Logo, quando da consideração do sistema de equações de equilíbrio, tem-se que acumular a carga horizontal aplicada ao nível de cada laje com as demais aplicadas aos andares superiores. A partir da equação (2.11) são calculados os esforços [W] e a matriz de rigidez [S] correspondente aos deslocamentos [D], em função de {W*} e [S*] respectivamente:

$$\{W\} = [T]^t \{W^*\} \dots\dots\dots(2.14)$$

e

$$\{S\} = [T]^t [S^*] [T] \dots\dots\dots(2.15)$$

onde $[T]^t$ é a transposta da matriz $[T]$.

Assim, o novo sistema de equações pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\{W\} = [S] \{D\} \dots\dots\dots(2.16)$$

ou

$$\begin{matrix} \begin{matrix} \{W_Z\} \\ \hline \{W_Y\} \end{matrix} & = & \begin{matrix} [S_{ZZ}] & [S_{ZY}] \\ \hline [S_{YZ}] & [S_{YY}] \end{matrix} & \cdot & \begin{matrix} \{D_Z\} \\ \hline \{D_Y\} \end{matrix} & \begin{matrix} n_a \text{ linhas} \\ n_a \text{ linhas} \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.17)$$

$"2n_a \cdot 1"$ $"2n_a \cdot 2n_a"$ $"2n_a \cdot 1"$

que desenvolvido leva às seguintes equações matriciais:

$$[S_{ZZ}] \{D_Z\} + [S_{ZY}] \{D_Y\} = \{W_Z\} \dots\dots\dots(2.18)$$

$$[S_{YZ}] \{D_Z\} + [S_{YY}] \{D_Y\} = \{W_Y\} \dots\dots\dots(2.19)$$

Algumas sub-matrizes da equação (2.17) são iguais às da equação (2.9), assim:

$$\{W_Z\} = \{W_Z^*\} ; \{D_Z\} = \{D_Z^*\} \text{ e } [S_{ZZ}] = [S_{ZZ}^*]$$

A sub-matriz $[S_{YY}^*]$ de ordem " $n_a \cdot n_a$ ", por exemplo, simétrica e contendo elementos não nulos na diagonal principal e nas posições imediatamente acima e abaixo desta dia

gonal transforma-se, pela equação (2.15), numa sub-matriz cujos elementos não nulos concentram-se, exclusivamente, na diagonal principal (para o caso particular da sub-matriz em questão).

A matriz [S] é obtida diretamente, sem que haja necessidade de se efetuar o triplo produto indicado pela equação (2.15), sendo mais prático considerar a contribuição de cada barra na posição adequada de linha e coluna de [S], observando o arranjo da equação (2.17) e lembrando que o esforço correspondente ao deslocamento relativo é esforço cortante.

As reações elásticas das molas sobre a parede segundo as coordenadas Z e Y, equações (2.1) e (2.4), podem ser expressas pelas seguintes equações matriciais

$$\begin{matrix} \left[F_Z \right] \\ \text{"n}_a \cdot 1\text{"} \end{matrix} = - \begin{matrix} \left[K_Z \right] \\ \text{"n}_a \cdot \text{n}_a\text{"} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \left[D_Z \right] \\ \text{"n}_a \cdot 1\text{"} \end{matrix} \dots\dots\dots (2.20)$$

$$\begin{matrix} \left[F_Y \right] \\ \text{"n}_a \cdot 1\text{"} \end{matrix} = - \begin{matrix} \left[K_Y \right] \\ \text{"n}_a \cdot \text{n}_a\text{"} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \left[D_Y \right] \\ \text{"n}_a \cdot 1\text{"} \end{matrix} \dots\dots\dots (2.21)$$

onde [K_Z] e [K_Y] são matrizes diagonais

$$\begin{matrix} \left[K_Z \right] \\ \text{"n}_a \cdot \text{n}_a\text{"} \end{matrix} = \begin{bmatrix} K_{Z,1} & & & & \\ & K_{Z,2} & & & \text{zeros} \\ & & \ddots & & \\ & & & \text{zeros} & \\ & & & & K_{Z,n_a} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.22)$$

e

$$\begin{matrix}
 [K_Y] \\
 \text{"n}_a \cdot \text{n}_a\text{"}
 \end{matrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 K_{Y,1} & & & & \\
 & K_{Y,2} & & & \text{zeros} \\
 & & \ddots & & \\
 & \text{zeros} & & \ddots & \\
 & & & & K_{Y,n_a}
 \end{bmatrix}
 \dots\dots\dots (2.23)$$

Os esforços no consolo, segundo as coordenadas Z e Y são expressas pelas equações:

$$\{W_Z\} = -[K_Z] \{D_Y\} \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\{W_Y\} = \{Q_Y\} + \{F_Y\} \dots\dots\dots (2.25)$$

onde cada elemento do vetor $\{Q_Y\}$, de ordem " $n_a \cdot 1$ ", é obtido acumulando-se a carga horizontal externa aplicada ao nível de cada laje com todas as demais aplicadas aos andares superiores.

As equações (2.18) e (2.19) combinadas com as equações (2.24), (2.25) e (2.21) fornecem

$$[S_{ZZ}] \{D_Z\} + [S_{ZY}] \{D_Y\} = -[K_Z] \{D_Z\} \dots\dots\dots (2.26)$$

$$[S_{YZ}] \{D_Z\} + [S_{YY}] \{D_Y\} = \{Q_Y\} - [K_Y] \{D_Y\} \dots\dots\dots (2.27)$$

Da equação (2.26) vem

$$\{D_Z\} = -[\bar{S}_{ZZ}]^{-1} [S_{ZY}] \{D_Y\} \dots\dots\dots (2.28)$$

com

$$[\bar{S}_{ZZ}] = [S_{ZZ}] + [K_Z] \dots\dots\dots (2.29)$$

Substituindo a (2.28) em (2.27)

$$\{Q_Y\} = \left([R_{YY}] + [K_Y] \right) \cdot \{D_Y\} \dots\dots\dots(2.30)$$

com

$$[R_{YY}] = [S_{YY}] - [S_{YZ}] [\bar{S}_{ZZ}]^{-1} [S_{ZY}] \dots\dots\dots(2.31)$$

Os deslocamentos horizontais relativos $\{D_Y\}$ são, finalmente, obtidos através de:

$$\{D_Y\} = \left([R_{YY}] + [K_Y] \right)^{-1} \{Q_Y\} \dots\dots\dots(2.32)$$

Substituindo os deslocamentos $\{D_Y\}$ na equação (2.28) obtêm-se os $\{D_Z\}$ ficando assim completo o vetor $\{D\}$. Os deslocamentos $\{D^*\}$, que incluem os deslocamentos absolutos dos andares, são obtidos através da equação (2.11).

Observe-se que o sistema de equações (2.30) tem significado análogo ao do sistema de equações obtido por GOULD¹⁴, utilizando diferenças finitas.

As forças $\{F_Y\}$ nas molas horizontais, equivalentes a força cortante absorvida pelo pórtico ao nível de cada andar, são calculadas pela equação

$$\{F_Y\} = [K_Y] \{D_Y\} \dots\dots\dots(2.33)$$

Conhecidos os deslocamentos $\{D_J^*\}$ dos nós do consolo, as forças cortantes e momentos flatores nas extremidades de todos os tramos (segmentos) poderão ser calculados já que as extremidades dos mesmos têm os mesmos deslocamentos dos nós onde incidem.

Seja $\{D_M^*\}$ o vetor dos deslocamentos nas extremidades de cada tramo e $\{W_M^*\}$ os esforços correspondentes.

Então

$$\{W_M^*\} = [S_M^*] \{D_M^*\} \dots\dots\dots(2.34)$$

"4.1" "4.4" "4.1"

onde $[S_M^*]$ é a matriz de rigidez do segmento de consolo para os deslocamentos nas extremidades do mesmo.

II.1.3 - Obtenção de $[S]$

Seja $[S_M^*]$ a matriz de rigidez de um tramo de pilar parede, calculada para os deslocamentos numerados como na figura 2.3-b.

$$[S_M^*] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \dots\dots\dots(2.35) \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_{M11}^* & S_{M12}^* & S_{M13}^* & S_{M14}^* \\ S_{M21}^* & S_{M22}^* & S_{M23}^* & S_{M24}^* \\ S_{M31}^* & S_{M32}^* & S_{M33}^* & S_{M34}^* \\ S_{M41}^* & S_{M42}^* & S_{M43}^* & S_{M44}^* \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Os elementos de cada coluna de $[S_M^*]$ são obtidos calculando-se os esforços segundo cada coordenada quando imprime-se um deslocamento unitário na direção da coordenada correspondente à coluna, mantendo-se os demais deslocamentos nulos.

Tratar-se-á o tramo de pilar parede como uma barra prismática, embora a largura b seja da ordem de grandeza da altura h (figura 2.3-a). Porém, no cálculo dos coeficientes de rigidez da barra considerar-se-á o e feito das deformações por força cortante.

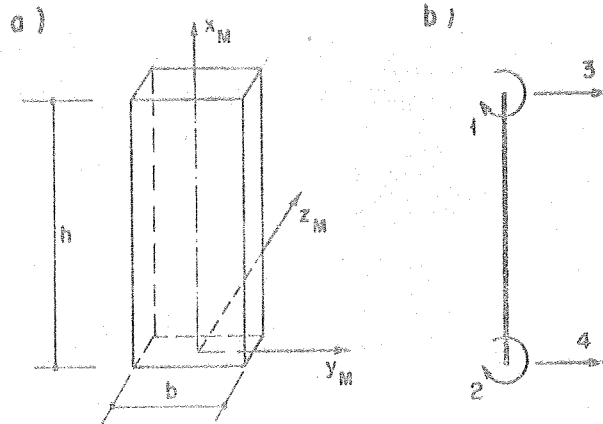


FIG. 2.3 - TRAMO DE PILAR-PAREDE

Sejam os seguintes valores:

- A_x = área da seção transversal, constante em cada tramo do pilar parede;
- I_z = momento de inércia em relação ao eixo z que passa pelo C.C. da seção;
- E = módulo de elasticidade longitudinal;
- G = módulo de elasticidade transversal;
- c = fator que depende da forma da seção, do coeficiente de POISSON e que para seções retangulares vale:

$$c = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \text{ (BORGES e RAVARA 16) } \dots \dots \dots (2.36)$$

A matriz de rigidez para um tramo de pilar parede escreve-se:

$$[S_M^*] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{h} F_{C_2} F_{C_4} & \frac{2EI_z}{h} F_{C_2} F_{C_3} & \frac{-6EI_z}{h^2} F_{C_2} & \frac{-6EI_z}{h^2} F_{C_2} \\ \frac{4EI_z}{h} F_{C_2} F_{C_4} & \frac{-6EI_z}{h^2} F_{C_2} & \frac{-6EI_z}{h^2} F_{C_2} & \\ \frac{12EI_z}{h^3} F_{C_2} & \frac{-12EI_z}{h^3} F_{C_2} & & \\ \frac{12EI_z}{h^3} F_{C_2} & \frac{12EI_z}{h^3} F_{C_2} & & \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

SIMÉTRICO

onde (BORGES e RAVARA¹⁶):

$$F_{C1} = \frac{6EI_z}{h^2 cGA_x} \dots \dots \dots (2.38)$$

$$F_{C2} = \frac{1}{1 + 2F_{C1}} \dots \dots \dots (2.39)$$

$$F_{C3} = 1 - F_{C1} \dots \dots \dots (2.40)$$

$$F_{C4} = 1 + \frac{F_{C1}}{2} \dots \dots \dots (2.41)$$

A partir da matriz de rigidez $[S_M^*]$ é possível montar, diretamente, a matriz de rigidez global $[S^*]$ para os deslocamentos $\{D^*\}$ com o auxílio de um algoritmo que faça corresponder a numeração destes deslocamentos com os deslocamentos 1, 2, 3 e 4 da barra. A matriz $[S]$ seria então obtida, a partir de $[S^*]$, efetuando-se os produtos matriciais indicados pela equação (2.15). Entretanto, é mais prático gerar $[S]$ para os deslocamentos $\{D\}$ (rotações dos nós e deslocamentos horizontais relativos) a partir da seguinte matriz de rigidez para um tramo de pilar parede.

$$[S_M] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{h} F_{C2} F_{C4} & \frac{2EI_z}{h} F_{C2} F_{C3} & -\frac{6EI_z}{h^2} F_{C2} \\ \text{SIMÉTRICO} & \frac{4EI_z}{h} F_{C2} F_{C1} & -\frac{6EI_z}{h^2} F_{C2} \\ & & \frac{12EI_z}{h^3} F_{C2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \dots \dots \dots (2.42)$$

Esta matriz de rigidez tem significado para a barra da figura 2.4-a onde as coordenadas 1 e 2 indicam, respectivamente, a rotação do nó superior e inferior e a coordenada 3 é suficiente para definir o deslocamento relativo entre estes nós.

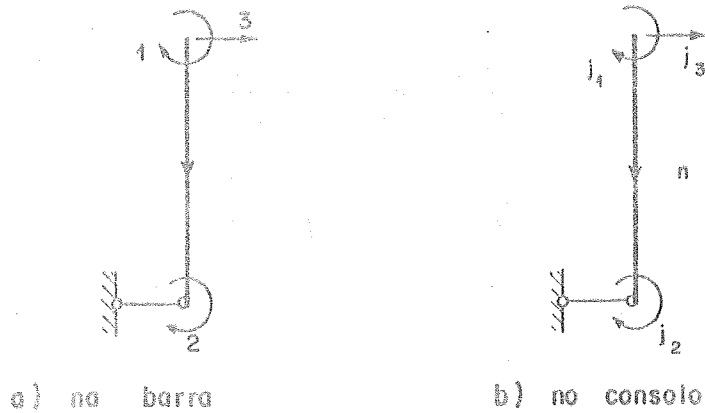


FIG. 2.4 - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS NAS BARRAS E DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES NO CONSOLO

Os deslocamentos no consolo correspondentes aos deslocamentos 1, 2, e 3 da barra serão:

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= n \\ j_2 &= n+1 \\ j_3 &= n_a + n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.43)$$

onde n é o número do tramo do consolo, crescente do topo para a base, e n_a o número de tramos (andares) do consolo

Observe-se, em tempo, que só será gerada a matriz $[S]$ relativa aos deslocamentos livres e manter-se-á sempre a hipótese de engastamento perfeito do consolo à fundação. As reações na base, momento fletor e força cortante, serão fornecidas pelos esforços correspondentes no último tramo (n_a) do consolo.

No APÊNDICE 2 será apresentado um programa para cálculo automático, escrito em linguagem FORTRAN, para computador IBM-1130, com 32K de memória interna.

II.1.4 - Exemplo numérico 1

Aplica-se a "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" ao exemplo numérico do Capítulo I. As rigidezes K_Y e K_Z têm o mesmo valor para todos os andares e são respectivamente calculadas, a partir das rigidezes s_g e r_g (obtidas no item I.1.10), através das expressões (2.3) e (2.5).

Assim, a rigidez K_Y da "mola horizontal" vale

$$K_Y = \frac{4259}{300} = 14,196 \text{ t/cm}$$

e a rigidez K_Z da "mola de rotação"

$$K_Z = 2875 \cdot 300 = 862500,0 \text{ t.cm}$$

Não serão consideradas as deformações por força cortante no pilar parede. Os deslocamentos horizontais absolutos (cm), do nível de cada andar, são os seguintes:

* DESLOCAMENTO HORIZONTAL AO NÍVEL DE CADA ANDAR

ANDAR	DJY
1	0.36531E 01
2	0.33770E 01
3	0.30701E 01
4	0.27179E 01
5	0.23157E 01
6	0.18685E 01
7	0.13917E 01
8	0.91237E 00
9	0.47340E 00
10	0.13845E 00

Os resultados obtidos para momentos fletores na parede (t.cm), no topo e na base de cada andar, positivos quando horários sobre a barra, e para a força cortante (t), ao nível de cada andar, positiva se horária sobre a seção, são os seguintes:

MOMENTOS FLETORES E FORÇAS CORTANTES NA PAREDE (ex. numérico 1)

ANDAR	MOM. TOPO	MOM. BASE	F. CORTANTE
1	-0.76867E 03	0.14945E 04	-0.24194E 01
2	-0.23194E 04	0.22761E 04	0.14416E 00
3	-0.32152E 04	0.24653E 04	0.24994E 01
4	-0.35455E 04	0.21084E 04	0.47902E 01
5	-0.33290E 04	0.11833E 04	0.71522E 01
6	-0.25160E 04	-0.40294E 03	0.97301E 01
7	-0.98226E 03	-0.28263E 04	0.12695E 02
8	0.14869E 04	-0.63674E 04	0.16268E 02
9	0.52231E 04	-0.11446E 05	0.20744E 02
10	0.10716E 05	-0.18676E 05	0.26534E 02

Observe-se a boa concordância destes resultados com aqueles obtidos no Capítulo I, excluindo-se, evidentemente, os valores dos momentos fletores e força cortante ao nível do primeiro andar (topo da parede). As rigidezes K_Y e K_Z , nesta região, deveriam ser corrigidas levando-se em conta a ausência do andar imediatamente superior. Se o objetivo era a análise qualitativa e quantitativa (com alguma reserva) do comportamento do pilar parede e do pórtico então, sem dúvida, este objetivo foi satisfatoriamente alcançado.

II.1.5 - Exemplo Numérico 2

Analisa-se o edifício de 20 andares com planta simétrica e carregado lateralmente com carga P , paralela ao eixo II, conforme indica a figura 2.5.

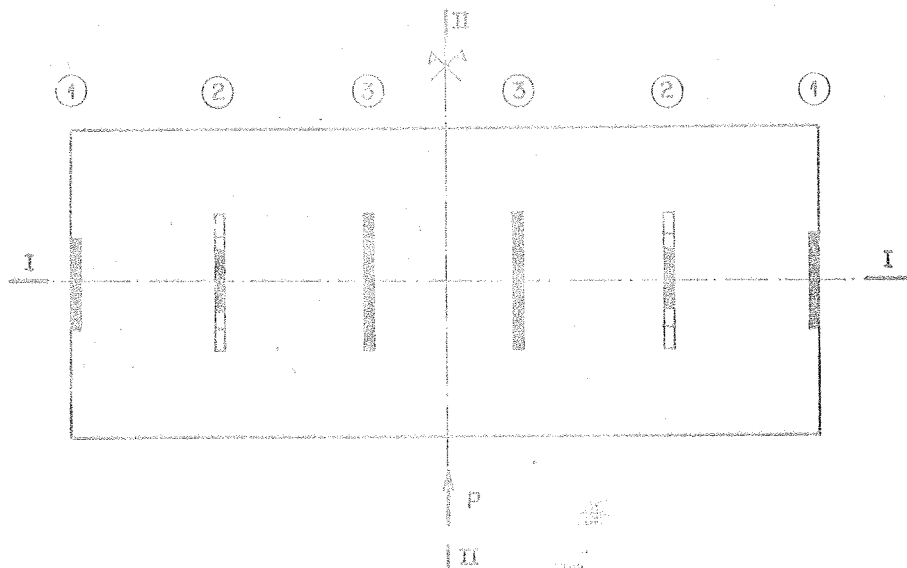


FIG. 2.5 - PLANTA DO EDIFÍCIO DE 20 ANDARES

As lajes (diafragmas horizontais) são infinitamente rígidas no seu plano e extremamente flexíveis no sentido transversal. Assim, ao nível de cada andar, todas as paredes sofrerão o mesmo deslocamento horizontal e a análise do edifício pode ser efetuada a partir do seguinte esquema estático equivalente:

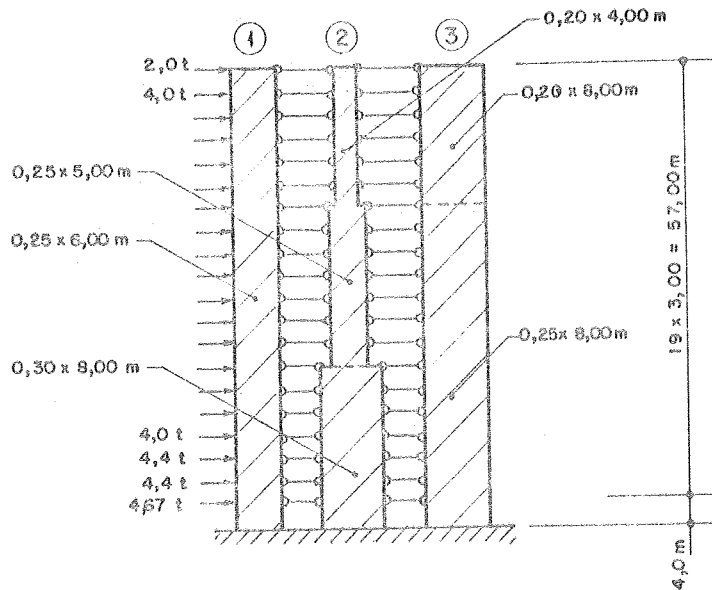


FIG. 2.6 - ESQUEMA ESTÁTICO EQUIVALENTE

A "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" pode ser aplicada à estrutura da figura 2.6, observando-se as seguintes considerações:

- as barras bi-articuladas que ligam as paredes têm rigidez axial infinita e somente garantem a igualdade dos deslocamentos horizontais ao nível de cada andar;
- não existe contribuição alguma (lintéis biarticulados) para a rigidez K_z das molas de rotação, portanto:

$$[K_z] = [0];$$

- não existe nenhuma prumada de pilar de pórtico, portanto:

$$[K_y] = [0]$$

Seja $\{W_Y\}_i$ o vetor das forças cortantes, ao nível de cada andar, para a parede i . Do equilíbrio das forças horizontais conclui-se que:

$$\{Q_Y\} = \sum_i \{W_Y\}_i \quad (i=1,2,3)$$

e a equação (2.30) se escreve

$$\{Q_Y\} = \left(\sum_i [R_{YY}]_i \right) \{D_Y\} \quad (i=1,2,3)$$

Com os $\{D_Y\}$ calculam-se as rotações $\{D_Z\}_i$ da parede i , conforme a equação (2.28)

$$\{D_Z\}_i = -[s_{ZZ}]_i^{-1} \cdot [s_{ZY}]_i \cdot \{D_Y\} \quad (i=1,2,3)$$

Assumindo para o Módulo de Elasticidade Longitudinal o valor $E=200 \text{ t/cm}^2$ e para o Módulo de Elasticidade Transversal o valor $G=84 \text{ t/cm}^2$, obtêm os deslocamentos horizontais ao nível de cada andar, mostrado na figura 2.7.

Os valores das forças cortantes e momentos fletores nas paredes são apresentados, respectivamente, nas tabelas 2.1 e 2.2.

As letras maiúsculas A e B indicam os seguintes procedimentos:

- (A) - valores obtidos quando são desprezadas as deformações por força cortante nas paredes;
- (B) - valores obtidos quando são consideradas as deformações por força cortante nas paredes.

As figuras 2.8 e 2.9 são bastante sugestivas e evidenciam as sensíveis diferenças entre os procedimentos A e B.

Este exemplo numérico foi proposto e resolvido por GLUCK¹⁰ através de uma técnica contínua, devidamente corrigida por uma solução complementar, que considera as di

ferentes rotações das seções das paredes ao nível de cada andar. Observe-se que GLUCK¹⁰ não leva em consideração as deformações por força cortante nas paredes.

Finalizando, cabe ressaltar que aplicar a "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" a uma associação plana de paredes ligadas por barras biarticuladas (com rigidez axial infinita) significa resolvê-la de modo exato, pelo Processo dos Deslocamentos.

