

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS COBERTURAS
PÊNSEIS EM CASCA PROTENDIDA DE REVOLUÇÃO**

ENG. ROBERTO L. A. BARBATO

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

PUBL. n° 200, SÃO CARLOS, OUTUBRO DE 1975

Class. 1101

Gutt. B1350

62

Tombo 46/10/1

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS COBERTURAS
PÊNSEIS EM CASCA PROTENDIDA DE REVOLUÇÃO

ENG. ROBERTO L.A. BARBATO

Tese apresentada à Escola de Engenharia de S.Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Doutor em Engenharia Civil".

Orientador

Prof. Dante A.O. Martinelli

Suplentes

Prof. Lafael Petroni
Prof. Milton Mautoni
Prof. Carlos A. Soares
Prof. Walter Savassi

Comissão Examinadora

Prof. Paulo R. Fragoso
Prof. Péricles B. Fusco
Prof. Lauro M. dos Santos
Prof. Ilio Montanari
Prof. Dante A.O. Martinelli

São Carlos, outubro, 1975

A

Orlando

Libia

Orlando Luis

A

Cleusa

Dani

Pito

Kiza

Aos mestres

Alzira Rollemberg

Licia Andreolli

Vicente Marino Jr

AGRADECIMENTOS

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos Srs. Rednei A. Botelho, Rui R. Casale, Antonio R. Lopes, José C. Marrara, David R. da Silva e José A. Periotto pelos cuidadosos trabalhos de datilografia e desenho.

Agradecimento especial ao Prof. Dante A.O. Martinelli pela dedicada orientação, pelo grande estímulo, pelas críticas sempre construtivas e, sobretudo, pela sugestão do tema da pesquisa.

R E S U M O

Apresentam-se subsídios para o cálculo de um tipo de cobertura pênsil de planta circular em casca protendida de revolução.

Por ser um tipo de cobertura relativamente pouco conhecido, julgou-se interessante introduzir no primeiro capítulo um breve relato dos elementos estruturais que entram na composição da cobertura, o processo pelo qual se obtém a protensão da casca, e também as descrições das coberturas de Montevideu e de Araraquara, representativas do tipo.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo dos cabos portantes da cobertura. Nos dois primeiros itens analisam-se os cabos considerados inextensíveis e solicitados por carregamentos (g,P) e (p,P) , oportunamente definidos. Para ambos os carregamentos, estuda-se, no terceiro e último item, a influência da deformação do cabo.

No terceiro capítulo analisa-se a casca de revolução com meridiano definido pela equação da curva do cabo e solicitada pela carga de protensão. Recordam-se inicialmente as equações gerais do regime de membrana e depois deduzem-se as expressões que permitem estudar as membranas com meridianos definidos pelos carregamentos (g,P) e (p,P) . Isto se faz no segundo e no terceiro item, ficando a análise das perturbações de borda para o quarto e último item do capítulo.

No quarto capítulo aplicam-se os estudos do cabo e da casca ao projeto de uma cobertura com 60,00 m de diâmetro e flecha de aproximadamente 4,80 m. Trata-se da cobertura do Ginásio de Esportes de Rolândia, cuja descrição é feita no primeiro item, e para a qual se apresentam, nos itens seguintes, quatro soluções. Comentários a respeito dos resultados obtidos são feitos no quinto item, fechando o capítulo.

No quinto e último capítulo apresentam-se sugestões para o projeto desse tipo de cobertura, comentam-se os principais aspectos construtivos e relacionam-se as pesquisas que se pretende realizar como continuação desta.

ABSTRACT

A contribution to the analysis and design of a type of prestressed axisymmetric shell hanging roofs is presented.

The first chapter begins with a short discussion of the structural elements and of the prestressing of this comparatively little known type of roofs, followed by the description of the hanging roofs of Montevideo and Araraquara.

In the second chapter the statical analysis for inextensible and deformable cables subjected to the two more important loading cases is developed.

The third chapter is devoted to the study of the prestressed shell. After recalling the essentials of the membrane regime, the membranes whose meridians are the cables subjected to either of the two above loads (which include prestressing of the roof) are analyzed. The chapter is closed with the study of the edge disturbances.

In the fourth chapter the results of the two previous chapters are applied to the design of a roof 60,00m in diameter with a meridian elevation of approximately 4,80m, basically the roof of the "Ginásio de Esportes" de Rolândia, Paraná. Four alternatives are presented and commented.

In the fifth and last chapter design considerations are presented. A brief presentation of the future research work on the subject closes the chapter.

INDICE

1. INTRODUÇÃO	
1.1. Preliminares.....	1.1
1.2. As coberturas de Montevideu e Araraquara.....	1.3
1.3. Conteúdo do trabalho.....	1.17
2. ESTUDO DO CABO	
2.1. Cabo inextensível com carregamento (g,P).....	2.1
2.2. Cabo inextensível com carregamento (p,P).....	2.18
2.3. Influência da deformação do cabo.....	2.22
3. CASCA DE REVOLUÇÃO SUJEITA A CARREGAMENTO COM SIMETRIA RADIAL	
3.1. Equações gerais de membrana.....	3.1
3.2. Membrana com meridiano definido por carregamento (g,P).....	3.5
3.3. Membrana com meridiano definido por carregamento (p,P).....	3.11
3.4. Perturbações geradas pelos vínculos.....	3.15
4. APLICAÇÕES	
4.1. Descrição da cobertura estudada.....	4.1
4.2. Cálculo da cobertura com carregamento (g,P).....	4.21
4.3. Cálculo da cobertura com carregamento (g,P) e carga de protensão aplicada na borda interna	4.35
4.4. Cálculo da cobertura com carregamento (p,P) e carga de protensão aplicada na borda interna	4.37
4.5. Análise dos resultados obtidos.....	4.42
5. COMENTÁRIOS FINAIS	
5.1. Indicações para projeto.....	5.1
5.2. Aspectos construtivos.....	5.2
5.3. Continuação da pesquisa.....	5.16
6. BIBLIOGRAFIA.....	6.1

1. INTRODUÇÃO

1.1. PRELIMINARES

Dentre os diversos tipos de coberturas pênseis, destaca-se o de planta circular em casca protendida de revolução. Este tipo de cobertura, bastante peculiar, deriva da cobertura pênzil de planta circular composta de dois anéis concêntricos, de uma cesta de cabos radiais ancorada nos anéis e de elementos de vedação, geralmente placas pré-fabricadas, que se apóiam nos cabos que formam a cesta (figura 1.1.1). A cobertura assim formada — cesta ancorada nos anéis, elementos de vedação apoiados nos cabos e material vedante colocado nas juntas — pode sofrer, em função de sua pequena rigidez, oscilações consideráveis que implicariam, principalmente, no emprego de pesados elementos de vedação e em técnicas especiais para garantir a impermeabilização da cobertura.

Esses dois aspectos — pequena rigidez e necessidade de impermeabilização — considerados por alguns como pontos fracos das coberturas pânseis, podem ser contornados com a protensão da cobertura.

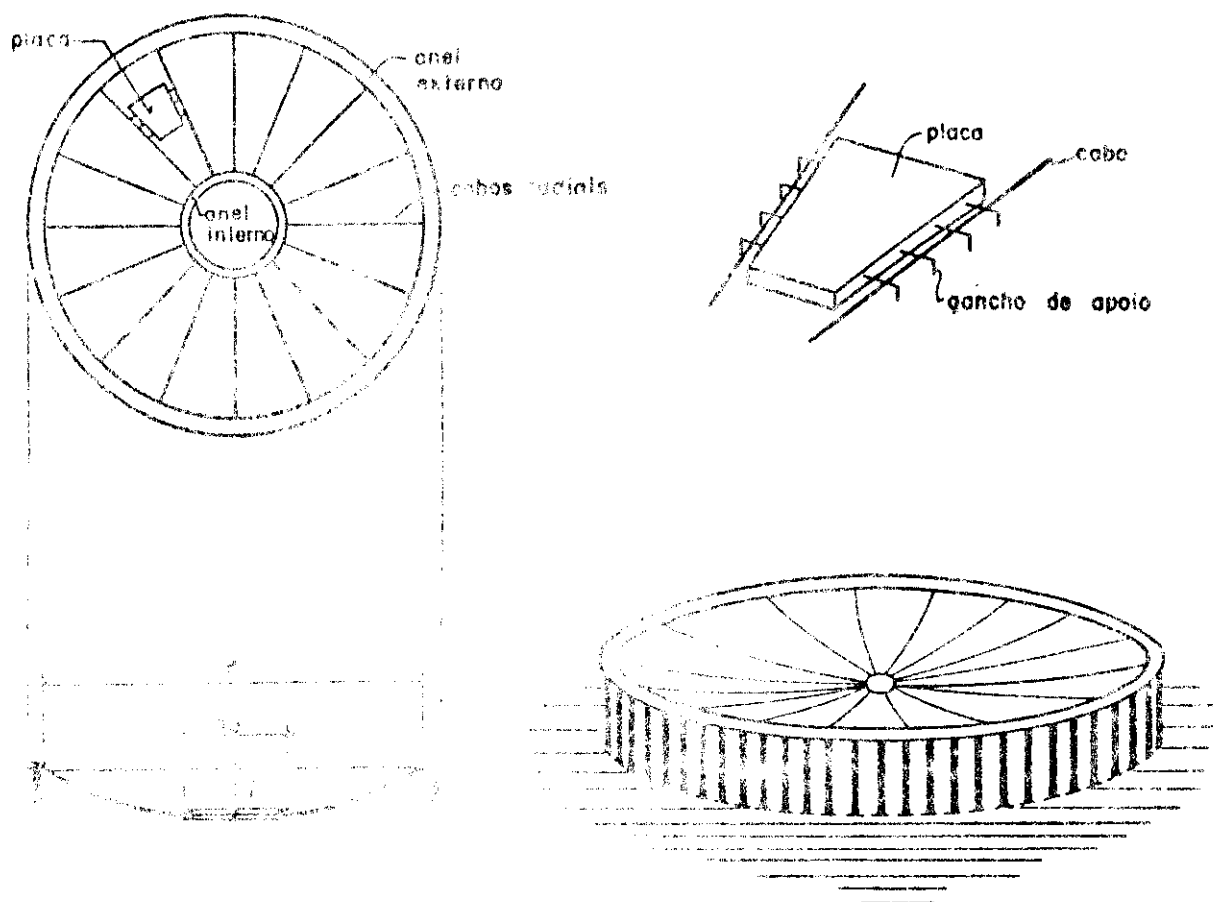


Fig. 5.1

Uma das maneiras de protender a cobertura, talvez a mais simples, consiste em aplicar uma carga sobre os elementos de vedação e retirá-la após introduzir nas juntas material vedante pouco deformável.

A retirada da carga, equivalente a uma ação de mesma intensidade aplicada de baixo para cima, confere ao conjunto de placas o funcionamento de casca protendida, ao mesmo tempo que, comprimindo as juntas, resolve de maneira satisfatória os problemas de vedação.

Percebe-se logo que este tipo de cobertura poderá, em muitos casos, representar alternativa extremamente vantajosa para coberturas de grandes vãos, principalmente pelas possibilidades de pré-fabricação e pela grande redução de cimbramento, não esquecendo que são possíveis diversas variantes de execução com recursos técnicos e mão-de-obra correntes.

É conveniente fixar o conceito acima exposto com a descrição de duas coberturas desse tipo, o que se faz no item seguinte, após o qual já podem ser apresentadas, com suficiente clareza, no item final desta Introdução, as linhas gerais dos capítulos seguintes.

1.2. AS COBERTURAS DE MONTEVIDÉU E ARARAQUARA

Uma das mais importantes obras com esse tipo de cobertura, talvez a primeira do mundo, é o Estádio de Montevideu, figuras 1.2.1 a 1.2.3, construído para ser o Pavilhão Central da Exposição Nacional da Produção.

O anel externo, onde são ancoradas as extremidades mais altas dos cabos ($\phi 3/8"$), e que absorve os esforços horizontais provenientes da cobertura, foi construído em concreto armado com dimensões de 2,00x0,45m e se apóia em uma parede cilíndrica, também de concreto armado, que confina lateralmente o pavilhão. A parede cilíndrica, que tem 94,00m de diâmetro e que transmite às fundações os esforços verticais oriundos da cobertura, foi executada com formas deslizantes em 36 operações, ($\sigma_{c14} = 395 \text{ kgf/cm}^2$, endurecimento rápido) com 25,00m de altura e 0,10m de espessura.

O anel central, com 5,70m de diâmetro interno, foi construído com duas chapas de aço de 0,05m de espessura e 0,30m de largura. As duas chapas são ligadas exteriormente por segmentos de barras que as mantêm equidistantes, e interiormente por uma chapa com 0,05m de espessura e 0,13m de altura, provida de furos, onde são ancoradas as

extremidades mais baixas dos 256 cabos empregados para a formação da cesta.

Para receber o lanternim e também com a finalidade de coletar as águas pluviais, foi construído um anel de concreto com 20,00m de diâmetro contendo 256 furos de 0,05m de diâmetro, por onde passam livremente os cabos de cobertura.

Como elementos de vedação usaram-se 9000 placas pré-fabricadas de concreto armado, providas de ganchos de apoio nos lados não paralelos, com 0,05m de espessura, 1,00m de comprimento e largura variável.

Após a colocação de todas as placas, a estrutura foi carregada com carga de 65 kgf/m^2 obtida mediante tijolos. Uma vez o teto carregado, procedeu-se o enchimento das juntas. Após o endurecimento do concreto colocado nas juntas, a carga foi retirada, obtendo-se assim a estrutura final pretendida.

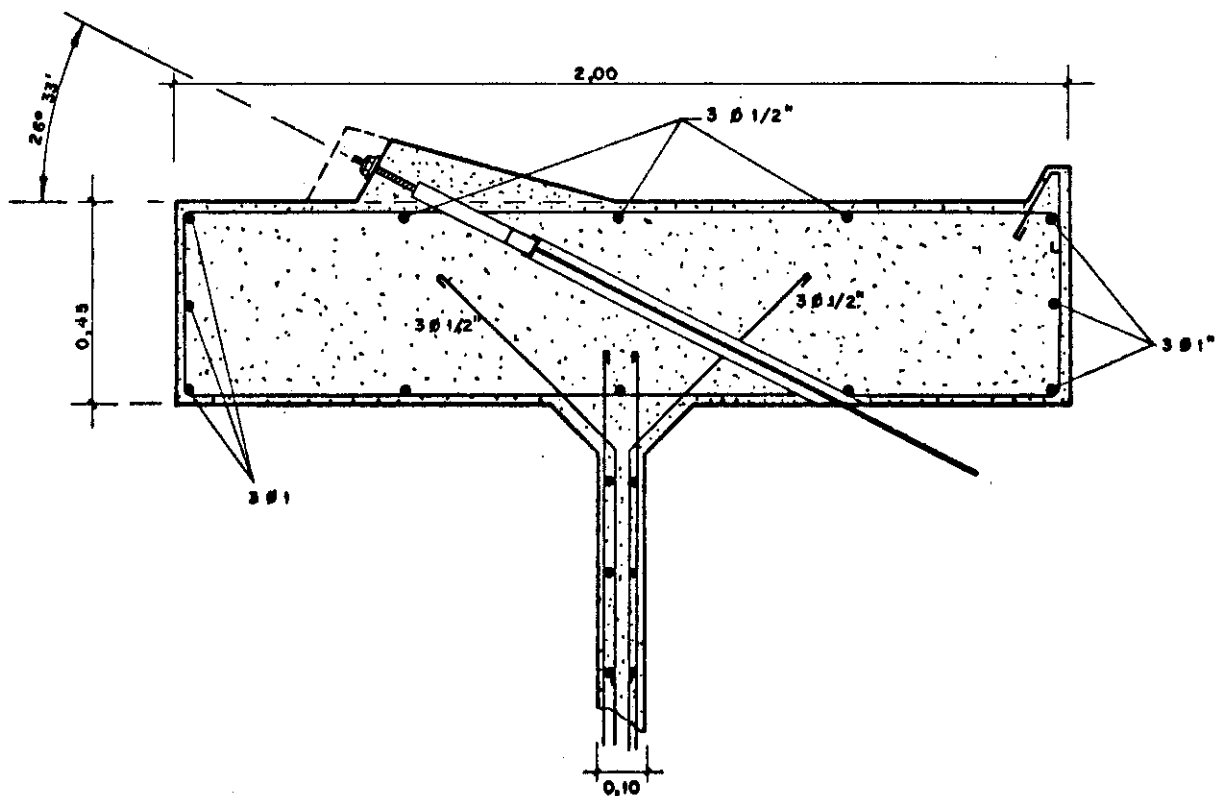


Fig. 1.2.1 - Secção transversal do anel externo (med. em m)

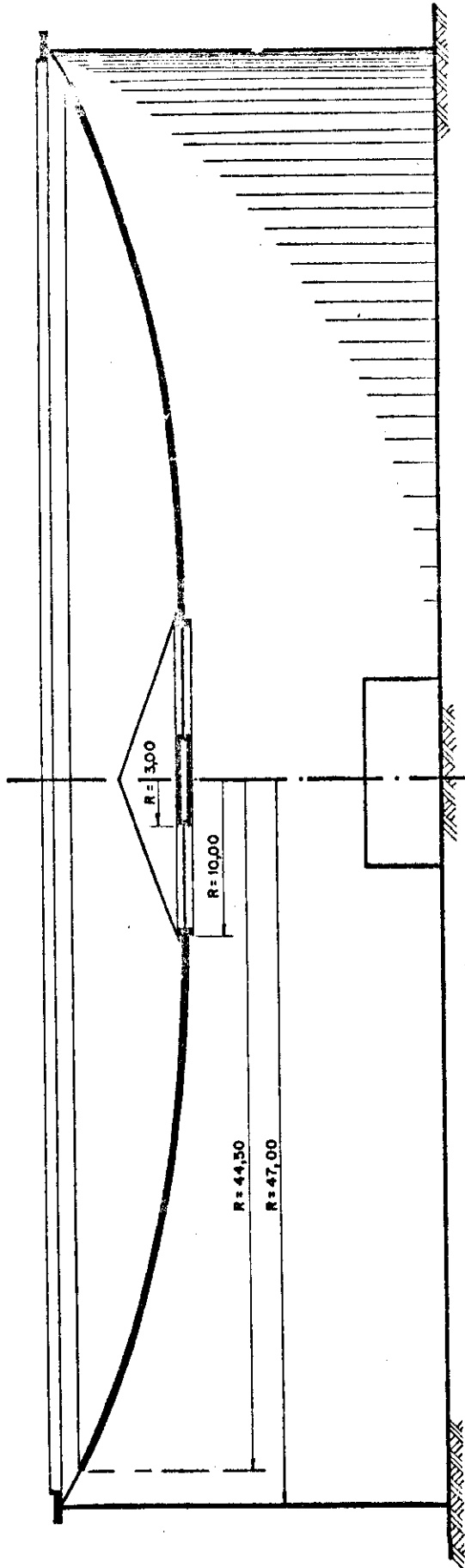


Fig. 1.2.2 - Corte diâmetral (med. em m)

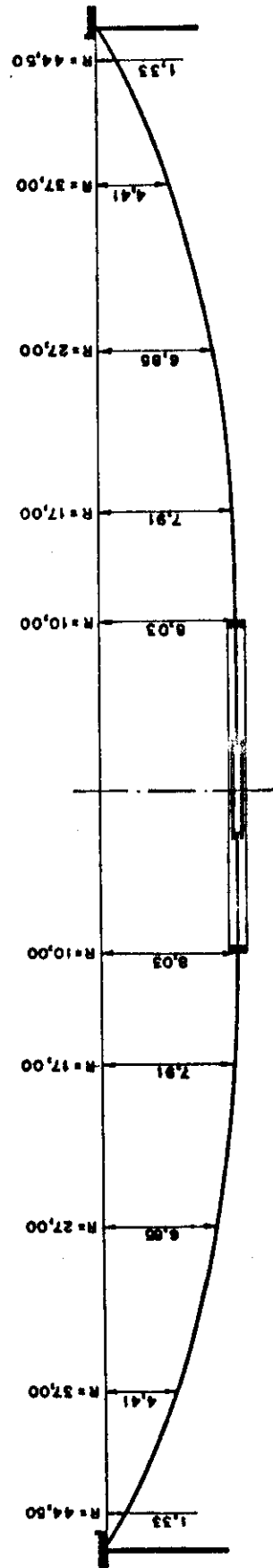


Fig. 1.2.3 - Cotas dos cabos (med. em m)

O tempo gasto para execução da cobertura foi de 40 dias assim distribuídos: montagem e colocação do anel interno, 1 dia; colocação dos cabos, 6 dias; colocação das placas, 17 dias; aplicação da carga de protensão, 10 dias; enchimento das juntas, 1 dia; retirada da carga de protensão, 5 dias.

Para avaliar os efeitos do vento na cobertura, foram realizados ensaios com modelo reduzido (escala 1/100) e túnel de vento, especialmente construído, com possibilidade de produzir ventos com velocidades de 50 a 64 km/h.

Dos 22 medidores de pressão instalados no modelo, figura 1.2.4, 21 foram colocados na parte correspondente à cobertura - dispostos segundo a direção radial - e um colocado no interior do modelo, fixado na parede lateral. Com a finalidade de medir as pressões em todos os pontos da cobertura, o modelo foi seccionado horizontalmente, possibilitando, com uma simples rotação da parte superior, orientar a linha de piezômetros em qualquer direção em relação à linha de ação do vento.

Os ensaios foram realizados com diferentes posições das portas em relação à ação do vento, e também diversas combinações de portas abertas e fechadas.

Os coeficientes de forma $C = 2g(p-p_a)/\gamma v^2$, foram obtidos em função das pressões p observadas no modelo, em função de uma pressão p_a de referência (piezômetro instalado na parede vertical do túnel de vento), da velocidade do vento v , da aceleração da gravidade g e do peso específico do ar contido no interior do túnel. Os valores mais significativos de C , obtidos pela diferença C_s (pontos da cobertura) e C_i (ponto do interior do modelo) estão representados nas figuras 1.2.6 a 1.2.12.

Em consequência da ausência de formas e cimbramento e também do baixo consumo de concreto, o custo da cobertura foi estimado em 640.000 pesos uruguaios. As outras duas coberturas propostas, casca em concreto armado e co-

bertura metálica com vedação de alumínio, foram estimadas, respectivamente, em 2.400.000 e 1.900.000 pesos uruguaios. Outros detalhes podem ser encontrados em MONDINO(1955)*, MILLER(1958) e MAGGIOLLO(1957).

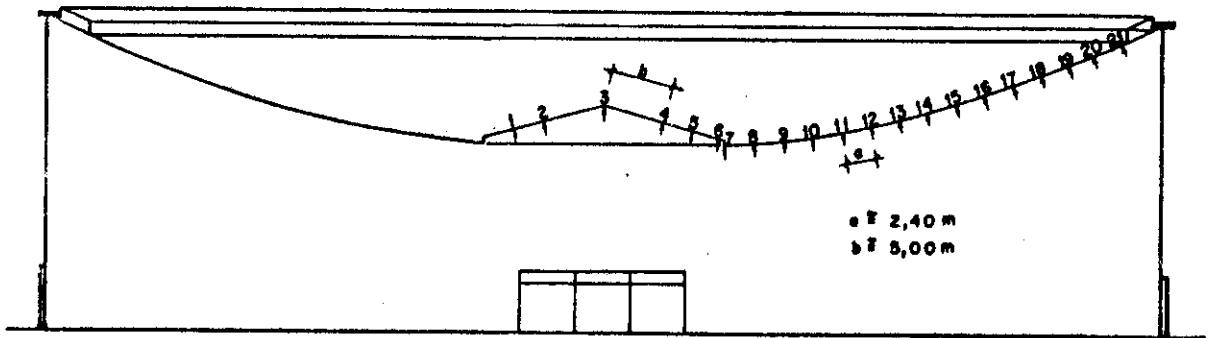


Fig. 1.2.4 - Posição dos piezômetros

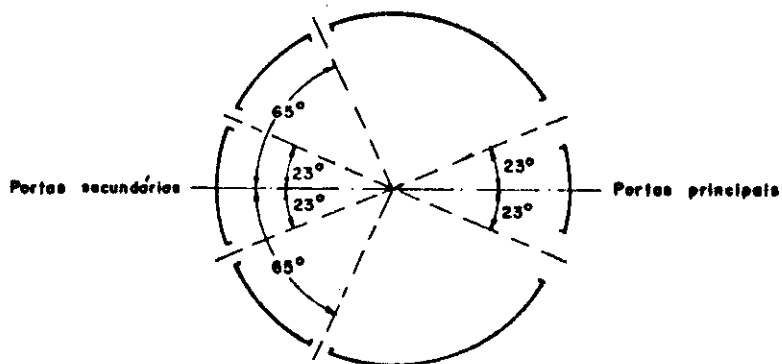


Fig. 1.2.5 - Posição das portas

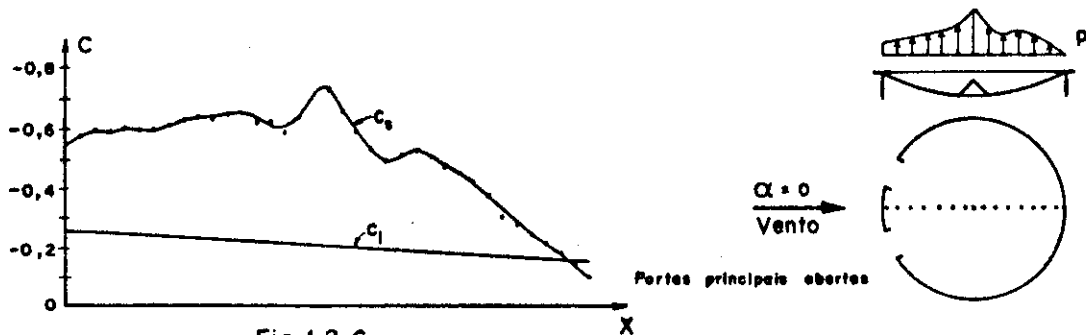
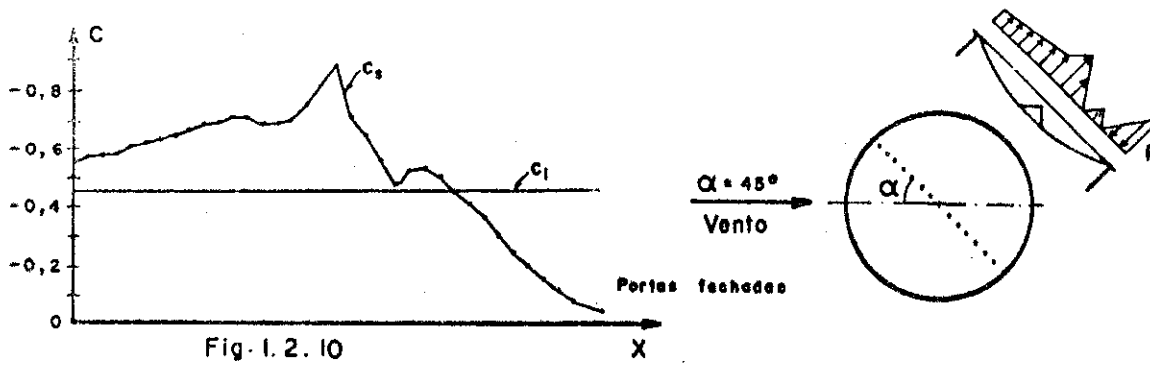
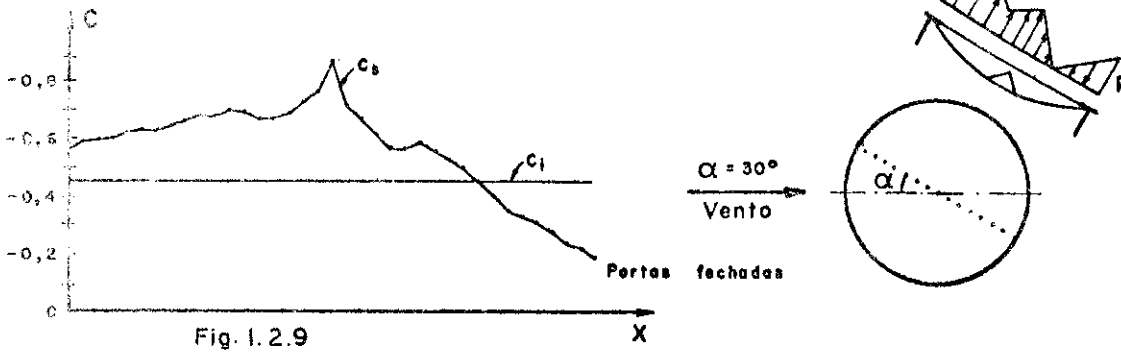
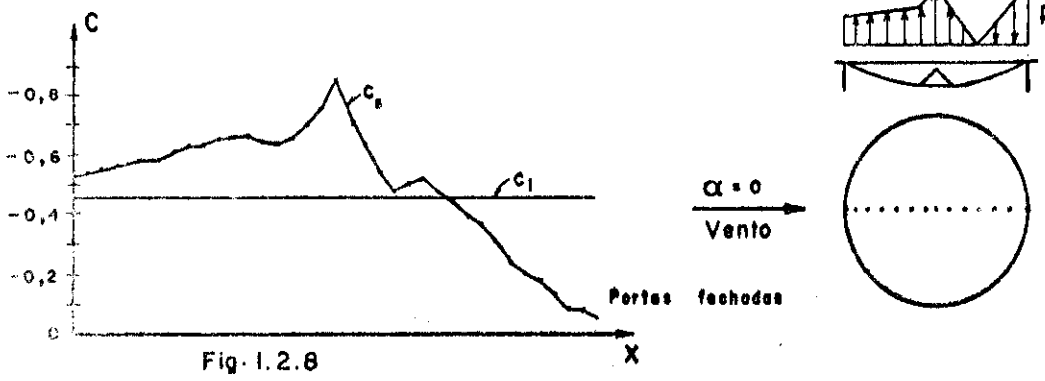
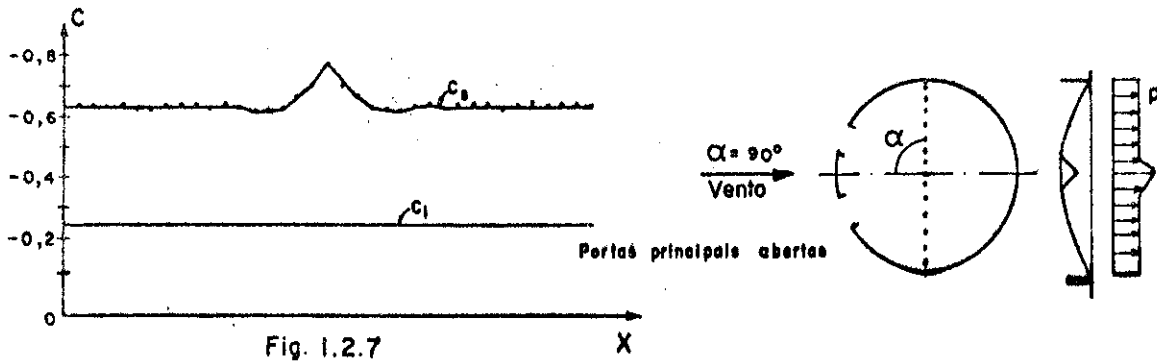
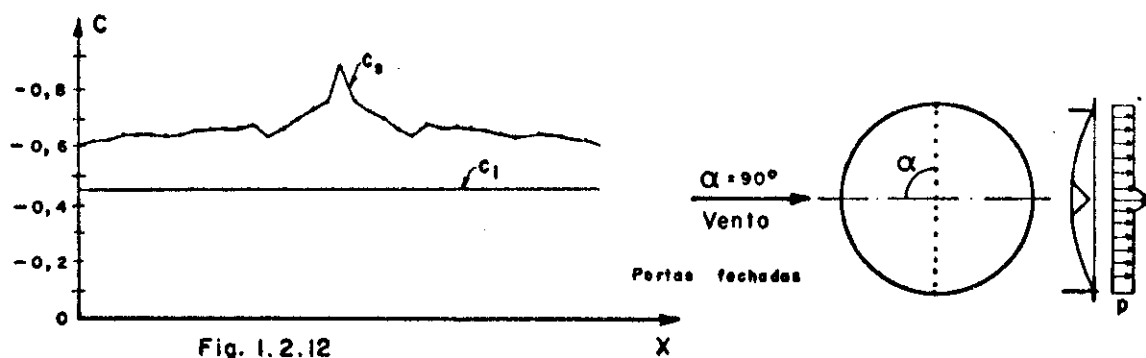
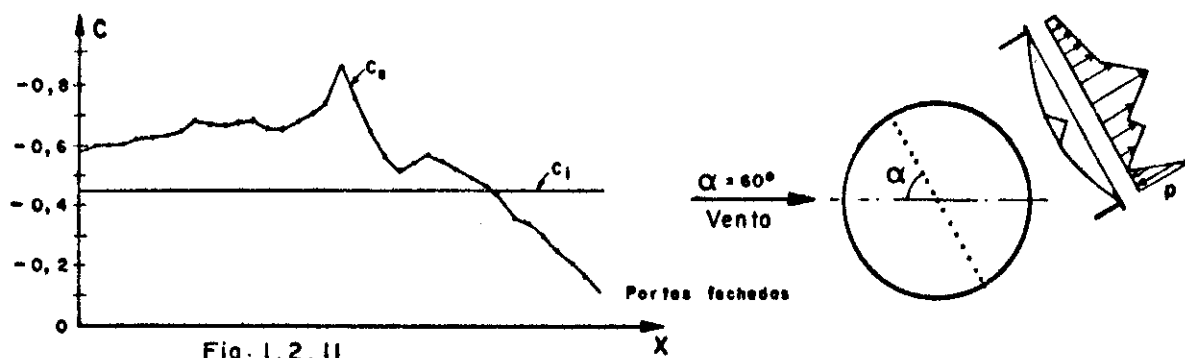


Fig.1.2.6

* - As referências bibliográficas são identificadas pelo nome do autor e data da publicação, e ordenadas alfabeticamente no final do trabalho.





A primeira cobertura nacional desse tipo, figuras 1.2.13 a 1.2.22, com diversas características próprias, é a da Igreja Nossa Senhora das Graças, em Araraquara.

O anel externo, onde são ancoradas, por aderência, as extremidades superiores dos 74 cabos radiais (cabos formados por 4 fios paralelos de 7,00mm, aço de protensão CP140/160), foi construído em concreto armado e apóia-se em 24 pilares, também de concreto armado, com 10,45m de altura e dispostos em uma circunferência de 37,50m de diâmetro, afastados de aproximadamente 5,00m.

Para a construção do anel interno, foram empregados 74 blocos de concreto e 4 rolos de aço de protensão. Os blocos, onde foram ancorados os 4 fios do cabo, com 0,50m na direção radial, 0,55m de altura e 0,15m de largura, foram posicionados em uma plataforma central, único cembre utilizado, e cintados com 50 espiras, obtendo-se desta maneira simples o anel central tracionado. As extremidades dos fios de cintamento foram ancoradas, por aderência, no concre

to lançado "in loco" nos espaços existentes entre os blocos.

Foram utilizadas 814 placas trapezoidais pré-fabricadas de concreto, com 0,04m de espessura, aproximadamente 100kgf de peso e armadas com tela Telcon Q196, disposta no plano médio. Nos lados não paralelos, as extremidades das telas, deixadas salientes, foram utilizadas para formar os ganchos de apoio sobre os cabos.

Para solucionar o problema das águas pluviais foi concretada "in loco", adjacente ao anel central, uma coroa circular provida de orifícios de duas polegadas. A água escoada pelos orifícios é recolhida em uma calha, atirantada ao anel, e enviada ao solo por meio de 9 condutores de seis polegadas de diâmetro.

A carga de protensão, obtida através de tijolos, foi de 75 kgf/m².

O tempo gasto na execução do teto, que cobre aproximadamente 1.100m², pode ser avaliado em dois meses.

Outros detalhes podem ser encontrados em MARTINELLI (1965, 1967).

