

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

INSTABILIDADE DE BARRAS DE SECÇÃO DELGADA

Tese apresentada para completar os requisitos necessários à  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil

M. RACHID

Orientador:

F. SCHIEL

São Carlos, Fevereiro de 1975

À minha esposa, pelo incentivo  
constante.

Às minhas filhas, pelas horas  
roubadas ao seu doce convívio.

Agradeço a todos que, de uma forma  
ou de outra, contribuíram para a re  
alização desse trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido, baseado no método da energia, um processo automático para o cálculo da carga crítica de instabilidade lateral de barras elásticas de seção aberta de paredes finas. São feitas comparações e os resultados mostram boa aproximação com as soluções exatas em exemplos nos quais elas podem ser obtidas.

Também é levado em consideração o bimomento: são feitos exemplos nos quais é discutida sua influência sobre a espécie de problema e o valor da carga crítica.

## ABSTRACT

In this paper is developed, based on the energy method, a computer oriented process to calculate the critical load of lateral instability of thin-walled elastic bars of open sections. Comparisons are made and the results show good approximation to the exact solutions in examples where these are available.

The bimoment is taken into account as well: examples are made where its influence in the kind of problem and in the value of the critical load is discussed.

## ÍNDICE

	Pág.
1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO DA ENERGIA.....	3
2.1 - Considerações iniciais.....	3
2.2 - Deslocamentos.....	4
2.3 - Tensões.....	5
2.4 - Energia de deformação.....	6
2.5 - Energia potencial.....	9
2.6 - Expressão da energia total.....	21
2.7 - Problemas de 1ª e 2ª espécie.....	24
3 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DA ENERGIA NA DERIVAÇÃO DE UM PROCESSO AUTOMÁTICO DE CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA...	27
3.1 - Considerações iniciais.....	27
3.2 - Funções $w_D$ e $\phi$ .....	29
3.3 - Contribuição do segmento $i$ para a expressão de $V$ .....	31
3.4 - Energia total.....	37
3.5 - Construção da matriz $[A]$ .....	39
3.6 - Condições de vinculação.....	44
3.7 - Procedimento de cálculo.....	46
4 - EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO E APLICAÇÕES.....	49
4.1 - 1º Exemplo.....	50
4.2 - 2º Exemplo.....	54
4.3 - 3º Exemplo.....	56
4.4 - 4º Exemplo.....	60
4.5 - 5º Exemplo.....	61
4.6 - 6º Exemplo.....	62
4.7 - 7º Exemplo.....	63
4.8 - 8º Exemplo.....	67
4.9 - 9º Exemplo.....	69
4.10-10º Exemplo.....	70
5 - CONSIDERAÇÃO DO BIMOMENTO.....	73
5.1 - Expressão do bimomento no segmento $i$ .....	73
5.2 - Termos adicionais da energia.....	74
5.3 - Acréscimos na matriz $[a]_i$ .....	80

	Pág.
5.4 - Novos dados para o programa.....	81
5.5 - Exemplo 1.....	82
5.6 - Exemplo 2.....	84
5.7 - Exemplo 3.....	87
APÊNDICE I - RESUMO DA TEORIA DE FLEXO-TORÇÃO.....	93
1- Introdução.....	93
2- Centro de torção ou de cisalhamento...	94
3- Fórmulas para as coordenadas do centro de torção.....	97
4- Torção uniforme ou livre ou de Saint- -Venant.....	100
5- Torção não uniforme ou flexo-torção...	103
6- Introdução do bimomento.....	108
APÊNDICE II- Programa em linguagem FORTRAN para o com- putador IBM 1130 do Centro de Processamen- to de Dados da Escola de Engenharia de São Carlos.....	113
BIBLIOGRAFIA.....	119

## 1 - INTRODUÇÃO

O problema da instabilidade elástica de barras de secção aberta de paredes delgadas foi estudado de maneira sistemática por Vlassov (1). As equações diferenciais obtidas são, entretanto, de difícil resolução quando se consideram carregamento e condições de contorno gerais, tendo que se recorrer, para a sua resolução, às funções de Bessel ou séries de potência, ou ainda a processos numéricos de integração.

Por outro lado, utilizando-se o método da energia (2), é possível não só deduzir as equações diferenciais de maneira um pouco mais amena, como também evitar a sua resolução, achando valores aproximados para a carga crítica por meio, por exemplo, do processo aproximado de Ritz.

Neste trabalho é desenvolvido, baseado no método da energia, um processo aproximado de cálculo que, permitindo o uso do computador por causa de suas características automáticas, fornece valores com aproximação extremamente boa para a carga crítica. A derivação desse processo encontra-se no capítulo 3. Os exemplos de aplicação encontram-se no capítulo 4.

No capítulo 2 é deduzida a expressão geral da energia e, por considerações do cálculo variacional, são deduzidas as equações diferenciais. É feito também um apanhado sobre os processos de resolução apontando as suas características.

Procurou-se também estudar o efeito do bimomento que até agora não foi levado em consideração devidamente. O bimomento não só afeta o valor da carga crítica em certos

casos, como também tem influência sobre o tipo de instabilidedade. Esse estudo é feito no capítulo 5 onde também estão os exemplos de aplicação e a discussão dos resultados.

No apêndice I é feito um resumo da teoria de flexo-torção: achou-se mais conveniente apresentar as grandezas envolvidas de uma maneira um pouco mais elaborada, através de suas definições e relações, do que a sua simples enumeração com os símbolos respectivos.

No apêndice II encontra-se a listagem do programa FORTRAN para o computador IBM 1130 que permite o cálculo da carga crítica.



2 - DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO DA ENERGIA

2.1 - Considerações iniciais

A barra será referida a um sistema de eixos  $x$   $y$   $z$ , sendo  $y$  e  $z$  eixos principais de inércia da secção e  $x$  um eixo longitudinal pelos centros de gravidade das secções. Sejam, (figura 2.1a),  $D(y_D, z_D)$  o centro de torção e  $Q(y, z)$  um ponto genérico da secção.

Além dos eixos mencionados, se faz também uso de uma coordenada  $s$  ao longo do esqueleto. A espessura  $t$  pode variar com  $s$  e o elemento de área da secção é dado por:

$$dS = t ds \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

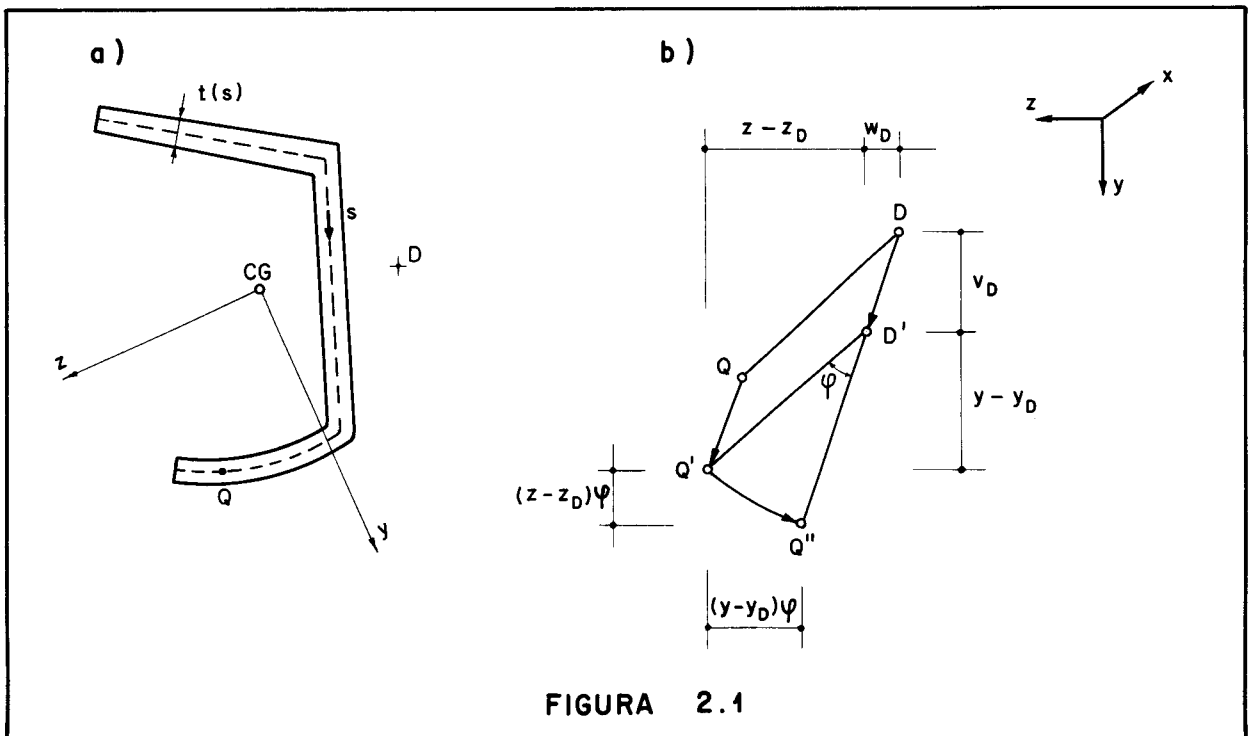


FIGURA 2.1

Fazem parte das hipóteses iniciais:

- a) A espessura é bem menor que as dimensões características da secção e estas, por sua vez, são bem menores que o comprimento da barra;

b) A secção é indeformável em seu plano, e suas dimensões não variam com x.

## 2.2 - Deslocamentos

Quando a barra estiver submetida a um carregamento capaz de causar a sua instabilidade (carregamento crítico), ela passará a ocupar uma nova posição de equilíbrio. Tendo em vista a hipótese b) acima, essa nova posição ficará caracterizada por três funções de x: deslocamentos  $v_D$  e  $w_D$  do centro de torção na direção dos eixos y e z, respectivamente, e ângulo de giro  $\phi$  de toda a secção em torno do centro de torção.

A figura 2.1b) mostra esses deslocamentos com o seu sentido positivo. Com base ainda nessa figura são deduzidas as expressões dos deslocamentos de um ponto genérico da secção nas direções dos eixos principais:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_D + (z-z_D)\phi \\ w &= w_D + (y-y_D)\phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.2)$$

Para a dedução dessas fórmulas basta lembrar que o deslocamento total da secção no seu plano pode ser considerado como a superposição de:

- a) uma translação com componentes  $v_D$  e  $w_D$  nas direções dos eixos y e z, respectivamente;
- b) uma rotação em torno do centro de torção.

Essas expressões contêm somente termos de primeira ordem em  $v_D$ ,  $w_D$  e  $\phi$  e são válidas para os deslocamentos

pequenos que se consideram aqui. Convém ainda observar que essas expressões fornecem os deslocamentos ocorridos após o carregamento ter atingido o valor crítico sem se referirem aos deslocamentos ocorridos antes da perda de estabilidade. Nas vigas para as quais o problema de instabilidade tem interesse, esses deslocamentos iniciais são desprezíveis e a viga pode ser considerada aproximadamente como reta no instante da perda de estabilidade.

Serão tratados problemas de instabilidade tanto de barras como de vigas; por isso estão sendo usados os dois termos. Em geral, se reserva o nome de barra para as peças solicitadas só por forças axiais. No que se segue tudo o que se referir a vigas será válido para barras e vice-versa.

### 2.3 - Tensões

A viga está sujeita a um carregamento qualquer de cargas longitudinais e transversais com a única restrição que as cargas transversais passam pelo centro de torção de cada secção.

A tensão normal em cortes transversais será então dada por:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{B}{J_\omega} \omega \quad \dots(2.3)$$

Onde os esforços considerados são:

N : força normal

$M_y, M_z$  : momentos fletores

B : bimomento (\*)

e as características geométricas da secção são:

S : área

$J_y, J_z$  : momentos principais de inércia

$J_\omega$  : momento de inércia setorial

$\omega$  : área setorial (função de s)

As tensões de cisalhamento, além daquelas provocadas pela força cortante, são: a tensão  $\tau_\ell$  de torção livre, linearmente distribuída na espessura, e a tensão  $\tau_{ft}$  de flexo-torção, uniforme na espessura.

#### 2.4 - Energia de deformação

Os deslocamentos  $v_D, w_D$  e  $\phi$ , que caracterizam a posição deformada, são responsáveis pelo aparecimento de tensões complementares  $\sigma_c$  e  $\tau_c$ . Chamando as deformações correspondentes de  $\epsilon_c$  e  $\gamma_c$ , pode-se escrever para a energia específica de deformação:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_c \epsilon_c + \tau_c \gamma_c)$$

O elemento de volume é dado por  $dx \cdot dS$ . Para achar a expressão da energia de deformação, é necessário integrar a expressão acima no volume. Utilizando-se as relações da lei de Hooke se obtém então:

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^{\ell} \left( \int_S \sigma_c^2 dS \right) dx + \frac{1}{2G} \int_0^{\ell} \left( \int_S \tau_c^2 dS \right) dx$$

---

(\*) - No apêndice I encontra-se um resumo da teoria da flexo-torção.

onde E e G são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o módulo de elasticidade transversal.

Na primeira parcela ( $U_1$ ) a tensão  $\sigma_c$  será substituída pela expressão (2.3) onde se consideram agora os esforços correspondentes às tensões complementares. Desprezando, como usualmente se faz, a contribuição da força normal, se obtém após a integração na secção:

$$U_1 = \frac{1}{2E} \int_0^l \left( \frac{M_{yc}^2}{J_y} + \frac{M_{zc}^2}{J_z} + \frac{B_c^2}{J_\omega} \right) dx$$

Os termos em y, z,  $\omega$ , yz,  $\omega y$  e  $\omega z$  desaparecem na integração sobre a secção. Os termos em  $y^2$ ,  $z^2$  e  $\omega^2$  dão respectivamente  $J_z$ ,  $J_y$  e  $J_\omega$ .

Como os esforços, na expressão acima, correspondem aos deslocamentos  $v_D$ ,  $w_D$  e  $\phi$ , valem as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} M_{yc} &= -E J_y w_D'' \\ M_{zc} &= -E J_z v_D'' \\ B_c &= E J_\omega \phi'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

onde a linha representa derivação em relação a x.

Para a segunda parcela ( $U_2$ ) será desprezada a contribuição da força cortante e do momento de flexo-torção, restando somente o momento de torção livre. Com a distribuição esquematizada na figura 2.2, se obtém então:

$$\tau_r = \frac{2M_\ell}{J_t} r \dots\dots\dots(2.5)$$

onde:

$M_\ell$ : momento de torção livre

$J_t$ : momento de inércia à torção

$r$ : ordenada perpendicular ao esqueleto com origem nele (no plano da secção).

Para as secções abertas de parede fina que são tratadas aqui se tem:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

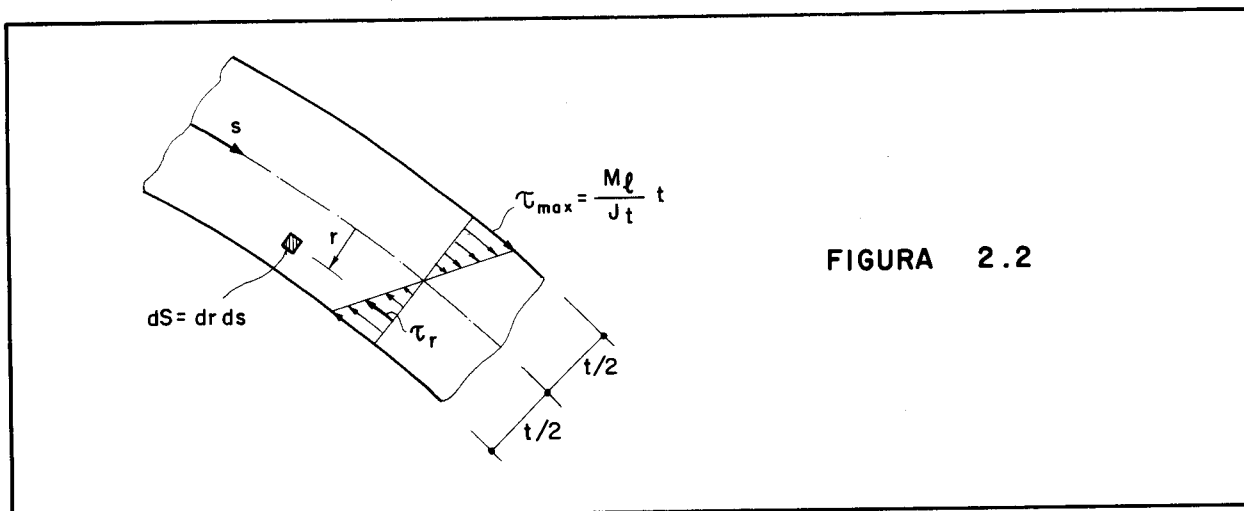


FIGURA 2.2

Para os perfis I, U e H fabricados no Brasil essa característica de secção encontra-se tabelada (3) juntamente com outras.

Substituindo  $\tau_r$  pela expressão (2.5) na segunda parcela da energia de deformação se obtém:

$$U_2 = \frac{1}{2G} \int_0^\ell \left[ \int_s \int_{-t/2}^{+t/2} \left( \frac{4M_\ell^2}{J_t^2} r^2 dr ds \right) \right] dx$$

Ou, efetuando:

$$U_2 = \frac{1}{2G} \int_0^\ell \frac{M_\ell^2}{J_t} dx$$

Para  $M_\ell$  vale a seguinte relação:

$$M_\ell = G J_t \phi' \dots\dots\dots(2.7)$$

Substituindo (2.4) e (2.7), respectivamente, nas expressões de  $U_1$  e  $U_2$ , se obtém finalmente a expressão da energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[ E J_y w_D''^2 + E J_z v_D''^2 + E J_\omega \phi''^2 + G J_t \phi'^2 \right] dx \quad (2.8)$$

## 2.5 - Energia potencial

A energia potencial total de um sistema elástico é composta (4) de duas parcelas: energia potencial dos esforços internos, também chamada de energia de deformação, e energia potencial das cargas.

É necessário então deduzir agora a expressão da energia potencial. Convém lembrar, entretanto, que na expressão de  $U$ , equação (2.8), só entrou a contribuição das tensões complementares trabalhando com as deformações complementares, ambas provocadas pelos deslocamentos  $v_D$ ,  $w_D$  e  $\phi$ . Como, no instante da perda de estabilidade, a viga está submetida a tensões que não estão relacionadas com esses deslocamentos, é necessário levar em consideração, no cálculo da energia total, o trabalho dessas tensões com aqueles deslocamentos.

Essa parcela da energia e as demais parcelas da energia potencial serão deduzidas nos itens a seguir.

2.5.1 - Inicialmente será vista a contribuição da tensão  $\sigma$ , provocada pelos momentos fletores, trabalhando durante a rotação  $\phi$ .

Na figura 2.3a) é indicado um elemento  $dS \cdot dx$  com a

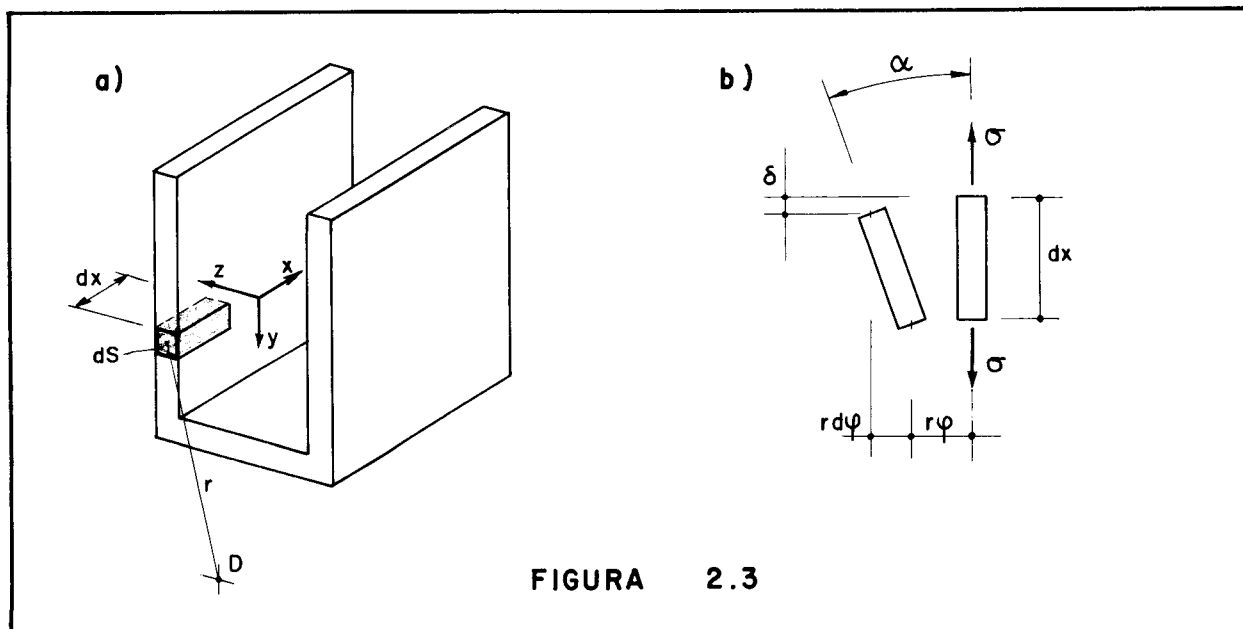


FIGURA 2.3

sua distância  $r$  até o centro de torção; o deslocamento do elemento devido ao giro é como indicado na figura 2.3b. Ainda nessa figura é indicada a distância  $\delta$  de que as duas extremidades do elemento se aproximam, na direção  $x$ . Essa aproximação se dá porque as duas seções separadas por  $dx$  giram de ângulos diferentes, provocando a inclinação do elemento de um ângulo  $\alpha$ .

Tem-se então:

$$\delta = dx(1 - \cos\alpha) = dx \cdot 2 \cdot \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Para ângulo  $\alpha$  pequeno, se pode escrever aproximadamente:

$$\delta = \frac{\alpha^2}{2} dx$$

onde o ângulo  $\alpha$  é dado por:



$$\alpha = \frac{r \, d\phi}{dx} = r \, \phi'$$

Obtém-se então:

$$\delta = \frac{r^2 \phi'^2}{2} dx$$

Para a distância r se pode escrever:

$$r^2 = (y-y_D)^2 + (z-z_D)^2$$

Obtendo-se, então, a expressão final para  $\delta$ :

$$\delta = \frac{(y-y_D)^2 + (z-z_D)^2}{2} \phi'^2 dx$$

A contribuição das tensões  $\sigma$  para a energia será então:

$$T_1 = \int_0^{\ell} \int_S \sigma \, dS \, \delta$$

Desenvolvendo a expressão de  $\delta$  e substituindo-a na expressão acima juntamente com  $\sigma$ , se obtém:

$$T_1 = \int_0^{\ell} \int_S \left( \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \right) \frac{1}{2} (y^2 - 2yy_D + y_D^2 + z^2 - 2zz_D + z_D^2) \phi'^2 \, dS \, dx$$

Efetuada as integrações indicadas chega-se à expressão final de  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \phi'^2 \left[ 2M_y (k_z - z_D) + 2M_z (k_y - y_D) \right] dx \quad \dots (2.9)$$

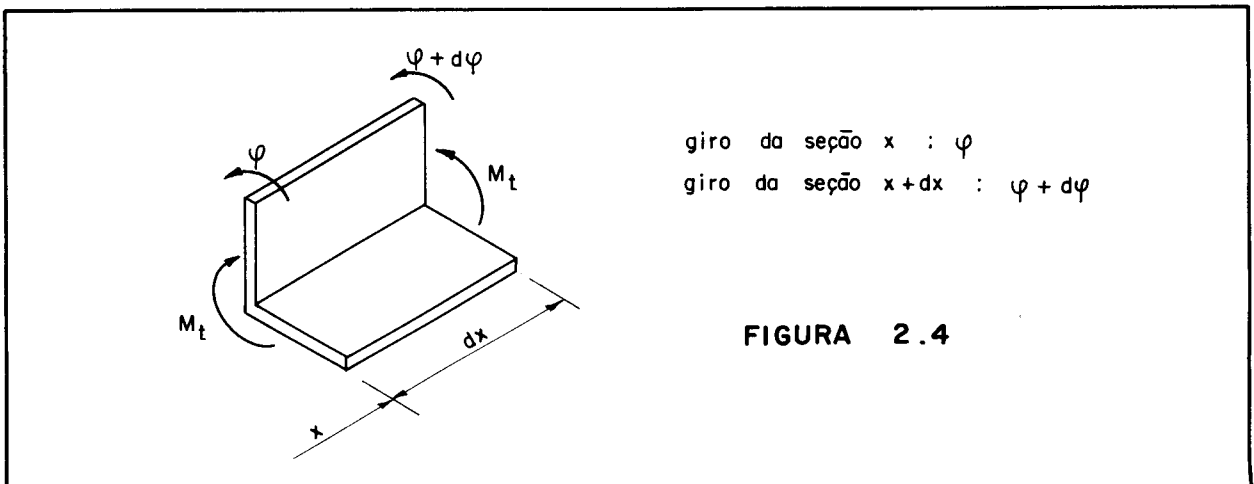
onde estão sendo introduzidas as seguintes características de secção:

$$\left. \begin{aligned} k_y &= \frac{1}{2 J_z} \int_S y(y^2+z^2) dS \\ k_z &= \frac{1}{2 J_y} \int_S z(y^2+z^2) dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.10)$$

que são (1) as coordenadas do centro do círculo de estabilidade nos eixos y e z, respectivamente.

2.5.2 - Parcela da energia devida ao momento torçor

Embora tenha sido assumido que as cargas transversais passem pelo centro de torção, pode, ainda assim, haver o aparecimento de momento torçor antes da perda de estabilidade, quando a viga estiver submetida a um bimomento. Somente esse caso será considerado aqui, para se ter a expressão completa da energia.



Na figura 2.4 está representado um elemento de uma viga submetido ao momento torçor Mt. A energia correspondente ao elemento de comprimento dx será:

$$d T_2 = M_t \phi - M_t (\phi + d\phi)$$

ou

$$d T_2 = -M_t d\phi$$

De onde se obtêm:

$$T_2 = - \int_0^{\ell} M_t \frac{d\phi}{dx} dx$$

ou

$$T_2 = - \int_0^{\ell} M_t \phi' dx \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

Essa parcela, como será visto, não terá influência nos problemas que serão considerados.

2.5.3 - Energia potencial da força normal

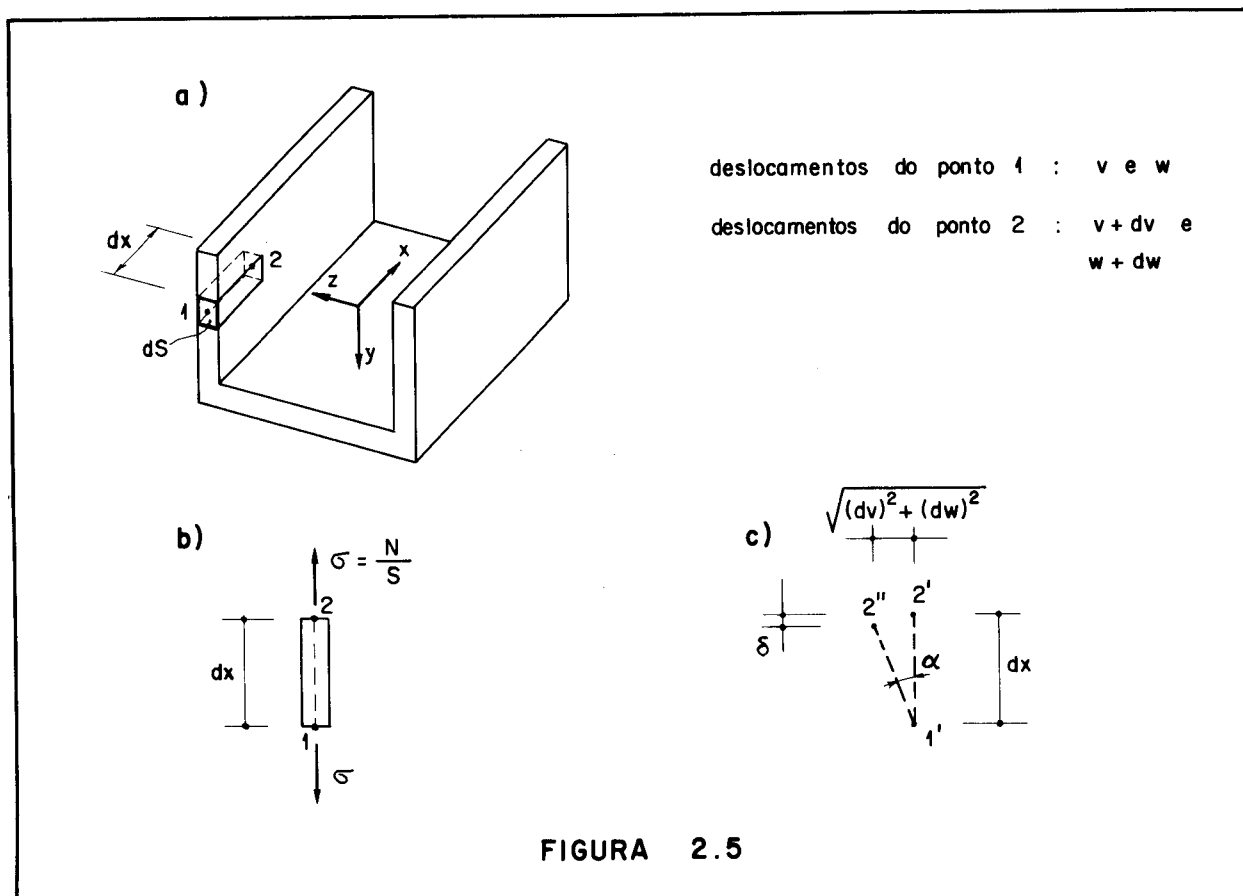
Considere-se novamente, figura 2.5a), o elemento de volume  $dS \cdot dx$  mas agora sofrendo os deslocamentos totais  $v$  e  $w$  dados por (2.2) e submetido à tensão  $\sigma$  provocada pela força normal, como indicado na figura 2.5b).