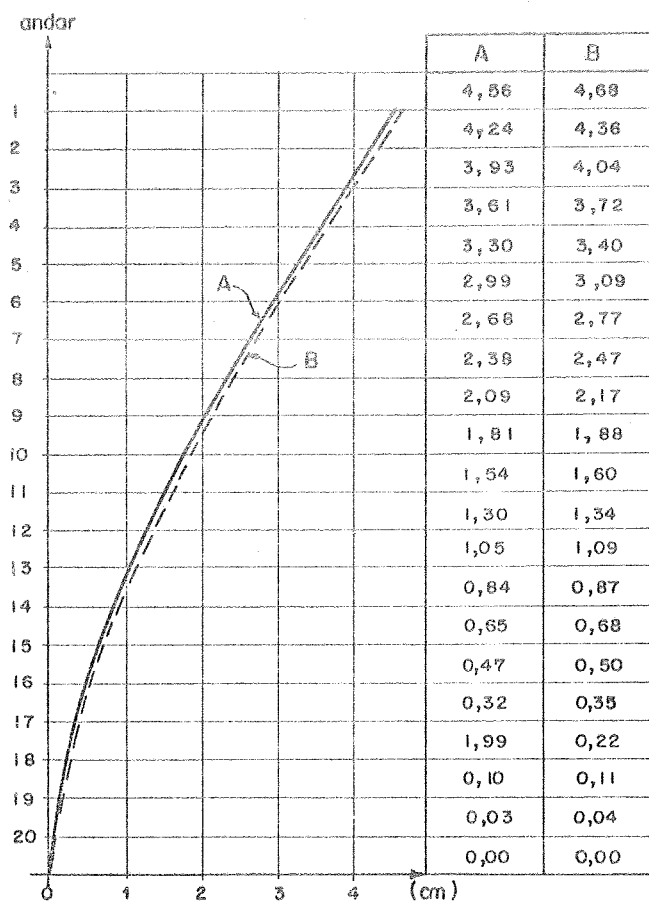


FIG. 2.7 - DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS (cm)

AND.	PAREDE 1		PAREDE 2		PAREDE 3	
	A	B	A	B	A	B
1	0,64	0,34	0,15	-0,06	1,21	1,72
2	1,90	1,77	0,46	0,40	3,63	3,82
3	3,24	3,10	0,71	0,75	6,04	6,13
4	4,28	4,35	1,20	1,13	8,52	8,52
5	6,44	5,38	0,82	1,73	10,73	10,87
6	4,40	5,60	3,67	3,53	13,93	12,86
7	3,18	4,75	8,28	5,74	14,53	15,50
8	8,52	7,05	3,15	5,00	18,32	17,94
9	8,31	8,49	5,47	5,35	20,21	20,15
10	9,87	9,64	4,86	6,32	23,26	22,03
11	9,92	10,50	8,50	8,49	23,57	23,00
12	14,22	10,18	-1,93	14,49	33,70	21,32
13	3,06	4,93	39,67	33,32	7,26	11,74
14	-21,28	-5,35	125,71	63,26	-50,44	-3,91
15	17,36	4,22	-0,52	43,37	41,15	10,40
16	7,82	8,15	35,63	35,74	18,54	18,10
17	11,19	10,08	28,26	33,39	26,54	22,52
18	11,17	11,51	32,74	33,42	26,48	25,46
19	12,07	13,14	34,10	34,20	28,62	27,45
20	12,78	16,96	36,40	34,25	30,29	28,25

TABELA 2.1 - FORÇAS CORTANTES (t) POSITIVAS QUANDO HORÁRIAS SOBRE A SEÇÃO

AND.	PAREDE 1		PAREDE 2		PAREDE 3	
	A	B	A	B	A	B
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	1,9	1,0	0,4	-0,2	3,6	5,1
3	7,6	6,3	1,8	1,0	14,5	16,6
4	17,3	15,6	4,0	3,3	32,6	35,0
5	30,2	28,7	7,6	6,7	58,2	60,6
6	49,5	44,8	10,0	11,9	90,4	93,2
7	62,7	61,6	21,1	22,5	132,1	131,8
8	72,3	75,9	45,9	39,7	175,7	178,3
9	97,8	97,1	55,4	54,7	230,7	232,2
10	122,8	122,5	71,6	70,8	291,4	292,6
11	152,4	151,5	86,4	89,7	361,2	358,7
12	182,2	183,0	111,9	115,2	431,9	427,8
13	224,8	213,5	106,1	158,7	533,0	491,7
14	234,0	228,3	225,1	258,6	554,8	527,0
15	170,2	212,2	602,2	448,4	403,5	515,2
16	222,3	224,9	600,7	578,6	526,9	546,4
17	245,8	249,4	707,6	685,8	582,6	600,7
18	279,4	279,6	792,4	786,0	662,2	668,3
19	312,9	314,2	890,6	886,2	741,7	744,7
20	349,1	353,6	992,9	988,8	827,5	827,1
BASE	400,2	421,4	1138,5	1125,9	948,7	940,1

TABELA 2.2 - MOMENTOS FLETORES (t m) POSITIVOS QUANDO TRACIONAM À BARRAVENTO

OBS. - As deformações por torção contante são desprezadas (A)

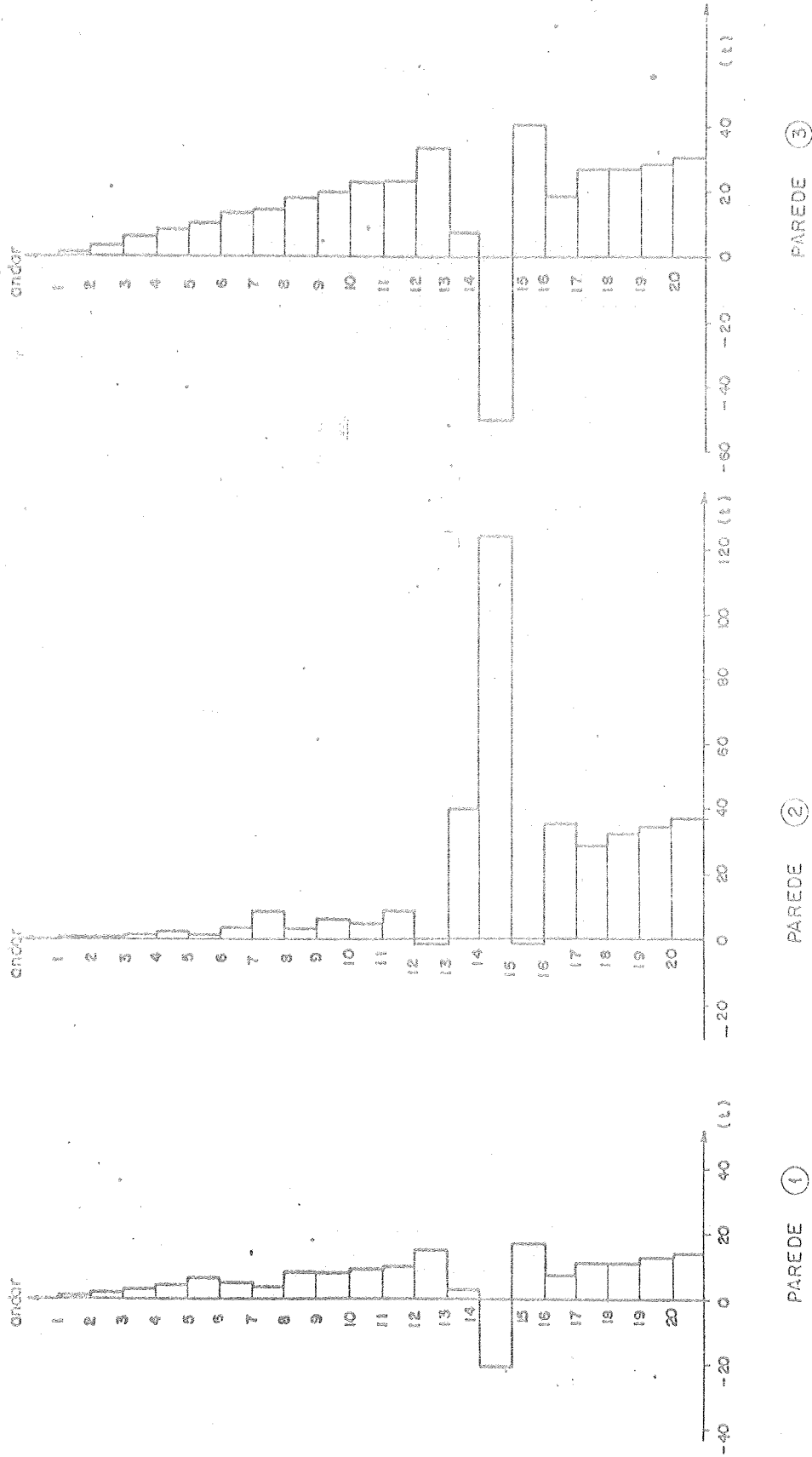


FIG.2.8 - FORÇAS CORTANTES NAS PAREDES (1)

Obs. - As deformações por força cortante são consideradas (B)

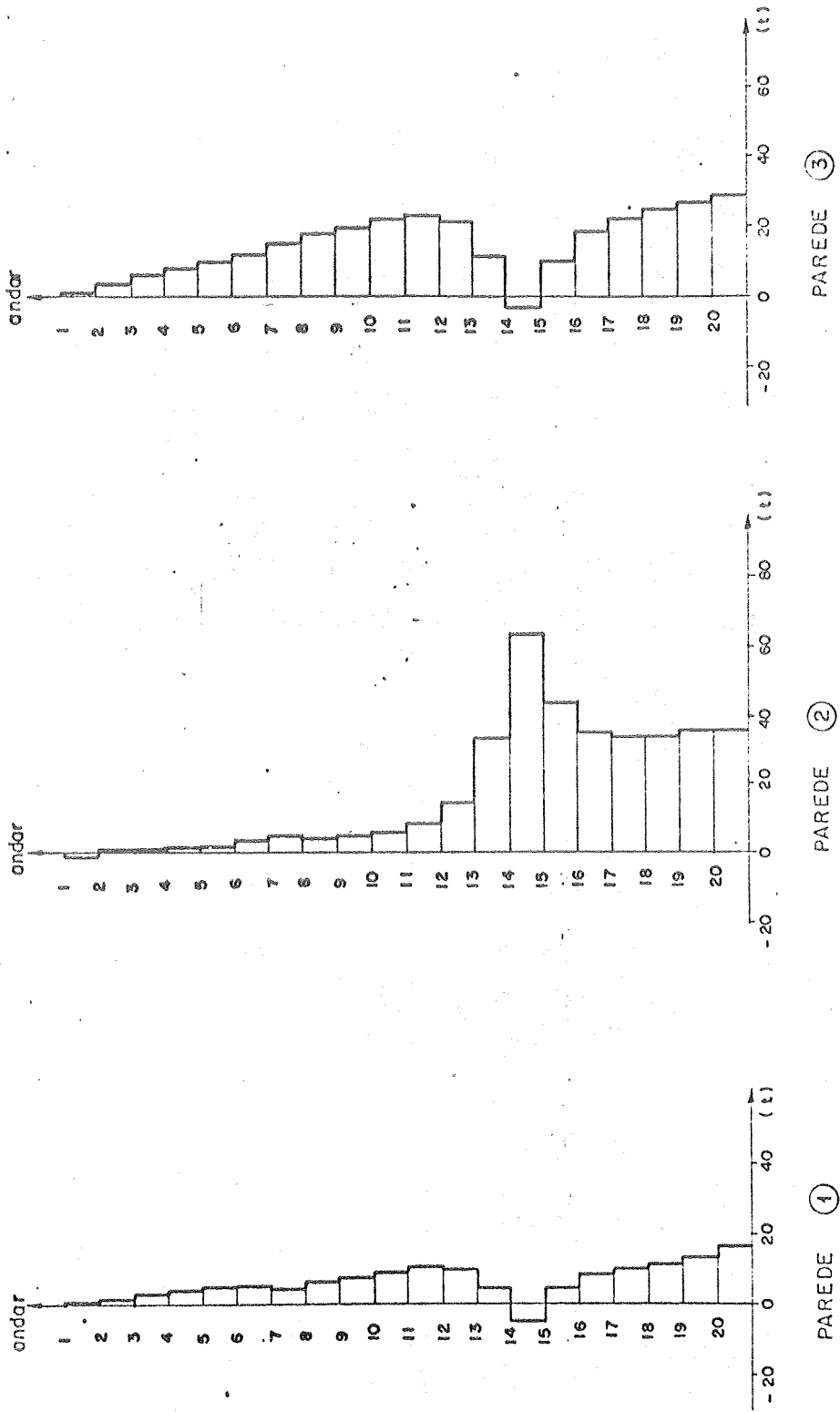


FIG.2.9 - FORÇAS CORTANTES NAS PAREDES (t)

II.1.6 - Exemplo número 3

Utiliza-se a "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" na análise da estrutura da figura 2.10, constituída de duas paredes unidas por lintéis (barras submetidas a flexão composta). Adota-se para Módulo de Elasticidade Longitudinal o valor $E=200 \text{ t/cm}^2$ e as deformações por força cortante nos pilares paredes são desprezadas.

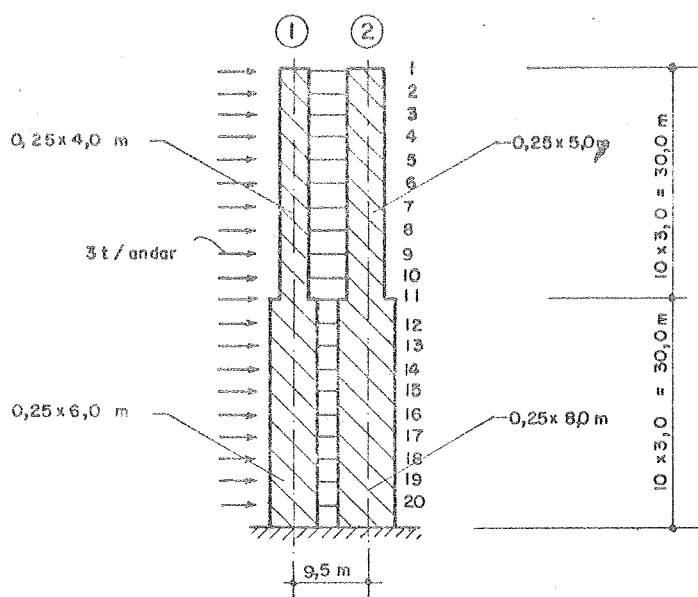


FIG. 2.10 - DUAS PAREDES LIGADAS POR LINTEIS

À cada parede i está associada uma matriz diagonal $[K_Z]_i$ e a matriz $[K_Y] = 0$. Assim, o sistema de equações se escreve:

$$\{Q_Y\} = \left(\sum_i [R_{YY}]_i \right) \cdot \{D_Y\}$$

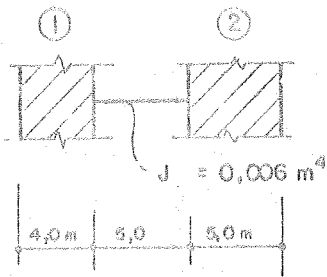
com

$$\sum_i [R_{YY}]_i = \sum_i \left([S_{YY}]_i - [S_{YZ}]_i [\bar{S}_{ZZ}]_i [S_{ZY}]_i \right)$$

e onde

$$[\bar{S}_{ZZ}]_i = [S_{ZZ}]_i + [K_Z]_i$$

para $i=1,2$



Para os andares superiores
($n=1, \dots, 10$) a Tabela 1.1 do Capítu-
lo I, juntamente com a equação (2.5),
fornece:

a) parede 1

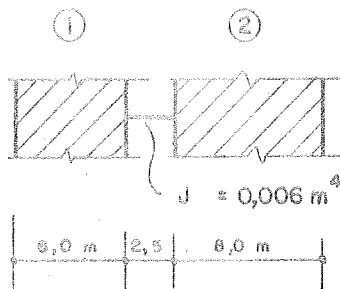
$$K_Z = r_g \cdot h = 6 \cdot 200 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,006}{5} \left(1 + \frac{4,0+5,0}{2 \cdot 5,0} \right) \left(1 + \frac{4,0}{5,0} \right)$$

$$K_Z = 49248,0 \text{ t m}$$

b) parede 2

$$K_Z = r_g \cdot h = 6 \cdot 200 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,006}{5} \left(1 + \frac{4,0+5,0}{2 \cdot 5,0} \right) \left(1 + \frac{5,0}{5,0} \right)$$

$$K_Z = 54720,0 \text{ t m}$$



Para os últimos 10 andares
($n=11, \dots, 20$) a Tabela 1.1 do Capítu-
lo I, juntamente com a equação
(2.5), fornece:

a) parede 1

$$K_Z = r_g \cdot h = 6 \cdot 200 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,006}{2,5} \left(1 + \frac{6,0+8,0}{2 \cdot 2,5} \right) \left(1 + \frac{6,0}{2,5} \right)$$

$$K_Z = 372096,0 \text{ t m}$$

b) para a parede 2

$$K_Z = r_g \cdot h = 6 \cdot 200 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,006}{2,5} \left(1 + \frac{6,0+8,0}{2 \cdot 2,5} \right) \left(1 + \frac{8,0}{2,5} \right)$$

$$K_Z = 459648,0 \text{ t m}$$

Apresentam-se, em seguida, os resultados obtidos pela "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" (T.D.S.) e os obtidos pela "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS" (T.D.P.) desprezando-se, em ambos os casos, as deformações por força cortante nas paredes e considerando-as indeformáveis axialmente.

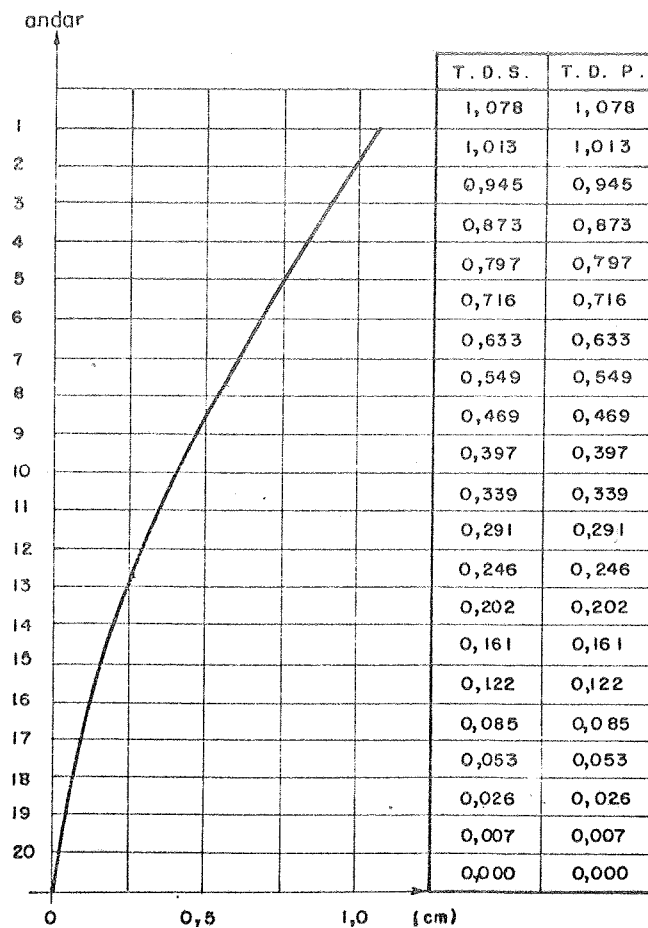


FIG.2.11 - DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS (cm)

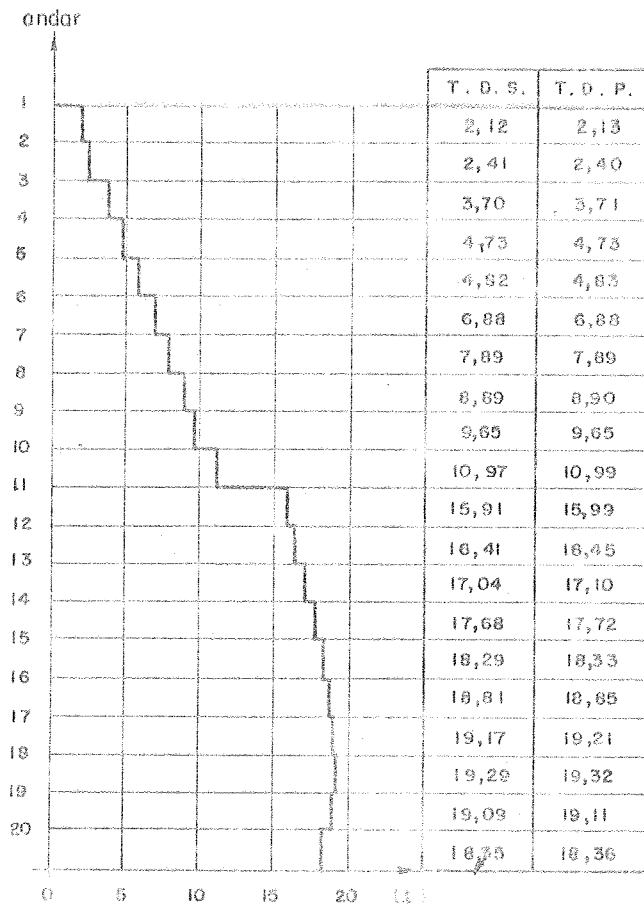


FIG. 2.12 - FORÇAS CORTANTES NA PAREDE 1 (t)

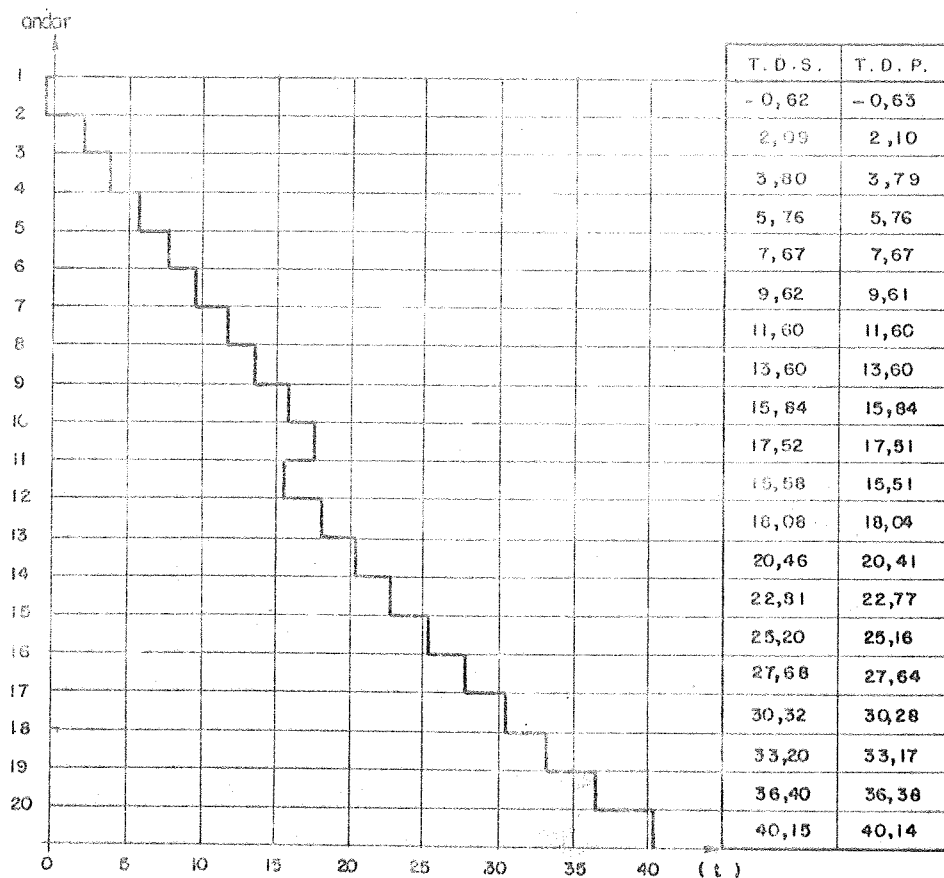


FIG. 2.13 - FORÇAS CORTANTES NA PAREDE 2 (t)

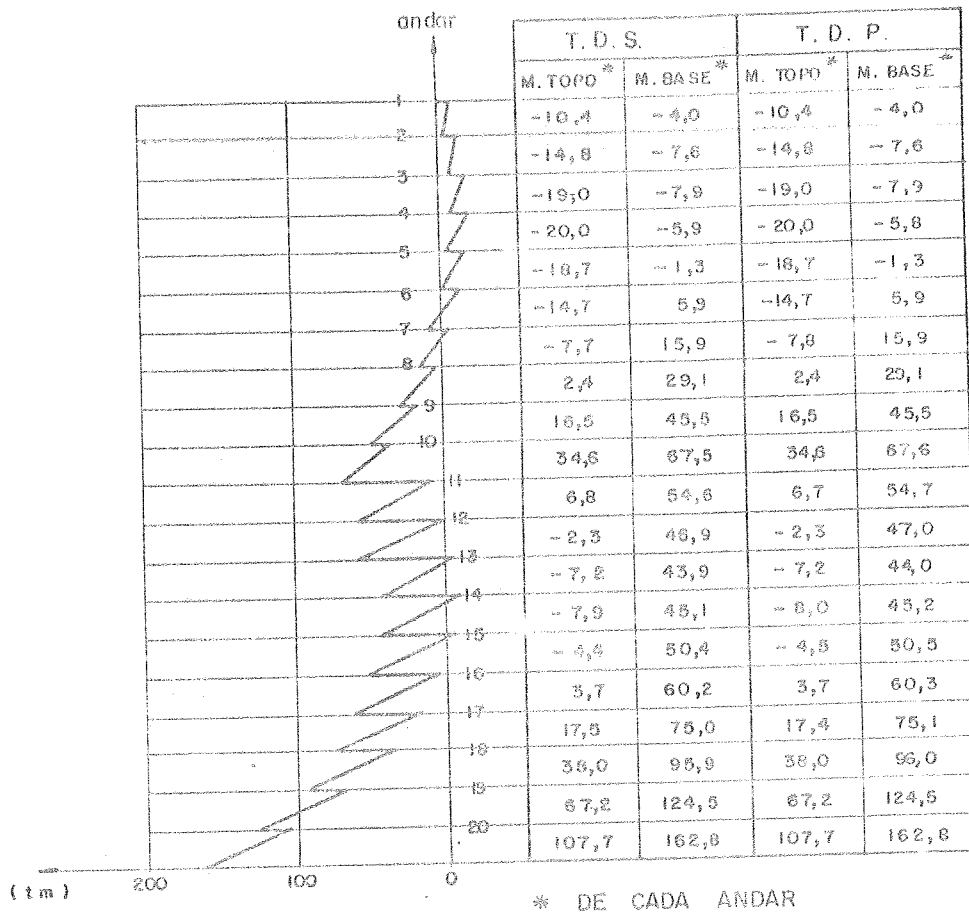


FIG. 2.14 - MOMENTOS FLETORES NA PAREDE 1 (tm)

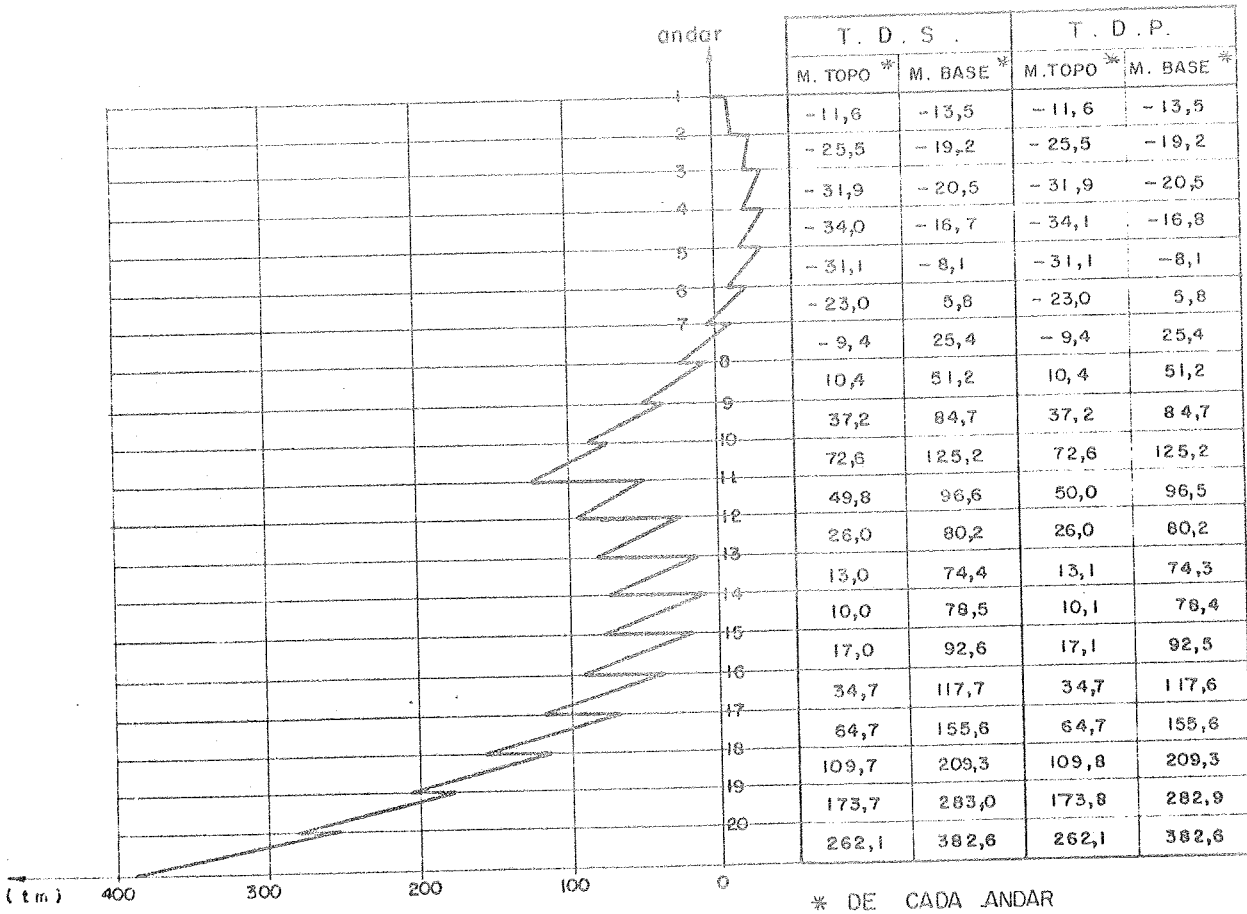


FIG. 2.15 - MOMENTOS FLETORES NA PAREDE 2 (tm)

II.2 - TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS

II.2.1 - Considerações preliminares

Utiliza-se o Método dos Deslocamentos na análise matricial de pórticos planos; desta maneira consegue-se uma técnica passível de fácil programação em computador. Observa-se que o objetivo maior não é a elaboração de um programa automático sofisticado, particularmente eficiente no que diz respeito a tempo de computação e utilização de memória interna, mas sim dotar o leitor de uma "ferramenta" potente e extremamente fértil que possibilite a obtenção de resultados que possam ser tomados como base de comparação para aqueles obtidos através das demais técnicas de análise de pórticos e paredes associados.