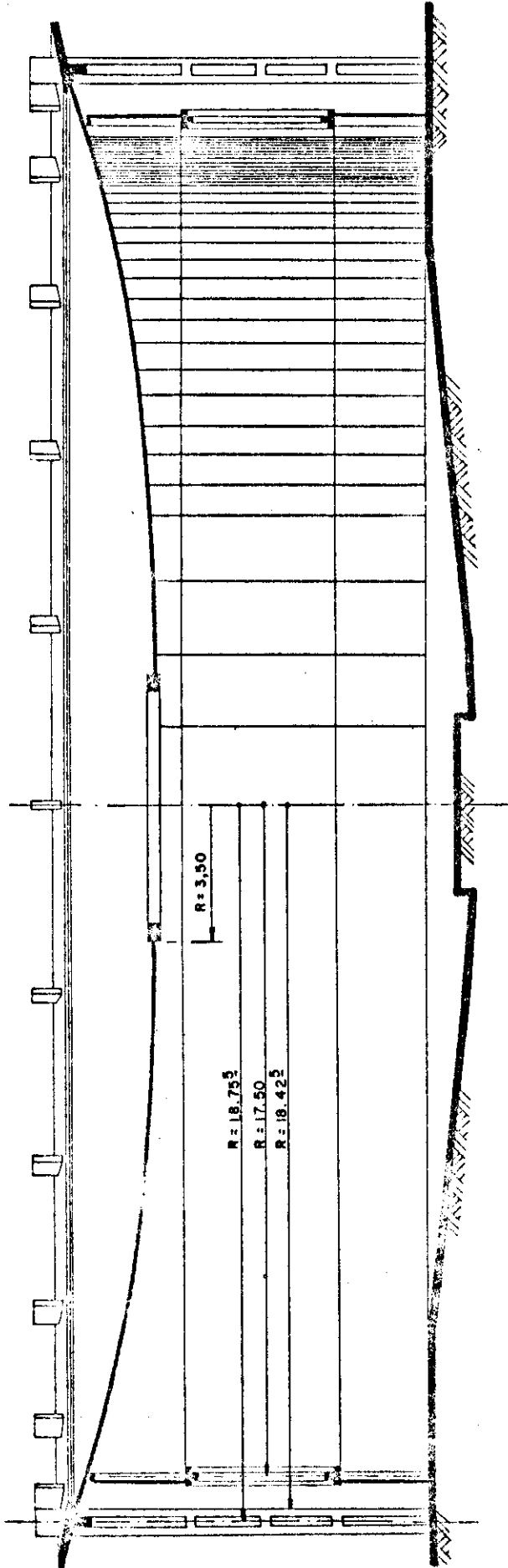


Fig. 1.2.13 - Corte diametral (med. em m)

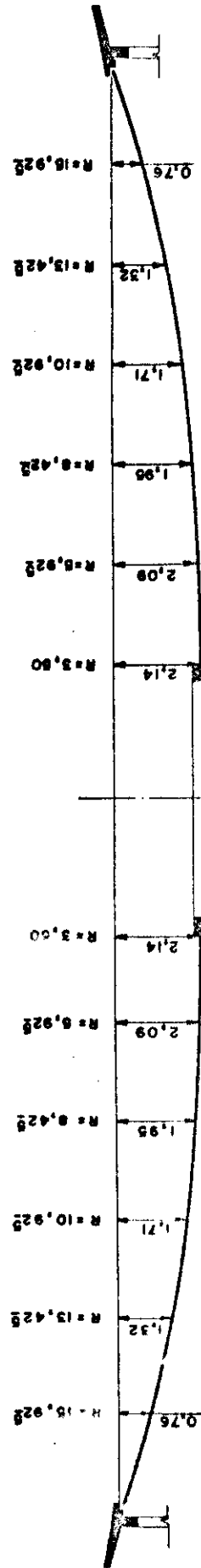


Fig. 1.2.14 - Cotas dos cabos (med. em m)

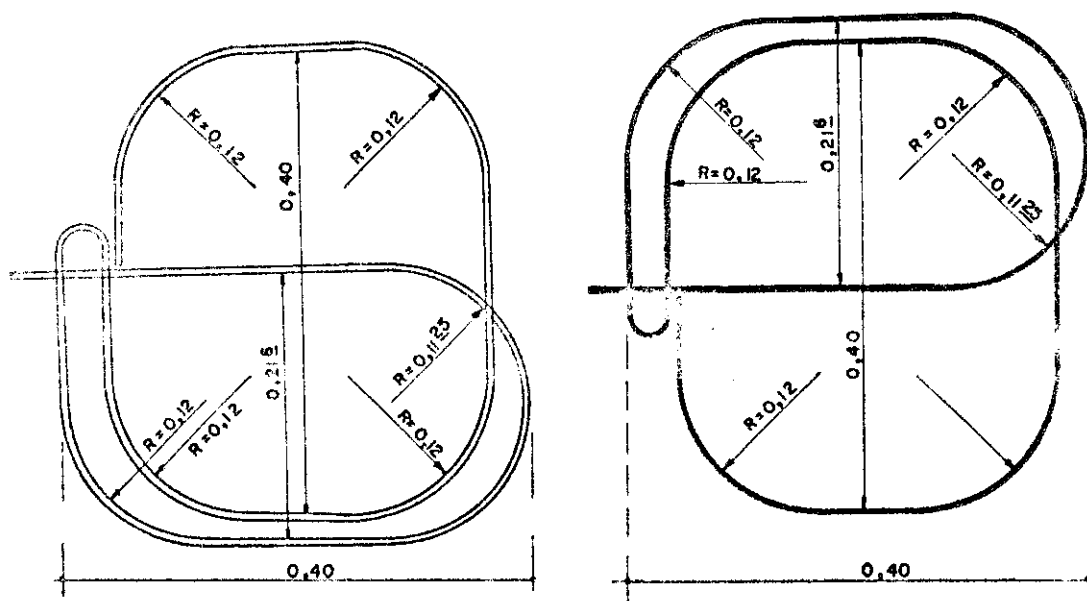
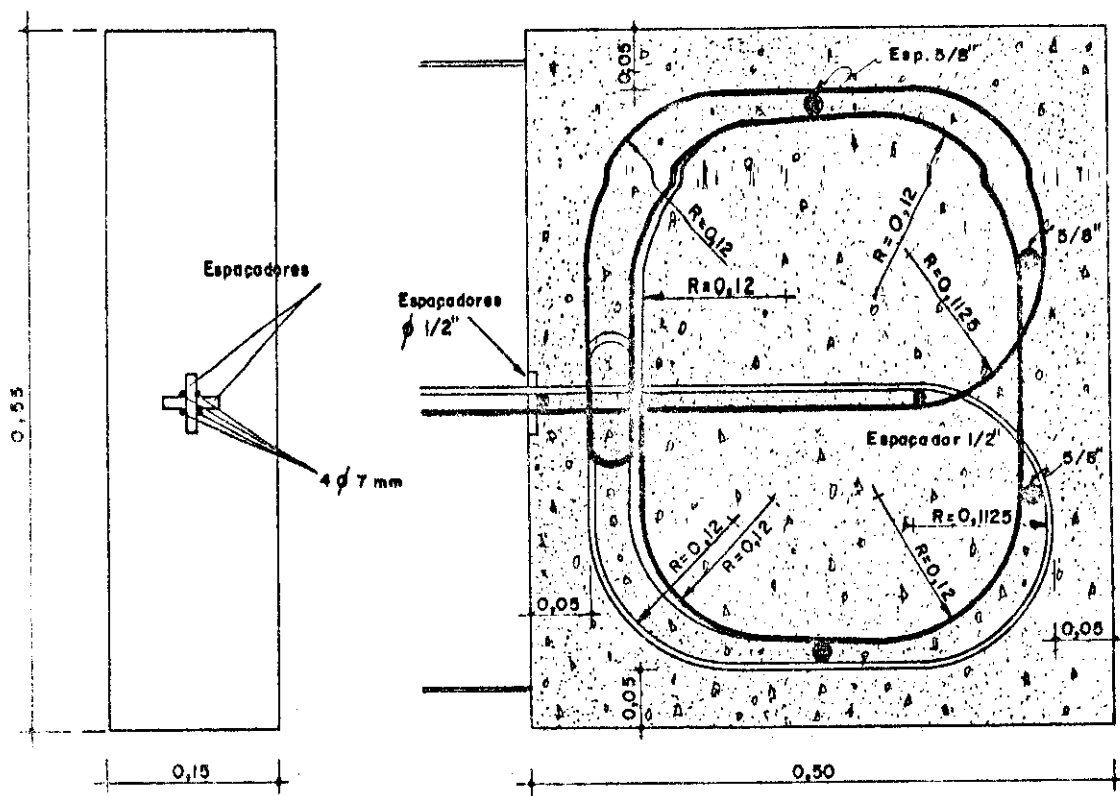


Fig. 1.2.15 - Ancoragem dos cabos nos blocos do anel interno (med. em m)

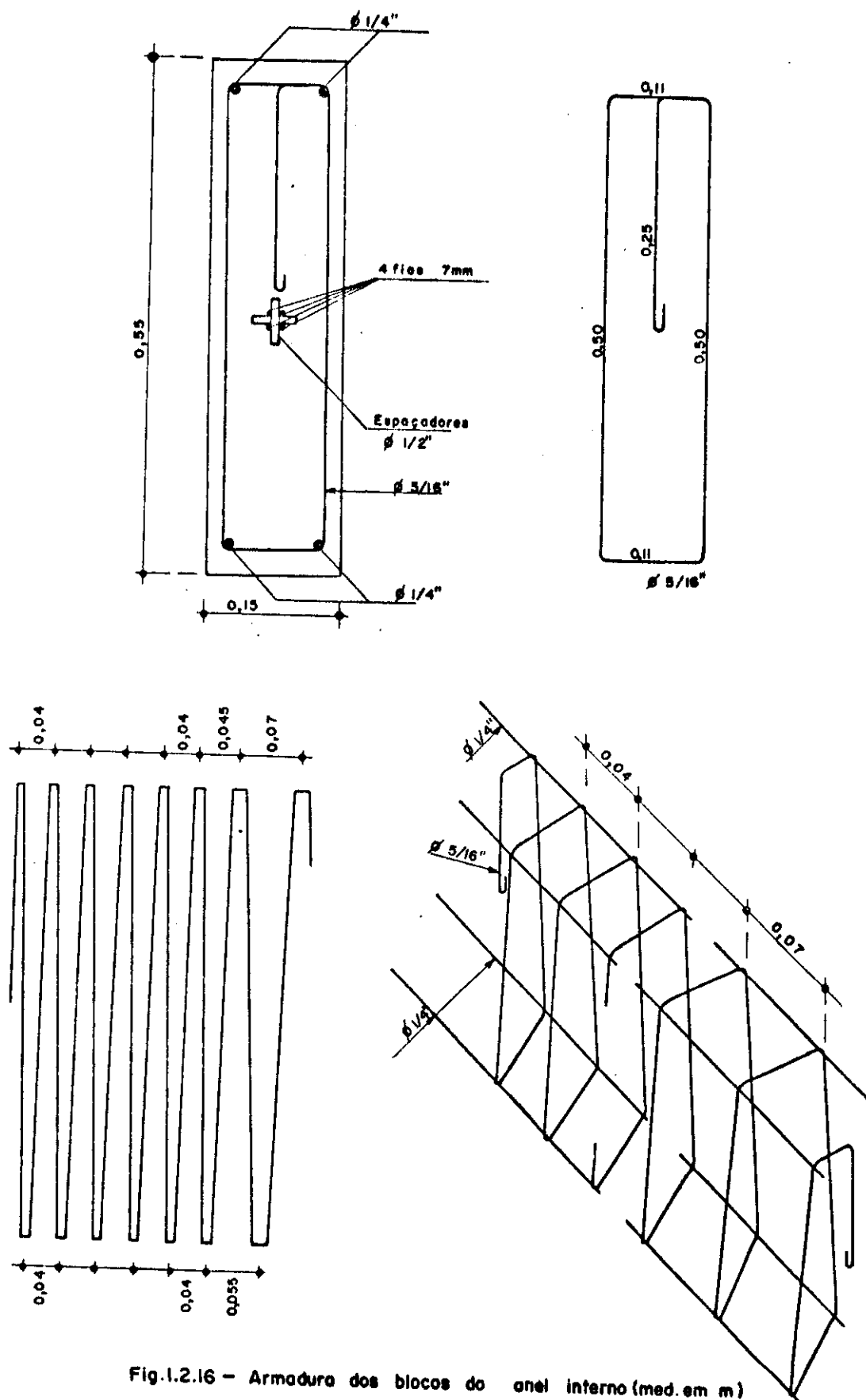


Fig.1.2.16 - Armadura dos blocos do anel interno (med. em m)

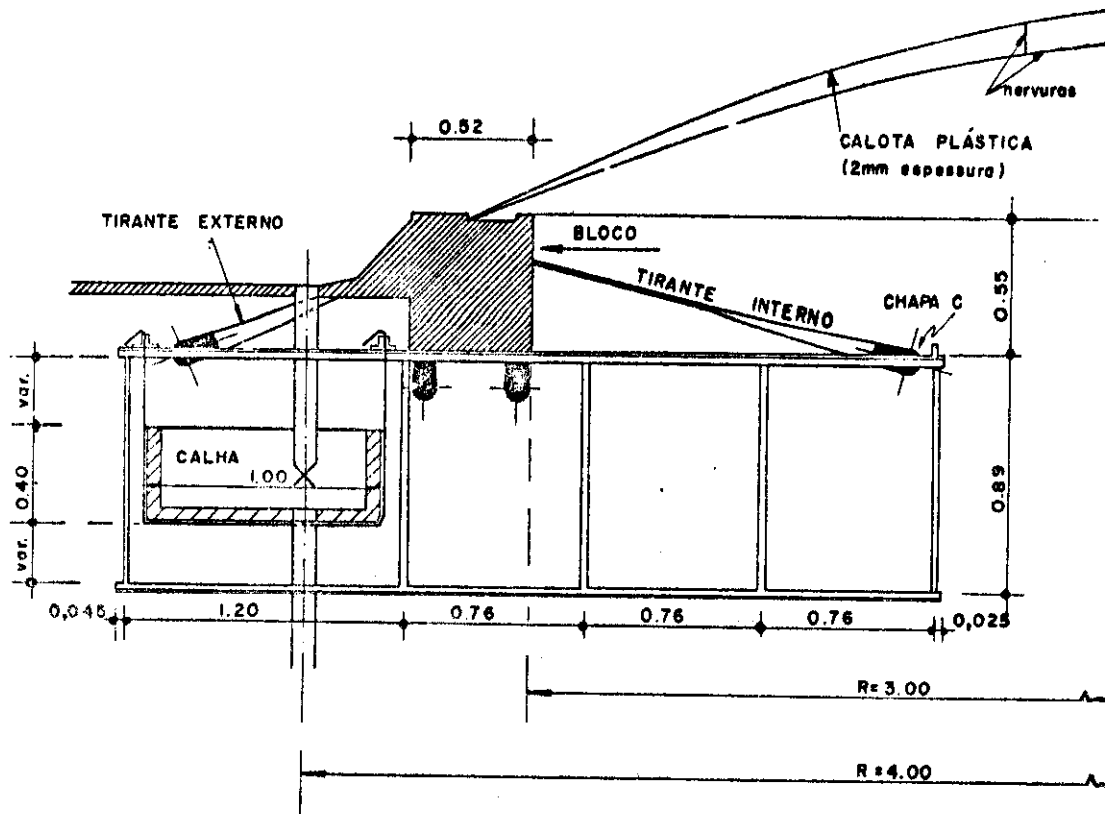


Fig. 1.2.17 - Fixação da calha e da cúpula
no anel interno (med. em m)

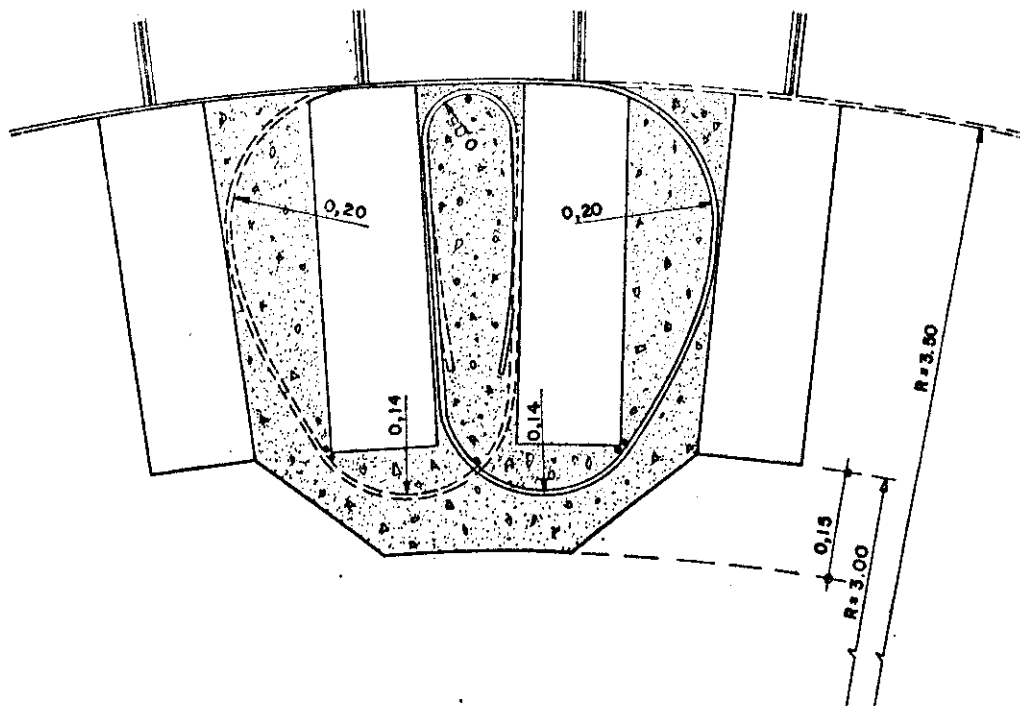


Fig. 1.2.18 - Ancoragem das extremidades dos fios
do cintoamento dos blocos (med. em m)

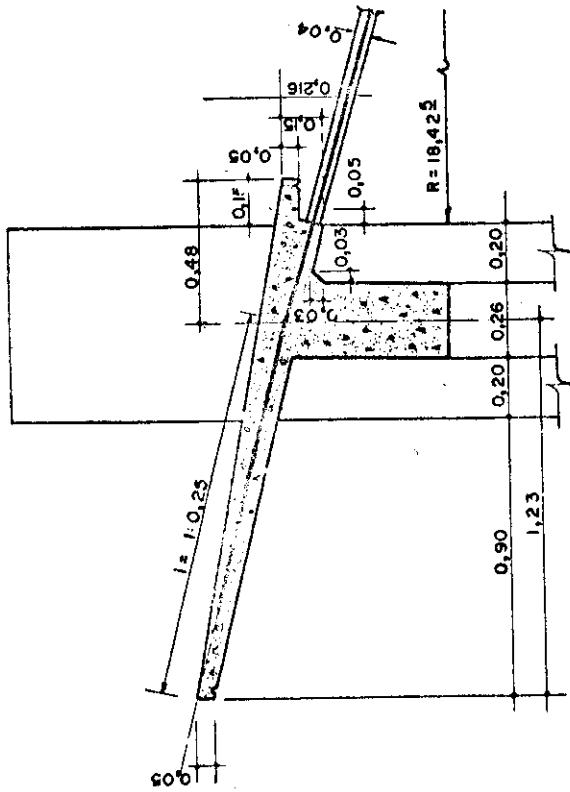


Fig. 1.2.19 - Seção transversal do anel externo (med. em m)

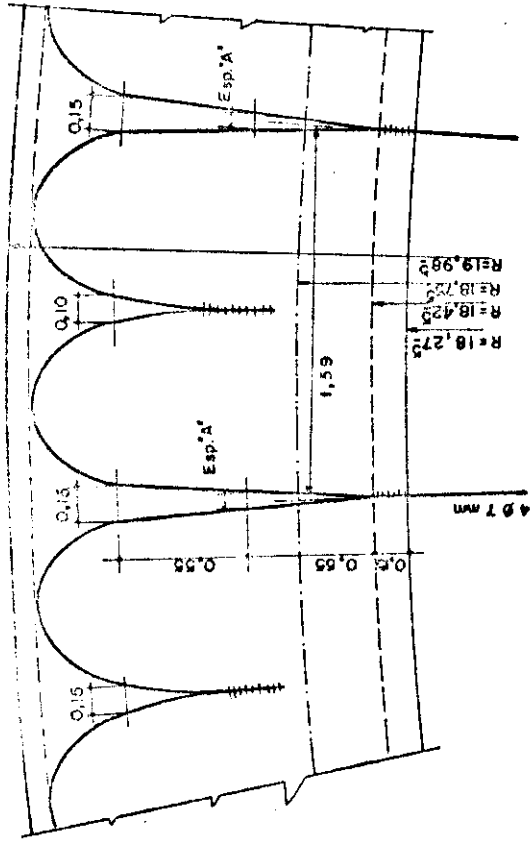


Fig. 1.2.20 - Ancoragem dos cabos no anel externo. (med. em m)

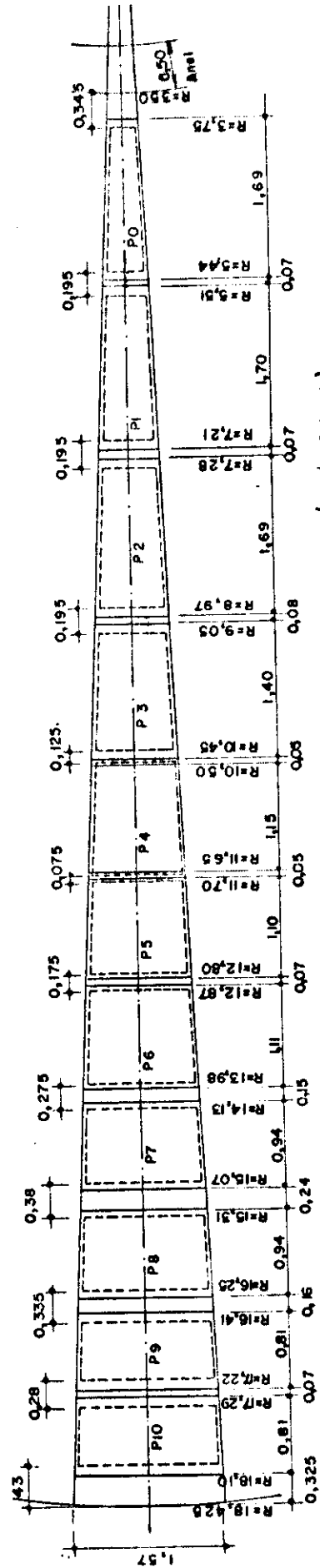
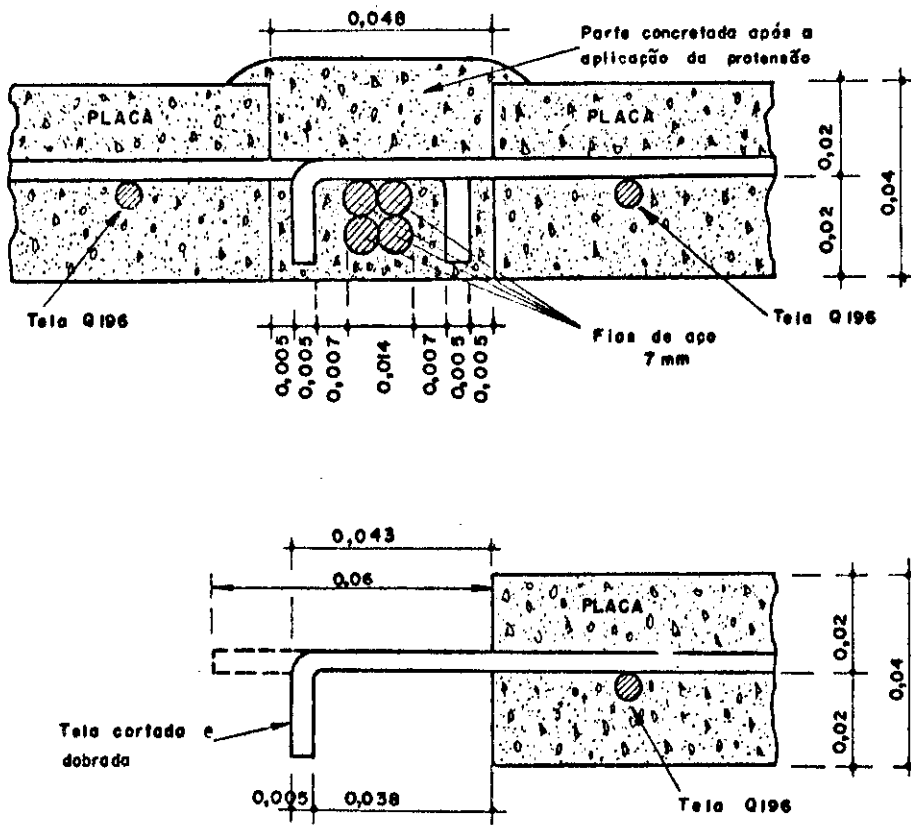


Fig. 1.2.21 - Disposição das placas sobre os cabos (med. em m)



DIMENSÕES DAS PLACAS			
PLACAS	b_i	b_e	h
P0	0,275	0,400	1,50
P1	0,425	0,550	1,50
P2	0,575	0,700	1,50
P3	0,225	0,825	1,20
P4	0,625	0,950	1,20
P5	0,950	1,025	1,00
P6	1,050	1,125	1,00
P7	1,150	1,225	0,80
P8	1,250	1,325	0,80
P9	1,350	1,400	0,60
P10	1,425	1,500	0,40

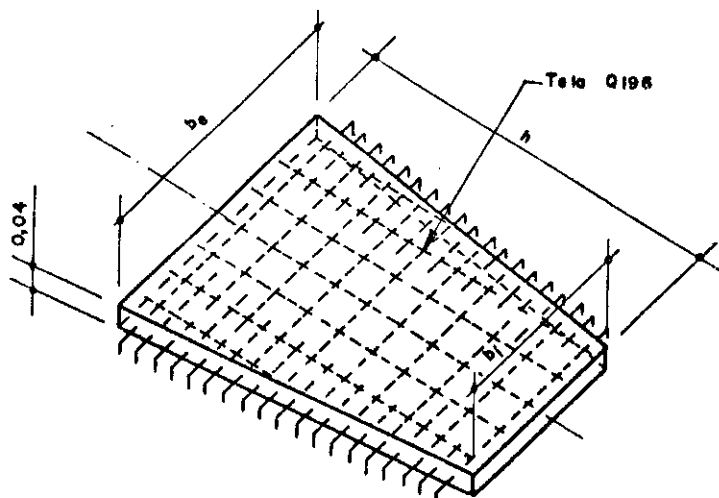


Fig. 1.2.22 - Detalhes da junta e das placas (med. em m)

1.3. CONTEÚDO DO TRABALHO

Pretendeu-se elaborar monografia que sistematizasse, com precisão compatível para os fins práticos, toda a análise estática necessária para a efetiva execução desse tipo de cobertura, completando-a inclusive com um apanhado de aspectos construtivos. Nesse sentido, presume o autor ter feito trabalho original, uma vez que não encontrou na literatura qualquer exposição que ultrapassasse os limites da simples descrição.

No segundo capítulo, estuda-se inicialmente o cabo considerado inextensível, submetido à ação conjunta de uma carga vertical P e de um carregamento vertical linearmente variável $g(x)$. A carga P , aplicada na extremidade mais baixa do cabo, inclui o peso próprio do anel interno e a eventual protensão aplicada à borda interna da casca. Além disso, dependendo da sequência das diversas fases de execução da cobertura, poderá incluir também o peso da cúpula, das calhas, dos aparelhos de som e de iluminação ou de quaisquer apetrechos que tenham sido projetados para ficar suspensos no centro da área coberta. O carregamento $g(x)$, que se distribui ao longo do comprimento do cabo, é oriundo de um carregamento g , resultante do peso próprio dos elementos de vedação, da carga de protensão g' , uniformemente distribuída sobre os mesmos, e de uma carga acidental, usada apenas para dimensionamento dos cabos.

Deduzem-se para esse carregamento, indicado por (g, p) , a equação da curva de equilíbrio do cabo e também as expressões que permitem determinar o comprimento, a tração, e a inclinação do cabo em pontos genéricos. No caso de serem conhecidos inicialmente o vão e a flecha da cobertura, o que geralmente ocorre nas coberturas pênseis, o cálculo da força horizontal — fundamental para a determinação das grandezas acima mencionadas — se faz, por tentativas, através de uma expressão que resulta de um desenvolvimento em série de potências. Para verificar o número de termos a con

siderar no cálculo da força horizontal, fez-se uma análise numérica considerando os primeiros quatro termos da série. Os resultados encontrados, reunidos em tabelas, mostram claramente que, na maioria dos casos, basta considerar apenas dois termos da série para obter um valor satisfatório para a força horizontal.

No segundo item do mesmo capítulo, analisa-se o cabo suposto inextensível, sujeito à ação simultânea de uma carga concentrada P (peso do anel interno, protensão, cúpula, etc.) e de um carregamento vertical $p(x)$, linearmente variável, que se distribui ao longo do vão do cabo, oriundo do peso próprio das placas, da carga de protensão p' e de uma carga accidental. Deduzem-se para este carregamento, indicado por (p,P) , a equação da curva de equilíbrio do cabo — que no caso é uma parábola cúbica — e as expressões que fornecem o valor da força horizontal, do comprimento do cabo, da tração e da inclinação em pontos genéricos do mesmo. O estudo do cabo com o carregamento (p,P) foi introduzido por fornecer, nos casos de cabos abatidos, usuais nesse tipo de cobertura, resultados bem próximos dos obtidos com o carregamento (g,P) . Observe-se ainda que a força horizontal, obtida facilmente no caso de carregamento (p,P) , orienta o início das tentativas que levam à determinação da força horizontal para o cabo solicitado por carregamento (g,P) .

Finalizando o segundo capítulo apresenta-se, no terceiro item, o estudo da deformação do cabo. Deduzem-se inicialmente, para um carregamento continuamente distribuído sobre o comprimento do cabo, a expressão que permite determinar o valor da força horizontal correspondente à configuração final de equilíbrio (posição deformada do cabo) e as expressões mediante as quais se determinam as componentes horizontais e verticais dos deslocamentos sofridos pelos pontos do cabo em consequência da deformação. Simplificam-se as expressões obtidas — de aplicação trabalhosa

mesmo quando se trata de carregamento uniformemente distribuído sobre o comprimento do cabo, como é o caso da catenária — após o que se faz o estudo da deformação do cabo solicitado por carregamento (g,P) . Apresenta-se também um segundo procedimento, mais simples que o primeiro, que é particularizado para o carregamento (p,P) .

No terceiro capítulo, estuda-se a casca de revolução com meridiano definido pela equação da curva do cabo e solicitada por carregamento com simetria radial, correspondente à carga de protensão retirada. No primeiro item recordam-se as equações gerais do regime de membrana das cascas de revolução. Em seguida, estuda-se a membrana de revolução com meridiano definido pela equação da curva que o cabo assume quando submetido ao carregamento (g,P) . Considera-se a membrana sujeita a uma carga uniformemente distribuída em sua superfície, de intensidade igual à da carga de protensão g' , e a uma carga P' que pode englobar, como já frisado, a protensão aplicada à borda interna da casca, o peso da cúpula e o peso dos demais objetos fixados na referida borda. Para a membrana assim carregada, deduzem-se as expressões que levam à determinação dos esforços normais e dos deslocamentos horizontais. Indica-se também como determinar a rotação da tangente ao meridiano, grandeza necessária para o estudo da casca engastada nas bordas. No terceiro item faz-se estudo análogo para a membrana com meridiano definido pelo carregamento (p,P) .

O quarto e último item deste capítulo é dedicado à análise das perturbações geradas pelos vínculos. Devido à complexidade do problema, tais perturbações são analisadas com a aproximação da casca esférica equivalente. Para a resolução de casca esférica adotaram-se duas soluções: a solução de Geckeler, para estudar as perturbações geradas pela borda externa, e a solução apresentada por Gravina, apropriada para as cascas esféricas abatidas, para determinar os esforços de flexão gerados pela borda interna.

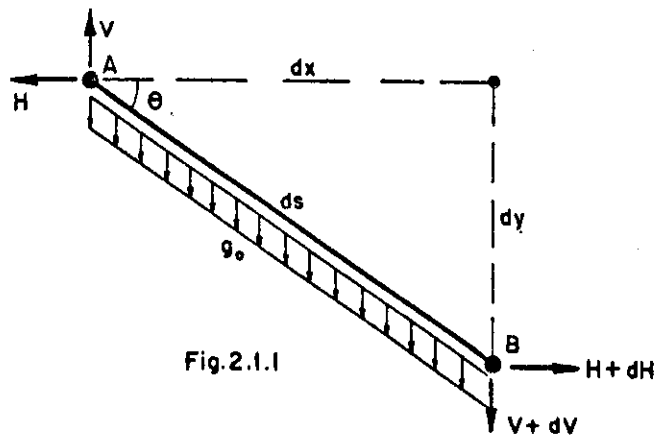
No quarto capítulo, aplicam-se os estudos do cabo e da casca, elaborados nos capítulos anteriores, ao projeto de uma cobertura pênsil com 60,00m de diâmetro e flecha de aproximadamente 4,80m. Suas características podem encontrar amplas aplicações e sua análise já permite formular algumas conclusões de interesse mais geral, principalmente quanto à utilização desse tipo de cobertura para grandes vãos. Em particular, trata-se da cobertura do Ginásio de Esportes Governador Emílio Gomes, construído em 1974, na cidade de Rolândia, no Estado do Paraná.

Estudam-se os cabos da cobertura com os carregamentos (g,P) e (p,P) e a casca com protensão distribuída e também com a ação conjunta de protensão distribuída e concentrada. Nas soluções apresentadas, em número de quatro, admitiu-se para a carga das águas pluviais, na falta de dados mais precisos, uma lâmina de água uniforme em toda a casca e com espessura de 3cm. Quanto aos efeitos do vento e das ações térmicas, dir-se-á rapidamente no quinto capítulo algo a respeito das pesquisas que se pretende realizar para a sua caracterização suficientemente precisa. Na cobertura de Rolândia, que se afasta um tanto das quatro soluções estudadas no quarto capítulo, estes efeitos foram avaliados apenas em primeira aproximação. Por não apresentarem particularidades dignas de nota, julgou-se desnecessário introduzir, nas soluções apresentadas, o cálculo do anel externo, dos pilares e respectivas fundações.

No quinto e último capítulo, apresentam-se algumas sugestões para a fixação prática dos parâmetros mais importantes para o projeto, comentam-se os principais aspectos construtivos e, finalmente, indicam-se as diretrizes das pesquisas previstas como continuação desta.

2. ESTUDO DO CABO2.1. CABO INEXTENSÍVEL COM CARREGAMENTO (g, P)

Considere-se um elemento de cabo de comprimento ds , sob a ação dos esforços indicados na figura 2.1.1. Aplicando as condições de equilíbrio ao elemento e desprezando os infinitésimos de ordem superior, resultam as equações:



$$dV + g_0 ds = 0 \quad (2.1.1)$$

$$dH = 0 \quad (2.1.2)$$

$$Vdx - Hdy = 0 \quad (2.1.3)$$

Introduzindo o valor de V obtido em (2.1.3) na equação (2.1.1), e observando que H é constante e que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, obtêm-se a equação diferencial

$$y'' = -\frac{g_0}{H} \sqrt{1+(y')^2} \quad (2.1.4)$$

cuja integração define a configuração de equilíbrio do cabo solicitado por carregamento vertical distribuído em seu comprimento.

Quando o carregamento g_0 é constante ao longo do cabo, a integração da equação (2.1.4) conduz à catenária, curva que ocorre, por exemplo, nas coberturas pênseis cilíndricas usuais.

Nas coberturas pênseis circulares com cabos dispostos segundo os raios, o carregamento atuante nos cabos é de intensidade variável, assumindo valores crescentes com a distância ao centro da área coberta. Sendo g o carregamento por unidade de área da cobertura, suposto constante, e n o número de cabos, figura 2.1.2, a ordenada de carga será dada por:

$$g(x) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{2\pi}{n} (r-x)g \quad (2.1.5)$$

Introduzindo na equação (2.1.4) o valor de $g(x)$ dado por (2.1.5) e fazendo $A = \pi g/nH$, resulta:

$$y'' = 2A(x-r) \sqrt{1+(y')^2} \quad (2.1.6)$$

A integração da equação diferencial (2.1.6) permite obter a configuração de equilíbrio do cabo solicitado

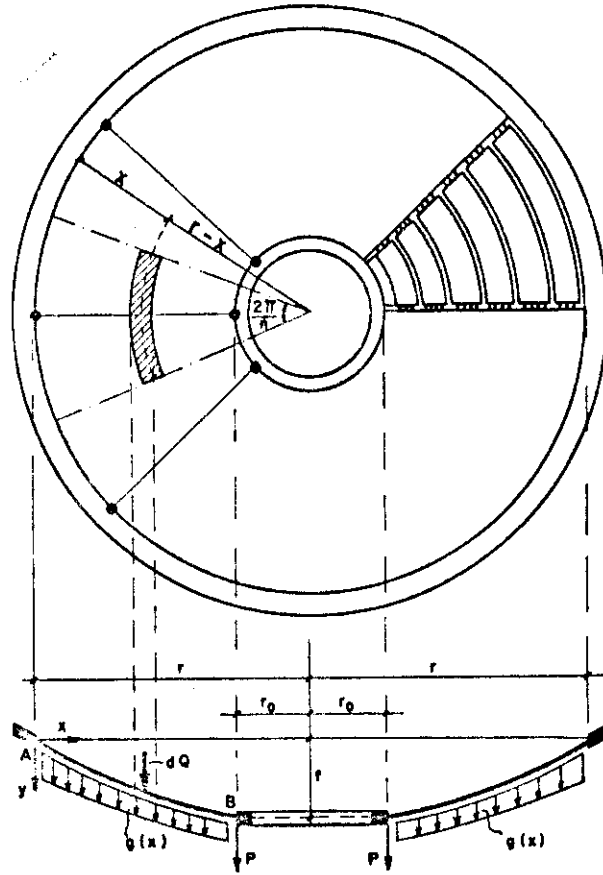


Fig. 2.1.2

por carregamento variável, cuja ordenada de carga é definida pela expressão (2.1.5). Fazendo em (2.1.6) $Z=y'$, separando as variáveis e integrando, obtêm-se:

$$\operatorname{arcSh} Z = A(x^2 - 2rx) + C_1 \quad (2.1.7)$$

donde:

$$Z = y' = \operatorname{Sh} [A(x^2 - 2rx) + C_1] \quad (2.1.8)$$

A integração da equação (2.1.8) que fornece

$$y = \int \operatorname{Sh} [A(x^2 - 2rx) + C_1] dx + C_2 \quad (2.1.9)$$

não pode ser resolvida por vias elementares. Desenvolvendo a função seno hiperbólico em série de Mac Laurin, resulta

$$\text{Sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{(2m+1)}}{(2m+1)!}$$

e então:

$$\text{Sh} \left[A(x^2 - 2rx) + C_1 \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[A(x^2 - 2rx) + C_1 \right]^{(2m+1)}}{(2m+1)!} \quad (2.1.10)$$

Levando (2.1.10) em (2.1.9), obtêm-se a equação da curva do cabo:

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{\left[A(x^2 - 2rx) + C_1 \right]^{(2m+1)}}{(2m+1)!} dx + C_2 \quad (2.1.11)$$

Considerando $m=0, 1, 2$ e 3 , e integrando, resulta

$$y = f(x)_{m=0} + f(x)_{m=1} + f(x)_{m=2} + f(x)_{m=3} + \dots + C_2 \quad (2.1.12)$$

onde:

$$f(x)_{m=0} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 r \right) A + x C_1$$

$$f(x)_{m=1} = \left(\frac{x^7}{42} - \frac{x^6}{6} r \right) A^3 + \left(\frac{x^5}{10} A + \frac{x^3}{6} C_1 \right) (C_1 + 4Ar^2) A + \\ - \frac{x^4}{6} (3C_1 + 2Ar^2) r A^2 - \frac{x^2}{2} r C_1^2 A + \frac{x C_1^3}{6}$$

$$f(x)_{m=2} = \left(\frac{x^{11}}{1320} - \frac{x^{10}}{120} r \right) A^5 + \left(\frac{x^9}{216} A^3 + \frac{x^3}{72} C_1^3 \right) (C_1 + 8Ar^2) A \\ - \left(\frac{x^8}{24} A^2 + \frac{x^4}{12} C_1^2 \right) (C_1 + 2Ar^2) r A^2 \\ + \left(\frac{x^7}{84} A + \frac{x^5}{60} C_1 \right) (C_1^2 + 12Ar^2 C_1 + 8A^2 r^4) A^2 \\ - \frac{x^6}{180} (15C_1^2 + 40Ar^2 C_1 + 8A^2 r^4) r A^3 - \frac{x^2}{24} r C_1^4 A + \frac{x C_1^5}{120}$$

$$\begin{aligned}
f(x)_{m=3} = & \left(\frac{x^{15}}{75600} - \frac{x^{14}}{5040}r \right) A^7 + \left(\frac{x^{13}}{9360} A^5 + \frac{x^3}{2160} C_1^5 \right) (C_1 + 12Ar^2) A \\
& - \left(\frac{x^{12}}{2160} A^4 + \frac{x^4}{720} C_1^4 \right) (3C_1 + 10Ar^2) r A^2 \\
& + \left(\frac{x^{11}}{7920} A^3 + \frac{x^5}{3600} C_1^3 \right) (3C_1^2 + 60Ar^2 C_1 + 80A^2 r^4) A^2 \\
& - \left(\frac{x^{10}}{3600} A^2 + \frac{x^6}{2160} C_1^2 \right) (15C_1^2 + 80Ar^2 C_1 + 48A^2 r^4) r A^3 \\
& + \left(\frac{x^9}{6480} A + \frac{x^7}{5040} C_1 \right) (5C_1^3 + 120Ar^2 C_1^2 + 240A^2 r^4 C_1 + 64A^3 r^6) A^3 \\
& - \frac{x^8}{5040} (35C_1^3 + 210Ar^2 C_1^2 + 168A^2 r^4 C_1 + 16A^3 r^6) r A^4 \\
& - \frac{x^2}{720} Ar C_1^6 + \frac{x C_1^7}{5040}
\end{aligned}$$

A constante de integração C_1 pode ser determinada em função da inclinação do cabo no ponto de aplicação da carga P . De fato, as condições de equilíbrio do referido ponto, figura 2.1.2, exigem que

$$(y')_{x=r-r_0} = \frac{P}{H} \quad (2.1.13)$$

e portanto, da equação (2.1.7), resulta

$$\operatorname{arcSh}\left(\frac{P}{H}\right) = A \left[(r-r_0)^2 - 2r(r-r_0) \right] + C_1$$

donde:

$$C_1 = \operatorname{arcSh}\left(\frac{P}{H}\right) - A(r_0^2 - r^2) \quad (2.1.14)$$

Para determinar a constante C_2 , basta notar que para $x=0$ tem-se $y=0$ e portanto, equação (2.1.12), $C_2=0$.

A tração em um ponto genérico do cabo é dada por

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = \frac{Hds}{dx} = H \sqrt{1+(y')^2} = H \operatorname{Ch} \left[A(x^2 - 2rx) + C_1 \right]$$

ou ainda, tendo em conta a expressão de C_1 , por:

$$T = H \operatorname{Ch} \left[A(x^2 - 2rx + r^2 - r_0^2) + \operatorname{arcSh}(P/H) \right] \quad (2.1.15)$$

As trações nas extremidades do cabo ($x=0$ e $x=r-r_0$) resultam da equação (2.1.15):

$$T_A = H \operatorname{Ch} \left[A(r^2 - r_0^2) + \operatorname{arcSh}(P/H) \right] \quad (2.1.16)$$

$$T_B = H \operatorname{Ch} \left[\operatorname{arcSh}\left(\frac{P}{H}\right) \right] = \sqrt{H^2 + P^2} \quad (2.1.17)$$

As inclinações do cabo nos pontos extremos A ($x=0$) e B ($x=r-r_0$), são obtidas da equação (2.1.8):

$$\operatorname{tg}(\theta_A) = (y')_{x=0} = \operatorname{Sh} C_1$$

$$\operatorname{tg}(\theta_B) = (y')_{x=r-r_0} = \operatorname{Sh} \left[A(r_0^2 - r^2) + C_1 \right]$$

Considerando o valor de C_1 , dado por (2.1.14) resultam:

$$\theta_A = \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{Sh} \left[\operatorname{arcSh}\left(\frac{P}{H}\right) + A(r^2 - r_0^2) \right] \right\} \quad (2.1.18)$$

$$\theta_B = \operatorname{arctg}\left(\frac{P}{H}\right) \quad (2.1.19)$$

O comprimento do cabo compreendido entre os pontos de abscissas $x=0$ e $x=r-r_0$, respectivamente arranques superior e inferior, é obtido com:

$$s = \int_0^{r-r_0} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

Considerando a equação (2.1.8), resulta

$$s = \int_0^{r-r_0} \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 \left[A(x^2 - 2rx) + C_1 \right]} \, dx = \int_0^{r-r_0} \operatorname{Ch} \left[A(x^2 - 2rx) + C_1 \right] \, dx \quad (2.1.20)$$

A integração que figura em (2.1.20) não pode ser efetuada por vias elementares. Desenvolvendo a função coseno hiperbólico em série de Mac Laurin, obtêm-se

$$\text{Ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

e então:

$$\text{Ch} [A(x^2 - 2rx) + C_1] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[A(x^2 - 2rx) + C_1]^{2m}}{(2m)!} \quad (2.1.21)$$

Introduzindo a igualdade (2.1.21) em (2.1.20), obtêm-se a expressão que permite calcular o comprimento do cabo:

$$s = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{r-r_0} \frac{[A(x^2 - 2rx) + C_1]^{(2m)}}{(2m)!} dx \quad (2.1.22)$$

Considerando $m=0, 1, 2$ e 3 , e efetuando as operações necessárias, obtêm-se

$$s = \left[\frac{f(x)}{m=0} \right]_0^{r-r_0} + \left[\frac{f(x)}{m=1} \right]_0^{r-r_0} + \left[\frac{f(x)}{m=2} \right]_0^{r-r_0} + \left[\frac{f(x)}{m=3} \right]_0^{r-r_0} + \dots \quad (2.1.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{m=0} \right]_0^{r-r_0} &= \left[x \right]_0^{r-r_0} \\ \left[\frac{f(x)}{m=1} \right]_0^{r-r_0} &= \left[\left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{2} r \right) A^2 + \frac{x^3}{3} (C_1 + 2Ar^2) A + \right. \\ &\quad \left. - x^2 Ar C_1 + \frac{x C_1^2}{2} \right]_0^{r-r_0} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} f(x) \\ n_1 = 2 \end{array} \right]_0^{r-r_0} = \left[\left(\frac{x^9}{216} - \frac{x^8}{24}r \right) A^4 + \left(\frac{x^7}{42} A^2 + \frac{x^3}{18} C_1^2 \right) (C_1 + 6Ar^2) A \right. \\ \left. - \left(\frac{x^6}{18} A + \frac{x^4}{12} C_1 \right) (3C_1 + 4Ar^2) A^2 r \right. \\ \left. + \frac{x^5}{60} (3C_1 + 24Ar^2 C_1 + 8A^2 r^4) A^2 - \frac{x^2}{6} Ar C_1^3 + \frac{x}{24} C_1^4 \right]_0^{r-r_0}$$

$$\left[\begin{array}{c} f(x) \\ m = 3 \end{array} \right]_0^{r-r_0} = \left[\left(\frac{x^{13}}{9360} - \frac{x^{12}}{720} \right) A^6 + \left(\frac{x^{11}}{1320} A^4 + \frac{x^3}{360} C_1^4 \right) (C_1 + 10Ar^2) A \right. \\ \left. - \left(\frac{x^{10}}{360} A^3 + \frac{x^4}{144} C_1^2 \right) (3C_1 + 8Ar^2) r A^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{x^9}{432} A^2 + \frac{x^5}{240} C_1^2 \right) (C_1^2 + 16Ar^2 C_1 + 16A^2 r^4) A^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{x^8}{240} A + \frac{x^6}{180} C_1 \right) (5C_1^2 + 20Ar^2 C_1 + 8A^2 r^4) r A^3 \right. \\ \left. + \frac{x^7}{1260} (5C_1 + 90Ar^2 C_1^2 + 120A^2 r^4 C_1 + 16A^3 r^6) A^3 \right. \\ \left. - \frac{x^2}{120} Ar C_1^5 + \frac{x C_1^6}{720} \right]_0^{r-r_0}$$

Obtidas as expressões que possibilitam o estudo do cabo, convém observar que as sequências de cálculo para a determinação das incógnitas diferem sensivelmente em função dos dados inicialmente fixados em projeto. No caso mais comum de serem fixados o vão do cabo e a flecha da cobertura, além das cargas e do número de cabos, o cálculo da força horizontal, necessária para a determinação das outras grandezas que definem a configuração de equilíbrio do cabo, se faz por tentativas, através da equação (2.1.12), observando que para $x=r-r_0$ tem-se $y=f$.