Considere-se ainda o segmento 1-2 ligando os pontos médios dos elementos de área  $dS$  separados pelo comprimento  $dx$ . As duas extremidades desse elemento sofrerão deslocamentos diferentes o que fará o elemento se inclinar de um ângulo  $\alpha$ , como indicado. Nessa figura 1'-2'' representa a posição final do elemento 1-2 enquanto 1'-2' representa a posição do elemento após a translação paralelamente a si mesmo com deslocamentos  $v$  e  $w$  na direção dos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Como indicado na figura 2.5c), as duas extremidades do elemento se aproximaram, na direção  $x$ , de uma distância  $\delta$  que é dada, como no ítem 2.5.1, por:

$$\delta = \frac{\alpha^2}{2} dx$$

onde o ângulo  $\alpha$  é dado agora, como indicado na figura, por:



$$\alpha = \frac{\sqrt{(dv)^2 + (dw)^2}}{dx}$$

Substituindo essa expressão de  $\alpha$  na expressão de  $\delta$ , se obtêm:

$$\delta = \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) dx \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

A energia potencial da tensão  $\sigma$  durante esse deslocamento  $\delta$  será dada então por:

$$T_3 = \int_0^l \int_S \sigma dS \delta$$

As expressões (2.2) devem agora ser derivadas e substituídas em (2.12); a expressão resultante, juntamente com  $\sigma$ , será utilizada na expressão de  $T_3$ , obtendo-se:

$$T_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \int_S \frac{N}{S} \left[ (v_D' + z\phi' - z_D\phi')^2 + (w_D' - y\phi' + y_D\phi')^2 \right] dS dx$$

Efetuada as operações e integrações indicadas se obtêm:

$$T_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} N \left[ i_D^2 \phi'^2 + 2(w_D'y_D - v_D'z_D)\phi' + v_D'^2 + w_D'^2 \right] dx \quad \dots(2.13)$$

onde está sendo utilizada a seguinte característica geométrica da secção:

$$i_D^2 = y_D^2 + z_D^2 + \frac{J_y + J_z}{S} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

( $i_D$  é o raio de geração polar em relação a um eixo passando pelo centro de torção)

2.5.4 - Energia potencial do bimomento

Uma parte da contribuição do bimomento será análoga à parcela do ítem anterior. Ou seja: considera-se o trabalho das tensões  $\sigma$ , provenientes do bimomento, durante o encurtamento  $\delta$  dado por (2.12):

$$T_4 = \int_0^{\ell} \int_S \frac{B}{J_\omega} \omega dS \delta$$

Com as devidas substituições e realizando as operações e integrações indicadas, se obtêm como expressão final para essa parcela:

$$T_4 = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{U_\omega}{J_\omega} B \phi'^2 dx \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

onde está sendo introduzida a seguinte característica geométrica

trica da secção:

$$U_{\omega} = \int_S \omega(y^2+z^2) dS \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

Essa nova característica de secção, introduzida por Vlassov (1), tem a mesma dimensão do momento setorial de inércia; para secções com um eixo de simetria ela é nula. Como será visto adiante, quando  $U_{\omega}$  é nula o bimomento não alterará o valor da carga crítica mas pode ter influência sobre a espécie de instabilidade.

A outra parte da contribuição do bimomento para a

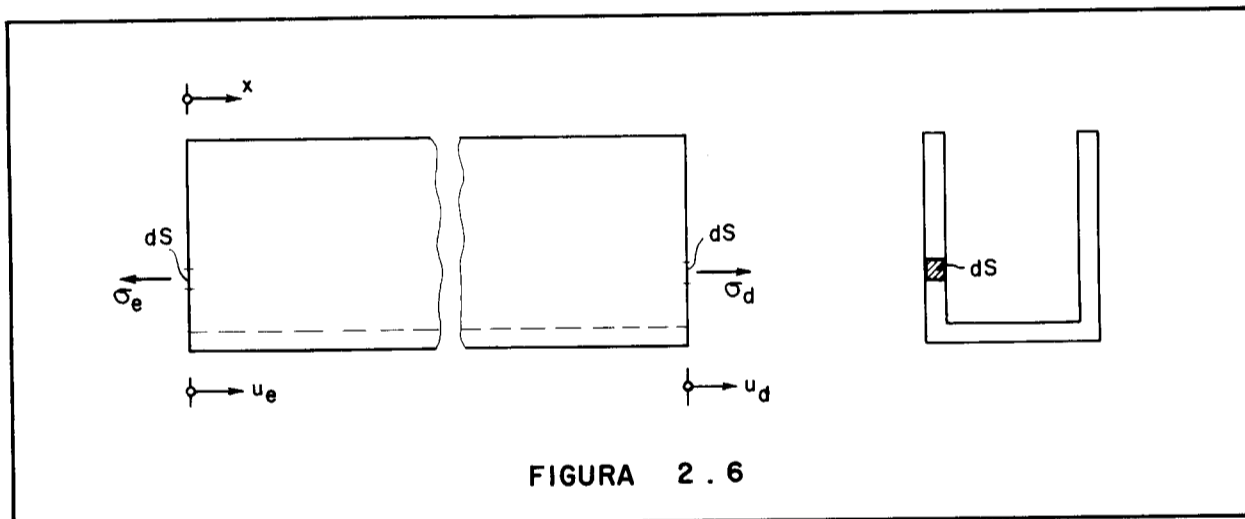


FIGURA 2.6

energia total é o trabalho dos bimotoes aplicados durante o empenamento por eles provocados. Na figura 2.6 o eixo x é orientado da esquerda para a direita; o empenamento u, indicado com seu sentido positivo, nas extremidades é dado respectivamente por:

$$u_e = \omega \phi'_e$$

$$u_d = \omega \phi'_d$$

onde  $\phi'_e$  e  $\phi'_d$  são as derivadas do ângulo de giro nas extremidades.

Supondo que os bimotores  $B_e$  e  $B_d$  sejam aplicados, respectivamente, nas extremidades esquerda e direita por meio de tensões  $\sigma_e$  e  $\sigma_d$ , pode-se escrever para a expressão dessa parcela da energia potencial:

$$T_5 = \int_S \sigma_e u_e dS - \int_S \sigma_d u_d dS$$

ou

$$T_5 = \phi'_e \int_S \sigma_e \omega dS - \phi'_d \int_S \sigma_d \omega dS$$

Pela definição de bimomento, obtêm-se finalmente:

$$T_5 = B_e \phi'_e - B_d \phi'_d \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

Caso os bimotores fossem aplicados por meio de cargas concentradas, o mesmo resultado seria obtido com demonstração análoga.

2.5.5 - Energia potencial das cargas transversais

A carga transversal será constituída por forças concentradas  $P_i$  e força distribuída  $q$ . Suas componentes nas direções dos eixos  $y$  e  $z$  serão, respectivamente:  $P_{yi}$ ,  $P_{zi}$  e  $q_y$ ,  $q_z$ .

A figura 2.7a) mostra uma força genérica  $P_i$  aplicada no ponto A com excentricidade  $e_i$  em relação ao centro de torção D. O ponto A sofrerá, além dos deslocamentos  $v_D$  e  $w_D$  do centro de torção, um deslocamento durante a rotação da secção em torno de D.

Durante essa rotação, o deslocamento da carga  $P_i$  na sua direção é dado por:

$$a = e_i(1 - \cos\phi_i) = e_i \cdot 2\text{sen}^2 \frac{\phi_i}{2}$$

Para ângulos pequenos, esse deslocamento pode ser feito, aproximadamente:

$$a = \frac{e_i \phi_i^2}{2}$$

A parcela da energia potencial correspondente ao deslocamento da carga  $P_i$  durante essa rotação é então:

$$T_6^{(i)} = - P_i \frac{e_i \phi_i^2}{2}$$

Considerando as componentes de  $P_i$  como indicadas

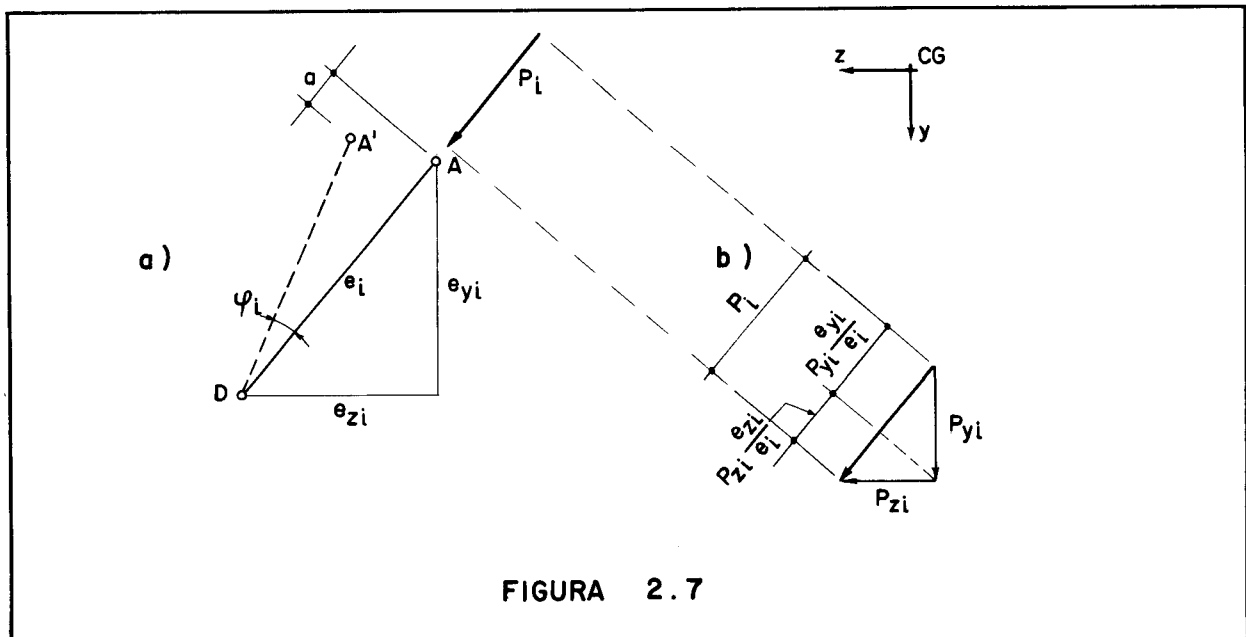


FIGURA 2.7

na figura 2.7b), essa expressão pode ser escrita como:

$$T_6^{(i)} = - \frac{\phi_i^2}{2} e_i \left( P_{zi} \frac{e_{zi}}{e_i} + P_{yi} \frac{e_{yi}}{e_i} \right)$$



De onde:

$$T_6^{(i)} = - \frac{\phi_i^2}{2} (P_{zi} e_{zi} + P_{yi} e_{yi})$$

Para se ter a contribuição total da carga  $P_i$  para a energia potencial, é necessário considerar ainda o trabalho das componentes  $P_{yi}$  e  $P_{zi}$  nos deslocamentos do centro de torção, respectivamente,  $v_{Di}$  e  $w_{Di}$ . Considerando então essa contribuição e ainda as parcelas correspondentes à carga distribuída, cuja elaboração é feita de modo perfeitamente análogo, chega-se à seguinte expressão da energia potencial das cargas transversais:

$$\begin{aligned} T_6 = & - \sum P_{yi} v_{Di} - \sum P_{zi} w_{Di} - \sum \frac{P_{yi} \phi_i^2 e_{yi}}{2} \\ & - \sum \frac{P_{zi} \phi_i^2 e_{zi}}{2} - \int_0^{\ell} q_y v_D dx - \int_0^{\ell} q_z w_D dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{\ell} q_y \phi^2 e_y dx - \frac{1}{2} \int_0^{\ell} q_z \phi^2 e_z dx \quad (2.18) \end{aligned}$$

sendo a somatória estendida a todas as cargas  $P_i$ .

Considere-se agora o princípio dos trabalhos virtuais aplicado ao conjunto de cargas  $P_i$  e  $q$  (com esforços internos correspondentes  $M_y$  e  $M_z$ ) atuando nos deslocamentos  $v_D$  e  $w_D$  (com curvaturas correspondentes  $c_1$  e  $c_2$ ). Pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} \sum P_{yi} v_{Di} + \sum P_{zi} w_{Di} + \int_0^{\ell} q_y v_D dx + \int_0^{\ell} q_z w_D dx \\ + \int_0^{\ell} M_y c_2 dx + \int_0^{\ell} M_z c_1 dx = 0 \quad \dots\dots(2.19) \end{aligned}$$

É necessário ainda eliminar  $c_1$  e  $c_2$  da equação acima. Como indicado na figura 2.8,  $c_y$  e  $c_z$  são as curvaturas das projeções da elástica, respectivamente, nos planos  $xz$  e  $xy$ ;  $c_1$  e  $c_2$  são as curvaturas da elástica nos planos principais após a deformação.

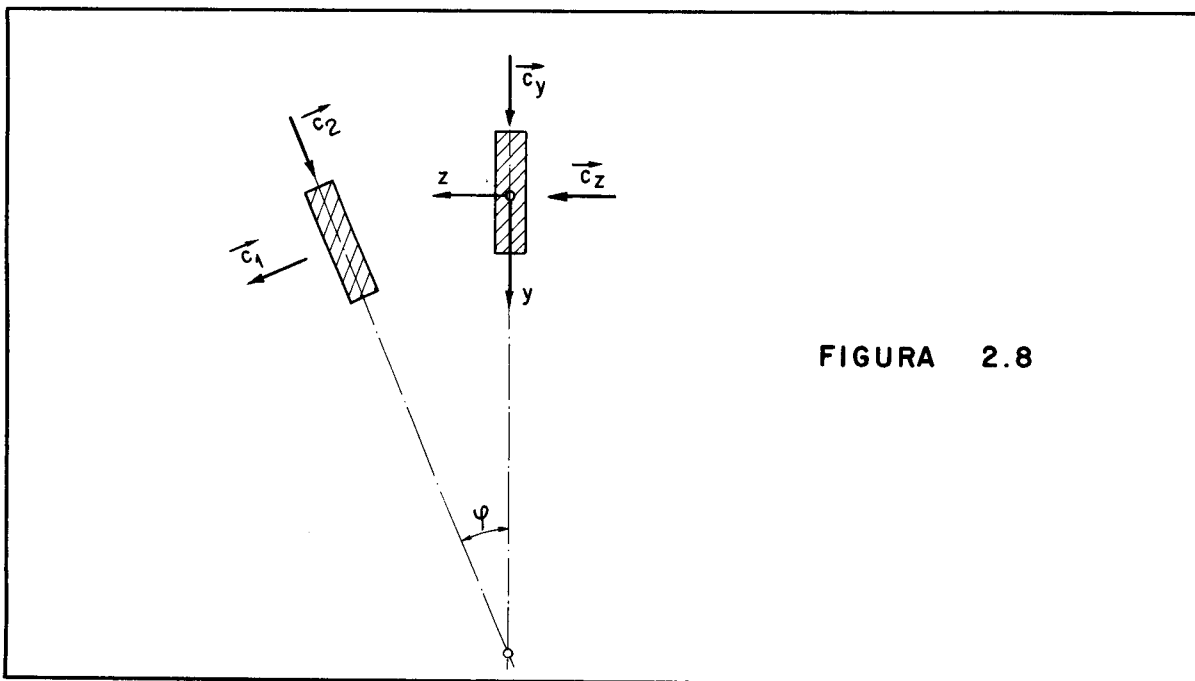


FIGURA 2.8

Da Resistência elementar se sabe que:

$$c_y = w_D''$$

$$c_z = v_D''$$

Da figura 2.8, considerando que  $\phi$  é um ângulo pequeno, pode-se fazer:

$$c_1 = c_z + c_y \phi$$

$$c_2 = c_y - c_z \phi$$

Substituindo as expressões de  $c_y$  e  $c_z$  nas expressões acima, se obtêm:

$$c_1 = v_D'' + w_D'' \phi$$

$$c_2 = w_D'' - v_D'' \phi$$

As expressões anteriores são agora substituídas em (2.19) e esta, por sua vez, em (2.18), resultando assim a expressão final para  $T_6$ :

$$\begin{aligned}
 T_6 = & -\frac{1}{2} \sum P_{yi} \phi_i^2 e_{yi} - \frac{1}{2} \sum P_{zi} \phi_i^2 e_{zi} \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^\ell q_y \phi^2 e_y dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell q_z \phi^2 e_z dx \\
 & + \int_0^\ell (M_y w_D'' - M_y v_D'' \phi + M_z v_D'' + M_z w_D'' \phi) dx \quad \dots(2.20)
 \end{aligned}$$

### 2.6 - Expressão da energia total

Somando os resultados parciais da energia de deformação, equação (2.8), e das diversas parcelas da energia potencial, equações (2.9), (2.11), (2.13), (2.15), (2.17) e (2.20), obtém-se a expressão da energia total que pode ser colocada na forma de um funcional:

$$\begin{aligned}
 V = & \int_0^\ell F(v_D, v_D', v_D'', w_D, w_D', w_D'', \phi, \phi', \phi'') dx - \frac{1}{2} \sum P_{yi} e_{yi} \phi_i^2 \\
 & - \frac{1}{2} \sum P_{zi} e_{zi} \phi_i^2 + B_e \phi_e' - B_d \phi_d' \quad \dots\dots\dots(2.21)
 \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{1}{2} \left\{ E J_y w_D''^2 + E J_z v_D''^2 + E J_\omega \phi''^2 + G J_t \phi'^2 \right. \\
 & + \left[ N i_D^2 + 2M_y (k_z - z_D) + 2M_z (k_y - y_D) + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \right] \phi'^2 \\
 & - (q_y e_y + q_z e_z) \phi^2 + 2M_z w_D'' \phi - 2M_y v_D'' \phi + 2M_z v_D'' + 2M_y w_D'' \\
 & \left. - 2M_t \phi' + 2N (y_D w_D' - z_D v_D') \phi' + N (v_D'^2 + w_D'^2) \right\} \quad \dots\dots\dots(2.22)
 \end{aligned}$$

A energia total será extrema na posição de equilíbrio. Para achar o extremo do funcional V recorre-se às equações de Euler (5) que são no caso em estudo:

$$\frac{\partial F}{\partial v_D} - \left( \frac{\partial F}{\partial v_D'} \right)' + \left( \frac{\partial F}{\partial v_D''} \right)'' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_D} - \left( \frac{\partial F}{\partial w_D'} \right)' + \left( \frac{\partial F}{\partial w_D''} \right)'' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \left( \frac{\partial F}{\partial \phi'} \right)' + \left( \frac{\partial F}{\partial \phi''} \right)'' = 0$$

A aplicação das equações acima para o funcional da energia total conduz às seguintes equações diferenciais nas funções  $v_D$ ,  $w_D$  e  $\phi$ :

$$\left. \begin{aligned} E J_z v_D^{IV} - \left[ N(v_D' - z_D \phi') \right]' - (M_y \phi)'' + M_z'' &= 0 \\ E J_y w_D^{IV} - \left[ N(w_D' + y_D \phi') \right]' + (M_z \phi)'' + M_y'' &= 0 \\ E J_\omega \phi^{IV} - G J_t \phi'' - \left\{ \left[ N i_D^2 + 2M_y(k_z - z_D) + \right. \right. & \dots (2.23) \\ \left. \left. + 2M_z(k_y - y_D) + B \frac{U_\omega}{J_\omega} \right] \phi' \right\}' - (N w_D')' y_D + & \\ + (N v_D')' z_D - (q_y e_y + q_z e_z) \phi + M_z w_D'' - M_y v_D'' - M_t' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Essas equações, deduzidas pelo método da energia, coincidem com aquelas deduzidas pelo método do equilíbrio(1).

As funções  $v_D$ ,  $w_D$  e  $\phi$  soluções dessas equações diferenciais são as funções que tornam extremo o valor do

funcional da energia e caracterizam portanto uma posição de equilíbrio da estrutura.

O método da energia serve, não somente para deduzir as equações diferenciais, como foi feito acima por considerações de cálculo variacional, como também para evitar a sua resolução que, com exceção de alguns casos bem simples de carregamento e vinculação, pode se tornar bastante trabalhosa ou mesmo impossível de ser realizada praticamente.

Uma alternativa consiste na escolha de funções aproximadas para os deslocamentos, sendo essas funções dependentes de alguns parâmetros. A energia passará então a ser uma função desses parâmetros; com isso se transforma o problema de achar o extremo de um funcional em um problema de achar o extremo de uma função de um número finito de variáveis.

Esse processo descrito no parágrafo anterior chama-se processo de Ritz e apresenta o inconveniente da escolha das funções, as quais, para cada caso particular, devem satisfazer as condições de contorno do problema. Além disso as integrações que devem ser feitas podem tornar o problema extremamente trabalhoso.

Uma escolha conveniente dos parâmetros, dos quais dependem as funções, pode tornar as integrações independentes das particularidades de cada caso e assim conduzir à automatização dos cálculos; as condições de vinculação podem ser introduzidas posteriormente de acordo com cada caso, mas também de maneira automática. Um processo com essas características será apresentado no capítulo seguinte.

Convém, entretanto, discutir antes os problemas de estabilidade que podem ocorrer comparando os procedimen-

tos de resolução das equações diferenciais com os dos processos tipo Ritz.

## 2.7 - Problemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> espécie

A perda de estabilidade de um sistema elástico é caracterizada pela passagem do sistema de um estado de equilíbrio para outro.

Nos problemas de 1<sup>a</sup> espécie, também chamados de problemas de auto-valor, as duas formas de equilíbrio são qualitativamente diferentes. Quando o carregamento atinge seu valor crítico, a viga passa a ocupar uma posição de equilíbrio indiferente, caracterizada pelo fato de que as funções  $v_D$ ,  $w_D$  e  $\phi$ , que definem essa nova posição, são determinadas apenas na sua forma.

O problema matemático correspondente de resolução das equações diferenciais é então um problema de auto-valor, sendo a carga crítica determinada pelo menor auto-valor que torna possível a existência de uma posição de equilíbrio diferente da posição inicial.

A resolução de problemas de 1<sup>a</sup> espécie pelo método de Ritz conduz a um sistema de equações homogêneas nos parâmetros; esses parâmetros não podem ser determinados em sua totalidade e uma aproximação para a carga crítica é obtida com a anulação do determinante dos coeficientes dessas equações, o que garante a existência de soluções não triviais.

Nos problemas de 2<sup>a</sup> espécie a passagem de um estado de equilíbrio para outro é caracterizada pela variação apenas quantitativa das funções que definem a posição deslo-

cada. O carregamento crítico é então definido como aquele que permite variações extremamente grandes das funções-deslocamentos para uma variação tão pequena quanto se queira do carregamento.

A resolução de problemas de 2<sup>a</sup> espécie, quer pela resolução das equações diferenciais, quer pelo processo de Ritz, conduz a funções bem determinadas. O que ocorre é que, nesse caso, a teoria linear de 2<sup>a</sup> ordem leva a deslocamentos que são funções não lineares das cargas.

Convém ainda salientar que a energia total do sistema é estacionária quando o carregamento atinge seu valor crítico tanto para problemas de 1<sup>a</sup> espécie como para problemas de 2<sup>a</sup> espécie.

### 3 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DA ENERGIA NA DERIVAÇÃO DE UM PROCESSO AUTOMÁTICO DE CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA

#### 3.1 - Considerações iniciais

Nesse capítulo será retomada a expressão (2.21) da energia total e serão adotadas funções para os deslocamentos. Essas funções serão dependentes de certos parâmetros e então a energia total passará a ser função deles; a escolha conveniente desses parâmetros permitirá a automatização do processo de cálculo da carga crítica.

A expressão (2.21) é geral, abrangendo qualquer carregamento em qualquer tipo de viga ou barra com eixos retos. A única restrição é que as cargas transversais passem pelo centro de torção da secção de maneira a não provocar momento torçor antes da perda de estabilidade; ainda assim, pode haver momento torçor, antes de o carregamento atingir o seu valor crítico, quando a peça estiver submetida a bimomento.

Algumas simplificações serão introduzidas agora na expressão da energia total.

Será suposto que as cargas não produzam bimomento antes da perda de estabilidade, portanto os termos dele derivados serão retirados de (2.21); essa restrição será levantada no capítulo 5, onde será estudado mais detalhadamente o efeito do bimomento nos problemas de estabilidade.

A outra simplificação deriva do fato prático de que os problemas de instabilidade são, em geral, mais importantes nas vigas altas ( $J_z$  bem maior que  $J_y$ ), sendo as cargas contidas no plano  $yx$ ; somente esses casos serão en-



tão considerados aqui. Para outros casos de viga ou carregamento geralmente são mais críticos os problemas de resistência propriamente dita e não os problemas de instabilidade.

Para os problemas obedecendo à restrição acima a perda de estabilidade pode ocorrer por:

1º) Flambagem tipo Euler com o aparecimento somente de deformações de flexão, ou seja: a elástica de flambagem é caracterizada pelos deslocamentos  $w_D$  na direção z;

2º) Instabilidade puramente torcional com o aparecimento somente de deformações de torção: a posição deslocada da viga fica definida pelos ângulos  $\phi$ ;

3º) Instabilidade lateral com o aparecimento simultâneo de  $w_D$  e  $\phi$ .

É possível portanto, para os problemas que serão tratados, eliminar da expressão da energia todos os termos contendo os deslocamentos  $v_D$  e as suas derivadas. Convém salientar que essa eliminação só é feita porque não afeta a determinação da carga crítica: os termos em  $v_D$  são independentes (\*) e conduzem a problemas de flexão no plano yx ou a cargas críticas de valor superior.

Com as simplificações introduzidas a expressão da energia total pode ser escrita como:

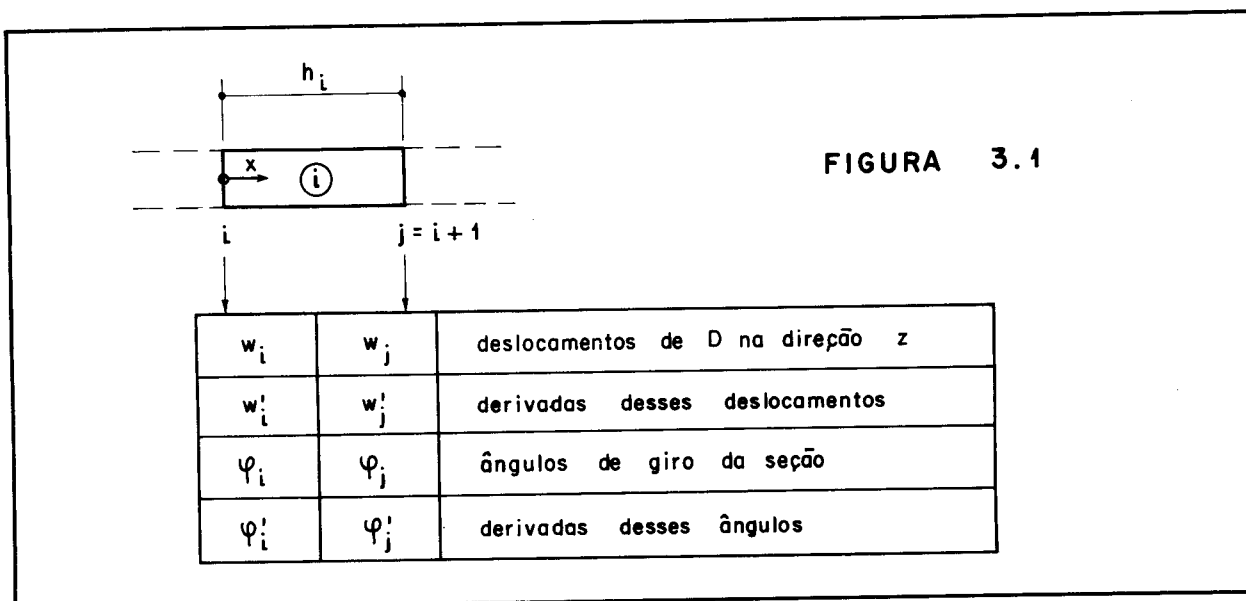
$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EJ_y w_D''^2 + EJ_\omega \phi''^2 + GJ_t \phi'^2 + \left[ Ni_D^2 + 2M_z (k_y - y_D) \right] \phi'^2 - q_y e_y \phi^2 + 2M_z w_D'' \phi + 2Ny_D w_D' \phi' + Nw_D'^2 \right\} dx - \frac{1}{2} \sum P_{yi} e_{yi} \phi_i^2 \dots \dots \dots (3.1)$$

---

(\*) - Como pode ser observado na expressão da energia, para que todos os termos em  $v_D$  sejam independentes o produto  $Nz_D$  deve ser nulo.

3.2 - Funções  $w_D$  e  $\phi$

Serão adotadas agora funções aproximadas para os deslocamentos  $w_D$  e  $\phi$ . Para evitar o problema das condições de contorno (vinculação) serão adotadas funções válidas para um segmento da viga. Um segmento  $i$  será limitado pelas secções  $i$  e  $j = i+1$  como indicado na figura 3.1. Nessa figura estão também indicados os parâmetros que definirão a e-



lástica, tendo sido omitido, para facilidade de notação, o índice D referente ao centro de torção.

Para se fazer  $w_D$  dependente desses parâmetros seja a seguinte função adotada:

$$w_D = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

Obriga-se, a seguir, essa elástica a obedecer os parâmetros pré-escolhidos impondo as seguintes condições:

$$w_D(x = 0) = w_i$$

$$w'_D(x = 0) = w'_i$$

$$w_D(x = h_i) = w_j$$

$$w'_D(x = h_i) = w'_j$$

Obtêm-se então as seguintes equações em a, b, c e

d:

$$d = w_i$$

$$c = w'_i$$

$$ah_i^3 + bh_i^2 + ch_i + d = w_j$$

$$3ah_i^2 + 2bh_i + c = w'_j$$

As quais resolvidas fornecem:

$$a = -\frac{2}{h_i^3} (w_j - w_i) + \frac{1}{h_i^2} (w'_j + w'_i)$$

$$b = \frac{3}{h_i^2} (w_j - w_i) - \frac{1}{h_i} (2w'_i + w'_j)$$

$$c = w'_i$$

$$d = w_i$$

Substituindo esses últimos resultados na expressão de  $w_D$ , obtêm-se finalmente:

$$w_D = f_1(x)w_i + f_2(x)w_j + f_3(x)w'_i + f_4(x)w'_j \quad ..(3.2)$$

Onde

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= 2\left(\frac{x}{h_i}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 + 1 \\ f_2(x) &= -2\left(\frac{x}{h_i}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 \\ f_3(x) &= x\left[\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 - 2\frac{x}{h_i} + 1\right] \\ f_4(x) &= x\left[\left(\frac{x}{h_i}\right)^2 - \frac{x}{h_i}\right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

Procedimento análogo para o ângulo de giro conduz

a:

$$\phi = f_1(x)\phi_i + f_2(x)\phi_j + f_3(x)\phi'_i + f_4(x)\phi'_j \dots(3.4)$$

onde as funções f são dadas ainda pelas expressões (3.3).