A Técnica Discreta de Pórticos permite o tratamento de estruturas planas com geometria, parâmetros e carregamentos variáveis. As deformações axiais nas prumadas de pilares e as deformações por cisalhamento nas paredes são facilmente levadas em conta; enquanto que nas técnicas contínuas (analíticas) a consideração destes efeitos tornaria o tratamento consideravelmente mais difícil e trabalhoso. Os demais processos apresentados neste trabalho não levam em consideração as deformações por força normal nas prumadas mas como é interessante a comparação destes processos com a Técnica Discreta de Pórticos - respeitando-se a hipótese de indeformabilidade axial dos pilares - cuidou-se em elaborar o programa automático de maneira que as deformações axiais nas prumadas possam facilmente ser negligenciadas. Em princípio, parece que seria mais lógico, visando principalmente reduzir o número de incógnitas, considerar todas as prumadas de pilares deformáveis axialmente, excluindo-se aquelas constituídas pelas paredes (mais rígidas).

O tratamento permite considerar os pilares elasticamente vinculados às fundações e analisar possíveis casos de recalques dos apoios.

Seja a estrutura da figura 2.16:

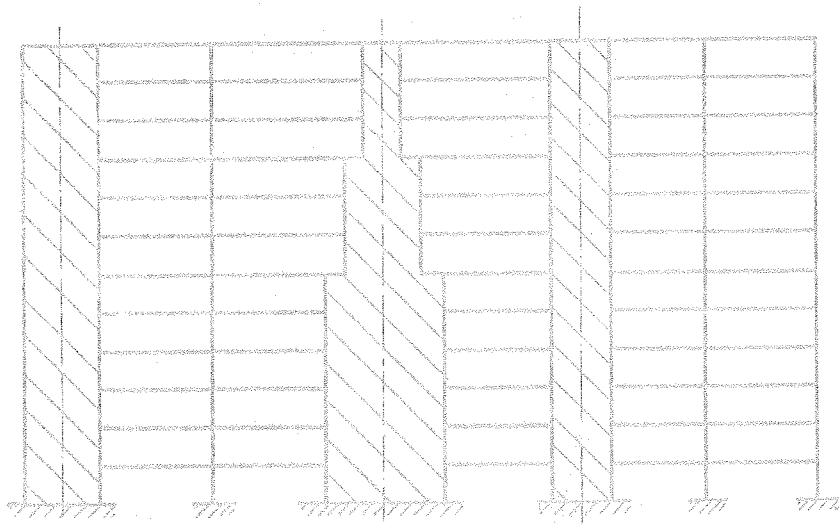


FIG. 2.16. - ASSOCIAÇÃO PLANA DE PÓRTICOS COM PILARES-PAREDES

Supõe-se que as seções planas das paredes permanecem planas quando estas se deformam. Isto justifica a substituição das paredes por pilares de pórtico, levando em conta as deformações por força cortante e adicionando, aos tramos das vigas adjacentes, m ∞ sulas de rigidez infinita nos trechos em que os prolongamentos destas vigas atravessam as paredes. Desta maneira obtém-se um pórtico retangular - figura 2.17 - constituído por barras prismáticas e que se ligam uma às outras através de nós rígidos.

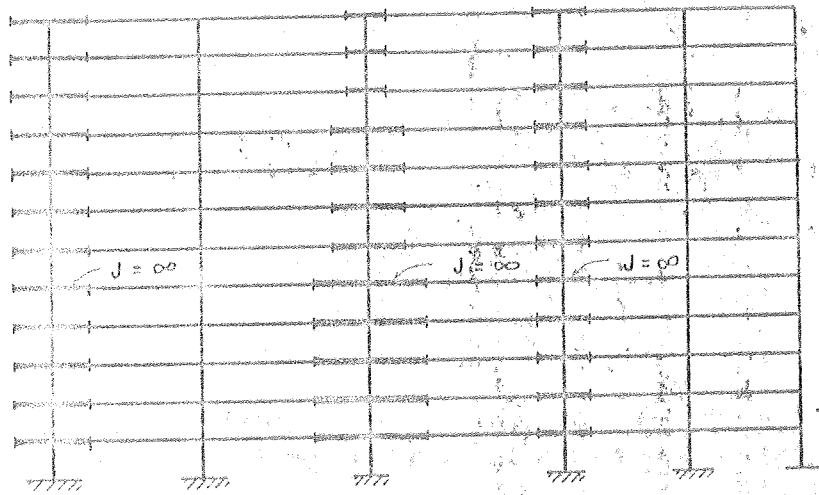


FIG. 2.17 - PÓRTICO PLANO

Devido ao elevado número de incógnitas envolvidas na solução do pórtico plano pelo Método dos Deslocamentos, optou-se pelo tratamento que divide a estrutura em subestruturas ligadas em série, analisando cada uma e somente uma subestrutura de cada vez, possibilitando assim a análise de grandes estruturas através de computadores de pequeno porte desde que se supere, evidentemente, as imprecisões numéricas características das técnicas computacionais.

II.2.2 - Numerações gerais da estrutura e de seus componentes

Para que a análise de uma estrutura através de técnicas computacionais seja levada a bom termo é necessário que se utilize um adequado sistema de numeração que defina a topologia do painel.

Observe-se a figura 2.18. Representa, esquematicamente, um pórtico plano constituído de " n_a " andares (ou " n_a " lajes) e " n_p " prumadas de pilares. Note-se que, por ora, não é necessário saber se estas prumadas são formadas por pilares paredes ou, simplesmente, pilares de pórtico. Cada bar-

ra da estrutura fica perfeitamente definida pelo par ordenado de números (i,j) .

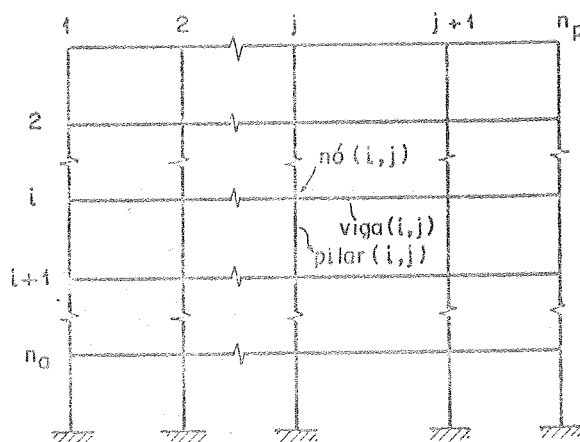


FIG. 2.18 - NUMERAÇÃO DAS BARRAS PELO PAR (i,j)

A numeração de prumadas é feita obrigatoriamente da esquerda para a direita e a dos andares, necessariamente, de cima para baixo.

Através do par ordenado (i,j) fica implícita a numeração dos nós do pórtico em ordem crescente, da esquerda para a direita e sequencialmente por andares, a partir dos mais elevados. Desta maneira, cada tramo de viga ou pilar (i,j) fica orientado segundo um "nó início", respectivamente $J^V_{(i,j)}$ e $J^P_{(i,j)}$ e um "nó fim", respectivamente $K^V_{(i,j)}$ e $K^P_{(i,j)}$, conforme mostra a figura 2.19.

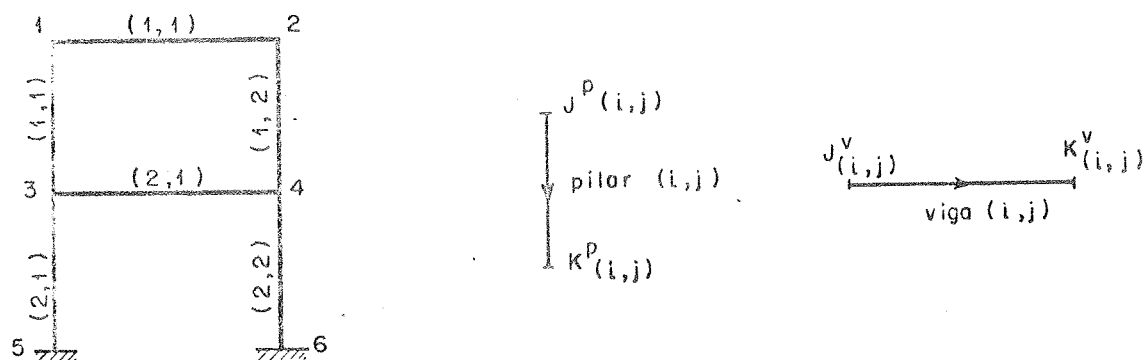


FIG. 2.19 - NUMERAÇÃO IMPLÍCITA DOS NÓS

O relacionamento do par ordenado (i,j) com a numeração sequencial dos nós é feito pelas seguintes expressões:

- tramo de viga (i,j)

$$J_{(i,j)}^V = (i-1)n_p + j \dots\dots\dots(2.44)$$

$$K_{(i,j)}^V = (i-1)n_p + j + 1 \dots\dots\dots(2.45)$$

com "i" variando de 1 até n_a e "j" variando de 1 até $(n_p - 1)$

- tramo de pilar (i,j)

$$J_{(i,j)}^P = (i-1)n_p + j \dots\dots\dots(2.46)$$

$$K_{(i,j)}^P = i \cdot n_p + j \dots\dots\dots(2.47)$$

com "i" variando de 1 até n_a e "j" variando de 1 até n_p .

II.2.3 - Deslocamentos possíveis dos nós do pórtico

No caso mais geral, quando todas as barras são admitidas deformáveis axialmente, existirão 3 deslocamentos possíveis para cada nó do pórtico: translações D_{J_x} e D_{J_y} e rotação D_{J_z} segundo um sistema de coordenadas global Oxyz (x horizontal, y vertical, contidos no plano do pórtico). Estes deslocamentos são numerados conforme indica a figura 2.20-b.

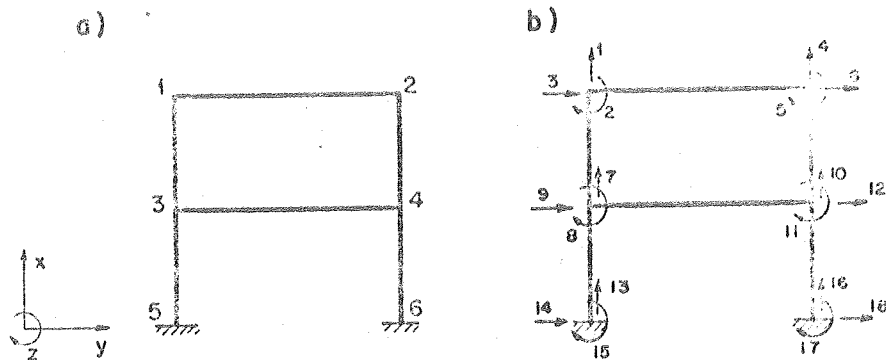


FIG. 2.20 - NUMERAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Assim, o pórtico plano da figura 2.20-a possui 18 deslocamentos possíveis: 12 livres e 6 permanentemente impedidos, se os nós 5 e 6 forem nós de apoio e perfeitamente engastados. As ações (diretamente aplicadas aos nós) e os deslocamentos serão positivos quando possuírem os sentidos indicados nas figuras 2.20.

Visando maior facilidade de escrita, adotar-se-á a seguinte simplificação na representação de uma matriz (ou vetor) genérica G:

$$[G] \rightarrow \underline{G}$$

ou

$$\{G\} \rightarrow \underline{G}$$

Seja $n_J = (n_a + 1)n_p$ o número de nós do pórtico plano e \underline{S}_J sua matriz de rigidez global (correspondente a todos os deslocamentos possíveis inclusive os dos apoios), que relaciona as eventuais ações \underline{A}_J com os correspondentes deslocamentos \underline{D}_J , através de:

$$\underline{A}_J = \underline{S}_J \cdot \underline{D}_J \dots\dots\dots (2.48)$$

ou de maneira partida:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_D \\ \underline{A}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{DD} & \underline{S}_{DR} \\ \underline{S}_{RD} & \underline{S}_{RR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{D}_D \\ \underline{D}_R \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.49)$$

"3n_J·1"
"3n_J·3r_J"
"3n_J·1"

onde os índices "D" e "R" referem-se, respectivamente, aos deslocamentos livres e aos deslocamentos dos nós de apoio.

A matriz de rigidez global \underline{S}_J é singular (não possui inversa). Se as condições de vinculação são tais a impedir pelo menos 3 deslocamentos possíveis, então $\underline{D}_R=0$ e pode-se retirar de (2.49) o seguinte sistema de equações:

$$\underline{A}_D = \underline{S}_{DD} \cdot \underline{D}_D \dots\dots\dots (2.50)$$

"n_d·1"
"n_d·n_d"
"n_d·1"

onde "n_d" representa o número de deslocamentos livres. Admitir-se-á, inicialmente, todos os nós de ligação perfeitamente engastados, desta maneira tem-se:

$$n_d = 3n_a - n_p$$

Ao longo deste trabalho, por várias vezes, discutiu-se a importância da consideração das deformações axiais das barras. Parece claro que a hipótese de indeformabilidade axial das vigas é bastante razoável. Por outro lado, as técnicas apresentadas anteriormente trataram de pilares com rigidez axial infinita. É claro que esta segunda hipótese perde qualquer significado em se tratando de edifícios altos e esbeltos. No entanto, o sistema de equações (2.50) fica bastante reduzido ao se adotar uma das seguintes hipóteses:

- 1^a) Vigas e pilares indeformáveis axialmente quando não existe suficiente disponibilidade de memória de cálculo; ou quando se quer diminuir a propagação dos erros de arredondamento, que para estruturas com grande número de nós pode ser um problema difícil de ser contornado; ou ainda, quando se deseja comparar os resultados, com aqueles obtidos através das demais técnicas, mantendo-se as mesmas hipóteses.
- 2^a) Vigas e prumadas de pilares paredes indeformáveis axialmente: este procedimento é bastante lógico tendo em vista a grande rigidez axial dos pilares paredes perto das rigidezes axiais dos pilares do pórtico.

Um mesmo programa automático deve permitir a análise do pórtico em qualquer uma das situações esquematizadas na figura 2.21:

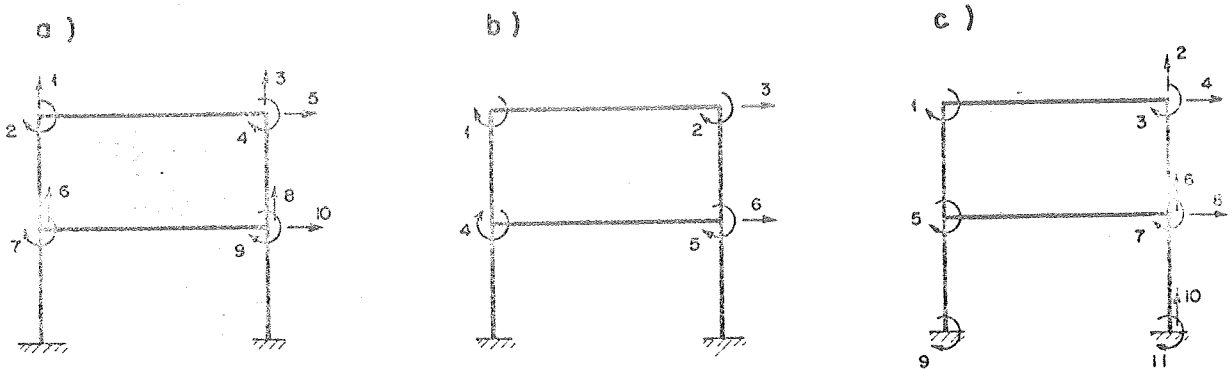


FIG. 2.21 - POSSIVEIS CASOS DE DESLOCAMENTOS INDEPENDENTES

Figura 2.21-a: vigas com rigidez axial infinita e suportes perfeitamente engastados;

Figura 2.21-b: vigas e pilares com rigidez axial infinita e suportes perfeitamente engastados;

Figura 2.21-c: vigas e prumada da esquerda com rigidez axial infinita; suporte da esquerda com engastamento elástico à rotação (ou eventual recalque de rotação) e suporte da direita elasticamente vinculado ao deslocamento vertical e à rotação (ou eventuais recalques segundo estas coordenadas).

II.2.4 - Matrizes de rigidez das barras

Seja S_{-M}^V a matriz de rigidez de um tramo de viga, com rigidez axial infinita, calculada para os deslocamentos numerados como na figura 2.22-a

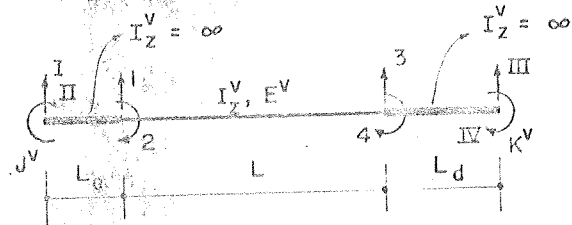
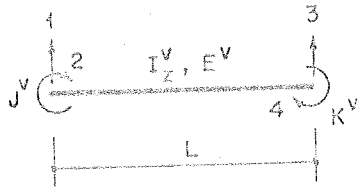


FIG.2.22a - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS NAS EXTREMIDADES DAS VIGAS

FIG.2.22b- DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS NAS EXTREMIDADES DAS VIGAS COM MÍSLAS DE RIGIDEZ INFINITA

$$S_{-M}^V = \begin{bmatrix} S_{M11}^V & S_{M12}^V & S_{M13}^V & S_{M14}^V \\ S_{M21}^V & S_{M22}^V & S_{M23}^V & S_{M24}^V \\ S_{M31}^V & S_{M32}^V & S_{M33}^V & S_{M34}^V \\ S_{M41}^V & S_{M42}^V & S_{M43}^V & S_{M44}^V \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (2.51)$$

ou em termos mais explícitos

$$S_{-M}^V = \begin{bmatrix} \frac{12E^V I_z^V}{L^3} & -\frac{6E^V I_z^V}{L^2} & -\frac{12E^V I_z^V}{L^3} & -\frac{6E^V I_z^V}{L^2} \\ & \frac{4E^V I_z^V}{L} & \frac{6E^V I_z^V}{L^2} & \frac{2E^V I_z^V}{L} \\ \text{SIMÉTRICO} & & \frac{12E^V I_z^V}{L^3} & \frac{6E^V I_z^V}{L^2} \\ & & & \frac{4E^V I_z^V}{L} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (2.52)$$

onde L é o comprimento da viga, I_z^V o momento de inércia em torno do eixo passando pelo centro de gravidade da seção, perpendicular ao plano do pórtico e E^V o módulo de elasticidade longitudinal.

Seja o tramo de viga (figura 2.22-b) de comprimento L deformável ao momento fletor acrescida das mísulas de comprimentos L_e (à esquerda) e L_d (à direita) com rigidez infinita à flexão.

Os deslocamentos segundo as coordenadas 1, 2, 3 e 4 estão relacionados com os deslocamentos correspondentes as coordenadas I, II, III e IV pela matriz de transformação T através da seguinte expressão:

$$\begin{matrix} D_{-M}^V \\ "4 \cdot 1" \end{matrix} = \begin{matrix} T \\ "4 \cdot 4" \end{matrix} \cdot \begin{matrix} D_{-MD}^V \\ "4 \cdot 1" \end{matrix} \dots\dots\dots(2.53)$$

ou

$$\begin{bmatrix} D_{M_1}^V \\ D_{M_2}^V \\ D_{M_3}^V \\ D_{M_4}^V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L_e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{M_I}^V \\ D_{M_{II}}^V \\ D_{M_{III}}^V \\ D_{M_{IV}}^V \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.54)$$

Se S_{-M}^V é a matriz de rigidez que relaciona os esforços E_{-M}^V nas extremidades da viga de comprimento L com os deslocamentos D_{-M}^V , então

$$\begin{matrix} E_{-M}^V \\ "4 \cdot 1" \end{matrix} = \begin{matrix} S_{-M}^V \\ "4 \cdot 4" \end{matrix} \cdot \begin{matrix} D_{-M}^V \\ "4 \cdot 1" \end{matrix} \dots\dots\dots(2.55)$$

e se S_{-MD}^V é a matriz de rigidez que relaciona os esforços E_{-MD}^V nas extremidades da viga de comprimento $(L+L_e+L_d)$ com

os correspondentes deslocamentos $D_{\sim MD}^V$, então

$$\begin{matrix} E_{\sim MD}^V & = & S_{\sim MD}^V & \cdot & D_{\sim MD}^V & \dots\dots\dots & (2.56) \\ "4 \cdot 1" & & "4 \cdot 4" & & "4 \cdot 1" & & \end{matrix}$$

Em decorrência da equação (2.53), pode-se calcular a matriz de rigidez $S_{\sim MD}^V$ em função de $S_{\sim M}^V$ através da conhecida expressão:

$$\begin{matrix} S_{\sim MD}^V & = & \tilde{T}^T & \cdot & S_{\sim M}^V & \cdot & \tilde{T} & \dots\dots\dots & (2.57) \\ "4 \cdot 4" & & "4 \cdot 4" & & "4 \cdot 4" & & "4 \cdot 4" & & \end{matrix}$$

onde \tilde{T}^T é a matriz transposta de \tilde{T} .

Efetuada-se o triplo produto matricial indicado pela equação (2.57) encontra-se:

$$S_{\sim MD}^V = \begin{matrix} & \begin{matrix} I & II & III & IV \end{matrix} & \\ \begin{matrix} I \\ II \\ \dots \\ III \\ IV \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} \frac{12E^V I^V z}{L^3} & \frac{-6E^V I^V z}{L^2} \cdot e_1 & \frac{-12E^V I^V z}{L^3} & \frac{-6E^V I^V z}{L^2} \cdot d_1 \\ & \frac{4E^V I^V z}{L} (e_2 + 1) & \frac{-6E^V I^V z}{L^2} \cdot e_1 & \frac{2E^V I^V z}{L} (c + 1) \\ & & \frac{12E^V I^V z}{L^3} & \frac{6E^V I^V z}{L^2} \cdot d_1 \\ & & & \frac{4E^V I^V z}{L} (d_2 + 1) \end{array} \right] & \begin{matrix} I \\ II \\ \dots \\ III \\ IV \end{matrix} \end{matrix} \dots (2.58)$$

SIMÉTRICO

$$\left. \begin{aligned}
 e_1 &= 1 + \frac{2L_e}{L} \\
 e_2 &= \frac{3L_e}{L} \left(1 + \frac{L_e}{L} \right) \\
 d_1 &= 1 + \frac{L_d}{L} \\
 d_2 &= \frac{3L_e}{L} \left(1 + \frac{L_d}{L} \right) \\
 c &= \frac{3L_e}{L} \left(1 + \frac{L_d}{L} \right) + \frac{3L_d}{L} \left(1 + \frac{L_e}{L} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.59)$$

Seja S_{MD}^P a matriz de rigidez de um tramo de pilar parede, calculada para os deslocamentos nas extremida-

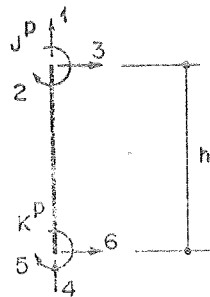


FIG.2.23 - DESLOC. POSSÍVEIS NUM TRAMO DE PILAR - PAREDE

des desta barra e numerados conforme indica a figura 2.23.

A matriz de rigidez da barra é calculada levando-se em conta o efeito das deformações por força cortante. Os resultados obtidos no item II.1.3 podem ser aplicados aos esforços segundo as coordenadas 2,3,5 e 6. Assim, a matriz de rigidez S_{MD}^P escreve-se:

	1	2	3	4	5	6	
S_{MD}^P	$S_{MD 11}^P$	0	0	$S_{MD 14}^P$	0	0	1
	0	$S_{MD 22}^P$	$S_{MD 23}^P$	0	$S_{MD 25}^P$	$S_{MD 26}^P$	2
	0	$S_{MD 32}^P$	$S_{MD 33}^P$	0	$S_{MD 35}^P$	$S_{MD 36}^P$	3
	$S_{MD 41}^P$	0	0	$S_{MD 44}^P$	0	0	4
	0	$S_{MD 52}^P$	$S_{MD 53}^P$	0	$S_{MD 55}^P$	$S_{MD 56}^P$	5
	0	$S_{MD 62}^P$	$S_{MD 63}^P$	0	$S_{MD 65}^P$	$S_{MD 66}^P$	6

.....(2.60)

ou

$[S_{MD}^P]$	$\frac{E^P A_x^P}{h}$	0	0	$-\frac{E^P A_x^P}{h}$	0	0	
		$\frac{4E^P I_z^P}{h} F_{C_2} F_{C_4}$	$-\frac{6E^P I_z^P}{h} F_{C_2}$	0	$\frac{2E^P I_z^P}{h} F_{C_2} F_{C_3}$	$\frac{6E^P I_z^P}{h^2} F_{C_2}$	
			$\frac{12E^P I_z^P}{h^3} F_{C_2}$	0	$-\frac{6E^P I_z^P}{h^2} F_{C_2}$	$-\frac{12E^P I_z^P}{h^3} F_{C_2}$(2.61)
				$\frac{E^P I_x^P}{h}$	0	0	
					$\frac{4E^P I_z^P}{h} F_{C_2} F_{C_4}$	$\frac{6E^P I_z^P}{h^2} F_{C_2}$	
						$\frac{12E^P I_z^P}{h^3} F_{C_2}$	

SIMÉTRICO

onde h é o comprimento do tramo de pilar parede (altura do andar), A_x^P área da seção transversal, I_z^P momento de inércia da seção em torno do eixo passando pelo C.G. da seção, perpendicular ao plano do pórtico. Os valores de F_{C_1} , F_{C_2} , F_{C_3} e F_{C_4} são, respectivamente, calculados pelas equações (2.38), (2.39), (2.40) e (2.41).

II.2.5 - Montagem da matriz de rigidez da estrutura

No item II.2.3 argumentou-se que cada nó de um pórtico plano possuía 3 graus de liberdade. Introduziu-se, a seguir, o conceito da matriz de rigidez global \underline{S}_J correspondente a todos os deslocamentos possíveis do painel. A partir desta matriz foi obtida uma sub-matriz \underline{S}_{DD} correspondente a todos os deslocamentos livres do pórtico. Em seguida, passou-se a discutir a conveniência de considerar ou não as deformações axiais das barras. Ficou definitivamente estabelecido que as vigas, de uma maneira geral, podem ser supostas indeformáveis axialmente.

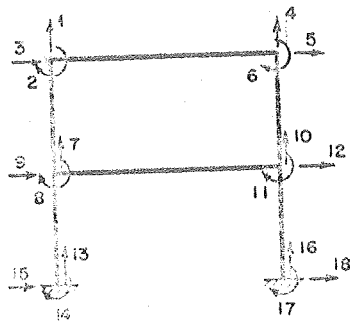


FIG. 2.24 - VIGAS DEFORMÁVEIS AXIALMENTE

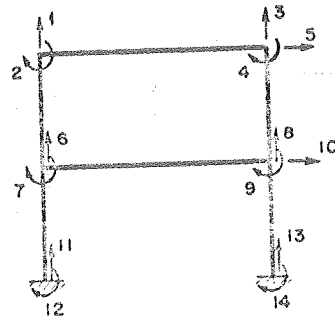


FIG. 2.25 - VIGAS INDEFORMÁVEIS AXIALMENTE

Observe-se as figuras 2.24 e 2.25. A matriz de rigidez global \underline{S}_J para os deslocamentos segundo as coordenadas da figura 2.25 pode ser obtida a partir da matriz de rigidez global para os deslocamentos segundo as coordenadas da figura 2.24 através de equação semelhante à (2.57), desde que se conheça a matriz que transforma as coordenadas da figura 2.25 nas coordenadas da figura 2.24.