Com a finalidade de investigar o número de termos da série que se devem usar para obter um valor satisfatório de H , foram elaborados alguns exemplos numéricos procurando abranger um número razoável de casos. Os resultados obtidos, tabelados a seguir, foram calculados tomando-

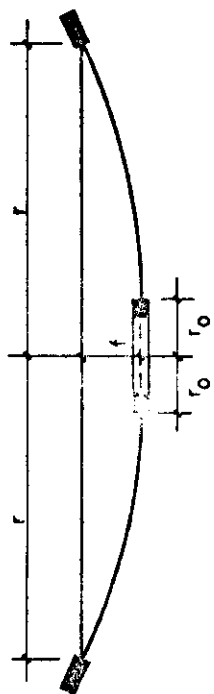
-se para a carga distribuída g as intensidades 50 e 320 kgf/m^2 , para a carga concentrada as intensidades 50 e 500 kgf , para raio da cobertura os valores 10,00 e 60,00m, e para a flecha f os valores obtidos através da relação $f/r = 1/5$ e $1/10$. O número de cabos foi fixado pelas relações $(2\pi r/n) = 0,50; 1,50; 3,00\text{m}$, e para o raio interno escolheram-se quatro valores arbitrados em função do raio da cobertura.

A análise das tabelas que são apresentadas a seguir, construídas com os dados acima especificados e considerando os quatro primeiros termos da série, permite concluir que o cálculo da força horizontal pode ser feito tendo em conta apenas os dois primeiros termos da série, o que leva a valores suficientemente precisos para os fins da prática.

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA 1
 $g = 50 \text{ kgf/m}^2$, $P = 50 \text{ kgf}$
 $f = 1 \text{ m}$, $r = 10 \text{ m}$

TABELA 2
 $g = 50 \text{ kgf/m}^2$, $P = 50 \text{ kgf}$
 $f = 2 \text{ m}$, $r = 10 \text{ m}$



$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	890.603638 893.135680 893.135680 893.135680	1742.675115 1749.940388 1749.940388 1749.940388	3073.772968 3089.500062 3089.500062 3089.500062
3.0	678.091001 681.176154 681.176154 681.176154	1351.117354 1359.566637 1359.822676 1359.822676	2402.319213 2420.073705 2420.073705 2420.073705
7.0	239.411004 244.423416 244.423416 244.423416	425.491079 436.626631 436.707324 436.707324	715.295154 736.851623 737.122774 737.122774
9.0	56.846236 65.642197 65.940465 65.953331	83.155685 96.310504 96.846754 96.866629	122.009137 142.871251 143.873585 143.912137

$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	444.922012 449.775093 449.817294 449.817294	871.25499 885.537866 885.620426 885.620426	1537.032105 1567.175700 1567.466943 1567.466943
3.0	338.563445 344.701615 344.733752 344.733752	675.430658 691.945167 692.137196 692.137196	1201.159606 1234.961427 1235.416669 1235.416669
7.0	118.167603 127.292470 127.497524 127.508915	212.241212 231.934194 232.533335 232.555526	357.512002 394.903663 396.245858 396.264500
9.0	23.472604 35.997060 36.893529 36.939526	38.645456 56.845764 58.365184 58.465217	59.366933 87.222333 89.838459 90.039430

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA 3
 $g = 50 \text{ kgf/m}^2$, $P = 500 \text{ kgf}$
 $f = 1 \text{ m}$, $r = 10 \text{ m}$

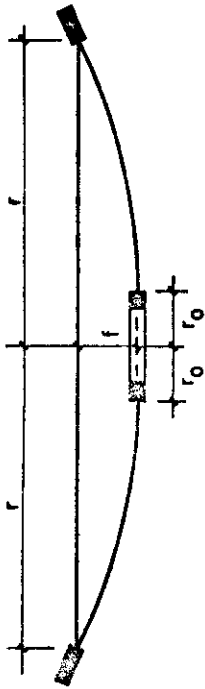


TABELA 4
 $g = 50 \text{ kgf/m}^2$, $P = 500 \text{ kgf}$
 $f = 2 \text{ m}$, $r = 10 \text{ m}$

$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	518.586191	6012.779499	7345.653366
	5168.374780	6024.182456	7362.363859
	5168.374780	6024.182456	7362.363859
	5168.374780	6024.182456	7362.363859
3.0	3818.670992	4494.047374	5547.864400
	3831.728758	4510.252899	5571.011188
	3831.728758	4510.252899	5571.011188
	3831.728758	4510.252899	5571.011188
7.0	1565.942145	1756.191305	2050.843941
	1595.175476	1789.168264	2091.156329
	1595.175476	1789.504764	2091.547713
	1595.175476	1789.504764	2091.547713
9.0	440.753679	471.098750	516.799188
	514.209687	547.390738	598.136052
	516.439901	549.827196	600.851890
	516.536867	549.827196	600.851890

$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	2568.280933	2998.122607	3667.256519
	2587.368680	3022.068815	3701.721909
	2587.368680	3022.353890	3701.721909
	2587.368680	3022.353890	3701.721909
3.0	1894.464152	2236.362162	2766.830343
	1920.398325	2268.559975	2811.545733
	1920.579683	2268.773206	2811.808764
	1920.579683	2268.773206	2811.808764
7.0	748.367795	850.273255	1004.776547
	803.087824	911.913860	1079.237053
	803.991947	913.091609	1080.802583
	803.991947	913.091609	1080.802583
9.0	149.58957	171.487657	202.152839
	255.529149	280.801703	318.279860
	262.607653	288.194828	326.301086
	262.922792	288.529841	326.704388

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA 6	
g = 320 kgf/m ² , P = 50 kgf	
f = 2 m , r = 10 m	

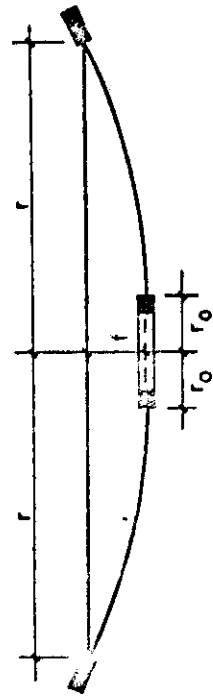


TABELA 5	
g = 320 kgf/m ² , P = 50 kgf	
f = 1 m , r = 10 m	

$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	1568.220729	4294.567358	8554.484493
	1599.124558	4392.624273	8757.911838
	1599.273135	4393.438024	8759.532775
	1599.273135	4393.438024	8759.532775
3.0	1225.787749	3378.969401	6743.134494
	1260.514917	3485.572605	6962.901264
	1260.863351	3487.173253	6966.095552
	1260.863351	3487.173253	6966.095552
7.0	364.293434	957.635989	1884.588514
	402.546317	1070.317461	2113.899457
	403.913972	1074.759027	2123.326864
	403.951962	1074.858837	2123.523269
9.0	60.305536	138.912615	259.428992
	88.616639	209.203372	396.644908
	91.293747	216.707384	411.832346
	91.497586	217.364953	413.238390

$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	3136.144308	8588.320960	17107.348060
	3152.190526	8640.400989	17214.329765
	3152.190526	8640.400989	17214.329765
	3152.190526	8640.400989	17214.329765
3.0	2451.575498	6757.298542	13484.991283
	2469.694021	6813.641376	13602.540946
	2469.694021	6813.641371	13602.540946
	2469.694021	6813.641371	13602.540946
7.0	729.001310	1915.271979	3768.819931
	750.966671	1981.328357	3903.803248
	751.242964	1982.054251	3905.231644
	751.242964	1982.054251	3905.231644
9.0	123.797351	278.564970	519.103912
	145.040066	333.802945	628.413305
	146.069736	336.967712	635.019411
	146.108837	337.095581	635.316983

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA 7	
$g = 320 \text{ kgf/m}^2$, $P = 500 \text{ kgf}$	
$f = 1 \text{ m}$, $r = 10 \text{ m}$	

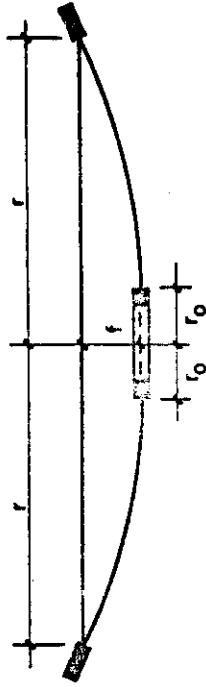


TABELA 8	
$g = 320 \text{ kgf/m}^2$, $P = 500 \text{ kgf}$	
$f = 2 \text{ m}$, $r = 10 \text{ m}$	

$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	7408.001255 7424.853582 7424.853582 7424.853582	12862.986446 12909.300025 12909.300025 12909.300025	21382.013488 21479.259712 21479.259712 21479.259712
3.0	5597.083154 5620.435291 5620.435291 5620.435291	9907.052444 9961.497119 9961.497119 9961.497119	16634.744003 16748.227188 16748.227188 16748.227188
7.0	2064.713417 2105.290692 2015.684645 2105.684645	3259.597550 3336.941835 3337.560589 3337.560589	5116.774097 5258.394763 5259.364770 5259.364770
9.0	518.880386 600.516378 603.131583 603.240550	693.300290 800.457997 804.559794 804.559794	948.501009 1102.235301 1109.002437 1109.204441

$\frac{n}{r_0}$	125	41	20
0.5	3698.383184 3733.492196 3733.492196 3733.492196	6429.665054 6519.854650 6520.464040 6520.464040	10691.006744 10879.421306 10881.447269 10881.447269
3.0	2791.642080 2836.754167 2837.284899 2837.284899	4950.710119 5058.660758 5059.599462 5059.599462	8317.372001 8533.305282 8534.881443 8534.881443
7.0	1011.969584 1087.017839 1088.593656 1088.593656	1621.290903 1759.938269 1763.681733 1763.766811	2554.749531 2803.822452 2811.824991 2812.091743
9.0	203.498834 319.975743 328.036566 328.456089	308.830341 459.553130 471.225779 471.961064	450.085140 660.161223 678.523648 679.806879

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA 9	
$g = 50 \text{ kgf/m}^2$	$P = 50 \text{ kgf}$
$f = 6 \text{ m}$	$r = 60 \text{ m}$

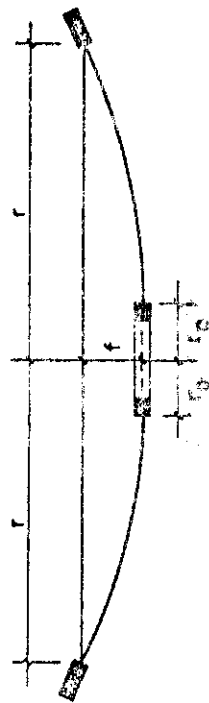


TABELA 10	
$g = 50 \text{ kgf/m}^2$	$P = 50 \text{ kgf}$
$f = 12 \text{ m}$	$r = 60 \text{ m}$

$\frac{n}{r_0}$	753	251	125	$\frac{n}{r_0}$	753	251	125
2.0	2978.414273 2993.158551 2993.158551 2993.158551	7963.583177 8014.825460 8015.014202 8015.014202	15514.085662 15605.154972 15608.154972 15608.154972	2.0	1489.171862 1517.778581 1518.025495 1518.025495	3984.291588 4073.850619 4074.699966 4074.747153	7756.959102 7933.210237 7941.047527 7941.047527
15.0	2487.108647 2503.426636 2503.544455 2503.544455	6711.331327 6761.405212 6761.723146 6761.723146	13098.666507 13199.807319 13200.117568 13200.117568	15.0	1243.510141 1275.056286 1275.395017 1275.395017	3355.665663 3451.839315 3452.991810 3452.991810	6549.178127 6743.548442 6745.875301 6745.875301
30.0	1501.584222 1520.363806 1520.434340 1520.434940	4004.862965 4061.304224 4061.683663 4061.683663	7789.766345 7903.423610 7904.161643 7904.161643	30.0	750.720975 785.861560 786.492882 786.501773	2002.431482 2107.203533 2109.314149 2109.357863	3994.883172 4105.407424 4109.743379 4109.835634
59.0	4.329920 15.867396 17.883430 18.158694	10.054642 29.560456 32.938617 33.463146	17.610893 47.818044 53.236908 54.141164	59.0	1.576737 9.957050 12.313233 12.778025	4.205438 20.572368 24.732406 25.617212	7.886751 34.595510 41.263730 42.746429

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA II	
$q = 50 \text{ kgf/m}^2$	$P = 500 \text{ kgf}$
$f = 6 \text{ m}$	$r = 60 \text{ m}$

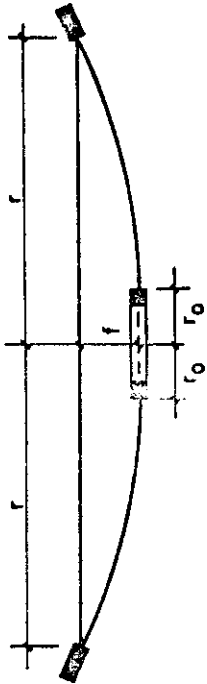


TABELA I2	
$q = 50 \text{ kgf/m}^2$	$P = 500 \text{ kgf}$
$f = 12 \text{ m}$	$r = 60 \text{ m}$

$\frac{n}{r_0}$	7 5 3	2 5 1	1 2 5
2.0	7324.737989 7341.401687 7341.401687 7341.401687	12317.385181 12359.109352 12359.109352 12359.109352	19863.217193 19949.317176 19949.787666 19949.787666
15.0	5857.502342 5878.607458 5878.607458 5878.607458	10084.873977 10134.327209 10134.327209 10134.327209	16472.942527 16570.489463 16570.879646 16570.879646
30.0	3744.228177 3772.485831 3772.574689 3772.574689	6252.327997 6312.477876 6312.774177 6312.774177	10038.798950 10153.181575 10153.657176 10153.657176
59.0	9.334651 78.956293 93.434537 95.192247	18.484471 99.492714 114.996700 116.923275	29.937341 126.661770 144.109914 146.378028

$\frac{n}{r_0}$	7 5 3	2 5 1	1 2 5
2.0	3656.727637 3689.577692 3689.707878 3689.707878	6156.650142 6238.566667 6239.077280 6239.077280	9930.902858 10098.633136 10099.926982 10099.926982
15.0	2922.016971 2963.255254 2963.463529 2963.463529	5040.167400 5136.386173 5137.162612 5137.162612	8235.593338 8424.736804 8426.492656 8426.492656
30.0	1861.250885 1915.811263 1916.322211 1916.344426	3122.163884 3236.796809 3238.389448 3238.389448	5017.853765 5232.945409 5236.452985 5236.512435
59.0	2.118358 35.918477 50.140798 52.754669	5.467668 52.939122 69.235391 72.270605	10.072936 74.525640 94.056483 97.795803

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA 14	
$g = 320 \text{ kgf/m}^2, P = 50 \text{ kgf}$	
$f = 12 \text{ m}, r = 60 \text{ m}$	

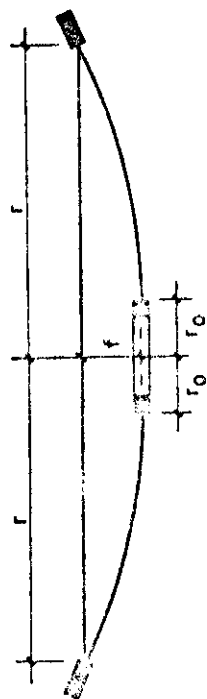


TABELA 13	
$g = 320 \text{ kgf/m}^2, P = 50 \text{ kgf}$	
$f = 6 \text{ m}, r = 60 \text{ m}$	

$\frac{H}{r_0}$	TABELA 13				TABELA 14			
	753	251	125		753	251	125	
2.0	16452.259544	48390.095489	56680.103698		8225.934932	24194.474678	48338.906906	
	16552.407127	48692.676864	97289.220428		8419.800359	24781.585662	49520.501724	
	16552.796806	48693.822982	97293.800262		8421.746767	24787.602905	49533.086252	
	16552.796806	48693.822982	97293.800262		8421.746767	24787.602905	49533.086252	
15.0	13892.839279	40928.503921	61806.433349		6943.055107	20463.76250	40902.247853	
	14000.441333	41252.286956	82457.474639		7152.821432	21086.128677	42153.467773	
	14000.770393	41254.225769	82461.349884		7155.371633	21093.883979	42168.968795	
	14000.770393	41254.225769	82461.349884		7155.371633	21093.883979	42168.968795	
30.0	8260.376056	24281.706693	48500.664321		4130.188028	12140.565879	24252.257713	
	8381.095443	24644.024376	49234.053466		4353.919998	12812.309921	25601.328666	
	8381.878070	24646.335075	49238.649002		4358.517902	12826.400447	25629.763420	
	8381.878070	24646.335075	49238.649002		4358.566816	12826.544219	25630.337867	
59.0	18.506634	46.854593	87.466369		8.331338	22.699382	43.326320	
	50.008155	121.961695	229.069192		36.267941	90.587547	170.806727	
	55.681739	136.464002	257.181767		43.243449	108.064553	204.349987	
	56.633672	139.096856	262.344640		44.799911	112.157794	212.328953	

VALORES DA FORÇA HORIZONTAL H (kgf)

TABELA 15	
g = 320 kgf/m ² , P = 500 kgf	
f = 6 m, r = 60 m	

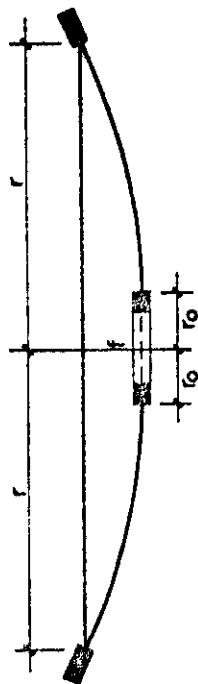


TABELA 16	
g = 320 kgf/m ² , P = 500 kgf	
f = 12 m, r = 60 m	

$\frac{n}{r_0}$	7 5 3	2 5 1	1 2 5
2.0	20801.345832	52738.918136	101027.782684
	20892.990394	53031.225067	101628.412109
	20893.483100	53031.225067	101628.412109
	20893.483100	53031.225067	101628.412109
15.0	17267.076934	44302.513290	85179.471649
	17370.962440	44621.515731	85827.109222
	17371.371437	44622.565078	85827.109222
	17371.371437	44622.565078	85827.109222
30.0	10509.613029	26531.115600	50754.499420
	10630.602035	26891.198242	51480.611312
	10631.099937	26893.711803	51484.217803
	10631.099937	26893.711898	51484.217803
59.0	31.263925	70.952803	122.747102
	129.833286	224.841783	348.872216
	147.536885	251.303932	388.416580
	149.850152	255.205096	394.729191

$\frac{n}{r_0}$	7 5 3	2 5 1	1 2 5
2.0	10400.057014	26369.459068	50513.891342
	10578.788566	26334.710739	51672.077117
	10580.266700	26940.019729	51682.845382
	10580.266700	26940.019729	51683.443603
15.0	8632.720478	22151.256645	42589.735824
	8833.742984	22763.027755	43829.023590
	8835.685726	22770.110855	43843.650924
	8835.685726	22770.110855	43844.155303
30.0	5253.312826	13265.400899	25377.249710
	5481.163005	13936.235286	26724.283424
	5484.959474	13949.274925	26751.332283
	5484.959474	13949.432033	26751.632812
59.0	10.625088	28.189113	52.704017
	77.018147	150.977986	246.787858
	96.941514	183.150696	295.600240
	100.768713	189.785051	306.156631

2.2. CABO INEXTENSIVEL COM CARREGAMENTO (p,P)

Suponha-se um elemento de cabo de comprimento ds submetido aos esforços indicados na figura 2.2.1. As condições de equilíbrio do elemento permitem escrever:

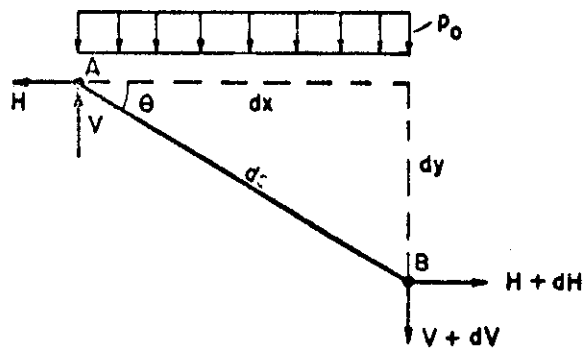


Fig. 2.2.1

$$dV + p_0 dx = 0 \quad (2.2.1)$$

$$dH = 0 \quad (2.2.2)$$

$$V dx - H dy = 0 \quad (2.2.3)$$

Introduzindo em (2.2.1) o valor de V obtido na equação (2.2.3), e observando que H é constante, resulta:

$$y'' = - \frac{p_0}{H} \quad (2.2.4)$$

A equação diferencial (2.2.4) rege os problemas dos cabos suspensos sob ação de carregamento vertical distribuído segundo o vão. Quando o carregamento é constante ao longo do vão, a integração de (2.2.4) define a curva de equilíbrio do cabo que, como se sabe, é uma parábola de segundo grau.

Sendo n o número de cabos radiais e p o carregamento por unidade de área de projeção horizontal, figura 2.2.2, a ordenada de carga será dada por:

$$p(x) = \frac{dQ}{dx} = \frac{2\pi p}{n} (r-x) \quad (2.2.5)$$

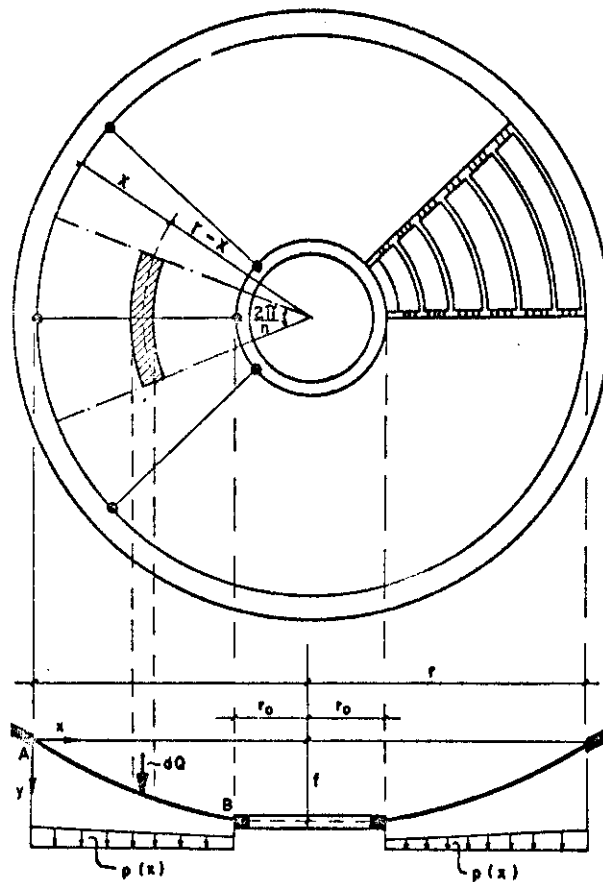


Fig. 2.2.2

Levando em (2.2.4) a expressão de $p(x)$, fornecida pela equação (2.2.5), e pondo $B = \pi p/nH$, obtêm-se:

$$y'' = 2B(x-r) \quad (2.2.6)$$

A integração de (2.2.6), bem menos laboriosa que a integração de (2.1.6), fornece uma parábola de terceiro grau que representa a curva assumida pelo cabo para o carregamento em questão. Integrando a equação (2.2.6) duas vezes, resultam:

$$y' = B(x^2 - 2rx) + C_1 \quad (2.2.7)$$

$$y = B\left(\frac{x^3}{3} - rx^2\right) + C_1x + C_2 \quad (2.2.8)$$

As constantes de integração podem ser determinadas pelas condições de extremidade. Para $x=r-r_0$ tem-se, como anteriormente,

$$(y')_{x=r-r_0} = \frac{P}{H} \quad (2.2.9)$$

e portanto da equação (2.2.7) obtêm-se:

$$C_1 = B(r^2 - r_0^2) + \frac{P}{H} \quad (2.2.10)$$

Observando que para $x=0$, tem-se $y=0$, da equação (2.2.8), conclui-se que $C_2=0$. Assim, as equações (2.2.7) e (2.2.8) ficam:

$$y' = B(x^2 - 2rx + r^2 - r_0^2 + \frac{nP}{\pi p}) \quad (2.2.11)$$

$$y = B\left[\frac{x^3}{3} - rx^2 + (r^2 - r_0^2 + \frac{nP}{\pi p})x\right] \quad (2.2.12)$$

A tração em um ponto genérico do cabo é obtida mediante:

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = \frac{Hds}{dx} = H\sqrt{1+(y')^2} \quad (2.2.13)$$

Considerando a equação (2.2.11), resulta:

$$T = \sqrt{H^2 + \left(\frac{\pi p}{n}\right)^2 \left(x^2 - 2rx + r^2 - r_0^2 + \frac{nP}{\pi p}\right)^2} \quad (2.2.14)$$

As trações nas extremidades do cabo resultam da equação anterior, fazendo-se respectivamente $x=0$ e $x=r-r_0$:

$$T_A = \sqrt{H^2 + \left(\frac{\pi p}{n}\right)^2 \left(r^2 - r_0^2 + \frac{nP}{\pi p}\right)^2} \quad (2.2.15)$$

$$T_B = \sqrt{H^2 + P^2} \quad (2.2.16)$$

As inclinações do cabo nos arranques superior e inferior, são obtidas da equação (2.2.10):

$$\operatorname{tg}\theta_A = (y')_{x=0} = B(r^2 - r_0^2 + \frac{nP}{\pi p}) \quad (2.2.17)$$

$$\operatorname{tg}\theta_B = (y')_{x=r-r_0} = P/H \quad (2.2.18)$$

donde:

$$\theta_A = \operatorname{arctg}\left[B(r^2 - r_0^2 + \frac{nP}{\pi p})\right] \quad (2.2.19)$$

$$\theta_B = \operatorname{arctg}(P/H) \quad (2.2.20)$$

O comprimento do cabo entre o arranque superior, $x=0$, e o arranque inferior, $x=r-r_0$, é calculado por:

$$s = \int_0^{r-r_0} \sqrt{1+(y')^2} dx \quad (2.2.21)$$

Tendo em conta a equação (2.2.10) e usando a aproximação

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2} a$$

resulta:

$$s = (r-r_0) \left\{ 1 + B^2 \frac{(r-r_0)^2}{30} \left[2(r+2r_0)^2 + r(r+r_0) \right] + \frac{BP}{3H} \left[(r-r_0)(r+2r_0) \right] + \frac{1}{2} (P/H)^2 \right\} \quad (2.2.22)$$

De posse das expressões gerais para o cálculo do cabo, a sequência a ser usada para determinar as incógnitas depende, como já foi salientado, dos dados inicialmente fixados. No caso de serem conhecidos o vão, a flecha da cobertura, as cargas e o número de cabos, o cálculo de H se faz através da equação (2.2.12), observando que para $x=r-r_0$ tem

-se $y=f$. Resulta então:

$$H = \frac{\pi p}{nf} \left[\frac{(r-r_0)(r+2r_0)}{3} + \frac{nP}{\pi p} \right] (r-r_0) \quad (2.2.23)$$

Com o valor de H conhecido, calculam-se as trações do cabo, as inclinações e o seu comprimento. Nos cabos abatidos que se caracterizam por pequenas relações flecha/vão, o valor de H fornecido por (2.2.23) se aproxima do valor de H dado por (2.1.12), fato que orienta o início das tentativas necessárias para a determinação da força horizontal no caso de carregamento (g, P) .

2.3. INFLUÊNCIA DA DEFORMAÇÃO DO CABO

Considere-se um elemento do cabo de comprimento inicial ds_0 . Após a deformação, o referido elemento se desloca e assume o comprimento final ds , figura 2.3.1.

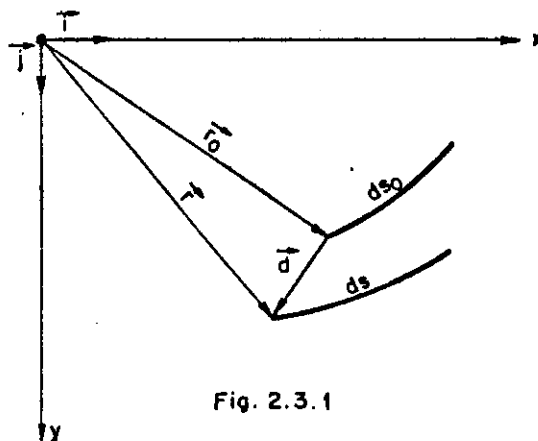


Fig. 2.3.1

Expressando \vec{r}_0 , \vec{r} e \vec{d} por

$$\vec{r}_0 = x\vec{i} + y(x)\vec{j} \quad (2.3.1)$$

$$\vec{d} = u(x)\vec{i} + v(x)\vec{j} \quad (2.3.2)$$

$$\vec{r} = [x+u(x)]\vec{i} + [y(x)+v(x)]\vec{j} \quad (2.3.3)$$

resultam:

$$ds_0 = |d\vec{r}_0| = \sqrt{d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0} = \sqrt{1+y'^2} dx \quad (2.3.4)$$

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{(1+u')^2 + (y'+v')^2} dx \quad (2.3.5)$$

Sendo $ds = ds_0 (1+\epsilon)$, tem-se

$$\epsilon^2 + 2\epsilon - \frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2} = 0 \quad (2.3.6)$$

e portanto, equação (2.3.4) e (2.3.5)

$$\epsilon = -1 + \sqrt{1 + \frac{2u'+u'^2+2y'v'+v'^2}{1+y'^2}} \quad (2.3.7)$$

Usando a aproximação $\sqrt{1+a} \approx 1+(a/2)-(a^2/8)$ e desprezando os infinitesimos de ordem superior, obtêm-se a expressão da deformação específica do cabo em função dos deslocamentos:

$$\epsilon = \frac{u'+y'v'}{1+y'^2} + \frac{v'^2}{2(1+y'^2)^2} \quad (2.3.8)$$

O segundo membro da expressão (2.3.8) pode ser abandonado, o que corresponde a desprezar ϵ^2 na equação (2.3.6) [cfr., p.ex., OTTO(1969)].

Considerem-se agora, figura 2.3.2, as condições de equilíbrio do elemento de cabo na posição deformada, sob a ação do carregamento \bar{g} .

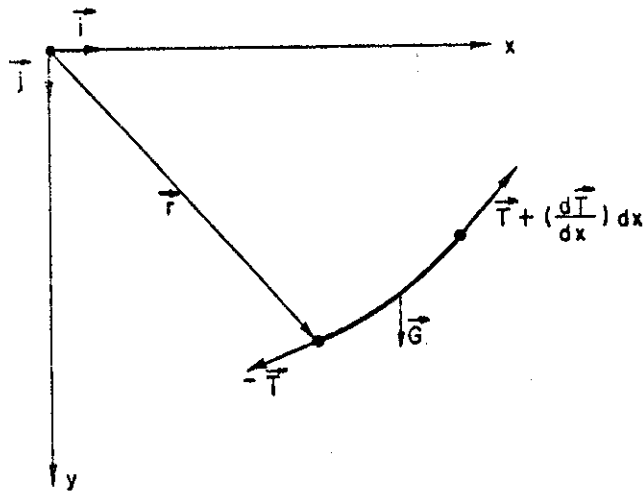


Fig. 2.3.2

As equações vetoriais de equilíbrio são:

$$\left[\vec{T} + \left(\frac{d\vec{T}}{dx} \right) dx \right] - \vec{T} + \vec{G} = 0 \quad (2.3.9)$$

$$d\vec{r} \wedge \left[\vec{T} + \left(\frac{d\vec{T}}{dx} \right) dx \right] + \frac{d\vec{r}}{2} \wedge \vec{G} = 0 \quad (2.3.10)$$

Multiplicando escalarmente ambos os termos da equação (2.3.9) por \vec{T} e por \vec{j} após introduzir $\vec{T} = H\vec{i} + V\vec{j}$ e $\vec{G} = (\bar{g}ds)\vec{j}$, e efetuando os produtos vetoriais indicados em (2.3.10), obtêm-se, depois de desprezar os infinitésimos de ordem superior, as equações diferenciais cartesianas de equilíbrio referentes à posição deformada do cabo [Cfr. HEILIG (1954)]:

$$\frac{dH}{dx} = 0 \quad (2.3.11)$$

$$\frac{dV}{dx} + \bar{g} \frac{ds}{dx} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$H(y' + v') - V(1 + u') = 0 \quad (2.3.13)$$

Observe-se que as três últimas equações, a menos de u' e v' , são idênticas às equações (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) do cabo inextensível.

Introduzindo em (2.3.12) o valor de V tirado de (2.3.13), resulta após integrar:

$$\frac{H(y'+v')}{1+u'} = -\int \bar{g} ds + C_1 \quad (2.3.14)$$

Desprezando u' em relação à unidade, de (2.3.14) tira-se v' , e por integração v :

$$v' = -y' - \frac{1}{H} \int \bar{g} ds + \frac{C_1}{H} \quad (2.3.15)$$

$$v = -\int y' dx - \frac{1}{H} \int (\int \bar{g} ds) dx + \frac{C_1}{H} x + C_2 \quad (2.3.16)$$

Por outro lado, sendo E o módulo de elasticidade do cabo e F a área de sua secção transversal, da lei de Hooke resulta

$$T = E F \epsilon \quad (2.3.17)$$

e portanto, considerando que $H = T \cos \alpha$, vem:

$$H = E F \epsilon \cos \alpha \quad (2.3.18)$$

Introduzindo em (2.3.18) a expressão de ϵ e notando que

$$\cos \alpha = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \cdot \vec{T} = \frac{1+u'}{\sqrt{(1+u')^2 + (y'+v')^2}} \quad (2.3.19)$$

resulta:

$$H = EF \left(\frac{u'+y'v'}{1+y'^2} \right) \frac{1+u'}{\sqrt{(1+u')^2 + (y'+v')^2}} \quad (2.3.20)$$

Usando para o radical a aproximação já utilizada, e desprezando os infinitesimos de ordem superior, resulta após algumas operações:

$$H = EF \left(\frac{u' + y'v'}{1 + u' + 1,5y'^2 + y'v'} \right) \quad (2.3.21)$$

Levando \bar{a} (2.3.21) v' tirado de (2.3.15), obtêm-se:

$$u' = y'^2 + \frac{y'}{H} \int \bar{g} ds - \frac{y' C_1}{H} - \frac{H}{H-EF} (1 + 1,5y'^2) \quad (2.3.22)$$

$$u = \int y'^2 dx + \frac{1}{H} \int (y' \int \bar{g} ds) dx - \frac{C_1}{H} \int y' dx - \frac{H}{H-EF} \int (1 + 1,5y'^2) dx + C_3 \quad (2.3.23)$$

Usando as equações (2.3.16) e (2.3.23) e sendo conhecidas as condições de contorno e a configuração de equilíbrio do cabo inextensível determinam-se as constantes C_1 , C_2 , C_3 e H , a partir das quais calculam-se os deslocamentos dos pontos do cabo. Com H calculam-se as trações, as inclinações, o comprimento e a flecha do cabo correspondente à posição deformada.

Note-se porém que esta solução é bastante trabalhosa mesmo quando se trata de cabos solicitados por carregamento constante como é o caso, por exemplo, da catenária.

A solução torna-se menos trabalhosa quando se usa a aproximação $\bar{g} ds = -dV \approx -dV_0$ [Cfr. OTTO (1969)].

Nestas condições, a equação (2.3.14) fica

$$H \left(\frac{y' + v'}{1 + u'} \right) = V_0 + C_1 \quad (2.3.24)$$

resultando, com $V_0 = H_0 y'$, as expressões correspondentes às (2.3.15) e (2.3.16)

$$v' = \left(\frac{H_0}{H} - 1 \right) y' + \frac{C_1}{H} \quad (2.3.25)$$

$$v' = \left(\frac{H_0}{H} - 1\right) \int y' dx + \frac{C_1}{H} x + C_2 \quad (2.3.26)$$

Com v' em (3.2.21) obtêm-se de maneira análoga, as expressões de u' e u correspondentes às equações (2.3.22) e (2.3.23).

$$u' = \frac{1}{EF-H} \left\{ H + \left[\left(\frac{H_0}{H} - 1\right)(H-EF) + 1,5H \right] y'^2 + \frac{C_1}{H}(H-EF)y' \right\} \quad (2.3.27)$$

$$u = \frac{1}{EF-H} \left\{ Hx + \left[\left(\frac{H_0}{H} - 1\right)(H-EF) + 1,5H \right] \int y'^2 dx + \frac{C_1}{H}(H-EF) \int y' dx \right\} + C_3 \quad (2.3.28)$$

Como já comentado, as equações (2.3.26) e (2.3.28) permitem estudar a deformação do cabo.

Considerando agora o carregamento (g, P) , pondo $A_0 = \pi g/nH_0$, e observando que

$$\int y' dx = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{[A_0(x^2 - 2rx) + C_0]^{(2m+1)}}{(2m+1)!} dx \quad (2.3.29)$$

$$\left[\int y' dx \right]_{x=0} = 0 \quad (2.3.30)$$

$$\left[\int y' dx \right]_{x=r-r_0} = f_0 \quad (2.3.31)$$

da equação (3.2.26), com $v = 0$ para $x = 0$ e $v = \Delta f$ para $x = (r-r_0)$, resultam:

$$C_2 = 0 \quad (2.3.32)$$

$$C_1 = \frac{H}{r-r_0} \left[\Delta f - \left(\frac{H_0}{H} - 1\right) f_0 \right] \quad (2.3.33)$$

Introduzindo a expressão de C_1 em (2.3.28), notando que

$$\int y'^2 dx = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m-1} \int \frac{[A_0(x^2 - 2rx) + C_0]^{2m}}{(2m)!} dx - \frac{x}{2} \quad (2.3.34)$$

$$\left[\int y'^2 dx \right]_{x=0} = 0 \quad (2.3.35)$$

$$\left[\int y'^2 dx \right]_{x=r-r_0} = K = (r-r_0)^4 (A_0)^2 \left[\frac{r-r_0}{5} - r \right] + \frac{2}{3} (r-r_0)^3 A_0 (2A_0 r^2 + C_0) - 2(r-r_0)^2 A_0 r C_0 + (r-r_0) C_0^2 \quad (2.3.36)$$

$$C_0 = \text{arcSh}(P/H_0) - A_0(r_0^2 - r^2) \quad (2.3.37)$$

e admitindo $u = 0$ para $x = 0$ e $x = r - r_0$, obtêm-se:

$$C_3 = 0 \quad (2.3.38)$$

$$H^2 \left[(r-r_0)^2 + \frac{K(r-r_0)}{2} + \Delta f \cdot f_0 + f_0^2 \right] + H \left[(r-r_0)(EF+H_0)K - (EF+H_0)f_0^2 - EF\Delta f f_0 \right] - EFH_0 \left[(r-r_0)K - f_0^2 \right] = 0 \quad (2.3.39)$$

Note-se que a equação (2.3.39) não permite obter diretamente o valor de H , pois a variação de flecha Δf é inicialmente desconhecida. Arbitrando-se Δf calcula-se H e com o valor encontrado determina-se, com a equação da curva do cabo, a flecha final. O ciclo de operações termina quando a flecha estimada com $f_0 + \Delta f$ coincide com o valor calculado. Conhecido o valor de H , determinam-se as trações, as inclinações e também o comprimento do cabo deformado.

Pode-se recorrer ainda a uma outra solução para estudar a deformação do cabo. Considere-se para isso um

elemento de cabo de comprimento inicial ds_0 . Sendo, como anteriormente, E o módulo de elasticidade do cabo e F a área de sua secção transversal, o alongamento do referido elemento, parcela do alongamento total do cabo, é dado por:

$$d(\Delta s) = \frac{T ds_0}{EF} \quad (2.3.40)$$

Observando que $ds_0 = \sqrt{1+y'^2} dx$ e admitindo $H = T \cos \theta = T dx / ds_0$, resulta

$$d(\Delta s) = \frac{H}{EF} (1+y'^2) dx \quad (2.3.41)$$

e então

$$\Delta s = \frac{H}{EF} \int (1+y'^2) dx \quad (2.3.42)$$

cuja integração se estende ao longo do vão e é, nos casos usuais, facilmente integrável.