Para substituição na expressão de V é necessário ainda preparar:

$$w'_D = f'_1(x)w_i + f'_2(x)w_j + f'_3(x)w'_i + f'_4(x)w'_j$$

$$w''_D = f''_1(x)w_i + f''_2(x)w_j + f''_3(x)w'_i + f''_4(x)w'_j$$

e expressões análogas para  $\phi$ .

### 3.3 - Contribuição do segmento i para a expressão de V

Serão realizadas agora as integrações para a obtenção da expressão de V em função dos parâmetros escolhidos. As integrações são realizadas no comprimento  $h_i$  do segmento e os resultados estão nos itens a seguir.

3.3.1 - Parcelas dependentes somente das características geométricas e elásticas

São as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{1}{2} \int_0^{h_i} EJ_y w_D''^2 dx &= \frac{EJ_y}{2} \left( \frac{12}{h_i^3} w_i^2 + \frac{12}{h_i^3} w_j^2 + \frac{4}{h_i} w_i'^2 \right. \\
 &+ \frac{4}{h_i} w_j'^2 - \frac{24}{h_i^3} w_i w_j + \frac{12}{h_i^2} w_i w_i' + \frac{12}{h_i^2} w_i w_j' \\
 &\left. - \frac{12}{h_i^2} w_j w_i' - \frac{12}{h_i^2} w_j w_j' + \frac{4}{h_i} w_i' w_j' \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1}{2} \int_0^{h_i} EJ_\omega \phi''^2 dx &\text{ - pode ser obtida da anterior pe} \\
 &\text{la substituição de } J_y \text{ por } J_\omega \text{ e} \\
 &\text{de } w \text{ por } \phi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{1}{2} \int_0^{h_i} GJ_t \phi'^2 dx &= \frac{GJ_t}{2} \left( \frac{6}{5h_i} \phi_i^2 + \frac{6}{5h_i} \phi_j^2 + \right. \\
 &+ \frac{2h_i}{15} \phi_i'^2 + \frac{2h_i}{15} \phi_j'^2 - \frac{12}{5h_i} \phi_i \phi_j + \frac{1}{5} \phi_i \phi_i' + \\
 &\left. + \frac{1}{5} \phi_i \phi_j' - \frac{1}{5} \phi_j \phi_i' - \frac{1}{5} \phi_j \phi_j' - \frac{h_i}{15} \phi_i' \phi_j' \right)
 \end{aligned}$$

3.3.2 - Parcelas dependentes dos esforços axiais

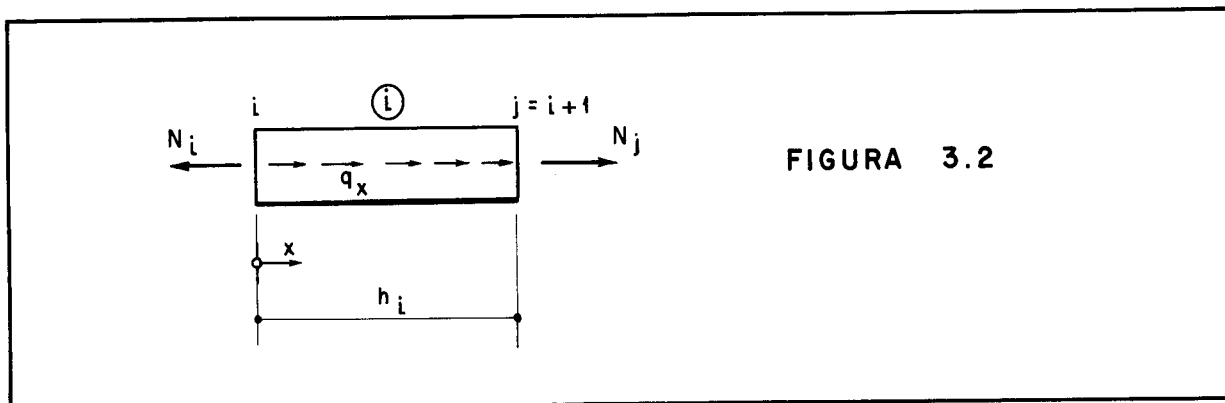
Como esquematizado na figura 3.2 sejam:

$N_i$ : força normal na secção  $i$

$q_{xi}$ : carga axial distribuída no elemento  $i$

Então a força normal  $N$  para qualquer secção do segmento  $i$  poderá ser escrita como:

$$N = N_i - q_{xi} x$$



As integrais que contêm N deverão ser parceladas em duas. Obtêm-se então as seguintes integrais:

$$d) \frac{1}{2} \int_0^{h_i} N_i i_D^2 \phi'^2 dx - \text{pode ser obtida de 3.3.1c) pela substituição de } GJ_t \text{ por } N_i i_D^2$$

$$e) - \frac{1}{2} \int_0^{h_i} q_{xi} i_D^2 x \phi'^2 dx = - \frac{q_{xi} i_D^2}{2} \left( \frac{3}{5} \phi_i^2 + \frac{3}{5} \phi_j^2 + \frac{h_i^2}{30} \phi_i'^2 + \frac{h_i^2}{10} \phi_j'^2 - \frac{6}{5} \phi_i \phi_j + \frac{h_i}{5} \phi_i \phi_i' - \frac{h_i}{5} \phi_j \phi_i' - \frac{h_i^2}{30} \phi_i' \phi_j' \right)$$

$$f) \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2y_D N_i w_D' \phi' dx = y_D N_i \left[ \frac{6}{5h_i} (\phi_i w_i' + \phi_j w_j' - \phi_i w_j' - \phi_j w_i') + \frac{2h_i}{15} (\phi_i' w_i' + \phi_j' w_j') - \frac{h_i}{30} (\phi_i' w_j' + \phi_j' w_i') + \frac{1}{10} (\phi_i w_i' + \phi_i w_j' - \phi_j w_i' - \phi_j w_j' + \phi_i' w_i + \phi_j' w_i - \phi_i' w_j - \phi_j' w_j) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad & - \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2y_D q_{xi} x w_D' \phi' dx = - y_D q_{xi} \left[ \frac{3}{5} (\phi_i w_i + \right. \\
 & + \phi_j w_j - \phi_i w_j - \phi_j w_i) - \frac{h_i^2}{60} (\phi_i' w_j' + \phi_j' w_i') + \\
 & + \frac{h_i^2}{30} \phi_i' w_i' + \frac{h_i^2}{10} \phi_j' w_j' + \frac{h_i}{10} (\phi_i w_i' + \phi_i' w_i - \\
 & \left. - \phi_j w_i' - \phi_i' w_j) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{h)} \quad \frac{1}{2} \int_0^{h_i} N_i w_D'^2 dx \quad - \text{pode ser obtida de 3.3.1c) pe} \\
 \text{la substituição de } GJ_t \text{ por } N_i \\
 \text{e de } \phi \text{ por } w.$$

$$\text{i)} \quad - \frac{1}{2} \int_0^{h_i} q_{xi} x w_D'^2 dx \quad - \text{pode ser obtida de 3.3.2e)} \\
 \text{pela supressão de } i_D^2 \text{ e pe-} \\
 \text{la substituição de } \phi \text{ por } w.$$

### 3.3.3 - Parcelas dependentes do momento fletor

De acordo com a figura 3.3, o momento fletor em qualquer secção do segmento i pode ser escrito como:

$$M_z = M_i + Q_i x - \frac{1}{2} q_{yi} x^2$$

Onde

$M_i$  : momento fletor na secção i

$Q_i$  : força cortante na secção i

$q_{yi}$  : carga transversal distribuída no segmento i

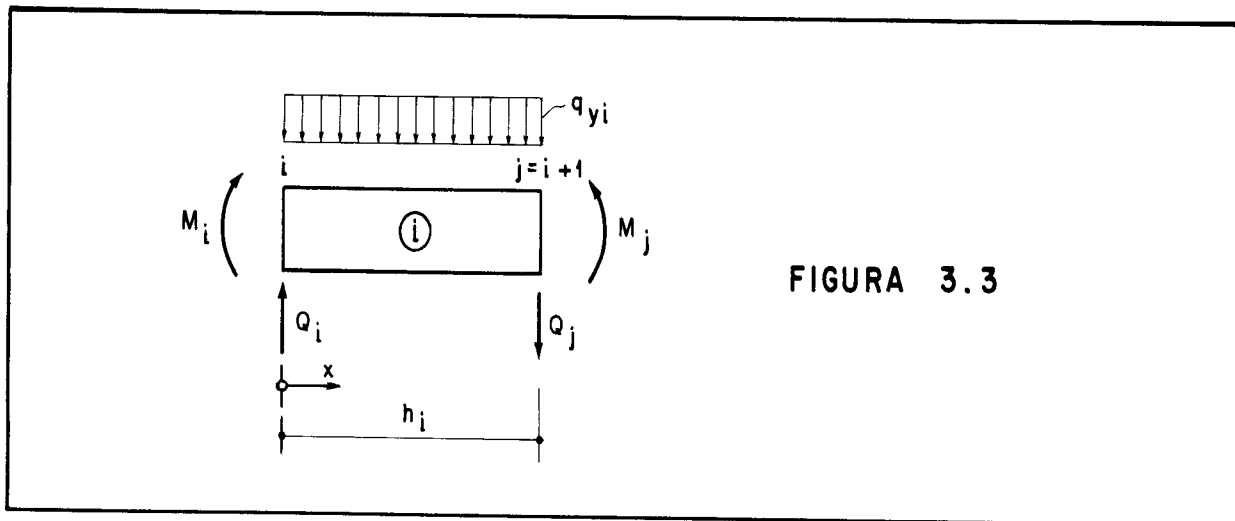


FIGURA 3.3

As integrais contendo  $M_z$  serão parceladas em três.  
 Obtém-se então as seguintes integrais:

$$j) \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2M_i (k_y - y_D) \phi'^2 dx - \text{pode ser obtida de 3.3.} \\
 .1c) \text{ pela substituição} \\
 \text{de } \frac{GJt}{2} \text{ por } M_i (k_y - y_D)$$

$$k) \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2Q_i x (k_y - y_D) \phi'^2 dx - \text{pode ser obtida de 3.3.} \\
 .2e) \text{ pela substituição} \\
 \text{de } \left( -\frac{q_x i}{2} \frac{i_D^2}{2} \right) \text{ por} \\
 Q_i (k_y - y_D)$$

$$l) - \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2 \frac{q_{yi}}{2} x^2 (k_y - y_D) \phi'^2 dx = - \frac{1}{2} q_y (k_y - \\
 - y_D) \left[ \frac{12h_i}{35} \phi_i^2 + \frac{12h_i}{35} \phi_j^2 + \frac{2h_i^3}{105} \phi_i'^2 + \right. \\
 + \frac{3h_i^3}{35} \phi_j'^2 - \frac{24h_i}{35} \phi_i \phi_j + \frac{h_i^2}{7} \phi_i \phi_i' \\
 \left. - \frac{2h_i^2}{35} \phi_i \phi_j' - \frac{h_i^2}{7} \phi_j \phi_i' + \frac{2h_i^2}{35} \phi_j \phi_j' - \frac{h_i^3}{35} \phi_i' \phi_j' \right]$$



$$\begin{aligned}
 \text{m)} \quad \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2M_i w_D'' \phi dx &= M_i \left[ \frac{6}{5h_i} (-\phi_i w_i - \phi_j w_j + \phi_i w_j + \phi_j w_i) \right. \\
 &- \frac{2h_i}{15} (\phi_i' w_i' + \phi_j' w_j') + \frac{h_i}{30} (\phi_i' w_j' + \phi_j' w_i') + \\
 &+ \frac{11}{10} (\phi_j w_j' - \phi_i w_i') + \frac{1}{10} (-\phi_i w_j' + \phi_j w_i' - \phi_i' w_i + \phi_i' w_j - \\
 &\left. - \phi_j' w_i + \phi_j' w_j) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{n)} \quad \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2Q_i x w_D'' \phi dx &= Q_i \left[ \frac{1}{10} (-\phi_i w_i + \phi_i w_j) - \right. \\
 &- \frac{11}{10} (\phi_j w_i - \phi_j w_j) + \frac{h_i}{5} (-\phi_i w_i' + \phi_j w_i') + \\
 &+ \frac{h_i}{10} (\phi_i w_j' - \phi_j w_i' + \phi_j' w_j) + \frac{9h_i}{30} \phi_j w_j' - \frac{h_i^2}{10} \phi_j' w_j' + \\
 &\left. + \frac{h_i^2}{30} (\phi_i' w_j' - \phi_i' w_i') \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{o)} \quad - \frac{1}{2} \int_0^{h_i} 2 \frac{q_{yi}}{2} x^2 w_D'' \phi dx &= - \frac{q_{yi}}{2} \left[ \frac{h_i}{35} (\phi_i w_i - \right. \\
 &- \phi_i w_j) + \frac{34h_i}{35} (\phi_j w_i - \phi_j w_j) + \frac{h_i^2}{70} (\phi_i' w_i - \phi_i' w_j) + \\
 &+ \frac{3h_i^2}{35} (\phi_j' w_j - \phi_j' w_i) - \frac{11h_i^2}{210} \phi_i w_i' + \frac{17h_i^2}{210} \phi_i w_j' + \\
 &+ \frac{23h_i^2}{105} \phi_j w_i' + \frac{79h_i^2}{105} \phi_j w_j' + \frac{h_i^3}{42} \phi_i' w_j' - \\
 &\left. - \frac{h_i^3}{105} (\phi_j' w_i' + \phi_i' w_i') - \frac{8h_i^3}{105} \phi_j' w_j' \right]
 \end{aligned}$$

### 3.3.4 - Parcela dependente da carga transversal distribuída

A carga distribuída ( $q_{yi}$ ) no segmento  $i$ , aplicada

com uma excentricidade  $e_{yi}$  em relação ao centro de torção, fornece a última integral que é:

$$p) - \frac{1}{2} \int_0^{h_i} q_{yi} e_{yi} \phi^2 dx = - \frac{1}{2} q_{yi} e_{yi} \left[ \frac{13h_i}{35} (\phi_i^2 + \phi_j^2) + \frac{h_i^3}{105} (\phi_i'^2 + \phi_j'^2) + \frac{9h_i}{35} \phi_i \phi_j + \frac{11h_i^2}{105} (\phi_i \phi_i' - \phi_j \phi_j') - \frac{h_i^3}{70} \phi_i' \phi_j' + \frac{13h_i^2}{210} (\phi_j \phi_i' - \phi_i \phi_j') \right]$$

### 3.3.5 - Parcelas dependentes da carga concentrada

Deve ser lembrado que, para cada secção i ou j, pode existir ainda mais um termo da energia, o que fornece mais as seguintes parcelas:

$$q) - \frac{1}{2} (P_{yi} e_{yi} \phi_i^2 + P_{yj} e_{yj} \phi_j^2)$$

onde  $e_y$  é a excentricidade da carga P em relação ao centro de torção.

### 3.4 - Energia total

Somando todas as contribuições de a) até q) obtém-se a expressão da energia  $V_i$  correspondente ao segmento i. A energia total será então:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \dots \dots \dots (3.5)$$

onde n é o número de segmentos em que foi dividida a viga.

A energia torna-se então uma função quadrática dos  $4(n+1)$  parâmetros  $w_i, w_i', \phi_i$  e  $\phi_i'$ . Quando o carregamen-

to atingir seu valor crítico, a energia é estacionária, como já foi visto e então se pode escrever:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial w_i} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial w'_i} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_i} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi'_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

Ao todo são  $4(n+1)$  equações lineares e homogêneas nos parâmetros mencionados. Para soluções não triviais, o determinante dos coeficientes deve ser nulo, ou seja, o problema é um problema de auto-valor caracterizado pela indeterminação das funções que definem a posição deslocada da viga. Trata-se portanto de problemas de 1ª espécie; será visto no capítulo 5 que a consideração do bimomento leva a problemas de 2ª espécie.

O problema consiste então em se procurar o carregamento que anula o determinante da matriz dos coeficientes das equações (3.6). Essa matriz pode ser escrita condensadamente como:

$$[A] = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial g_i \partial g_j} \right] \dots\dots\dots(3.7)$$

onde  $g$  representa qualquer um dos parâmetros  $w$  ou  $\phi$ .

### 3.5 - Construção da matriz [A]

Inicialmente se constrói a matriz elementar correspondente ao segmento  $i$  de extremidades  $i$  e  $j = i+1$ . Essa matriz é dada por:

$$[a]_i = \left[ \begin{array}{c} \partial^2 v_i \\ \partial g_i \quad \partial g_j \end{array} \right]$$

Essa matriz elementar, de tamanho  $8 \times 8$ , e evidentemente simétrica, será parcelada em 3 matrizes somente para facilitar sua apresentação. Essas 3 matrizes são as seguintes:

1<sup>a</sup>) Matriz das características geométricas e elásticas (ver página 40);

2<sup>a</sup>) Matriz dos esforços solicitantes (ver página 41);

3<sup>a</sup>) Matriz das cargas (ver página 42).

	$w_i$	$\varphi_i$	$\varphi_i'$	$w_j$	$w_j'$	$\varphi_j$	$\varphi_j'$
$\frac{\partial V}{\partial w_i}$	$\frac{12EJ_i}{h_i^3}$	$\frac{6EJ_i}{2h_i^2}$		$-\frac{12EJ_i}{h_i^3}$	$\frac{6EJ_i}{h_i^2}$		
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}$		$\frac{4EJ_i}{h_i}$		$-\frac{6EJ_i}{h_i^2}$	$\frac{2EJ_i}{h_i}$		
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i'}$			$\frac{6EJ_i}{h_i^2} + \frac{1}{10} GJ_i$			$-\frac{12EJ_i}{h_i^3} + \frac{6}{5} \frac{GJ_i}{h_i}$	$\frac{6EJ_i}{h_i^2} + \frac{1}{10} GJ_i$
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i''}$			$\frac{4EJ_i}{h_i} + \frac{2}{15} h_i GJ_i$			$-\frac{6EJ_i}{h_i^2} - \frac{1}{10} GJ_i$	$\frac{2EJ_i}{h_i} - \frac{4}{30} h_i GJ_i$
$\frac{\partial V}{\partial w_j}$				$\frac{12EJ_i}{h_i^3}$	$-\frac{6EJ_i}{h_i^2}$		
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_j}$					$\frac{4EJ_i}{h_i}$		
	Matriz das características geométricas e elásticas ( simétrica )						
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_j'}$						$\frac{12EJ_i}{h_i^3} + \frac{6}{5} \frac{GJ_i}{h_i}$	$-\frac{6EJ_i}{h_i^2} - \frac{1}{10} GJ_i$
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_j''}$							$\frac{4EJ_i}{h_i} + \frac{2}{15} h_i GJ_i$

	$w_i$	$\varphi_i$	$\varphi_i'$	$w_j$	$w_j'$	$\varphi_j$	$\varphi_j'$
$\frac{\partial v}{\partial w_1}$	$\frac{6}{5} \frac{N_i}{h_i}$	$-\frac{6}{5} \frac{M_i}{h_i} - \frac{1}{10} Q_i + \frac{6}{5} \frac{N_i}{\gamma_D h_i}$	$-\frac{1}{10} M_i + \frac{1}{10} \gamma_D N_i$	$-\frac{6}{5} \frac{N_i}{h_i}$	$\frac{1}{10} N_i$	$\frac{6}{5} \frac{M_i}{h_i} + \frac{11}{10} Q_i - \frac{6}{5} \frac{N_i}{\gamma_D h_i}$	$-\frac{1}{10} M_i - \frac{1}{10} h_i Q_i + \frac{1}{10} \gamma_D N_i$
$\frac{\partial v}{\partial w_1'}$		$-\frac{11}{10} M_i - \frac{1}{5} h_i Q_i + \frac{1}{10} \gamma_D N_i$	$-\frac{2}{15} h_i M_i - \frac{1}{30} h_i^2 Q_i + \frac{2}{15} \gamma_D h_i N_i$	$-\frac{1}{10} N_i$	$-\frac{1}{30} h_i N_i$	$\frac{1}{10} M_i + \frac{1}{5} h_i Q_i - \frac{1}{10} \gamma_D N_i$	$\frac{1}{30} h_i M_i - \frac{1}{30} \gamma_D h_i N_i$
$\frac{\partial v}{\partial \varphi_1}$		$\frac{6}{5} \frac{2 N_i}{10 h_i} + \frac{6}{5} Q_i (k_y - \gamma_D) + \frac{12}{5} \frac{M_i}{h_i} (k_y - \gamma_D)$	$\frac{1}{10} i_0^2 N_i + \frac{1}{5} M_i (k_y - \gamma_D) + \frac{1}{5} h_i Q_i (k_y - \gamma_D)$	$\frac{6}{5} \frac{M_i}{h_i} + \frac{1}{10} Q_i - \frac{6}{5} \frac{N_i}{\gamma_D h_i}$	$-\frac{1}{10} M_i + \frac{1}{10} h_i Q_i + \frac{1}{10} \gamma_D N_i$	$-\frac{6}{5} \frac{2 N_i}{10 h_i} - \frac{6}{5} Q_i (k_y - \gamma_D) - \frac{12}{5} \frac{M_i}{h_i} (k_y - \gamma_D)$	$-\frac{1}{10} i_0^2 N_i - \frac{1}{40} i_0^2 N_i + \frac{1}{5} M_i (k_y - \gamma_D)$
$\frac{\partial v}{\partial \varphi_1'}$			$\frac{2}{15} i_0^2 h_i N_i + \frac{4}{15} h_i M_i (k_y - \gamma_D) + \frac{4}{15} h_i^2 Q_i (k_y - \gamma_D)$	$\frac{1}{10} M_i - \frac{1}{10} \gamma_D N_i$	$\frac{1}{30} h_i M_i + \frac{1}{30} h_i^2 Q_i - \frac{1}{30} \gamma_D h_i N_i$	$-\frac{1}{10} i_0^2 N_i - \frac{1}{15} h_i M_i (k_y - \gamma_D) - \frac{1}{30} h_i^2 Q_i (k_y - \gamma_D)$	$-\frac{1}{30} i_0^2 h_i N_i - \frac{1}{15} h_i M_i (k_y - \gamma_D) - \frac{1}{30} h_i^2 Q_i (k_y - \gamma_D)$
$\frac{\partial v}{\partial w_j}$			$\frac{6}{5} \frac{N_i}{h_i}$	$-\frac{1}{10} N_i$	$-\frac{1}{10} N_i$	$-\frac{6}{5} \frac{M_i}{h_i} - \frac{11}{10} Q_i + \frac{6}{5} \frac{N_i}{\gamma_D h_i}$	$\frac{1}{10} M_i + \frac{1}{10} h_i Q_i - \frac{1}{10} \gamma_D N_i$
$\frac{\partial v}{\partial w_j'}$						$\frac{11}{10} M_i + \frac{9}{10} h_i Q_i - \frac{1}{10} \gamma_D N_i$	$-\frac{2}{15} h_i M_i - \frac{1}{10} h_i^2 Q_i + \frac{2}{15} \gamma_D h_i N_i$
$\frac{\partial v}{\partial \varphi_j}$						$\frac{6}{5} \frac{2 N_i}{10 h_i} + \frac{12}{5} \frac{M_i}{h_i} (k_y - \gamma_D) + \frac{6}{5} Q_i (k_y - \gamma_D)$	$-\frac{1}{10} i_0^2 N_i - \frac{1}{5} M_i (k_y - \gamma_D)$
$\frac{\partial v}{\partial \varphi_j'}$							$\frac{2}{15} i_0^2 h_i N_i + \frac{4}{15} h_i M_i (k_y - \gamma_D) + \frac{4}{15} h_i^2 Q_i (k_y - \gamma_D)$

Matriz dos esforços solicitantes  
( simétrica )

	$w_i$	$w_i$	$\varphi_i$	$\varphi_i$	$\varphi_i$	$w_j$	$w_j$	$\varphi_j$	$\varphi_j$
$\frac{\partial V}{\partial w_1}$	$-\frac{3}{5} q_{xi}$	$-\frac{1}{10} h_1^2 q_{xi}$	$-\frac{1}{70} h_1 q_{yi} - \frac{3}{5} y_D q_{xi}$	$-\frac{1}{140} h_1^2 q_{yi} - \frac{1}{10} h_1 y_D q_{xi}$	$\frac{3}{5} q_{xi}$			$-\frac{17}{35} h_1 q_{yi} + \frac{3}{5} y_D q_{xi}$	$\frac{3}{70} h_1^2 q_{yi}$
$\frac{\partial V}{\partial w_1}$		$-\frac{1}{30} h_1^2 q_{xi}$	$\frac{11}{420} h_1^2 q_{yi} - \frac{1}{10} h_1 y_D q_{xi}$	$\frac{1}{210} h_1^3 q_{yi} - \frac{1}{30} h_1^2 y_D q_{xi}$	$\frac{1}{10} h_1 q_{xi}$			$-\frac{23}{210} h_1^2 q_{yi} + \frac{1}{10} h_1 y_D q_{xi}$	$\frac{1}{210} h_1^3 q_{yi} + \frac{1}{60} h_1^2 y_D q_{xi}$
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}$			$-\frac{3}{5} y_D q_{xi} - \frac{12}{35} h_1 q_{yi} (k_y - y_D) - \frac{13}{35} h_1^2 q_{yi} e_{yi} - P_{yi} e_{yi}$	$-\frac{1}{10} h_1^2 q_{xi} - \frac{11}{210} h_1^2 q_{yi} - \frac{1}{14} h_1^2 q_{yi} (k_y - y_D)$	$\frac{1}{70} h_1 q_{yi} + \frac{3}{5} y_D q_{xi}$			$\frac{3}{5} y_D q_{xi} - \frac{9}{70} h_1 q_{yi} e_{yi} + \frac{12}{35} h_1 q_{yi} (k_y - y_D) - \frac{13}{420} h_1^2 q_{yi} e_{yi}$	$\frac{1}{35} h_1^2 q_{yi} (k_y - y_D) + \frac{13}{420} h_1^2 q_{yi} e_{yi}$
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}$				$-\frac{1}{105} h_1^3 q_{yi} e_{yi} - \frac{2}{105} h_1^3 q_{yi} (k_y - y_D) - \frac{1}{30} h_1^2 y_D q_{xi}$	$\frac{1}{140} h_1^2 q_{yi} + \frac{1}{10} h_1 y_D q_{xi}$			$\frac{1}{10} h_1^2 q_{xi} + \frac{1}{14} h_1^2 q_{yi} (k_y - y_D) - \frac{13}{420} h_1^2 q_{yi} e_{yi}$	$\frac{1}{60} h_1^2 y_D q_{xi} + \frac{1}{70} h_1^3 q_{yi} (k_y - y_D) + \frac{1}{140} h_1^3 q_{yi} e_{yi}$
$\frac{\partial V}{\partial w_1}$					$-\frac{3}{5} q_{xi}$			$\frac{17}{35} h_1 q_{yi} - \frac{3}{5} y_D q_{xi}$	$-\frac{3}{70} h_1^2 q_{yi}$
$\frac{\partial V}{\partial w_1}$								$-\frac{79}{210} h_1^2 q_{yi}$	$\frac{4}{105} h_1^3 q_{yi} - \frac{1}{10} h_1^2 y_D q_{xi}$
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}$								$-\frac{3}{5} y_D q_{xi} - \frac{13}{35} h_1 q_{yi} e_{yi} - \frac{12}{35} h_1 q_{yi} (k_y - y_D) - P_{yi} e_{yi}$	$-\frac{1}{35} h_1^2 q_{yi} (k_y - y_D) + \frac{11}{210} h_1^2 q_{yi} e_{yi}$
$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}$									$-\frac{1}{10} h_1^2 y_D q_{xi} - \frac{2}{35} h_1^3 q_{yi} (k_y - y_D) - \frac{1}{405} h_1^3 q_{yi} e_{yi}$

Matriz das cargas (simétrica)

A matriz elementar  $[a]_i$  é obtida como a soma das 3 matrizes. Nessas matrizes cada linha corresponde a uma das equações (3.6); cada coluna contém os coeficientes do mesmo parâmetro. Para melhor visualização cada coluna é encimada com o parâmetro respectivo e cada linha é precedida pela derivada de  $V_i$  que entra em cada equação.

A matriz  $[A]$  referente a toda a viga é construída pela superposição conveniente das matrizes  $[a]_i$ , bastando para isso conhecer o significado acima especificado de cada linha ou coluna. Essa superposição é esquematizada na figura 3.4. O tamanho da matriz  $[A]$  é de  $4(n+1) \times 4(n+1)$  porque

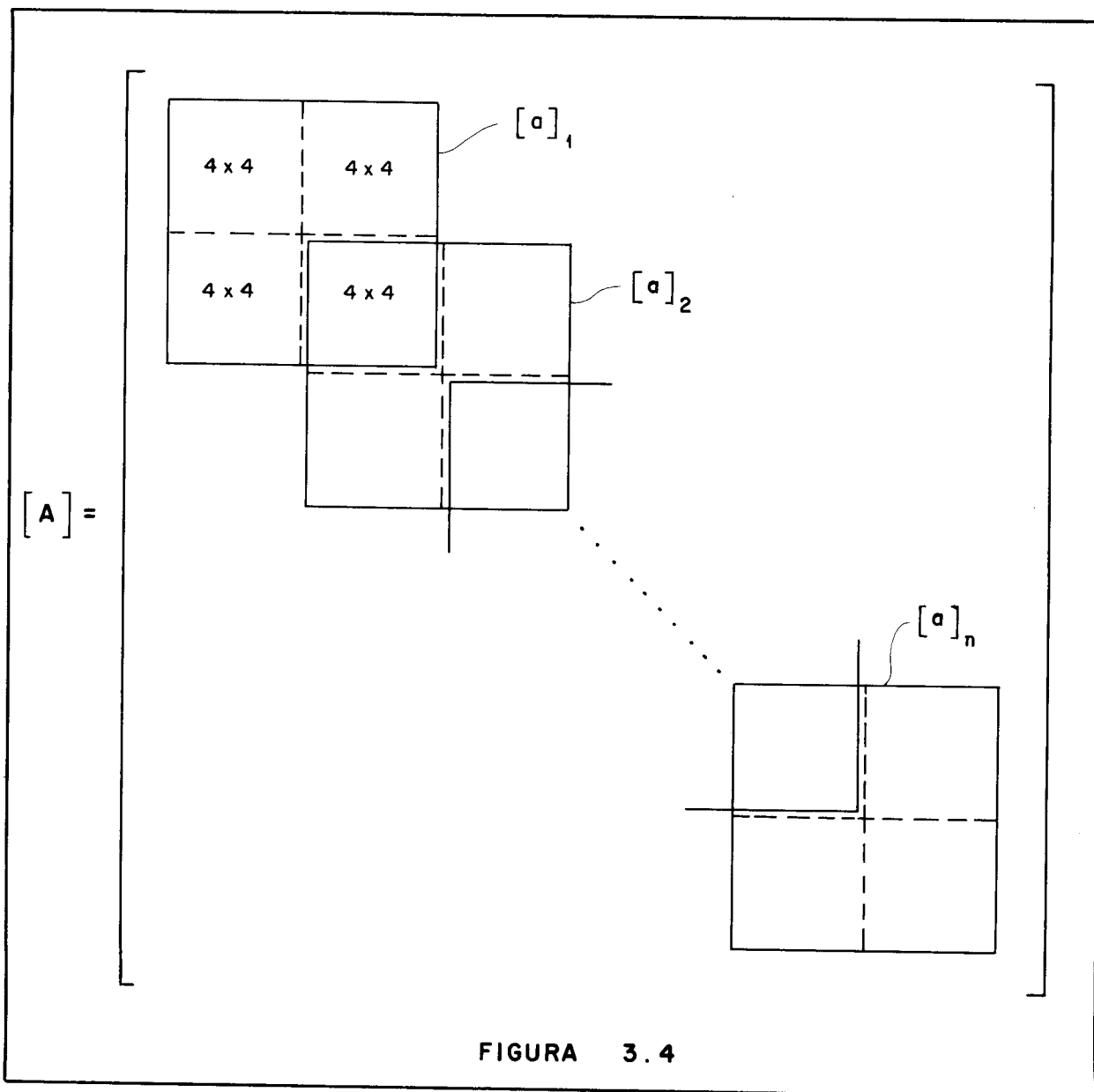


FIGURA 3.4



cada uma das (n+1) secções fornece 4 parâmetros. Os elementos não provenientes das  $[a]_i$  são nulos.