Entretanto a matriz \underline{S}_J (para os deslocamentos da figura 2.25) será obtida diretamente, somando-se as contribuições de cada barra nas posições adequadas de linha e coluna desta matriz. Para tanto, necessita-se de um algoritmo que relacione os deslocamentos nas extremidades das barras com os correspondentes deslocamentos no pórtico (numerados conforme a figura 2.25).

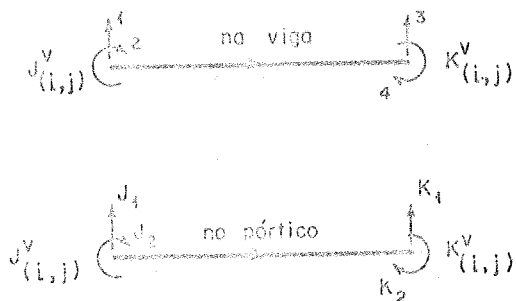


FIG.2.26 - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS NAS VIGAS E DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES NO PÓRTICO

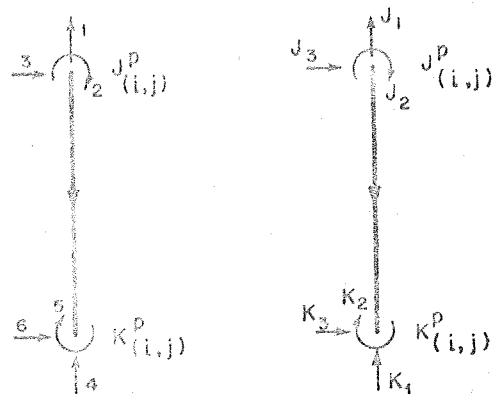


FIG.2.27 - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS NO TRAMO DE PILAR E DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES NO PÓRTICO

Para os tramos de viga:

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 &= 2J_{(i,j)}^V - 1 + \text{parte inteira} \left(\frac{J_{(i,j)}^V - 1}{n_p} \right) \\
 J_2 &= J_1 + 1 \\
 K_1 &= J_1 + 2 \\
 K_2 &= J_1 + 3 \\
 \text{onde } (i=1,2,\dots,n_a) \text{ e } (j=1,2,\dots,n_p-1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.63)$$

Para os tramos de pilar:

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 &= 2J_{(i,j)}^P - 1 + \text{parte inteira} \left(\frac{J_{(i,j)}^P - 1}{n_p} \right) \\
 J_2 &= J_1 + 1 \\
 J_3 &= (2n_p + 1) \cdot \left\{ \text{parte inteira} \left(\frac{J_{(i,j)}^P - 1}{n_p} \right) + 1 \right\}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_1 &= 2K_{(i,j)}^P - 1 + \text{parte inteira} \left(\frac{K_{(i,j)}^P - 1}{n_p} \right) \\
 K_2 &= K_1 + 1 \\
 K_3 &= J_3 + 2n_p + 1 \quad (i \neq n_a)
 \end{aligned} \right\} \dots (2.64)$$

onde $(i=1,2,\dots,n_a)$ e $(j=1,2,\dots,n_p)$

O deslocamento na direção da coordenada K_3 quando $i=n_a$ é sempre nulo e não existe nenhum interesse em gerar as contribuições dos tramos de pilar para a matriz de rigidez global, segundo estas coordenadas. As contribuições, dos tramos de pilar, segundo as coordenadas K_1 e K_2 quando $i=n_a$ constituem os elementos das sub-matrizes S_{DR} , S_{RD} e S_{RR} . A sub-matriz S_{DR} será utilizada nos casos de análise da estrutura submetida a recalques de apoio. As sub-matrizes S_{RD} e S_{RR} só seriam utilizadas se, por ventura, houvesse interesse no cálculo das reações de apoio.

As expressões (2.63) e (2.64) admitem que o pórtico possua $(2n_p+1)$ deslocamentos livres por andar, a saber: em cada nó um deslocamento vertical, uma rotação e um deslocamento horizontal (comum a todos os nós do andar considerado). Por outro lado, em alguns casos particulares, pode ser interessante considerar uma, algumas ou todas as prumadas de pilares indeformáveis axialmente.

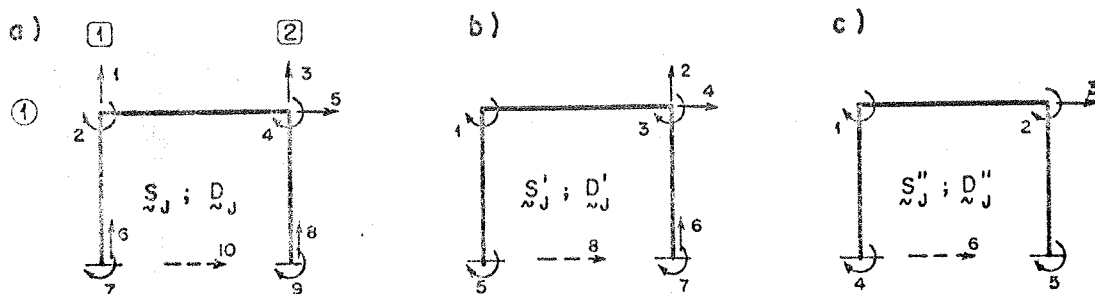


FIG. 2.28 - DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS NO PÓRTICO

Seja o mais simples dos pórticos regulares: o da figura 2.28. As coordenadas 10, 8 e 6, respectivamente nas figuras 2.28-a, 2.28-b e 2.28-c não têm significado, na medida em que todos os deslocamentos horizontais dos apoios são sempre nulos. Os números inscritos em pequenos quadradinhos (figura 2.28-a) identificam as prumadas de pilares (numeradas da esquerda para a direita); o número inscrito num pequeno círculo identifica o andar (numerados de cima para baixo). A figura 2.28-a mostra a numeração das coordenadas deslocamentos quando são considerados os $(2n_p + 1)$ deslocamentos livres por andar; na figura 2.28-b o sistema de coordenadas deslocamentos admite que a prumada 1 não se deforma axialmente, enquanto que as coordenadas da figura 2.28-c indicam que ambas as prumadas têm rigidez axial infinita. As correspondentes matrizes de rigidez para cada sistema de coordenadas (figuras 2.28-a, 2.28-b e 2.28-c) são respectivamente: \underline{S}_J , \underline{S}_J' e \underline{S}_J'' . As matrizes \underline{S}_J' e \underline{S}_J'' poderiam ser obtidas a partir de \underline{S}_J através das seguintes equações:

$$\underline{S}_J' = (\underline{C}')^t \cdot \underline{S}_J \cdot (\underline{C}') \dots \dots \dots (2.65)$$

"8·8" "8·10" "10·10" "10·8"

$$\underline{S}_J'' = (\underline{C}'')^t \cdot \underline{S}_J \cdot (\underline{C}'') \dots \dots \dots (2.66)$$

"6·6" "6·10" "10·10" "10·6"

onde

$$\underline{C}' = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \text{zeros} & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{zeros} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad \underline{C}'' = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \text{zeros} & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 & \\ \text{zeros} & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right]$$

tais que:

$$\underline{D}_J = \underline{C}' \cdot \underline{D}'_J \dots\dots\dots(2.67)$$

"10.1" "10.8" "8.1"

$$\underline{D}_J = \underline{C}'' \cdot \underline{D}''_J \dots\dots\dots(2.68)$$

"10.1" "10.6" "6.1"

As operações indicadas pelas equações (2.65) e (2.66) levariam, simplesmente, à eliminação das linhas e colunas de \underline{S}_J , correspondentes às coordenadas para deslocamentos verticais dos nós pertencentes às prumadas indeformáveis axialmente.

Entretanto, as matrizes \underline{S}'_J e \underline{S}''_J podem ser geradas diretamente sem o auxílio das matrizes de transformação \underline{C}' e \underline{C}'' ; sem que seja necessário gerar, primeiramente, a matriz \underline{S}_J (de maior ordem) e, conseqüentemente, sem que sejam efetuadas os triplos produtos matriciais indicados pelas equações (2.65) e (2.66). A idéia básica é a seguinte:

a- Estabelecer um código para as prumadas de pilares tal que a cada prumada j fique associado um número $(C_p)_j$ que assume um dos dois valores:

$(C_p)_j = 0$, quando a prumada j for deformável axialmente;

$(C_p)_j = 1$, quando a prumada j for suposta indeformável axialmente.

Os $(C_p)_j$, reunidos ordenadamente, constituem o vetor \underline{C}_p de ordem " $n_p \cdot 1$ " que deverá ser fornecido como dado auxiliar para a definição da estrutura.

b- A partir do vetor \underline{C}_p , gerar, automaticamente, através de um algoritmo conveniente, o vetor \underline{C}_d (código para os deslocamentos) de ordem " $n_t \cdot 1$ ", tal que:

$(C_d)_k = 0$, quando o deslocamento segundo a coordenada k é possível de ocorrer;

$(C_d)_k = 1$, quando a coordenada k - no pórtico n_u numerado com as $(2n_p + 1)$ coordenadas por andar - corresponder ao deslocamento vertical de não pertencente a uma prumada indeformável axialmente;

onde n_t representa o número total de coordenadas deslocamentos, inclusive os da base

$$n_t = (n_a + 1) (2n_p + 1) \dots \dots \dots (2.69)$$

c- A partir do vetor C_d , construir automaticamente o vetor C_a (código acumulado), da ordem " $n_a + 1$ ", tal que:

$$\begin{aligned} (C_a)_1 &= (C_d)_1 \\ &\vdots \\ (C_a)_k &= (C_d)_1 + (C_d)_2 + \dots + (C_d)_k \end{aligned}$$

Assim, a matriz de rigidez total da estrutura S_J pode ser obtida em duas etapas (APÊNDICE 2):

1ª Etapa - A partir da matriz de rigidez S_{MD}^V do tramo de viga, tramo este definido pelo i e j ordenado (i, j) , com $i=1, 2, \dots, n_a$ e $j=1, 2, \dots, (n_p + 1)$. Os valores J_1, J_2, K_1 e K_2 , calculados segundo as equações (2.63), devem ser modificados de acordo com as equações (2.70)

$$\left. \begin{aligned} J'_1 &= J_1 - (C_a)_{J_1} \\ J'_2 &= J_2 - (C_a)_{J_2} \\ K'_1 &= K_1 - (C_a)_{K_1} \\ K'_2 &= K_2 - (C_a)_{K_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.70)$$

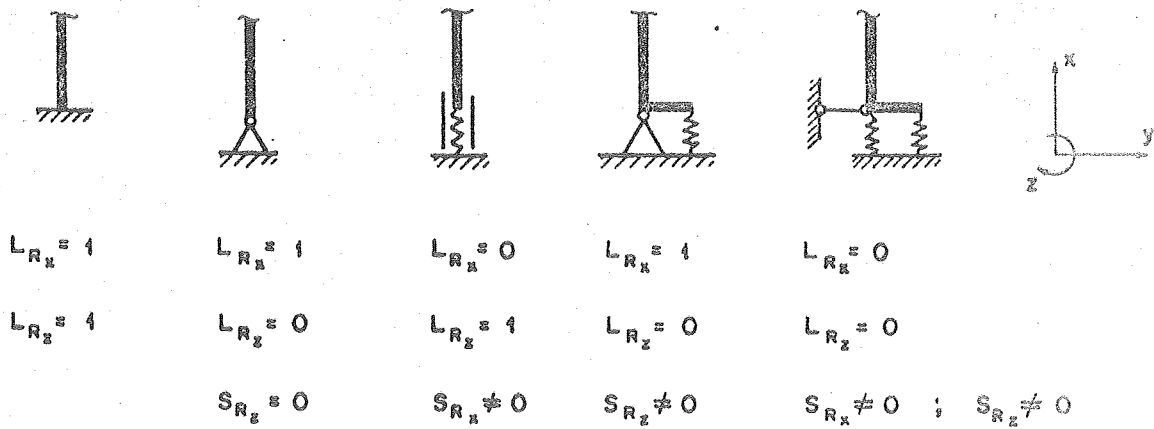


FIG. 2.29 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DOS SUPORTES

As informações sobre os apoios estão contidas nos vetores \underline{L}_R e \underline{S}_R . O vetor \underline{L}_R (Lista das Restrições) reúne - ordenadamente - as restrições L_{R_x} e L_{R_z} para cada prisma j conforme as expressões (2.72)

$$\left. \begin{aligned}
 (L_R)_{j_1} &= L_{R_x} \\
 (L_R)_{j_2} &= L_{R_z} \\
 \text{com} & \\
 j_1 &= 2j-1 - (C_a)_{2j-1} \\
 j_2 &= 2j - (C_a)_{2j}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.72)$$

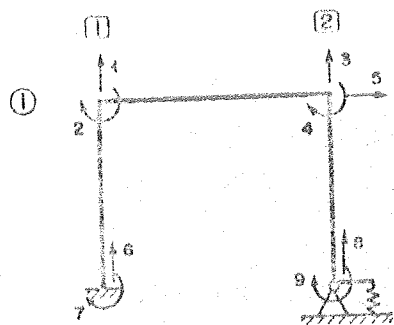
e onde:

$$\begin{aligned}
 L_{R_x} &= 1 & \text{se} & D_{J_x} = 0 \\
 L_{R_z} &= 1 & \text{se} & D_{J_z} = 0 \\
 L_{R_x} &= 0 & \text{se} & D_{J_x} \neq 0 \\
 L_{R_z} &= 0 & \text{se} & D_{J_z} \neq 0
 \end{aligned}$$

O vetor \underline{S}_R fornece as rigidezes S_{R_x} e S_{R_z} dos vínculos elásticos identificados pelos correspondentes valores de $L_{R_x} = 0$ e $L_{R_z} = 0$. Identifica-se uma articulação fixando-se o valor de $L_{R_z} = 0$ e atribuindo-se rigidez nula à mola de rotação (vínculo elástico com $S_{R_z} = 0$).

A presença de vínculos elásticos na base, introduz alterações na matriz de rigidez global relativa à estrutura com apoios rígidos. Para o bom entendimento destas modificações relembra-se o significado dos coeficientes de uma matriz de rigidez para um determinado sistema de coordenadas deslocamentos. Uma coluna genérica de ordem g desta matriz reúne, ordenadamente, os esforços segundo as coordenadas deslocamentos, necessários para provocar um deslocamento unitário na direção da coordenada de ordem g , mantendo-se nulos os deslocamentos segundo as demais coordenadas. Portanto, se existirem vínculos elásticos, os únicos coeficientes de rigidez que se alteram são aqueles situados na diagonal principal e correspondentes às coordenadas que definem estes vínculos. Estes novos coeficientes resultam da adição dos coeficientes normais (estrutura sem vínculos elásticos) com os respectivos coeficientes de rigidez dos vínculos elásticos. A presença de vínculos elásticos em outras coordenadas não acarreta nenhuma alteração nos coeficientes da matriz de rigidez que estão fora da diagonal principal pois, no estado de deslocamento correspondente, estes vínculos não são solicitados. Ressalte-se que, existindo apoios vinculados elasticamente, a matriz de rigidez global \underline{S}_J deve ter suas linhas e colunas convenientemente rearranjadas de modo a obter a sub-matriz \underline{S}_{DD} , correspondente aos deslocamentos livres.

Para ilustrar estas considerações toma-se como exemplo a estrutura da figura 2.30. As prumadas 1 e 2 são supostas indeformáveis axialmente e a prumada 2 está elasticamente vinculada à base através da mola com rigidez S_{R_z} à rotação.



O valor do coeficiente S na matriz S_J é :

$$S = \frac{4E^p I_z^p}{h} + S_{Rz}$$

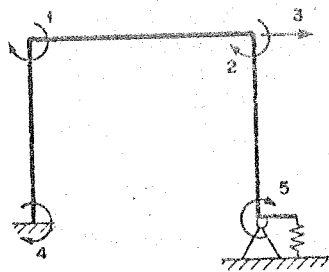
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	X	X	X	X		X			
2	X	X	X	X	X		X		
3	X	X	X	X				X	
4	X	X	X	X	X				X
6		X		X	X		X		X
6	X					X			
7		X			X		X		
8			X					X	
9				X	X				S

S_J

1	1			
2	1			
C_{NP}				
1	1			
2	1			
3	1			
4	0			
L_{NR}				
1	1			
2	0			
3	1			
4	0			
5	0			
6	1			
7	0			
8	1			
9	0			
S_{NR}				
1	1			
2	1			
3	2			
4	2			
5	2			
6	3			
7	3			
8	4			
9	4			
C_d				
1	1			
2	1			
3	2			
4	2			
5	2			
6	3			
7	3			
8	4			
9	4			
C_{ND}				

FIG.2.30 - SISTEMA EXTERNO DE COORDENADAS (S.E.C.)

MATRIZES S_J, L_{NR}, S_{NR}



	1	2	3	4	5
1	X	X	X	X	
2	X	X	X		X
3	X	X	X	X	X
4	X		X	X	
5		X	X		S

S'_J

1	1
2	0
L'_{NR}	
1	-
2	S_{Rz}
S'_{NR}	

FIG.2.31 - SISTEMA INTERNO DE COORDENADAS (S.I.C.)

MATRIZES S'_J, L'_{NR}, S'_{NR}

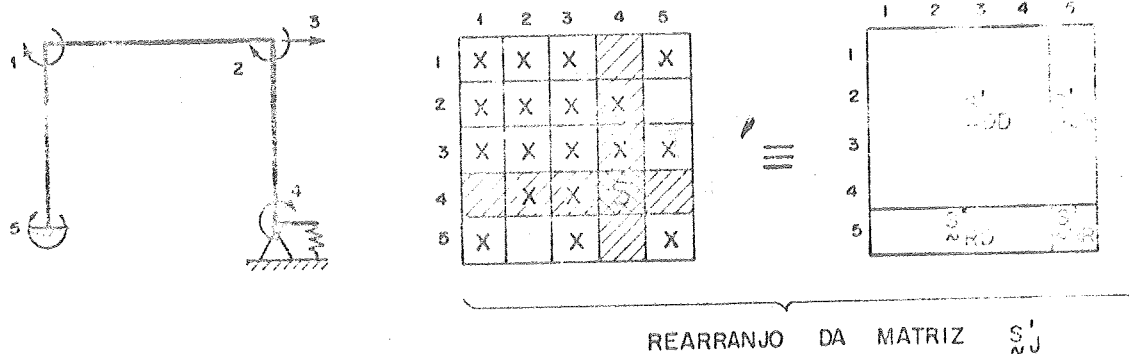


FIG. 2.32 - REARRANJO DAS LINHAS E COLUNAS DE S'_J

A figura 2.30 mostra, esquematicamente, como seria a matriz de rigidez global da estrutura no S.E.C.: os elementos não nulos estão assinalados com x e a rigidez $(S'_J)_{9,9} = S$ é obtida adicionando à parcela $4E^P I_z^P/h$ o valor da rigidez da mola S_R . Observe-se que as informações contidas nos vetores \underline{L}_R e \underline{S}_R também são transmitidas "via S.E.C.". Os vetores \underline{C}_d e \underline{C}_a , obtidos a partir de \underline{C}_p , estão representados no seu dimensionamento normal; ou seja, compatível com o número de coordenadas deslocamentos do S.E.C. Entretanto, com o auxílio dos vetores \underline{C}_p , \underline{C}_d e \underline{C}_a a matriz de rigidez S'_J correspondente ao "Sistema Interno de Coordenadas" (S.I.C.) - figura 2.31 - bem como os vetores \underline{L}'_R e \underline{S}'_R são gerados diretamente, com evidente economia de memória. A figura 2.32 mostra a situação final da matriz S'_J após o rearranjo das linhas e colunas (com o auxílio de \underline{L}'_R) de modo a obter a sub-matriz S'_{DD} , correspondente aos deslocamentos incógnitos. Para finalizar, observe-se que, assim como a entrada das informações, também a saída dos resultados (deslocamentos e esforços nas extremidades das barras) deve obedecer ao "Sistema Externo de Coordenadas".

II.2.7 - Recalques de apoio

Retome-se a equação matricial (2.49), agora no "Sistema Interno de Coordenadas":

$$\begin{Bmatrix} \underline{A}_{-D} \\ \underline{A}_{-R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{DD} & \underline{S}_{DR} \\ \underline{S}_{RD} & \underline{S}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{D}_{-D} \\ \underline{D}_{-R} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.73)$$

onde os índices "D" e "R" referem-se, respectivamente, aos deslocamentos livres (inclusive aqueles deslocamentos correspondentes às "coordenadas vinculadas elasticamente") e aos deslocamentos dos nós de apoio.

Efetuando-se as operações indicadas pela equação (2.73) tem-se:

$$\underline{A}_{-D} = \underline{S}_{DD} \underline{D}_{-D} + \underline{S}_{DR} \underline{D}_{-R} \dots\dots\dots(2.74)$$

Se as condições dos apoios são tais que todos os deslocamentos \underline{D}_{-R} se anulam (apoios perfeitamente engastados) o sistema de equações se resume a

$$\underline{A}_{-D} = \underline{S}_{DD} \underline{D}_{-D}$$

e os deslocamentos livres \underline{D}_{-D} são calculados através de

$$\underline{D}_{-D} = \underline{S}_{DD}^{-1} \underline{A}_{-D} \dots\dots\dots(2.75)$$

Entretanto, se forem impostos determinados deslocamentos (recalques) segundo as "coordenadas vinculadas rigidamente"; ou seja, se $\underline{D}_{-R} \neq 0$, tem-se:

$$\underline{D}_{-D} = \underline{S}_{DD}^{-1} (\underline{A}_{-D} - \underline{S}_{DR} \underline{D}_{-R}) \dots\dots\dots(2.76)$$

As reações de apoio são, então, calculadas através de:

$$\underline{A}_{-R} = \underline{S}_{-RD} \underline{D}_{-D} + \underline{S}_{-RR} \underline{D}_{-R} \dots\dots\dots(2.77)$$

Pode-se analisar a estrutura submetida a recalques de apoio, independentemente da ação do carregamento externo. Neste caso, a equação (2.76) se escreve:

$$\underline{D}_{-D} = - \underline{S}_{-DD}^{-1} \underline{S}_{-DR} \underline{D}_{-R} \dots\dots\dots(2.78)$$

Os deslocamentos dos apoios (se existirem) são fornecidos através do vetor \underline{D}_{-R}^o que reúne - ordenadamente - os deslocamentos $D_{R_x}^o$ e $D_{R_z}^o$, respectivamente, deslocamento vertical e rotação da base de cada prumada j , segundo as expressões (2.79)

$$\left. \begin{aligned} (D_{R_x}^o)_{j_1} &= D_{R_x}^o \\ (D_{R_z}^o)_{j_2} &= D_{R_z}^o \\ \text{com} \\ j_1 &= 2j-1 - (C_a)_{2j-1} \\ j_2 &= 2j - (C_a)_{2j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.79)$$

II.2.8 - Redução da matriz de rigidez

O maior obstáculo na utilização das técnicas discretas aplicadas a pórticos com elevado número de andares é a resolução de grandes sistemas de equações lineares. No Processo dos Deslocamentos, a matriz dos coeficientes do sistema de equações - matriz de rigidez - é gerada automaticamente. Esta matriz é necessariamente simétrica; de uma maneira geral é diagonalmente predominante; e, dependendo do sistema de coordenadas deslocamentos adotado, os coeficien-

tes não nulos se agrupam em torno da diagonal principal, constituindo o que se convencionou chamar banda da matriz. Na medida em que cresce a ordem da matriz de rigidez (elevado número de incógnitas), torna-se difícil o seu armazenamento na memória central do computador, pois o número de variáveis envolvidas no processo é bastante grande e a disponibilidade de memória é bastante prejudicada quando se trabalha com computadores de pequeno porte. Além disto, a inversão de matrizes de ordem elevada é perigosa e pode comprometer os resultados.

Em se tratando de problemas estruturais, o procedimento usual é tirar partido da simetria da matriz e da sua formação em banda. Consegue-se excepcional economia de memória interna gerando e armazenando, em uma matriz retangular, os termos da diagonal principal e os não nulos situados acima (ou abaixo) desta diagonal. Diz-se, neste caso, que "meia banda" da matriz de rigidez está armazenada sob forma de uma matriz retangular. Desta maneira, o sistema de equações lineares pode ser resolvido, sem que se proceda a inversão da matriz de rigidez, com a utilização do método de eliminação de GAUSS ou pelo método da decomposição de CHOLESKY. Existem casos em que mesmo o armazenamento de meia banda da matriz excede a capacidade de memória interna do computador. Mesmo assim, o problema pode ser superado adotando-se a técnica mencionada por SAVASSI²² que utiliza, convenientemente, a memória central e uma memória auxiliar, aplicando o processo de GAUSS a "blocos de coeficientes" do sistema, devidamente arranjados.

O procedimento adotado no presente trabalho, tendo em vista a possibilidade de se analisar estruturas com elevado número de andares, difere - conceitualmente - das variantes acima mencionadas. A idéia básica se apoia na interpretação física de uma formulação matemática. Admite-se a estrutura subdividida em estruturas de menor porte (subestruturas), dimensionadas de maneira tal que a análise de cada uma possa ser efetuada dentro da memória central do computador, e ligadas em série através de determinados nós.

Para maior facilidade de compreensão, considere-se a estrutura da figura 2.33 dividida em duas subestruturas com a introdução de nós de ligação (fictícios), temporariamente bloqueados a qualquer deslocamento.

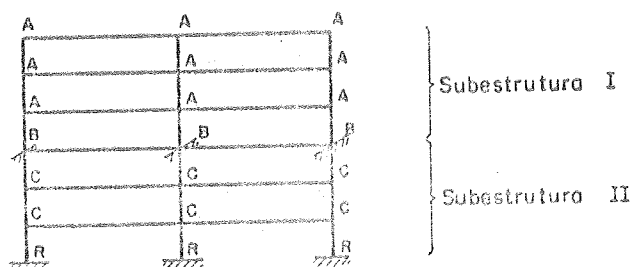


FIG.2.33 - PÓRTICO PLANO DIVIDIDO EM 2 SUBESTRUTURAS

No caso mais geral, cada nó deste pórtico possui 3 deslocamentos incógnitos: deslocamento horizontal, vertical e rotação.

Pode-se então identificar quatro tipos de nós, a saber:

- Tipo A - nós livres da subestrutura I
- Tipo B - nós de ligação entre a subestrutura I e II e que são temporariamente impedidos de se deslocarem
- Tipo C - nós livres da subestrutura II
- Tipo R - nós permanentemente bloqueados (nós de apoio) e que pertencem a subestrutura II.