Note-se porém que a expressão (2.3.42) não permite, pelo menos imediatamente, a determinação do alongamento do cabo, pois o valor de H é desconhecido. Usando porém a condição $s = s_0 + \Delta s$, determina-se o valor de H e com ele os parâmetros que definem o cabo deformado.

Observando que a expressão de Δs pode ser posta sob a forma

$$\Delta s = \frac{2H}{EF} \int_0^{r-r_0} \left(\frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \quad (2.3.43)$$

e que

$$s_0 = \int_0^{r-r_0} \left(1 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \quad (2.3.44)$$

resulta:

$$\Delta s = \frac{2H}{EF} \left[s_0 - \frac{(r-r_0)}{2} \right] \quad (2.3.45)$$

Considerando, por exemplo, o carregamento (p,P) e expressando o comprimento final do cabo em função da incôgnita procurada, resulta, com a condição $s=s_0+\Delta s$, uma equação do terceiro grau que determina a força H correspondente à posição deformada do cabo:

$$H^3 \left[\frac{2}{EF} \left(s_0 - \frac{r-r_0}{2} \right) \right] + H^2 \left[s_0 - (r-r_0) \right] - \frac{\pi p}{n} (r-r_0)^2 \left\{ \frac{P}{3} (r+2r_0) + \frac{\pi p}{n} \left(\frac{r-r_0}{30} \right) \left[2(r+2r_0)^2 + r(r+r_0) \right] \right\} - \frac{p^2}{2} (r-r_0) = 0 \quad (2.3.46)$$

Determinado o valor de H, obtêm-se as trações, as inclinações, a flecha e o comprimento do cabo deformado.

As variações de temperatura e os deslocamentos dos arranques traduzem-se, afinal, por um novo comprimento de cabo e um novo vão, a partir dos quais determinam-se todas as grandezas envolvidas no cálculo dos cabos, como se comentará na aplicação numérica, objeto do 4º capítulo.

3. CASCA DE REVOLUÇÃO SUJEITA A CARREGAMENTO COM SIMETRIA RADIAL

3.1. EQUAÇÕES GERAIS DE MEMBRANA

Considere-se uma membrana de revolução gerada pela rotação de uma curva plana (meridiano) em torno de um eixo contido no plano da curva, figura 3.1.1. O elemento de membrana, definido pela intersecção da superfície de revolução com dois planos meridianos e dois planos paralelos infinitamente próximos, e os esforços internos atuantes, estão representados na figura 3.1.2.

As condições de equilíbrio do elemento segundo a direção da tangente ao meridiano e segundo a direção da normal ao elemento considerado, fornecem as equações

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r) - N_{\theta}r_1 \cos\phi + p_{\phi}rr_1 = 0 \quad (3.1.1)$$

$$N_{\phi} r + N_{\theta} r_1 \sin\phi + p_z r r_1 = 0 \quad (3.1.2)$$

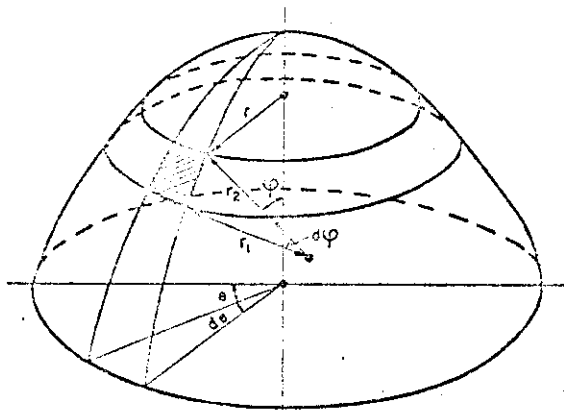


Fig. 3.1.1

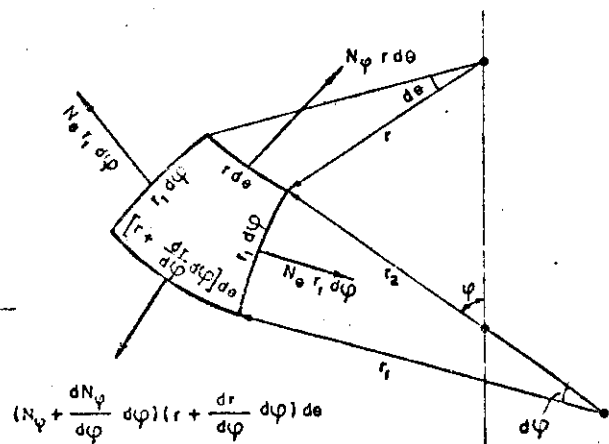


Fig. 3.1.2

que possibilitam determinar os esforços normais N_{ϕ} e N_{θ} . Nestas duas últimas equações p_{ϕ} e p_z são as componentes da carga externa segundo as direções consideradas.

Das equações (3.1.1) e (3.1.2) obtêm-se:

$$N_{\phi} = -\frac{1}{r_2 \sin^2 \phi} \left[\int r_1 r_2 (p_z \cos\phi + p_{\phi} \sin\phi) \sin\phi d\phi - C \right] \quad (3.1.3)$$

$$N_{\theta} = -p_z r_2 + \frac{1}{r_1 \sin^2 \phi} \left[\int r_1 r_2 (p_z \cos\phi + p_{\phi} \sin\phi) \sin\phi d\phi - C \right] \quad (3.1.4)$$

As deformações ϵ_{ϕ} , segundo a direção da tangente ao meridiano, e ϵ_{θ} , segundo a direção da tangente ao paralelo, podem ser relacionadas com os esforços N_{ϕ} e N_{θ} através da lei de Hooke:

$$\epsilon_{\phi} = \frac{1}{Eh} (N_{\phi} - \nu N_{\theta}) \quad (3.1.5)$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_{\phi}) \quad (3.1.6)$$

Nas expressões (3.1.5) e (3.1.6), E é o módulo de elasticidade e h é a espessura da membrana. As deforma-

ções ϵ_ϕ e ϵ_θ podem ser postas em função do deslocamento v , segundo a tangente ao meridiano, e do deslocamento w , segundo a direção normal ao elemento, figuras 3.1.3 e 3.1.4.

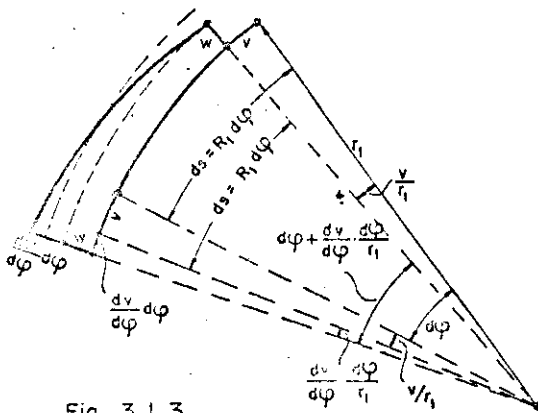


Fig. 3.1.3

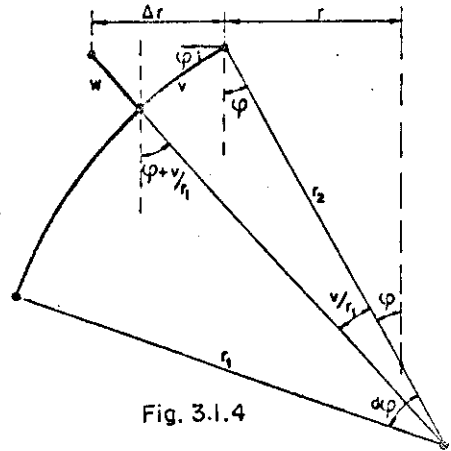


Fig. 3.1.4

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\phi} + w \right) \quad (3.1.7)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r_2} (v \cot \phi + w) \quad (3.1.8)$$

Eliminando w nas duas últimas expressões, obtêm-se após integrar

$$v = \text{sen} \phi \left[\int \frac{f(\phi)}{\text{sen} \phi} d\phi + C \right] \quad (3.1.9)$$

onde

$$f(\phi) = \frac{1}{Eh} [N_\phi (r_1 + v r_2) - N_\theta (r_2 + v r_1)] \quad (3.1.10)$$

Introduzindo v , dado por (3.1.9), em (3.1.8), resulta:

$$w = r_2 \epsilon_\theta - \cos \phi \left[\int \frac{f(\phi)}{\text{sen} \phi} d\phi + C \right] \quad (3.1.11)$$

As componentes horizontal e vertical dos deslocamentos, respectivamente ξ e η , figura 3.1.5, são:

$$\xi = v \cos \phi + w \sin \phi \quad (3.1.12)$$

$$\eta = v \sin \phi - w \cos \phi \quad (3.1.13)$$

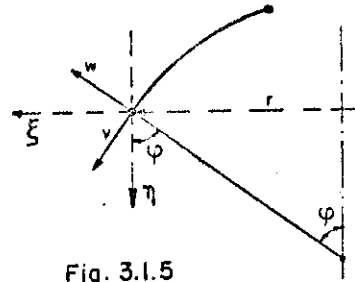


Fig. 3.1.5

Introduzindo em (3.1.13) as (3.1.9) e (3.1.11), resulta:

$$\eta = \int \frac{f(\phi)}{\sin^2 \phi} d\phi + C - r_2 \epsilon_\theta \cos \phi \quad (3.1.14)$$

Observando que

$$\xi = \Delta r = r \epsilon_\theta = \frac{r}{\epsilon n} (N_\theta - \nu N_\phi) = \epsilon_\theta r_2 \sin \phi \quad (3.1.15)$$

a (3.1.14) pode ser escrita:

$$\eta = \int \frac{f(\phi)}{\sin^2 \phi} d\phi + C - \frac{\xi}{\tan \phi} \quad (3.1.16)$$

A rotação da tangente ao meridiano, figura 3.1.6, é dada por:

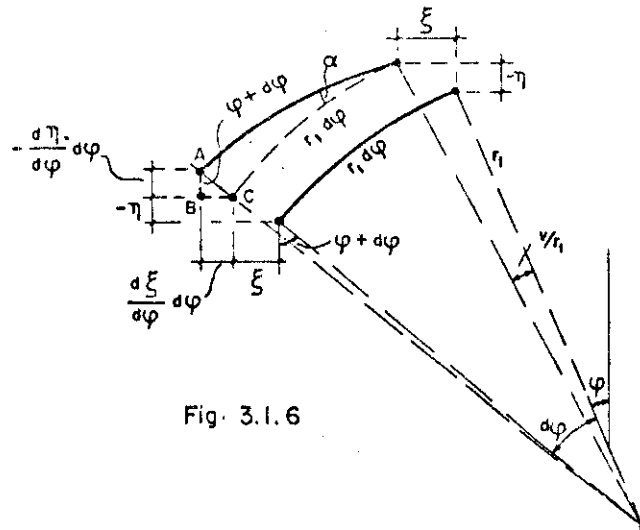


Fig. 3.1.6

$$\alpha = \frac{1}{r_1} \left[\frac{d\xi}{d\phi} \operatorname{sen}\phi - \frac{dn}{d\phi} \operatorname{cos}\phi \right] \quad (3.1.17)$$

ou ainda

$$\alpha = \frac{1}{r_1} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (3.1.18)$$

Considerando as equações (3.1.9) e (3.1.11) e observando que $r_2 \epsilon_\theta = \epsilon_\theta r / \operatorname{sen}\phi = \xi \operatorname{sen}\phi$, resulta para a rotação da tangente ao meridiano:

$$\alpha = \frac{1}{r_1} \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\xi}{\operatorname{sen}\phi} \right) - \frac{f(\phi)}{\operatorname{tg}\phi} \right] \quad (3.1.19)$$

3.2. MEMBRANA COM MERIDIANO DEFINIDO POR CARREGAMENTO(g,P)

Para o estudo da membrana de revolução, é necessário definir a equação da curva do cabo (equação do meridiano da superfície) tomando como referência um outro sistema de eixos, diferente do adotado para obter a equação (2.1.11). Considerando os eixos indicados na figura 3.2.1, a equação diferencial de equilíbrio correspondente à (2.1.4) assume a forma:

$$z'' = \frac{g_0}{H} \sqrt{1+(z')^2} \quad (3.2.1)$$

Observando que neste caso a ordenada de carga é dada por

$$g(x) = \frac{2\pi g}{n} x \quad (3.2.2)$$

resulta, com $A = \frac{\pi g}{nH}$, a equação diferencial de equilíbrio

$$z'' = 2Ax \sqrt{1+(z')^2} \quad (3.2.3)$$

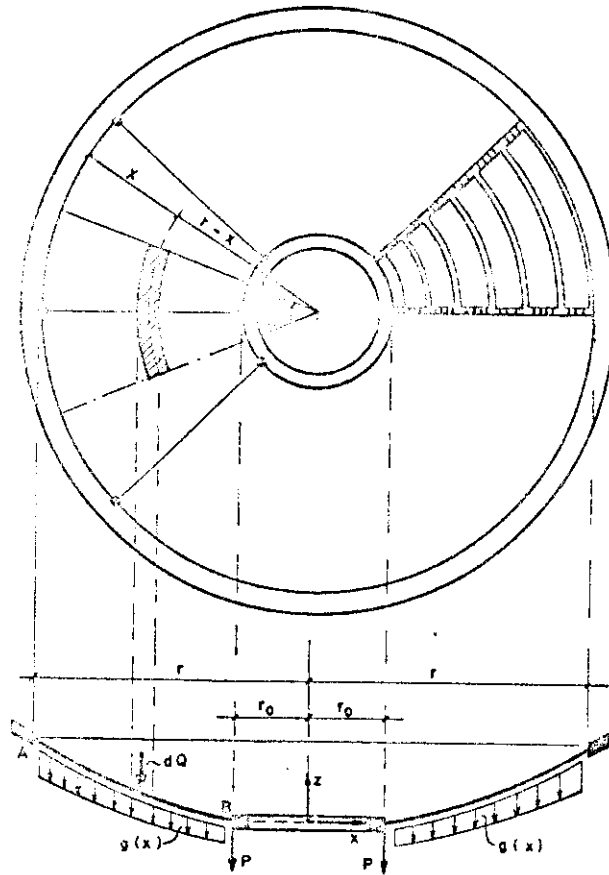


Fig. 3.2.1

correspondente à equação (2.1.6), que integrada com o mesmo procedimento, fornece:

$$z' = \text{Sh}(Ax^2 + C_1) \quad (3.2.4)$$

$$z = \int \text{Sh}(Ax^2 + C_1) dx + C_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{(Ax^2 + C_1)^{2m+1}}{(2m+1)!} dx + C_2 \quad (3.2.5)$$

A constante de integração C_1 pode ser determinada observando que para $x=r_0$, tem-se

$$(z')_{x=r_0} = \text{Sh}(Ar_0^2 + C_1) = \frac{P}{H} \quad (3.2.6)$$

e portanto:

$$C_1 = \text{arcSh}(P/H) - Ar_0^2 \quad (3.2.7)$$

A constante C_2 pode ser determinada com a condição de se ter $z=f$ para $x = r$, ou ainda considerando que para $x=r_0$, tem-se $z=0$.

Convém notar que a determinação de C_2 não é necessária, pois o estudo da membrana exige somente que se conheça a expressão que fornece a inclinação do cabo em um ponto genérico, ou seja, a inclinação da tangente ao meridiano. Observe-se que a constante H que figura em (3.2.5) é determinada pela equação (2.1.12).

Sendo g' a carga de protensão uniformemente distribuída sobre a superfície da membrana e observando, figura 3.2.2, que

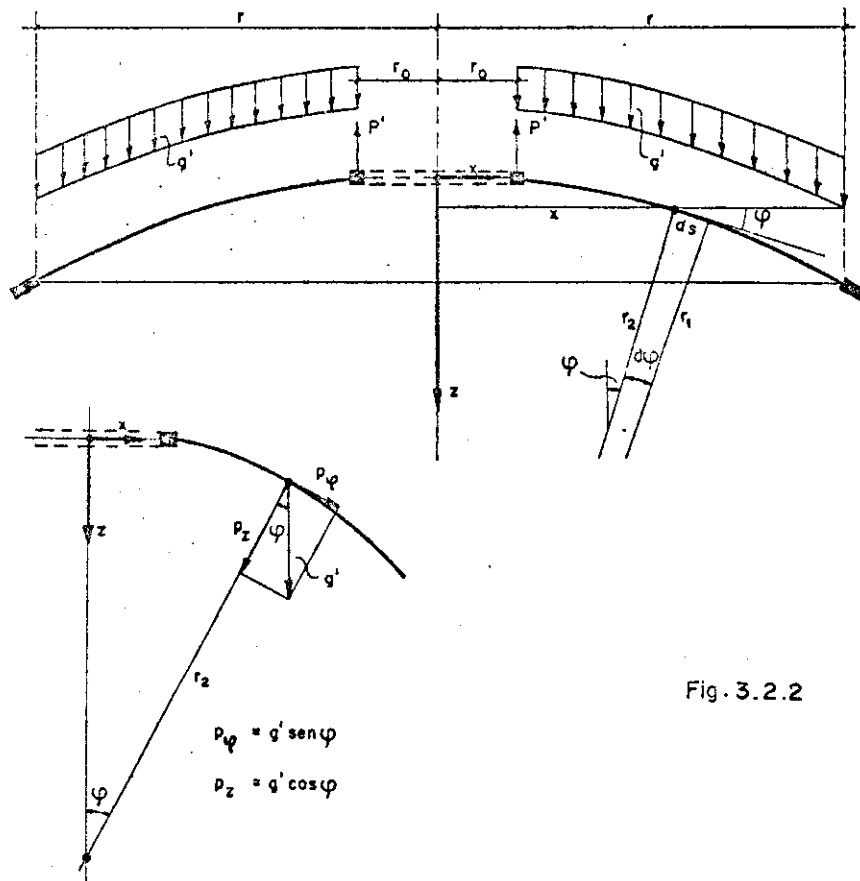


Fig. 3.2.2

$$p_z = g' \cos \phi \quad (3.2.8)$$

$$p_\phi = g' \operatorname{sen} \phi \quad (3.2.9)$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{z'}{\sqrt{1 + (z')^2}} = \frac{x}{r_2} \quad (3.2.10)$$

$$d\phi = \frac{ds}{r_1} = \frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{r_1} dx \quad (3.2.11)$$

da expressão (3.1.3) de N_ϕ obtêm-se:

$$N_\phi = - \frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{xz'} \left[g' \int x \sqrt{1 + (z')^2} dx - C \right] \quad (3.2.12)$$

Observando agora que

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}} \quad (3.2.13)$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{[1 + (z')^2]^3}}{z''} \quad (3.2.14)$$

da expressão (3.1.4) de N_θ , obtêm-se:

$$N_\theta = - \frac{g'x}{z'} + \frac{z''}{(z')^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}} \left[g' \int x \sqrt{1 + (z')^2} dx - C \right] \quad (3.2.15)$$

Introduzindo em (3.2.12) e em (3.2.15) as expressões de z' e de z'' , resultam:

$$N_\phi = - \frac{1}{x \operatorname{Th}(Ax^2 + C_1)} \left[g' \int x \operatorname{Ch}(Ax^2 + C_1) dx - C \right] \quad (3.2.16)$$

$$N_\theta = - \frac{g'x}{\operatorname{Sh}(Ax^2 + C_1)} + \frac{2Ax}{\operatorname{Sh}^2(Ax^2 + C_1)} \left[g' \int x \operatorname{Ch}(Ax^2 + C_1) dx - C \right] \quad (3.2.17)$$

A integral que figura nas expressões de N_ϕ e N_θ pode ser escrita:

$$\int x \operatorname{Ch}(Ax^2 + C_1) dx = x \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{(Ax^2 + C_1)^{2m}}{(2m)!} dx - \int \left[\sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{(Ax^2 + C_1)^{2m}}{(2m)!} dx \right] dx$$

Considerando apenas dois termos da série e introduzindo o resultado nas expressões de N_ϕ e N_θ , obtêm-se:

$$N_\phi = -\frac{1}{x \operatorname{Th}(Ax^2 + C_1)} \left\{ \frac{g'}{4} \left[\frac{x^6}{3} A^2 + x^4 AC_1 + x^2 (2 + C_1^2) \right] - C \right\} \quad (3.2.18)$$

$$N_\theta = -\frac{g'x}{\operatorname{Sh}(Ax^2 + C_1)} + \frac{2Ax}{\operatorname{Sh}^2(Ax^2 + C_1)} \left\{ \frac{g'}{4} \left[\frac{x^6}{3} A^2 + x^4 AC_1 + x^2 (2 + C_1^2) \right] - C \right\} \quad (3.2.19)$$

A constante C que aparece nas expressões (3.2.18) e (3.2.19) é determinada pelas condições de contorno relativas à borda interna. No caso de haver um carregamento P' uniformemente distribuído atuando na referida borda, a condição que permite o cálculo de C é dada, figura 3.2.3, por

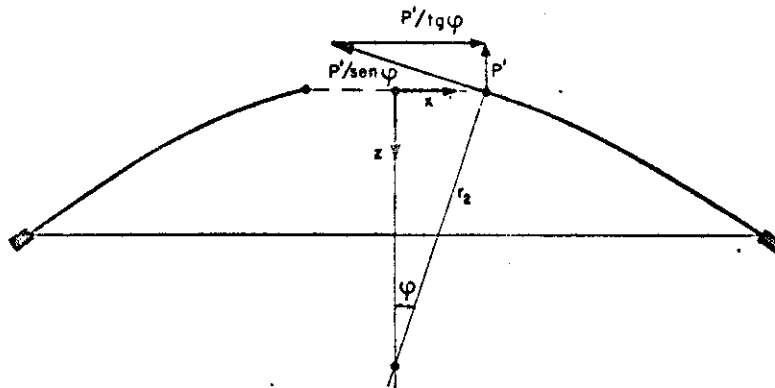


Fig. 3.2.3

$$(N_\phi)_{x=r_0} = \frac{p'}{(\sin\phi)_{x=r_0}} = p' \sqrt{1+(H/P)^2} \quad (3.2.20)$$

donde

$$C = p' r_0 \sqrt{1+(H/P)^2} \operatorname{Th}(Ar_0^2 + C_1) + \frac{g'}{4} \left[\frac{r_0^6}{3} (A)^2 + r_0^4 AC_1 + r_0^2 (2 + C_1^2) \right]$$

ou ainda, tendo em conta a expressão (3.2.7) de C_1 :

$$C = p' r_0 + \frac{g'}{4} \left[\frac{r_0^6}{3} (A)^2 + r_0^4 AC_1 + r_0^2 (2 + C_1^2) \right] \quad (3.2.21)$$

Levando a constante nas igualdades (3.2.18) e (3.2.19) resultam finalmente as expressões de N_ϕ e N_θ .

$$N_\phi = - \frac{K}{x \operatorname{Th}(Ax^2 + C_1)} \quad (3.2.22)$$

$$N_\theta = - \frac{x}{\operatorname{Sh}(Ax^2 + C_1)} \left[g' - \frac{2AK}{\operatorname{Sh}(Ax^2 + C_1)} \right] \quad (3.2.23)$$

onde

$$K = \frac{g'}{4} \left[\frac{x^6 - r_0^6}{3} (A)^2 + (x^4 - r_0^4) AC_1 + (x^2 - r_0^2) (2 + C_1^2) \right] - p' r_0 \quad (3.2.24)$$

Com os esforços de membrana N_ϕ e N_θ determinados, podem-se obter o deslocamento horizontal e a rotação da tangente ao meridiano. Essas duas grandezas, ξ e α , são necessárias para a análise das perturbações de borda que alteram o regime de membrana. A primeira delas, ξ , é necessária para o caso de membrana articulada, ao passo que ambas são necessárias para o caso de membrana engastada na borda.

Introduzindo em (3.1.15) as expressões de N_ϕ e N_θ , obtêm-se:

$$\xi = \frac{x}{Eh \operatorname{Sh}(Ax^2 + C_1)} \left\{ -g'x + K \left[\frac{2Ax}{\operatorname{Sh}(Ax^2 + C_1)} + \frac{v}{x} \operatorname{Ch}(Ax^2 + C_1) \right] \right\} \quad (3.2.25)$$

Nesta última expressão E é o módulo de elasticidade do material da membrana, h é a espessura da membrana e K é dado pela expressão (3.2.24).

A menos de excessivo trabalho algébrico, a determinação da expressão que permite calcular a rotação da tangente ao meridiano pode ser feita facilmente mediante a equação (3.1.19). Tendo em conta as expressões de r_1 , $\sin\phi$, $\tan\phi$ e exprimindo $f(\phi)$ e ξ em função de N_ϕ e N_θ , resulta, após efetuar a derivação indicada, a expressão que fornece a rotação da tangente ao meridiano em pontos genéricos da membrana.

3.3. MEMBRANA COM MERIDIANO DEFINIDO POR CARREGAMENTO (p, P)

Como no item anterior, usa-se para definir a equa

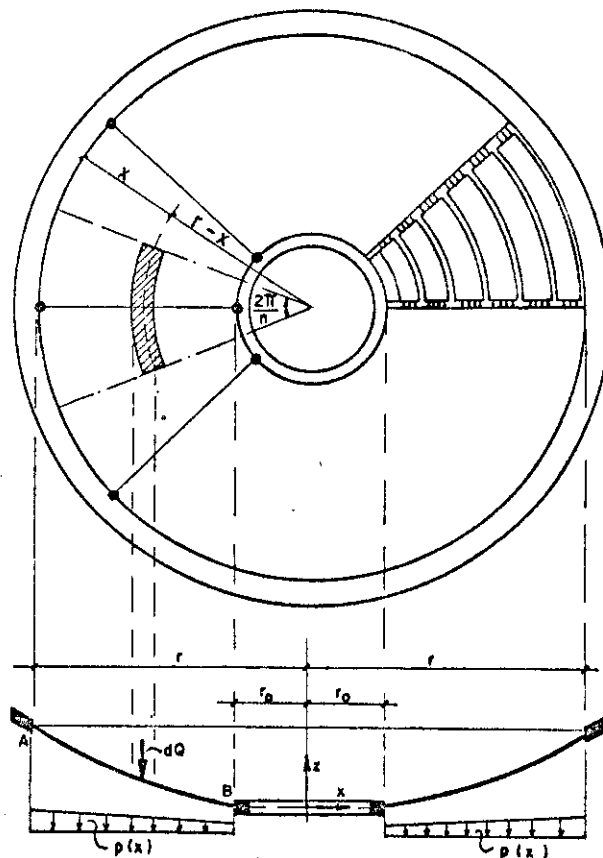


Fig. 3.3.1

ção da curva do cabo, o sistema de eixos indicado na figura 3.3.1. Para o referido sistema, resulta a equação diferencial de equilíbrio

$$z'' = \frac{p_0}{H} \quad (3.3.1)$$

que corresponde à equação (2.2.4).

Observando que a ordenada de carga \bar{e} é dada por

$$p(x) = \frac{2\pi p}{n} x \quad (3.3.2)$$

resulta, com $B = \frac{\pi p}{nH}$, a equação diferencial de equilíbrio correspondente à equação (2.2.6)

$$z'' = 2Bx \quad (3.3.3)$$

que, integrada, fornece:

$$z' = Bx^2 + C_1 \quad (3.3.4)$$

A constante de integração que figura em (3.3.4) é determinada pela condição

$$(z')_{x=r_0} = Br_0^2 + C_1 = \frac{P}{H} \quad (3.3.5)$$

que fornece:

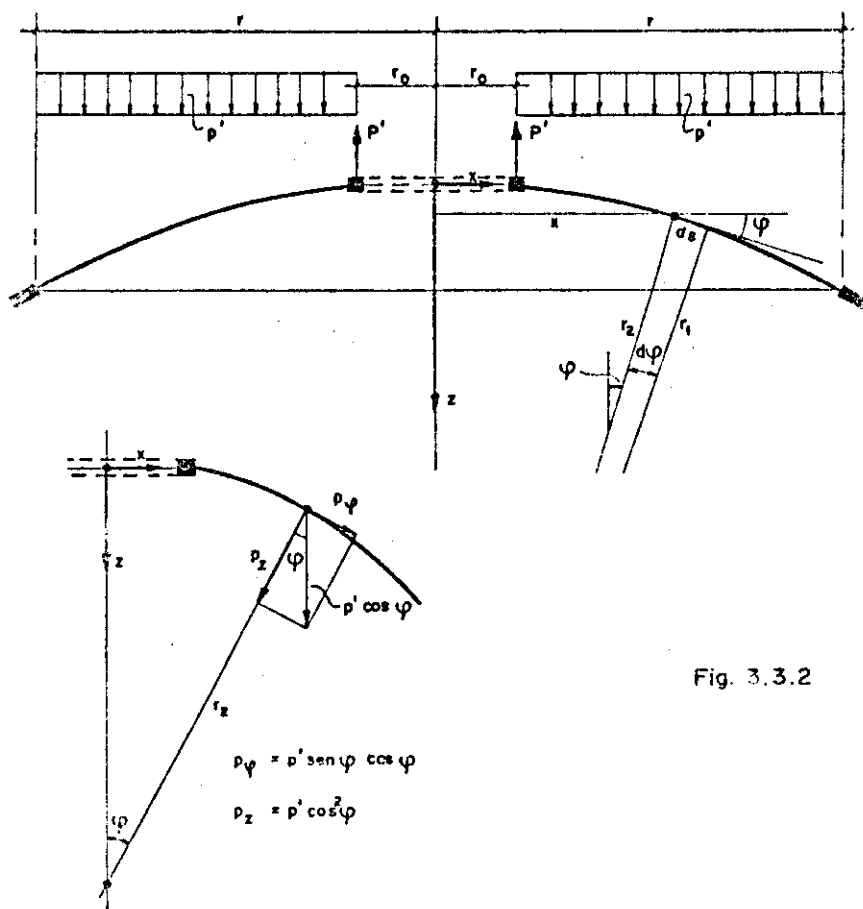
$$C_1 = \frac{P}{H} - Br_0^2 \quad (3.3.6)$$

Levando (3.3.6) à (3.3.4) obtêm-se a expressão que define a inclinação da tangente à curva do cabo em um ponto genérico, e necessária para o estudo da membrana:

$$z' = B(x^2 - r_0^2) + \frac{P}{H} \quad (3.3.7)$$

A constante H , força horizontal do cabo, pode ser obtida pela equação (2.2.13), dispensando portanto o cálculo da constante C_2 e da equação da curva do cabo.

Sendo neste caso p' a carga de protensão, observando, figura 3.3.2, que



$$p_z = p' \cos^2 \phi \quad (3.3.8)$$

$$p_\phi = p' \sin \phi \cos \phi \quad (3.3.9)$$

resultam, com procedimento análogo ao empregado no item anterior, as expressões de N_ϕ e N_θ :

$$N_\phi = - \frac{\sqrt{1+(z')^2}}{xz'} \left(p' \frac{x^2}{2} - C \right) \quad (3.3.10)$$

$$N_\theta = - \frac{1}{z' \sqrt{1+(z')^2}} \left[p' x - \frac{z''}{z'} \left(\frac{p' x^2}{2} - C \right) \right] \quad (3.3.11)$$

Com os valores de z' e z'' nas expressões de N_ϕ e N_θ , obtêm-se:

$$N_\phi = - \frac{\sqrt{(nH)^2 + [\pi p(x^2 - r_0^2) + nP]^2}}{x [\pi p(x^2 - r_0^2) + nP]} \left(\frac{p'x^2}{2} - C \right) \quad (3.3.12)$$

$$N_\theta = - \frac{(nH)^2 x}{[\pi p(x^2 - r_0^2) + nP] \sqrt{(nH)^2 + [\pi p(x^2 - r_0^2) + nP]^2}} \cdot \left[p' - \frac{2\pi p}{\pi p(x^2 - r_0^2) + nP} \left(\frac{p'x^2}{2} - C \right) \right] \quad (3.3.13)$$

A constante de integração é determinada pela condição de contorno, figura 3.2.3.

$$(N_\phi)_{x=r_0} = \frac{p'}{(\text{sen } \phi)_{x=r_0}} = p' \sqrt{1 + (H/P)^2} \quad (3.3.14)$$

que fornece:

$$C = r_0 \left(p' + \frac{p'r_0}{2} \right) \quad (3.3.15)$$

Levando a constante nas expressões de N_ϕ e N_θ obtêm-se

$$N_\phi = - \frac{\sqrt{(nH)^2 + K^2}}{xK} \left[\frac{p'(x^2 - r_0^2)}{2} - p'r_0 \right] \quad (3.3.16)$$

$$N_\theta = - \frac{(nH)^2 x}{K \sqrt{(nH)^2 + K^2}} \left\{ p' - \frac{2\pi p}{K} \left[\frac{p'(x^2 - r_0^2)}{2} - p'r_0 \right] \right\} \quad (3.3.17)$$

onde

$$K = \pi p(x^2 - r_0^2) + nP$$

O deslocamento horizontal ξ , em função dos esforços N_ϕ e N_θ , pode ser escrito:

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{x}{EhK \sqrt{(nH)^2 + K^2}} \left\{ -(nH)^2 x \left\{ p' - \frac{2\pi p}{K} \left[\frac{p'}{2}(x^2 - r_0^2) \right] \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{v}{x} \left[(nH)^2 + K^2 \right] \left[\frac{p'}{2}(x^2 - r_0^2) - p' r_0 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Usando o procedimento descrito no item anterior, pode-se determinar, com a equação (3.1.19), a expressão que fornece a rotação da tangente ao meridiano da membrana.

3.4. PERTURBAÇÕES GERADAS PELOS VÍNCULOS

O estudo das cascas de revolução submetidas a carga com simetria radial conduz a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, nas incógnitas força cortante e rotação da tangente ao meridiano.

A solução particular do sistema, que depende somente da carga externa aplicada e difere muito pouco da solução de membrana, superposta com a solução do sistema homogêneo, que depende das condições de contorno da casca, fornece a solução geral do sistema não homogêneo, que permite calcular os esforços e deslocamentos angulares e lineares da casca.

No caso presente de casca com meridiano definido pela equação da curva do cabo, cujo regime de membrana já foi analisado nos dois itens anteriores, a solução do sistema homogêneo — que fornece os esforços e os deslocamentos gerados pelos vínculos — é bastante complexa. Pode-se contornar tal dificuldade recorrendo-se à aproximação da casca esférica equivalente, que consiste em assimilar trechos da casca em questão a segmentos de casca esférica.

Para a casca esférica, cuja solução exata do sistema homogêneo é bastante trabalhosa, usa-se a solução de Geckeler, que fornece resultados satisfatórios para as cas-

cas não muito abatidas, como é o caso da casca aqui estudada nas proximidades da borda externa.

A solução de Geckeler fornece para os esforços, figuras 3.4.1 e 3.4.2, e para os deslocamentos lineares e angulares, figuras 3.4.3 e 3.4.4, as seguintes expressões [Cfr. BELLUZZI (1970)]:

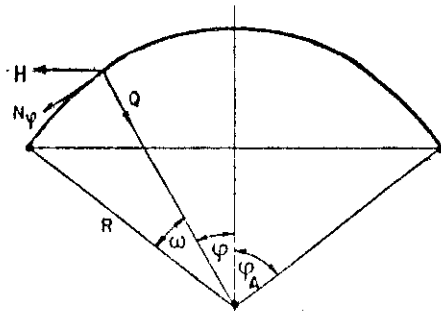


Fig. 3.4.1

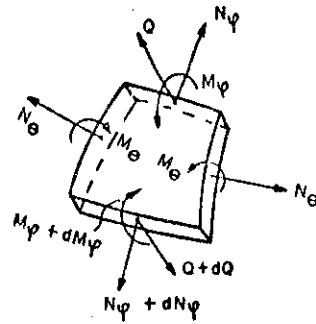


Fig. 3.4.2

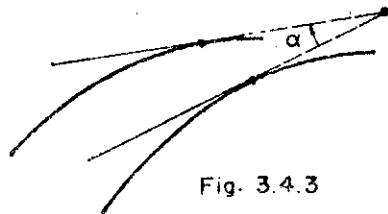


Fig. 3.4.3

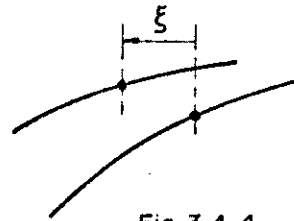


Fig. 3.4.4

$$Q = -C e^{-\gamma\omega} \text{sen}(\gamma\omega + \psi) \quad (3.4.1)$$

$$N_\phi = \cotg\phi C e^{-\gamma\omega} \text{sen}(\gamma\omega + \psi) \quad (3.4.2)$$

$$N_\theta = \sqrt{2} \gamma C e^{-\gamma\omega} \text{sen}(\gamma\omega + \psi - \pi/4) \quad (3.4.3)$$

$$H = \frac{1}{\text{sen}\phi} C e^{-\gamma\omega} \text{sen}(\gamma\omega + \psi) \quad (3.4.4)$$

$$M_\phi = \frac{R}{\sqrt{2} \gamma} C e^{-\gamma\omega} \text{sen}\left(\gamma\omega + \psi - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (3.4.5)$$

$$M_\theta = \frac{R}{2\gamma^2} C e^{-\gamma\omega} \left[\cotg\phi \text{sen}(\gamma\omega + \psi - \pi/2) + \right. \\ \left. + \nu \sqrt{2} \text{sen}\left(\gamma\omega + \psi - \frac{3\pi}{4}\right) \right] \quad (3.4.6)$$

$$\alpha = \frac{2\gamma^2}{Eh} C e^{-\gamma\omega} \text{sen}(\gamma\omega + \psi - \pi/2) \quad (3.4.7)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2} \gamma R}{Eh} \text{sen}\phi C e^{-\gamma\omega} \text{sen}(\gamma\omega + \psi - \pi/4) \quad (3.4.8)$$

A constante γ que figura nessas expressões é dada por

$$\gamma = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (3.4.9)$$

e as constantes C e ψ podem ser determinadas quando se conhecem, por exemplo, as condições de vinculação da casca.

No caso de cascas vinculadas hiperestaticamente, o cálculo das reações simplifica-se quando se usam os chamados coeficientes de influência. Tais coeficientes representam a rotação da tangente ao meridiano e o deslocamento horizontal da borda, quando a ela se aplicam esforços horizontais e momentos fletores unitários uniformemente distribuídos.

Fazendo em (3.4.4) e (3.4.5) respectivamente $H=1$ e $M_\phi=0$, figura 3.4.5, resultam para $\phi=\phi_A(\omega=0)$:

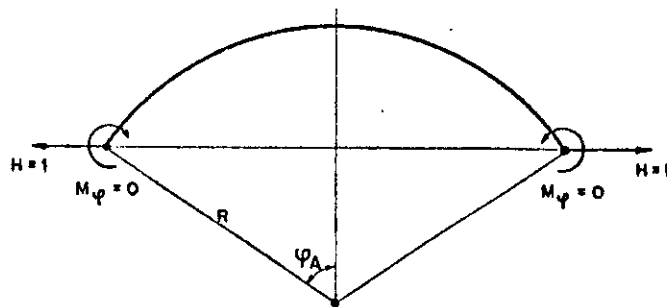


Fig. 3.4.5

$$\psi = \frac{3\pi}{4} \quad (3.4.10)$$

$$C = \sqrt{2} \text{sen}\phi_A \quad (3.4.11)$$

Com os valores de ψ e C nas expressões (3.4.7) e (3.4.8), obtêm-se a rotação da tangente ao meridiano e o deslocamento horizontal da borda da casca gerados pelo esforço horizontal unitário $H=1$ ($M_\phi=0$)

$$\alpha_H = \frac{2\gamma^2}{Eh} \operatorname{sen}\phi_A \quad (3.4.12)$$

$$\xi_H = \frac{2\gamma R}{Eh} \operatorname{sen}^2\phi_A \quad (3.4.13)$$

De maneira análoga, fazendo $H=0$ em (3.4.4) e $M_\phi=1$ em (3.4.5), figura 3.4.6, obtêm-se:

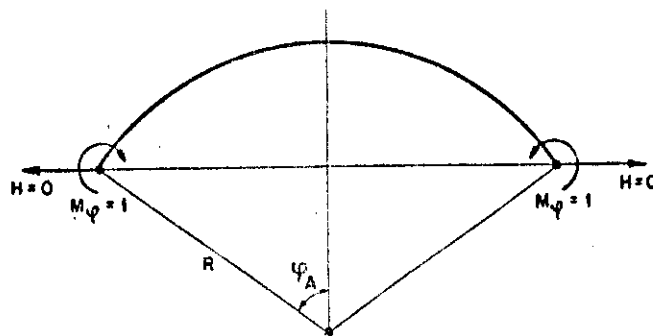


Fig. 3.4.6

$$\psi = 0 \quad (3.4.14)$$

$$C = -\frac{2\gamma}{R} \quad (3.4.15)$$

Introduzindo C e ψ nas expressões de α e ξ , obtêm-se a rotação da tangente ao meridiano e o deslocamento horizontal da borda produzidos por $M_\phi=1$ ($H=0$):

$$\alpha_M = \frac{4\gamma^3}{EhR} \quad (3.4.16)$$

$$\xi_M = \frac{2\gamma^2}{Eh} \operatorname{sen}\phi_A \quad (3.4.17)$$

Usando os coeficientes de influência e sendo conhecido o tipo de vinculação da casca, calculam-se facilmente, através das equações de compatibilidade, as reações

de apoio. Com as reações conhecidas determinam-se as constantes C e ψ , ficando então definidas as oito funções - (3.4.1) a (3.4.8).

Superpondo, como já foi salientado, os esforços e os deslocamentos lineares e angulares calculados em regime de membrana com os gerados pelos vínculos, tem-se o estado final de sollicitação e de deslocamento da casca.