Deve ser tomado um certo cuidado com os termos  $-P_{yi} e_{yi}$  e  $-P_{yj} e_{yj}$  para ser evitada a duplicação. De facto, tomando uma secção intermediária, a secção 3 por exemplo: na matriz elementar correspondente ao segmento i=2, ela entra como secção j=3 mas no segmento i=3, ela entra como secção i=3 mesmo. Para evitar essa duplicação, todas as cargas concentradas excêntricas aplicadas em secções intermediárias devem ser divididas por 2 quando entrarem na composição da matriz.

### 3.6 - Condições de vinculação

Algumas das coordenadas  $w_i$  ou  $\phi_i$  serão nulas: são aquelas correspondentes às secções onde a viga está vinculada. Serão considerados os seguintes tipos de vínculos, definidos por meio dos deslocamentos que eles impedem:

#### 1º) vínculo de garfo

$$w_i = 0$$

$$\phi_i = 0$$

#### 2º) engastamento móvel

$$w_i = 0$$

$$w'_i = 0$$

$$\phi_i = 0$$

39) engastamento fixo

$$w_i = 0$$

$$w'_i = 0$$

$$\phi_i = 0$$

$$\phi'_i = 0$$

A diferença entre esses dois últimos tipos reside no impedimento dos deslocamentos longitudinais. De fato o empenamento devido ao bimomento, como já foi mencionado no ítem 2.5.4, é dado por:

$$u = \omega \phi'$$

Então, se o empenamento for impedido, se tem necessariamente  $\phi' = 0$ .

Quanto à vinculação da viga no plano do carregamento (xy) será a usual da isostática.

A anulação de um parâmetro conduziria à eliminação da linha e coluna correspondentes da matriz  $[A]$ ; essa eliminação obrigaria a um novo arranjo da matriz. Para evitar essa dificuldade, pode ser usado um método alternativo de se fornecer à matriz as informações sobre as condições de vinculação. Esse método consiste em se anularem todos os elementos da linha e da coluna consideradas, com exceção do elemento da diagonal que é feito igual a 1. O determinante da matriz assim obtida é igual ao determinante da matriz de ordem menor obtida pelo processo de eliminação.

### 3.7 - Procedimento de cálculo

No apêndice II encontra-se um programa em linguagem FORTRAN para o computador IBM 1130 que permite o cálculo da carga crítica. Detalhes sobre a sua utilização serão vistos nos exemplos que serão apresentados no capítulo seguinte. É conveniente entretanto fazer antes algumas observações gerais sobre o processo usado no programa e os tipos de problemas que podem ser tratados.

São os seguintes os dados a serem fornecidos ao programa:

a) características elásticas e geométricas ( $E$ ,  $G$ ,  $J_y$ ,  $J_t$ ,  $J_\omega$ ,  $y_D$ ,  $k_y$  e  $i_D^2$ );

b) número de segmentos ( $n$ ) em que foi dividido o comprimento;

c) comprimento de cada segmento ( $h_i$ );

d) carga longitudinal distribuída ( $q_{xi}$ ) e carga transversal distribuída ( $q_{yi}$ ) para cada segmento (para essa última é necessário ainda fornecer a excentricidade);

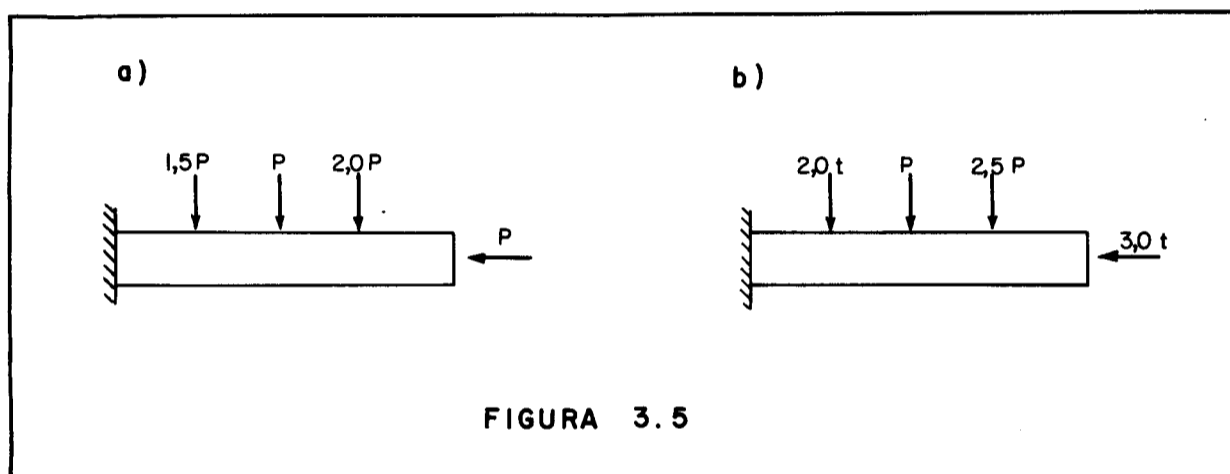
e) força normal ( $N_i$ ), força cortante ( $Q_i$ ), momento fletor ( $M_i$ ) e carga transversal concentrada ( $P_{yi}$ ) para cada secção. Para essa última é necessária ainda a excentricidade e deve ser evitada a duplicação para as secções intermediárias como já foi mencionado no ítem 3.5.

Dois casos de carregamento podem ocorrer nos problemas de instabilidade:

1º caso: todas as cargas são funções de um único fator e é procurado o valor crítico desse fator, ou seja,

o valor desse fator para o qual o carregamento é capaz de produzir a perda de estabilidade da viga. No exemplo da figura 3.5a) o fator  $P$  define todo o carregamento e é procurado o valor  $P_{cr}$  que provoca a instabilidade da viga.

2º caso: algumas cargas são conhecidas e outras são funções de um fator cujo valor crítico é procurado; esse caso é exemplificado na figura 3.5b)



Para abranger os dois casos mencionados procede-se como segue.

Seja  $G$  qualquer um dos esforços ou cargas  $q_{xi}$ ,  $q_{yi}$ ,  $N_i$ ,  $Q_i$ ,  $M_i$  ou  $P_{yi}$ . Então se tem:

$$G = G_c + P(\text{ou } M \text{ ou } q) \cdot G_u \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

Onde  $G_c$  é determinado pela parte conhecida do carregamento e  $G_u$  é determinado pela parte do carregamento que depende do fator, fazendo unitário esse fator, o qual pode ser uma carga concentrada ( $P$ ) ou um momento aplicado ( $M$ ) ou uma carga distribuída ( $q$ ).

De posse desses dados é construída a matriz  $[A]$ . A seguir se fornecem ao programa as informações sobre a vinculação da viga, dando-se o número da linha e coluna às

quais deve ser aplicado o procedimento mencionado no último parágrafo do item 3.6.

O programa prossegue agora procurando o valor de  $P$  (ou  $M$  ou  $q$ ) que anula o determinante da matriz  $[A]$ .

Para isso se fornecem ao programa um valor inicial do fator e o valor do incremento de que deve ser acrescentado esse fator em cada passo. O processo é semelhante ao de se achar a raiz de uma equação algébrica. Uma subrotina para o cálculo do determinante é incluída no programa.

Na prática se está interessado geralmente no menor auto-valor, ou seja, no menor valor do fator ( $P$ ,  $M$ , ou  $q$ ) que anula o determinante de  $[A]$ . O programa fornece então um intervalo onde se encontra esse valor. Nos limites desse intervalo, o determinante tem sinais contrários.

Esse intervalo constitui a saída normal do computador e pode ser feito tão pequeno quanto se queira, bastando para isso dividir o incremento inicial em número conveniente de vezes.

Convém lembrar que esse intervalo contém um valor aproximado da menor carga crítica e que os processos baseados no método da energia sempre fornecem aproximações por excesso. Os exemplos mostraram que, na prática, se pode tomar o limite inferior desse intervalo como a aproximação mais segura para a carga crítica.

Como já foi mencionado, maiores detalhes serão vistos nos exemplos do capítulo seguinte; aqui se procurou apenas fornecer a visão global do procedimento de cálculo.

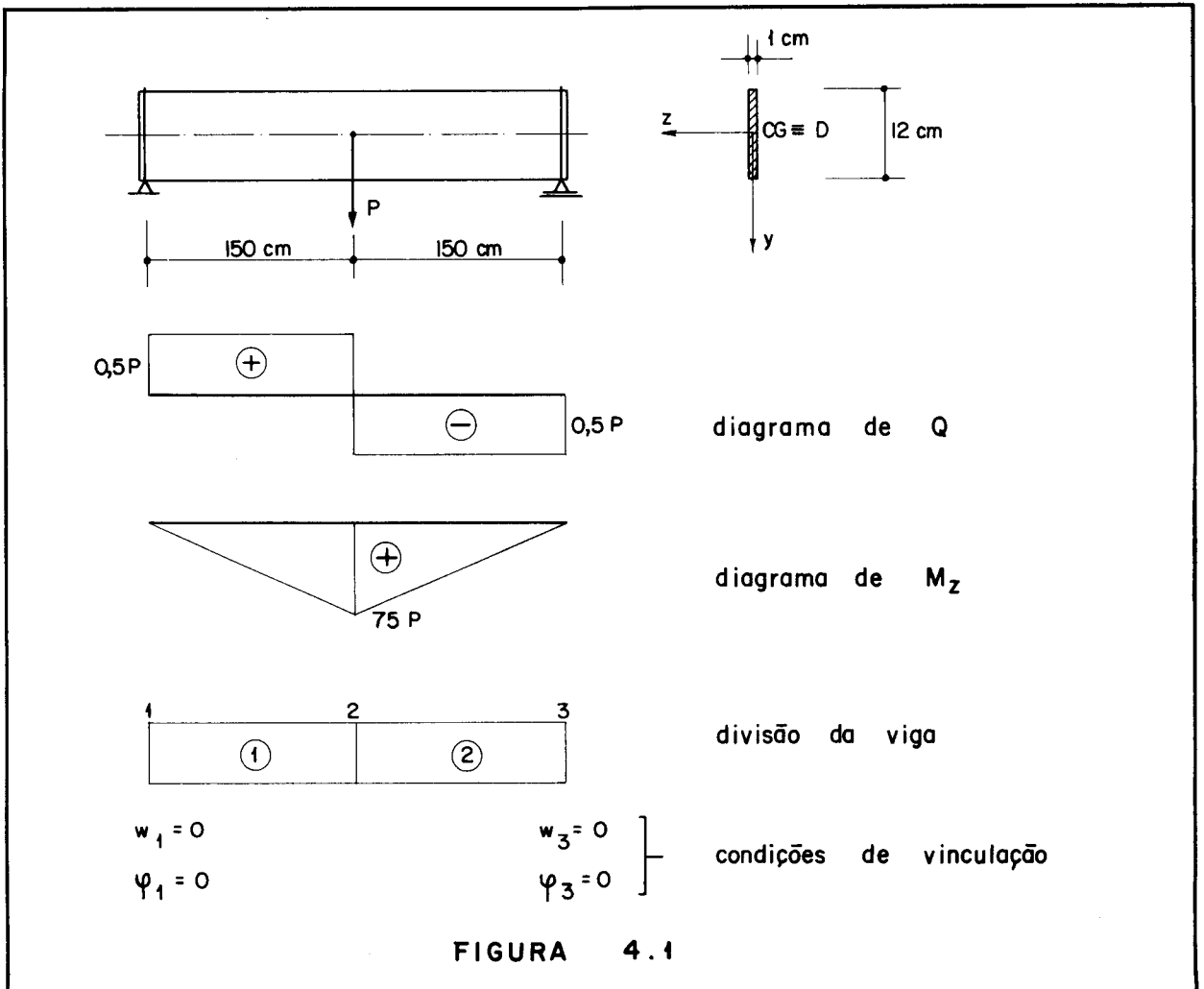
#### 4 - EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO E APLICAÇÕES

Serão relatados agora os exemplos que foram feitos. Alguns serviram para a verificação do processo descrito no capítulo anterior e do programa correspondente: são os exemplos para os quais a solução exata pode ser obtida pela resolução direta das equações diferenciais (2.23). Como será visto, a precisão obtida foi excelente, muito acima daquela usualmente requerida para fins práticos. Um dos exemplos foi repetido várias vezes com números diferentes de segmentos de divisão da viga, para se testar o andamento da precisão. São também fornecidos alguns dados sobre os tempos de computação.

Outros exemplos foram feitos para os quais a solução exata não é disponível. Esses exemplos serão relatados para mostrar todas as características do processo, a fim de se saber os problemas que o programa pode tratar.

Antes de passar aos exemplos cumpre observar que, do modo como foi redigido, o programa admite uma divisão da viga em até 12 segmentos, o que leva a uma matriz  $[A]$  de tamanho máximo  $52 \times 52$ . Isso pode ser facilmente modificado, dependendo da capacidade do computador, para admitir um número maior de segmentos. Aquele número foi escolhido de maneira a satisfazer todos os problemas que se pretendiam tratar e está longe de esgotar a capacidade do computador utilizado (IBM 1130, com 32K), mesmo sem a utilização de técnicas computacionais próprias para matrizes simétricas com os elementos não nulos agrupados em torno da diagonal principal.

4.1 - 1º Exemplo (figura 4.1)



Trata esse exemplo de uma viga de secção retangular com vínculos de garfo nas extremidades sujeita a uma única carga transversal aplicada centricamente no meio do vão. A figura 4.1 mostra, além dos diagramas da força cortante e do momento fletor, a divisão da viga em 2 segmentos e as condições de vinculação.

O material considerado em todos os exemplos será o aço e as características elásticas ( $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  e  $G = 800 \text{ t/cm}^2$ ) são fornecidas por meio de dois comandos no próprio programa.

#### 4.1.1 - Dados

$$J_y = 1 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 4 \text{ cm}^4$$

$J_\omega$ ,  $y_D$  e  $k_y$  são nulos

$i_D^2 = 12,08 \text{ cm}^2$  (como não interessa para o exemplo em estudo, pode ser dado como nulo).

$$n = 2$$

$$h_1 = h_2 = 150 \text{ cm}$$

$$Q_1 = 0,5 P$$

$$Q_2 = Q_3 = -0,5 P$$

$$M_1 = M_3 = 0$$

$$M_2 = 75 P$$

valor inicial de P: 0,3

valor inicial do incremento: 0,1

#### 4.1.2 - Resultado

O programa forneceu a seguinte aproximação para a carga crítica:

$$P_{cr} \text{ entre } 0,491 \text{ e } 0,492 \text{ (t)}$$

Para comparação foi achada a carga crítica por resolução das equações diferenciais, o que é feito utilizando-se funções de Bessel. A solução exata é dada por:

$$P_{cr} = 16,94 \frac{\sqrt{G J_t E J_y}}{\ell^2}$$

que, para o exemplo em estudo, fornece o valor crítico:



$$P_{cr} = 0,4879 \text{ t}$$

Portanto o erro é inferior a 1% mesmo com a divisão mais grosseira possível para o exemplo em estudo.

#### 4.1.3 - Observações

A sequência dos dados fornecidos é a seguinte:

1º cartão: características geométricas da viga

2º cartão: número de segmentos

3º cartão: comprimentos dos segmentos

4º cartão: condições de vinculação

No exemplo 01 02 09 11

Cada número no formato I2 corresponde à linha e à coluna da matriz [A] às quais deve ser aplicado o processo de eliminação já mencionado.

5º e 6º cartões: em branco, para indicar (um para cada segmento) que não há carga distribuída axial ou transversal.

7º, 8º e 9º cartões: em branco, para indicar (um para cada secção) que não há carga transversal excêntrica aplicada nem força normal.

10º, 11º e 12º cartões: fornecem a força cortante e o momento fletor para cada secção. Cada cartão contém 4 campos no formato E13.6 na seguinte ordem:

$$(Q_c) \quad (Q_u) \quad (M_c) \quad (M_u)$$

onde:

$Q_c$  e  $M_c$  são obtidos da parte conhecida do carregamento (são nulos no caso);

$Q_u$  e  $M_u$  são obtidos da parte do carregamento dependente de  $P$  fazendo  $P = 1$  (no caso se tem, por exemplo:

$Q_{u2} = -0,5$  e  $M_{u2} = 75$ ).

139 cartão: contém o valor inicial de  $P$ , por onde deve ser iniciada a procura do auto-valor, e o valor inicial do incremento de que deve ser acrescido o valor de  $P$  em cada passo até o determinante da matriz  $[A]$  mudar de sinal.

O programa se encarrega depois de dividir esse incremento por 10 para reiniciar o processo com passo menor. Esse procedimento é feito o número de vezes que se julgar necessário para alcançar o tamanho de intervalo desejado.

No exemplo:

valor inicial de  $P$ : 0,3

incremento inicial: 0,1

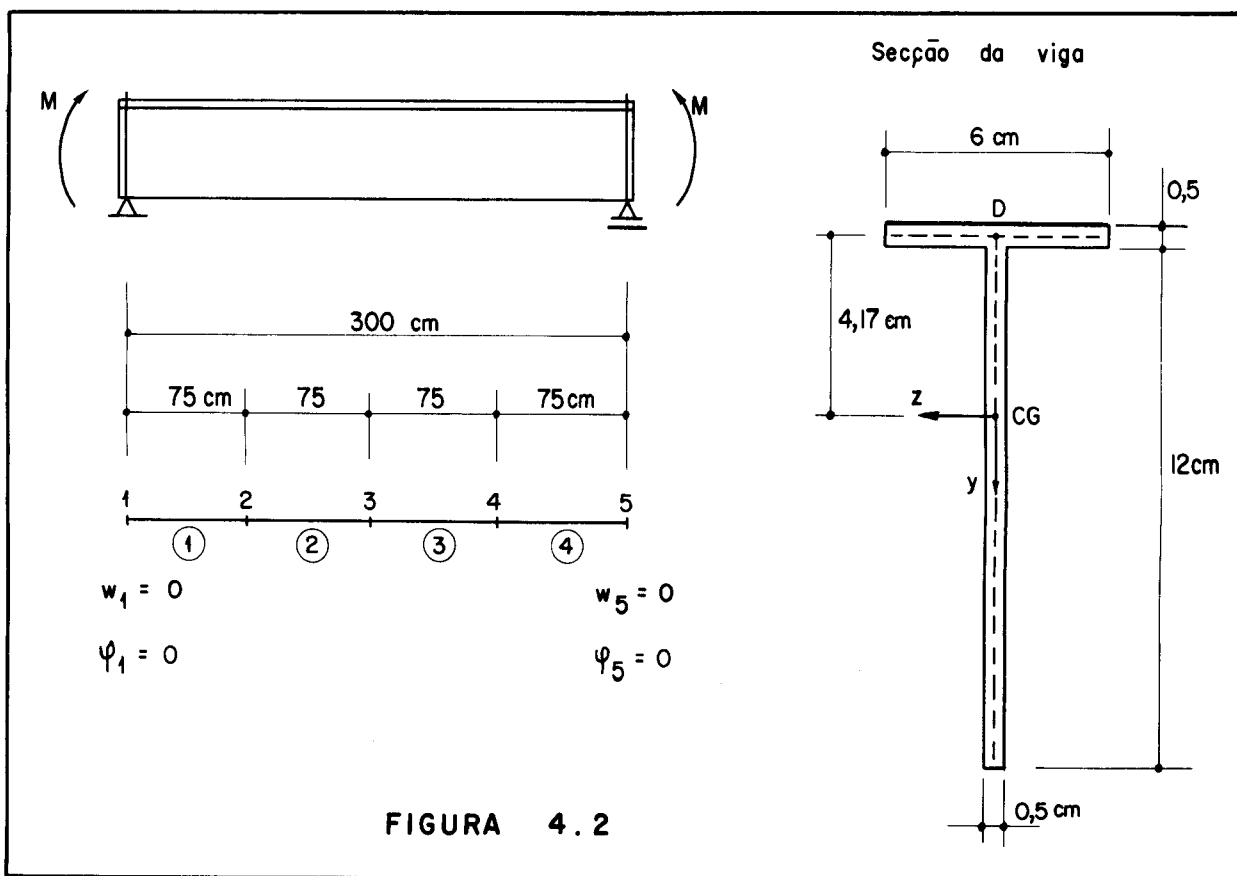
Da maneira como está redigido o programa, o intervalo final terá comprimento 0,001. Isso pode ser modificado no programa caso se queira um intervalo menor (maior precisão).

Nesse exemplo (de verificação) já se sabia, de antemão, o resultado exato. Foi possível então partir de um valor próximo desse resultado. Caso se tratasse de um exemplo de aplicação, em que esse resultado fosse desconhecido, poder-se-ia começar, por exemplo, com os seguintes valores iniciais:

$p = 0,0$

incremento = 1,0

4.2 - 2º Exemplo (figura 4.2)



Nesse exemplo são considerados ainda os vínculos de garfo e o carregamento consiste em dois binários aplicados nas extremidades. A figura 4.2 mostra também a secção da viga e, esquematicamente, sua divisão em quatro elementos.

4.2.1 - Dados

$$J_y = 9 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 0,76 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 0$$

$$y_D = -4,17 \text{ cm}$$

$$k_y = 0,80 \text{ cm}$$

$$i_D^2 = 35,06 \text{ cm}^2 \text{ (como não interessa para esse exemplo, pode ser dado como nulo)}$$

$$n = 4$$

$h_i = 75$  cm para  $i = 1, 2, 3$  e  $4$

condições de vinculação: 0 1 0 3 1 7 1 9

$M_i = M =$  constante para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $5$

valor inicial de  $M$ : 0,0

incremento inicial: 10,0

#### 4.2.2 - Resultado

$M_{cr}$  entre 47,2 e 47,3 tcm

A resolução direta das equações diferenciais fornece para esse exemplo o seguinte valor da carga crítica:

$M_{cr} = 47,297$  tcm

#### 4.2.3 - Observações

a) O tempo de computação para a divisão em quatro segmentos foi de 15 minutos. O exemplo foi repetido, adotando-se uma divisão em dez segmentos: o tempo de computação aumentou para 40 minutos.

b) O exemplo foi também repetido (com  $n = 4$ ), adotando-se:

valor inicial de  $M$ : 0,0

incremento inicial: -10,0

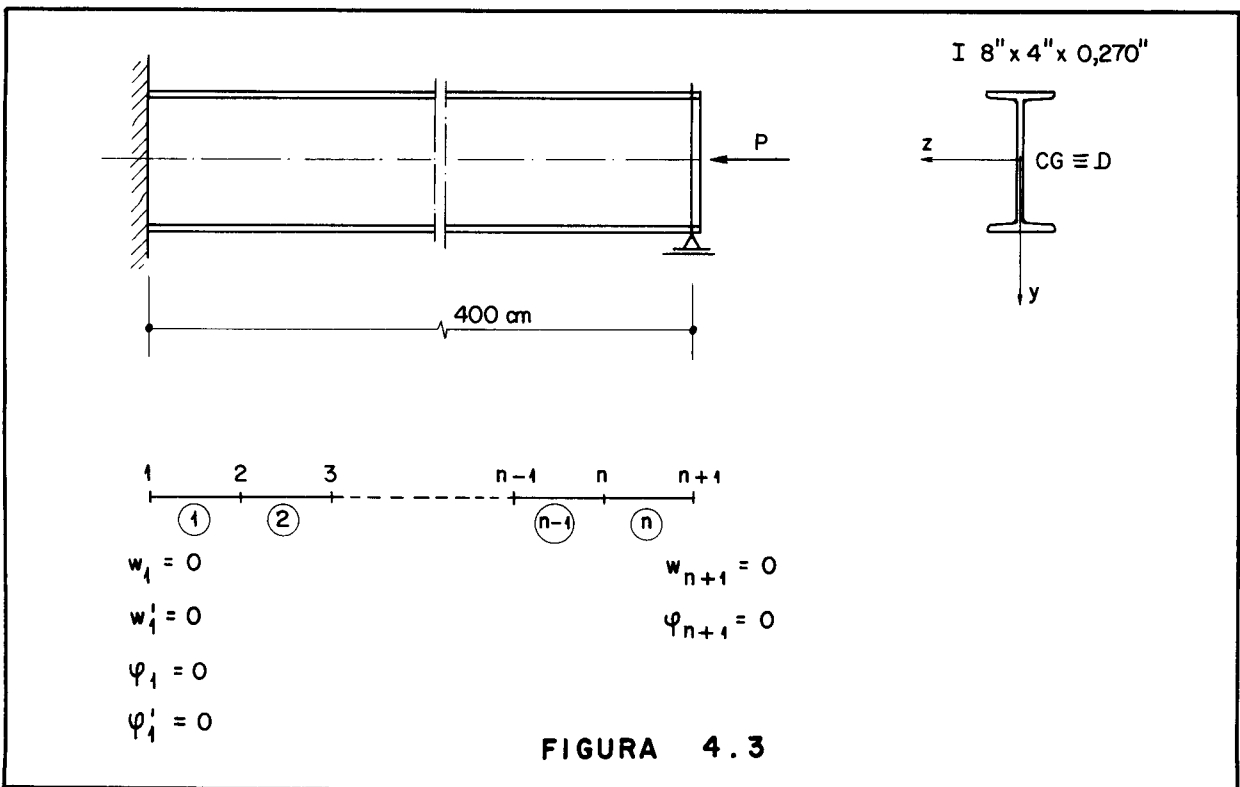
O resultado obtido foi:

$M_{cr}$  entre -26,6 e -26,7 (tcm)

O valor obtido, pela resolução das equações diferenciais, para a raiz negativa, é:

$M_{cr} = -26,695$  tcm

4.3 - 3º Exemplo (figura 4.3)



Esse exemplo servirá para verificar o andamento da precisão quando se aumenta o número  $n$  de segmentos.

O exemplo trata de uma barra com secção duplamente simétrica (I), submetida a uma única carga longitudinal aplicada centricamente.

Nesse caso, as equações diferenciais (2.23) se reduzem a duas equações independentes nas funções  $w_D$  e  $\phi$ , conduzindo cada uma delas a um valor da carga crítica. A equação em  $w_D$  corresponde à flambagem de Euler (ver ítem 3.1) e a equação em  $\phi$  representa a instabilidade puramente torcional, já mencionada também.

A aplicação do processo em estudo para esse problema conduzirá ao valor da menor carga crítica, sem especificar, entretanto, a qual equação ela corresponde. Do ponto de vista prático, esse resultado é suficiente mas, caso se queira, especificamente, a carga crítica correspondente à flambagem de Euler ou à instabilidade torcional, pode-se

proceder da seguinte maneira, uma vez que  $w_D$  e  $\phi$  são independentes:

a) Caso se queira  $P_{cr}$  correspondente à flambagem de Euler, aplica-se o processo de eliminação às linhas e colunas da matriz  $[A]$  que correspondem aos parâmetros de torção ( $\phi_i$  e  $\phi'_i$ );

b) Processo análogo para os parâmetros de flexão ( $w_i$  e  $w'_i$ ) conduzirá à menor carga crítica de instabilidade torcional.

É claro que, em um exemplo de verificação como esse, onde os valores da carga crítica já são conhecidos, e o que interessa é verificar a precisão, não é necessário aplicar o processo mencionado acima; basta procurar os auto-valores nas faixas correspondentes.

#### 4.3.1 - Dados

$$J_y = 158 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 15,5 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 14700 \text{ cm}^6$$

$$y_D = 0$$

$$k_y = 0$$

$$i_D^2 = 71,941 \text{ cm}^2$$

$$n = 2, 4, 6, 8 \text{ e } 10$$

O único esforço solicitante não nulo é:

$$N = -P \text{ (constante)}$$

Os cartões das condições de vinculação e dos comprimentos dos segmentos dependerão de  $n$ . No caso de  $n = 10$ ,

por exemplo, se tem para o cartão das condições de vinculação:

0 1 0 2 0 3 0 4 4 1 4 3

Os valores iniciais adotados foram:

P = 40,0

incremento = 1,0

#### 4.3.2 - Resultados

As cargas críticas obtidas pela resolução das equações diferenciais são, respectivamente:

a) flambagem de Euler

$$P_{cr} = 20,1906 \frac{E J_y}{\ell^2} (= 41,8702t, \text{ no exemplo})$$

b) instabilidade torcional

$$P_{cr} = \frac{1}{i_D^2} (G J_t + 20,1906 \frac{E J_\omega}{\ell^2})$$

ou  $P_{cr} = 226,5123t$  (no exemplo)

Os valores fornecidos pelo programa para a menor carga crítica, que no caso corresponde à flambagem de Euler, são os seguintes:

para n = 2 carga crítica entre 42,94 e 42,95 (t)

" n = 4 " " " 41,95 e 41,96

" n = 6 " " " 41,88 e 41,89

" n = 8 " " " 41,87 e 41,88

" n = 10 " " " 41,87 e 41,88

Para  $n = 1$ , o trabalho pode ser feito manualmente e fornece para a carga crítica a aproximação grosseira:

$$P_{cr} = 30 \frac{E J y}{l^2}$$

A tabela 4.1 fornece o erro cometido quando se consideram os pontos médios dos intervalos como aproximações para a carga crítica.