Adotando-se uma numeração dos nós tal que os do tipo A, na subestrutura I, antecedem os tipo B e os nós tipo C, na subestrutura II, antecedem os do tipo R, obtém-se a seguinte equação matricial que relaciona as eventuais ações A_j com os correspondentes deslocamentos D_j (inclusive os deslocamentos dos apoios) através da matriz de rigidez global S_j da estrutura.

$$\begin{Bmatrix} \underline{A}_A \\ \underline{A}_B \\ \underline{A}_C \\ \underline{A}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{AA} & \underline{S}_{AB} & 0 & 0 \\ \underline{S}_{BA} & \underline{S}_{BB} & \underline{S}_{BC} & \underline{S}_{BR} \\ 0 & \underline{S}_{CB} & \underline{S}_{CC} & \underline{S}_{CR} \\ 0 & \underline{S}_{BR} & \underline{S}_{CR} & \underline{S}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{D}_A \\ \underline{D}_B \\ \underline{D}_C \\ \underline{D}_R \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.80)$$

que na forma condensada se escreve:

$$\underline{A}_J = \underline{S}_J \underline{D}_J \dots\dots\dots (2.81)$$

As condições de contorno aplicadas aos nós de apoio garantem, no caso de perfeito engastamento dos pilares às fundações, que $\underline{D}_R = 0$. Logo, pode-se retirar de (2.80) o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} \underline{A}_A \\ \underline{A}_B \\ \underline{A}_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{AA} & \underline{S}_{AB} & 0 \\ \underline{S}_{BA} & \underline{S}_{BB} & \underline{S}_{BC} \\ 0 & \underline{S}_{CB} & \underline{S}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{D}_A \\ \underline{D}_B \\ \underline{D}_C \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.82)$$

Pode-se ilustrar esquematicamente a forma da matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos livres da estrutura, por meio da figura 2.34:

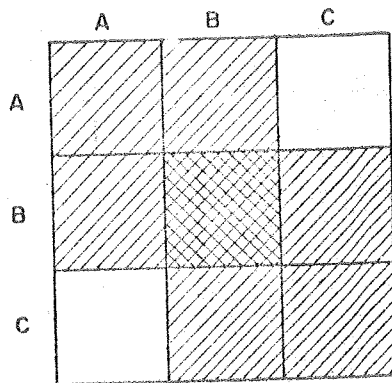


FIG.2.34 - ESQUEMA DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Observe-se que o retângulo duplamente hachurado representa a influência dos nós de ligação, os quais pertencem tanto à subestrutura I como à subestrutura II.

Efetuando-se os produtos matriciais indicados pela (2.82) obtêm-se

$$\underline{S}_{AA} \underline{D}_A + \underline{S}_{AB} \underline{D}_B = \underline{A}_A \dots\dots\dots(2.83)$$

$$\underline{S}_{BA} \underline{D}_A + \underline{S}_{BB} \underline{D}_B + \underline{S}_{BC} \underline{D}_C = \underline{A}_B \dots\dots\dots(2.84)$$

$$\underline{S}_{CB} \underline{D}_C + \underline{S}_{CC} \underline{D}_C = \underline{A}_C \dots\dots\dots(2.85)$$

Com a eliminação de \underline{D}_A da equação (2.83) obtêm-se.

$$\underline{D}_A = \underline{S}_{AA}^{-1} (\underline{A}_A - \underline{S}_{AB} \underline{D}_B) \dots\dots\dots(2.86)$$

que substituído na equação (2.84) fornece

$$\underline{S}_{BA} \underline{S}_{AA}^{-1} \underline{A}_A + (\underline{S}_{BB} - \underline{S}_{BA} \underline{S}_{AA}^{-1} \underline{S}_{AB}) \underline{D}_B + \underline{S}_{BC} \underline{D}_C = \underline{A}_B$$

ou ainda

$$\underline{S}_{BB}^* \underline{D}_B + \underline{S}_{BC} \underline{D}_C = \underline{A}_B^* \dots\dots\dots(2.87)$$

com

$$\underline{S}_{BB}^* = \underline{S}_{BB} - \underline{S}_{BA} \underline{S}_{AA}^{-1} \underline{S}_{AB} \dots\dots\dots(2.88)$$

e

$$\underline{A}_B^* = \underline{A}_B - \underline{S}_{BA} \underline{S}_{AA}^{-1} \underline{A}_A \dots\dots\dots(2.89)$$

A matriz \underline{S}_{BB}^* é chamada "matriz de rigidez reduzi da". Os significados de \underline{S}_{BB}^* e \underline{A}_B^* são os seguintes:

a) - \underline{S}_{BB}^* representa a matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos dos nós do tipo B, quando os deslocamentos do tipo A são livres de ocorrer;

b) - \underline{A}_B^* representa o vetor das cargas aplicadas segundo os deslocamentos dos nós do tipo B modificadas pelas cargas aplicadas em A na estrutura, enquanto os deslocamentos nos nós A são livres.

Em termos matriciais

$$\begin{Bmatrix} \underline{A}_B^* \\ \underline{A}_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{BB}^* & \underline{S}_{BC} \\ \underline{S}_{CB} & \underline{S}_{CC} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{D}_B \\ \underline{D}_C \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.90)$$

De modo análogo, desenvolvendo os produtos matriciais expressos pela equação (2.90) e eliminando \underline{D}_B , obtêm-se:

$$\underline{D}_B = \underline{S}_{BB}^{*-1} (\underline{A}_B^* - \underline{S}_{BC} \underline{D}_C) \dots\dots\dots(2.91)$$

e

$$\underline{A}_C = \underline{S}_{CC} \underline{D}_C \dots\dots\dots(2.92)$$

com

$$\underline{A}_C^* = \underline{A}_C - \underline{S}_{CB} \underline{S}_{BB}^{*-1} \underline{A}_B^* \dots\dots\dots(2.93)$$

As n_s equações de equilíbrio são:

$$\left. \begin{aligned}
 S_{-11} D_{-1} + S_{-12} D_{-2} &= A_{-1} \\
 S_{-21} D_{-1} + S_{-22} D_{-2} + S_{-23} D_{-3} &= A_{-2} \\
 \vdots & \\
 S_{-i,i-1} D_{-i-1} + S_{-i,i} D_{-i} + S_{-i,i+1} D_{-i+1} &= A_{-i} \\
 \vdots & \\
 S_{-n_s,n_s-1} D_{-n_s-1} + S_{-n_s,n_s} D_{-n_s} &= A_{-n_s}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.97)$$

O processo de eliminação até a n_s -ésima subestrutura levar:

- para a 1ª subestrutura

$$D_{-1} = S_{-11}^{-1} (A_{-1} - S_{-12} D_{-2})$$

$$S_{-22}^* D_{-2} + S_{-23} D_{-3} = A_{-2}^*$$

com

$$S_{-22}^* = S_{-22} - S_{-21} S_{-11}^{-1} S_{-12}$$

e

$$A_{-2}^* = A_{-2} - S_{-21} S_{-11}^{-1} A_{-1}$$

- para a i -ésima subestrutura

$$D_{-i} = S_{-i,i}^{*-1} (A_{-i}^* - S_{-i,i+1} D_{-i+1})$$

$$S_{-i+1,i+1}^* D_{-i+1} + S_{-i+1,i+2} D_{-i+2} = A_{-i+1}^*$$

com

$$\tilde{S}_{i+1,i+1}^* = \tilde{S}_{i+1,i+1} - \tilde{S}_{i+1,i} \tilde{S}_{i,i}^{*-1} \tilde{S}_{i,i+1}$$

e

$$\tilde{A}_{i+1}^* = \tilde{A}_{i+1} - \tilde{S}_{i+1,i} \tilde{S}_{i,i}^{*-1} \tilde{A}_i^*$$

- e para a última eliminação

$$\tilde{D}_{n-1} = \tilde{S}_{n-1,n-1}^{*-1} (\tilde{A}_{n-1}^* - \tilde{S}_{n-1,n} \tilde{D}_n)$$

$$\tilde{S}_{n,n}^* \tilde{D}_n = \tilde{A}_n^*$$

com

$$\tilde{S}_{n,n}^* = \tilde{S}_{n,n} - \tilde{S}_{n,n-1} \tilde{S}_{n-1,n-1}^{*-1} \tilde{S}_{n-1,n}$$

e

$$\tilde{A}_n^* = \tilde{A}_n - \tilde{S}_{n,n-1} \tilde{S}_{n-1,n-1}^{*-1} \tilde{A}_{n-1}^*$$

tem-se então os deslocamentos \tilde{D}_{n_s} calculados através de

$$\tilde{D}_{n_s} = \tilde{S}_{n_s,n_s}^{*-1} \tilde{A}_{n_s}^*$$

Por substituições de volta obtêm-se toda a coleção de deslocamentos incôgnitos.

Da maneira como foi exposto, o processo exige, em cada eliminação, que se efetue a inversão da sub-matriz correspondente aos deslocamentos livres de cada subestrutura. Apesar de ser este o procedimento adotado no presente trabalho, é bem verdade que esta inversão, seguida do triplo produto matricial, além de demorada, pode introduzir erros numéricos indesejáveis. O trabalho de BOSSHARD²³ sugere a obtenção da matriz reduzida da subestrutura utilizando parcialmente o método de eliminação de GAUSS. As des

vantagens desta inversão são também apontadas por RUBINS-
TEIN e RÖSEN²⁴ que recomendam a decomposição de CHOLESKY
na análise da subestrutura.

II.2.9 - Esforços nas extremidades das barras

Conhecidos os deslocamentos dos nós do pórtico
(vetor \underline{D}_J), os esforços cortantes, esforços normais e mo-
mentos fletores nas extremidades das barras são determina-
dos, já que as extremidades das mesmas têm os mesmos deslo-
camentos dos nós onde incidem.

De uma maneira geral, os esforços \underline{E}_M^V nas extremi-
dades de um tramo de viga são determinados pela equação
(2.55), qual seja:

$$\underline{E}_M^V = \underline{S}_M^V \underline{D}_M^V$$

e os esforços \underline{E}_M^P nas extremidades do tramo de pilar, por e-
quação semelhante

$$\underline{E}_{MD}^P = \underline{S}_{MD}^P \underline{D}_{MD}^P \dots \dots \dots (2.98)$$

onde os \underline{D}_{MD}^P são os deslocamentos nas extremidades do tramo
de pilar, segundo as coordenadas da figura 2.27.

Não existindo carga aplicada diretamente sobre a
barra, bastam os seguintes valores para definir os esforços
solicitantes internos em cada tramo de pilar:

- E_1^P = esforço normal, positivo se de tração;
- E_2^P = momento fletor na extremidade superior do tramo de
pilar, positivo se horário sobre a barra;
- E_3^P = esforço cortante, positivo se horário sobre a seção;
- E_5^P = momento fletor na extremidade inferior do tramo de
pilar, positivo se horário sobre a barra

e, em cada tramo de viga:

- E_1^V = esforço cortante, positivo se horário sobre a seção;
- E_2^V, E_4^V = respectivamente, momento fletor na extremidade esquerda e direita do tramo de viga, positivos se horários sobre a barra.

Se determinada prumada de pilar for suposta indeformável axialmente, os esforços axiais nos tramos desta prumada resultarão nulos. Entretanto, estes esforços normais podem ser calculados com equações de equilíbrio para forças verticais nos nós do pórtico, partindo do topo para a base do edifício, já que os esforços cortantes nos tramos das vigas que concorrem nestes nós produzem a variação no esforço axial dos tramos de pilar. Procedimento análogo pode ser adotado na determinação dos esforços axiais nos tramos das vigas, partindo do equilíbrio de forças horizontais nos nós início dos tramos de viga à esquerda.

No APÊNDICE 3 será apresentado um programa para o cálculo automático, escrito em linguagem FORTRAN, para computador IBM-1130, com 32K de memória interna.

II.2.10 - Exemplo numérico 1

Retome-se a estrutura da figura 1.24 que, no Capítulo I, foi analisada por dois processos contínuos diferentes. Recorde-se que os resultados do Ítem I.1.10 eram comparados com os valores obtidos pela "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS", admitindo-se todas as prumadas indeformáveis axialmente e desprezando-se as deformações por força cortante nos pilares paredes. Aquela comparação evidenciava a boa concordância dos processos contínuos com o discreto, respeitadas as mesmas hipóteses.

Neste capítulo - item II.1.5 - a mesma estrutura foi resolvida por uma técnica discreta simplificada, baseada em conceitos até então válidos, exclusivamente, para os

processos contínuos. Os resultados também foram satisfatórios.

Das técnicas apresentadas, a "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS" é a que mais se aproxima do comportamento real da estrutura. A estrutura da figura 1.24 foi resolvida - procedimento A - levando-se em consideração as deformações axiais em todas as prumadas de pilares e as deformações por cisalhamento na parede (ver figuras 2.34, 2.35 e 2.36). A seguir, na Tabela 2.4, apresentam-se os seguintes "valores":

- I) - máximo deslocamento horizontal (cm);
- II) - força cortante no topo da parede (t);
- III) - momento fletor na base da parede (t m);
- IV) - força cortante total nas prumadas de pilares do pórtico (t) ao nível do 7º andar (contados de cima para baixo);

segundo cada um dos "procedimentos" indicados na Tabela 2.3

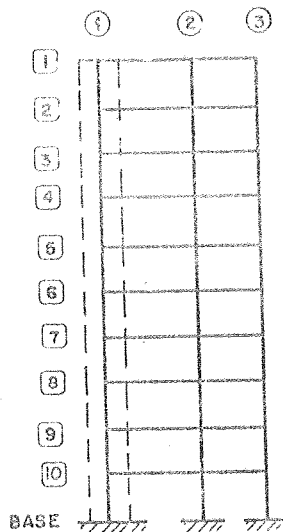


TABELA 2.3

PROCEDIMENTO	INFORMAÇÕES SOBRE AS PRUMADAS			
	①		②	③
	C_p	G	C_p	C_p
A	0	$\neq 0$	0	0
B	0	$= 0$	0	0
C	0	$\neq 0$	1	1
D	0	$= 0$	1	1
E	1	$\neq 0$	0	0
F	1	$= 0$	0	0
G	1	$\neq 0$	1	1
H	1	$= 0$	1	1

G (Módulo de Elasticidade Transversal)

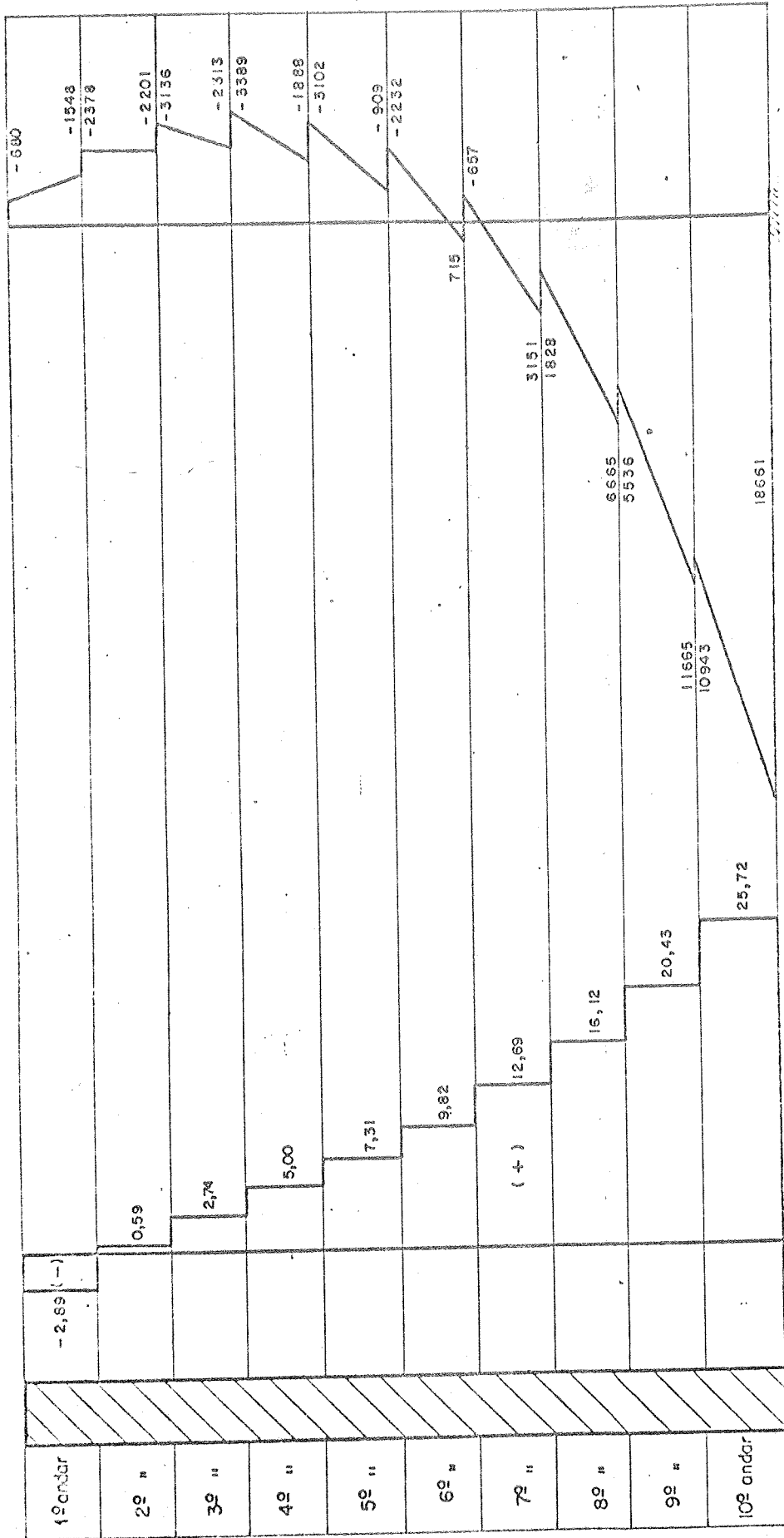
C_p (código para as prumadas)

$\neq 0$: considera deformações por força cortante na parede;
 $= 0$: não considera deformações por força cortante na parede;

$= 0$: considera as deformações axiais na prumada;
 $= 1$: não considera as deformações axiais na prumada.

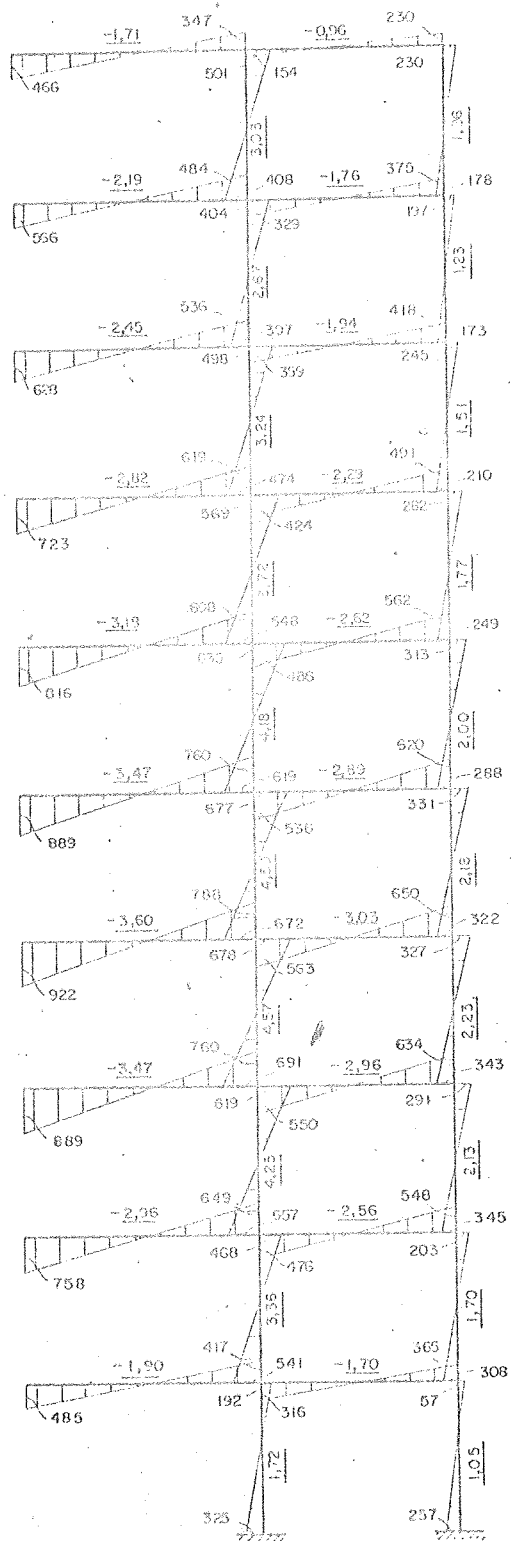
a) Forças cortantes

b) Momentos fletores



0 10t 5000 kcm

FIG. 2.34 - FORÇAS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES NA PAREDE



Unidades : M (tcm)
Q (t)

Obs.: Os valores grifados indicam as forças cortantes

FIG. 2.35 - ESFORÇOS NAS BARRAS DO PÓRICO

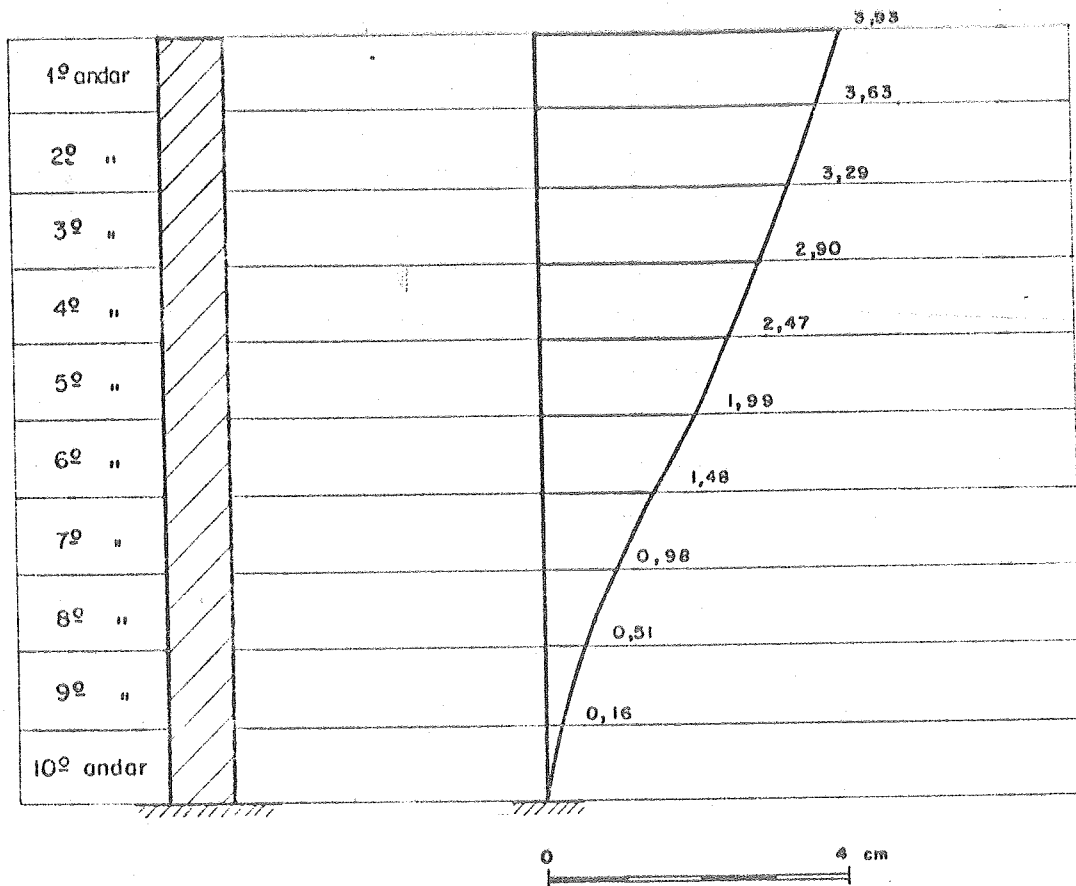


FIG. 2.36 - DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS (cm)

"VALORES"	"PROCEDIMENTOS"							
	A	B	C	D	E	F	G	H
I (cm)	3,93	3,85	3,76	3,70	3,87	3,79	3,68	3,62
II (t)	-2,89	-2,85	-3,22	-3,29	-2,96	-2,92	-3,13	-3,20
III (t cm)	18661	18542	18392	18619	18887	18768	18281	18507
IV (t)	6,80	6,78	6,98	6,91	6,74	6,72	6,95	6,88

TABELA 2.4 - COMPARAÇÕES

II.2.11 - Exemplo numérico 2

Principalmente para as paredes, a hipótese de engastamento rígido na base é bastante duvidosa. Para representar o comportamento real da estrutura é mais razoável considerar as paredes elasticamente engastadas na base. Assim, a estrutura que exemplificou numericamente os diversos processos apresentados neste trabalho é analisada, pela "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS", admitindo válida, para a parede, a vinculação esquematizada na figura 2.37

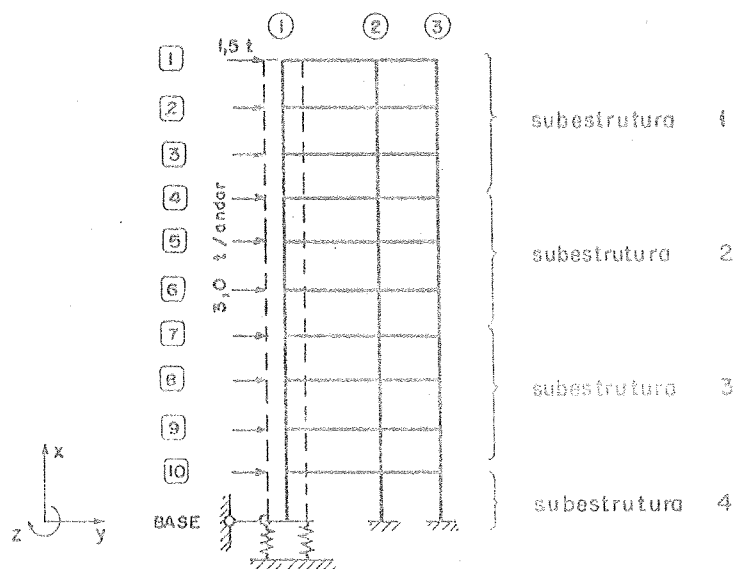


FIG. 2.37 - PAREDE COM VÍNCULOS ELÁSTICOS ($S_{RX} \neq 0$; $S_{RZ} \neq 0$)

Adotam-se os valores (BARKAN²⁵):

$$S_{RX} = 4 \cdot 10^2 \frac{t}{cm}$$

$$S_{RZ} = 10^7 \frac{t \cdot cm}{rad}$$

Aproveita-se este exemplo para mostrar como o programa automático imprime os dados relativos a estrutura - dividida em quatro subestruturas - e como se dá a saída dos resultados. A unidade de força é a tonelada e a de comprimento o centímetro.