A análise dos efeitos provocados pela vinculação da borda interna pode ser feita com procedimento análogo ao utilizado para estudar os efeitos gerados pela borda externa. Deve-se notar porém que a casca em estudo é geralmente bem abatida nas proximidades da borda interna, o que invalida a solução de Geckeler para a casca esférica e equivalente. Neste caso usa-se a solução apresentada por GRAVINA (1957). De acordo com o citado autor, os esforços, figuras 3.4.2 e 3.4.7, e os deslocamentos, figura 3.4.8, são dados por:

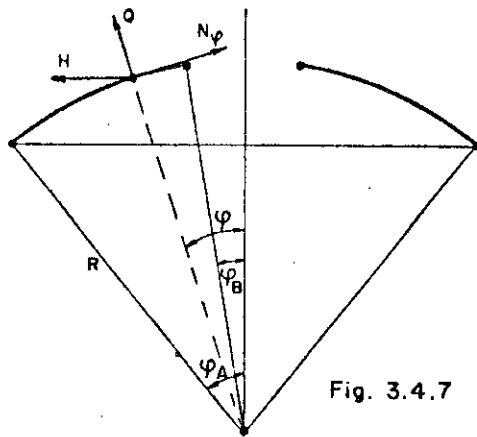


Fig. 3.4.7

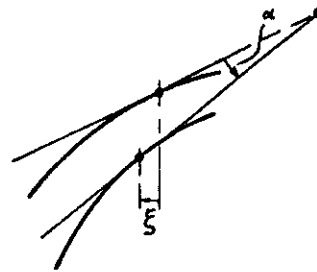


Fig. 3.4.8

$$Q = -\frac{1}{R}(CZ'_3 + DZ'_4) \quad (3.4.18)$$

$$N_\phi = -\frac{1}{R\phi}(CZ'_3 + DZ'_4) \quad (3.4.19)$$

$$N_\theta = -\frac{\mu}{R}\left[C\left(Z_4 - \frac{1}{t}Z'_3\right) + D\left(-Z_3 - \frac{1}{t}Z'_4\right)\right] \quad (3.4.20)$$

$$H \equiv -N_{\phi} = \frac{1}{R\phi} (CZ_3' + DZ_4') \quad (3.4.21)$$

$$M_{\phi} = \frac{h^2 \mu^2}{12R^2(1-\nu^2)\phi} \left\{ C \left[tZ_3 + (1-\nu)Z_4' \right] + D \left[tZ_4 - (1-\nu)Z_3' \right] \right\} \quad (3.4.22)$$

$$M_{\theta} = \frac{h^2 \mu^2}{12R^2(1-\nu^2)\phi} \left\{ C \left[\nu tZ_3 + (\nu-1)Z_4' \right] + D \left[\nu tZ_4 - (\nu-1)Z_3' \right] \right\} \quad (3.4.23)$$

$$\alpha = \frac{\mu^2}{EhR} (CZ_4' - DZ_3') \quad (3.4.24)$$

$$\epsilon = \frac{1}{Eh} \left\{ C \left[-tZ_4 + (1+\nu)Z_3' \right] + D \left[tZ_3 + (1-\nu)Z_4' \right] \right\} \quad (3.4.25)$$

onde:

$$\begin{aligned} Z_3 = & -\frac{2}{\pi} \left\{ -\ln\left(\frac{C't}{2}\right) \left[\frac{t^2}{(2)^2} - \frac{t^6}{(2.4.6)^2} + \frac{t^{10}}{(2.4.6.8.10)^2} - \dots \right] + \right. \\ & - \frac{\pi}{4} \left[1 - \frac{t^4}{(2.4)^2} + \frac{t^8}{(2.4.6.8.)^2} - \dots \right] \\ & \left. + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{(3!)^2} (t/2)^6 + \dots \right\} \quad (3.4.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_4 = & -\frac{2}{\pi} \left\{ -\ln\left(\frac{C't}{2}\right) \left[1 - \frac{t^4}{(2.4)^2} + \frac{t^8}{(2.4.6.8)^2} - \dots \right] \right. \\ & + \frac{\pi}{4} \left[\frac{t^2}{(2)^2} - \frac{t^6}{(2.4.6)^2} + \frac{t^{10}}{(2.4.6.8.10)^2} - \dots \right] \\ & \left. - \frac{1 + \frac{1}{2}}{(2!)^2} (t/2)^4 + \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{(4!)^2} (t/2)^8 - \dots \right\} \quad (3.4.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_3' = & -\frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{t} \left[\frac{t^2}{(2)^2} - \frac{t^6}{(2.4.6)^2} + \frac{t^{10}}{(2.4.6.8.10)^2} - \dots \right] \right. \\
& - \ln\left(\frac{C't}{2}\right) \left[\frac{t}{2} - \frac{6t^5}{(2.4.6)^2} + \frac{10t^9}{(2.4.6.8.10)^2} - \dots \right] \\
& - \frac{\pi}{4} \left[-\frac{4t^3}{(2.4)^2} + \frac{8t^7}{(2.4.6.8)^2} - \dots \right] + \frac{t}{2} \\
& \left. - 3 \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{(3!)^2} (t/2)^5 + \dots \right\} \quad (3.4.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_4' = & -\frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{t} \left[1 - \frac{t^4}{(2.4)^2} + \frac{t^8}{(2.4.6.8)^2} - \dots \right] \right. \\
& - \ln\left(\frac{C't}{2}\right) \left[-\frac{4t^3}{(2.4)^2} + \frac{8t^7}{(2.4.6.8)^2} - \dots \right] \\
& + \frac{\pi}{4} \left[\frac{t}{2} - \frac{6t^5}{(2.4.6)^2} + \frac{10t^9}{(2.4.6.8.10)^2} - \dots \right] \\
& \left. - 2 \frac{1 + \frac{1}{2}}{(2!)^2} (t/2)^3 + 4 \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{(4!)^2} (t/2)^7 - \dots \right\} \\
& \dots (3.4.29)
\end{aligned}$$

$$C' = 1,781072418 \quad (3.4.30)$$

$$t = \phi \mu \quad (3.4.31)$$

$$\mu = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (3.4.32)$$

As constantes C e D são determinadas, como anteriormente, pelas condições de contorno da borda interna.

Os coeficientes de influência relativos à borda interna são obtidos com as equações (3.4.21), (3.4.22), (3.4.24) e (3.4.25). Fazendo em (3.4.21) $H=1$ e em (3.4.22) $M_\phi=0$, figura 3.4.9, resultam:

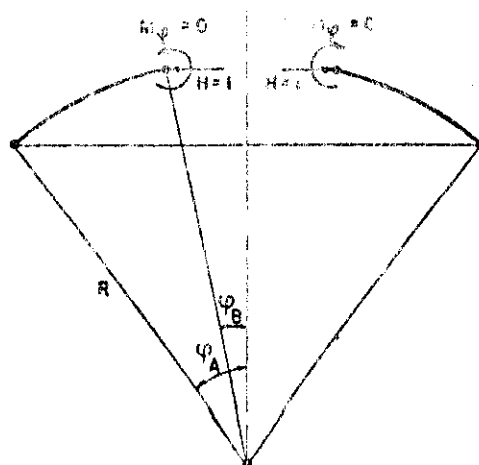


Fig. 3.4.9

$$C = R\phi_B \cdot \frac{(1-\nu)Z_3' - tZ_4}{(1-\nu)(Z_3'^2 + Z_4'^2) + t(Z_3Z_4' - Z_3'Z_4)} \quad (3.4.33)$$

$$D = R\phi_B \cdot \frac{(1-\nu)Z_4' + tZ_3}{(1-\nu)(Z_3'^2 + Z_4'^2) + t(Z_3Z_4' - Z_3'Z_4)} \quad (3.4.34)$$

Introduzindo as constantes C e D nas expressões de α e ϵ , respectivamente (3.4.24) e (3.4.25), obtêm-se a rotação da tangente ao meridiano e o deslocamento horizontal da borda interna, gerados pelo esforço $H=1 (M_\phi=0)$.

$$\alpha_H = - \frac{t^3}{Eh\phi_B} \cdot \frac{Z_3Z_3' + Z_4Z_4'}{(1-\nu)(Z_3'^2 + Z_4'^2) + t(Z_3Z_4' - Z_3'Z_4)} \quad (3.4.35)$$

$$\epsilon_H = \frac{R\phi_B}{Eh} \cdot \frac{t^2(Z_3^2 + Z_4^2) - 2t(Z_3'Z_4 - Z_3Z_4') + (1-\nu^2)(Z_3'^2 + Z_4'^2)}{(1-\nu)(Z_3'^2 + Z_4'^2) + t(Z_3Z_4' - Z_3'Z_4)} \quad (3.4.36)$$

Analogamente, com $H=0$ em (3.4.21) e $M_\phi=1$ em (3.4.22), figura 3.4.10, resultam:

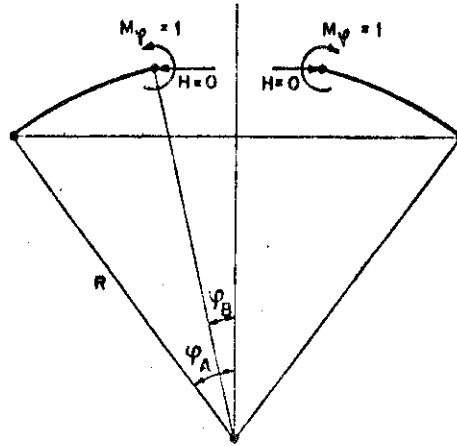


Fig. 3.4.10

$$C = \frac{12R^2\phi_B(1-\nu^2)}{h^2\mu^2} \cdot \frac{Z_4'}{(1-\nu)(Z_3'^2+Z_4'^2)+t(Z_3Z_4'-Z_3'Z_4)} \quad (3.4.37)$$

$$D = -\frac{12R^2\phi_B(1-\nu^2)}{h^2\mu^2} \cdot \frac{Z_3'}{(1-\nu)(Z_3'^2+Z_4'^2)+t(Z_3Z_4'-Z_3'Z_4)} \quad (3.4.38)$$

Levando as expressões de C e D em (3.4.24) e (3.4.25) resultam, para $M_\phi=1$ ($H=0$), a rotação da tangente ao meridiano e o deslocamento horizontal da borda interna:

$$\alpha_M = \frac{12R\phi_B(1-\nu^2)}{Eh^3} \cdot \frac{Z_3'^2+Z_4'^2}{(1-\nu)(Z_3'^2+Z_4'^2)+t(Z_3Z_4'-Z_3'Z_4)} \quad (3.4.39)$$

$$\epsilon_M = -\frac{t^3}{Eh\phi_B} \cdot \frac{Z_3Z_3'+Z_4Z_4'}{(1-\nu)(Z_3'^2+Z_4'^2)+t(Z_3Z_4'-Z_3'Z_4)} \quad (3.4.40)$$

Obtidos os coeficientes de influência e usando procedimento análogo ao anteriormente descrito, obtêm-se o estado final de sollicitação e de deslocamento da casca.

Com relação às ações térmicas, parece ser suficientemente aproximado considerá-las uniformes em toda a casca, em vista da pequena flecha e da maior exposição dada pelas características da cobertura. As ações do vento, em alguns casos, poderão ser consideradas uniformes, como por exemplo a sucção admitida para o cálculo da cobertura de Rolândia a partir dos resultados obtidos nos ensaios efetuados para a cobertura de Montevidéu. No caso de ações assimétricas importantes, os esforços de membrana poderão ser analisados pelos caminhos clássicos, e as perturbações de borda mediante o trabalho de LANGENDONCK (1960).

4. APLICAÇÕES

4.1. DESCRIÇÃO DA COBERTURA ESTUDADA

O Ginásio de Esportes Governador Emílio Gomes — com capacidade para 6.000 pessoas, construído em Rolândia, no Estado do Paraná — é a segunda obra brasileira com cobertura pênsil em casca protendida de revolução. Esta cobertura servirá de tema para as aplicações desenvolvidas neste capítulo.

O anel externo, construído em concreto armado, compõe-se de uma viga contínua circular com 0,30m de largura e 1,50m de altura; de 180 placas trapezoidais com 0,15m de espessura, dispostas radialmente sobre a viga; e de um anel circular com $0,15 \times 2,11 \text{m}^2$ de secção transversal que se apóia nas placas radiais e onde são ancorados, por aderência, os 90 cabos da cobertura, formados por 4 fios paralelos de 8mm de diâmetro e aço de protensão CP-125/140.

As cargas verticais da cobertura são transmitidas às fundações — blocos sobre 4 estacas — por 18 pilares

circulares, comprimento de 8,50m e diâmetro de 0,40m, igualmente espaçados e dispostos em uma circunferência de aproximadamente 31,00m de raio.

O anel central, com 5,00m de raio externo, foi construído com 90 blocos de concreto armado de 0,50m de altura, 0,40m na direção radial e 0,20m de largura. Os blocos, com os cabos já ancorados, foram colocados em um cimb্রে central e cintados com 50 fios de 8mm de diâmetro e aço de protensão CP-125/140. Para fazer um cintamento contínuo, as extremidades dos fios foram justapostas, pressionadas com uma morsa e amarradas com cabo de aço (cabo de aço trançado, ϕ 1,45mm, formado por 6 pernas de 7 fios de ϕ 0,18 mm, tensão de ruptura da ordem de 13tf/cm^2) em um comprimento de 0,25m.

Como elementos de vedação usaram-se 2250 (25x90) placas trapezoidais pré-fabricadas de concreto, com 0,04m de espessura, e armadas com tela Telcon Q503 (malha 0,10x x0,10m, ϕ 8mm) que, deixada saliente nos lados não paralelos, serviu de apoio das placas nos cabos. As placas adjacentes ao anel central foram executadas com furos de 0,10m de diâmetro por onde se escoam as águas da chuva que, recolhidas em uma calha fixada ao anel, são enviadas para fora do ginásio por meio de 12 condutores (tubos de P.V.C., ϕ 6") atirantados à casca.

A área livre de $66,00\text{m}^2$, correspondente à abertura central, foi coberta com uma cúpula pré-fabricada de fibra de vidro, com peso total de aproximadamente 980 Kgf.

A carga de protensão de 100 kgf/m^2 , aplicada após o assentamento de todas as placas e retirada depois do endurecimento do concreto colocado nas juntas, foi obtida através de tijolos e sacos plásticos contendo água ou areia.

O teto suspenso, tem raio de 30,00m, flecha de aproximadamente 4,80m e a área coberta, incluindo a parte correspondente ao anel externo, é de 3.197m^2 . Figuras 4.1.1 a 4.1.11.

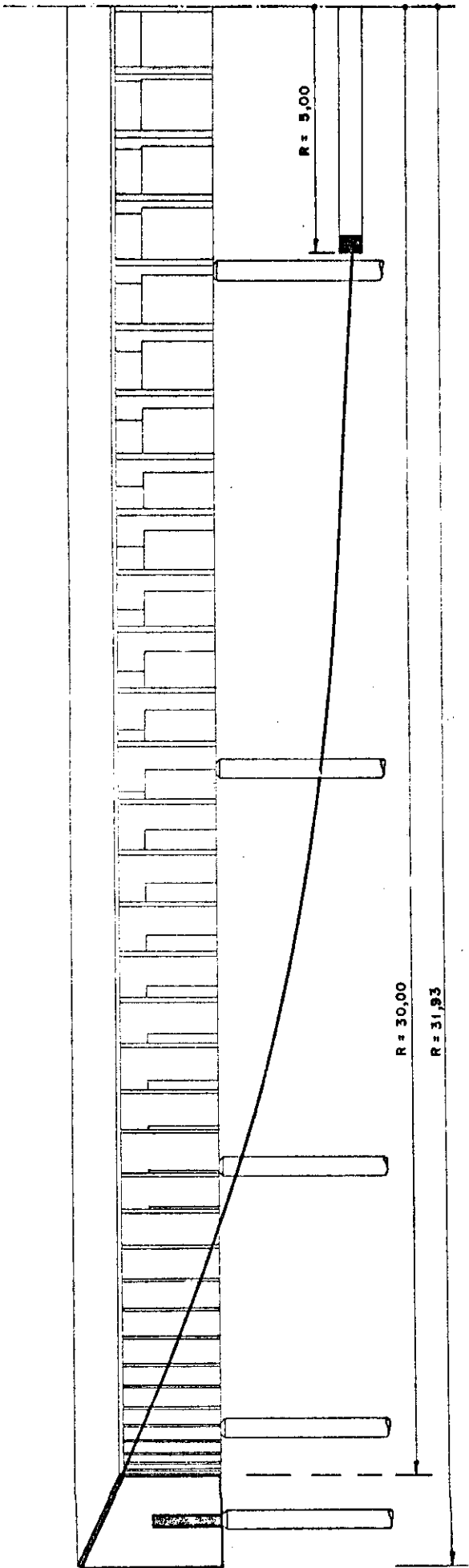


Fig. 4.1.1 - Meio corte diametral (med. em m)

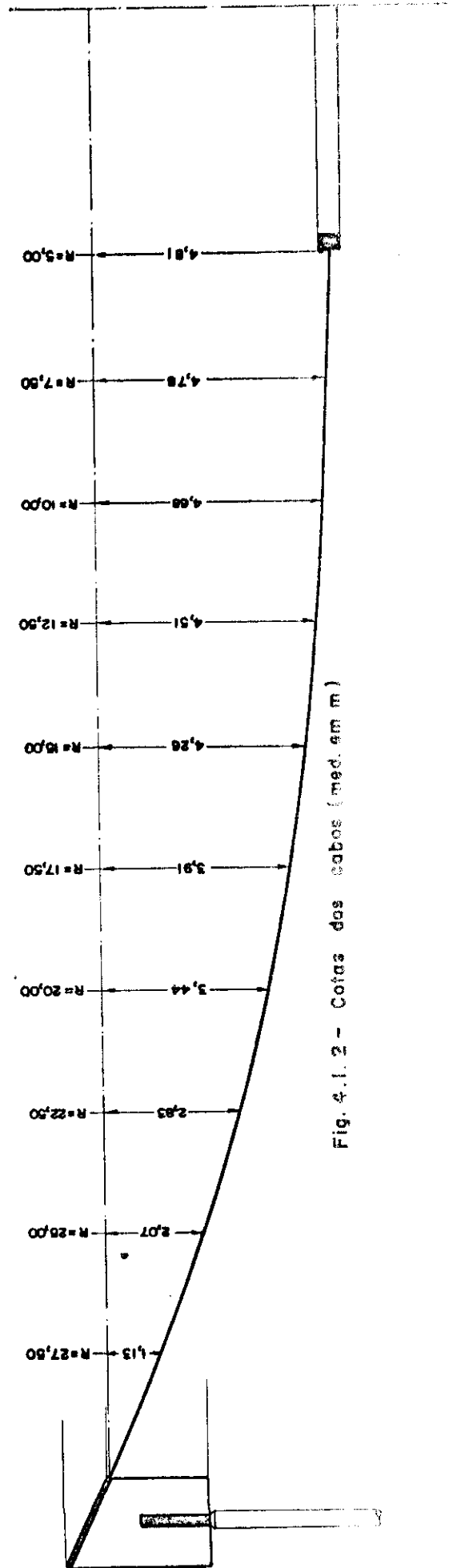


Fig. 4.1.2 - Cotas dos cabos (med. em m)

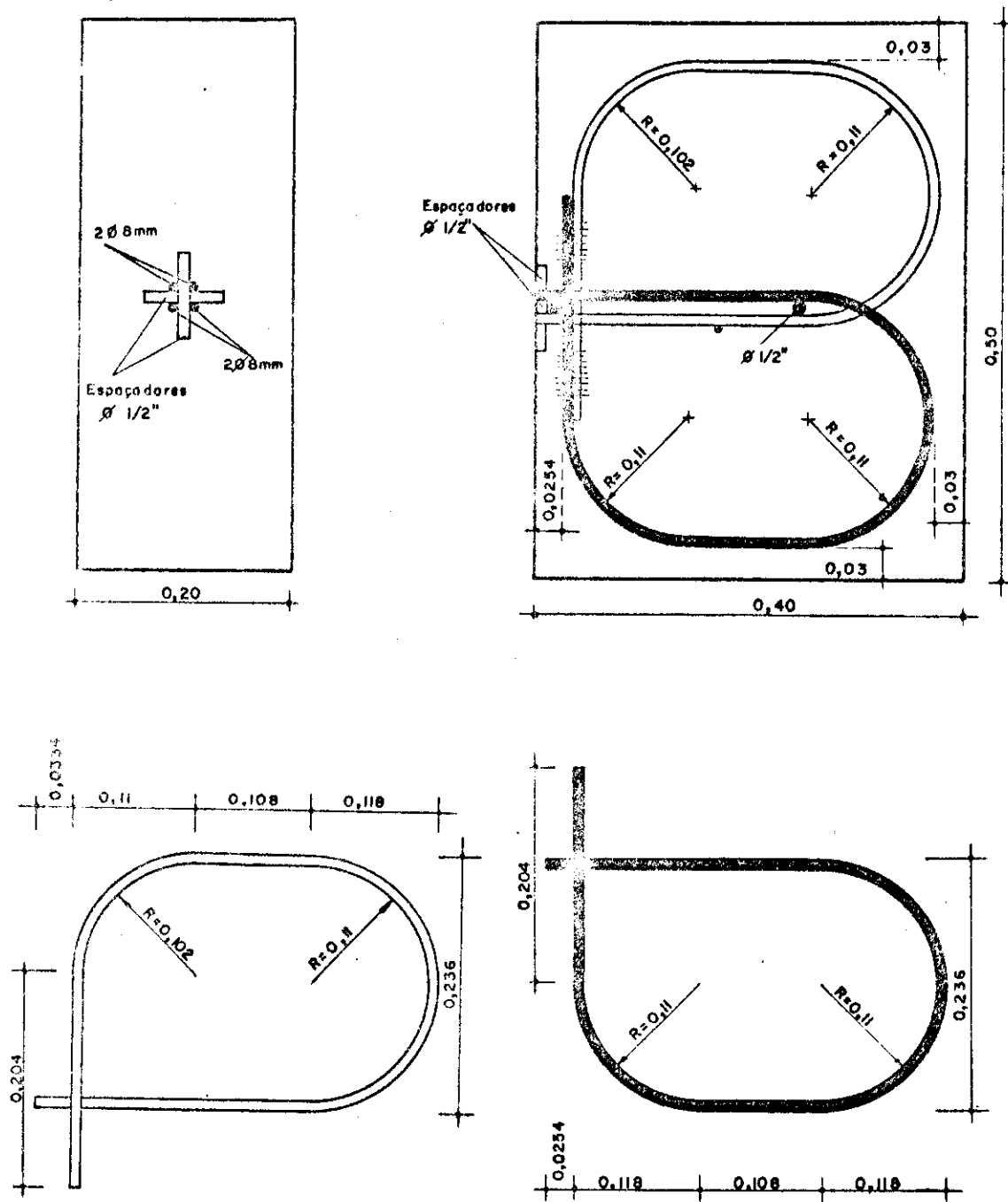


Fig. 4.1.3 - Detalhe da ancoragem dos cabos nos blocos (med. em m)

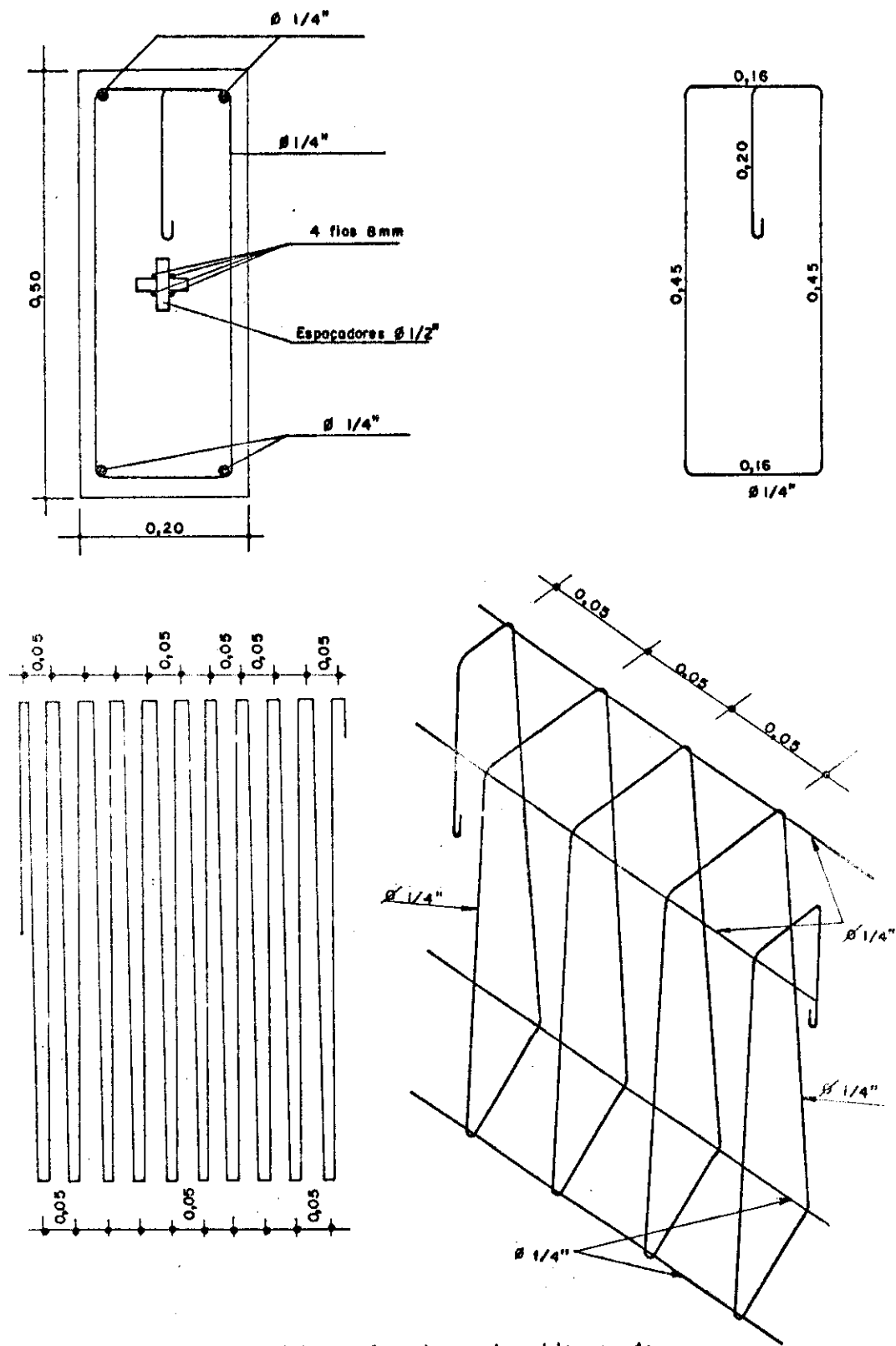


Fig. 4.1.4 - Armadura dos blocos do anel interno (med. em m)

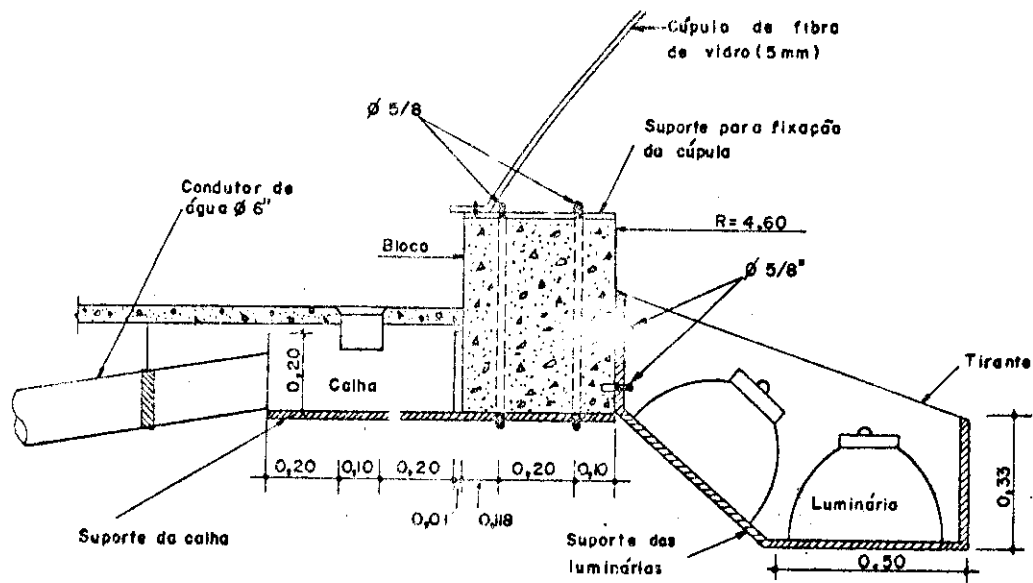


Fig. 4.1.5- Fixação da calha, cúpula e luminárias (med. em m)

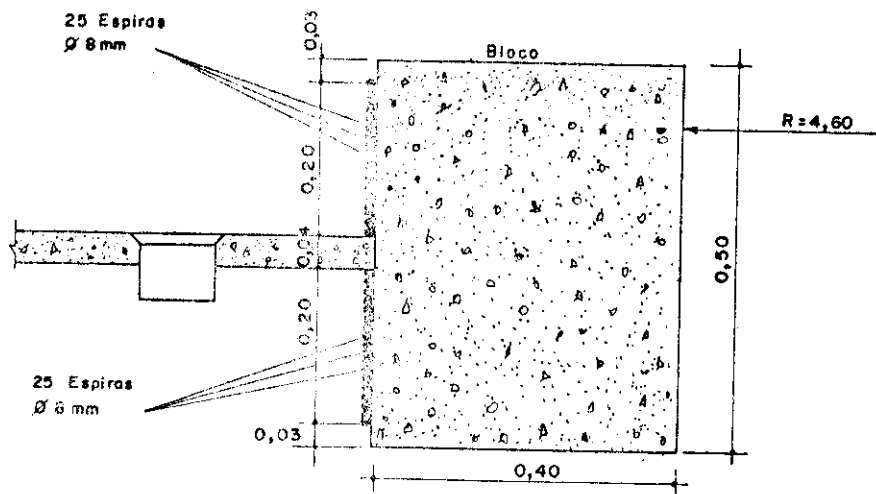


Fig. 4.1.6 - Cintamento dos blocos (med. em m)

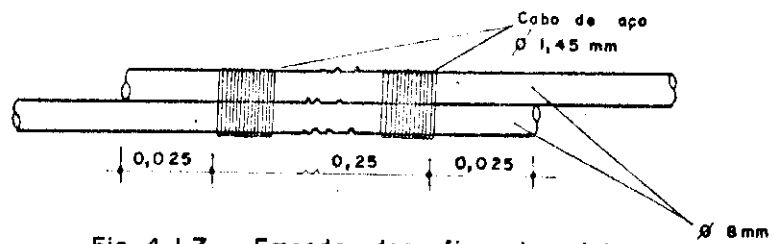


Fig. 4.1.7 - Emenda dos fios do cintamento (med. em m)

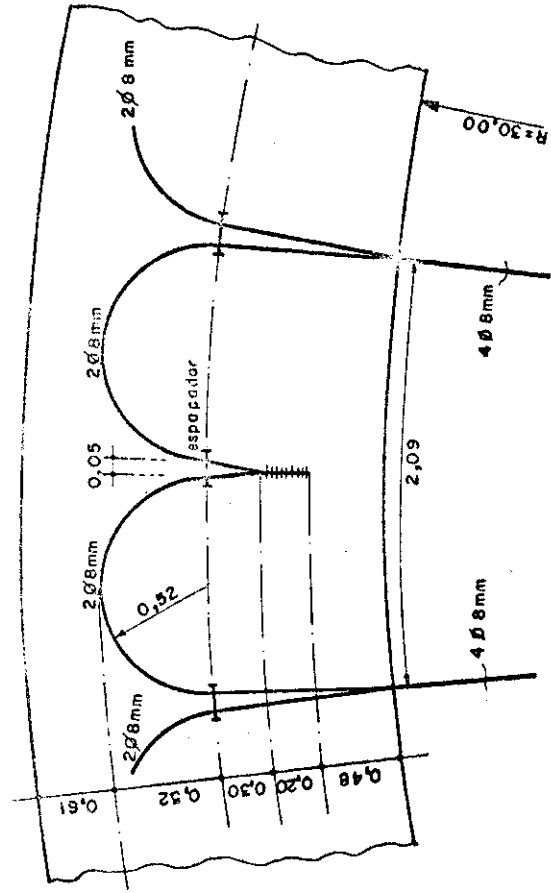


Fig. 4.1.9 - Ancoragem dos cabos no anel externo (med. em m)

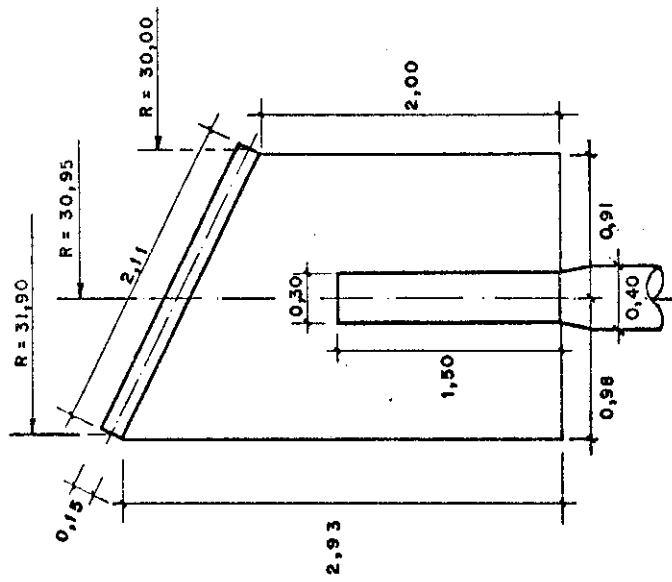


Fig. 4.1.8 - Seção transversal do anel externo (med. em m)

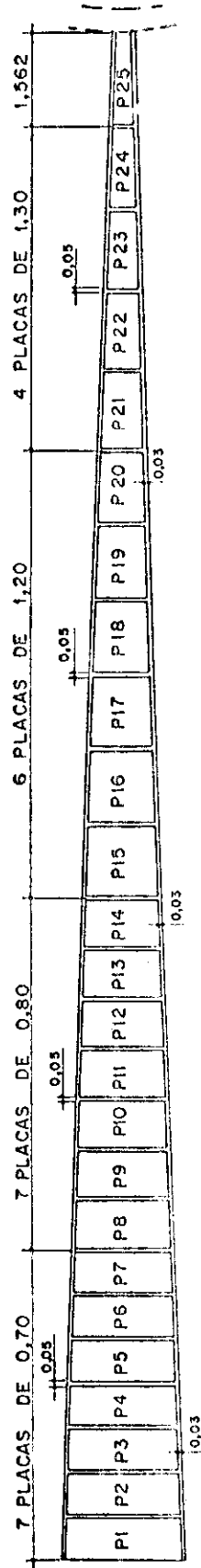
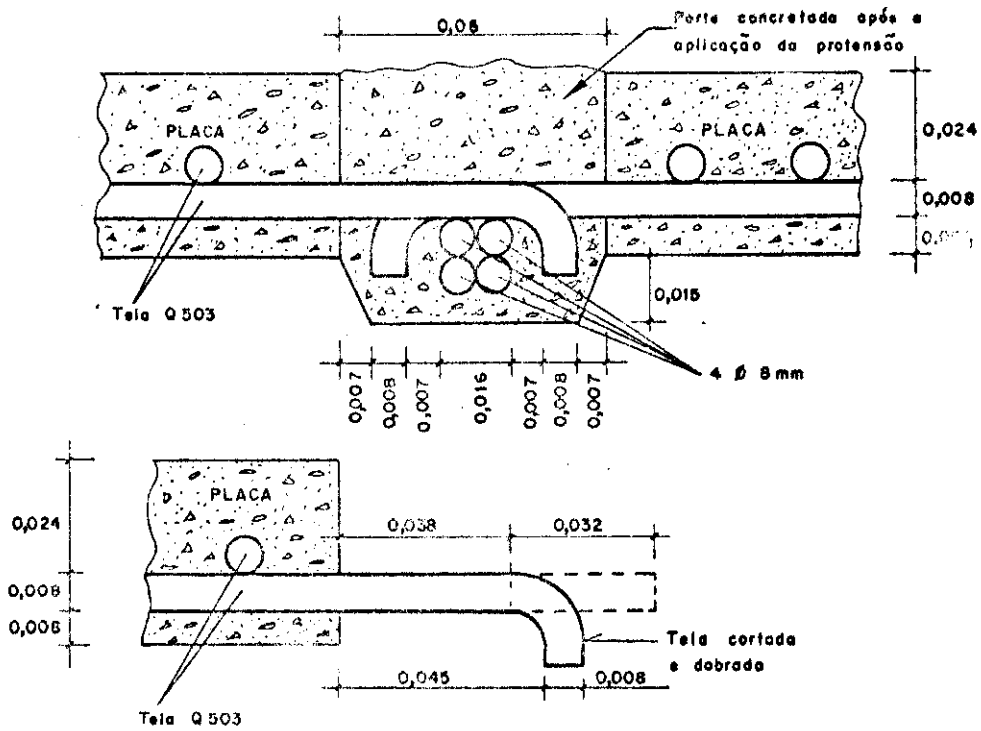


Fig. 4.1.10 - Disposição das placas sobre os cabos (med. em m)



DIMENSÕES DAS PLACAS (m)			
PLACA	a	b	c
P1	0,70	2,034	1,990
P2	0,70	1,987	1,942
P3	0,70	1,939	1,894
P4	0,70	1,891	1,841
P5	0,70	1,843	1,797
P6	0,70	1,794	1,745
P7	0,70	1,744	1,698
P8	0,80	1,695	1,642
P9	0,80	1,638	1,585
P10	0,80	1,582	1,528
P11	0,80	1,486	1,470
P12	0,80	1,467	1,413
P13	0,80	1,409	1,355
P14	0,80	1,352	1,297
P15	1,20	1,293	1,211
P16	1,20	1,208	1,125
P17	1,20	1,122	1,038
P18	1,20	1,035	1,012
P19	1,20	0,948	0,865
P20	1,20	0,862	0,772
P21	1,30	0,775	0,684
P22	1,30	0,681	0,590
P23	1,30	0,586	0,496
P24	1,30	0,492	0,402
P25	1,566	0,398	0,289

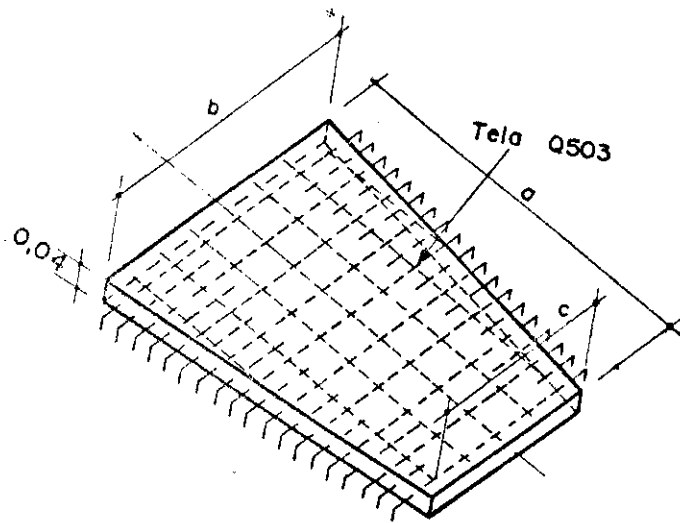


Fig. 4.1.11 - Detalhes da junta e das placas (med. em m)

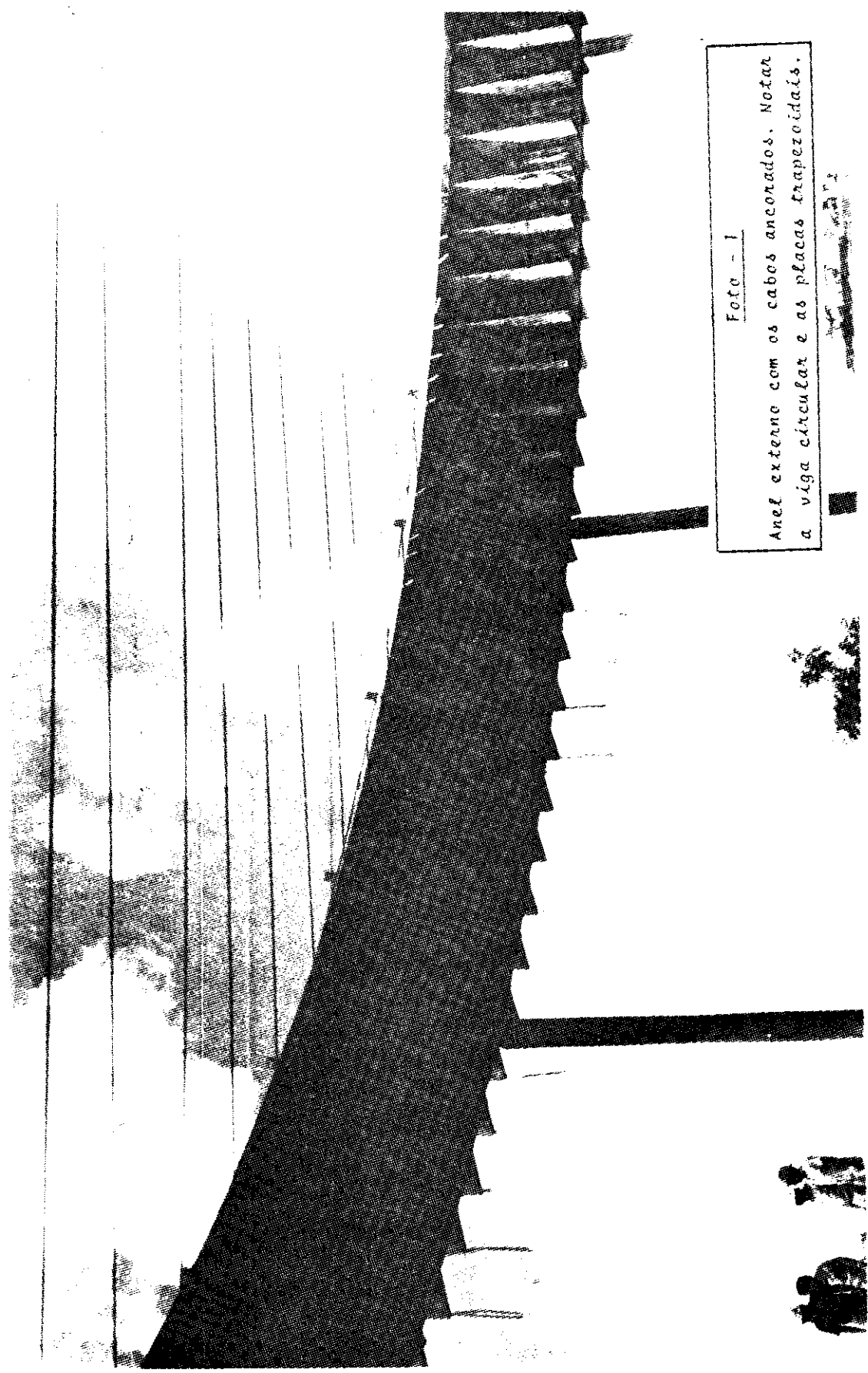
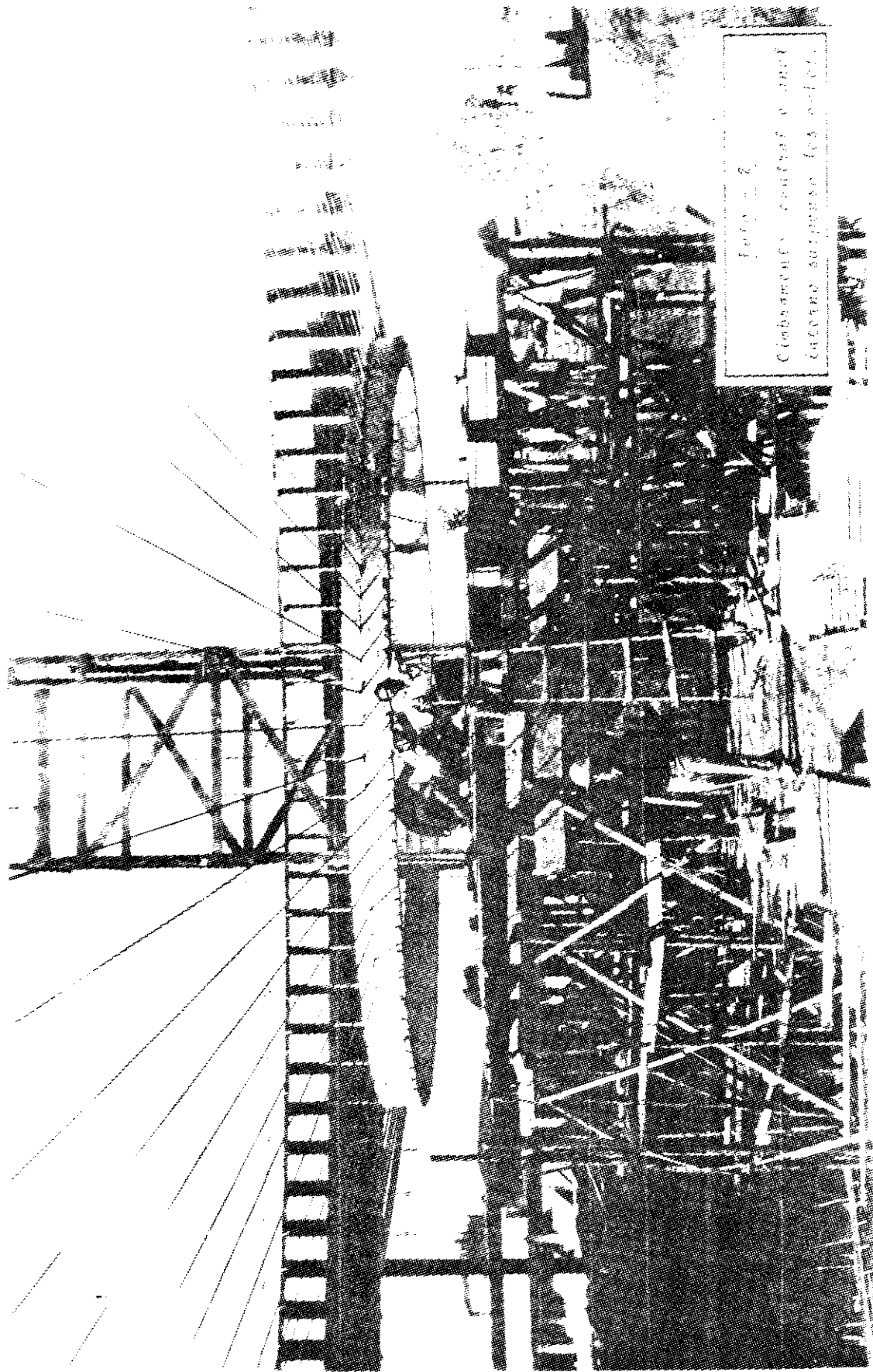


Foto - 1
Anel externo com os cabos ancorados. Notar a viga circular e as placas trapezoidais.