Tabela 4.1	
Convergência das aproximações	
número de divisões(n)	erro (%)
1	48,6
2	2,57
4	0,20
6	0,04
8	0,01
10	0,01

#### 4.3.3 - Observações

a) Para a comparação resumida na tabela 4.1, foram considerados os pontos médios dos intervalos fornecidos pelo computador. Na prática, quando se desconhece o valor da carga crítica, é conveniente tomar o limite inferior do intervalo como a aproximação mais segura para a carga crítica.

b) O exemplo foi repetido ainda uma vez, com  $n = 4$ , adotando-se os seguintes valores iniciais:

$$P = 225,0$$

$$\text{incrimento} = 1,0$$



O resultado fornecido foi:

$$P_{cr} \text{ entre } 226,62 \text{ e } 226,63 \text{ (t)}$$

o que fornece uma aproximação para a carga crítica de instabilidade torcional com erro de apenas 0,05%.

4.4 - 4º Exemplo (figura 4.4)

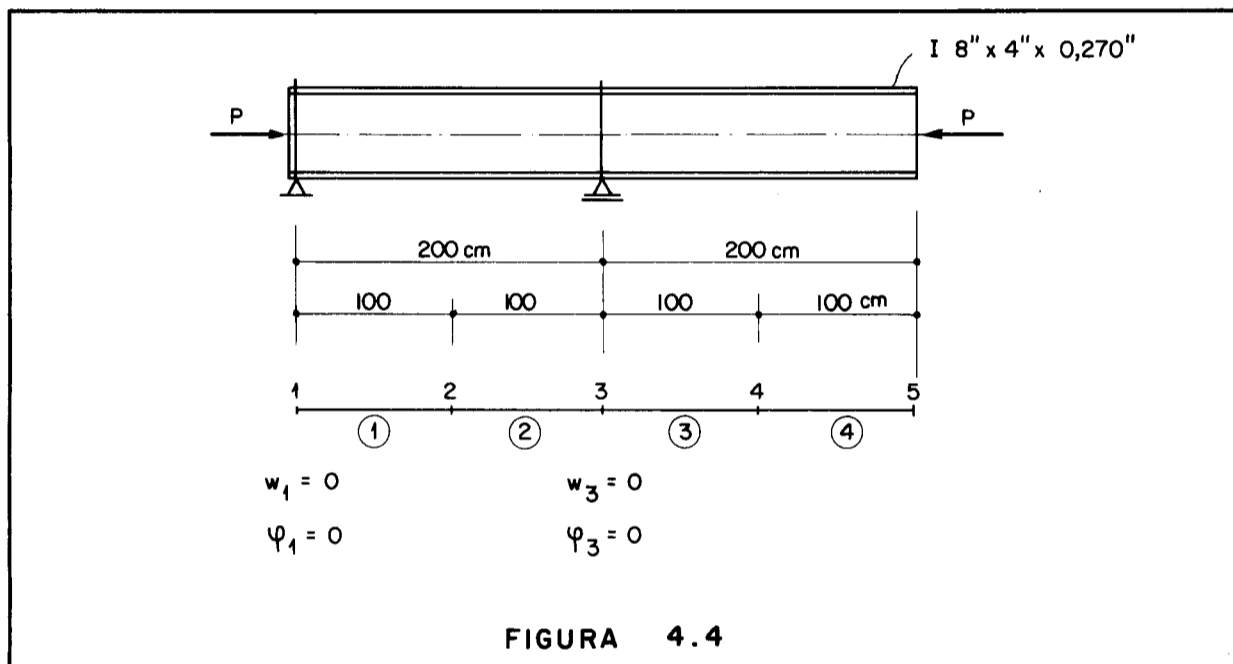


FIGURA 4.4

Nesse exemplo é considerada a mesma barra do exemplo anterior, com o mesmo carregamento, mudando-se somente as condições de vinculação, como indicado na figura 4.4.

Com a divisão em 4 elementos indicada se obtêm os seguintes resultados:

a) flambagem de Euler

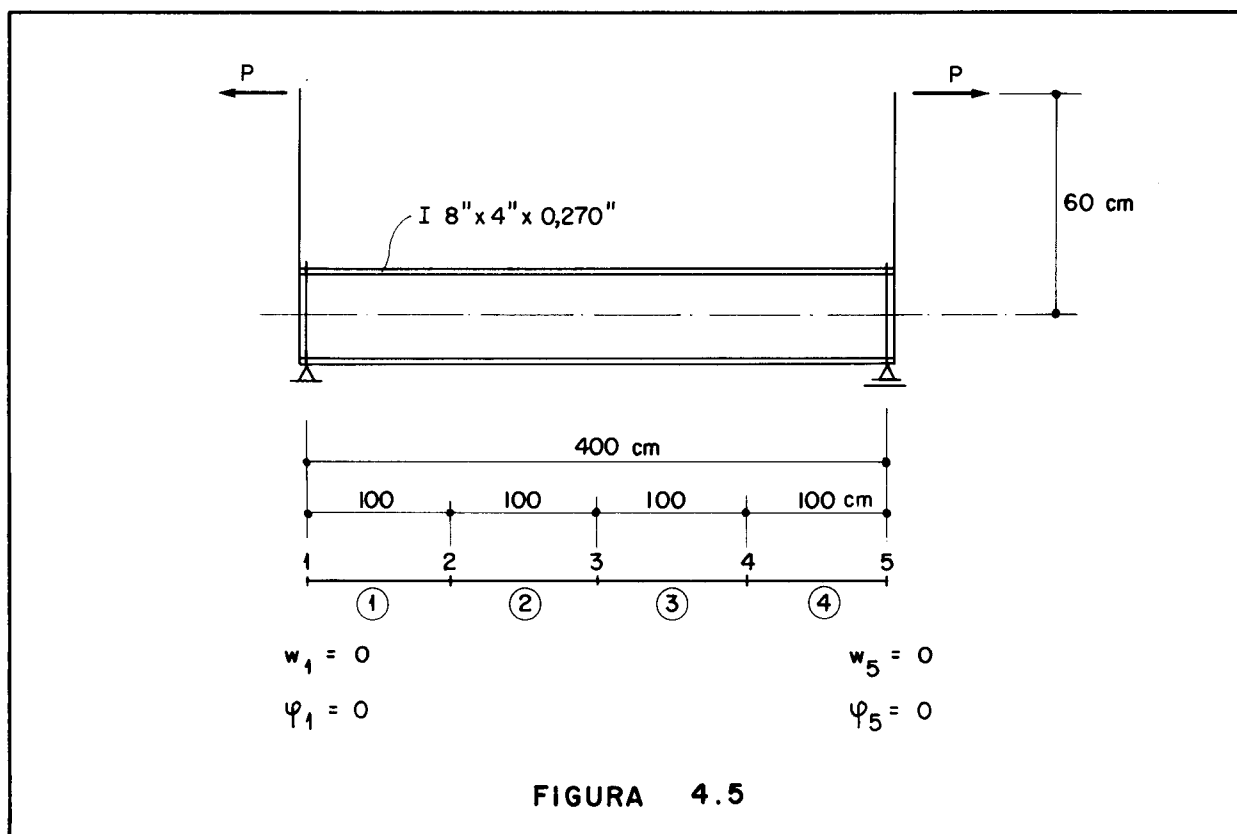
$$P_{cr} \text{ entre } 11,27 \text{ e } 11,28 \text{ (t)}$$

b) instabilidade torcional

$$P_{cr} \text{ entre } 186,93 \text{ e } 186,94 \text{ (t)}$$

Pela resolução das equações diferenciais se obtêm, respectivamente: 11,27t e 186,9t.

4.5 - 59 Exemplo (figura 4.5)



Trata esse exemplo de uma viga sujeita a carga longitudinal excêntrica. Os dados para a secção são os mesmos do 39 exemplo.

Os esforços solicitantes são:

$$N = +P$$

$$M = -60P$$

constantes.

O computador forneceu os seguintes resultados:

a) carga crítica de tração: entre 11,61 e 11,62(t)

b) carga crítica de compressão: entre 7,14 e

7,15 (t)

As duas cargas críticas se referem a instabilidade lateral, ou seja, elas provocam o aparecimento simultâneo de  $w_D$  e  $\phi$ , como nos exemplos 1 e 2.

Isso significa que as equações diferenciais em  $w_D$  e  $\phi$  não são independentes e devem ser resolvidas simultaneamente. Essa resolução fornece duas raízes:

$$P_{cr} = 7,144 \text{ (compressão)}$$

$$\text{e } P_{cr} = 11,616 \text{ (tração)}$$

4.6 - 6º Exemplo (figura 4.6)

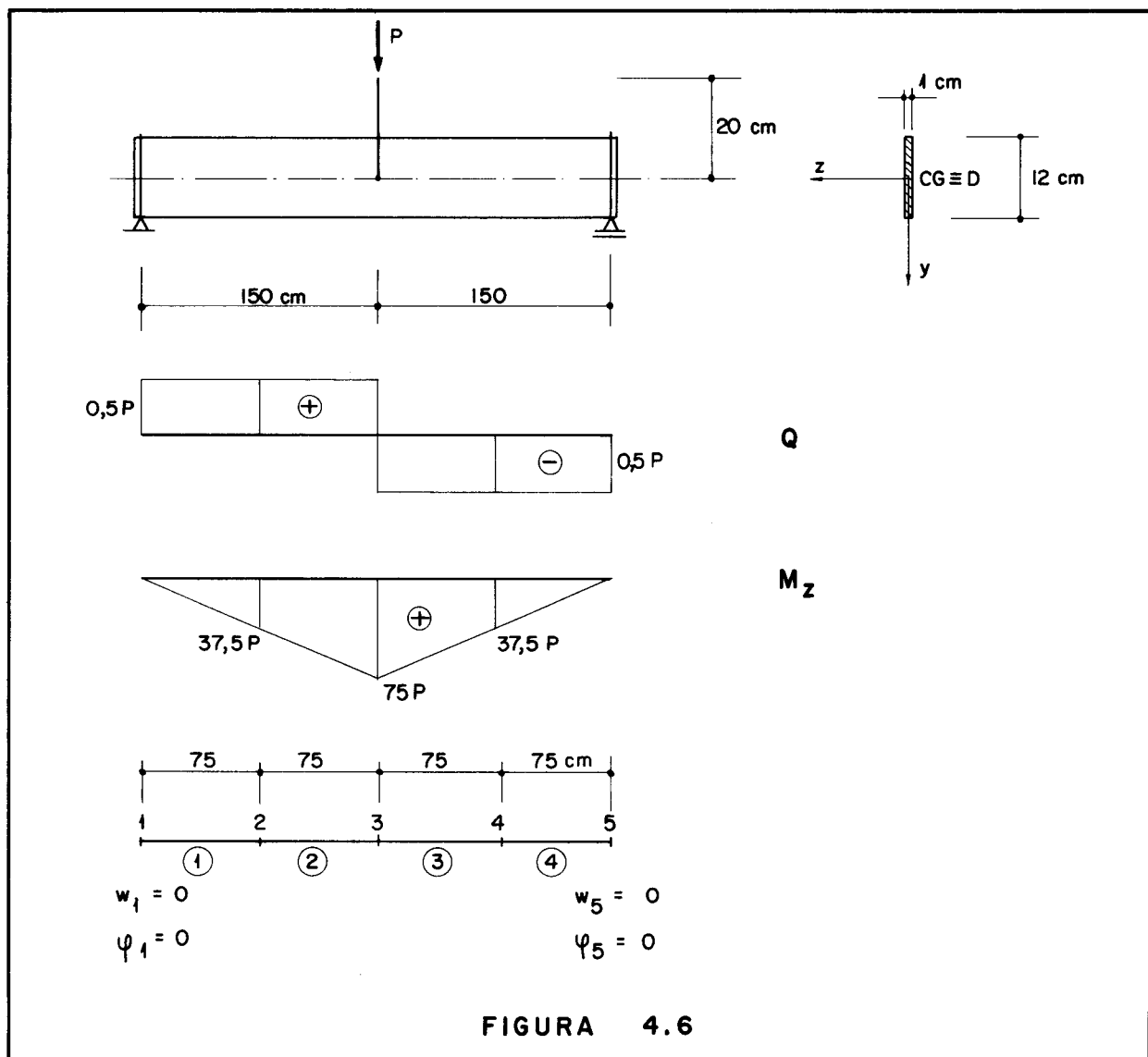


FIGURA 4.6

Esse exemplo retoma a viga do 1º exemplo, considerando agora a carga aplicada com excentricidade em relação ao centro de torção (no caso coincide com o centro de gravidade).

Os dados da secção são os mesmos do 1º exemplo. A figura 4.6 contém os dados referentes ao carregamento e esforços solicitantes.

O computador forneceu o seguinte resultado:

$P_{cr}$  entre 0,44 e 0,45 (t)

Esse resultado, comparado com o do 1º exemplo, evidenciou o fato de que a carga vertical aplicada com excentricidade torna a viga mais instável.

4.7 - 7º Exemplo (figura 4.7)

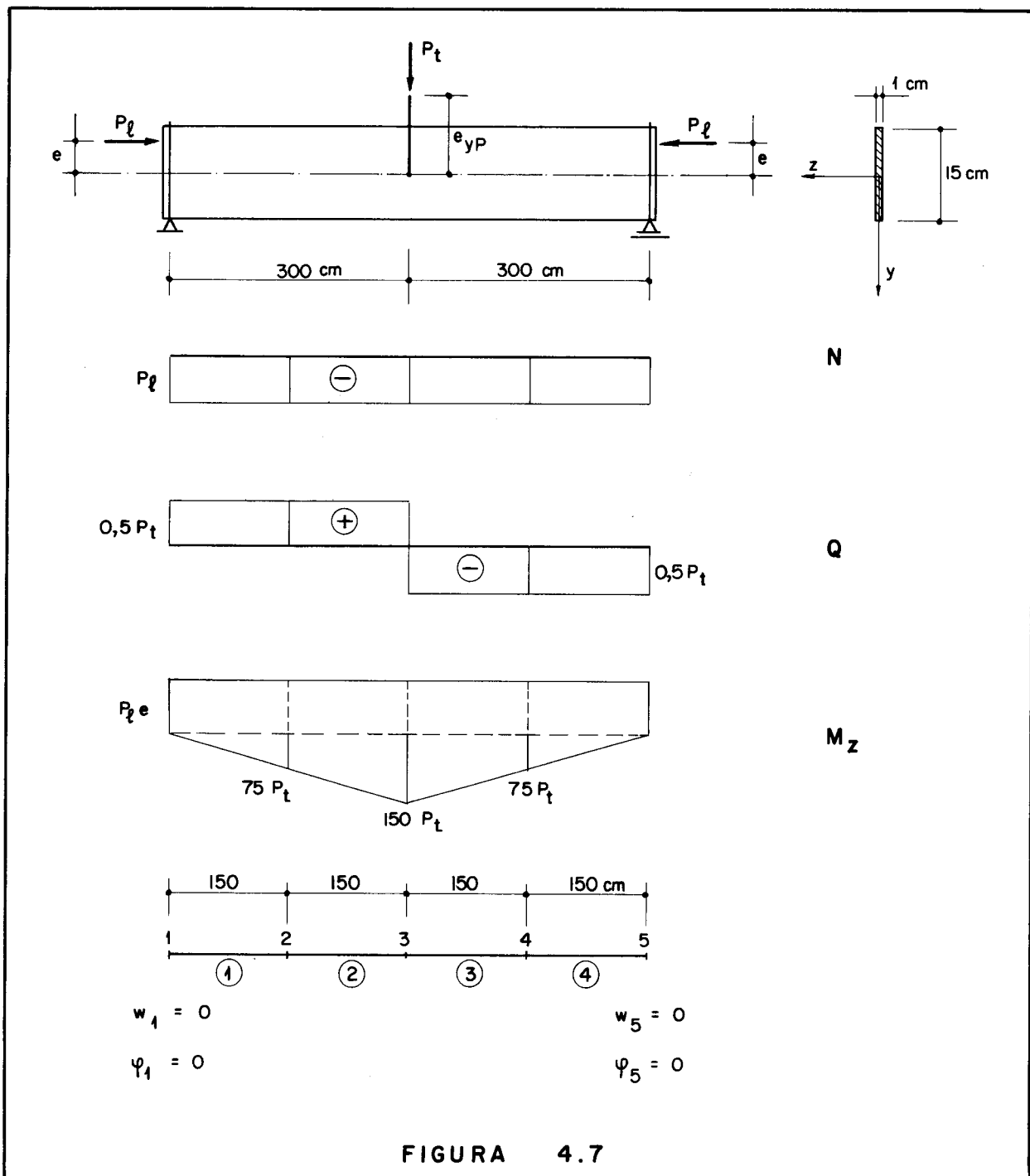


FIGURA 4.7

Esse exemplo servirá, entre outras finalidades, para mostrar que podem também ser tratados casos de carregamento com forças longitudinais e transversais aplicadas simultaneamente. Serão também considerados, os casos de variação conjunta e de variação em separado das cargas  $P_\ell$  e  $P_t$ . Ao todo serão considerados 10 casos de carregamento.

Para alguns desses casos, como no exemplo anterior, não são disponíveis os valores exatos correspondentes; os exemplos foram feitos para mostrar as possibilidades de aplicação do processo.

#### 4.7.1 - Dados

$$J_y = 1,35 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 5 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega, y_D \text{ e } k_y \text{ são nulos}$$

$$i_D^2 = 18,84 \text{ cm}^2$$

$$n = 4$$

$$h_i = 150 \text{ cm}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

Os demais dados estão representados esquematicamente na figura 4.6.

#### 4.7.2 - Resultados

##### 1º carregamento

$$P_\ell = 0$$

$$e_{yP} = 0$$

É procurado o valor crítico de  $P_t$ . O valor obtido foi:

$$(P_t)_{cr} = 0,158 \text{ t}$$

(nesse exemplo, será dado o limite inferior do intervalo somente)

2º carregamento

$$P_t = 0$$

$$e = 0$$

É procurado o valor crítico de  $P_\ell$ .

Resultado:

$$(P_\ell)_{cr} = 0,0777 \text{ t}$$

3º, 4º e 5º carregamentos

A carga  $P_t = 0,1 \text{ t}$  será aplicada com excentricidade ( $e_{yp}$ ) variável. Procura-se o valor crítico de  $P_\ell$  aplicado com excentricidade ( $e$ ) nula.

Os resultados obtidos são os seguintes:

3º) para  $e_{yp} = 2,5 \text{ cm}$ ,  $(P_\ell)_{cr} = 0,0483 \text{ t}$

4º) para  $e_{yp}$  nulo,  $(P_\ell)_{cr} = 0,0485 \text{ t}$

5º) para  $e_{yp} = -7,5 \text{ cm}$  (carga aplicada abaixo do centro de torção), se obtém:

$$(P_\ell)_{cr} = 0,0492 \text{ t}$$

Como pode ser observado, para cargas transversais aplicadas abaixo do centro de torção, a viga é mais estável. A influência, entretanto, é pequena para excentricidades da ordem de meia altura da secção.

6º, 7º e 8º carregamentos

A carga  $P_t$  será aplicada com excentricidade ( $e_{yp}$ )

nula. A carga  $P_{\ell}$  será aplicada com excentricidade ( $e$ ) variável. As cargas  $P_{\ell}$  e  $P_t$  sofrerão uma variação conjunta, fazendo:

$$P_{\ell} = P_t = P$$

É procurado o valor crítico de  $P$ . Os resultados são os seguintes:

69) para  $e = 0$ ,  $P_{cr} = 0,0655 \text{ t}$

79) para  $e = 7,5 \text{ cm}$ ,  $P_{cr} = 0,0643 \text{ t}$

89) para  $e = -7,5 \text{ cm}$  (carga  $P_{\ell}$  aplicada abaixo do centro de gravidade),  $P_{cr} = 0,0666 \text{ t}$

Convém recordar que a excentricidade das cargas transversais é contada a partir do centro de torção e a das longitudinais a partir do centro de gravidade. No caso, por se tratar de secção duplamente simétrica, esses dois pontos coincidem.

A influência da excentricidade da carga longitudinal, nesse exemplo, está relacionada com a existência da carga transversal. De fato, a maior carga crítica (portanto maior estabilidade) é alcançada quando os momentos fletores produzidos por  $P_{\ell}$  e  $P_t$  se subtraem.

Para secção duplamente simétrica, caso não existisse carga transversal, o sinal da excentricidade ( $e$ ) não teria influência.

#### 99 carregamento

$$P_{\ell} = P_t = P$$

$$e = -7,5 \text{ cm}$$

$$e_{yP} = +7,5 \text{ cm}$$

Resultado obtido:  $P_{cr} = 0,0665 \text{ t}$

Comparando com o resultado do 8º carregamento, fica mais uma vez evidenciada a pequena influência da excentricidade da carga transversal.

10º carregamento

$P_{\ell} = -P$  (da maneira como foi assumido o sentido de  $P_{\ell}$ , o sinal negativo indica carga de tração)

$$P_t = P$$

$$e_{yp} = e = 0$$

Resultado obtido:  $P_{cr} = 0,316 \text{ t}$

Esse resultado, comparado com os dos 1º e 6º carregamentos, traduz o fato conhecido de que carga longitudinal de tração tem efeito estabilizador.

Todos os dez resultados acima foram obtidos com uma única passagem do programa. O tempo total de computação foi de 48 minutos.

Os resultados exatos disponíveis são os seguintes:

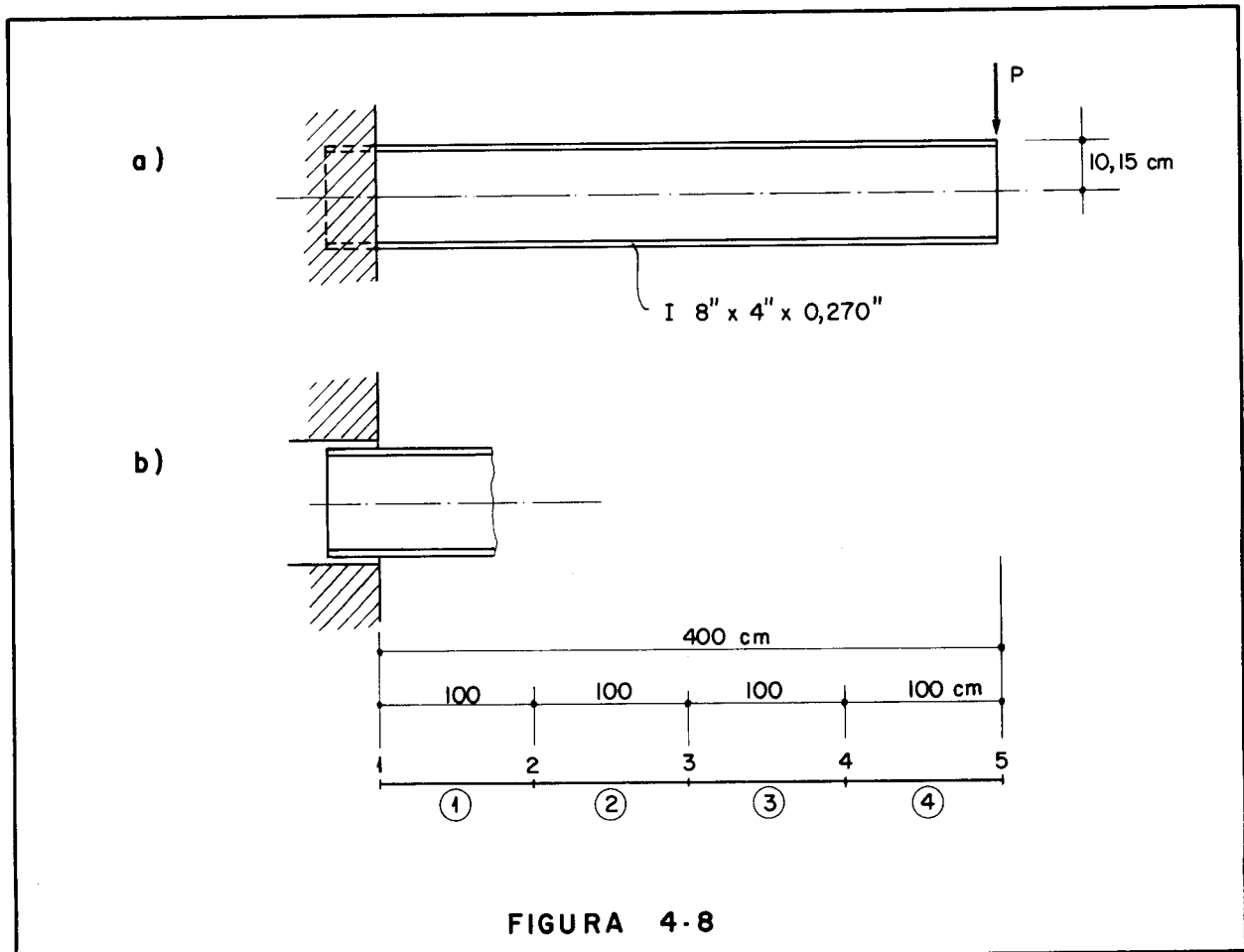
1º carregamento:  $(P_t)_{cr} = 0,158 \text{ t}$

2º carregamento:  $(P_{\ell})_{cr} = 0,0777 \text{ t}$

4.8 - 8º Exemplo (figura 4.8)

Esse exemplo servirá para mostrar a diferença entre os engastamentos móvel e fixo já mencionada quando se tratou das condições de vinculação.





4.8.1 - Dados

Os dados da secção são os mesmos do 3º exemplo. A  
lém destes se têm:

$$n = 4$$

$$h_i = 100\text{cm}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

$$Q_i = +P$$

$$M_1 = -400 P$$

$$M_2 = -300 P$$

$$M_3 = -200 P$$

$$M_4 = -100 P$$

$$M_5 = 0$$

As condições de vinculação comuns aos casos a) e

b) da figura 4.8 são:

$$w_1 = w_1' = \phi_1 = 0$$

No caso a) ainda se tem

$$\phi_1' = 0$$

#### 4.8.2 - Resultados

$$\text{Caso a) } P_{cr} = 1,715 \text{ t}$$

$$\text{Caso b) } P_{cr} = 1,380 \text{ t}$$

É intuitivo que o engastamento fixo torne a viga mais estável.

#### 4.9 - 9º Exemplo (figura 4.9)

Esse exemplo trata da conjugação de uma carga transversal uniformemente distribuída com uma carga axial de tração.

Os dados estão esquematizados na figura 4.9 e o resultado obtido para o valor crítico de P foi de 1,93 t.

Como se trata de secção retangular, portanto sem empenamento de esqueleto ( $\omega \equiv 0$ ), não há necessidade de se ter  $\phi' = 0$  no engastamento fixo.

Nesse exemplo se tem uma condição de vinculação ainda não mencionada: a nulidade do momento torçor na extremidade livre requer que seja  $\phi_5' = 0$ . Essa condição só é válida para secções com  $\omega \equiv 0$ .