2.71

 ASSOCIACAO PLANA
 DE
 PORTICOS COM PILARES PAREDES

- * ESTRUTURA NUMERO 1 DIVIDIDA EM 4 SUBESTRUTURAS
- * NUMERO DE ANDARES 10
- * NUMERO DE PRUMADAS DE PILARES 3
- * ANALISE DA ESTRUTURA CARREGADA LATERALMENTE
- * PARA AS VIGAS- EV= 0.20000E 03
- * PARA CADA PRUMADA DE PILAR

PRUM.	CP	EP	G
1	0	0.20000E 03	0.84000E 02
2	0	0.20000E 03	0.00000E 00
3	0	0.20000E 03	0.00000E 00

- * LARGURA DOS TRAMOS

TRAMO	L
1	0.60000E 03
2	0.40000E 03

- * DADOS SOBRE OS APOIOS

PRUM.	LRX	LRZ
1	0	0
2	1	1
3	1	1

- * VINCULOS ELASTICOS

PRUM.	SRX	SRZ
1	0.40000E 03	0.10000E 08

- ** A SUBESTRUTURA 1 POSSUI 3 ANDARES- DO 1 AO 3

- ** ALTURA DOS ANDARES

ANDAR	H
1- 3	0.30000E 03

- ** MOMENTOS DE INERCIA E AREAS DOS PILARES

PRUM.	ANDAR	IZP	AX
1	1- 3	0.26040E 08	0.50000E 04
2	1- 3	0.21330E 06	0.16000E 04
3	1- 3	0.21330E 06	0.16000E 04

- ** MOMENTOS DE INERCIA E MISULAS DE RIGIDEZ INFINITA DAS VIGAS

TRAMO	LAJE	IZV	LE	LD
1	1- 3	0.20830E 06	0.12500E 03	0.00000E 00
2	1- 3	0.20830E 06	0.00000E 00	0.00000E 00

- ** FORÇAS HORIZONTAIS APLICADAS AO NIVEL DE CADA LAJE

LAJE	F. HORIZ.
1- 1	0.15000E 01
2- 3	0.30000E 01

** A SUBESTRUTURA 2 POSSUI 3 ANDARES- DO 4 AO 6
 ** A SUBESTRUTURA 2 E IDENTICA A SUBESTRUTURA 1
 ** FORÇAS HORIZONTAIS APLICADAS AO NIVEL DE CADA LAJE
 LAJE F. HORIZ.
 4- 6 0.30000E 01

** A SUBESTRUTURA 3 POSSUI 3 ANDARES- DO 7 AO 9
 ** A SUBESTRUTURA 3 E IDENTICA A SUBESTRUTURA 2
 ** FORÇAS HORIZONTAIS APLICADAS AO NIVEL DE CADA LAJE
 LAJE F. HORIZ.
 7- 9 0.30000E 01

** A SUBESTRUTURA 4 POSSUI 1 ANDARES- DO 10 AO 10
 ** ALTURA DOS ANDARES
 ANDAR H
 10-10 0.30000E 03

** MOMENTOS DE INERÇIA E AREAS DOS PILARES

PRUM.	ANDAR	IZP	AX
1	10-10	0.26040E 08	0.50000E 04
2	10-10	0.21330E 06	0.16000E 04
3	10-10	0.21330E 06	0.16000E 04

** MOMENTOS DE INERÇIA E MISULAS DE RIGIDEZ INFINITA DAS VIGAS

TRAMO	LAJE	IZV	LE	LD
1	10-10	0.20830E 06	0.12500E 03	0.00000E 00
2	10-10	0.20830E 06	0.00000E 00	0.00000E 00

** FORÇAS HORIZONTAIS APLICADAS AO NIVEL DE CADA LAJE

LAJE F. HORIZ.
 10-10 0.30000E 01

RESULTADOS PARA A SUBESTRUTURA 4

*** DESLOCAMENTOS AO NIVEL DE CADA LAJE

LAJE	PRUM.	DJX	DJY	DJZ
10	1	0.91624E-01	0.45506E 00	0.16979E-02
10	2	-0.32331E-02	0.45506E 00	0.10088E-02
10	3	-0.27444E-01	0.45506E 00	0.14950E-02
BASE	1	0.81807E-01	0.00000E 00	0.11780E-02
BASE	2	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
BASE	3	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DAS VIGAS

LAJE	TRAMO	F. CORT.	MOM. ESQ.	MOM. DIR.
10	1	-0.35462E 01	0.90266E 03	0.78179E 03
10	2	-0.37226E 01	0.69388E 03	0.79516E 03

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DOS PILARES

ANDAR	PRUM.	F. NORMAL	F. CORT.	MOM. TOPO	MOM. BASE
10	1	0.32723E 02	0.18364E 02	0.62706E 04	-0.11780E 05

10 2 -0.34486E 01 0.57589E 01 -0.72037E 03 -0.10072E 04
 10 3 -0.29274E 02 0.43761E 01 -0.44381E 03 -0.86901E 03

 RESULTADOS PARA A SUBESTRUTURA 3

*** DESLOCAMENTOS AO NIVEL DE CADA LAJE

LAJE	PRUM.	DJX	DJY	DJZ
7	1	0.11419E 00	0.22861E 01	0.20352E-02
7	2	-0.12477E-01	0.22861E 01	0.11357E-02
7	3	-0.88727E-01	0.22861E 01	0.16062E-02
8	1	0.10791E 00	0.16557E 01	0.20704E-02
8	2	-0.97250E-02	0.16557E 01	0.11442E-02
8	3	-0.71870E-01	0.16557E 01	0.16348E-02
9	1	-0.10037E 00	0.10301E 01	0.19792E-02
9	2	-0.66316E-02	0.10301E 01	0.10771E-02
9	3	-0.51399E-01	0.10301E 01	0.15250E-02
10	1	-0.91624E-01	0.45506E 00	0.16979E-02
10	2	-0.32331E-02	0.45506E 00	0.10888E-02
10	3	-0.27444E-01	0.45506E 00	0.14950E-02

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DAS VIGAS

LAJE	TRAMO	F. CORT.	MOM. ESQ.	MOM. DIR.
7	1	-0.41088E 01	0.10547E 04	0.89606E 03
7	2	-0.36879E 01	0.68859E 03	0.78659E 03
8	1	-0.42200E 01	0.10834E 04	0.92102E 03
8	2	-0.38557E 01	0.72010E 03	0.82221E 03
9	1	-0.40409E 01	0.10388E 04	0.88059E 03
9	2	-0.37155E 01	0.69645E 03	0.78976E 03

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DOS PILARES

ANDAR	PRUM.	F. NORMAL	F. CORT.	MOM. TOPO	MOM. BASE
7	1	0.20915E 02	0.11295E 02	-0.23056E 04	-0.10828E 04
7	2	-0.29354E 01	0.54685E 01	-0.82150E 03	-0.81906E 03
7	3	-0.17980E 02	0.27362E 01	-0.41447E 03	-0.40641E 03
8	1	0.25135E 02	0.14080E 02	-0.52812E 03	-0.36959E 04
8	2	-0.32990E 01	0.55440E 01	-0.82205E 03	-0.84115E 03
8	3	-0.21836E 02	0.28758E 01	-0.41580E 03	-0.44694E 03
9	1	0.29176E 02	0.18215E 02	-0.21519E 04	-0.76165E 04
9	2	-0.36250E 01	0.49706E 01	-0.73589E 03	-0.75530E 03
9	3	-0.25551E 02	0.23139E 01	-0.34282E 03	-0.35135E 03

 RESULTADOS PARA A SUBESTRUTURA 2

*** DESLOCAMENTOS AO NIVEL DE CADA LAJE

LAJE	PRUM.	DJX	DJY	DJZ
4	1	0.12600E 00	0.39512E 01	0.15625E-02
4	2	-0.18353E-01	0.39512E 01	0.91455E-03
4	3	-0.11976E 00	0.39512E 01	0.12538E-02
5	1	0.12313E 00	0.34487E 01	0.17496E-02
5	2	-0.16789E-01	0.34487E 01	0.10045E-02
5	3	-0.11235E 00	0.34487E 01	0.13951E-02
6	1	0.11923E 00	0.28903E 01	0.19168E-02
6	2	-0.14834E-01	0.28903E 01	0.19835E-02
6	3	-0.10212E 00	0.28903E 01	0.15206E-02
7	1	0.11419E 00	0.22861E 01	0.20352E-02
7	2	-0.12477E-01	0.22861E 01	0.11357E-02
7	3	-0.88727E-01	0.22861E 01	0.16062E-02

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DAS VIGAS

LAJE	TRAMO	F. CORT.	MOM. ESQ.	MOM. DIR.
4	1	-0.29820E 01	0.76507E 03	0.65140E 03
4	2	-0.25954E 01	0.48376E 03	0.55443E 03
5	1	-0.34186E 01	0.87727E 03	0.74658E 03
5	2	-0.30024E 01	0.55980E 03	0.64117E 03
6	1	-0.38162E 01	0.97943E 03	0.83326E 03
6	2	-0.33865E 01	0.63178E 03	0.72283E 03

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DOS PILARES

ANDAR	PRUM.	F. NORMAL	F. CORT.	MOM. TOPO	MOM. BASE
4	1	0.95721E 01	0.44350E 01	-0.39120E 04	0.25814E 04
4	2	-0.16686E 01	0.40704E 01	-0.62335E 03	-0.59777E 03
4	3	-0.79034E 01	0.19944E 01	-0.31926E 03	-0.27999E 03
5	1	0.12990E 02	0.65558E 01	-0.38860E 04	0.19193E 04
5	2	-0.20849E 01	0.46491E 01	-0.70861E 03	-0.68614E 03
5	3	-0.10905E 02	0.22949E 01	-0.36209E 03	-0.32639E 03
6	1	0.16806E 02	0.87948E 01	-0.33757E 04	0.73731E 03
6	2	-0.25145E 01	0.51431E 01	-0.77890E 03	-0.76405E 03
6	3	-0.14292E 02	0.25619E 01	-0.39644E 03	-0.37212E 03

 RESULTADOS PARA A SUBESTRUTURA I

*** DESLOCAMENTOS AO NIVEL DE CADA LAJE

LAJE	PRUM.	DJX	DJY	DJZ
1	1	0.12971E 00	0.51461E 01	0.11686E -02
1	2	-0.21024E -01	0.51461E 01	0.44056E -03
1	3	-0.12869E 00	0.51461E 01	0.81205E -03
2	1	0.12919E 00	0.47894E 01	0.12376E -02
2	2	-0.20419E -01	0.47894E 01	0.79098E -03
2	3	-0.12765E 00	0.47894E 01	0.16220E -02
3	1	0.12798E 00	0.43960E 01	0.13829E -02
3	2	-0.19555E -01	0.43960E 01	0.81916E -03
3	3	-0.12473E 00	0.43960E 01	0.11132E -02
4	1	0.12600E 00	0.39512E 01	0.15625E -02
4	2	-0.18353E -01	0.39512E 01	0.91455E -03
4	3	-0.11976E 00	0.39512E 01	0.12538E -02

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DAS VIGAS

LAJE	TRAMO	F. CORT.	MOM. ESQ.	MOM. DIR.
1	1	-0.17610E 01	0.48210E 03	0.35438E 03
1	2	-0.11158E 01	0.18447E 03	0.26185E 03
1	3	-0.22712E 01	0.57870E 03	0.59024E 03
2	1	-0.19947E 01	0.37488E 03	0.42301E 03
2	2	-0.25577E 01	0.65691E 03	0.55802E 03
2	3	-0.21973E 01	0.40883E 03	0.47009E 03

*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DOS PILARES

ANDAR	PRUM.	F. NORMAL	F. CORT.	MOM. TOPO	MOM. BASE
1	1	0.17610E 01	-0.33068E 01	-0.70223E 03	0.16942E 04
1	2	-0.64520E 00	0.32602E 01	-0.53886E 03	-0.43920E 03
1	3	-0.11158E 01	0.15466E 01	-0.26185E 03	-0.20213E 03
2	1	0.40322E 01	0.23448E 00	-0.25568E 04	0.24864E 04
2	2	-0.92171E 00	0.28794E 01	-0.43593E 03	-0.42791E 03
2	3	-0.31105E 01	0.13860E 01	-0.22087E 03	-0.19493E 03
3	1	0.65900E 01	0.22963E 01	-0.34630E 04	0.27741E 04
3	2	-0.12821E 01	0.35024E 01	-0.53893E 03	-0.51180E 03
3	3	-0.53079E 01	0.17011E 01	-0.27516E 03	-0.23517E 03

III - CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES

Durante a realização do presente trabalho, inúmeros pontos despertaram a curiosidade do autor. Alguns deles, relacionados com o aprimoramento das técnicas apresentadas; outros, com o real conhecimento das estruturas em análise. Infelizmente, estes pontos não estão aqui desenvolvidos, ainda que várias tentativas tenham sido feitas no sentido de elucidá-los.

Assim é que, as técnicas contínuas assumiriam outra dimensão se levassem em conta o efeito da deformabilidade axial das prumadas de pilares. Um outro aspecto que, solucionado, poderia enriquecer o tratamento contínuo é o da carga externa não uniforme sobre a estrutura. Finalmente, poderiam ser acrescentadas algumas indicações sobre os efeitos de recalques dos pilares.

Apesar destas limitações, as técnicas contínuas - entendidas como um recurso expedito que prescinde de grandes recursos computacionais - podem ser utilizadas com vantagem. Descrevem, com razoável aproximação, o comportamento da estrutura em função de um número reduzido de parâmetros elásticos e geométricos.

A "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" situa-se num meio termo, entre as técnicas contínuas e a discreta. Constitui uma alternativa válida quando já se dispõe de computadores com alguma capacidade. É mais versátil que as técnicas contínuas, na medida em que permite a variação da carga externa e das características elasto-geométricas, ao longo da altura.

As deformações por força cortante nos pilares paredes são facilmente levadas em consideração; além disto, a análise de um painel constituído de paredes com rigidezes diferentes pode ser efetuada levando-se em conta os valores distintos das rotações destas paredes, ao nível de cada laje.

O tratamento discreto, segundo a "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS", antecede o emprego dos elementos finitos

e, das técnicas apresentadas, é a mais eficiente. Poderia, com algumas modificações no modo de expressar a topologia da estrutura, tratar casos particulares de pórticos não reangulares.

A potencialidade desta técnica evidencia-se na facilidade com que as prumadas de pilares são ou não consideradas indeformáveis axialmente, respeitando-se a correspondente necessidade de memória interna do computador. Esta característica do programa de cálculo automático será de extrema valia em pesquisas que o autor pretende, futuramente, realizar.

Através dos exemplos numéricos apresentados, pode-se avaliar a precisão de cada uma das técnicas. Justifica-se, desta feita, o emprego das técnicas contínuas quando são desprezadas as deformações axiais das prumadas de pilares, na análise de painéis lateralmente carregados.

As seguintes investigações poderiam contribuir para o real conhecimento da estrutura: a) pesquisar a influência das deformações axiais dos pilares na rigidez da estrutura para as cargas laterais; b) definir quando uma prumada de pilar deve ou não ser considerada como parede; c) pesquisar a influência das deformações por força cortante nos pilares paredes; d) estudar o comportamento da estrutura em função de parâmetros que caracterizem as paredes, os lintéis e os pórticos; e) classificar os diversos processos - contínuos e discretos - e, através de determinados índices, definir faixas caracterizando os limites de utilização de cada um deles.

Finalizando, há que se esclarecer que são particulares tanto as técnicas, como as estruturas aqui apresentadas. Porém, claro está que sendo preciso partir, quase sempre, do particular - e o particular é a técnica ou a estrutura - o autor acredita que o conhecimento deve ser orientado no sentido da superação deste particular, objetivando o geral.

APÊNDICE 1 - "TÉCNICAS CONTÍNUAS" - PAREDES COM ENGASTAMENTO ELÁSTICO

Paredes elasticamente engastadas e ligadas aos pórticos através de barras biarticuladas, foram estudadas por MANCINI¹². O capítulo I mostrou que qualquer associação entre pórticos e paredes, seja ela efetuada por meio de lintéis ou através de barras biarticuladas, pode ser representada pela seguinte equação diferencial:

$$j_g u'''' - s_g^* u' = -Q \dots\dots\dots(1.76)$$

Esta equação ainda permanece válida se a parede está vinculada elasticamente à base e a única modificação que deve ser introduzida no item I.1.8, diz respeito, tão somente, às condições de contorno.

Sendo $M_w(0)$ o momento de engastamento da parede e $u'(0)$ a rotação do apoio, admitir-se-á que:

$$M_w(0) = r_\phi u'(0) \dots\dots\dots(a)$$

onde r_ϕ é a rigidez do engastamento elástico (FERRY BORGES e RAVARA¹⁶, BARKAN²⁵).

Assim, para o caso particular em que só existe carga uniformemente distribuída, a expressão para o deslocamento horizontal já é conhecida:

$$u = \frac{q H^4}{j_g K^2} \left[C_1 + C_2 e^{KZ} + C_3 e^{-KZ} + K^2 \left(1 - \frac{Z}{2} Z \right) \right] \dots\dots(1.82)$$

As condições de contorno, agora, são as seguintes:

Na base ($Z=0$)

a) $u(Z=0) = 0$

b) $u'(z=0) = \frac{jg}{r\phi} u''(z=0)$, a partir das equações (a) e (1.4)

No topo (Z=1)

c) $u''(z=1) = 0$, pois $M_w(z=1) = 0$

Estas três condições de contorno levam às seguintes equações:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_2\phi_1 - C_3\phi_2 + K\phi_3 &= 0 \\ C_2e^K + C_3e^{-K} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (b)$$

com

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= 1 - \frac{Kj}{r\phi} \frac{S}{H} \\ \phi_2 &= 1 + \frac{Kj}{r\phi} \frac{S}{H} \\ \phi_3 &= 1 + \frac{j}{r\phi} \frac{S}{H} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

Resolvendo-se o sistema (b), encontram-se

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -2 \frac{1 + \phi_3 KS}{\phi_2 e^K + \phi_1 e^{-K}} \\ C_2 &= \frac{\phi_2 - \phi_3 K(C-S)}{\phi_2 e^K + \phi_1 e^{-K}} \\ C_3 &= \frac{\phi_1 + \phi_3 K(C+S)}{\phi_2 e^K + \phi_1 e^{-K}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (d)$$

com K, S e C conforme o item I.1.8.

Observe-se que as equações (d) transformam-se, exatamente, nas equações (1.85) se a parede for perfeitamente engastada, ou seja: $r_\phi = \infty$ (engastamento elástico com rigidez infinita).

EXEMPLO NUMÉRICO

Calcula-se, a seguir, a estrutura que serviu para o exemplo numérico do item I.1.10, considerando a parede elasticamente engastada.

Admite-se, para a rigidez do engastamento elástico, o valor:

$$r_\phi = 10^7 \text{ t cm}$$

Assim, calculam-se

$$\phi_1 = 1 - \frac{3,51 \cdot 5208 \cdot 10^6}{3000 \cdot 10^7} = 0,3906$$

$$\phi_2 = 1 + \frac{3,51 \cdot 5208 \cdot 10^6}{3000 \cdot 10^7} = 1,6093$$

$$\phi_3 = 1 + \frac{5208 \cdot 10^6}{3000 \cdot 10^7} = 1,1736$$

e as constantes C_1 , C_2 e C_3 ficam alteradas para os seguintes valores

$$C_1 = -2,5940$$

$$C_2 = 0,0276$$

$$C_3 = 2,5664$$

Os deslocamentos horizontais, ao nível de cada cota Z, são calculados através da expressão:

$$u = 1,0246 \left[-2,5940 + 0,0276 \cdot e^{3,51 \cdot Z} + 2,5664 \cdot e^{-3,51 \cdot Z} + 12,3201 \left(1 - \frac{Z}{2} \right) Z \right]$$

No topo (Z=1)

$$u(Z=1) = -4,68 \text{ cm}$$

Compare-se este valor com os obtidos nos itens I.1.10 e II.2.11.

Os momentos fletores na parede são expressos pela seguinte equação:

$$M_w = 7305,13 (0,0276 \cdot e^{3,51 \cdot Z} + 2,5664 \cdot e^{-3,51 \cdot Z} - 1)$$

Na base (Z=0)

$$M_w(Z=0) = 11644 \text{ t cm}$$

Compare-se este valor com os obtidos nos itens I.1.10 e II.2.11.

APÊNDICE 2: - "TÉCNICA DISCRETA SIMPLIFICADA" - PROGRAMA
PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO

Para aplicação dos procedimentos descritos no item II.1, foi escrito um programa de cálculo, em linguagem FORTRAN, para o computador IBM-1130 com 32K de memória interna. O programa principal faz uso da subrotina INVGJ que faz a inversão de uma matriz quadrada pelo método de GAUSS-JORDAN, usando o máximo pivô em cada eliminação (FIGUEIREDO²⁶). A seguir, são identificadas as principais variáveis que figuram no programa. Observe-se que, no programa, algumas grandezas levam nomes diferentes daqueles introduzidos no item II.1.

- FC - coeficiente para a deformação por cisalhamento, conforme equação (2.36). Valor adotado no programa: 0,833;
- NE - número da estrutura;
- NA - número de andares (ou lajes);
- NP - número de pilares paredes;
- E - módulo de elasticidade longitudinal;
- G - módulo de elasticidade transversal;
- J - número da prumada de pilar parede. As paredes são numeradas da esquerda para a direita;
- H(I) - altura do andar I, contados do topo para a base;
- AX(I,J) - área da seção transversal da parede J, ao nível do andar I;
- IZP(I,P) - momento de inércia da seção transversal da parede J, ao nível do andar I;
- KY(I) - rigidez da mola de translação, ao nível do andar I, conforme equação (2.3);
- KZ(I,J) - rigidez da mola de rotação solidária à parede J, ao nível do andar I, conforme equação (2.5);
- S(,) - elemento da matriz de rigidez da estrutura;
- Q(I) - carga externa horizontal aplicada ao nível da laje I;

DY() - deslocamentos horizontais absolutos;
D() - deslocamentos relativos e rotações;
WM1,WM2,WM3 - esforços solicitantes na parede.

Os cartões de dados para o programa, devem ser fornecidos na forma e na ordem da Tabela 1. Os dados fornecidos através dos cartões do tipo b, c, d, e e f devem obedecer a numeração sequencial dos andares ($LI = 1, 2, 3, \dots, NA$), a partir do topo da estrutura. Se for o caso, indica-se que o valor da variável lida (ou das variáveis lidas) em um determinado cartão deve ser repetido do LI ao LF andar. Se a variável LF não for definida, o programa assume, automaticamente, o valor $LF = LI$. Desta feita, o número de cartões (r) do tipo b a ser fornecido corresponde ao número de valores distintos da variável, ou variáveis lidas. Por exemplo: se todos os andares fossem iguais, então $LI = 1$ e $LF = NA$ e somente seria fornecido 1 cartão ($r=1$). Uma outra situação extrema poderia acontecer se todos os andares fossem diferentes. Neste caso, para cada andar $LI = LF = n^o$ do andar, e deveriam ser fornecidos NA cartões ($r=NA$). Os dados introduzidos através dos cartões do tipo c e d devem ser ordenados por parede, segundo a numeração dos andares e as NP prumadas são identificadas, sequencialmente, da esquerda para a direita.

TABELA 1 - FORNECIMENTO DOS DADOS EM CARTÕES

TIPO	DADOS	Nº de cartões	VARIÁVEIS EM CADA CARTÃO	FORMATO
a	dados sobre a estrutura	1	NE NA NP E G	3I2, 2X, 2F10.0
b	altura dos andares	r	LI H() LF	I2, 6X, F10.0, I2
c	momentos de inércia e áreas das paredes	r	LI IZP(,) AX(,) LF	I2, 8X, 2F10.0, I2
d	rigidez da mola de rotação	r	LI KZ(,) LF	I2, 8X, F10.0, I2
e	rigidez da mola de translação	r	LI KY() LF	I2, 8X, F10.0, I2
f	carga externa aplicada ao nível de cada laje	r	LI Q() LF	I2, 8X, F10.0, I2
g	CARTÃO EM BRANCO			

Estrutura

PAGE 1 LUFER

// JOB T

LUFER

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE
0000 0016 0016 0000

V2 M10 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// * C.P.D. - E.E.S.C. - U.S.P.

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE INVGJ(N1,N2,S)
DIMENSION S(40,40)
DO 30 I=N1,N2
AUX=S(I,I)
S(I,I)=1.
DO 10 J=N1,N2
10 S(I,J)=S(I,J)/AUX
DO 30 K=N1,N2
IF(I-K)1,30,1
1 AUX=S(K,I)
S(K,I)=0.
DO 20 L=N1,N2
20 S(K,L)=S(K,L)-S(I,L)*AUX
30 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR INVGJ
COMMON 0 VARIABLES 10 PROGRAM 160

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0010 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*STORE WS UA INVGJ
CART ID 0016 DB ADDR 4040 DB CNT 000B

```

// FOR

*IGCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```

REAL KZ(20,3),KY(20),IZP(20,3)
INTEGER SAIDA,ENTRE
DIMENSION Q(20),D(40),S(40,40),H(20),AX(20,3),DY(20)
DEFINE FILE I(81,320,U,KX)
FC=1./1.2
SAIDA=5
ENTRE=2

```

C1. ***** IMPRESSAO DO CABECALHO

WRITE(SAIDA,1)

```

1 FORMAT(1H1,9X,64('*'),//,22X,'A S S O C I A C A O P L A N A',//,3
15X,'DE',//,10X,'P O R T I C O S C O M P I L A R E S P A R E D E
2 S',//,10X,'T E C N I C A D I S C R E T A S I M P L I F I C A D
3A',//,10X,64('*'))

```

C2. ***** ENTRADA E SAIDA DOS DADOS SOBRE A ESTRUTURA

```

C NE=NUMERO DA ESTRUTURA
C NA=NUMERO DE ANDARES
C NP=NUMERO DE PILARES PAREDES
C KZ=RIGIDEZ DA MOLA DE ROTACAO
C KY=RIGIDEZ DA MOLA HORIZONTAL
C AX=AREA DA SECAO TRANSVERSAL DA PAREDE
C IZP=MOMENTO DE INERCIA DA PAREDE
C E=MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL
C G=MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL

```

72 READ(ENTRE,2)NE,NA,NP,E,G

2 FORMAT(3I2,4X,2F10.0)

IF(NE)3,4,3

3 NT=2*NA

NA1=NA+1

NA2=NA+2

DO 5 I=1,NT

DO 5 J=1,NT

5 S(I,J)=0.


```

WRITE(SAIDA,6)NF,NA,NP,E,G
6  FORMAT(///,10X,'* ESTRUTURA NUMERO ',I2,///,10X,'* NUMERO DE ANDAR',
1S ',I2,///,10X,'* NUMERO DE PILARES PAREDES ',I2,///,10X,'* MODULO DE
2E ELASTICIDADE LONGITUDINAL E= ',E12.5,///,10X,'* MODULO DE ELASTIC
3IDADE TRANSVERSAL G= ',E12.5,///,10X,'* ALTURA DOS ANDARES',///,10X
4, 'ANDAR',7X,'H',/)
12 READ(ENTRE,7)LI,AUX1,LF
7  FORMAT(I2,F18.0,I2)
   IF(LF)8,9,8
   9  LF=LI
   8  DO 10 I=LI,LF
10  H(I)=AUX1
   WRITE(SAIDA,11)LI,LF,AUX1
11  FORMAT(10X,I2,'-',I2,2X,E12.5)
   IF(LF-NA)12,13,13
13  WRITE(SAIDA,14)
14  FORMAT(/,10X,'* MOMENTOS DE INERCIA E AREAS DOS PILARES PAREDES',/
17,10X,'PAREDE ANDAR',9X,'IZP',12X,'AX',/)
   DO 15 J=1,NP
21  READ(ENTRE,16)LI,AUX1,AUX2,LF
16  FORMAT(I2,8X,2F10.0,I2)
   IF(LF)17,18,17
18  LF=LI
17  DO 19 I=LI,LF
   IZP(I,J)=AUX1
19  AX(I,J)=AUX2
   WRITE(SAIDA,20)J,LI,LF,AUX1,AUX2
20  FORMAT(12X,I2,4X,I2,'-',I2,3X,2E14.5)
   IF(LF-NA)21,15,15
15  CONTINUE
   WRITE(SAIDA,22)
22  FORMAT(/,10X,'* RIGIDEZES DAS MOLAS DE ROTACAO',/)
   DO 23 J=1,NP
   WRITE(SAIDA,24)J
24  FORMAT(/,10X,'PAREDE ',I2,///,10X,'ANDAR',7X,'KZ',/)
28  READ(ENTRE,7)LI,AUX1,LF
   IF(LF)25,26,25
26  LF=LI
25  DO 27 I=LI,LF
27  KZ(I,J)=AUX1
   WRITE(SAIDA,11)LI,LF,AUX1
   IF(LF-NA)28,23,23
23  CONTINUE
   WRITE(SAIDA,29)
29  FORMAT(/,10X,'* RIGIDEZES DAS MOLAS HORIZONTAIS',///,10X,'ANDAR',7X
1, 'KY',/)
33  READ(ENTRE,7)LI,AUX1,LF
   IF(LF)30,31,30
31  LF=LI
30  DO 32 I=LI,LF
32  KY(I)=AUX1
   WRITE(SAIDA,11)LI,LF,AUX1
   IF(LF-NA)33,34,34
34  WRITE(SAIDA,35)
35  FORMAT(/,10X,'* CARGA APLICADA AO NIVEL DE CADA ANDAR',///,10X,'AND
1AR',4X,'F. HORIZ.',/)
39  READ(ENTRE,7)LI,AUX1,LF
   IF(LF)36,37,36
37  LF=LI
36  DO 38 I=LI,LF
38  Q(I)=AUX1
   WRITE(SAIDA,11)LI,LF,AUX1
   IF(LF-NA)39,40,40
40  DO 41 I=2,NA
41  Q(I)=Q(I)+Q(I-1)
C3. ***** MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ
   II=1
   DO 42 JP=1,NP
   DO 43 I=1,NA
   J1=I
   J2=I+1
   J3=NA+I
   IF(G)44,45,44
45  FC1=0.
   GO TO 46
44  FC1=(6.*E*IZP(I,JP))/((H(I)**2)*FC*G*AX(I,JP))
46  FC2=1./(2.*FC1+1.)
   FC3=1.-FC1
   FC4=1.+FC1/2.
   SCM1=(4.*E*IZP(I,JP)*FC2)/H(I)
   SCM2=(1.5*SCM1)/H(I)
   SCM3=(2.*SCM2)/H(I)
   SM11=SCM1*FC4