รูปที่ ๒
Componente de la estructura
de la suspensión del puente

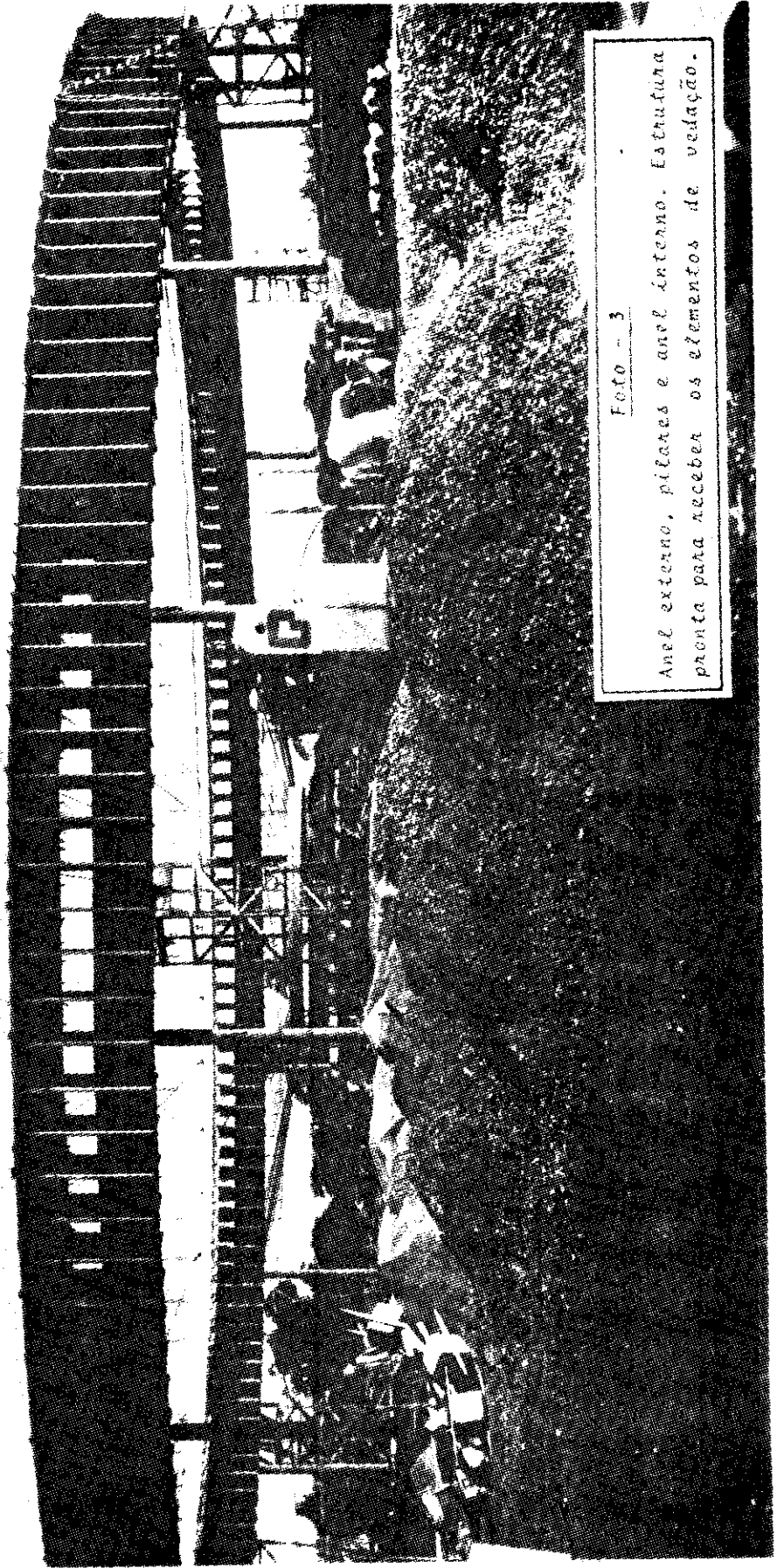


Foto - 3

Anel externo, pilares e anel interno. Estrutura pronta para receber os elementos de vedação.

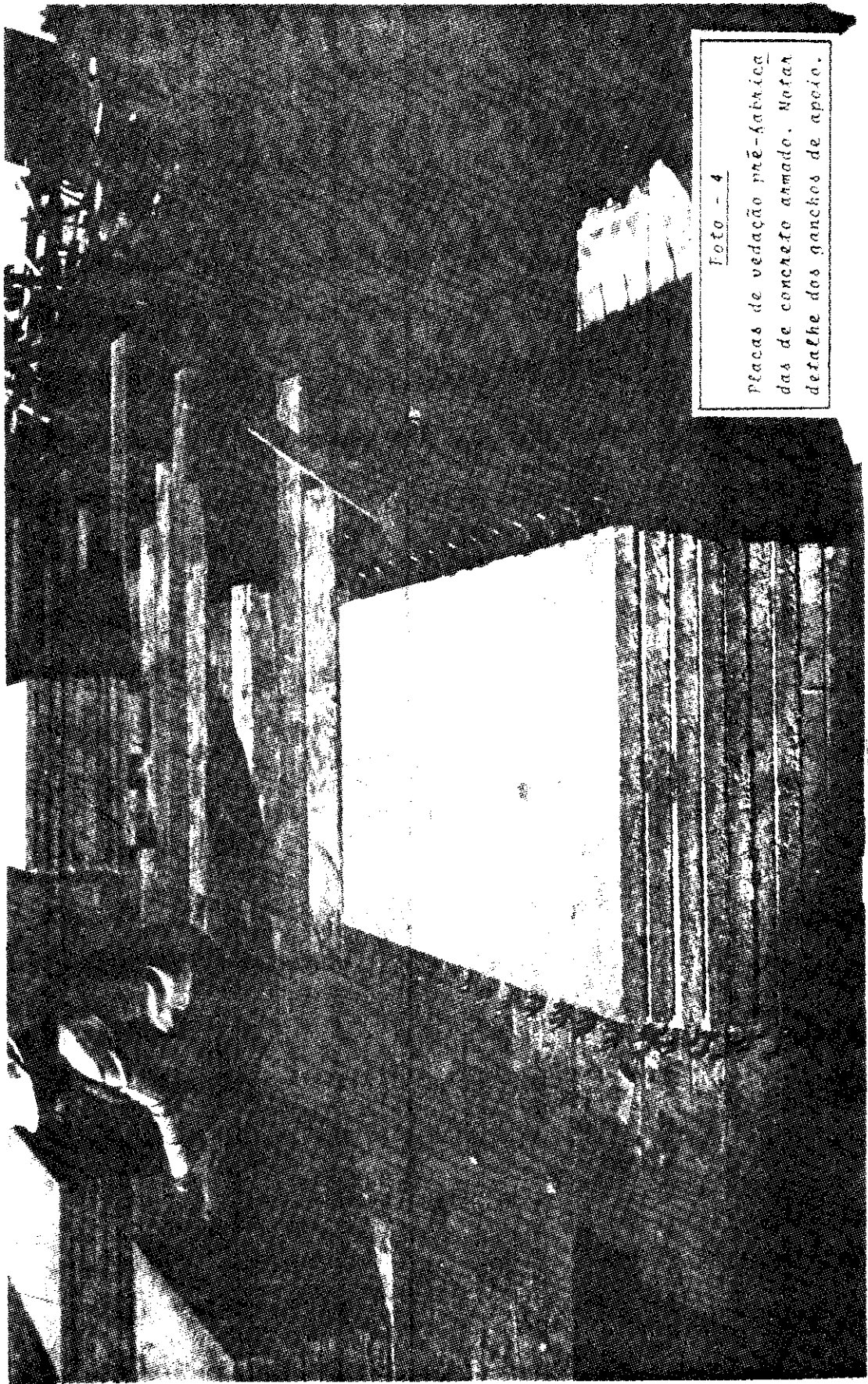


Foto - 4
Placas de vedação pré-fabricada
das de concreto armado. Nota
detalhe dos ganchos de apoio.

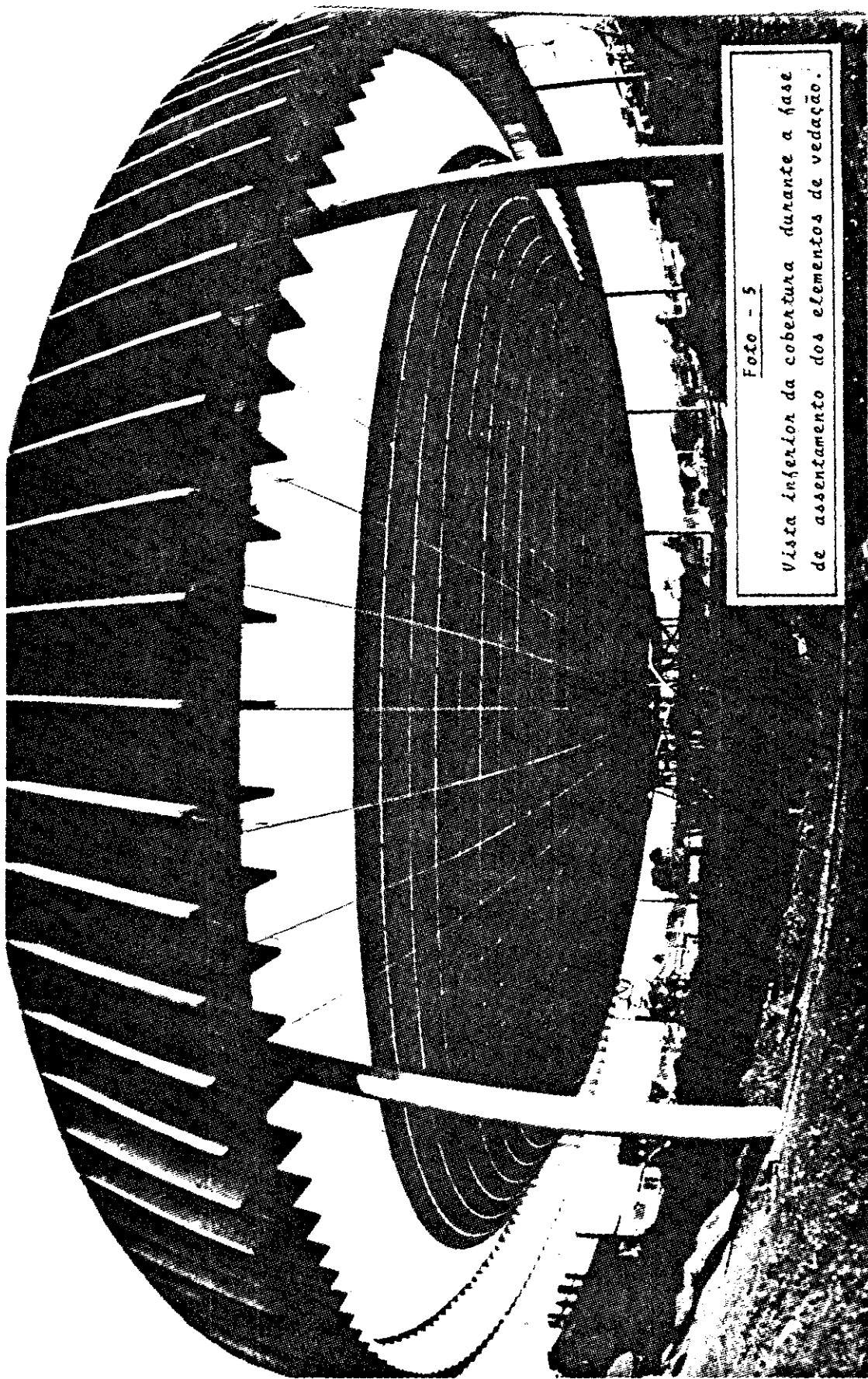


Foto - 5

Vista inferior da cobertura durante a fase de assentamento dos elementos de vedação.

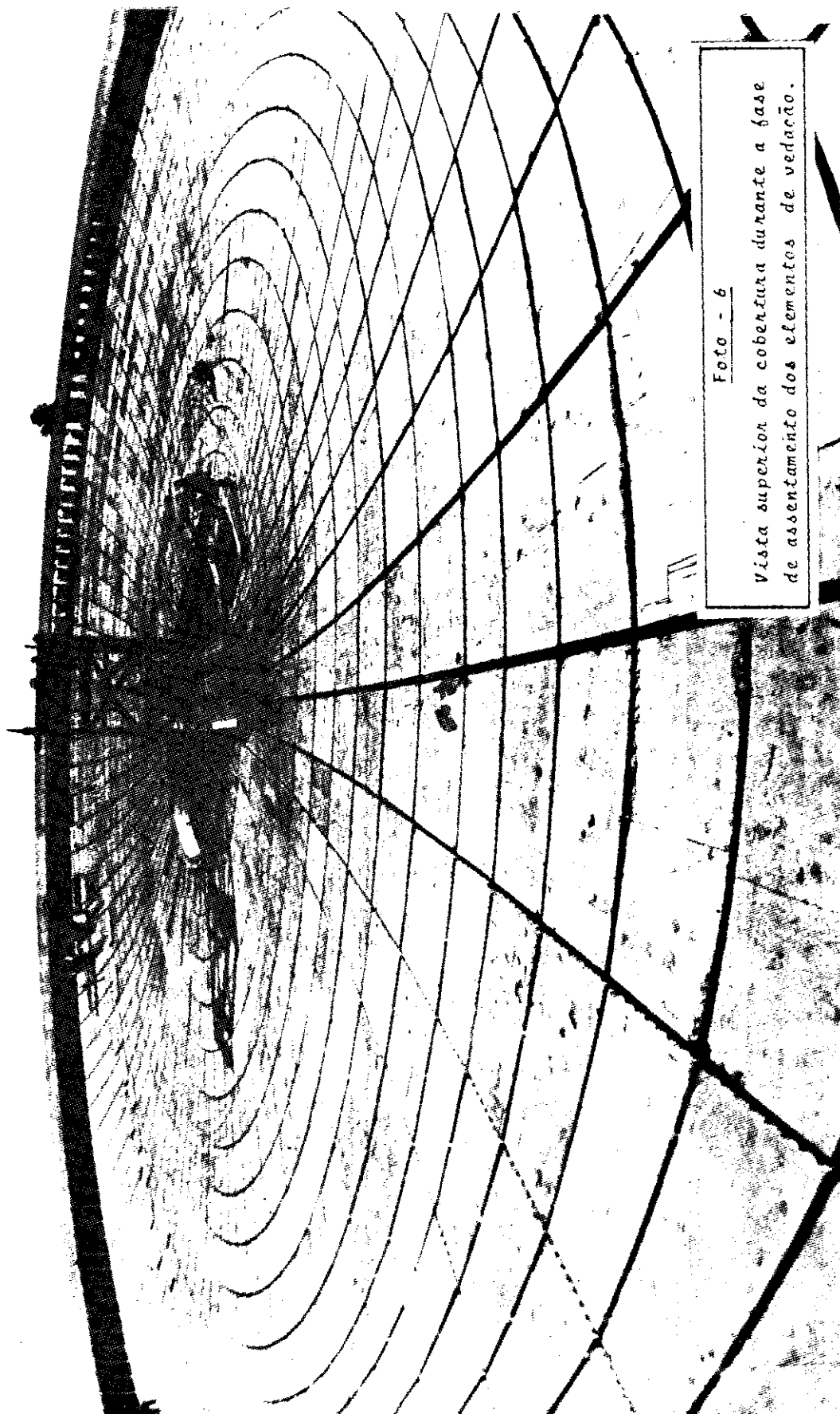


Foto - 6

Vista superior da cobertura durante a fase de assentamento dos elementos de vedação.



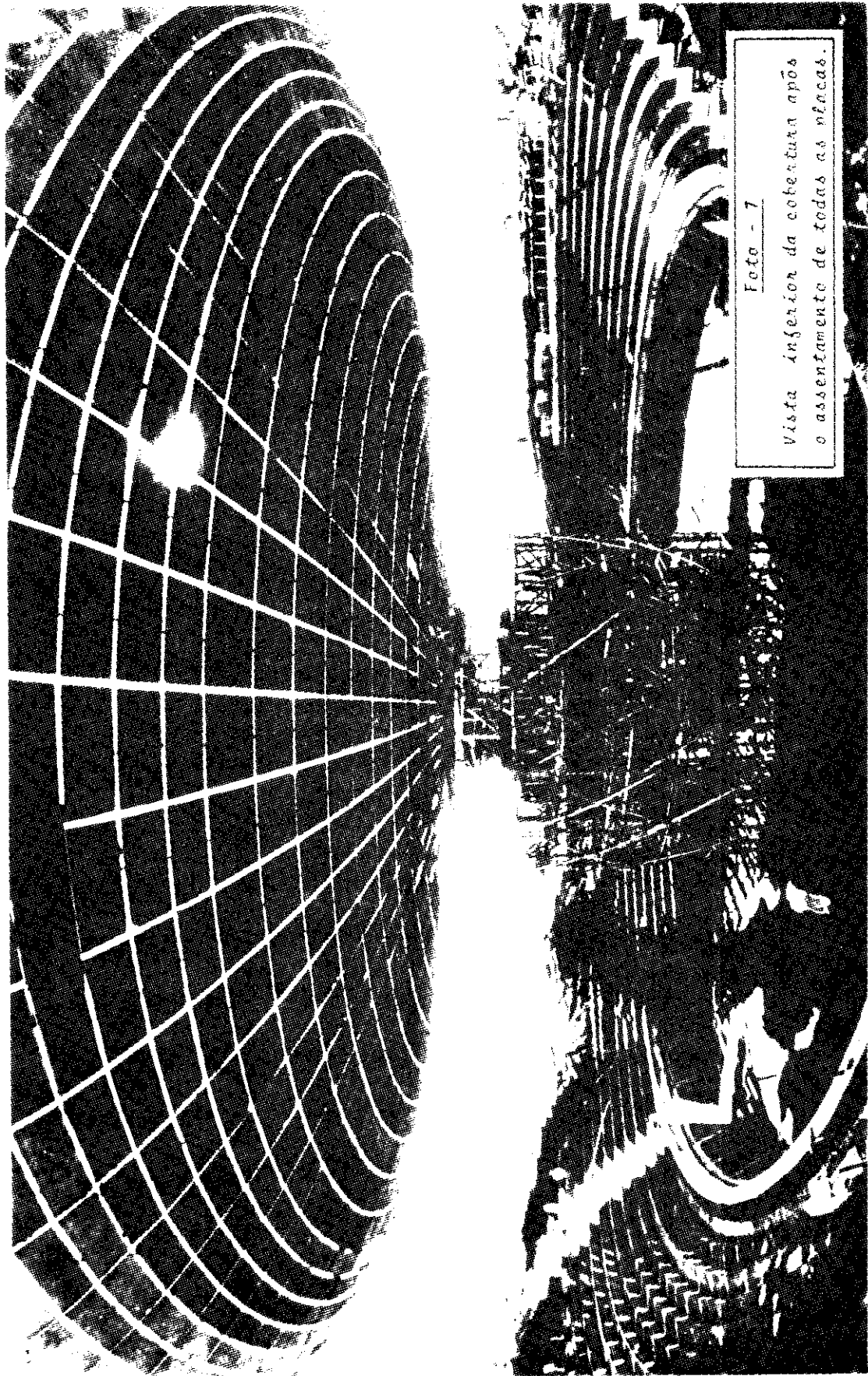


Foto - 7
Vista inferior da cobertura após
o assentamento de todas as pilhas.



Foto - 8
Cobertura com a caixa de protensão.

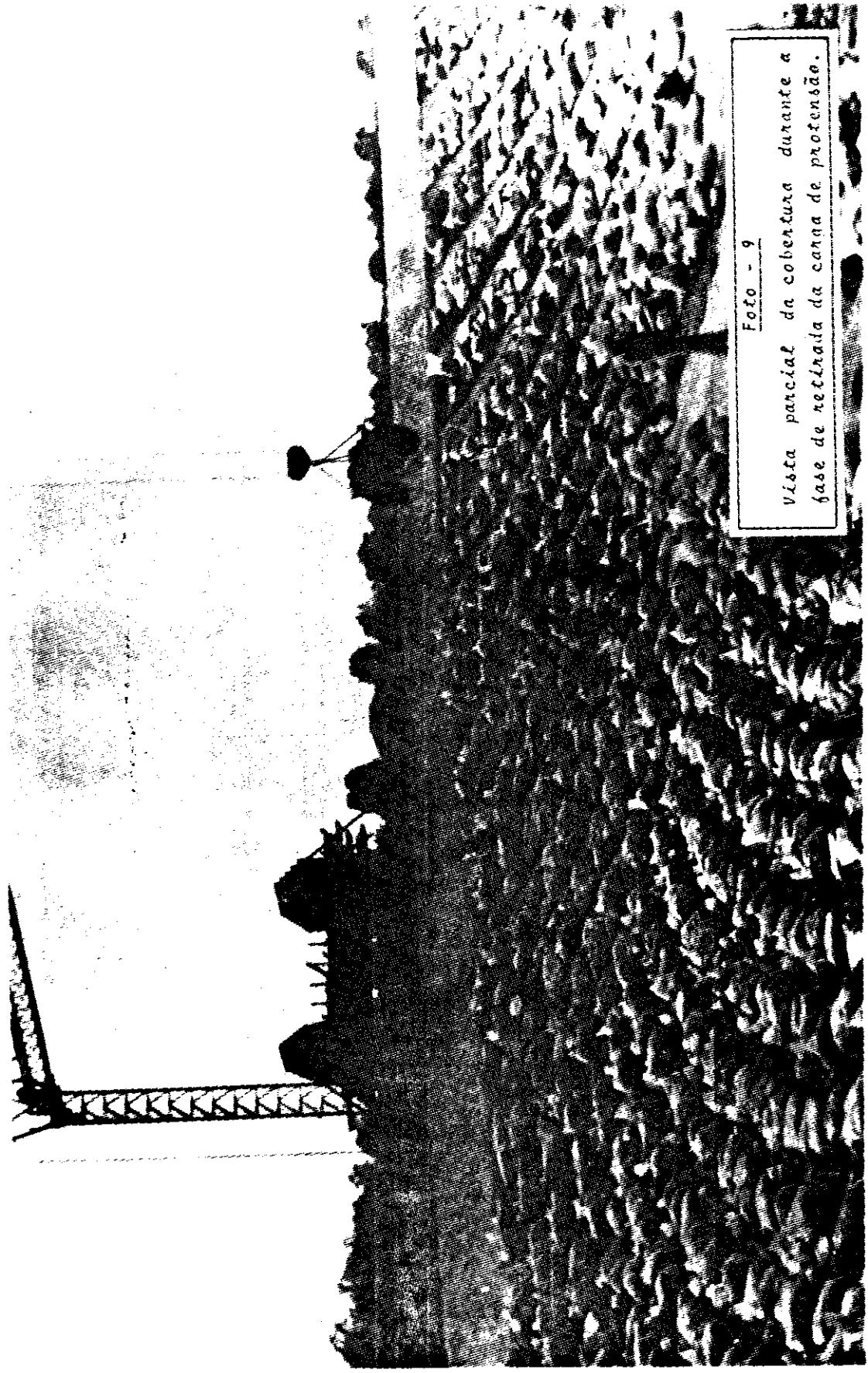


Foto - 9
Vista parcial da cobertura durante a fase de retirada da canna de profensão.

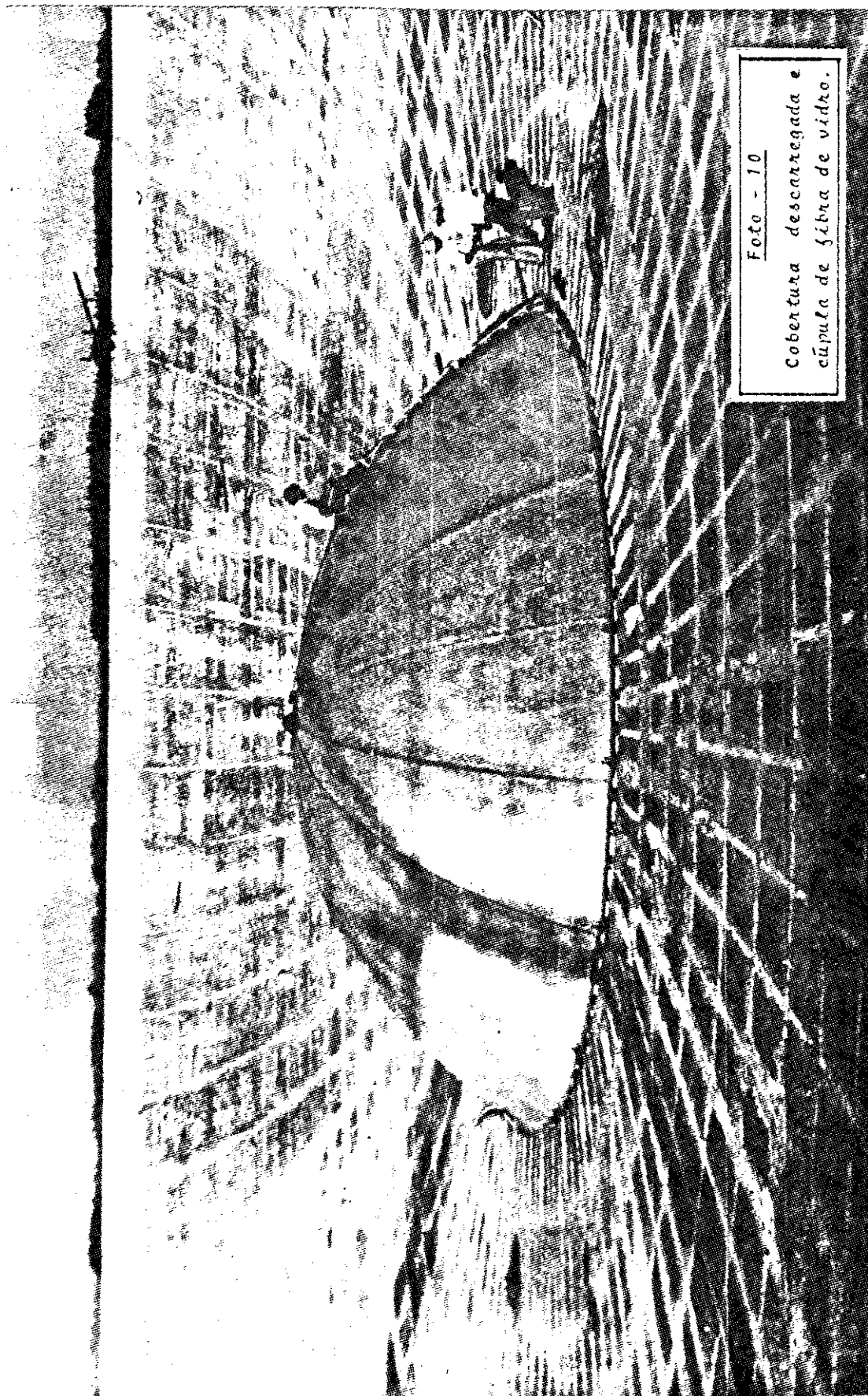


Foto - 10
Cobertura descarnegada e
cúpula de fibra de vidro.

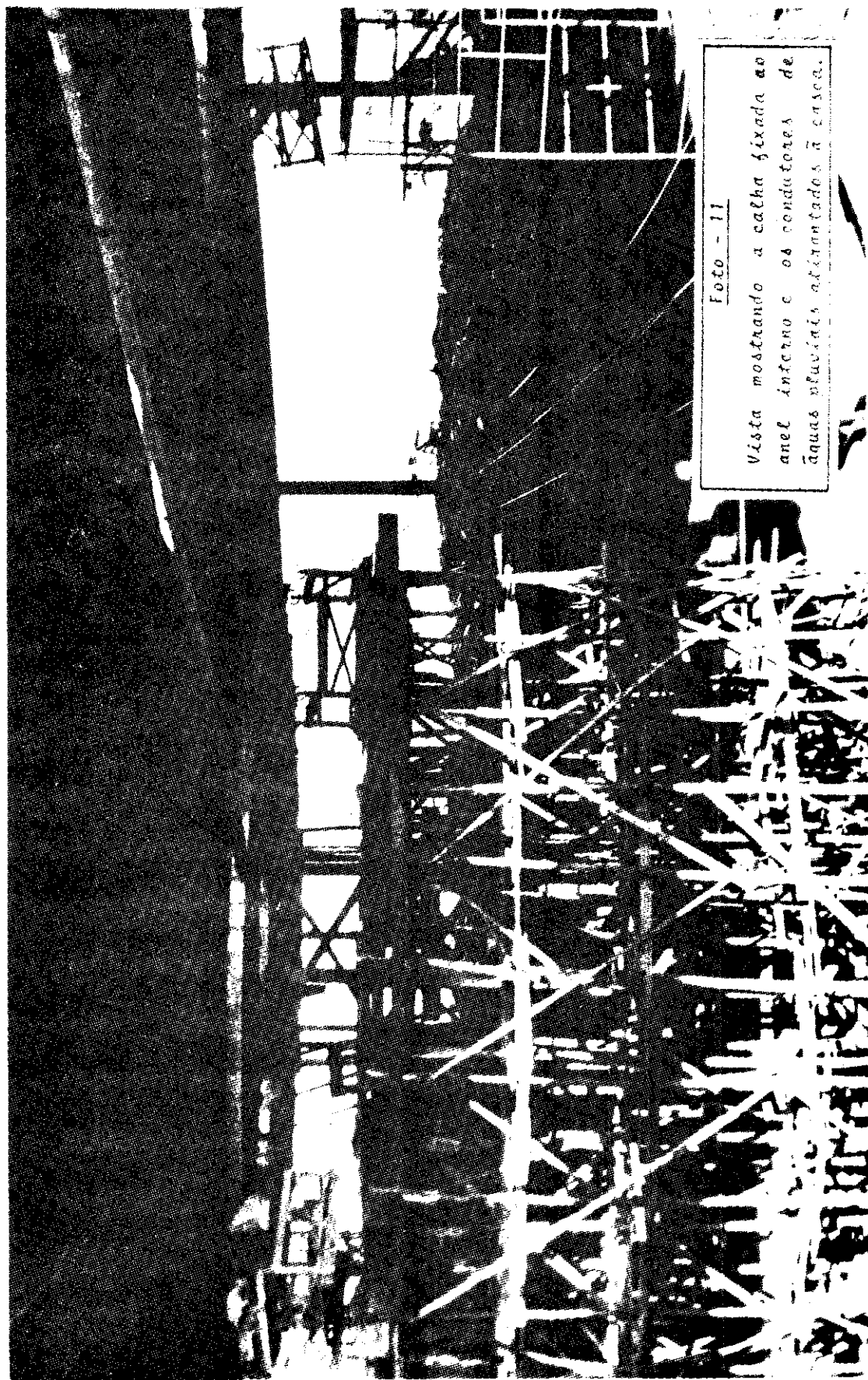


Foto - 11
Vista mostrando a calha fixada ao
anel interno e os condutores de
águas pluviais alinhados à casa.

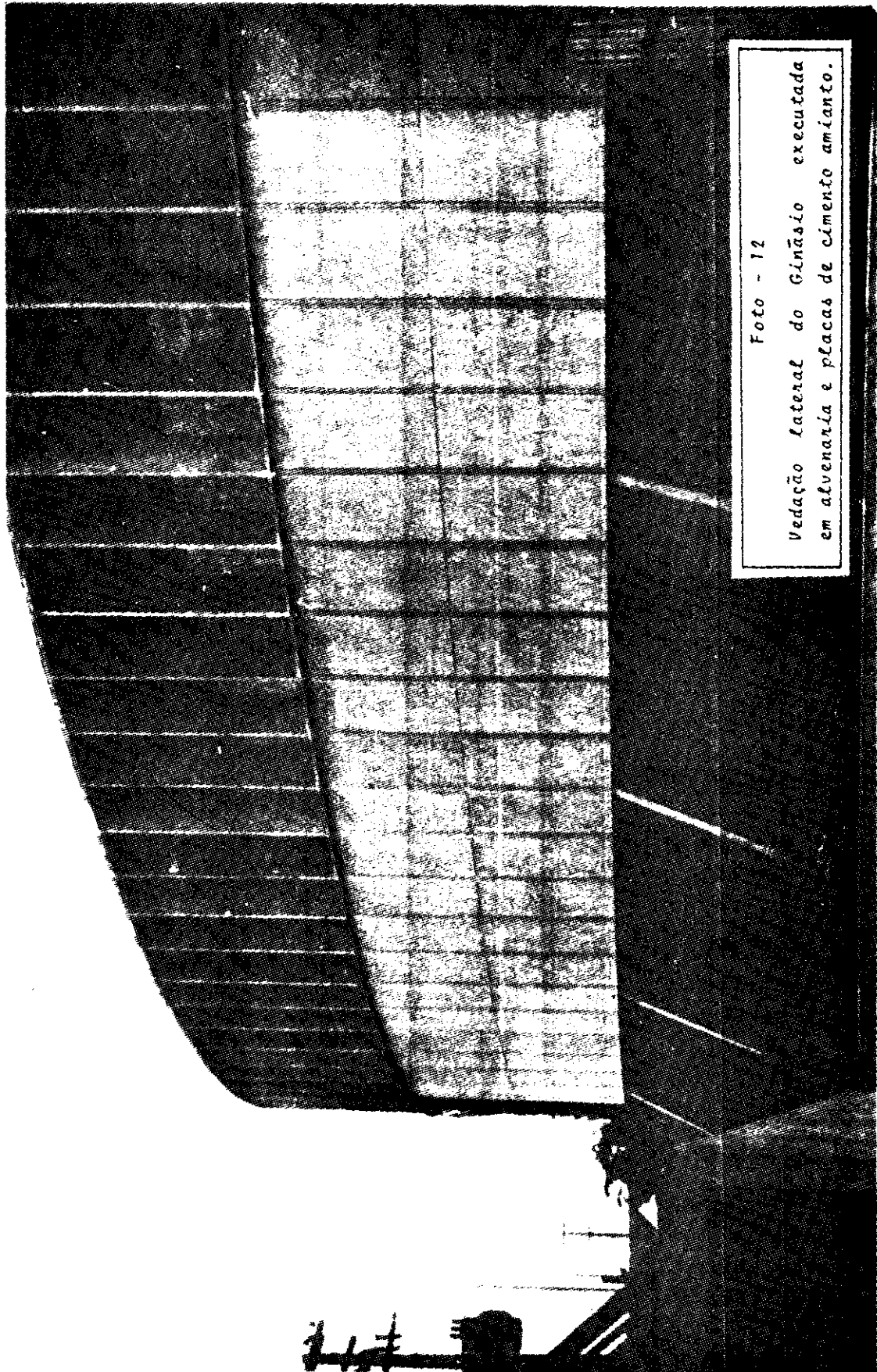


Foto - 12
Vedação Lateral do Ginásio executada
em alvenaria e placas de cimento amianto.

4.2. CÁLCULO DA COBERTURA COM CARREGAMENTO (g,P)

Considere-se para o dimensionamento dos cabos ra diais, uma carga distribuída de 246 kgf/m^2 , correspondente à carga de protensão (100 kgf/m^2), ao peso próprio das plcas (96 kgf/m^2) e a uma carga acidental de 50 kgf/m^2 . Sendo de 14476 kgf o peso do concreto do anel interno e admitindo para cintamento 55 espiras com diâmetro de 8mm , resulta, para cada cabo, uma carga concentrada de 168 kgf .