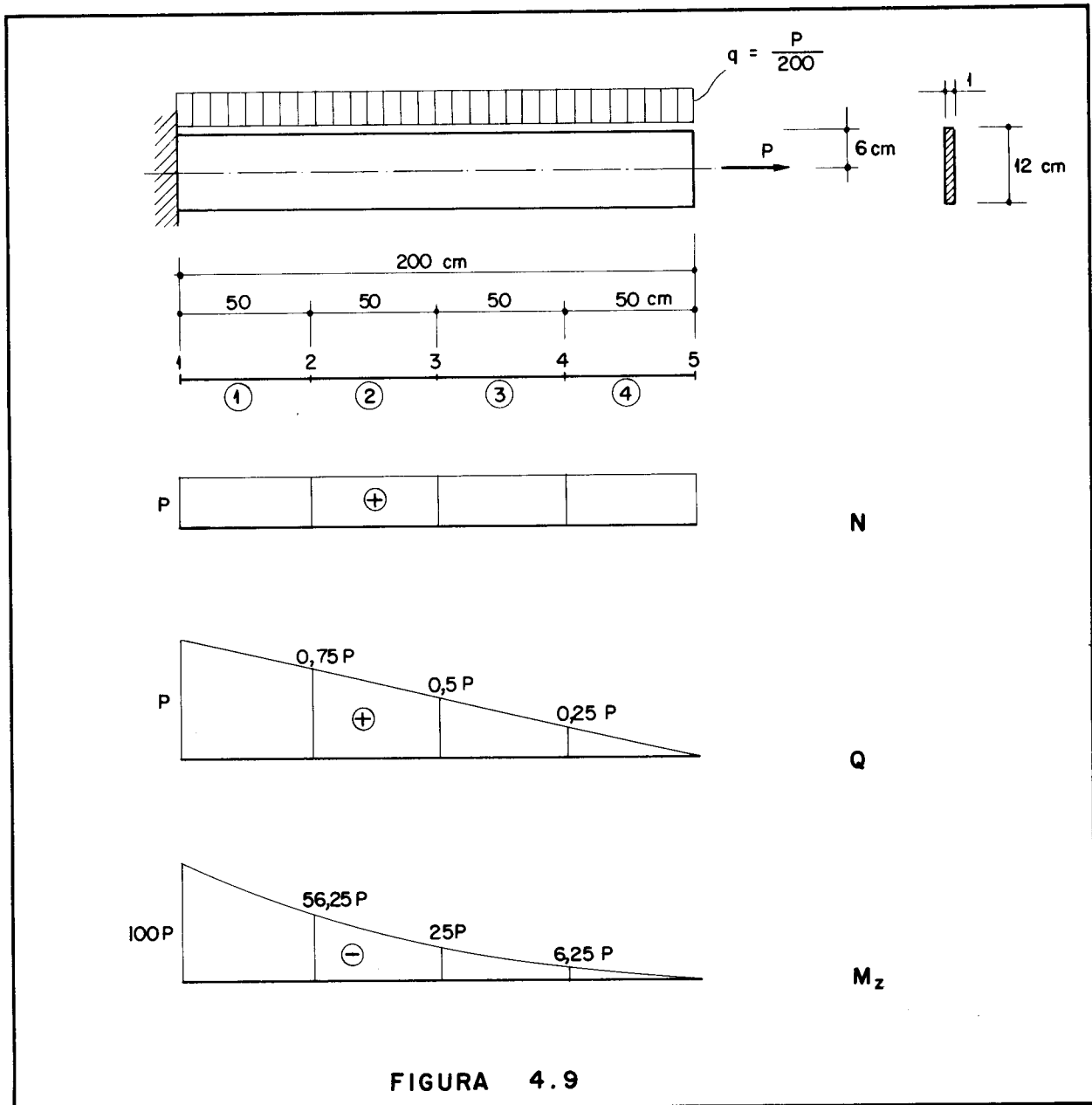


FIGURA 4.9

4.10 - 109 Exemplo (figura 4.10)

Para encerrar esse capítulo de exemplos, será visto o caso de uma barra de secção retangular sujeita a uma carga axial uniformemente distribuída. Os dados para a secção já são conhecidos de exemplos anteriores. Com a divisão indicada na figura 4.10, foi obtido o seguinte resultado:

$$q_{cr} \text{ entre } 0,25 \text{ e } 0,26 \text{ (kg/cm)}$$

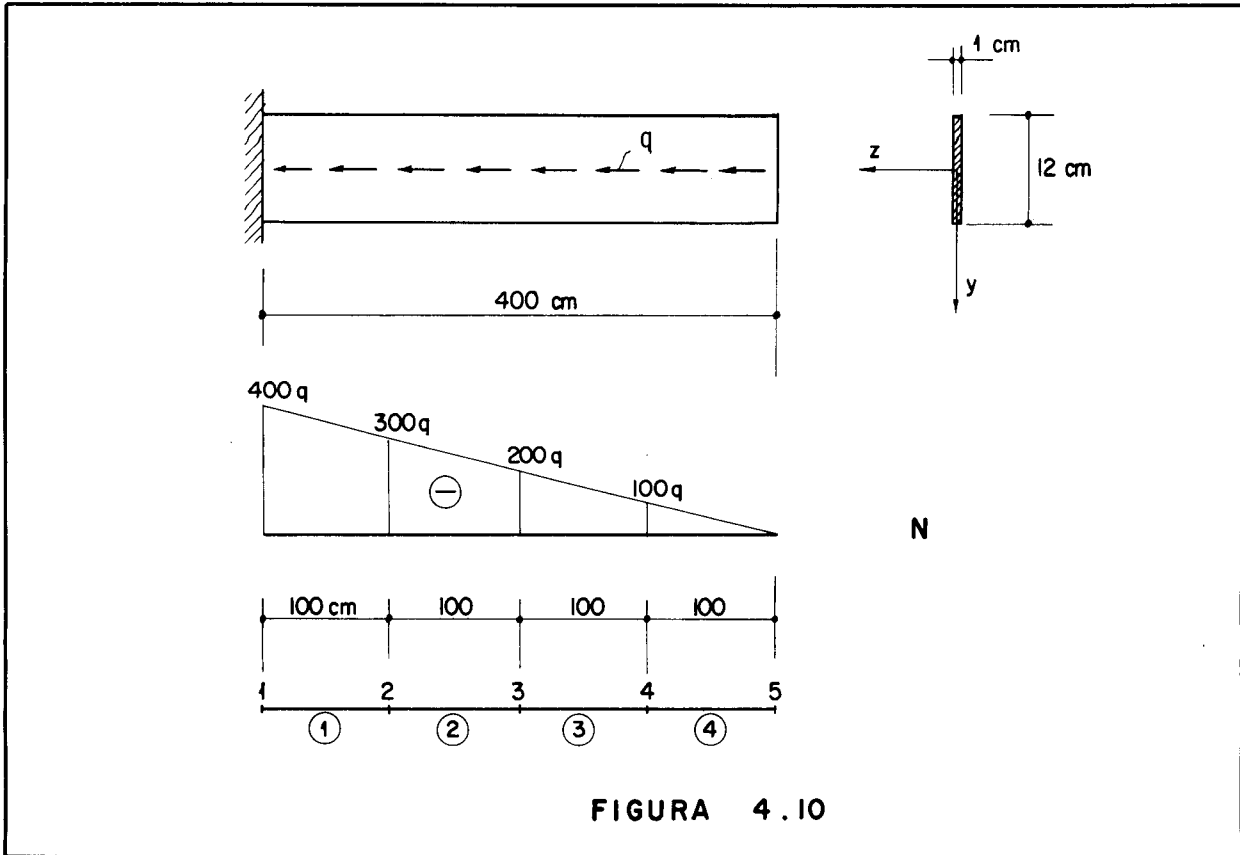


FIGURA 4.10

A resolução da equação diferencial correspondente à flambagem de Euler fornece o resultado:

$$q_{cr} = 7,87 \frac{E J y}{l^3} = 0,258 \text{ kg/cm}$$

5 - CONSIDERAÇÃO DO BIMOMENTO

5.1 - Expressão do bimomento no segmento i

Será agora levantada a restrição do capítulo 3 sobre o bimomento, ou seja: é suposto agora que o carregamento seja capaz de produzir, entre os outros esforços, um bimomento; logo, precisam ser considerados os termos da expressão da energia (2.21) derivados desse novo esforço solicitante.

O primeiro passo, portanto, será estabelecer a expressão do bimomento para o segmento genérico i, quando se

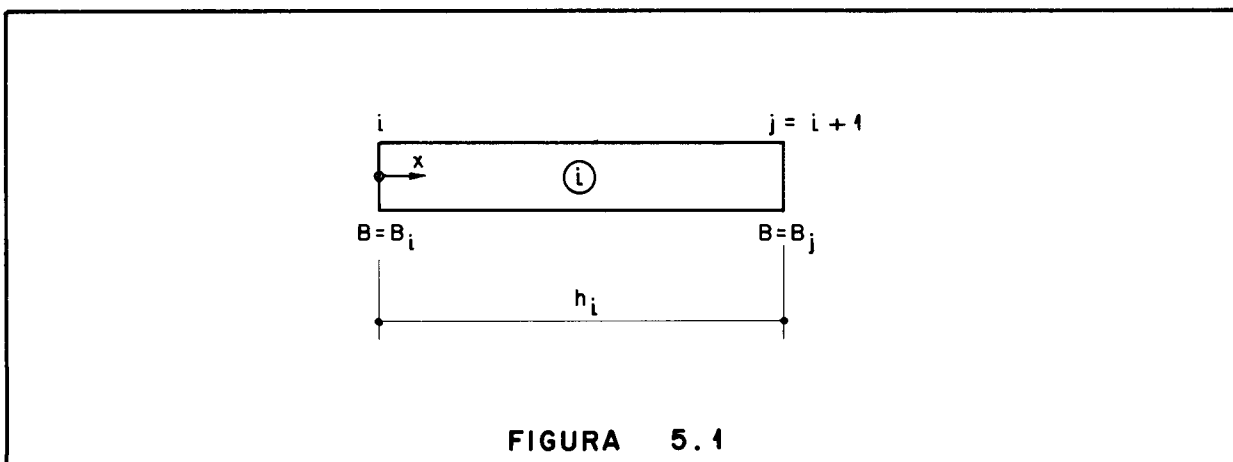


FIGURA 5.4

conhecem os valores do bimomento em suas secções extremas, respectivamente  $B_i$  e  $B_j$ .

Para o bimomento (ver Apêndice I), vale a seguinte expressão geral, uma vez que não existe carga torçora distribuída:

$$B = K_1 \sinh \frac{x}{r} + K_2 \cosh \frac{x}{r} \dots\dots\dots(5.1)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são constantes de integração e  $r$ , também chamado de comprimento característico, é dado por:

$$r = \sqrt{\frac{E J \omega}{G J_t}} \dots\dots\dots(5.2)$$

Para a determinação das constantes de integração são usados os valores do bimomento nas extremidades do elemento:

1<sup>a</sup>) para  $x = 0$ ,  $B = B_i$

2<sup>a</sup>) para  $x = h_i$ ,  $B = B_j$

Da aplicação dessas condições se obtém:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{B_j - B_i \cosh \frac{h_i}{r}}{\sinh \frac{h_i}{r}} \\ K_2 &= B_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.3)$$

A substituição de (5.3) em (5.1) fornece a expressão procurada:

$$B = \frac{B_j - B_i \cosh \frac{h_i}{r}}{\sinh \frac{h_i}{r}} \sinh \frac{x}{r} + B_i \cosh \frac{x}{r} \dots \dots\dots(5.4)$$

5.2 - Termos adicionais da energia

Os termos da energia total, ver (2.21), a serem acrescentados à expressão (3.1), para se levar em consideração o bimomento, são os seguintes:

a)  $-\int_0^{\ell} M_t \phi' dx$

$$b) B_e \phi'_e \quad e \quad -B_d \phi'_d$$

$$c) \frac{1}{2} \int_0^{\ell} B \frac{U \omega}{J \omega} \phi'^2 dx$$

Esses termos serão agora analisados para se conhecer a sua influência sobre a espécie de problema e sobre o valor da carga crítica.

### 5.2.1 - Termo em $M_t$

Deve ser lembrado que só há o aparecimento de momento torçor devido ao bimomento, ou seja: não existe carga torçora. Devido a esse fato, o momento torçor será constante para trechos entre garfos ou nulo para trechos em balanço. A figura 5.2 indica esquematicamente essas duas possibilidades.

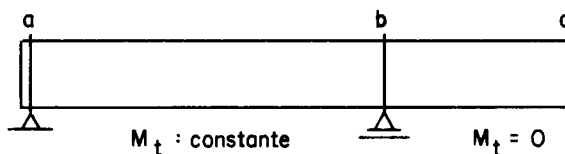


FIGURA 5.2

A integral, que dá a contribuição de  $M_t$  para a energia, estendida a toda a viga, será:

$$\begin{aligned} - \int_a^c M_t \phi' dx &= -M_t \int_a^b \phi' dx - M_t \int_b^c \phi' dx = \\ &= -M_t \left| \phi \right|_a^b = 0 \end{aligned}$$

Portanto, para os exemplos que se pretendem tra-

tar, não haverá influência do momento torçor<sup>(\*)</sup>.

Deve ser observado que a substituição de garfo por engastamento não alteraria esse aspecto do problema e a conclusão acima continuaria válida.

### 5.2.2 - Termos em $B_e$ e $B_d$

Não será necessário lidar analiticamente com esses termos porque a sua influência será sobre a espécie de instabilidade e não sobre o valor da carga crítica.

Como pode ser observado, esses termos serão os únicos na expressão da energia que não são funções quadráticas do ângulo de giro mas sim funções lineares. Portanto, são esses termos que transformam o problema em um problema de 2<sup>a</sup> espécie, conforme a classificação do item 2.7.

Isso ocorre porque, existindo termos lineares nos parâmetros, quando da derivação da expressão da energia em relação a esses parâmetros ( $\phi'_i$ ), haverá o aparecimento de termos independentes ou seja, termos que não contêm esses parâmetros. As equações (3.6) não serão mais homogêneas e poderiam ser resolvidas nas incógnitas  $w_i$ ,  $\phi_i$ ,  $w'_i$  e  $\phi'_i$ . A determinação desses parâmetros caracteriza o problema de 2<sup>a</sup> espécie.

---

(\*) - Na dedução das equações diferenciais, já pode ser observado que o momento torçor, quando provocado pelo bimomento, não influi. De fato, as equações (2.23) só contêm o termo  $M'_t$  que é nulo nos casos considerados.

Na dedução das equações diferenciais pelo método do equilíbrio, também se pode provar que essa conclusão é verdadeira. Vlassov (1), entretanto, quando faz a consideração do bimomento na dedução das equações ignora o aparecimento do momento torçor.



O que ocorre, como já foi mencionado no fim do capítulo 2, é que a teoria linear de 2ª ordem leva a deslocamentos que são funções não lineares das cargas. Quando o carregamento se aproxima de seu valor crítico, os deslocamentos tendem a valores infinitamente grandes.

É importante que se observe, entretanto, que ainda nesse caso, a anulação do determinante dos coeficientes das equações (3.6) conduzirá à equação que determina a carga crítica. Isso é evidente porque somente a anulação do determinante dos coeficientes conduzirá a valores infinitamente grandes dos deslocamentos, o que caracteriza a definição de carga crítica para esse caso (problema de 2ª espécie). Um dos exemplos que serão apresentados no fim desse capítulo retomará essas considerações.

### 5.2.3 - Termo no bimomento

Para o ângulo de giro  $\phi$  será considerada a expressão (3.4) já utilizada no capítulo 3. Para facilidade de notação, a expressão (5.4) do bimomento será escrita como:

$$B = \bar{B}_i \sinh \frac{x}{r} + B_i \cosh \frac{x}{r} \quad \dots\dots\dots(5.5)$$

onde  $\bar{B}_i$  é uma característica do segmento i dada por:

$$\bar{B}_i = \frac{B_j - B_i \cosh \frac{h_i}{r}}{\sinh \frac{h_i}{r}} \quad \dots\dots\dots(5.6)$$

A expressão de  $\phi$  deverá ser derivada e elevada ao quadrado; a seguir será substituída, juntamente com (5.5), na integral, obtendo-se a contribuição do segmento i para o acréscimo da energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{h_i} \frac{U_\omega}{J_\omega} B \phi'^2 dx &= \frac{U_\omega}{2J_\omega} \left[ (\phi_i^2 + \phi_j^2 - 2\phi_i\phi_j)(\bar{B}_i C_1 + B_i C_2) \right. \\ &+ \phi_i'^2 (\bar{B}_i C_3 + B_i C_4) + \phi_j'^2 (\bar{B}_i C_5 + B_i C_6) \\ &+ 2(\phi_i\phi_i' - \phi_j\phi_j')(\bar{B}_i C_7 + B_i C_8) + 2(\phi_i\phi_j' - \phi_j\phi_j')(\bar{B}_i C_9 + B_i C_{10}) \\ &\left. + 2\phi_i'\phi_j' (\bar{B}_i C_{11} + B_i C_{12}) \right] \dots\dots\dots(5.7) \end{aligned}$$

As expressões das constantes C são as seguintes:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{h} \left[ 36D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^5 - 72D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 + 36D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 \right] \\ C_3 &= r \left[ 9D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 - 24D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 + 22D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2 - 8D_7 \left(\frac{r}{h_i}\right) + D_9 \right] \\ C_5 &= r \left[ 9D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 - 12D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 + 4D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2 \right] \\ C_7 &= 18D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^5 - 42D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 + 30D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 - 6D_7 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2 \\ C_9 &= 18D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^5 - 30D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 + 12D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 \\ C_{11} &= r \left[ 9D_1 \left(\frac{r}{h_i}\right)^4 - 18D_3 \left(\frac{r}{h_i}\right)^3 + 11D_5 \left(\frac{r}{h_i}\right)^2 - 2D_7 \left(\frac{r}{h_i}\right) \right] \end{aligned}$$

As constantes C<sub>2</sub>, C<sub>4</sub>, C<sub>6</sub>, C<sub>8</sub>, C<sub>10</sub> e C<sub>12</sub> têm expressões análogas a essas, mudando-se as constantes D<sub>1</sub>, D<sub>3</sub>, D<sub>5</sub>, D<sub>7</sub> e D<sub>9</sub> para, respectivamente, D<sub>2</sub>, D<sub>4</sub>, D<sub>6</sub>, D<sub>8</sub> e D<sub>10</sub>.

As constantes D são dadas por:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(\frac{h_i}{r}\right)^4 \cosh \frac{h_i}{r} - 4 \left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \sinh \frac{h_i}{r} + 12 \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \cosh \frac{h_i}{r} \\ &- 24 \left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} + 24 \cosh \frac{h_i}{r} - 24 \end{aligned}$$

$$D_2 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^4 \sinh \frac{h_i}{r} - 4\left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \cosh \frac{h_i}{r} + 12\left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \sinh \frac{h_i}{r} \\ - 24\left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} + 24 \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_3 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \cosh \frac{h_i}{r} - 3\left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \sinh \frac{h_i}{r} + 6\left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} - \\ - 6 \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_4 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^3 \sinh \frac{h_i}{r} - 3\left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \cosh \frac{h_i}{r} + 6\left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} - \\ - 6 \cosh \frac{h_i}{r} + 6$$

$$D_5 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \cosh \frac{h_i}{r} - 2\left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} + 2 \cosh \frac{h_i}{r} - 2$$

$$D_6 = \left(\frac{h_i}{r}\right)^2 \sinh \frac{h_i}{r} - 2\left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} + 2 \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_7 = \left(\frac{h_i}{r}\right) \cosh \frac{h_i}{r} - \sinh \frac{h_i}{r}$$

$$D_8 = \left(\frac{h_i}{r}\right) \sinh \frac{h_i}{r} - \cosh \frac{h_i}{r} + 1$$

$$D_9 = \cosh \frac{h_i}{r} - 1$$

$$D_{10} = \sinh \frac{h_i}{r}$$

5.3 - Acrêscimos na matriz  $[a]_i$

As derivadas da expressão (5.7) em relação aos parâmetros  $\phi_i$ ,  $\phi_i'$ ,  $\phi_j$  e  $\phi_j'$  fornecem os elementos que devem ser acrescentados à matriz  $[a]_i$ . Os acréscimos apresentados a seguir são representados pelos símbolos dos elementos correspondentes. São:

$$a_{33} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_i^2} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (\bar{B}_i C_1 + B_i C_2)$$

$$a_{34} = a_{43} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_i \partial \phi_i'} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (\bar{B}_i C_7 + B_i C_8)$$

$$a_{37} = a_{73} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = -a_{33}$$

$$a_{38} = a_{83} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_i \partial \phi_j'} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (\bar{B}_i C_9 + B_i C_{10})$$

$$a_{44} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_i'^2} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (\bar{B}_i C_3 + B_i C_4)$$

$$a_{47} = a_{74} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_i' \partial \phi_j} = -a_{34}$$

$$a_{48} = a_{84} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_i' \partial \phi_j'} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (\bar{B}_i C_{11} + B_i C_{12})$$

$$a_{77} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_j^2} = a_{33}$$

$$a_{78} = a_{87} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_j \partial \phi_j'} = -a_{38}$$

$$a_{88} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \phi_j'^2} = \frac{U_\omega}{J_\omega} (\bar{B}_i C_5 + B_i C_6)$$

Os demais termos da matriz  $[a]_i$  permanecem os mesmos. A construção da matriz  $[A]$  também se processa da mesma maneira.

Pode-se observar que somente a matriz dos esforços solicitantes (página 41) sofre alterações.

#### 5.4 - Novos dados para o programa

Prevendo o caso em que somente parte do carregamento é função do fator cujo valor crítico se procura, pode-se fazer, a exemplo de (3.8):

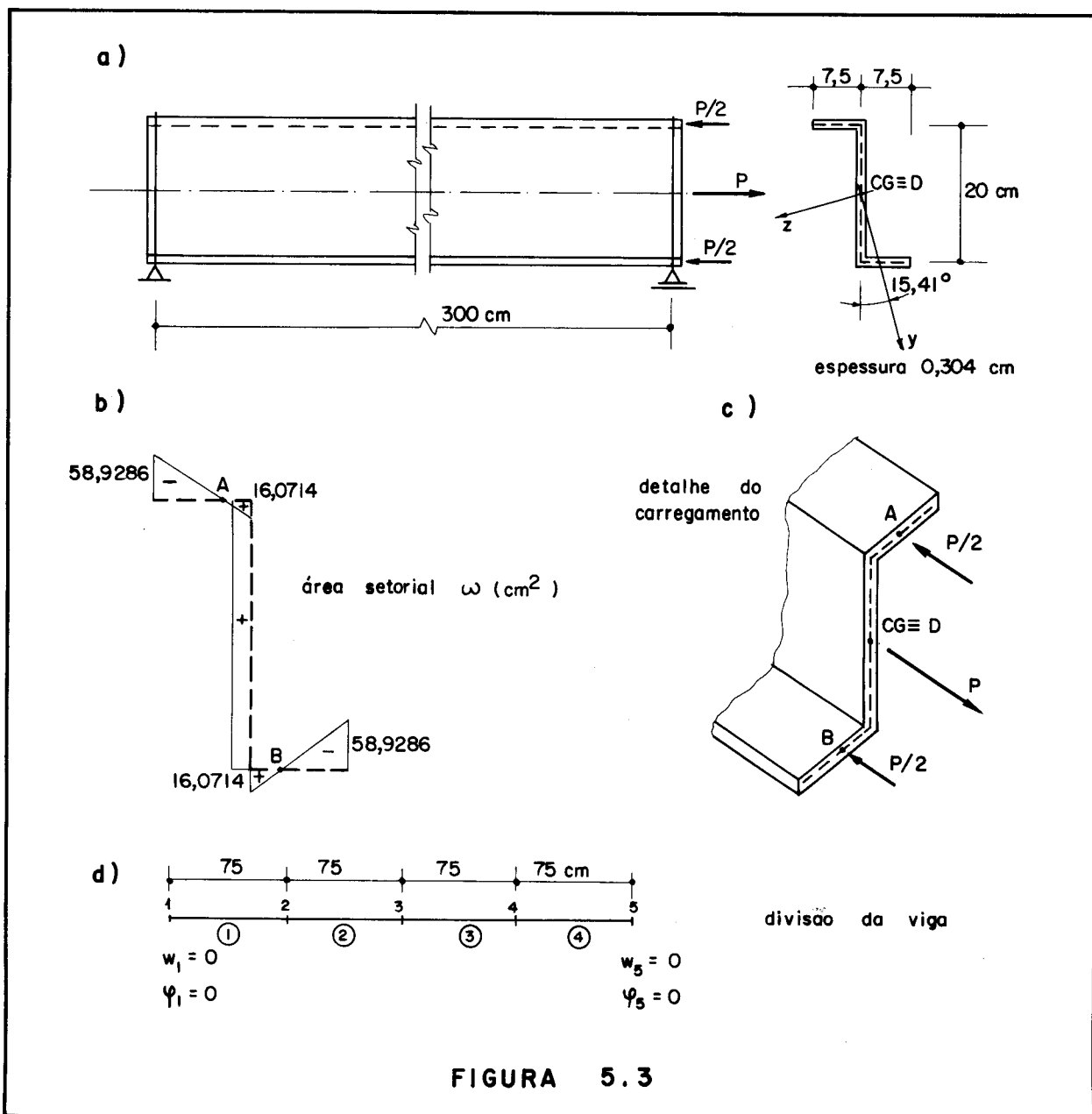
$$B = B_c + P \text{ (ou } M \text{ ou } q) \cdot B_u \quad \dots\dots\dots(5.8)$$

onde  $B_c$  e  $B_u$  tem os mesmos significados que  $G_c$  e  $G_u$  de(3.8).

Os valores de  $B_c$  e  $B_u$  para cada secção  $i$  serão fornecidos ao programa. Além disso é necessário fornecer o valor da característica geométrica  $U_\omega$ .

O programa passa a conter também um teste para se levar ou não em consideração o bimomento. Isso é útil para os problemas em que o bimomento não tem influência e também para se verificar, nos exemplos, a diferença no valor da carga crítica quando se leva em conta ou não o efeito do bimomento.

5.5 - Exemplo 1



5.5.1 - Dados

Nesse exemplo será tratado o caso de uma barra com vínculos de garfos nas extremidades com a secção indicada na figura 5.3. A barra está submetida, em uma de suas extremidades, a um bimomento que, conforme os dados daquela figura, pode ser calculado como:

$$B_{\ell} = 16,0714 P$$

A figura também indica a divisão da barra em 4 elementos e as condições de vinculação a serem fornecidas ao programa. O único esforço solicitante não nulo é o bimomento e os valores que precisam ser fornecidos são os seguintes:

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = 3,6720 P$$

$$B_3 = 7,4792 P$$

$$B_4 = 11,5622 P$$

$$B_5 = 16,0714 P$$

Os demais dados são:

$$J_y = 38,4 \text{ cm}^4$$

$$J_t = 0,0996 \text{ cm}^4$$

$$J_\omega = 5802 \text{ cm}^6$$

$$k_y = 0$$

$$i_D^2 = 69,94 \text{ cm}^2$$

$$U_\omega = 9950 \text{ cm}^6$$

#### 5.5.2 - Resultados

O programa forneceu o seguinte resultado para o valor crítico da carga P:

$$P_{cr} \text{ entre } 99,30 \text{ e } 99,40 \text{ (t)}$$

O exemplo foi repetido adotando-se uma divisão da barra em 8 elementos. O resultado obtido foi o seguinte:

$$P_{cr} \text{ entre } 98,94 \text{ e } 98,95 \text{ (t)}$$

### 5.5.3 - Observações

Convém notar que, nesse exemplo, as cargas não são contidas no plano  $yx$  conforme a restrição do capítulo 3. Ainda assim, pode ser usada a expressão simplificada da energia (3.1), evidentemente com acréscimo dos termos correspondentes ao bimomento. Isso ocorre porque os termos em  $v_D$  e derivadas continuam independentes para esse carregamento, já que o único esforço solicitante não nulo é o bimomento.

Uma observação que deve ser feita é o fato que esse valor crítico corresponde a um problema de 2<sup>a</sup> espécie. Nesse exemplo, esse fato fica bem caracterizado porque, existindo bimomento para qualquer valor de  $P$ , existe portanto ângulo de giro ( $\phi$ ) antes de  $P$  atingir seu valor crítico. Portanto a passagem de um estado de equilíbrio para outro é apenas quantitativa e não qualitativa.

Convém ainda observar que a deformação é puramente torcional, não havendo deslocamentos de flexão ( $w_D$ ). Esse fato já pode ser observado nas equações diferenciais (2.23).

### 5.6 - Exemplo 2

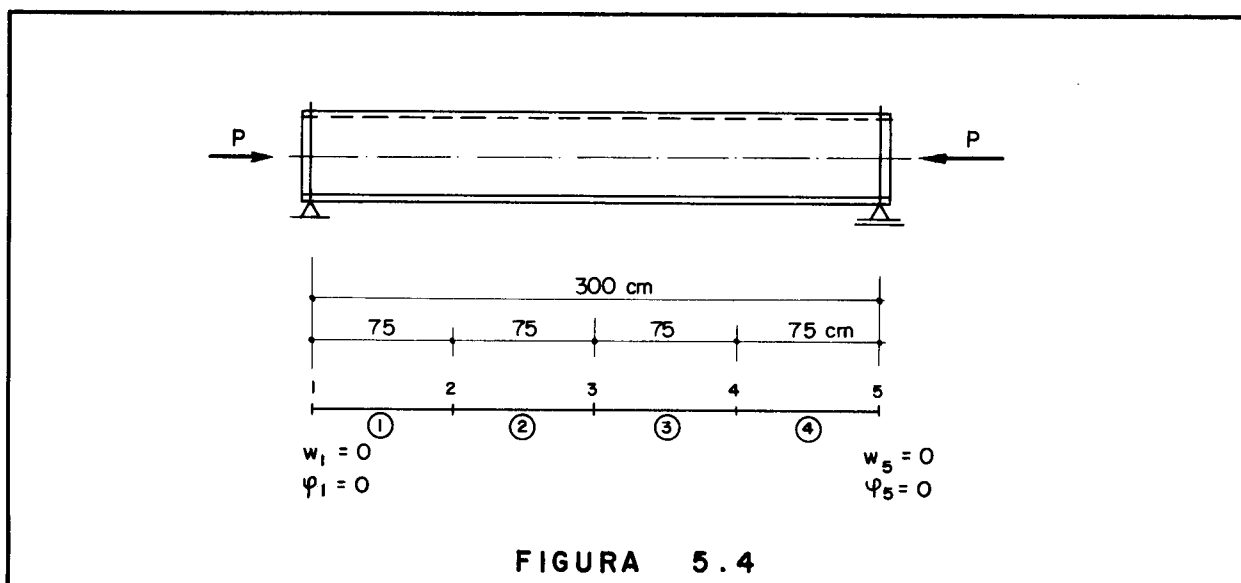


FIGURA 5.4



### 5.6.1 - Dados

Esse exemplo tratará da mesma barra do exemplo anterior submetida agora a duas forças axiais aplicadas centricamente em suas extremidades como indicado na figura 5.4.

Os dados para a secção e a divisão da viga são os mesmos do exemplo anterior.

Os esforços solicitantes são uma força normal constante igual a  $-P$  e um bimomento cujos valores nas secções divisórias dos elementos são:

$$B_1 = B_5 = -16,0714 P$$

$$B_2 = B_4 = -15,2328 P$$

$$B_3 = -14,9571$$

### 5.6.2 - Resultados e observações

A observação das equações diferenciais (2.23) permite concluir a independência das equações em  $\phi$  e  $w_D$ , conduzindo cada uma delas a um valor crítico da carga  $P$ . Como já foi comentado no ítem 3.1, a equação em  $w_D$  conduzirá a um valor crítico da carga  $P$  correspondente a uma flambagem tipo Euler e a equação em  $\phi$  forneceria, se resolvida diretamente, a carga crítica de instabilidade puramente torcional.

Da análise das equações também pode ser concluído que o bimomento, para esse exemplo, não tem influência sobre a carga crítica de flambagem por flexão. Já a carga crítica de instabilidade por torção ficará alterada pela consideração do bimomento e mais ainda: a espécie de problema será alterada pois a consideração do bimomento, como já foi observado, transforma um problema de 1<sup>a</sup> espécie (elástica determinada só na forma) em um problema de 2<sup>a</sup> espécie (elástica determinada totalmente).