```

```

SM22=SM11
SM33=SCM3
SM12=SCM1*FC3/2.
SM13=-SCM2
SM23=-SCM2
S(J1,J1)=S(J1,J1)+SM11
S(J3,J3)=S(J3,J3)+SM33
S(J1,J3)=SM13
S(J3,J1)=S(J1,J3)
IF(1-NA)47,43,43
47 S(J2,J2)=S(J2,J2)+SM22
S(J1,J2)=SM12
S(J2,J1)=S(J1,J2)
S(J2,J3)=SM23
S(J3,J2)=S(J2,J3)
43 CONTINUE
DO 48 I=1,NA
48 S(I,I)=S(I,I)+KZ(I,JP)
CALL INVGJ(1,NA,S)
DO 49 J=1,NA
DO 49 I=NAI,NT
S(J,I)=0.
DO 49 K=1,NA
49 S(J,I)=S(J,I)+S(J,K)*S(I,K)
WRITE(1,II)S
II=II+15
DO 50 J=NAI,NT
DO 50 K=NAI,NT.
DO 50 I=1,NA
50 S(J,K)=S(J,K)-S(J,I)*S(I,K)
DO 51 I=1,NA
DO 51 J=1,NT
51 S(I,J)=0.
DO 52 I=NAI,NT
DO 52 J=1,NA
52 S(I,J)=0.
42 CONTINUE
DO 53 I=NAI,NT
K=I-NA
53 S(I,I)=S(I,I)+KY(K)
CALL INVGJ(NAI,NT,S)
DO 54 I=NAI,NT
D(I)=0.
DO 54 J=NAI,NT
K=J-NA
54 D(I)=D(I)+S(I,J)*G(K)
C4. ***** SAIDA DOS RESULTADOS
DY(NA)=D(NT)
NT1=NT-1
DO 55 I=NAI,NT1
K=NT1+NAI-I
KAUX=K-NA
55 DY(KAUX)=D(K)+DY(KAUX+1)
WRITE(SAIDA,56)
56 FORMAT(/,10X,'* DESLOCAMENTO HORIZONTAL AO NIVEL DE CADA ANDAR',//
1,10X,'ANDAR',7X,'DJY',/)
DO 57 I=1,NA
57 WRITE(SAIDA,58)I,DY(I)
58 FORMAT(11X,I2,4X,E12.5)
II=1
DO 59 JP=1,NP
READ(1,II)S
DO 60 I=1,NA
D(I)=0.
DO 60 J=NAI,NT
60 D(I)=D(I)-S(I,J)*D(J)
WRITE(SAIDA,61)JP
61 FORMAT(/,10X,'* RESULTADOS PARA A PAREDE ',I2,/,10X,'ANDAR',7X,'D
1JZ',/)
DO 62 I=1,NA
62 WRITE(SAIDA,58)I,D(I)
WRITE(SAIDA,63)
63 FORMAT(/,10X,'ANDAR',4X,'MOM. TOPO',5X,'MOM. BASE',4X,'F. CORTANTE
1',/)
DO 64 I=1,NA
J1=I
J2=I+1
J3=NA+I
IF(G)65,66,65
66 FC1=G.
GO TO 67
65 FC1=(6.*E*IZP(I,JP))/((H(I)**2)*FC*G*AX(I,JP))
67 FC2=1./(2.*FC1+1.)

```

PAGE 4 LUFER

```

FC3=1.-FC1
FC4=1.+FC1/2.
SCM1=(4.*E*IZP(I,JP)*FC2)/H(I)
SCM2=(1.5*SCM1)/H(I)
SCM3=(2.*SCM2)/H(I)
IF(I-NA)68,69,68
68 WM1=SCM1*(D(J1)*FC4+D(J2)*FC3/2.)-SCM2*D(J3)
WM2=SCM1*(D(J1)*FC3/2.+D(J2)*FC4)-SCM2*D(J3)
WM3=SCM3*D(J3)-SCM2*(D(J1)+D(J2))
GO TO 70
69 WM1=SCM1*D(J1)*FC4-SCM2*D(J3)
WM2=SCM1*D(J1)*FC3/2.-SCM2*D(J3)
WM3=SCM3*D(J3)-SCM2*D(J1)
70 WRITE(SAIDA,71)I,WM1,WM2,WM3
71 FORMAT(11X,12,2X,3E14.5)
64 CONTINUE
II=II+15
59 CONTINUE
GO TO 72
4 CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
IUCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 5804 PROGRAM 2356

END OF COMPILATION

// XEQ

APÊNDICE 3: - "TÉCNICA DISCRETA DE PÓRTICOS" - PROGRAMA
PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO

1 - Sobre a montagem da matriz de rigidez S_J

As contribuições do tramo de viga, definido pelo par ordenado (i,j) , com $i=1,2,\dots, n_a$ e $j=1,2,\dots, (n_p-1)$, para a matriz de rigidez total S_J da estrutura, são feitas a partir da matriz S_{MD}^v . As posições corretas de linhas e colunas ficam definidas pelas equações (2.70). Lembrando que a matriz de rigidez é simétrica, sejam os seguintes grupos de expressões:

$$(S_J)_{J_1^i J_1^i} = S_{MD_{11}}^v + \text{contribuições das outras barras}$$

$$(S_J)_{J_1^i J_2^i} = S_{MD_{12}}^v + \text{contribuições das outras barras}$$

$$(S_J)_{J_2^i J_2^i} = S_{MD_{22}}^v + \text{contribuições das outras barras}$$

$$(S_J)_{K_2^i K_2^i} = S_{MD_{44}}^v + \text{contribuições das outras barras}$$

$$(S_J)_{J_1^i K_2^i} = S_{MD_{14}}^v$$

$$(S_J)_{J_2^i K_2^i} = S_{MD_{24}}^v$$

GRUPO I

$$(S_J)_{J_1^i K_1^i} = S_{MD_{13}}^v$$

$$(S_J)_{J_2^i K_1^i} = S_{MD_{23}}^v$$

$$(S_J)_{K_2^i K_1^i} = S_{MD_{34}}^v$$

$$(S_J)_{K_1^i K_1^i} = S_{MD_{33}}^v + \text{contribuições das outras barras}$$

GRUPO II

$$\left. \begin{aligned} (S_J)_{J_2^i J_2^i} &= S_{MD_{22}}^v + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{K_2^i K_2^i} &= S_{MD_{44}}^v + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{J_2^i K_2^i} &= S_{MD_{24}}^v \end{aligned} \right\} \text{GRUPO III}$$

$$\left. \begin{aligned} (S_J)_{J_2^i K_1^i} &= S_{MD_{23}}^v \\ (S_J)_{K_1^i K_2^i} &= S_{MD_{34}}^v + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{K_1^i K_1^i} &= S_{MD_{33}}^v \end{aligned} \right\} \text{GRUPO IV}$$

Os nós $J_{(i,j)}^v$ e $K_{(i,j)}^v$ pertencem, respectivamente, às prumadas j e $(j+1)$, portanto, quatro diferentes situações podem ocorrer:

- Se $(C_p)_j = 0$ e $(C_p)_{j+1} = 0$; o tramo de viga (i,j) contribui com 16 elementos para a matriz S_J , segundo as expressões do GRUPO I, GRUPO II mais os elementos simétricos.
- Se $(C_p)_j = 0$ e $(C_p)_{j+1} = 1$; o tramo de viga (i,j) contribui com 9 elementos para a matriz S_J segundo as expressões do GRUPO I mais os elementos simétricos.
- Se $(C_p)_j = 1$ e $(C_p)_{j+1} = 0$; o tramo de viga (i,j) contribui com 9 elementos para a matriz S_J , segundo as expressões do GRUPO III e GRUPO IV mais os elementos simétricos.
- Se $(C_p)_j = 1$ e $(C_p)_{j+1} = 1$; o tramo de viga (i,j) contribui com 4 elementos para a matriz S_J , segundo as expressões do GRUPO III mais os elementos simétricos.

As contribuições do tramo de pilar definido pelo par ordenado (i,j) , com $i=1,2,\dots,n_a$ e $j=1,2,\dots,n_p$, para a matriz de rigidez total S_J da estrutura, são feitas a partir da matriz S_{MD}^p . As posições corretas de linhas e colunas

ficam definidas pelas equações (2.71). Lembrando que a matriz de rigidez é simétrica, sejam os seguintes grupos de expressões:

$$\left. \begin{aligned} (S_J)_{J'_1 J'_1} &= S_{MD_{11}}^P + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{K'_1 K'_1} &= S_{MD_{44}}^P + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{J'_1 K'_1} &= S_{MD_{14}}^P \end{aligned} \right\} \text{GRUPO I}$$

$$\left. \begin{aligned} (S_J)_{J'_2 J'_2} &= S_{MD_{22}}^P + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{J'_3 J'_3} &= S_{MD_{33}}^P + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{K'_2 K'_2} &= S_{MD_{55}}^P + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{K'_3 K'_3} &= S_{MD_{66}}^P + \text{contribuições das outras barras} \\ (S_J)_{J'_2 J'_3} &= S_{MD_{23}}^P \\ (S_J)_{J'_2 K'_2} &= S_{MD_{25}}^P \\ (S_J)_{J'_2 K'_3} &= S_{MD_{26}}^P \\ (S_J)_{J'_3 K'_2} &= S_{MD_{35}}^P \\ (S_J)_{J'_3 K'_3} &= S_{MD_{36}}^P \\ (S_J)_{K'_2 K'_3} &= S_{MD_{56}}^P \end{aligned} \right\} \text{GRUPO II}$$

Ambos os nós $J^p_{(i,j)}$ e $K^p_{(i,j)}$ pertencem à prumada \underline{i} , portanto duas diferentes situações podem ocorrer:

- Se $(C_p)_j = 0$, então o tramo de pilar (i,j) contribuirá com 20 elementos para a matriz S_j , segundo as expressões do GRUPO I, GRUPO II mais os elementos simétricos;
- Se $(C_p)_j = 1$, então o tramo de pilar (i,j) contribuirá com 16 elementos para a matriz S_j , segundo as expressões do GRUPO II mais os elementos simétricos.

2 - Sobre o programa automático

Para aplicação dos procedimentos descritos no item II.2, foi escrito um programa de cálculo, em linguagem FORTRAN, para computador IBM-1130 com 32K de memória interna.

O programa principal faz uso de 7 subrotinas:

- CODG - gera automaticamente, a partir do vetor C_p os vetores C_d e C_a ;
- REARS - rearranja, convenientemente, as linhas e colunas da matriz S_j correspondentes às coordenadas deslocamento dos apoios, se estas coordenadas indicarem deslocamentos livres ou vínculos elásticos;
- REARD - introduz no vetor deslocamento os dados relativos aos deslocamentos dos apoios, obedecendo o "Sistema Interno de Coordenadas";
- DORIG - reordena os deslocamentos segundo o "Sistema Externo de Coordenadas";
- WRISR - escreve os valores das rigidezes dos vínculos elásticos, segundo o "S.E.C.";
- WRIDR - escreve os valores dos recalques de apoio, segundo o "S.E.C.";
- INVM - inverte a matriz quadrada pelo método de GAUSS-JORDAN, usando o máximo pivô em cada eliminação.

A seguir são identificadas as principais variáveis que figuram no programa principal e nas subrotinas.

Note-se que, no programa, algumas grandezas têm nomes diferentes daqueles que figuram no item II.2. Algumas vezes isto foi devido a exigências da linguagem FORTRAN; outras, devido a modificações posteriores na notação utilizada no texto.

NE	- número da estrutura;
NA	- número de andares da estrutura;
NP	- número de prumadas;
NS	- número de subestruturas
TC	- tipo do carregamento: TC=2 indica que a estrutura está carregada lateralmente; TC=3 indica que a estrutura está submetida a recalques de apoio;
EV	- módulo de elasticidade longitudinal das vigas;
JP	- índice que identifica a prumada de pilar;
CP(JP)	- código para a prumada de pilar JP: CP(JP)=0 indica que a prumada JP é deformável axialmente; CP(JP)=1 indica que a prumada JP é suposta indeformável axialmente;
EP(JP), G(JP)	- respectivamente, módulo de elasticidade longitudinal e transversal da prumada JP. Quando G(JP)=0 então as deformações por força cortante na prumada JP não são consideradas;
NT, L(NT)	- respectivamente, número e largura do tramo NT;
LR()	- restrição de apoio;
SR()	- rigidez do vínculo elástico;
DR()	- recalque de apoio;
SN	- número da subestrutura;
NAS	- número de andares da subestrutura SN;
NASS, NASI	- respectivamente, número do andar superior e inferior da subestrutura SN;
IDENT	- número da subestrutura imediatamente anterior se for idêntica à subestrutura em questão;
H()	- altura dos andares;
IZP(I,J), AX(I,J)	- respectivamente, momento de inércia e área da seção transversal da prumada J, ao nível do andar I;

IZV(I,J)	- momento de inércia do tramo de viga J, ao nível da laje I;
LE(I,J), LD(I,J)	- respectivamente, comprimentos das m ^{is} ulas de rigidez infinita do tramo de viga (I,J);
F()	- força horizontal aplicada ao nível de cada laje;
S(,)	- elemento da matriz de rigidez;
FAC()	- matriz das cargas acumuladas que na saída dos resultados serve para armazenar os deslocamentos;
FC	- coeficiente para as deformações, por cisalhamento, conforme equação (2.36). Valor adotado no programa: 0,833;
SMV11,...SMV44	- elementos da matriz de rigidez de um tramo de viga;
SMP11,...SMP66	- elementos da matriz de rigidez de um segmento de pilar;
D(), DJ()	- vetores utilizados para armazenar os deslocamentos nas diversas fases do programa;
EEV1, EEV2, EEV4	- esforços solicitantes em cada tramo de viga, conforme o procedimento do item 11.2.9;
EEP1, EEP2, EEP4, EEP5	- esforços solicitantes em cada tramo de pilar, conforme o procedimento do item 11.2.9.

Os cartões de dados para o programa, devem ser fornecidos na forma e na ordem da Tabela 1. Os dados fornecidos através dos cartões a, b, c, d e e referem-se à estrutura. Aqueles fornecidos pelos cartões f, g, h, i e j relacionam-se com cada subestrutura. Quando TC=3 (recalques de apoio) o programa entende que não existe carga externa aplicada e os cartões do tipo j não devem ser fornecidos. Se determinada subestrutura SN é idêntica à imediatamente anterior, e menos das cargas externas aplicadas, somente será necessário fornecer o cartão f com o valor IDENT=SN-1. Ainda que as cargas que atuam na subestrutura SN sejam iguais às que atuam na subestrutura SN-1 os cartões do tipo j devem ser fornecidos (a não ser, evidentemente, nos casos em que a estrutura está submetida a recalques dos a-

peios). Os valores LI e LF fornecidos nos cartões do tipo g, h, i e j indicam que o dado lido (ou os dados lidos) repete-se de LI ao LF andar, conforme foi esclarecido no Apêndice 2. Os momentos de inércia e áreas dos pilares - cartões do tipo h - devem ser fornecidos por prumada, de acordo com a numeração dos andares, e as prumadas ordenadas, sequencialmente, da esquerda para a direita. Da mesma forma são introduzidos os dados relativos aos tramos das vigas (cartões do tipo i).

A seguir apresenta-se a listagem do programa para o cálculo automático.

TABELA 1 - FORNECIMENTO DOS DADOS EM CARTÕES

TIPO	DADOS	Nº de cartões	VARIÁVEIS EM CADA CARTÃO	FORMATO
a	dados sobre a estrutura	1	NE NA NP NS TC	5I2
b	módulo de elasticidade das vigas	1	EV	F10.0
c	dados sobre as prumadas	NP	JP CP(JP) EP(JP) G(JP)	2I2,6X,2F10.0
d	largura dos traves	NP-1	NT L(NT)	I2,8X,F10.0
e	dados sobre os apoios	NP	JP LRX LRZ SRX SRZ DRX DRZ	3I2,4X,4F10.0
f	dados sobre a subestrutura SM	1	NAS NASS NAST IDENT	4I2
g	altura dos andares	r	LI H() LF	I2,8X,F10.0,I2
h	momentos de inércia e áreas dos pilares	r	LI IZP(,) AX(,) LF	I2,8X,2F10.0,I2
i	momentos de inércia e mísulas de rigidez infinita das vigas	r	LI IZV(,) LE(,) LD(,) LF	I2,8X,3F10.0,I2
j	carga externa aplicada ao nível de cada laje	r	LI F() LF	I2,8X,F10.0,I2
k	CARTÃO EM BRANCO			

Subestrutura: 1, 2, ..., NS

Subestrutura: 1, 2, ..., NS

PAGE 1 LUFER

// JOB T

LUFER

```

LOG DRIVE      CART SPEC      CART AVAIL      PHY DRIVE
 0000          0016          0016          0000
                0072          0072          0002

```

V2 M10 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// * C.P.D. - E.E.S.C. - U.S.P.

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE CODG(CP,COD,CODA,NP,NDA)
INTEGER CP(7),COD(60),CODA(60)
DO 1 K=1,60
1 COD(K)=0
  N=60/NDA-1
  DO 2 K=1,NP
  IF(CP(K))3,2,3
3 KAUX=2*K-1
  DO 4 J=1,N
  I=KAUX+(J-1)*NDA
4 COD(I)=1
2 CONTINUE
  CODA(1)=COD(1)
  DO 5 K=2,60
  K1=K-1
5 CODA(K)=CODA(K1)+COD(K)
RETURN
END

```

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

```

```

CORE REQUIREMENTS FOR CODG
COMMON      0  VARIABLES      8  PROGRAM      164

```

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*STORE      WS  UA  CODG
CART ID 0016  DB ADDR 42F4  DB CNT 000B

```

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE REARS(LR,SR,S,NNTD,NN,NR)
DIMENSION LR(14),SR(14),S(32,32)
NNV=NN
DO 1 I=1,NR
IF(LR(I))1,2,1
2 NN=NNV+1
  IN=NNV+I
  NN1=NN+1
  IF(IN-NN)3,4,3
3 DO 5 K=1,NNTD
  S(NNTD,K)=S(IN,K)
  DO 6 J=NN1,IN
  JAUX=IN+NN1-J
  JAUX1=JAUX-1
6 S(JAUX,K)=S(JAUX1,K)
5 S(NN,K)=S(NNTD,K)
  DO 7 J=1,NNTD
  S(J,NNTD)=S(J,IN)
  DO 8 K=NN1,IN
  KAUX=IN+NN1-K
  KAUX1=KAUX-1
8 S(J,KAUX)=S(J,KAUX1)
7 S(J,NN)=S(J,NNTD)
4 S(NN,NN)=S(NN,NN)+SR(I)
1 CONTINUE
RETURN
END

```

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

```

PAGE 2 LUFER

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR REARS

COMMON 0 VARIABLES 12 PROGRAM 318

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0000 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA REARS
CART ID 0016 DB ADDR 42FF DB CNT 0015

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```

SUBROUTINE REARD(LR,D,DR,NR,NNV,LRAC)
  DIMENSION LR(14),DR(14),D(60)
  IL=NR-LRAC
  IF(IL)4,5,4
  5 DO 6 I=1,NR
    IN=NNV+I
  6 D(IN)=DR(I)
    GO TO 7
  4 DO 1 I=1,NR
    IF(LR(I))2,3,2
  3 IL=IL-1
    GO TO 1
  2 IR=NNV+I+IL
    D(IN)=DR(I)
  1 CONTINUE
  7 RETURN
  END

```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR REARD

COMMON 0 VARIABLES 6 PROGRAM 124

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0007 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA REARD
CART ID 0016 DB ADDR 4314 DB CNT 0009

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```

SUBROUTINE DORIG(LR,DJ,D,NR,NNV,NN,LRAC)
  DIMENSION LR(14),DJ(60),D(60)
  IL=NR-LRAC
  IF(IL)4,5,4
  5 DO 6 I=1,NR
    IN=NNV+I
  6 DJ(IN)=D(IN)
    GO TO 7
  4 DO 1 I=1,NR
    J=I+NNV
    IF(LR(I))2,3,2
  3 IN=NN-IL+1
    DJ(J)=D(IN)
    IL=IL-1
    GO TO 1
  2 IR=NNV+I+IL
    DJ(J)=D(IN)
  1 CONTINUE
  7 NNTD=NNV+NR+1
    DJ(NNTD)=0.
  RETURN
  END

```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR DORIG

COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 176

PAGE 3 LUFER

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA DORIG
CART ID 0016 DB ADDR 431D DB CNT 000C

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```

SUBROUTINE WRISR(COD,CODA,SR,LR,NP,SAIDA)
  INTEGER COD(60),CODA(60),SAIDA
  DIMENSION LR(14),SR(14)
  WRITE(SAIDA,1)
1  FORMAT(/,10X,'* VINCULOS ELASTICOS',//,10X,'PRUM.',5X,' SRX ',9X,
1  SRZ ',/ )
  DO 2 J=1,NP
    IF(COD(2*J-1))3,4,3
3  J AUX=2*J-CODA(2*J)
    IF(LR(J AUX))5,6,5
6  SRZ=SR(J AUX)
    WRITE(SAIDA,7)J,SRZ
7  FORMAT(11X,12,10X,E12.5)
    GO TO 5
4  J AUX=2*J-1-CODA(2*J-1)
    IF(LR(J AUX))8,9,8
8  IF(LR(J AUX+1))5,10,5
10 SRZ=SR(J AUX+1)
    WRITE(SAIDA,7)J,SRZ
    GO TO 5
9  SRX=SR(J AUX)
    IF(LR(J AUX+1))11,12,11
12 SRZ=SR(J AUX+1)
    WRITE(SAIDA,13)J,SRX,SRZ
13 FORMAT(11X,12,2X,2E14.5)
    GO TO 5
11 WRITE(SAIDA,14)J,SRX
14 FORMAT(11X,12,4X,E12.5)
5  CONTINUE
2  CONTINUE
  RETURN
  END

```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR WRISR

COMMON 0 VARIABLES 10 PROGRAM 246

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 003C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA WRISR
CART ID 0016 DB ADDR 4329 DB CNT 0011

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*ONE WORD INTEGERS

*EXTENDED PRECISION

```

SUBROUTINE WRIDR(COD,CODA,DR,NP,SAIDA)
  INTEGER COD(60),CODA(60),SAIDA
  DIMENSION DR(14)
  WRITE(SAIDA,1)
1  FORMAT(/,10X,'* RECALQUES DE APOIO',//,10X,'PRUM.',5X,' DRX ',8X,
1  DRZ ',/ )
  DO 2 J=1,NP
    IF(COD(2*J-1))3,4,3
3  J AUX=2*J-CODA(2*J)
    IF(DR(J AUX))6,5,6
6  DRZ=DR(J AUX)
    WRITE(SAIDA,7)J,DRZ
7  FORMAT(11X,12,10X,E12.5)
    GO TO 5
4  J AUX=2*J-1-CODA(2*J-1)
    IF(DR(J AUX))8,9,8
9  IF(DR(J AUX+1))10,5,10

```

PAGE 4 LUFER

```

10 DRZ=DR(JAUX+1)
   WRITE(SAIDA,7)J,DRZ
   GO TO 5
8 DRX=DR(JAUX)
  IF(DR(JAUX+1))11,12,11
11 DRZ=DR(JAUX+1)
   WRITE(SAIDA,13)J,DRX,DRZ
13 FORMAT(11X,12,2X,2E14.5)
   GO TO 5
12 WRITE(SAIDA,14)J,DRX
14 FORMAT(11X,12,4X,E12.5)
5 CONTINUE
2 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR WRIDR
COMMON 0 VARIABLES 10 PROGRAM 250

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 003C (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA WRIDR
CARD ID 0016 DB ADDR 433A DB CNT 0012

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE INVM(A,N)
  DIMENSION A(32,32)
  IF(N-1)8,9,8
9 A(1,1)=1./A(1,1)
  GO TO 10
8 DO 11 I=1,N
  AUX=A(I,1)
  A(I,1)=1.
  GO 12 J=1,N
12 A(I,J)=A(I,J)/AUX
  GO 13 K=1,N
  IF(I-K)14,13,14
14 AUX=A(K,I)
  A(K,I)=0.
  DO 15 M=1,N
  A(K,M)=A(K,M)-AUX*A(I,M)
15 CONTINUE
13 CONTINUE
11 CONTINUE
10 RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR INVM
COMMON 0 VARIABLES 10 PROGRAM 176

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0011 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA INVM
CARD ID 0016 DB ADDR 434C DB CNT 000C

// FOR

```

*IGCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
REAL L(6),LR(5,6),LD(5,6),IZV(5,6),IZP(5,7)
INTEGER SAIDA,ENTRE,SN,TC,COD(60),CODA(60),CP(7)
DIMENSION F(32),FAC(32),H(5),G(7),EP(7),AX(5,7),LR(14),SR(14),DR(1