Sendo $r=30,00\text{m}$, $r_0=5,00\text{m}$, $n=90$, $g=246 \text{ kgf/m}^2$, $P=168 \text{ kgf}$ e adotando flecha final de $4,75\text{m}$, das expressões (2.1.12), (2.1.16) e (2.1.17) resultam a força horizontal H , a tração no arranque superior T_A e a tração no arranque inferior T_B :

$$H = 16.207 \text{ kgf}$$

$$T_A = 18.062 \text{ kgf}$$

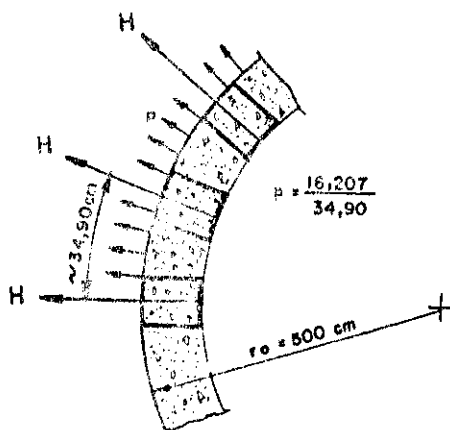
$$T_B = 16.208 \text{ kgf}$$

Em função da tração T_A , calcula-se a secção transversal dos cabos portantes. Usando o aço CP-125/140, resulta:

$$F = \frac{3 \times 18062}{2 \times 14000} = 1,94 \text{ cm}^2 \rightarrow 4\phi 8\text{mm}$$

Para calcular o cintamento dos blocos do anel interno admite-se H distribuído em $34,90\text{cm}$ (comprimento do arco de circunferência correspondente às entradas dos cabos nos blocos) resultando, em função do raio do anel e do tipo de aço (CP-125/140), a seguinte área:

$$S_f = \left(\frac{16.207}{34,90} \times 500 \right) \times \frac{3}{2 \times 14.000} = 24,88 \text{ cm}^2 \rightarrow 50\phi 8\text{mm}$$



Com a secção transversal conhecida, é necessário que se determine o comprimento do cabo de modo a se ter, com carga de 196 kgf/m^2 (peso próprio das placas + protensão), flecha final próxima da estipulada. Admitindo-se, para essa nova situação de carga, flecha inicial de $4,40\text{m}$, da expressão (2.1.12) tira-se:

$$H_0 = 14.102 \text{ kgf}$$

Introduzindo os valores das (2.3.31) e (2.3.36) em (2.3.39), recai-se em uma equação de segundo grau que permite, em função de variação de flecha Δf , determinar o valor final da força horizontal H . Considerando, para o cabo, módulo de elasticidade de $2.100.000 \text{ kgf/cm}^2$ e adotando após algumas tentativas, $\Delta_f = 32,49\text{cm}$, chega-se a

$$H = 13.159 \text{ kgf}$$

$$\Delta_f = 32,49 \text{ cm}$$

que podem ser considerados valores finais para a posição deformada do cabo.

Nestas condições, introduzindo H_0 e H na expressão (2.1.23) e considerando apenas dois termos da série, resultam, respectivamente, o comprimento do cabo a ser adotado em projeto, o comprimento final e, por diferença, o alongamento do cabo:

$s_0 = 25,571m$

$s = 25,656m$

$\Delta s = 0,085m$

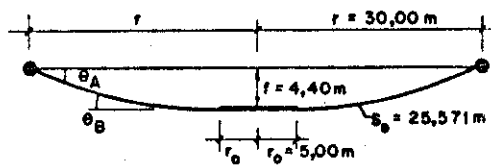
Com os mesmos valores de H_0 e H em (2.1.16), (2.1.17), (2.1.18) e (2.1.19), determinam-se:

$T_A = 15.466 \text{ kgf}$

$\theta_A = 24,24^\circ$

$T_B = 14.103 \text{ kgf}$

$\theta_B = 0,683^\circ$

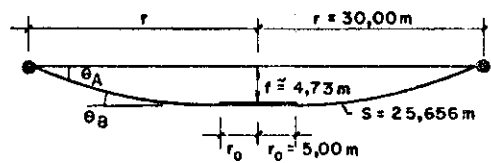


$T_A = 14.625 \text{ kgf}$

$\theta_A = 25,87^\circ$

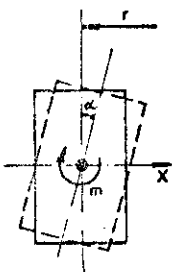
$T_B = 13.160 \text{ kgf}$

$\theta_B = 0,731^\circ$



Para estimar a influência da variação do vão livre do cabo, em consequência da deformação dos anéis, é necessário calcular o deslocamento horizontal dos arranques. Desprezando os efeitos das cargas verticais (anel como viga circular) e das placas radiais, o deslocamento do ponto A (arranque superior do cabo), para o esforço unitário indicado na figura abaixo, é dado por:

$$\xi_A = (e - d \sin \theta_A) \frac{r_m^2}{EJ_x} \cdot e + \frac{r_m^2}{ES}$$

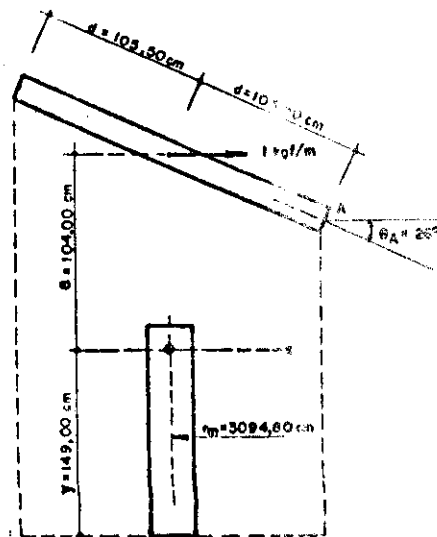


$$\alpha = \frac{m r^2}{EJ_x}$$

$J_x = J_y = 70674500,00 \text{ cm}^4$

$E = 257000 \text{ kgf/cm}^2$

$S = 7665 \text{ cm}^2$



Admitindo que o esforço atuante seja dado por $nH/2\pi r_m$ e tomando $H=13.159$ kgf, resulta após efetuar as operações indicadas:

$$\xi_A = 0,50\text{cm}$$

Procedendo de forma análoga para o anel interno e considerando o raio do cintamento igual a 5,00m, resulta com $S_f=25,15\text{cm}^2$:

$$\xi_B = \frac{r_0^2}{ES_f} \cdot \frac{nH}{2\pi r_0} = 1,78\text{cm}$$

Considerando agora $r=29,995\text{m}$, $r_0=5,0178\text{m}$ e $s=25,656\text{m}$ calcula-se com (2.1.23) o novo valor de H e com as expressões (2.1.12), (2.1.16), (2.1.17), (2.1.18) e (2.1.19) determinam-se a flecha, as trações e as inclinações do cabo para o vão reduzido.

$$H = 12.931 \text{ kgf}$$

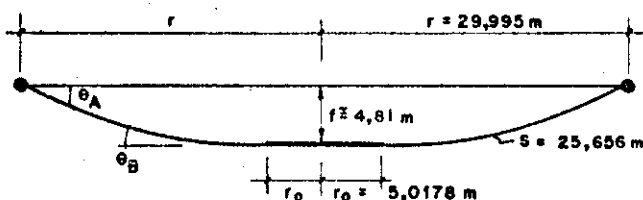
$$f = 4,81 \text{ m}$$

$$T_A = 14.421 \text{ kgf}$$

$$\theta_A = 26,28^\circ$$

$$T_B = 12.932 \text{ kgf}$$

$$\theta_B = 0,74435^\circ$$



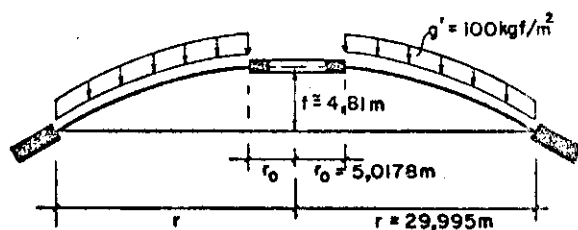
Com o meridiano definido por esta última configuração de equilíbrio, pode-se passar ao cálculo da casca de revolução articulada nos anéis e solicitada pela carga $g' = 100 \text{ kgf/m}^2$, correspondente à protensão retirada após o endurecimento do concreto colocado nas juntas.

É preciso observar que o meridiano da casca poderá sofrer alterações em consequência das ações térmicas. Uma primeira ação deste tipo corresponde a uma situação de grande diferença de temperatura média entre a época de confecção dos cabos e a época de execução da casca (colocação

das placas e fechamento das juntas). Neste caso, a definição do meridiano será feita a partir do comprimento do cabo correspondente à época de construção da casca. Isto se fará sem dificuldades, ao passo que seria praticamente impossível, como em geral em qualquer outra estrutura, considerar as alterações do meridiano causadas pelas oscilações de temperatura que vão ocorrendo durante a construção da estrutura. Por outro lado, convém verificar os acréscimos de tensão no cabo ocasionados por quedas de temperatura. No caso presente, o aumento de tensão é insignificante mesmo quando se considera, para a configuração final de equilíbrio, a carga de 246 kgf/m^2 e queda de temperatura de 30° .

Com $P=168 \text{ kgf}$, $H=12.931 \text{ kgf}$, $g=196 \text{ kgf/m}^2$, $r_0 = 5.0178\text{m}$ e $n=90$, determina-se o valor da expressão (3.2.7), que levado em (3.2.24) permite determinar os valores de K ($P'=0$) com os quais, através de (3.2.22) e (3.2.23), calculam-se os esforços da casca em regime de membrana. Os resultados obtidos encontram-se tabelados a seguir.

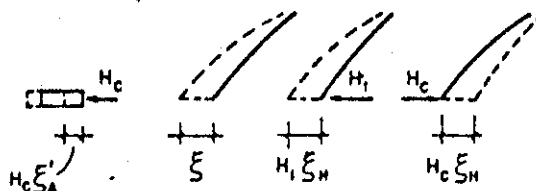
x (m)	N_{ϕ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)
5,0178	0	-38622
6,0000	-4819	-22248
7,0000	-6651	-13879
8,0000	-7421	-9240
9,0000	-7300	-6462
10,0000	-7126	-4695
12,5000	-6390	-2390
15,0000	-5652	-1376
17,5000	-5033	-862
20,0000	-4536	-574
22,5000	-4142	-399
25,0000	-3834	-288
26,0000	-3731	-255
27,0000	-3639	-226
28,0000	-3556	-202
29,0000	-3484	-180
29,9950	-3420	-162



Para determinar as perturbações do regime de membrana nas proximidades da borda externa, usa-se a aproximação da casca esférica equivalente resolvida pelo método de Geckeler.

O esforço atuante na articulação casca-anel é determinado pela equação de compatibilidade de deslocamentos

$$H_C \xi'_A = \xi + H_1 \xi_H - H_C \xi_H$$



onde ξ é dado por (3.2.25) e ξ_H por (3.4.13).

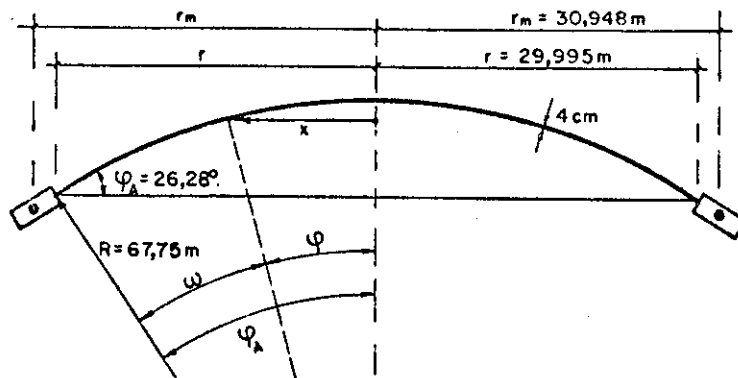
Sendo, por outro lado, $H_1 = N_\phi \cos \phi_A$ (N_ϕ de membrana), considerando para o concreto $\nu = 1/6$ e tomando, como anteriormente,

$$\xi'_A = (e-d \sin \theta_A) \frac{r_m^2}{EJ_x} \cdot e + \frac{r_m^2}{ES}$$

resulta, após efetuar as operações:

$$H_C = 2907 \text{ kgf/m}$$

Sendo a casca articulada na borda, da equação (3.4.5) tira-se, com $\omega=0$, $\psi=3\pi/4$ e com $H=N_\phi \cos \phi_A - H_C$ na equação (3.4.4), o valor de C. Com ψ e C definem-se as oito funções (3.4.1) a (3.4.8). Os valores dos esforços são tabelados a seguir.

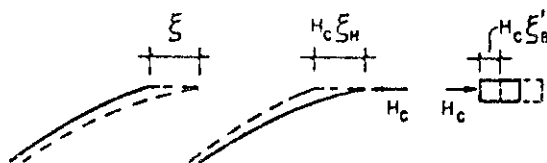


x (m)	φ (graus)	ω (graus)	Q_φ (kgf/m)	N_φ (kgf/m)	N_θ (kgf/m)	M_φ (kgfm/m)	M_θ (kgfm/m)
29,995	26,280	0	-71	+143	+7591	0	+2
29,000	25,344	0,936	+4	-8	+2012	+28	+1
28,000	24,441	1,869	+14	-31	-240	+15	0
27,000	23,486	2,794	+7	-16	-479	+3	0
26,000	22,567	3,713	+1	-3	-219	-1	0
25,000	21,654	4,625	0	-1	-31	-1	0

Para determinar as perturbações do regime de membrana na região da borda interna, usa-se o método exposto em Gravina para a resolução da casca esférica equivalente.

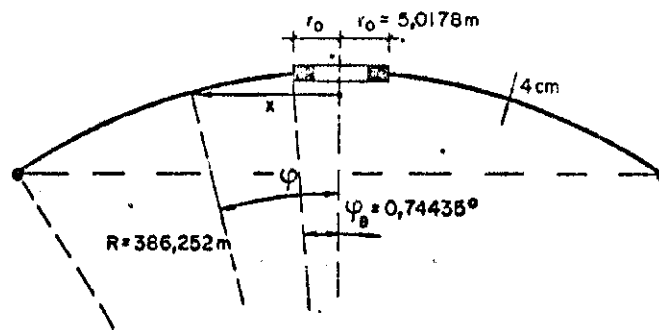
A equação de compatibilidade é

$$\xi - H_c \xi_H = H_c \xi'_B$$



onde ξ é dado por (3.2.25) com $N_\phi=0$ e $r=5,0178\text{m}$, ξ_H é obtido com (3.4.36) e ξ'_B é calculado por $r'_m{}^2/ES$ com $r'_m=4,8178\text{m}$ e $S=0,20\text{m}^2$. Os valores de Z_3 , Z_4 , Z'_3 e Z'_4 são obtidos por (3.4.26) a (3.4.29) com t dado por (3.4.31) e calculado com $\phi=\phi_B$. Determinando-se os valores das expressões (3.4.33) e (3.4.34) e multiplicando-os por H_c , que no caso é igual 8.430 kgf/m , determinam-se os valores de C e D , com os quais calculam-se os esforços.

Os valores de Z_3 , Z_4 , Z'_3 e Z'_4 e dos esforços encontrados estão tabelados a seguir.

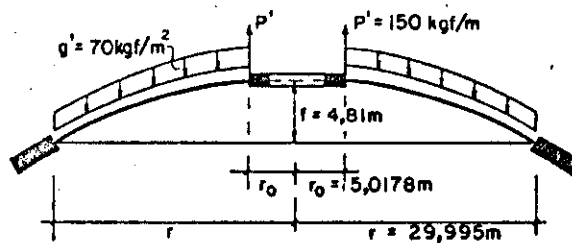


x (m)	φ (graus)	t	Z ₃	Z ₄	Z' ₃	Z' ₄
5,0178	0,74435	2,35937	+0,08463	+0,04205	-0,10672	+0,02262
6,0000	0,89006	2,82123	+0,04405	+0,04460	-0,07030	-0,00752
7,0000	1,03842	3,29149	+0,01794	+0,03775	-0,01218	-0,01935
8,0000	1,18679	3,76178	+0,00305	+0,02796	-0,02244	-0,02129
9,0000	1,33516	4,23207	-0,00426	+0,01858	-0,00970	-0,01827
10,0000	1,48354	4,70239	-0,00690	+0,01101	-0,00223	-0,01381

x (m)	Q (kgf/m)	N _φ (kgf/m)	N _θ (kgf/m)	M _φ (kgfm/m)	M _θ (kgfm/m)
5,0178	+110	-8430	+29417	0	-73
6,0000	+51	-3267	+15558	+60	-44
7,0000	+16	-895	+9657	+76	-26
8,0000	-2	+12	+4620	+70	-10
9,0000	-9	+407	+1632	+55	-3
10,0000	-11	+439	+9	+40	+1

Para determinar os esforços gerados pelas águas pluviais e pelos carregamentos aplicados na borda interna da casca, considerem-se as cargas de 30 kgf/m^2 (lâmina de água, 3cm de espessura, suposta constante em toda a casca) e de 150 kgf/m (cúpula + calha repleta + luminárias). Com procedimento perfeitamente análogo ao empregado anteriormente e observando que neste caso tem-se $g' = 70 \text{ kgf/m}^2$ e $P' = 150 \text{ kgf/m}$, resultam os esforços de membrana tabelados a seguir.

x (m)	N_{ϕ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)
5,0178	+11457	-50838
6,0000	+3329	-29212
7,0000	-456	-18223
8,0000	-2262	-12133
9,0000	-3142	-8488
10,0000	-3555	-6165
12,5000	-3740	-5138
15,0000	-3532	-1807
17,5000	-3255	-1132
20,0000	-2994	-753
22,5000	-2772	-524
25,0000	-2589	-377
26,0000	-2527	-344
27,0000	-2471	-296
28,0000	-2421	-264
29,0000	-2376	-236
29,9950	-2337	-211

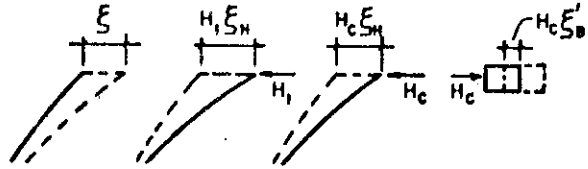


Para calcular os esforços gerados pelas perturbações da borda externa usa-se caminhamento análogo ao anterior, observando porém os novos esforços N_{ϕ} e N_{θ} em regime de membrana. Com estes esforços determinam-se ξ e H_{γ} (ξ_A' e ξ_H são os mesmos), obtendo-se da equação de compatibilidade $H_C = 1985\text{ kgf/m}$. Com $H = N_{\phi} \cos \phi_A - H_C$ determina-se C ($\psi = 3\pi/4$) e portanto os esforços. O quadro que segue mostra os resultados obtidos.

x (m)	φ (graus)	ω (graus)	Q_{ϕ} (kgf/m)	N_{ϕ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{ϕ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
29,995	26,280	0	-49	+99	+5260	0	+1
29,000	25,344	0,936	+3	-6	+1394	+19	+1
28,000	24,441	1,869	+10	-21	-166	+10	0
27,000	23,486	2,794	+5	-11	-332	+2	0
26,000	22,567	3,713	+1	-2	-152	-1	0
25,000	21,654	4,626	0	+1	-25	-1	0

A equação de compatibilidade relativa à borda interna é dada por

$$\xi - H_1 \xi_H - H_c \xi_H = H_c \xi_B'$$



onde ξ_H e ξ_B' assumem os mesmos valores utilizados anteriormente, $H_1 = N_\phi \cos \phi_B$, e ξ é dado em função dos esforços de membrana N_ϕ e N_θ .

Adicionando-se H_1 com H_c , tirado da equação de compatibilidade ($H_c = 2301$ kgf), e multiplicando o resultado obtido pelos valores das expressões (3.4.33) e (3.4.34), obtêm-se C e D que permitem o cálculo dos esforços procurados. Os resultados obtidos estão tabelados a seguir.

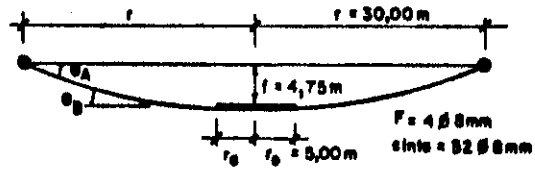
x (m)	Q (kgf/m)	N_{ϕ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{ϕ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
5,0178	+180	-13847	+48323	0	-120
6,0000	+83	-5367	+25606	+98	-72
7,0000	+27	-1471	+15863	+124	-37
8,0000	-3	+149	+7589	+115	-16
9,0000	-16	+669	+2680	+91	-4
10,0000	-19	+721	+14	+65	+1

Considere-se agora uma carga de 460 kgf/m aplicada no anel interno ou mesmo sobre os elementos de vedação a ele adjacentes. Esse novo carregamento, que pode ser aplicado de maneira relativamente simples, confere aos cabos radiais uma inclinação maior no arranque inferior, o que conduz a uma casca menos abatida e portanto com esforços de flexão de menor intensidade nas regiões da borda interna.

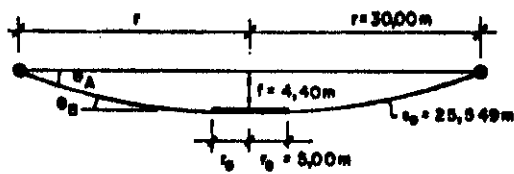
Com procedimento perfeitamente análogo ao anterior, e observando que neste caso tem-se $P=328$ kgf, resulta após efetuar o estudo do cabo:

4.31

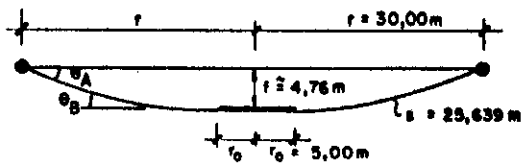
$H = 17.045 \text{ kgf}$
 $T_A = 18.881 \text{ kgf}$
 $T_B = 17.048 \text{ kgf}$



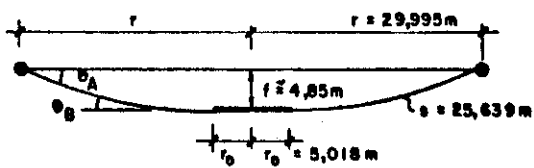
$H = 15.008 \text{ kgf}$
 $\theta_A = 23,23^\circ$
 $T_A = 16.357 \text{ kgf}$
 $\theta_B = 1,25^\circ$
 $T_B = 15.012 \text{ kgf}$



$H = 13.913 \text{ kgf}$
 $\theta_A = 25,15^\circ$
 $T_A = 15.370 \text{ kgf}$
 $\theta_B = 1,35^\circ$
 $T_B = 13.917 \text{ kgf}$

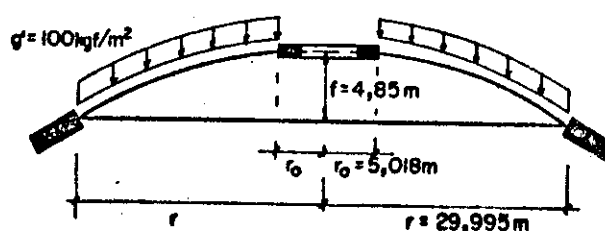


$H = 13.646 \text{ kgf}$
 $\theta_A = 25,60^\circ$
 $T_A = 15.132 \text{ kgf}$
 $\theta_B = 1,37692^\circ$
 $T_B = 13.650 \text{ kgf}$

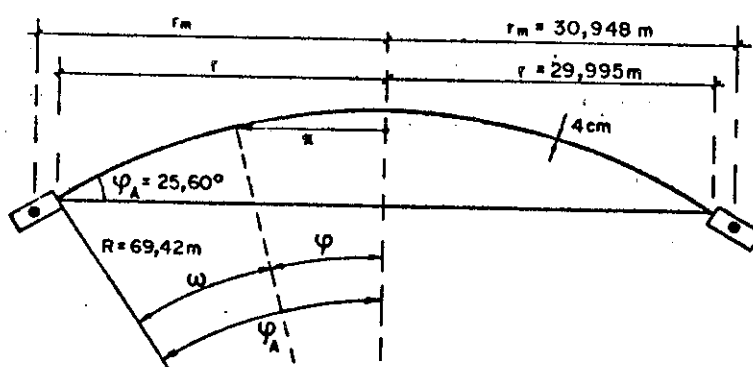


Com o meridiano da casca definido, e sendo $g' = 100 \text{ kgf/m}^2$, resultam os esforços de membrana:

x (m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)
5,018	0	-20876
6,000	-3063	-16614
7,000	-4733	-12994
8,000	-5584	-10158
9,000	-5971	-7988
10,000	-6091	-6259
12,500	-5860	-3734
15,000	-5406	-2326
17,500	-4938	-1533
20,000	-4524	-1055
22,500	-4174	-752
25,000	-3895	-552
26,000	-3799	-491
27,000	-3711	-438
28,000	-3633	-392
29,000	-3562	-352
29,995	-3500	-317



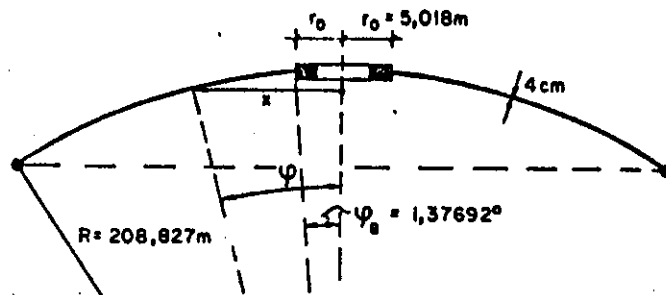
Os esforços de flexão gerados pelo anel externo encontram-se tabelados a seguir.



x (m)	φ (graus)	ω (graus)	Q_{φ} (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
29,995	25,600	0	-73	+152	+7923	0	+2
29,000	24,692	0,908	+3	-7	+2174	+30	+1
28,000	23,787	1,813	+15	-34	+214	+16	0
27,000	22,888	2,712	+8	-18	-509	+4	0
26,000	21,995	3,605	+2	-4	-247	-1	0
25,500	21,108	4,492	0	+1	-47	-1	0

4.33

Os coeficientes Z_3 , Z_4 , Z_3' e Z_4' e os esforços de flexão que ocorrem nas proximidades da borda interna, estão tabelados a seguir.

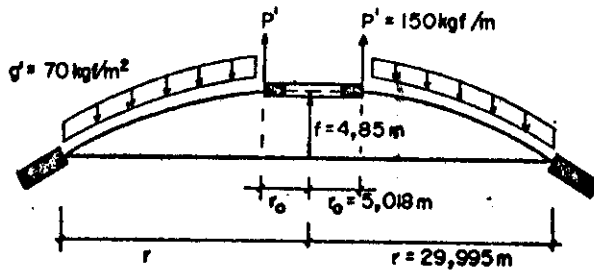


x (m)	φ (graus)	t	Z_3	Z_4	Z_3'	Z_4'
5,018	1,37692	3,20913	+0,02159	+0,03929	-0,04647	-0,01820
6,000	1,64644	3,83729	+0,00145	+0,02637	-0,01997	-0,02090
7,000	1,92094	4,47706	-0,00607	+0,01437	-0,00526	-0,01602
8,000	2,19594	5,11694	-0,00700	+0,00609	+0,00123	-0,00938
9,000	2,47009	5,75694	-0,00529	+0,00123	+0,00321	-0,00498
10,000	2,74474	6,39706	-0,00242	-0,00025	+0,00282	-0,00282

x (m)	Q (kgf/m)	N_φ (kgf/m)	N_θ (kgf/m)	M_φ (kgfm/m)	M_θ (kgfm/m)
5,018	+87	-3619	+16923	0	-34
6,000	+28	-979	+8681	+44	-16
7,000	0	0	+3580	+47	-5
8,000	-10	+251	+836	+35	0
9,000	-10	+241	-387	+21	+1
10,000	-7	+155	-1090	+7	+1

Quando se consideram $g' = 70\text{kgf/m}^2$ e $P' = 150\text{kgf/m}$, carregamentos já salientados, chega-se aos esforços de membrana e de flexão tabelados a seguir.

x (m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)
5,018	+6242	-21169
6,000	+2116	-16846
7,000	-323	-13176
8,000	-1744	-10300
9,000	-2570	-8099
10,000	-3039	-6427
12,500	-3429	-3782
15,000	-3378	-2358
17,500	-3193	-1554
20,000	-2987	-1070
22,500	-2795	-762
25,000	-2630	-559
26,000	-2573	-497
27,000	-2520	-443
28,000	-2473	-397
29,000	-2430	-356
29,995	-2392	-321



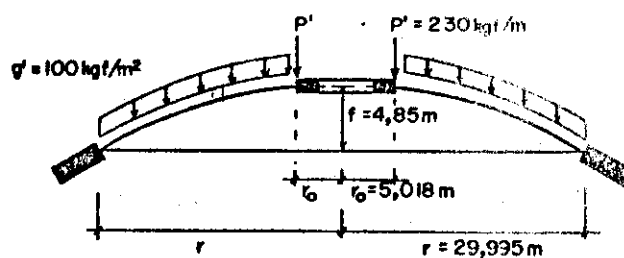
x (m)	φ (graus)	ω (graus)	Q_{φ} (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
29,995	25,600	0	-51	+107	+5573	0	+1
29,000	24,692	0,908	+2	-5	+1529	+21	+1
28,000	23,787	1,813	+10	-24	-151	+11	0
27,000	22,888	2,712	+5	-13	-358	+3	0
26,000	21,995	3,605	+1	-3	-174	-1	0
25,000	21,108	4,492	0	+1	-34	-1	0

x (m)	Q (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
5,018	+136	-5678	+26546	0	-53
6,000	+44	-1536	+13617	+70	-25
7,000	0	0	+5569	+74	-8
8,000	-15	+393	+1313	+56	0
9,000	-16	+379	-607	+33	+2
10,000	-11	+243	-1710	+10	+1

4.3. CÁLCULO DA COBERTURA COM CARREGAMENTO (g,P) E CARGA DE PROTENSÃO APLICADA NA BORDA INTERNA

Admita-se agora que a carga concentrada de 460 kgf/m possa ser retirada total ou parcialmente. Neste caso ter-se-á, além da protensão de 100 kgf/m² correspondente à carga distribuída, uma protensão aplicada à borda interna da casca. Retirando-se, por exemplo, metade da carga aplicada, chega-se aos esforços de membrana e de flexão tabelados a seguir.

x (m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)
5,018	-9572	-10825
6,000	-9594	-8615
7,000	-9318	-6738
8,000	-8903	-5267
9,000	-8438	-4142
10,000	-7969	-3287
12,500	-6892	-1943
15,000	-6029	-1207
17,500	-5301	-795
20,000	-4801	-548
22,500	-4375	-391
25,000	-4042	-287
26,000	-3930	-255
27,000	-3830	-228
28,000	-3740	-207
29,000	-3660	-184
29,995	-3589	-166

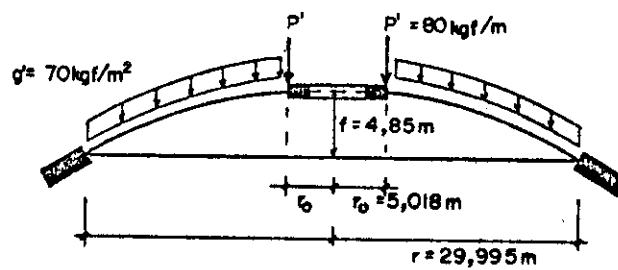


x (m)	φ (graus)	ω (graus)	Q_{φ} (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
29,995	25,600	0	-71	+153	+7983	0	+2
29,000	24,692	0,908	+3	-7	-2191	+30	+1
28,000	23,787	1,813	+15	-34	-216	+17	0
27,000	22,888	2,712	+8	-18	-513	+4	0
26,000	21,995	3,605	+1	-4	249	-1	0
25,000	21,108	4,492	+0	+1	-49	-1	0

x (m)	Q (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
5,018	+2	-65	+305	0	-1
6,000	0	-18	+156	+1	0
7,000	0	0	+64	+1	0
8,000	0	+5	+15	+1	0
9,000	0	4	7	0	0
10,000	0	+3	+20	0	0

Quando sobre a casca atuam as cargas de 30 kgf/m^2 e de 150 kgf/m , determinam-se os esforços seguintes:

x (m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)
5,018	-3329	-11117
6,000	-4416	-8847
7,000	-4908	-6920
8,000	-5063	-5409
9,000	-5038	-4254
10,000	-4933	-3376
12,500	-4460	-1991
15,000	-6029	-1239
17,500	-3597	-817
20,000	-3263	-562
22,500	-2993	-401
25,000	-2778	-294
26,000	-2705	-262
27,000	-2639	-233
28,000	-2580	-209
29,000	-2527	-188
29,995	-2481	-169



x (m)	φ (graus)	ω (graus)	Q_{φ} (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_e (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_e (kgfm/m)
29,995	25,600	0	-51	+106	+5513	0	+1
29,000	24,692	0,908	+2	-5	+1513	+21	+1
28,000	23,787	1,813	+10	-23	-149	+11	0
27,000	22,888	2,712	+5	-13	-354	+3	0
26,000	21,995	3,605	+1	-3	-172	-1	0
25,000	21,108	4,492	0	+1	-33	-1	0

x (m)	Q (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_e (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_e (kgfm/m)
5,018	+31	-1297	+6066	0	-12
6,000	+10	351	+3111	+16	-6
7,000	0	0	+1272	+17	-1
8,000	-3	+90	+300	+13	0
9,000	-4	+87	-139	+8	0
10,000	-3	+56	-390	+2	0

4.4. CÁLCULO DA COBERTURA COM CARREGAMENTO (p,P) E PROTENÇÃO APLICADA NA BORDA INTERNA

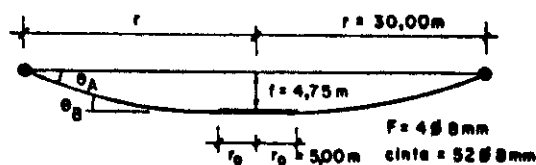
Considere-se novamente a cobertura em questão, com carga concentrada de 460 kgf/m aplicada ao anel e carga distribuída de 246 kgf/m² (peso próprio das placas + protensão + carga acidental) suposta uniformemente distribuída em projeção horizontal.

Sendo então $r = 30,00\text{m}$, $r_0 = 5,00\text{m}$, $n = 90$, $p = 246\text{kgf/m}^2$, $P = 328\text{kgf}$ e admitindo flecha final de 4,75m, das expressões (2.2.23), (2.2.15) e (2.2.16), obtêm-se:

$$H = 16.791 \text{ kgf}$$

$$T_A = 18.532 \text{ kgf}$$

$$T_B = 16.794 \text{ kgf}$$



Sendo $p = 196 \text{ kgf/m}^2$ e tomando para a flecha o valor de 4,40m, das equações (2.2.23), (2.2.15), (2.2.19), (2.2.16), (2.2.20) e (2.2.22) resultam:

$$H = 14.821 \text{ kgf}$$

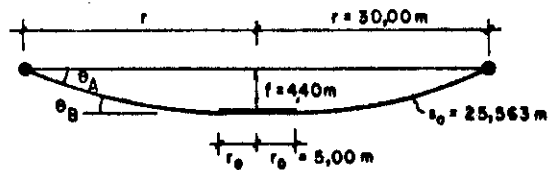
$$T_A = 16.110 \text{ kgf}$$

$$\theta_A = 23,08^\circ$$

$$T_B = 14.825 \text{ kgf}$$

$$\theta_B = 1,27^\circ$$

$$s_0 = 25,563 \text{ m}$$



Com o comprimento inicial do cabo $s_0 = 25,563 \text{ m}$ na equação (2.3.34), determina-se o valor da força horizontal relativa à posição deformada:

$$H = 13.809 \text{ kgf}$$

Com este último valor de H na equação (2.2.12) ou na equação (2.2.23) determinam-se a flecha do cabo deformado e também, com as expressões já mencionadas, as trações, as inclinações e o comprimento final do cabo.

$$H = 13.809 \text{ kgf}$$

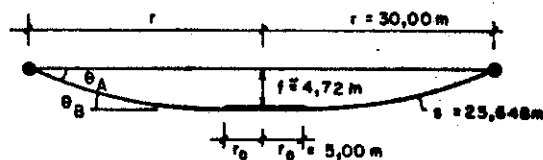
$$T_A = 15.184 \text{ kgf}$$

$$\theta_A = 24,57^\circ$$

$$T_B = 13.813 \text{ kgf}$$

$$\theta_B = 1,36^\circ$$

$$s = 25,648 \text{ m}$$



Considerando $H = 13.809 \text{ kgf}$ e $\theta_A = 25^\circ$, determinam-se $\xi_A = 0,5 \text{ cm}$ e $\xi_B = 1,8 \text{ cm}$, e com o vão reduzido chega-se a:

$$H = 13.565 \text{ kgf}$$

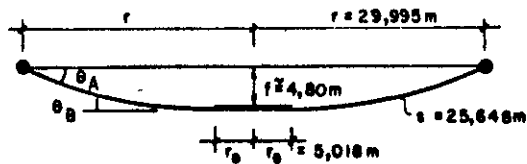
$$T_A = 14.961 \text{ kgf}$$

$$\theta_A = 24,95^\circ$$

$$T_B = 13.569 \text{ kgf}$$

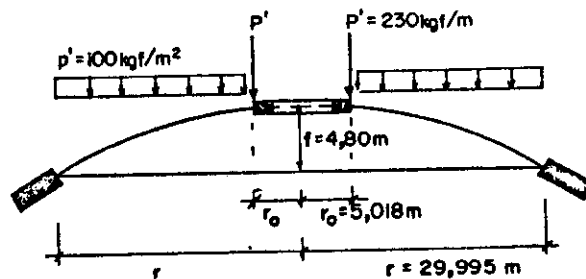
$$\theta_B = 1,38513^\circ$$

$$f \approx 4,80\text{m}$$

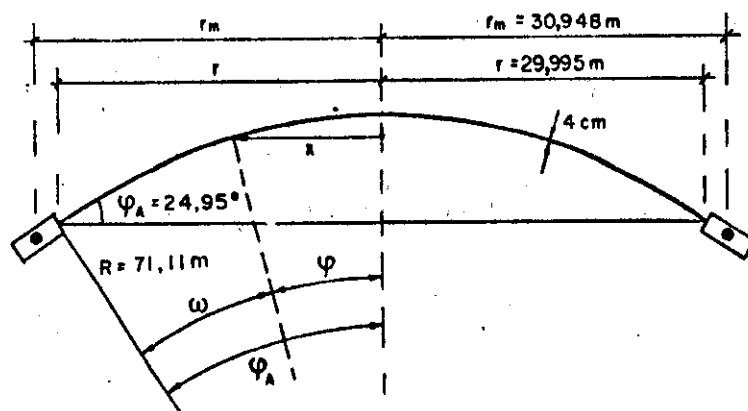


Tomando $p' = 100 \text{ kgf/m}^2$ e $P' = 230 \text{ kgf/m}$ de carga de protensão aplicada à borda interna da casca, as expressões (3.3.16) e (3.3.17) conduzem aos esforços de membrana tabelados a seguir.

x (m)	N_φ (Kgf/m)	N_θ (Kgf/m)
5,018	-9 515	-10,758
6,000	-9 537	- 8 561
7,000	-9 262	- 6 695
8,000	- 8 850	- 5 233
9,000	- 8 388	- 4 114
10,000	- 7 921	- 3 264
12,500	- 6 857	- 1 915
15,000	- 5 992	- 1 195
17,500	- 5 308	- 786
20,000	- 4 470	- 539
22,500	- 4 346	- 383
25,000	- 4 011	- 279
26,000	- 3 899	- 248
27,000	- 3 797	- 220
28,000	- 3 705	- 196
28,000	- 3 621	- 176
29,995	- 3 547	- 158

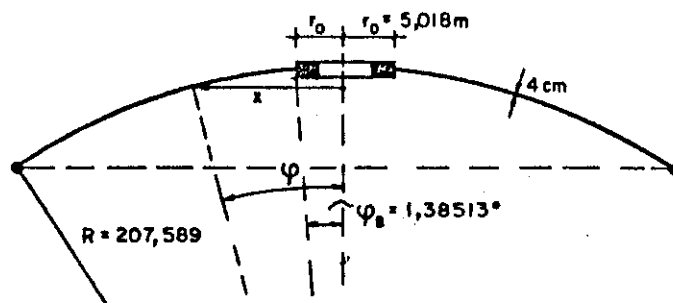


Os esforços de flexão, gerados pelas perturbações do regime de membrana nas proximidades da borda externa, estão tabelados a seguir.



x (m)	φ (graus)	ω (graus)	Q_φ (kgf/m)	N_φ (kgf/m)	N_θ (kgf/m)	M_φ (kgfm/m)	M_θ (kgfm/m)
29,995	24,950	0	- 73	+ 157	+ 8036	0	+ 2
29,000	24,068	0,882	+ 3	- 6	+ 2276	+ 30	+ 1
28,000	23,188	1,762	+ 15	- 35	- 182	+ 17	0
27,000	22,315	2,635	+ 8	- 20	- 523	+ 4	0
26,000	21,446	3,504	+ 2	- 5	- 269	- 1	0
25,000	20,583	4,367	0	+ 1	- 59	- 1	0

Os coeficientes Z_3 , Z_4 , Z_3' e Z_4' , bem como os esforços de flexão relativos à borda interna, estão nos quadros que seguem:



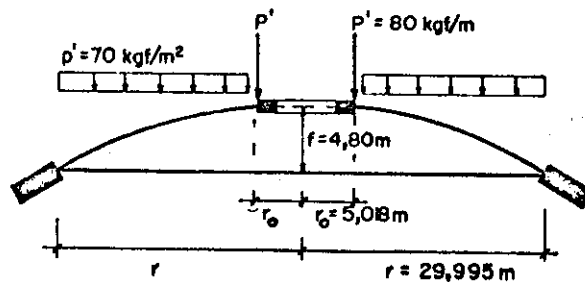
4.41

x (m)	φ (grous)	t	z_3	z_4	z'_3	z'_4
5,018	1,38513	3,21867	+0,02115	+0,03912	-0,04596	-0,01835
6,000	1,63627	3,84873	+0,00123	+0,02613	-0,01961	-0,02085
7,000	1,93241	4,49041	-0,00614	+0,01415	-0,00506	-0,01589
8,000	2,20859	5,13217	-0,0698	+0,00594	+0,00137	-0,00974
9,000	2,48483	5,77408	-0,00523	+0,00113	+0,00323	-0,00486
10,000	2,76113	6,41613	-0,00204	-0,00260	+0,00278	-0,00191

x (m)	Q_φ (kgf/m)	N_φ (kgf/m)	N_θ (kgf/m)	M_φ (kgfm/m)	M_θ (kgfm/m)
5,018	+ 2	- 64	+ 301	0	- 1
6,000	0	- 17	+ 154	+ 1	0
7,000	0	0	+ 65	+ 1	0
8,000	0	+ 5	+ 16	+ 1	0
9,000	0	+ 4	- 7	0	0
10,000	0	+ 3	- 19	0	0

Admitindo que a carga de 30 kgf/m^2 tenha distribuição análoga à da carga p' , resultam os esforços de membrana e de flexão.

x (m)	N_φ (kgf/m)	N_θ (kgf/m)
5,018	- 3310	- 11 048
6,000	- 4 389	- 8 792
7,000	- 4878	- 6876
8,000	- 5033	- 5374
9,000	- 5007	- 4226
10,000	- 4887	- 3352
12,500	- 4438	- 1967
15,000	- 3976	- 1227
17,500	- 3574	- 809
20,000	- 3242	- 554
22,500	- 2972	- 393
25,000	- 2756	- 287
26,000	- 2682	- 254
27,000	- 2615	- 226
28,000	- 2555	- 202
29,000	- 2500	- 180
29,995	- 2451	- 162



x (m)	φ (grous)	ω (grous)	Q_{φ} (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
29,995	24,950	0	- 51	+ 109	+ 5603	0	+ 1
29,000	24,068	0,882	+ 2	- 4	+ 1587	+ 21	+ 1
28,000	23,188	1,762	+ 10	- 24	- 127	+ 12	0
27,000	22,315	2,635	+ 6	- 14	- 364	+ 3	0
26,000	21,446	3,504	+ 1	- 3	- 188	- 1	0
25,000	20,583	4,367	0	+ 1	- 41	- 1	0

x (m)	Q_{φ} (kgf/m)	N_{φ} (kgf/m)	N_{θ} (kgf/m)	M_{φ} (kgfm/m)	M_{θ} (kgfm/m)
5,018	+ 31	- 1286	+ 6030	0	- 12
6,000	+ 10	- 346	+ 3087	+ 16	- 6
7,000	0	+ 1	+ 1299	+ 17	- 2
8,000	- 3	+ 91	+ 312	+ 13	0
9,000	- 4	+ 86	- 142	+ 7	0
10,000	- 3	+ 54	- 391	+ 2	0

4.5. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Algumas conclusões interessantes podem ser tiradas mesmo quando se faz uma simples análise dos resultados aqui apresentados.