Os resultados fornecidos pelo computador foram os seguintes:

a) sem consideração do bimomento

flambagem de Euler:  $P_{cr}$  entre 8,84 e 8,85 (t)

instabilidade torcional:  $P_{cr}$  entre 20,25 e  
20,26 (t)

b) com consideração do bimomento

flambagem de Euler:  $P_{cr}$  entre 8,84 e 8,85 (t)

instabilidade torcional:  $P_{cr}$  entre 32,73 e  
32,74 (t)

Os resultados exatos que podem ser obtidos pela resolução das equações diferenciais quando não se considera o bimomento são os seguintes:

flambagem de Euler:

$$P_{cr} = 8,84 \text{ t}$$

instabilidade torcional:

$$P_{cr} = 20,24 \text{ t}$$

5.7 - Exemplo 3

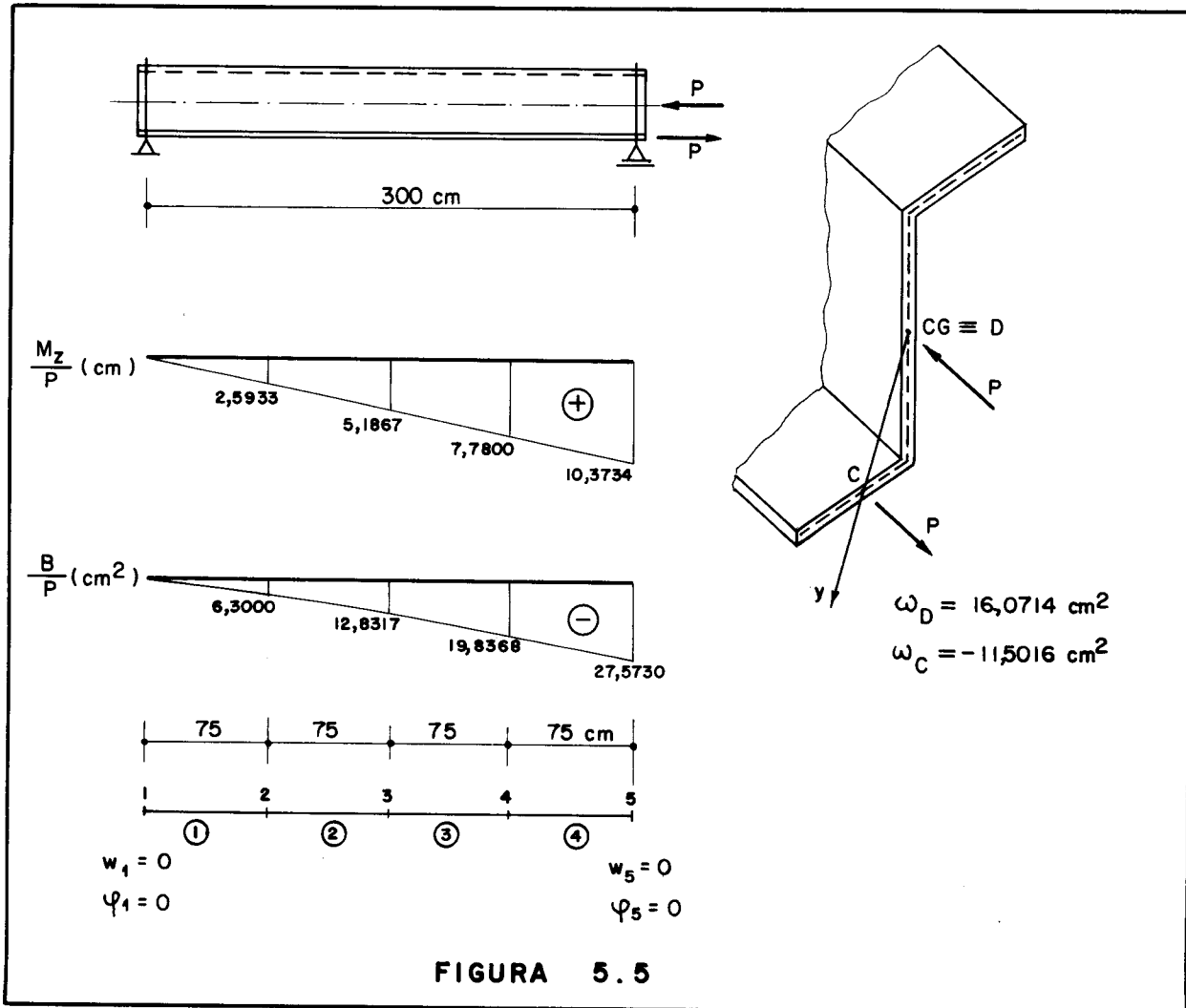


FIGURA 5.5

5.7.1 - Dados

Trata esse exemplo da mesma barra já considerada sujeita agora ao carregamento indicado na figura 5.5 o qual produz um momento fletor e um bimomento cujos diagramas estão indicados naquela figura.

Os esforços aplicados na extremidade são calculados como segue:

$$M_z = P \cdot \overline{DC} = 10,3734 \cdot P$$

$$B = -P \omega_D + P \omega_C = P(-16,0714 - 11,5016) = -27,5730P$$

Os demais dados são os mesmos dos exemplos anteriores.

### 5.7.2 - Resultados e observações

As equações diferenciais em  $\phi$  e  $w_D$  não são mais independentes o que significa que a carga crítica provoca a instabilidade lateral com o aparecimento simultâneo de  $w_D$  e  $\phi$  conforme classificação do Ítem 3.1.

Esse exemplo foi repetido duas vezes levando-se em consideração, em uma delas, a influência do bímomento e, na outra, não. Calculou-se também tanto o valor crítico positivo como o negativo da carga P. Os resultados obtidos são os seguintes:

a) sem consideração do bímomento

$$P_{cr} = \pm 20,0t^{(*)}$$

b) com consideração do bímomento

$$P_{cr} = + 23,7t$$

$$e P_{cr} = - 16,8t$$

Esses resultados evidenciam mais uma vez que o bímomento pode afetar não só a espécie do problema como o valor da carga crítica. Nesse exemplo, a não consideração do bímomento, no caso de P negativo, levaria a um valor otimista da carga crítica, o que mostra a necessidade prática de se levar em consideração o bímomento.

A explicação desses resultados, de certo modo inesperados, está resumida na figura (5.6) que mostra os diagramas das tensões  $\sigma$  provocadas pelo momento fletor e pelo

---

(\*) - Limite inferior do intervalo fornecido pelo computador.

bimomento. Os valores das tensões se referem à secção mais solicitada e 3 casos são apresentados:

a) tensões  $\sigma$  provocadas só pelo momento fletor, sem consideração do bimomento;

b) tensões  $\sigma$  provocadas pelo momento fletor e pelo bimomento no caso de  $P > 0$ ;

c) tensões  $\sigma$  provocadas pelo momento fletor e pelo bimomento no caso de  $P < 0$ .

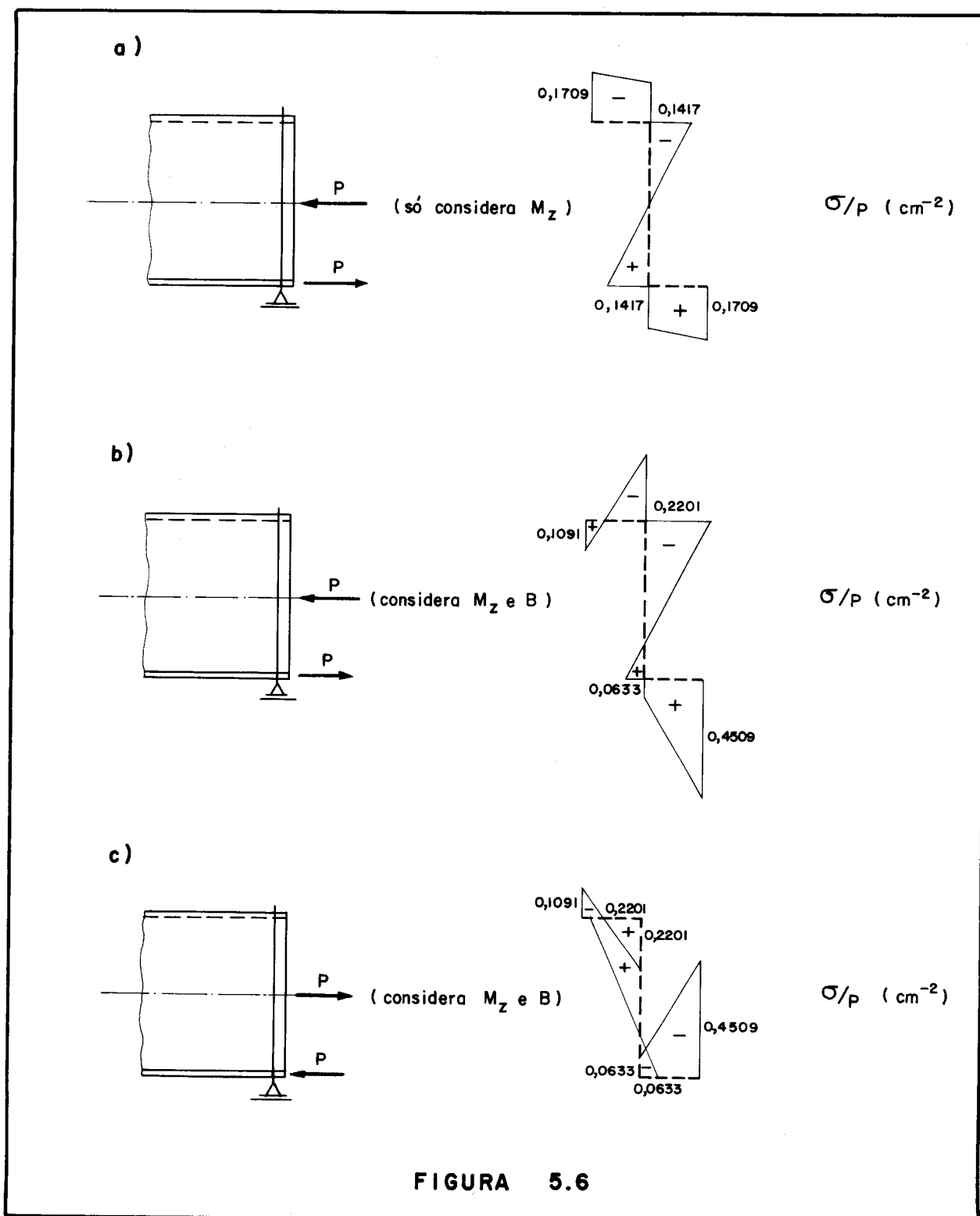


FIGURA 5.6

Tendo-se em vista que as tensões de compressão são as causadoras da instabilidade da viga, pode-se concluir que a combinação de tensões no caso c) é mais perigosa que a dos outros dois casos, justificando assim o menor valor da carga crítica obtida. Pode-se ainda observar que o caso b) é menos perigoso que o caso a) embora a tensão de compressão máxima seja maior: isso ocorre porque no caso a) existe uma aba inteiramente comprimida o que não ocorre no caso b).

Cumprе lembrar que essa explicação dos valores das cargas críticas baseada na distribuição das tensões tem apenas um sentido relativo. Basta lembrar que, no caso de carga transversal, quando se aumenta a excentricidade, o valor da carga crítica diminui, embora as tensões permaneçam com os mesmos valores.

É interessante observar que a consideração do bimoto levou a um problema de 2ª espécie em que, pela interdependência das equações em  $w_D$  e  $\phi$ , não só a função  $\phi$  é determinada como também a função  $w_D$ . Isso pode ser verificado considerando-se o sistema de equações (3.6) nos parâmetros  $w_i$ ,  $w'_i$ ,  $\phi_i$  e  $\phi'_i$ . Essas equações não são mais homogêneas por causa do aparecimento do termo  $-B_5 \phi'_5$  na expressão da energia o qual, depois de derivado fornece um termo independente nas equações. A resolução dessas equações levaria então, como já foi considerado, à determinação dos parâmetros que definem a elástica.

Já da observação das equações diferenciais, cuja resolução o processo em estudo procura evitar, se pode observar que, sendo a função  $\phi$  determinada, então a função  $w_D$  também o será. De fato, para o exemplo em estudo, uma das equações diferenciais (2.23) se reduz a:

$$E J_y w_D^{IV} + (M_z \phi)'' = 0$$

Dividindo por  $E J_y$ , integrando duas vezes e arrumando os termos, se obtêm:

$$w_D'' = - \frac{M_z}{E J_y} \phi + C_1 x + C_2$$

A aplicação das condições de vinculação:

$$\phi(0) = \phi(l) = w_D''(0) = w_D''(l) = 0$$

permite anular as constantes  $C_1$  e  $C_2$ .

Então se pode concluir que, sendo  $\phi$  determinado,  $w_D$  também o será.

Finalizando, deve ser lembrado, como observação de caráter geral, que todos os resultados desse capítulo e do anterior se referem aos valores críticos do carregamento sem cogitação do fator de segurança, cuja estudo não faz parte desse trabalho. Pode também acontecer, em alguns dos exemplos, que as cargas devam ser limitadas por considerações de resistência e não de estabilidade.

APÊNDICE I

RESUMO DA TEORIA DE FLEZO-TORÇÃO

1 - INTRODUÇÃO

Considere-se uma barra de secção aberta de paredes finas como a representada na figura 1. Essa barra será referida ao sistema de eixos  $xyz$  indicado naquela figura, sendo  $y$  e  $z$  eixos principais de inércia e  $x$  um eixo longitudinal pelos centros de gravidade das secções.

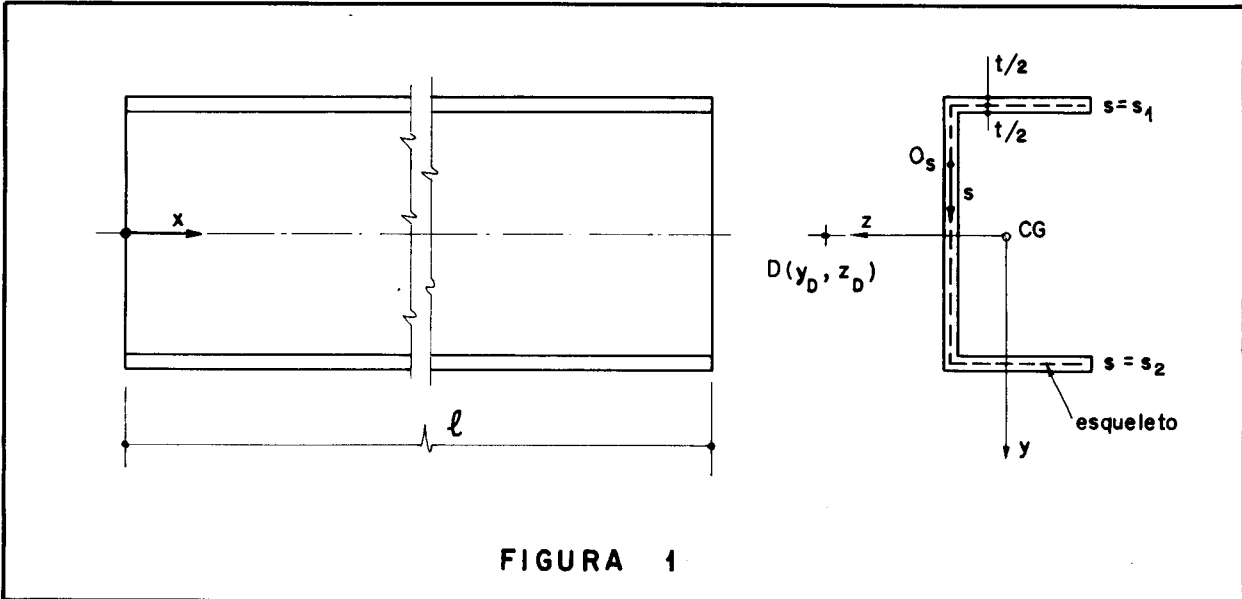


FIGURA 1

Na figura 1 também é representada a linha esqueleto, ou simplesmente esqueleto da secção, que é a linha que divide a espessura  $t$  ao meio. No esqueleto é adotada uma ordenada  $s$  com origem  $O_s$  a ser estabelecida convenientemente. As extremidades do esqueleto têm, respectivamente,  $s = s_1$  e  $s = s_2$ .

A espessura  $t$  pode variar com  $s$  e o elemento de área da secção é dado por:

$$dS = t ds \quad \dots\dots\dots(1)$$



São feitas as seguintes suposições:

a) as dimensões da secção não variam com a coordenada  $x$ ;

b) a barra é de paredes finas ou seja: a espessura  $t$  é bem menor que as dimensões características do esqueleto e essas são bem menores que o comprimento  $l$  da barra;

c) a secção é indeformável em seu plano, portanto o seu deslocamento nesse plano será um deslocamento de corpo rígido.

## 2 - CENTRO DE TORÇÃO OU DE CISALHAMENTO

O ponto  $D(y_D, z_D)$  indicado na figura 1 é o centro de torção ou de cisalhamento: é o ponto da secção por onde deve passar a linha de ação de uma carga transversal para que a viga fique submetida só a flexão e não a torção.

Para achar a posição do centro de torção, considere-se a expressão das tensões de cisalhamento provocadas pela força cortante  $Q$ :

$$\tau = \frac{Q M_S}{t J} \dots\dots\dots(2)$$

onde o momento estático  $M_S$  e o momento de inércia  $J$  são tomados em relação ao eixo apropriado.

Seja suposto inicialmente um carregamento paralelo ao eixo  $y$ . Em (2) deve então ser feito:

$$\begin{aligned} Q &= Q_y \\ J &= J_z \\ M_S &= \int_{s_1}^{s_2} y \, dS \end{aligned}$$

A condição que fornece a localização de  $D$  é que a resultante dos momentos das tensões  $\tau$  em relação ao centro de torção seja nula. Tem-se então:

$$\int_{s_1}^{s_2} \tau dS n = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

sendo  $n$  a distância do centro de torção à tangente ao esqueleto conforme indicado na figura 2a).

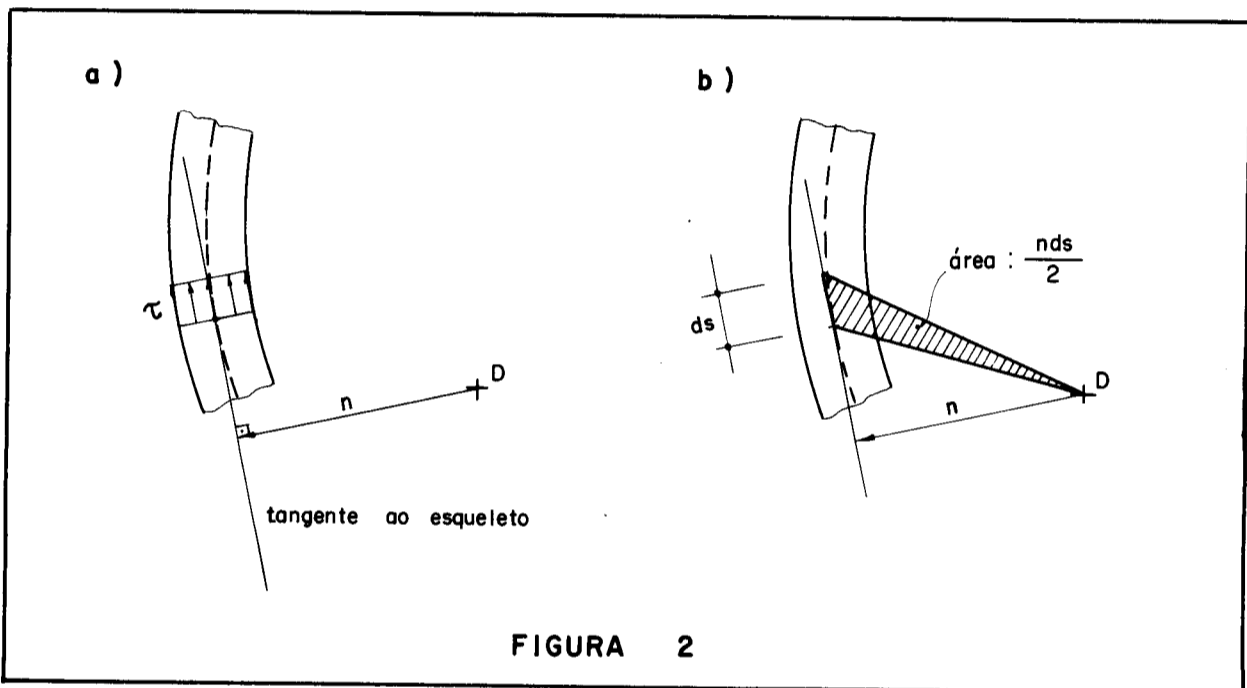


FIGURA 2

A substituição de (1) e (2) em (3) fornece:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s y dS \right) n ds = 0$$

Efetuada a integração por partes e lembrando que o momento estático é nulo nos pontos extremos da secção, obtém-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s n ds \right) y dS = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

Supondo agora um carregamento paralelo ao eixo  $z$ , procedimento análogo conduzirá à seguinte condição para o

centro de torção:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s n \, ds \right) z \, dS = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

Será definida como área setorial a seguinte característica geométrica:

$$\omega = \int_{s_1}^s n \, ds \quad \dots\dots\dots(6)$$

A área setorial  $\omega$  é uma função da ordenada  $s$  e a razão de seu nome provém da propriedade esquematizada na figura 2b): o elemento de área setorial  $d\omega$  é o dobro da área do setor elementar com polo em D e que compreende o arco elementar  $ds$ .

Com a utilização de (6), as condições (4) e (5) para o centro de torção podem ser escritas como:

$$\left. \begin{aligned} \int_s \omega y \, dS &= 0 \\ \int_s \omega z \, dS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

onde se subentende que as integrais devem ser estendidas a toda a secção.

A origem  $O_s$  da coordenada  $s$  não influi nas condições (7). De fato, a mudança de origem provocaria o acréscimo de uma constante na área setorial; essa constante daria contribuição nula para as integrais de (7), por ser nulo o momento estático quando se considera a secção inteira.

Para facilitar as aplicações a seguir, a origem  $O_s$  é escolhida de maneira a satisfazer a condição:

$$\int_S \omega \, ds = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

Caso se tenha a área setorial  $\bar{\omega}$  com origem arbitrária e se queira a área setorial  $\omega$  satisfazendo (8) se faz:

$$\omega = \bar{\omega} + C \quad \dots\dots\dots(9)$$

A aplicação de (8) fornece o valor da constante C de (9):

$$C = \frac{-1}{S} \int_S \bar{\omega} \, ds \quad \dots\dots\dots(10)$$

3 - FÓRMULAS PARA AS COORDENADAS DO CENTRO DE TORÇÃO

As condições (7) que definem a posição do centro de torção precisam ser transformadas de modo a fornecer expressões explícitas nas coordenadas de D ( $y_D, z_D$ ).

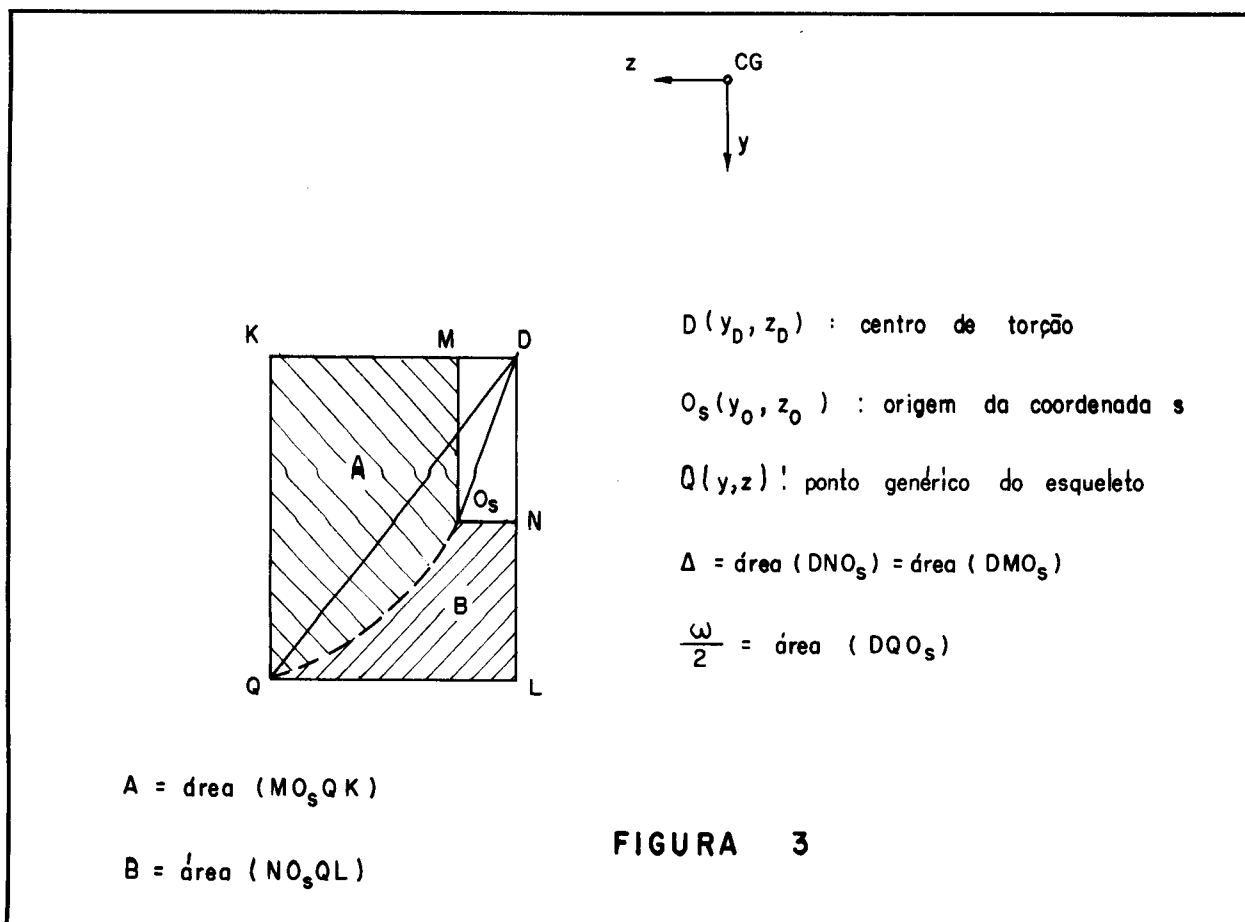
Isso é conseguido por meio da interpretação da área setorial esquematizada na figura 3. Nessa figura Q(y,z) representa um ponto genérico do esqueleto e  $O_s(y_o, z_o)$  a origem da coordenada s. Pelos pontos D,  $O_s$  e Q são traçadas retas paralelas aos eixos principais de inércia y e z. Seja ainda  $\Delta$  a área do triângulo  $DMO_s$  (ou do  $DNO_s$ ). Sendo a área do quadrilátero DKQL o dobro da área do triângulo DQL, pode-se escrever:

$$A + B + 2\Delta = 2\left(\frac{\omega}{2} + B + \Delta\right)$$

onde A e B são as áreas hachuradas da figura 3.

Da igualdade acima se tira:

$$\omega = A - B \quad \dots\dots\dots(11)$$



Considere-se agora a figura 4 onde, além do centro de torção, é adotado um ponto  $P(y_p, z_p)$ , arbitrariamente escolhido, que servirá como polo provisório para a área setorial. Indicando com  $\omega_p$  a área setorial com polo provisório P, pode-se escrever, considerando a propriedade (11) da área setorial aplicada à disposição indicada na figura 4:

$$\omega_p = A + (z - z_o)(y_D - y_p) - B - (y - y_o)(z_D - z_p)$$

Ou, arrumando convenientemente e utilizando (11):

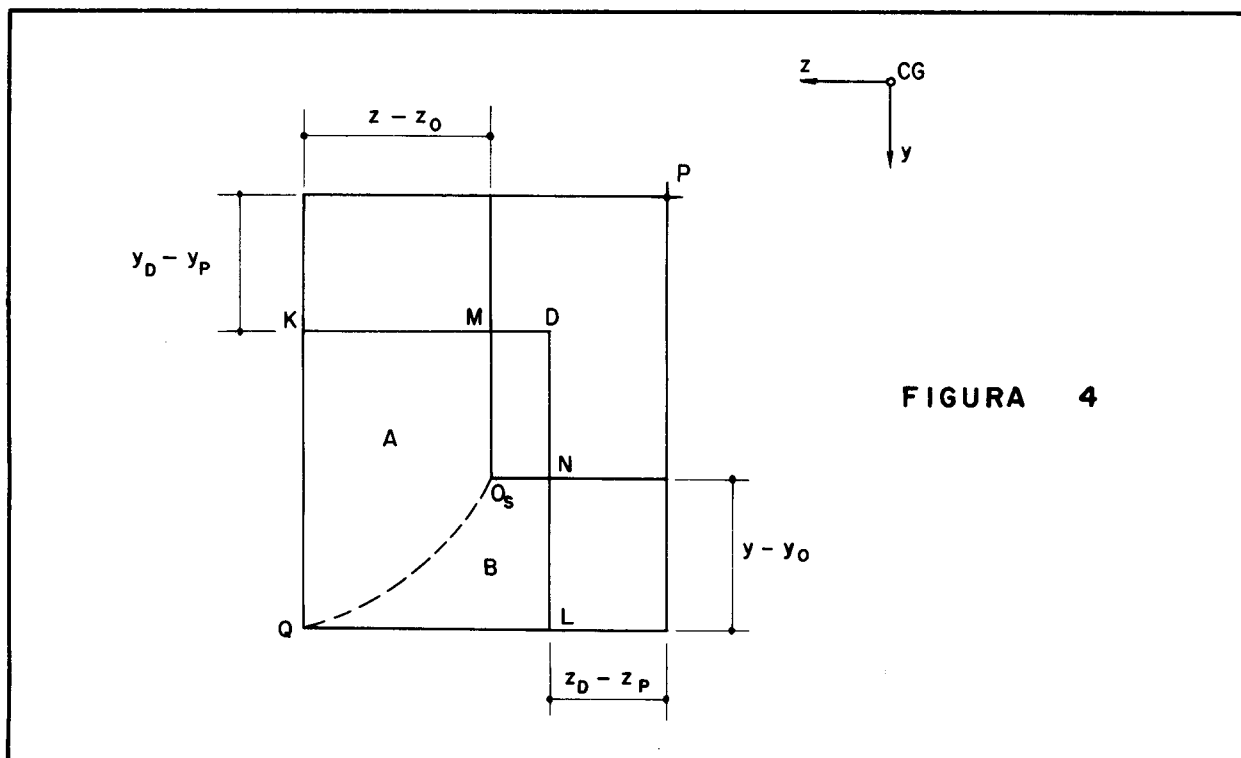
$$\omega = \omega_p + (y - y_o)(z_D - z_p) - (z - z_o)(y_D - y_p)$$

Substituindo essa expressão de  $\omega$  nas integrais de (7), obtêm-se finalmente:

$$\int_s \omega y \, dS = \int_s \omega_p y \, dS + (z_D - z_p) J_z = 0$$

$$\int_S \omega z \, dS = \int_S \omega_P z \, dS - (y_D - y_P) J_y = 0$$

onde estão sendo usadas as seguintes definições e propriedades:



$$\int_S y^2 \, dS = J_z$$

$$\int_S z^2 \, dS = J_y$$

$$\int_S y \, dS = \int_S z \, dS = \int_S yz \, dS = 0$$

Resolvendo as expressões obtidas nas coordenadas  $y_D$  e  $z_D$ , obtêm-se finalmente as fórmulas procuradas:

$$\left. \begin{aligned} y_D &= y_P + \frac{1}{J_y} \int_S \omega_P z \, dS \\ z_D &= z_P - \frac{1}{J_z} \int_S \omega_P y \, dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

#### 4 - TORÇÃO UNIFORME OU LIVRE OU DE SAINT-VENANT

##### 4.1 - Observação sobre o centro de torção

Cumpra inicialmente fazer uma observação sobre o centro de torção. Na teoria de 1ª ordem, o trabalho do momento torçor em um deslocamento de flexão é nulo. Pode-se concluir, portanto, pelo teorema de Maxwell, que o trabalho do carregamento que provoca só flexão é nulo no deslocamento de torção. Isso só é possível se o centro de torção não se deslocar durante a torção: donde se conclui que o centro de torção é o centro de rotação no deslocamento de torção. Essa propriedade será usada no que se segue.