```


PAGE 5 LUFER

```

14),S(32,32),O(60),DJ(60)
DEFINE FILE 1(120,320,U,KX)
SAIDA=5
ENTRE=2
C1. ***** IMPRESSAO DO CABECALHO
WRITE(SAIDA,1)
1 FORMAT(1H1,6X,72(' '),//,32X,'A S S O C I A C A O P L A N A',//,4
15X,'DE',//,20X,'P O R T I C O S C O M P I L A R E S P A R E D E
2 S',//,10X,72(' '))
C2. ***** LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS RELATIVOS A ESTRUTURA NE
NE=NUMERO DA ESTRUTURA
NA=NUMERO DE ANDARES
NP=NUMERO DE PRUMADAS
NS=NUMERO DE SUBESTRUTURAS
TC=TIPO DE CARREGAMENTO(TC=2 CARGA LATERAL/TC=3 RECALQUE)
2 READ(ENTRE,3)NE,NA,NP,NS,TC
3 FORMAT(5I2)
4 DO 6 I=1,32
5 FAC(I)=0.
6 DO 6 J=1,32
7 SIT(J)=0.
8 WRITE(SAIDA,7)NE,NS,NA,NP
9 FORMAT(///,10X,'* ESTRUTURA NUMERO ',I2,' DIVIDIDA EM ',I2,' SUBESTRUTURAS',//,10X,'* NUMERO DE ANDARES ',I2,///,10X,'* NUMERO DE PRUMADAS DE PILARES ',I2)
10 IF(TC-3)8,9,8
11 WRITE(SAIDA,10)
12 FORMAT(/,10X,'* ANALISE DA ESTRUTURA SUBMETIDA A RECALQUE(S)
13 OS')
14 GO TO 11
15 WRITE(SAIDA,12)
16 FORMAT(/,10X,'* ANALISE DA ESTRUTURA CARREGADA LATERAL(LANTE)')
C3. ***** EV=MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL DAS VIGAS
EP=MODULO DE ELASTICIDADE LONGITUDINAL DOS PILARES
G=MODULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL DOS PILARES
CP=CODIGO PARA OS PILARES(CP=1 PRUMADA INDEFORMAVEL AXIAL/CP=0 CONSIDERA DEFORMACOES AXIAIS NA PRUMADA)
11 READ(ENTRE,13)EV
12 FORMAT(F10.0)
13 WRITE(SAIDA,14)EV
14 FORMAT(/,10X,'* PARA AS VIGAS- EV=',E12.5,///,10X,'* PARA CADA PRUMADA DE PILAR',//,10X,'PRUM.',3X,'CP',9X,'EP',12X,'G',/)
15 DO 15 J=1,NP
16 READ(ENTRE,16)JP,CP(JP),EP(JP),G(JP)
17 FORMAT(2I2,6X,2F10.0)
18 WRITE(SAIDA,17)JP,CP(JP),EP(JP),G(JP)
19 FORMAT(11X,12,6X,11,2X,2E14.5)
C4. ***** FC=COEFICIENTE PARA O CALCULO DAS DEFORMACOES POR FORCA GOR TANTE(=0.833 PARA A SECÃO RETANGULAR DE CONCRETO)
SN=0
KX=1
II=1
FC=0.833
NP1=NP-1
NDA=2*NP+1
NAC=0
CALL CODG(CP,COD,CODA,NP,NDA)
NNDA=NDA
DO 18 J=1,NP
IF(CP(J))19,18,19
19 NNDA=NNDA-1
18 CONTINUE
C5. ***** L=LARGURA DO TRAMO NT
WRITE(SAIDA,20)
20 FORMAT(/,10X,'* LARGURA DOS TRAMOS',//,10X,'TRAMO',7X,'L',/)
21 DO 21 J=1,NP1
22 READ(ENTRE,22)NT,L(NT)
23 FORMAT(12,F18.0)
24 WRITE(SAIDA,23)NT,L(NT)
25 FORMAT(11X,12,4X,E12.5)
26 WRITE(SAIDA,24)
27 FORMAT(/,10X,'* DADOS SOBRE OS APOIOS',//,10X,'PRUM.',2X,'LRX ',12X,'LRZ',/)
C6. ***** JP=NUMERO DA PRUMADA
LRX,LRZ=RESPECTIVAMENTE,RESTRICOES SEGUNDO DIRECOES X E Z (LR=1 DESLOCAMENTO IMPEDIDO/LR=0 DESLOCAMENTO LIVRE OU VINCULO ELASTICO)
SRX,SRZ=RESPECTIVAMENTE,RIGIDEZES DOS APOIOS SEGUNDO X E Z
DRX,DRZ=RESPECTIVAMENTE,RECALQUES DOS APOIOS SEGUNDO X E Z
DO 25 J=1,NP
25 READ(ENTRE,26)JP,LRX,LRZ,SRX,SRZ,DRX,DRZ
26 FORMAT(3I2,4X,4F10.0)

```

PAGE 6 LUFER

```

IF(CP(JP))27,28,27
28 JAUX=2*JP-1-CODA(2*JP-1)
   LR(JAUX)=LRX
   SR(JAUX)=SRX
   DR(JAUX)=DRX
27 JAUX=2*JP-CODA(2*JP)
   LR(JAUX)=LRZ
   SR(JAUX)=SRZ
   DR(JAUX)=DRZ
25 WRITE(SAIDA,29)JP,LRX,LRZ
29 FORMAT(11,12,6X,11,7X,11)
   NR=NR+1
   LRAC=LRAC+1
   DO 30 J=2, NR
30 LRAC=LRAC+LR(J)
   IF(NR=LRAC)31,32,31
31 CALL WRISR(COD,CODA,SR,LR,NP,SAIDA)
32 CONTINUE
   IF(IC=2)33,34,33
33 CALL WRIDR(COD,CODA,DR,NP,SAIDA)
C7. ***** DADOS SOBRE A SUBESTRUTURA
   NAS=NUMERO DE ANDARES DA SUBESTRUTURA
   NASS=NUMERO DO ANDAR SUPERIOR
   NASI=NUMERO DO ANDAR INFERIOR
   IDENT=NUMERO DA SUBESTRUTURA IMEDIATAMENTE ANTERIOR SE FOR
   IDENTICA A SUBESTRUTURA EM ESTUDO
34 SN=SN+1
   READ(ENTRE,35)NAS,NASS,NASI,IDENT
35 FORMAT(4I2)
   WRITE(SAIDA,36)SN,NAS,NASS,NASI
36 FORMAT(//,10X,72(' '),//,10X,'** A SUBESTRUTURA ',I2,' POSSUI ',I2
1,' ANDARES- DO ',I2,' AO ',I2)
   IF(IDENT)37,38,37
37 WRITE(SAIDA,40)SN,IDENT
40 FORMAT(/,10X,'** A SUBESTRUTURA ',I2,' E IDENTICA A SUBESTRUTURA '
1,I2)
   GO TO 65
38 WRITE(SAIDA,41)
41 FORMAT(/,10X,'** ALTURA DOS ANDARES',//,10X,'ANDAR',7X,'H',/)
C8. ***** LI E LF INDICAM QUE AS 'VARIAVEIS' LIDAS REPETEM-SE DO LI
   AO LF ANDAR
47 READ(ENTRE,42)LI,AUX1,LF
42 FORMAT(I2,F18.0,I2)
   IF(LF)43,44,43
44 LF=LI
43 DO 45 IAUX=LI,LF
   I=IAUX-NAC
45 H(I)=AUX1
   WRITE(SAIDA,46)LI,LF,AUX1
46 FORMAT(10X,I2,'-',I2,E14.5)
   IF(LF-NASI)47,48,48
48 WRITE(SAIDA,49)
49 FORMAT(/,10X,'** MOMENTOS DE INERCIA E AREAS DOS PILARES',//,10X,'
1PRUM.',2X,'ANDAR',6X,'IZP',12X,'AX',/)
   DO 50 J=1,NP
56 READ(ENTRE,51)LI,AUX1,AUX2,LF
51 FORMAT(I2,8X,2F10.0,I2)
   IF(LF)52,53,52
53 LF=LI
52 DO 54 IAUX=LI,LF
   I=IAUX-NAC
   IZP(I,J)=AUX1
54 AX(I,J)=AUX2
   WRITE(SAIDA,55)J,LI,LF,AUX1,AUX2
55 FORMAT(11X,I2,4X,I2,'-',I2,2E14.5)
   IF(LF-NASI)56,50,50
50 CONTINUE
   WRITE(SAIDA,57)
57 FORMAT(/,10X,'** MOMENTOS DE INERCIA E MISULAS DE RIGIDEZ INFINITA
1 DAS VIGAS',//,10X,'TRAMO',3X,'LAJE',6X,'IZV',12X,'LE',12X,'LD',/)
   DO 58 J=1,NP1
64 READ(ENTRE,59)LI,AUX1,AUX2,AUX3,LF
59 FORMAT(I2,8X,3F10.0,I2)
   IF(LF)60,61,60
61 LF=LI
60 DO 62 IAUX=LI,LF
   I=IAUX-NAC
   IZV(I,J)=AUX1
   LE(I,J)=AUX2
62 LD(I,J)=AUX3
   WRITE(SAIDA,63)J,LI,LF,AUX1,AUX2,AUX3
63 FORMAT(11X,I2,4X,I2,'-',I2,3E14.5)
   IF(LF-NASI)64,58,58

```

PAGE 7 LUFER

58 CONTINUE

```

N=NAS*(2*NP+1)
NTD=N+NDA
NNTD=NTD-CODA(NTD)
NN=NNTD-NNDA
NN1=NN+1

```

C9. ***** FORMACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA A PARTIR DA
 C MATRIZ DE RIGIDEZ DO TRAMO DE VIGA

```

65 DO 66 I=1,NAS
DO 66 J=1,NP1
J1=2*J-1+NDA*(I-1)
J2=J1+1
K1=J2+1
K2=K1+1
J1=J1-CODA(J1)
J2=J2-CODA(J2)
K1=K1-CODA(K1)
K2=K2-CODA(K2)
XL=(J1)-(LE(I,J)+LD(I,J))
SCM1=(4.*EV*IZV(I,J))/XL
SCM2=(1.5*SCM1)/XL
SCM3=(2.*SCM2)/XL
E1=(2.*LE(I,J))/XL
E2=(3.*LE(I,J)*(1.+LE(I,J)/XL))/XL
D1=(2.*LD(I,J))/XL
D2=(3.*LD(I,J)*(1.+LD(I,J)/XL))/XL
C=(3.*LE(I,J)*(1.+LD(I,J)/XL))/XL+(3.*LD(I,J)*(1.+LE(I,J)/XL))/XL
SMV11=SCM3
SMV12=-SCM2*E1
SMV13=-SCM3
SMV14=-SCM2*D1
SMV22=SCM1*(E2+1.)
SMV23=SCM2*E1
SMV24=SCM1*(C+1.)/2.
SMV33=SCM1
SMV34=SCM2*D1
SMV44=SCM1*(D2+1.)
IF(CP(J))67,68,67
S(J1,J1)=S(J1,J1)+SMV11
S(J1,J2)=S(J1,J2)+SMV12
S(J1,K2)=S(J1,K2)+SMV14
S(J2,J1)=S(J1,J2)
S(J2,J2)=S(J2,J2)+SMV22
S(J2,K2)=S(J2,K2)+SMV24
S(K2,J1)=S(J1,K2)
S(K2,J2)=S(J2,K2)
S(K2,K2)=S(K2,K2)+SMV44
IF(CP(J+1))69,70,69
70 S(J1,K1)=S(J1,K1)+SMV13
S(J2,K1)=S(J2,K1)+SMV23
S(K1,K1)=S(K1,K1)+SMV33
S(K2,K1)=S(K2,K1)+SMV34
S(K1,J1)=S(J1,K1)
S(K1,J2)=S(J2,K1)
S(K1,K2)=S(K2,K1)
GO TO 69
67 S(J2,J2)=S(J2,J2)+SMV22
S(K2,J2)=S(K2,J2)+SMV24
S(J2,K2)=S(K2,J2)
S(K2,K2)=S(K2,K2)+SMV44
IF(CP(J+1))69,71,69
71 S(J2,K1)=S(J2,K1)+SMV23
S(K1,K1)=S(K1,K1)+SMV33
S(K2,K1)=S(K2,K1)+SMV34
S(K1,J2)=S(J2,K1)
S(K1,K2)=S(K2,K1)
69 CONTINUE
66 CONTINUE

```

C10. ***** FORMACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA A PARTIR DA
 C MATRIZ DE RIGIDEZ DO TRAMO DE PILAR

```

DO 72 I=1,NAS
DO 72 J=1,NP
J1=2*J-1+NDA*(I-1)
J2=J1+1
J3=NDA*I
K1=2*J-1+NDA*I
K2=K1+1
K3=NDA*(I+1)
J1=J1-CODA(J1)
J2=J2-CODA(J2)
J3=J3-CODA(J3)
K1=K1-CODA(K1)
K2=K2-CODA(K2)

```

PAGE 8 LUFER

```

K3=K3-CODA(K3)
IF(C(J))73,74,73
74 FC1=0.
GO TO 75
73 FC1=(6.*EP(J)*IZP(I,J))/((H(I)**2)*FC*G(J)*AX(I,J))
75 FC2=1./(2.*FC1+1.)
FC3=1.-FC1
FC4=1.+FC1/2.
SCM1=(EP(J)*AX(I,J))/H(I)
SCM2=(4.*EP(J)*IZP(I,J)*FC2)/H(I)
SCM3=(1.5*SCM2)/H(I)
SCM4=(2.*SCM3)/H(I)
SMP11=SCM1
SMP14=-SCM1
SMP22=SCM2*FC4
SMP23=-SCM3
SMP25=SCM2*FC3/2.
SMP26=SCM3
SMP33=SCM4
SMP35=-SCM3
SMP36=-SCM4
SMP44=SCM1
SMP55=SCM2*FC4
SMP56=SCM3
SMP66=SCM4
IF(CP(J))76,77,76
77 S(J1,J1)=S(J1,J1)+SMP11
S(J1,K1)=S(J1,K1)+SMP14
S(K1,K1)=S(K1,K1)+SMP44
S(K1,J1)=S(J1,K1)
76 S(J2,J2)=S(J2,J2)+SMP22
S(J2,J3)=S(J2,J3)+SMP23
S(J2,K2)=S(J2,K2)+SMP25
S(J2,K3)=S(J2,K3)+SMP26
S(J3,J2)=S(J2,J3)
S(J3,J3)=S(J3,J3)+SMP33
S(J3,K2)=S(J3,K2)+SMP35
S(J3,K3)=S(J3,K3)+SMP36
S(K2,J2)=S(J2,K2)
S(K2,J3)=S(J3,K2)
S(K2,K2)=S(K2,K2)+SMP55
S(K2,K3)=S(K2,K3)+SMP56
S(K3,J2)=S(J2,K3)
S(K3,J3)=S(J3,K3)
S(K3,K2)=S(K2,K3)
S(K3,K3)=S(K3,K3)+SMP66
72 CONTINUE
IF(SN-NS)78,79,78
79 NNV=NN
IF(NR-LRAC)80,78,80
80 CALL REARS(LR,SR,S,NNTD,NN,NR)
78 CALL INVM(S,NN)
C11. ***** ENTRADA F IMPRESSAO DAS CARGAS EXTERNAS QUE ATUAM SOBRE A
C ESTRUCTURA
C F= FORCA HORIZONTAL APLICADA AO NIVEL DE CADA LAJE
DO 81 K=1,NNTD
81 F(K)=0.
IF(IC-2)82,83,82
83 WRITE(SAIDA,84)
84 FORMAT(/,10X,'** FORCAS HORIZONTAIS APLICADAS AO NIVEL DE CADA LAJ
IF',/,10X,'LAJE',5X,'F. HORIZ.',/)
90 READ(ENTRE,42)LI,AUX1,LF
IF(LF)86,87,86
87 LF=LI
86 DO 88 K=LI,LF
I=NDA*(K-NAC)
IAUX=I-CODA(I)
88 F(IAUX)=AUX1
WRITE(SAIDA,46)LI,LF,AUX1
IF(LF-NASI)90,82,82
82 CONTINUE
DO 91 K=1,NNTD
91 FAC(K)=FAC(K)+F(K)
IF(SN-NS)92,93,92
92 IF(IC-2)94,95,94
95 DO 96 J=1,NN
F(J)=0.
DO 96 K=1,NN
96 F(J)=F(J)+S(J,K)*FAC(K)
94 CONTINUE
DO 97 J=1,NN
DO 97 I=NN1,NNTD
S(J,I)=0.

```

PAGE 9 LUFER

```

DO 97 K=1,NN
97 S(J,I)=S(J,I)+S(J,K)*S(I,K)
WRITE(1,II)NAS,NASS,NASI,NAC,NTD,NNTD,NN,NN1,IZP,AX,H,LE,LD,IZV,F,
1S
II=II+12
C12. ***** MATRIZES REDUZIDAS DE CARGA E DE RIGIDEZ
IF(TC-2)98,99,98
99 DO 100 J=NN1,NNTD
JNN=J-NN
FAC(JNN)=FAC(J)
DO 100 K=1,NN
100 FAC(JNN)=FAC(JNN)-S(J,K)*F(K)
98 CONTINUE
DO 101 J=NN1,NNTD
DO 101 K=NN1,NNTD
DO 101 I=1,NN
101 S(J,I)=S(J,K)-S(J,I)*S(I,K)
DO 102 J=1,NDA
JNN=J+NN
DO 102 K=1,NDA
KNN=K+NN
102 S(J,K)=S(JNN,KNN)
NDA1=NDA+1
DO 103 J=NDA1,NNTD
FAC(J)=0.
DO 103 K=1,NNTD
103 S(J,K)=0.
DO 104 J=1,NDA
DO 104 K=NDA1,NNTD
104 S(J,K)=0.
FAC=NAC+NAS
GO TO 34
C13. ***** CALCULO DOS RESULTADOS E SUBSTITUICOES DE VOLTA
PARA ULTIMA SUBESTRUTURA
93 CALL REARD(LR,D,DR,NR,NNV,LRAC)
IF(TC-2)105,106,105
105 NNTD1=NNTD-1
DO 107 I=1,NN
DO 107 J=NN1,NNTD1
107 FAC(I)=FAC(I)-S(I,J)*D(J)
106 CONTINUE
DO 110 I=1,NN
D(I)=0.
DO 110 J=1,NN
110 D(I)=D(I)+S(I,J)*FAC(J)
DO 111 J=1,NNV
111 DJ(J)=D(J)
CALL DORIG(LR,DJ,D,NR,NNV,NN,LRAC)
GO TO 200
C14. ***** PARA AS DEMAIS SUBESTRUTURAS
300 SN=SN-1
II=II-12
READ(1,II)NAS,NASS,NASI,NAC,NTD,NNTD,NN,NN1,IZP,AX,H,LE,LD,IZV,F,S
DO 118 J=NN1,NNTD
JNN=J-NN
118 D(J)=DJ(JNN)
DO 119 J=1,NN
D(J)=F(J)
DO 119 K=NN1,NNTD
119 D(J)=D(J)-S(J,K)*D(K)
DO 120 J=1,NNTD
120 DJ(J)=D(J)
C14. ***** CALCULO DOS ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS
EXPANSÃO DO VETOR DESLOCAMENTO PARA O SISTEMA DE COORDENA-
DAS TOTAL
200 DO 121 I=1,NTD
IF(COD(I))122,123,122
122 FAC(I)=0.
GO TO 121
123 IAUX=I-CODA(I)
FAC(I)=DJ(IAUX)
121 CONTINUE
C15. ***** IMPRESSÃO DOS RESULTADOS
DESLOCAMENTOS DOS NOS
WRITE(SAIDA,124)SN
124 FORMAT(//,10X,72('*'),//,10X,'RESULTADOS PARA A SUBESTRUTURA ',I2,/,
1,10X,72('*'),//,10X,'*** DESLOCAMENTOS AO NIVEL DE CADA LAJE',//,1
20X,'LAJE',3X,'PRUM.',6X,'DJX',11X,'DJY',11X,'DJZ',/)
NAS1=NAS+1
DO 125 I=1,NAS1
IAUX=I+NAC
DO 125 J=1,NP
J1=2*J-1+NDA*(I-1)

```

PAGE 10 LUFER

```

J2=NDA*I
J3=J1+1
IF(IAUX-NA-1)126,127,126
127 WRITE(SAIDA,128)J,FAC(J1),FAC(J2),FAC(J3)
128 FORMAT(10X,'BASE',4X,I2,2X,3E14.5)
GO TO 125
126 WRITE(SAIDA,129)IAUX,J,FAC(J1),FAC(J2),FAC(J3)
129 FORMAT(11X,I2,5X,I2,2X,3E14.5)
125 CONTINUE
C17. ***** ESFORÇOS NOS TRAMOS DAS VIGAS
WRITE(SAIDA,130)
130 FORMAT(/,10X,'*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DAS VIGAS',//,10X,'LAJE',3X,
1' TRAMO',4X,'F. CORT.',6X,'MOM. ESQ.',5X,'MOM. DIR.',/)
DO 131 I=1,NAS
IAUX=I+NAC
DO 131 J=1,NP1
J1=2*J-1+NDA*(I-1)
J2=J1+1
K1=J2+1
K2=K1+1
XL=L(J)-(LE(I,J)+LD(I,J))
SCM1=(4.*EV*IZV(I,J))/XL
SCM2=(1.5*SCM1)/XL
SCM3=(2.*SCM2)/XL
EEV1=SCM3*(FAC(J1)-FAC(K1)-FAC(J2)*LE(I,J)-FAC(K2)*LD(I,J))-SCM2*(
1FAC(J2)+FAC(K2))
EEV2=SCM2*(-FAC(J1)+FAC(J2)*LE(I,J)+FAC(K1)+FAC(K2)*LD(I,J))+SCM1*
1(FAC(J2)+FAC(K2)/2.)
EEV4=SCM2*(-FAC(J1)+FAC(J2)*LE(I,J)+FAC(K1)+FAC(K2)*LD(I,J))+SCM1*
1(FAC(J2)/2.+FAC(K2))
131 WRITE(SAIDA,132)IAUX,J,EEV1,EEV2,EEV4
132 FORMAT(11X,I2,5X,I2,2X,3E14.5)
C18. ***** ESFORÇOS NOS TRAMOS DE PILARES
WRITE(SAIDA,133)
133 FORMAT(/,10X,'*** ESFORÇOS NOS TRAMOS DOS PILARES',//,10X,'ANDAR',
12X,'PRUM.',4X,'F. NORMAL',5X,'F. CORT.',6X,'MOM. TOPO',5X,'MOM. BA
2SE',/)
DO 134 I=1,NAS
IAUX=I+NAC
DO 134 J=1,NP
J1=2*J-1+NDA*(I-1)
J2=J1+1
J3=NDA*I
K1=2*J-1+NDA*I
K2=K1+1
K3=NDA*(I+1)
IF(G(J))135,136,135
136 FC1=0.
GO TO 137
135 FC1=(6.*EP(J)*IZP(I,J))/((H(I)**2)*FC*G(J)*AX(I,J))
137 FC2=1./(2.*FC1+1.)
FC3=1.-FC1
FC4=1.+FC1/2.
SCM1=(EP(J)*AX(I,J))/H(I)
SCM2=(4.*EP(J)*IZP(I,J)*FC2)/H(I)
SCM3=(1.5*SCM2)/H(I)
SCM4=(2.*SCM3)/H(I)
EEP1=SCM1*(FAC(J1)-FAC(K1))
EEP2=SCM2*(FC4*FAC(J2)+FC3*FAC(K2)/2.)+SCM3*(FAC(K3)-FAC(J3))
EEP3=SCM4*(FAC(J3)-FAC(K3))-SCM3*(FAC(J2)+FAC(K2))
EEP5=SCM2*(FC3*FAC(J2)/2.+FC4*FAC(K2))+SCM3*(FAC(K3)-FAC(J3))
134 WRITE(SAIDA,138)IAUX,J,EEP1,EEP3,EEP2,EEP5
138 FORMAT(11X,I2,5X,I2,2X,4E14.5)
IF(SN-1)2,2,300
5 CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 ICCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 4642 PROGRAM 5056

END OF COMPILATION.

// XEQ

IV - BIBLIOGRAFIA

- 1 - "TALL BUILDINGS" - Proceedings of Symposium on Tall Buildings, Southampton, April 1966 - Pergamon Press.
- 2 - "ACE COMMITTEE 442", Response of Buildings to lateral Loads, Jnl. A.C.I., Fev., 1971, pp. 105.
- 3 - "PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON PLANNING AND DESIGN OF TALL BUILDINGS", Lehigh University, 1972.
- 4 - STAMATO, M.C. - Estado Atual da Análise de Estruturas Tridimensionais de Edifícios Altos, Publ. nº 163, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1972.
- 5 - ALLICIS, M. e COULET, J. - Le déplacement des Bâti-ments, Ann. Inst. Tech. Univ. Poly. S.G., nº 149, Mai., 1960, pp 473-500.
- 6 - COULL, A. - Interaction of Coupled Shear Walls With Elastic Foundations, A.C.I. Journal, Proceedings V. 68, nº 6, June, 1971.
- 7 - COULL, A. - Coupled Shear Walls subjected to Differential Settlement, Build. Sci. Vol. 6, pp 209-212, Pergamon Press, 1971.
- 8 - TSO, W.K. e CHAN, P.C.K. - Effect of Flexible Foundation on Coupled Shear Walls, McMaster University, Canada, Report 71-22, November 1971.
- 9 - TSO, W.K. - Stresses in Coupled Shear Walls Induced By Foundation Deformation, McMaster University, Canada, Report 71-23, December 1971.
- 10 - CLUCK, J. - Lateral Load Analysis of Multistory Structures Comprising Shear Walls With Sudden Changes in Stiffness, A.C.I. Journal, Proc. Vol. 66, September 1969.

- 11 - STAMATO, M.C. - Associação Contínua de Painéis de Contraventamento, Publ. nº 157, Escola de Engenharia de São Carlos, S.P., 1971.
- 12 - MANCINI, E. - Associação Contínua Tridimensional de Pórticos e Paredes com Engastamento Elástico, Publ. nº 166, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, S.P., 1972.
- 13 - CARDAN, B. - Concrete Shear Walls Combined With Rigid Frames in Multistory Buildings Subject to Lateral Loads, A.C.I. Journal, vol. 58, nº 3, Sept., 1961, pp 299-315.
- 14 - GOULD, P.L. - Interaction of Shear Wall and Frame Systems in Multistory Buildings, Jnl A.C.I., vol. 69, January 1965.
- 15 - CLOUGH, R.W., KING, I.P. e WILSON, E.L. - Structural Analysis of Multistory Buildings, Proc. A.S.C.E., nº ST3, June, 1964, pp 19-34.
- 16 - FERRY BORGES, J. e RAVARA, A. - Estudo do Comportamento de Estruturas de Edifícios Elevados sob Ação de Forças Horizontais, II^{as} Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Rio de Janeiro-São Paulo, Agosto, 1967, 30 pp.
- 17 - KHAN, F.R. e SBAROUNIS, J.A. - Interaction of Shear Walls and Frames, Proc. A.S.C.E., vol. 90, nº ST3, pp 285-335, 1964.
- 18 - AVRAN, C. e outros - Recherches Concernant le Calcul et le Comportement des Structures de Grande Hauteur e Cadres - Refends, Réalisées en Béton Armé e Soumises à des Charges Horizontales, Mem. Ass. Internl. Ponts e Charpents, vol. 29-II, 1969, pp 29-40.
- 19 - MANCINI, E. - Análise Contínua de Estruturas de Edifícios Elevados Sujeitos à Ação do Vento, Publ. nº 184, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, Dezembro, 1973.

- 20 - STAMATO, M.C. - Distribuição das Cargas do Vento entre os Painéis de Contraventamento, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, S.P., 1966.
- 21 - FRANSSON, B. - Unsymmetrical Multi-Story Buildings, Publ. 73:4, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1973.
- 22 - SAVASSI, W. - Contribuição ao Emprego dos Elementos Finitos em Elasticidade Plana, Publ. nº 173, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, S.P., 1972.
- 23 - BOSSHARD, W. - An Introduction to Finite Element Technique, Publ. nº 162, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, S.P., 1971.
- 24 - RUBINSTEIN, M.F. e ROSEN, R. - Substructure Analysis by Matrix Decomposition, Proc. A.S.C.E., nº ST3, March, 1970, pp 663-670.
- 25 - BARKAN, D. - Dynamics of Bases and Foundation, McGraw-Hill, Inc., 1962.
- 26 - FIGUEIREDO, R.G. de - Sobre a Instabilidade Elástica de Pórticos Tri-Dimensionais de Edifícios, Publ. nº 190, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, S.P., 1974. Gauss Jordan