Uma delas é a que se obtém no item 4.2, através do confronto dos resultados a que se chega quando se consideram cargas de diferentes intensidades aplicadas à extremidade inferior dos cabos.

Cotejando os esforços de flexão que ocorrem nas regiões do anel interno, notam-se diferenças significantes que indicam claramente a vantagem de se dar maior inclinação à borda interna da casca. Por outro lado, a carga de 328 kgf não chega a alterar, em relação à carga de 168 kgf, a forma da casca e nem os esforços de membrana nas regiões da borda externa, resultando daí a proximidade dos esfor -

ços de flexão que se determinam para aquela borda.

Confrontando os esforços de membrana para ambas as soluções, verifica-se a vantagem do emprego da segunda, principalmente no caso da ação conjunta da carga de 30kgf/m^2 e da carga de 150 kgf/m correspondente ao peso da cúpula, da calha repleta e também das luminárias.

Os resultados obtidos no item 4.3 evidenciam a vantagem da protensão concentrada aplicada à borda interna. É útil notar que a aplicação da carga concentrada pode ser feita, de maneira simples, atirantando o anel ou a borda da casca no cimbre central, por exemplo através dos furos de escoamento das águas pluviais.

Uma outra conclusão interessante é a que se obtém através da comparação dos resultados expostos nos itens 4.3 e 4.4. A proximidade dos valores encontrados tanto para os esforços nos cabos como para os esforços na casca (membrana e flexão), prende-se ao fato de se ter pequena relação flexão/vão, o que pode ser considerado como característica corrente em coberturas desse tipo. Pode-se, portanto, admitir o carregamento (p,P) em lugar do (g,P) , o que permite determinar os esforços nos cabos com rapidez e simplicidade e, mais que isso, serve também para orientar o início das tentativas para o cálculo de H com carregamento (g,P) .

Como mencionado na Introdução, nenhuma das quatro soluções apresentadas neste capítulo reproduz a solução elaborada para a cobertura de Rolândia, que foi calculada de modo análogo à primeira das quatro, considerando-se porém carregamento (p,P) . Os esforços de flexão gerados pelas bordas em consequência das ações térmicas, foram estimados admitindo-se diferença de temperatura da ordem de 50°C entre a casca e os anéis. Para avaliar os esforços oriundos da ação do vento, considerou-se uma sucção uniforme de aproximadamente 16 kgf/m^2 , valor obtido com coeficiente de forma igual a $0,4$ e vento com velocidade de 100km/h . As perdas de protensão em consequência da retração e das deformações imediata e lenta, também foram estimadas. Com relação à re-

tração admitiu-se deformação específica em torno de 0,03% para o concreto das juntas e desprezou-se a retração das placas pré-fabricadas. Relativamente à deformação lenta supôs-se para as placas e para as juntas, respectivamente, o dobro e o triplo da deformação imediata, sendo esta calculada com uma tensão de compressão média da ordem de 13 kgf/cm^2 e módulo de deformação de aproximadamente 260.000 kgf/cm^2 . Nestas condições a perda total de protensão ficou em torno de 8%. Diante da tensão do aço, pouco mais que a metade da tensão de escoamento, desprezou-se a perda de protensão por fluência do aço.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

5.1. INDICAÇÕES PARA PROJETO

Das diversas variáveis relacionadas direta ou in diretamente com esse tipo de cobertura, apenas uma — o raio da cobertura — é fixada naturalmente em função da área a ser coberta.

As outras variáveis poderão ser adotadas de maneira mais ou menos arbitrária, sendo claro que tal procedimento poderá levar, às vezes, a resultados indesejáveis, obrigando o projetista a reformular pelo menos alguns dos valores inicialmente considerados. Tendo em vista esta possibilidade, e considerando que são muitos os parâmetros envolvidos, convém que se adotem certos critérios de escolha que, se não servirem para obter imediatamente a melhor composição de parâmetros, serão úteis, pelo menos, como uma primeira orientação.

Dos muitos critérios possíveis, um que parece razoável é o que adota inicialmente a carga de protensão distribuída e o tipo do elemento de vedação, obtendo-se, em função destes dois dados e do raio da cobertura, o número de cabos. A carga de protensão deve ser avaliada de modo a que os esforços gerados por sua retirada, superpostos, por exemplo, com os gerados pela ação do vento e pela ação da carga de água, não venham a comprometer o funcionamento da casca. Evidentemente, considerações análogas deverão ser feitas com relação à carga de protensão concentrada na borda da casca.

O raio do anel interno, que não influi de maneira sensível nos esforços dos cabos, poderá ser fixado tendo em conta alguns aspectos construtivos. Anéis de pequeno diâmetro poderão implicar em calhas de dimensões exageradas. Na cobertura de Rolândia, por exemplo, anel com 2,00m de raio exigiria calha com seção transversal de $0,20 \times 1,00 \text{m}^2$. Por outro lado, a vedação da abertura central ficará cada vez mais difícil à medida que se aumenta o raio do anel, sem falar no aumento do volume de cimbra necessário para a execução ou montagem do anel.

A flecha poderá ser fixada em função da altura livre que se quer obter, observando que flechas excessivas levarão a grandes alturas de pilares ou parede de contorno. Como primeira tentativa poderão ser adotadas flechas compreendidas entre um décimo e um vigésimo do diâmetro da cobertura.

5.2. ASPECTOS CONSTRUTIVOS

Este tipo de cobertura, embora de concepção estrutural simples, presta-se muito bem a uma ampla variedade de soluções construtivas.

Com respeito aos elementos de vedação, muitas soluções podem ser adotadas, mesmo quando se pensa em sim -

placas maciças pré-fabricadas de concreto armado. Podem-se adotar placas com diversos tipos de armaduras, com espessuras constantes ou variáveis ou ainda com diferentes sistemas de apoio, aproveitando ou não a própria armadura de flexão. Elementos de vedação nervurados podem oferecer vantagens, principalmente em função de seu baixo peso próprio.

Neste caso, as placas de argamassa armada são particularmente indicadas, notadamente pela sua impermeabilidade e sua boa resistência à flexão. São para fixar idéias, uma laje de argamassa armada tem peso próprio da ordem da metade do peso próprio de uma laje maciça de igual resistência à flexão. Não está excluída, evidentemente, a possibilidade do emprego de elementos de vedação nervurados de concreto, executados com os diversos tipos de lajotas cerâmicas.

As figuras seguintes esquematizam alguns tipos de elementos de vedação. A figura 5.2.1, por exemplo, representa o tipo de placa usada nas coberturas de Montevideu, de Araraquara, e mais recentemente na cobertura de Rolândia. São de construção simples e apresentam bons resultados.

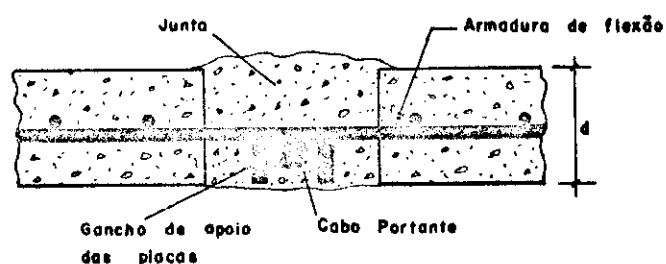


Fig. 5.2.1

Elemento de vedação com altura variável e armadura próxima à face inferior, como o representado na figura 5.2.2, permite, em relação ao esquematizado na figura 5.2.1,

adoção de cabos mais espaçados ou de carga de protensão com maior intensidade.

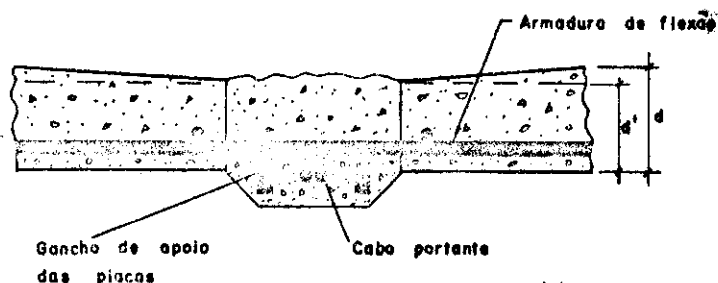


Fig. 5.2.2

Observe-se porém que a armadura de flexão na posição indicada, dependendo das dimensões da seção transversal do cabo, torna a execução das juntas meridianas mais trabalhosas quanto à forma. Quando não há necessidade de se fazerem nervuras salientes para a proteção do cabo e dos ganchos, uma simples tábua, fixada ao cabo por meio de arame recozido, é suficiente para conter o enchimento colocado nas juntas.

Quando se deseja maior resistência à flexão e ao mesmo tempo evitar nervuras meridianas salientes, pode-se usar o elemento de vedação indicado na figura 5.2.3.

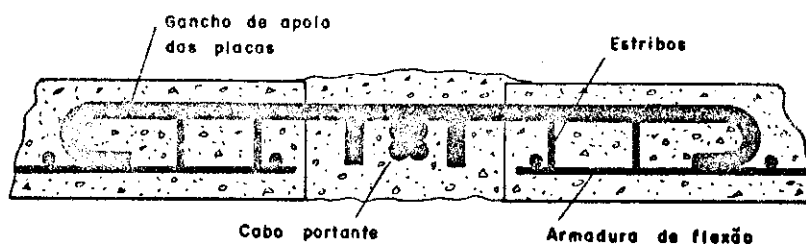


Fig. 5.2.3

A armadura situada próxima à superfície inferior da placa, com a finalidade de resistir somente aos esforços de flexão, pode ser formada por fios ou barras de diâmetros menores. Convém notar que, para garantir o bom funcionamento do elemento em questão, os ganchos de apoio

devem estar perfeitamente ligados, através de pequenos estribos, à armadura de flexão.

Os elementos de vedação nervurados, geralmente de execução mais trabalhosa, podem ser interessantes quando se procura maior resistência à flexão sem aumento sensível de peso próprio. Placas de vedação de concreto armado com 7,00cm de espessura podem ser obtidas com lajotas cerâmicas de 5,00cm de espessura, como as largamente empregadas para forros de habitações e que, com mesa de concreto de 2,00 a 3,00cm de espessura, têm apresentado bons resultados para cobrir pequenos vãos. Quando se utilizam lajotas de 5x25x40cm com mesa de 2,00cm de espessura e nervuras com 4,00cm de espessura, obtêm-se lajes com peso próprio da ordem de 100 kgf/m^2 , valor bem menor que o das lajes maciças com 7,00cm de espessura.

Como já comentado, podem ser utilizados elementos de vedação de argamassa armada. De maneira geral, as lajes de argamassa, figura 5.2.4, compõem-se de duas mesas com espessuras que podem variar entre 1,20 e 1,50cm, distanciadas, por exemplo, por meio de concreto celular, e ligadas mediante nervuras também de argamassa. Lajes ensaiadas por PETRONI (1971), para diversos vãos e com diferentes alturas úteis, revelaram boa resistência à flexão, com flechas em serviço da ordem de 0,001 do vão e também se mostraram praticamente impermeáveis.

A partir das soluções construtivas elaboradas e ensaiadas para estas lajes, podem ser obtidos elementos de vedação, os quais, naturalmente, requerem estudos experimentais, tendo em vista a adequada posição dos ganchos (as armaduras, localizadas nas mesas, são formadas por telas de fios de pequenos diâmetros) e o fato desses elementos terem, quando na cobertura, solicitações de chapa para os quais não foram ensaiados. Evidentemente, ensaios do mesmo tipo devem ser feitos no caso de elementos de vedação construídos com lajotas cerâmicas.

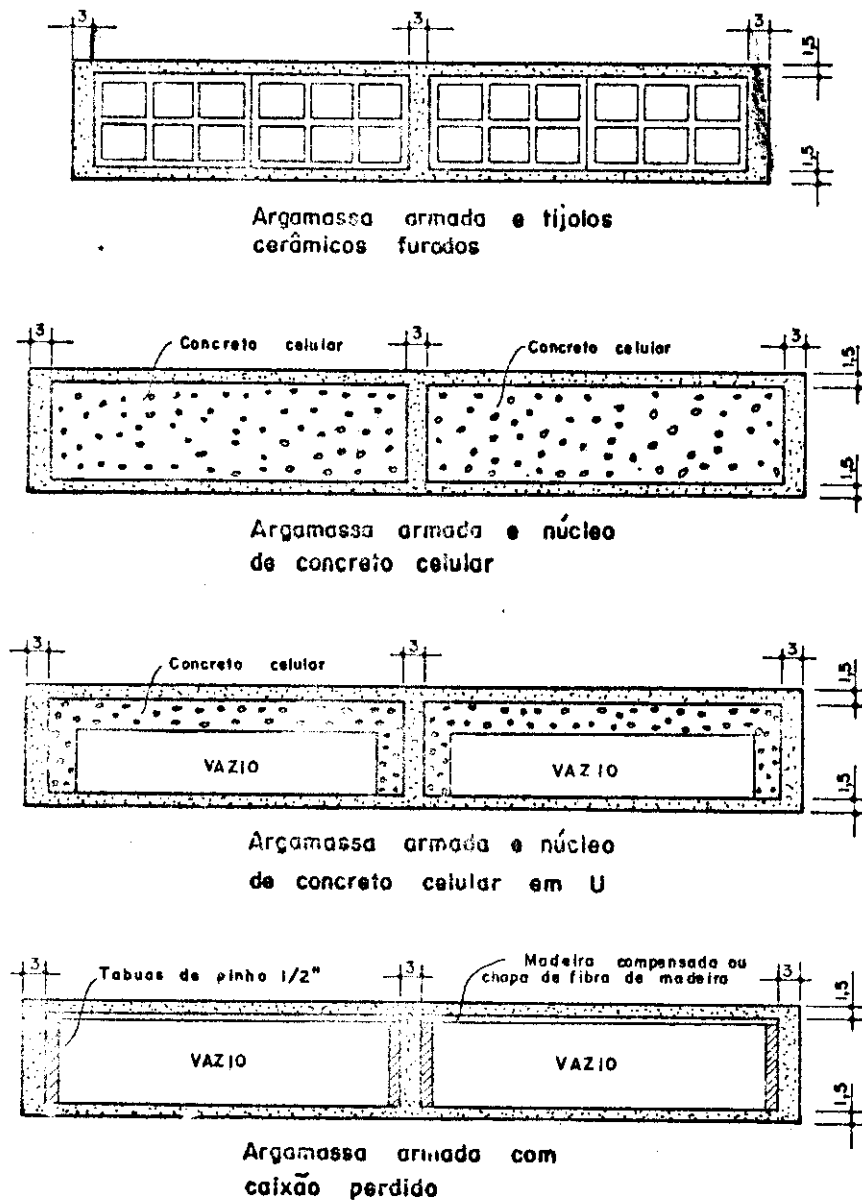


Fig. 5.2.4

Com relação aos ganchos de apoio, deve-se projetá-los de modo a ser mantida a posição relativa das placas, e com comprimento suficiente para permitir os deslocamentos tangenciais das mesmas durante a fase de protensão.

As argamassas de cimento com pedriscos elaboradas com a eventual presença de aditivos, Plastiment por exemplo, parecem ser as soluções mais indicadas para o enchimento das juntas. Podem apresentar vantagens as argamassas epóxicas

ou similares, por dispensarem vibração, pela maior estanqueidade, e, inclusive, graças à maior ligação com as placas. Por outro lado, as resinas epóxicas ou equivalentes podem permitir a colagem das placas com juntas de reduzida espessura, figura 5.2.5, solução interessante para as regiões das bordas da casca.

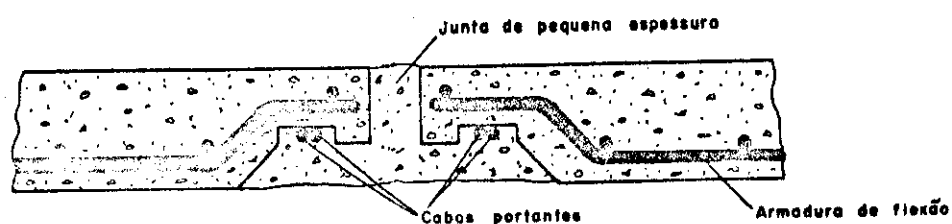


Fig. 5.2.5

Solução que também pode ser interessante para estas regiões, é a que se consegue combinando argamassa de cimento com material impermeabilizante, como se mostra na figura 5.2.6.

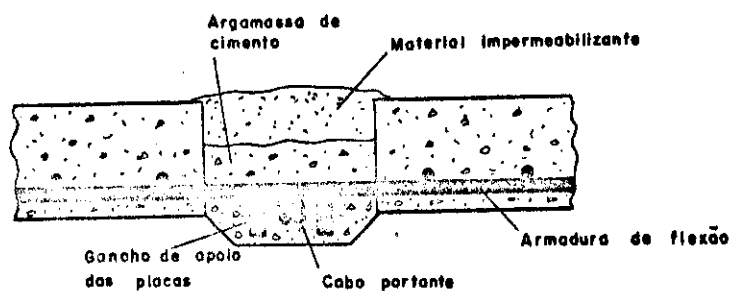


Fig. 5.2.6

Para o anel central — basicamente formado por um anel metálico e pelas ancoragens dos cabos — podem ser adotadas diversas soluções. Dentre os vários fatores que conduzem à escolha de uma ou de outra solução estão, por exemplo, o raio do anel, a grandeza dos esforços atuantes, o sistema de ancoragem dos cabos, o número de cabos da cobertura e também as condições de fixação de calhas, condutores, aparelhos de som e iluminação, cúpula da abertura central, ou de qualquer apetrecho que tenha sido projetado para ficar suspenso do anel em questão.

Solução que pode ser considerada boa é a que utiliza chapas ou perfis metálicos para absorverem os esforços da cobertura e ancoragem metálica para a fixação dos cabos. Este tipo de anel, de montagem relativamente simples, mas que pode exigir mão-de-obra um tanto especializada, já foi empregado em algumas coberturas de grande diâmetro. Dentre elas destacam-se a cobertura do Madison Square Garden Center, com 130,00m de diâmetro, e a cobertura do Forum de Los Angeles, com 124,50m de diâmetro. Nas figuras seguintes esquematizam-se alguns tipos de anéis formados com chapas ou perfis metálicos.

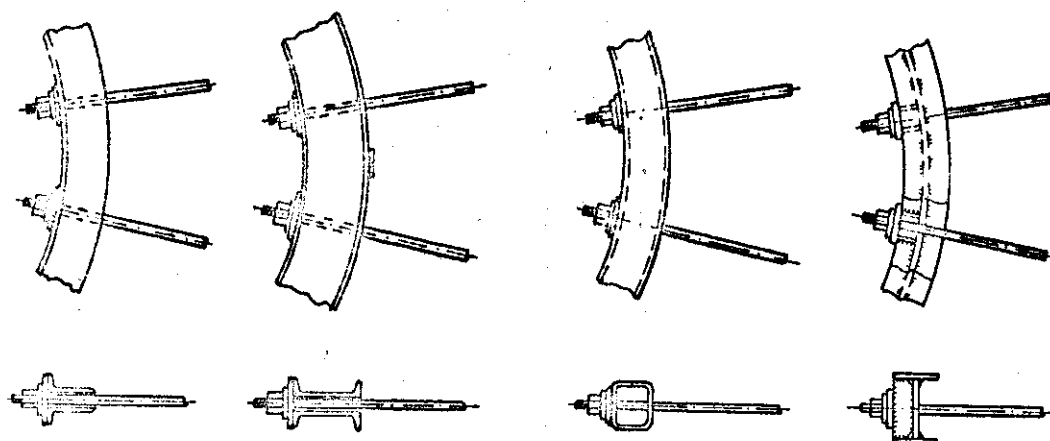


Fig. 5.2.7

Geralmente mais indicados para esforços de pequena intensidade, os anéis da figura 5.2.7 podem ser usados, a menos de algumas adaptações, quando se deseja cobertura com anel central único.

Por outro lado, os anéis da figura 5.2.8, pelo sistema de ancoragem dos cabos, sugerem solução tipo Montevidéu, com um anel, de concreto por exemplo, para servir de encosto para as placas centrais.

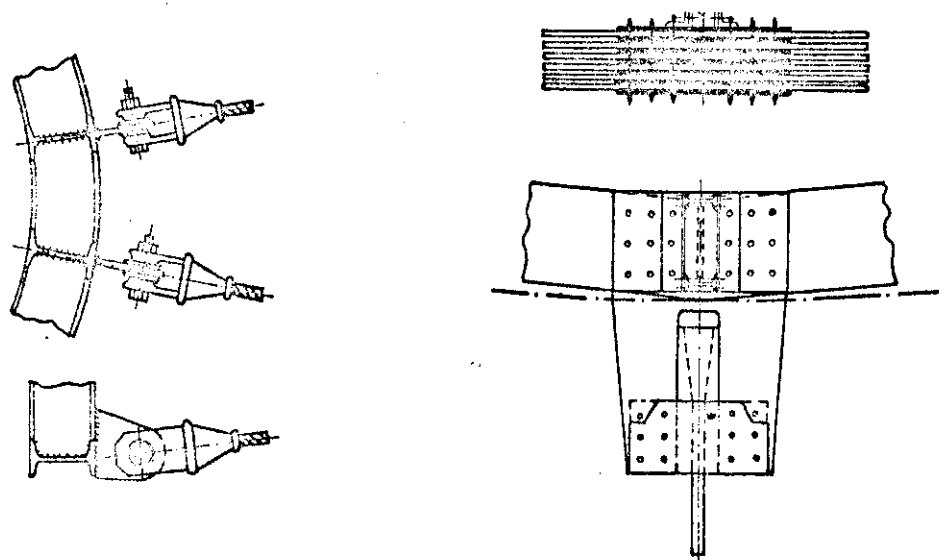


Fig. 5.2.8

Outro tipo de anel é o que combina chapas ou perfis metálicos com blocos de concreto destinados à ancoragem dos cabos. É solução que se presta muito bem à fixação dos apetrechos no anel e permite optar entre cabos ancorados por aderência ou com ancoragem de extremidade.

Solução que pode ser interessante, é a esquematizada na figura 5.2.9. Duas chapas metálicas absorvem os esforços oriundos dos cabos, que são fixados aos blocos mediante ancoragem de extremidade. Os blocos são providos de orifícios radiais para a livre passagem dos cabos, sendo aconselhável que as chapas fiquem separadas para propiciar melhor ligação entre casca e anel.

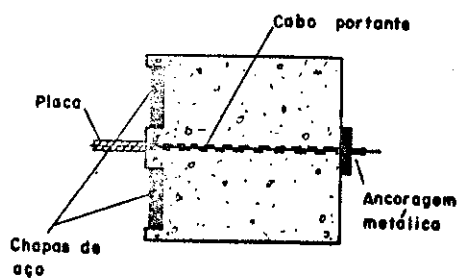


Fig. 5.2.9

Na figura 5.2.10, representa-se a secção transversal de um outro tipo de anel. As chapas metálicas são posicionadas como indica a figura e solidarizadas aos blocos por meio de barras de aço que os atravessam.

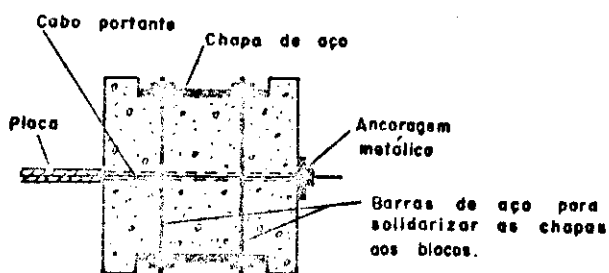


Fig. 5.2.10

Outra variante, com os cabos ancorados por aderência, é mostrada na figura 5.2.11. Neste caso, dois perfis metálicos ligados por travessas espaçadas absorvem os esforços dos cabos. Ligação mais adequada entre a casca e o anel pode ser conseguida com os perfis metálicos coloca

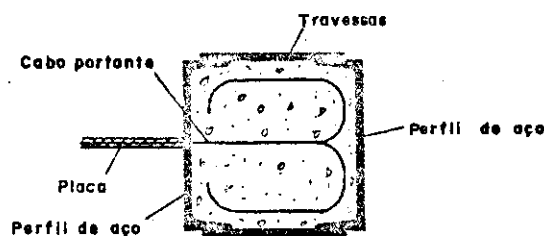


Fig. 5.2.11

dos nas partes superiores e inferiores dos blocos. Note-se que nos três tipos de anéis, as chapas ou os perfis podem ser utilizados para reduzir as formas necessárias para a concretagem dos espaços entre blocos.

Solução muito interessante para o anel interno pode ser obtida com blocos de concreto para a ancoragem dos cabos e cintamento de fios de aço de protensão, com a finalidade de receber os esforços dos cabos. Já utilizado nas coberturas de Araraquara e Rolândia, é de construção simples e rápida, podendo ser executado com os recursos usuais

do canteiro da obra. Na figura 5.2.12 vê-se a secção transversal deste tipo de anel, mostrando-se a possibilidade de engastamento entre casca e anel.

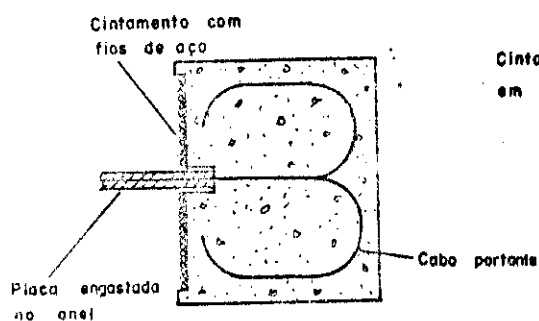


Fig. 5.2.12

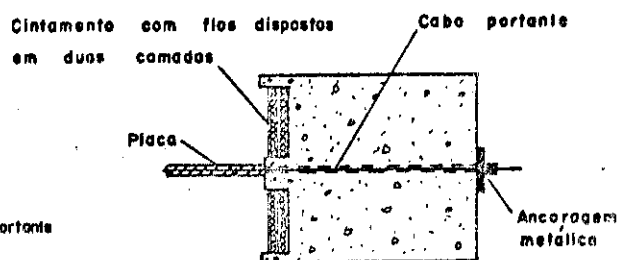


Fig. 5.2.13

Quando se desejam anéis de menor altura, pode-se usar cintamento como o indicado na figura 5.2.13 com os fios dispostos em duas camadas.

É claro que os diversos tipos de cabos de aço ou cordoalhas podem ser empregados para cintar os blocos e absorver os esforços transmitidos ao anel. Na figura 5.2.14, mostra-se esta possibilidade.

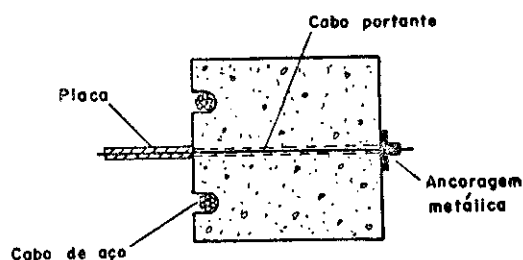


Fig. 5.2.14

Nas figuras seguintes mostram-se alguns tipos de ligações que podem ser utilizados para conseguir cintamento contínuo. No caso de cordoalhas tipo Freyssinet, podem-se ancorar as extremidades do cintamento como se indica na figura 5.2.15.

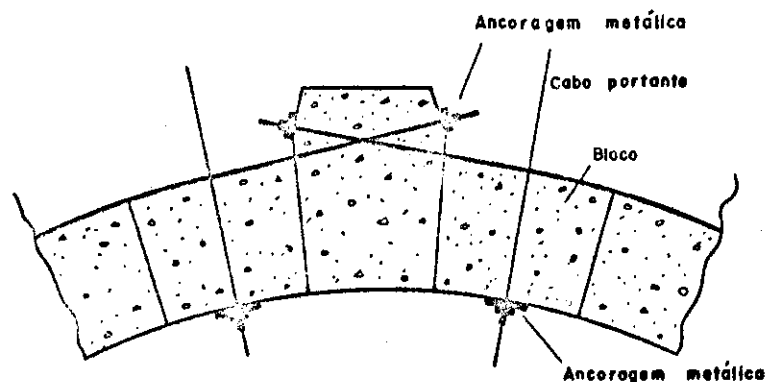


Fig. 5.2.15

Quando se adotam cabos de aço de fios trançados, adquirem-se os laços já prontos ou executam-se as emendas de acordo com as especificações do fabricante. Na figura 5.2.16, vê-se um tipo de emenda recomendada para cabos de aço de fios trançados.

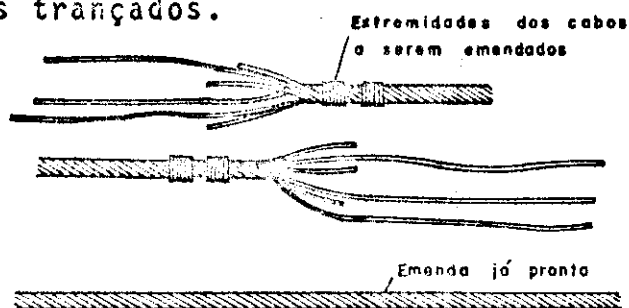


Fig. 5.2.16

Os dispositivos da figura 5.2.17, comumente empregados em concreto protendido, podem ser usados no caso de cintamento dos blocos com fios de aço de protensão.

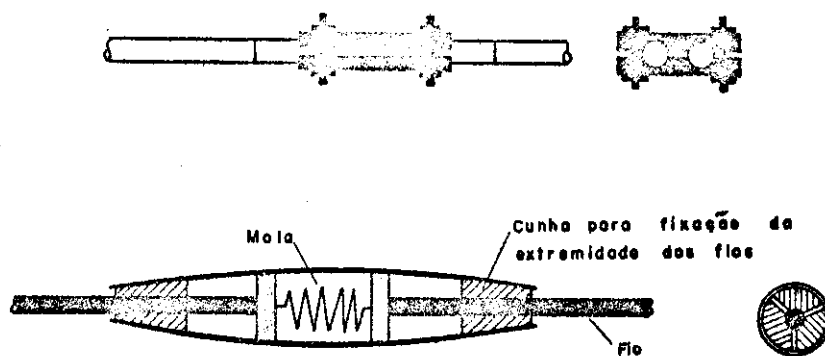


Fig. 5.2.17

Emenda muito prática, figura 5.2.18, é a que se obtém pressionando as extremidades dos fios com duas morsas e amarrando-as com cabo de aço de pequeno diâmetro. Apenas para avaliar este tipo de ligação, foram ensaiadas, à tração, várias emendas construídas no Laboratório de Estruturas da EESC. Usaram-se cabo de aço com diâmetro de 1,45mm para amarração (tensão de ruptura da ordem de $13,tf/cm^2$) e fios de aço de 8mm de diâmetro (CP-125/140), nas extremidades dos quais fizeram-se as emendas com 5,00cm de extensão.

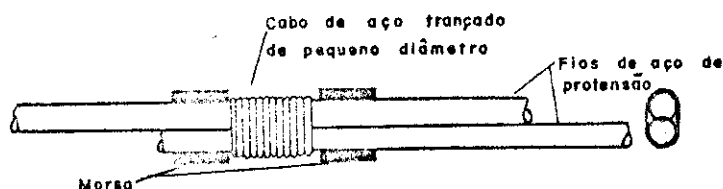


Fig. 5.2. 18

A carga média de ruptura das emendas foi de aproximadamente 2.800 kgf, resultado que serviu de base para a dotar — considerando coeficiente de segurança igual a 3 — emendas com 25,00cm de extensão no anel da cobertura de Rolândia. Além disso, nos ensaios de cinco emendas elaboradas na obra com as mesmas características das indicadas no projeto, a ruptura se deu nos fios de cintamento.

Observe-se que nas soluções que empregam blocos de concreto para a ancoragem dos cabos, as dimensões dos mesmos devem ser fixadas considerando, por exemplo, o raio do anel, o tipo de cintamento, o tipo de ancoragem dos cabos, o número de cabos, e de modo a facilitar a colocação da cúpula, das calhas, luminárias, etc. Note-se também que anéis com blocos de concreto, certamente mais pesados que os anéis metálicos, dão à casca maior inclinação na borda interna, reduzindo assim os esforços de flexão que ocorrem naquelas regiões. Convém não esquecer, porém, que a redução dos esforços de flexão pode ser neutralizada pela maior rigidez do anel.

O anel externo, destinado à absorção dos esforços horizontais e indispensável nesse tipo de cobertura, oferece uma grande variedade de soluções. Podem ser construídos com seções transversais de diversas formas, com apoio contínuo como na cobertura de Montevideu, ou com apoios isolados como nas coberturas de Araraquara e Rolândia, e podem ser metálicos como nas coberturas do Madison Square Garden Center e do Palácio dos Esportes de Milão.

Anéis metálicos exigem mão-de-obra especializada para a execução e requerem cuidados especiais quanto à flambagem, levando, por exemplo, a seções em caixão como nas duas coberturas citadas acima. Note-se ainda que em função do tipo de ancoragem dos cabos, podem surgir problemas construtivos na ligação casca-anel. O emprego do concreto protendido pode ser indicado quando se projetam anéis com apoios muito espaçados. Nestes casos podem surgir grandes esforços de tração, oriundos da flexão do anel como viga curva. Para anéis apoiados continuamente ou em pilares com pequenos espaçamentos, o concreto armado é a solução que pode ser considerada mais adequada. Não se deve esquecer que a escolha conveniente da seção transversal do anel, pode reduzir sensivelmente os esforços de flexão que surgem nas regiões da borda externa. Observe-se ainda que nos casos de apoio contínuo, o anel externo pode ser obtido pela justaposição de peças pré-moldadas, naturalmente solidarizadas pelos esforços de compressão predominantes. Na figura 5.2.19 mostram-se alguns tipos de seções transversais.

Também para os cabos portantes da cobertura, diversas soluções são possíveis. Boas soluções podem ser conseguidas com cordoalhas de fios torcidos de pequenos diâmetros ou com os diversos tipos de cabos de aço de fios paralelos ou de fios torcidos. Tanto os cabos como as cordoalhas são facilmente encontrados no mercado e são produzidos com diversos diâmetros e comprimentos. Note-se que cabos portantes de fios torcidos são bastante deformáveis,

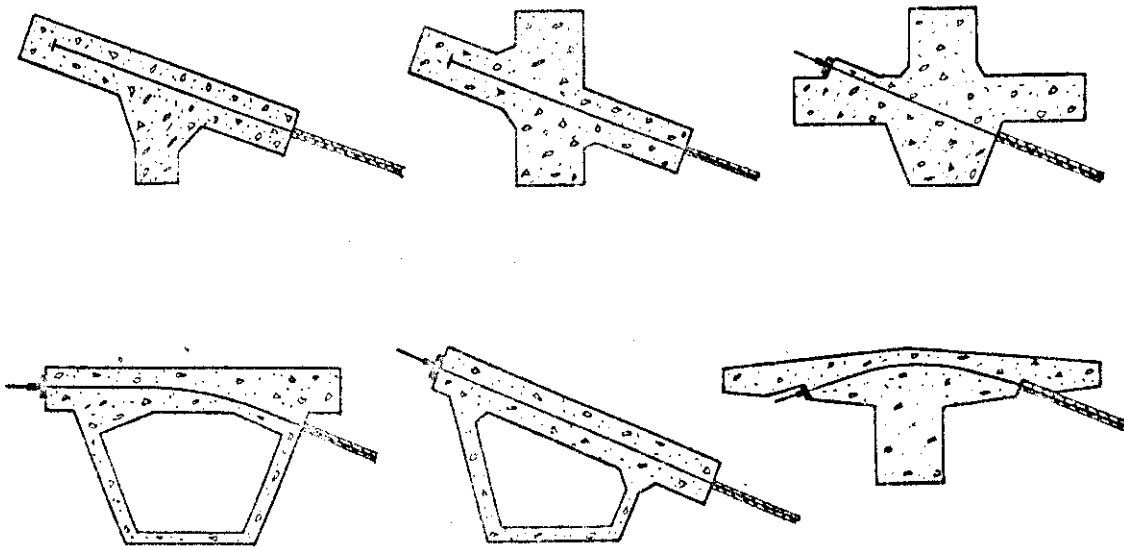


Fig. 5.2.19

sendo aconselhável o uso de cabos prē-estirados que têm mōdulo de elasticidade da ordem de 20% maior que os cabos sem estiramento inicial. Observe-se que estes tipos de cabos portantes melhor se adaptam às ancoragens metālicas de extremidades.

Solução que parece mais indicada, pelo menos para esse tipo de cobertura, é a que se obtém com cabos formados por fios de aço de protensão. Podem ser usadas cordoalhas de meia polegada tipo Freyssinet, ou cabos de fios paralelos, executados na obra, como os utilizados nas coberturas de Araraquara e Rolândia. São menos deformáveis que os cabos de fios torcidos e podem ser ancorados por aderência ou com ancoragem de extremidade. Dependendo do diâmetro do cabo e também das características das juntas, podem ser melhor protegidos com bainhas, oportunamente injetadas com as técnicas usuais do concreto protendido.

Finalizando estes comentários, convém observar que é muito importante verificar as condições de esticamento dos cabos antes que se inicie o assentamento das placas de vedação. Tal verificação pode ser feita abaixando-se o

cembre, de modo a que o anel central fique suspenso dos ca bos, e observando mediante nível, se pontos homólogos previamente marcados nos cabos estão situados em um mesmo paralelo. É claro que prumos, níveis de água ou mesmo régua graduadas servem para comparar cotas dos referidos pontos. Quando se utilizam sistemas análogos aos de Araraquara e Rolândia, as eventuais correções podem ser feitas com a co locação de calços entre o cintamento e os blocos correspondentes aos cabos frouxos, operação que só é possível se os espaços entre blocos são concretados depois da verificação dos esticamentos dos cabos. Usando-se ancoragem de extremi dade em pelo menos um dos anéis, as correções podem ser feitas de maneira mais fácil. É claro que anéis concêntricos e cabos de mesmo comprimento conduzem certamente a uma cesta com cabos igualmente tensionados.

5.3. CONTINUAÇÃO DA PESQUISA

Dando continuidade à pesquisa das coberturas pên seis em casca protendida de revolução, pretende-se realizar ensaios em modelos reduzidos para determinar as distri buições das sucções e pressões ocasionadas pela ação do vento. Deverão ser ensaiados modelos com diferentes rela ções flecha/diâmetro, com confinamento lateral de diversos tipos e também com grandes aberturas centrais sem vedação, tendo em vista o emprego desse tipo de cobertura pên sil para estádios. Ensaios para avaliar os efeitos das ações tér micas e para determinar a carga de água que solicita a cobertura por ocasião das chuvas estão previstos, inclusive antevendo-se a possibilidade da instalação de aparelhos adequados na cobertura de Araraquara.

Paralelamente aos estudos experimentais, pretende-se desenvolver pesquisa teórica enfocando os diversos tipos de protensão, considerando, por exemplo, coberturas solicitadas por carga de protensão com diversas distribui-

ções, e a viabilidade de protender o conjunto de placas com concreto expansivo colocado nas juntas. Serão estudadas al gumas variantes, tais como coberturas com paredes laterais inclinadas, com anel interno provisório, e também coberturas com anel interno apoiado em torre central, onde se verificará a possibilidade da retirada da torre após a protensão da casca.

Os estudos teóricos e experimentais inserem-se nos planos de pesquisa do Departamento de Estruturas da EESC no Campo das coberturas pênseis, que já deram origem a duas Dissertações de Mestrado. No seu desenvolvimento pre vê-se a colaboração de bolsistas de iniciação científica, como já se deu com os srs. M.M. Argental e M.A.P. Godoy (ex-bolsistas da FAPESP) e de pós-graduação como o engº Y. Ishii (bolsista de pós-graduação do CNPq) que, atualmente, desenvolve estudo comparativo em busca da adequada composi ção dos parâmetros relacionados com as coberturas pênseis em casca protendida de revolução.