##### 4.2 - Condições para a torção livre

Ocorre a torção livre ou uniforme quando são satisfeitas as seguintes condições:

- a) o momento torçor  $M_t$  é constante com  $x$ ;
- b) a secção é constante com  $x$ ;
- c) não há vínculos que impeçam deslocamentos longitudinais.

A Resistência dos Materiais fornece os resultados da torção livre. Assim, a tensão tangencial é linearmente distribuída na espessura, sendo nula no esqueleto e tendo seus valores máximos nas bordas dados por:

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} t \quad \dots\dots\dots(13)$$

A derivada do ângulo de giro é dada por:

$$\phi' = \frac{M_t}{GJ_t} \dots\dots\dots(14)$$

$J_t$  é o momento de inércia à torção já mencionado e dado por (2.6).

4.3 - Deslocamentos

Serão considerados agora os deslocamentos  $u$  na direção de  $x$  e  $v$  na direção de  $s$ .

Devido ao giro  $\phi$  da secção em torno do centro de torção, um ponto do esqueleto sofrerá o deslocamento  $QQ'$  indicado na figura 5.

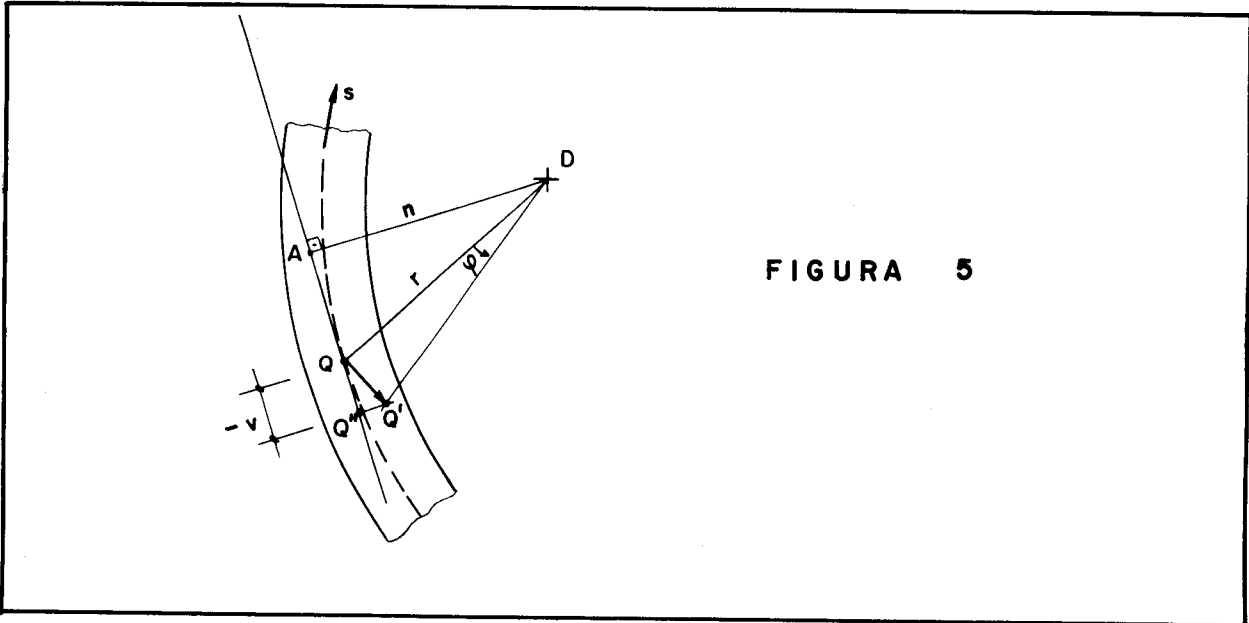


FIGURA 5

Para ângulos pequenos se pode fazer

$$\overline{QQ'} = r \phi$$

onde  $r$  é o comprimento do raio vetor que une o centro de torção com o ponto genérico do esqueleto.

Seja  $\overline{QQ''}$  a projeção do deslocamento na direção



da tangente ao esqueleto. Essa projeção é negativa por causa das convenções do ângulo de giro  $\phi$  (positivo quando o giro é antihorário para um observador olhando no sentido positivo do eixo x) e da ordenada s (positiva quando o raio vetor gira no sentido horário, para a posição mencionada do observador).

Da semelhança dos triângulos DAQ e QQ"Q' pode-se deduzir:

$$-v = n \phi$$

Derivando em relação a x, obtém-se:

$$v' = -n \phi' \dots\dots\dots(15)$$

Seja  $\gamma$  a distorção de um elemento ds dx situado no esqueleto. Da teoria de elasticidade se tem:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Como a tensão tangencial é nula no esqueleto, pela lei de Hooke se conclui que a distorção também o será. Nesse caso, a utilização de (15) nessa última expressão dará:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = n \phi' \dots\dots\dots(16)$$

Na torção livre o deslocamento longitudinal não é função de x; então se pode fazer:

$$\frac{du}{ds} = n \phi'$$

Será feita agora a integração em s desde a origem

$O_s$  até o ponto genérico Q, obtendo-se:

$$u = \phi' \int_{O_s}^Q n \, ds$$

Ou, lembrando da definição de área setorial:

$$u = \omega \phi' \dots\dots\dots(17)$$

Portanto os deslocamentos longitudinais são contados a partir do ponto  $O_s$  no sentido positivo de x.

## 5 - TORÇÃO NÃO UNIFORME OU FLEXO-TORÇÃO

### 5.1 - Hipótese de cálculo

Como estão sendo consideradas somente barras de secção constante, a ocorrência de flexo-torção ou torção não uniforme fica restrita aos casos em que o momento torçor não é constante ou àqueles em que há vínculos que impedem os deslocamentos longitudinais de alguma secção.

A suposição básica para enfrentar o problema de flexo-torção é que a equação (17) continua válida, agora com a particularidade de que a derivada do ângulo de giro não é mais constante.

### 5.2 - Tensão normal de flexo-torção

Serão desprezadas as tensões normais com exceção daquelas em cortes transversais. Então, sendo  $\sigma_x$  e  $\epsilon_x$ , respectivamente, a tensão e a deformação longitudinais, pode-se escrever a lei de Hooke como:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \dots\dots\dots(18)$$

onde E é o módulo de elasticidade.

Sabe-se da teoria de elasticidade que!

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ou, usando (17):

$$\epsilon_x = \omega \phi''$$

Substituindo em (18), obtém-se a tensão normal de flexo-torção:

$$\sigma_x = E \omega \phi'' \dots\dots\dots(19)$$

Deve ser observado que as tensões  $\sigma_x$  não tem força nem momento resultante na secção devido às condições (7) e (8). Sua "resultante" será um novo esforço solicitante, o bimomento, que será introduzido mais à frente.

### 5.3 - Tensão tangencial de flexo-torção

Considerando o equilíbrio longitudinal do elemento de comprimento dx representado na figura 6a), conclui-se a existência da tensão tangencial em cortes longitudinais como o indicado. Pelo teorema de Cauchy, essa tensão também atuará na secção transversal. Essa tensão, representada na figura 6a) por  $\tau_{ft}$ , será suposta uniforme na espessura e recebe o nome de tensão tangencial de flexo-torção. O seu cálculo é feito a seguir.

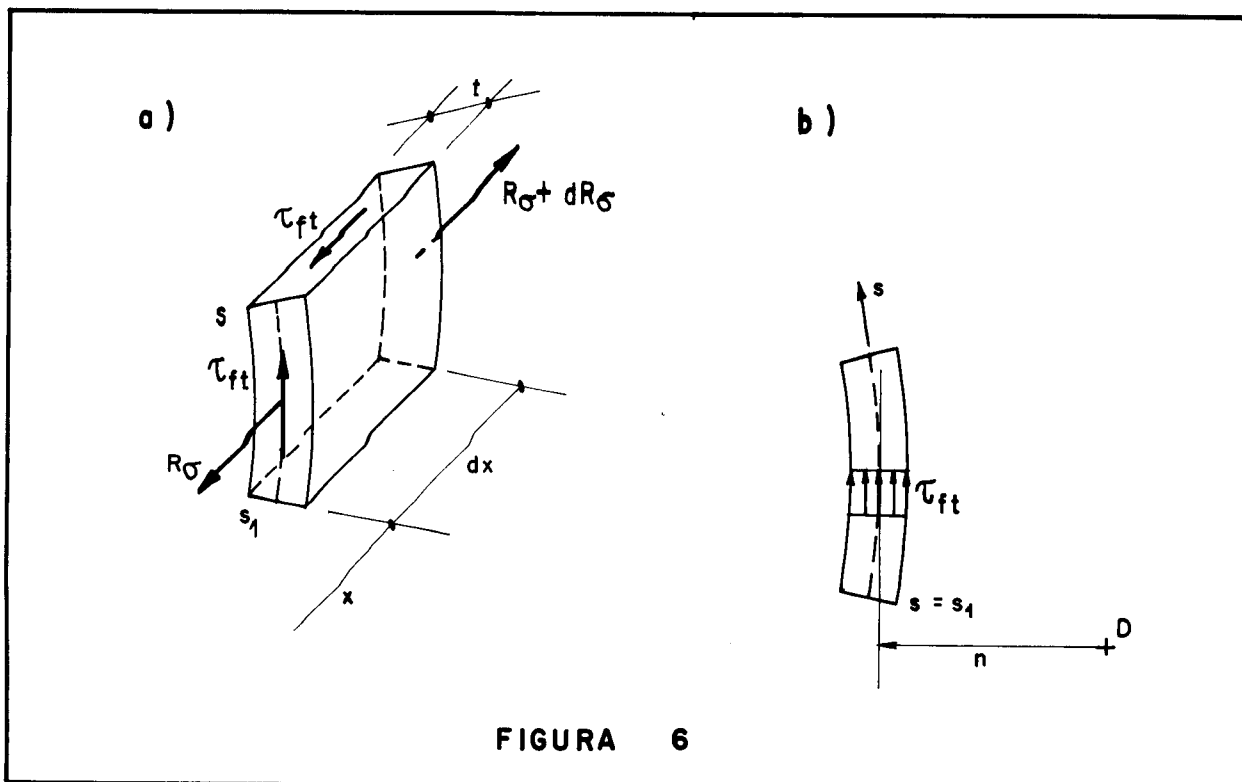


FIGURA 6

Seja  $R_{\sigma}$  a resultante das tensões  $\sigma_x$  na parte considerada da secção. Então se tem:

$$R_{\sigma} = \int_{s_1}^s \sigma_x dS$$

Ou, usando a expressão (19):

$$R_{\sigma} = E \phi'' \int_{s_1}^s \omega dS$$

Derivando, obtêm-se:

$$\frac{d R_{\sigma}}{dx} = E \phi''' \int_{s_1}^s \omega dS$$

O equilíbrio do elemento considerado na direção longitudinal fornece:

$$\tau_{ft} t dx = d R_{\sigma}$$

de onde se tira a expressão de  $\tau_{ft}$ :

$$\tau_{ft} = \frac{E \phi'''}{t} \int_{s_1}^s \omega dS \dots\dots\dots(20)$$

5.4 - Momento de flexo-torção

As tensões  $\tau_{ft}$  são suficientemente pequenas para não ameaçar a base de cálculo da teoria de flexo-torção: distorção nula no esqueleto. Entretanto, sua contribuição para o momento torçor pode ser apreciável porque as tensões tangenciais provenientes da torção livre, sendo linearmente distribuídas na espessura, trabalham com braços bem menores.

Então se pode considerar o momento torçor ( $M_t$ ) como a soma de duas parcelas:

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \dots\dots\dots(21)$$

Onde:

$M_\ell$  é o momento de torção livre

$M_{ft}$  é o momento de flexo-torção

Para calcular  $M_{ft}$ , considere-se a figura 6b) onde está indicado o braço  $n$  das tensões  $\tau_{ft}$  em relação ao centro de torção. Pode-se então escrever:

$$M_{ft} = \int_{s_1}^{s_2} \tau_{ft} dS n$$

Ou, usando (1) e (20):

$$M_{ft} = E \phi''' \int_{s_1}^{s_2} \left( \int_{s_1}^s \omega dS \right) n ds$$

Efetuada a integração por partes e, usando (6) e (8), obtém-se finalmente:

$$M_{ft} = -E \phi''' \int_{s_1}^{s_2} \omega^2 dS \dots\dots\dots(22)$$

São introduzidas as seguintes características de secção denominadas por analogia com expressões já conhecidas da Resistência dos Materiais:

a) momento setorial de inércia

$$J_{\omega} = \int_S \omega^2 dS \quad \dots\dots\dots(23)$$

b) momento estático setorial

$$S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega dS \quad \dots\dots\dots(24)$$

Com essas novas características, a expressão (22) pode ser escrita:

$$M_{ft} = -E J_{\omega} \phi'''' \quad \dots\dots\dots(25)$$

A substituição de (24) e (25) em (20) fornece:

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft} S_{\omega}}{t J_{\omega}} \quad \dots\dots\dots(26)$$

5.5 - Equação diferencial do problema

A expressão (14) se refere à relação entre a derivada do ângulo de giro e o momento torçor no caso da torção livre. Lembrando que agora o momento de torção livre é apenas uma parte do momento torçor, a expressão (14) deve ser transformada para dar:

$$M_{\ell} = G J_t \phi' \quad \dots\dots\dots(27)$$

A substituição de (25) e (27) em (21) fornece a equação diferencial no ângulo de giro:

$$E J_{\omega} \phi'''' - G J_t \phi' = -M_t \dots\dots\dots(28)$$

Obtido o ângulo de giro pela resolução dessa equação, está resolvido o problema de flexo-torção, uma vez que é possível achar todas as grandezas envolvidas.

A equação (28) constitui o tratamento clássico dos problemas de flexo-torção. Pela introdução do bimomento por Vlassov (1) essa equação foi modificada, permitindo o tratamento de problemas mais gerais.

## 6 - INTRODUÇÃO DO BIMOMENTO

Define-se o bimomento como:

$$B = \int_S \sigma_x \omega \, dS \dots\dots\dots(29)$$

Pela utilização de (19) se obtém, então:

$$B = E \phi'' \int_S \omega^2 \, dS$$

Ou, usando (23):

$$B = E J_{\omega} \phi'' \dots\dots\dots(30)$$

Pela substituição de (30) em (19) se obtém a expressão da tensão normal de flexo-torção em função do bimomento, ou seja:

$$\sigma_x = \frac{B}{J_{\omega}} \omega \dots\dots\dots(31)$$

que é análoga à expressão da tensão normal no caso de flexão simples.

A analogia se completa com a nova expressão da tensão tangencial de flexo-torção. De fato, derivando (30) e comparando com (25), se tem:

$$M_{ft} = -B' \dots\dots\dots(32)$$

A substituição de (32) em (26) fornece então:

$$\tau_{ft} = \frac{B' S_{\omega}}{t J_{\omega}} \dots\dots\dots(33)$$

cuja analogia com (2) é completa se se lembrar que a força cortante é derivada do momento fletor.

Para obter a nova equação diferencial do problema, procede-se inicialmente pela substituição de (27) e (32) em (21), resultando:

$$M_t = G J_t \phi' - B'$$

Derivando, obtém-se:

$$M'_t = G J_t \phi'' - B''$$

A utilização de (30) fornece:

$$M'_t = \frac{G J_t}{E J_{\omega}} B - B''$$

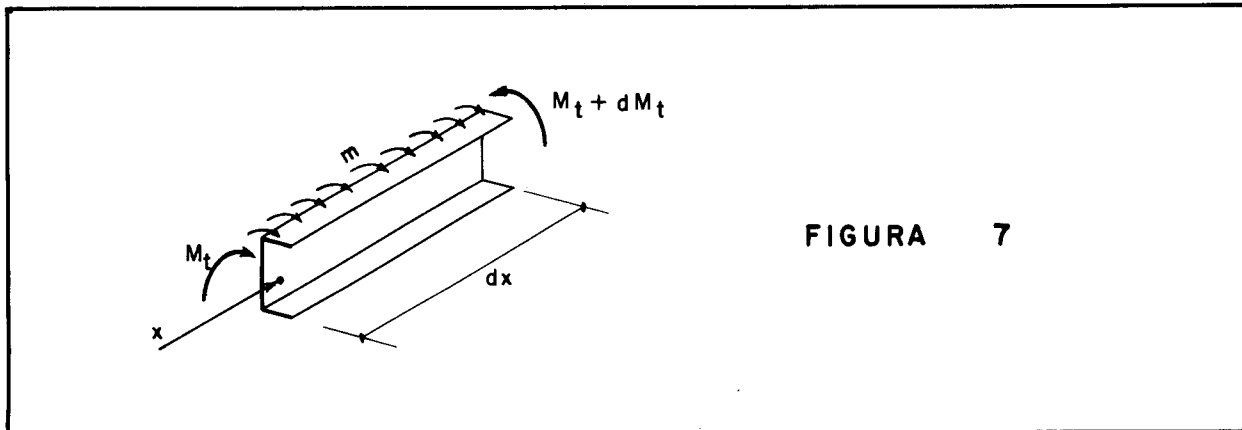


FIGURA 7



Essa última equação pode ser escrita finalmente como:

$$r^2 B'' - B = -r^2 m \dots\dots\dots(34)$$

Onde:

$$r = \sqrt{\frac{E J \omega}{G J_t}} \dots\dots\dots(35)$$

é chamado de segmento característico.

E

$$m = M'_t$$

é a carga torçora distribuída cujo sentido positivo, juntamente com o de  $M_t$ , está indicado na figura 7.

No caso de  $m$  constante ou variando linearmente com  $x$ , a solução geral da nova equação diferencial (34) é:

$$B = C_1 \sinh \frac{x}{r} + C_2 \cosh \frac{x}{r} + r^2 m \dots\dots(36)$$

Para finalizar, resta ver algumas condições de contorno que podem ocorrer e que servirão para a determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$  de (36):

a) extremidade livre

Sendo  $\sigma_x = 0$ , de (29) vem:

$$B = 0$$

b) extremidade engastada

Sendo o deslocamento longitudinal ( $u$ ) nulo para qualquer ponto do esqueleto, então de (17) vem:

$$\phi' = 0$$

De (27) se tem então:

$$M_{\ell} = 0$$

De (21) se conclui:

$$M_t = M_{ft}$$

De (32) então se tira finalmente:

$$B' = -M_t$$

c) extremidade com distribuição dada de tensões.

Nesse caso se utiliza a própria definição (29) para se conhecer B.

Caso na extremidade sejam aplicadas cargas axiais  $P_i$  concentradas em pontos de área setorial  $\omega_i$ , o bimomento pode ser calculado como:

$$B = \sum_i P_i \omega_i$$

APÊNDICE II

Programa em linguagem FORTRAN para o computador IBM 1130  
do Centro de Processamento de Dados da Escola de Engenharia  
de São Carlos.

PAGE 1 RACHID

// JOB T

RACHID

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0016 0016 0000  
0021 0001

V2 M10 ACTUAL 32K CONFIG 32K

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE DET(A,M,D)
DIMENSION A(52,52)
N=M
ADJ=1.0
D=1.0
10 I=1
J=1
15 IF(ABS(A(I,J))-0.1E-19)20,20,30
20 IF(I=N)40,50,50
40 I=I+1
GOTO 15
50 D=0.0
RETURN
30 IF(I=1)60,60,70
70 DO100 J=1,N
SAVA=A(I,J)
A(I,J)=A(I,J)
100 A(I,J)=SAVA
ADJ=ADJ*(-1.)
60 D=D*A(I,1)
D=D/ABS(D)
DO200 J=2,N
200 A(I,J)=A(I,J)/A(I,1)
DO300 J=2,N
DO300 J=2,N
300 A(I,J)=A(I,J)-A(I,J)*A(I,1)
NM1=N-1
DO400 I=1,NM1
DO400 J=1,NM1
400 A(I,J)=A(I+1,J+1)
IF(N=2)80,80,90
90 N=N-1
GOTO 10
80 D=D*ADJ*A(I,1)
RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR DET  
COMMON 0 VARIABLES 14 PROGRAM 336

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0019 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

\*STORE WS UA DET  
CART ID 0016 DB ADDR 4AB3 DB CNT 0017

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*IUCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
CARGA CRITICA DE INSTABILIDADE LATERAL
DIMENSION B(52,52),H(12),QXC(12),QXU(12),QYC(12),QYU(12),PYC(13),PY
2U(13),EYQ(12),EYP(13),FNC(13),FNU(13),FQC(13),FQU(13),FMC(13),FNU(
313),QX(12),QY(12),PY(13),FN(13),FQ(13),FM(13),NCC(13),BC(13),BU(13
4),BV(13)
CARACTERISTICAS DO MATERIAL
E=2100.
G=800
CARACTERISTICAS GEOMETRICAS
300 READ(2,11)AJY,AJT,AJU,YD,AKY,QID
11 FORMAT(6E12.5)
IF(AJY)221,221,301
C DIVISAO DA VIGA
```

PAGE 2 RACHID

```
301 READ(2,9)NH
9 FORMAT(I2)
NI=NH+1
NM=4*NI
READ(2,1)(H(I),I=1,NH)
1 FORMAT(12F6.2)
CONDICOES DE CONTORNO
READ(2,7)(NCC(L),L=1,13)
7 FORMAT(13I2)
C DADOS PARA CADA TRECHO
D020I=1,NH
20 READ(2,2)QXC(I),QXU(I),QYC(I),QYU(I),EYQ(I)
2 FORMAT(5E13.6)
C DADOS PARA CADA NO
D030I=1,NI
30 READ(2,2)PYC(I),PYU(I),EYP(I),FNC(I),FNU(I)
D040I=1,NI
40 READ(2,3)FQC(I),FQU(I),FMC(I),FMU(I)
3 FORMAT(4E13.6)
READ(2,500)IB
500 FORMAT(I2)
IF(1B)501,501,502
502 READ(2,510)UW
510 FORMAT(E12.5)
R=SQRT(E*AJD/G/AJT)
D050I=1,NI
503 READ(2,504)BC(I),BU(I)
504 FORMAT(2E13.6)
C ANULACAO DO DETERMINANTE
501 READ(2,8)PMQ,S1
8 FORMAT(2F7.3)
ICP=1
IC=1
CA CARGAS E ESFORCOS SOLICITANTES
10 D050I=1,NH
QX(I)=QXC(I)+PMQ*QXU(I)
50 QY(I)=QYC(I)+PMQ*QYU(I)
D060I=1,NI
PY(I)=PYC(I)+PMQ*PYU(I)
FN(I)=FNC(I)+PMQ*FNU(I)
FQ(I)=FQC(I)+PMQ*FQU(I)
60 FM(I)=FMC(I)+PMQ*FMU(I)
IF(1B)506,506,505
505 D050I=1,NI
507 BV(I)=BC(I)+PMQ*BU(I)
CB CONSTRUCAO DA MATRIZ
506 D070I=1,NM
D070J=1,NM
70 B(I,J)=0.
K=1
J=1
80 B(K,K)=B(K,K)+12.*E*AJY/H(I)**3+1.2*FN(I)/H(I)-0.6*QX(I)
B(K,K+1)=B(K,K+1)+6.*E*AJY/H(I)**2+FN(I)/10.-H(I)*QX(I)/10.
B(K,K+2)=B(K,K+2)-1.2*FN(I)/H(I)-FQ(I)/10.+1.2*YD*FN(I)/H(I)-H(I)*
2QY(I)/70.-0.6*YD*QX(I)
B(K,K+3)=B(K,K+3)-FM(I)/10.+YD*FN(I)/10.-H(I)**2*QY(I)/140.-H(I)*Y
2D*QX(I)/10.
B(K,K+4)=B(K,K+4)-12.*E*AJY/H(I)**3-1.2*FN(I)/H(I)+0.6*QX(I)
B(K,K+5)=B(K,K+5)+6.*E*AJY/H(I)**2+FN(I)/10.
B(K,K+6)=B(K,K+6)+1.2*FN(I)/H(I)+1.1*FQ(I)-1.2*YD*FN(I)/H(I)-17.*H
2(I)*QY(I)/35.+0.6*YD*QX(I)
B(K,K+7)=B(K,K+7)-FM(I)/10.-H(I)*FQ(I)/10.+YD*FN(I)/10.+3.*H(I)**2
2*QY(I)/70.
B(K+1,K+1)=B(K+1,K+1)+4.*E*AJY/H(I)+H(I)*FN(I)/7.5-H(I)**2*QX(I)/3
20.
B(K+1,K+2)=B(K+1,K+2)-1.1*FM(I)-H(I)*FQ(I)/5.+YD*FN(I)/10.+11.*H(I)
2)**2*QY(I)/420.-H(I)*YD*QX(I)/10.
B(K+1,K+3)=B(K+1,K+3)-H(I)*FM(I)/7.5-H(I)**2*FQ(I)/30.+YD*H(I)*FN
2(I)/7.5+H(I)**3*QY(I)/210.-H(I)**2*YD*QX(I)/30.
B(K+1,K+4)=B(K+1,K+4)-6.*E*AJY/H(I)**2-FN(I)/10.+H(I)*QX(I)/10.
B(K+1,K+5)=B(K+1,K+5)+2.*E*AJY/H(I)-H(I)*FN(I)/30.+H(I)**2*QX(I)/6
20.
B(K+1,K+6)=B(K+1,K+6)+FM(I)/10.+H(I)*FQ(I)/5.-YD*FN(I)/10.-23.*H(I)
2)**2*QY(I)/210.+H(I)*YD*QX(I)/10.
B(K+1,K+7)=B(K+1,K+7)+H(I)*FM(I)/30.-YD*H(I)*FN(I)/30.+H(I)**3*QY
2(I)/210.+H(I)**2*YD*QX(I)/60.
B(K+2,K+2)=B(K+2,K+2)+12.*E*AJD/H(I)**3+1.2*G*AJT/4(I)+1.2*QID*FN
2(I)/H(I)+2.4*FN(I)*(AKY-YD)/H(I)+1.2*FQ(I)*(AKY-YD)-0.6*QID*QX(I)-1
32.*H(I)*QY(I)*(AKY-YD)/35.-13.*H(I)*QY(I)*EYQ(I)/35.-PY(I)*EYP(I)-
2B(K+2,K+3)=B(K+2,K+3)+6.*E*AJD/H(I)**2+3*AJT/10.+QID*FN(I)/10.+FM
2(I)*(AKY-YD)/5.+H(I)*FQ(I)*(AKY-YD)/5.-H(I)*QID*QX(I)/10.-H(I)**2*Q
3Y(I)*(AKY-YD)/14.-11.*H(I)**2*QY(I)*EYQ(I)/210.
B(K+2,K+4)=B(K+2,K+4)+1.2*FM(I)/H(I)+FQ(I)/10.-1.2*YD*FN(I)/H(I)+H
```

PAGE 3 RACHID

```

2(I)*QY(I)/70.+0.6*YD*QX(I)
B(K+2,K+5)=B(K+2,K+5)-FM(I)/10.+H(I)*FQ(I)/10.+YD*FN(I)/10.-17.*H(
2I)**2*QY(I)/420.
B(K+2,K+6)=B(K+2,K+6)-12.*E*AJD/H(I)**3-1.2*G*AJT/H(I)-1.2*QID*FN(
2I)/H(I)-2.4*FM(I)*(AKY-YD)/H(I)-1.2*FQ(I)*(AKY-YD)+0.6*QID*QX(I)+1
32.*H(I)*QY(I)*(AKY-YD)/35.-9.*H(I)*QY(I)*EYQ(I)/70.
B(K+2,K+7)=B(K+2,K+7)+6.*E*AJD/H(I)**2+6*AJT/10.+QID*FN(I)/10.+FM(
2I)*(AKY-YD)/5.+H(I)**2*QY(I)*(AKY-YD)/35.+13.*H(I)**2*QY(I)*EYQ(I)
3/420.
B(K+3,K+3)=B(K+3,K+3)+4.*E*AJD/H(I)+H(I)*G*AJT/7.5+QID*H(I)*FN(I)/
27.5+4.*H(I)*FM(I)*(AKY-YD)/15.+H(I)**2*FQ(I)*(AKY-YD)/15.-H(I)**2*
3QID*QX(I)/30.-H(I)**3*QY(I)*(AKY-YD)/52.5-H(I)**3*QY(I)*EYQ(I)/155
4.
B(K+3,K+4)=B(K+3,K+4)+FM(I)/10.-YD*FN(I)/10.+H(I)**2*QY(I)/140.+H(
2I)*YD*QX(I)/10.
B(K+3,K+5)=B(K+3,K+5)+H(I)*FM(I)/30.+H(I)**2*FQ(I)/30.-YD*H(I)*FN(
2I)/30.-H(I)**3*QY(I)/84.+H(I)**2*YD*QX(I)/60.
B(K+3,K+6)=B(K+3,K+6)-6.*E*AJD/H(I)**2-G*AJT/10.-QID*FN(I)/10.-FM(
2I)*(AKY-YD)/5.-H(I)*FQ(I)*(AKY-YD)/5.+H(I)*QID*QX(I)/10.+H(I)**2*Q
3Y(I)*(AKY-YD)/14.-13.*H(I)**2*QY(I)*EYQ(I)/420.
B(K+3,K+7)=B(K+3,K+7)+2.*E*AJD/H(I)-H(I)*G*AJT/30.-QID*H(I)*FN(I)/
230.-H(I)*FM(I)*(AKY-YD)/15.-H(I)**2*FQ(I)*(AKY-YD)/30.+H(I)**2*QID
3*QX(I)/60.+H(I)**3*QY(I)*(AKY-YD)/70.+H(I)**3*QY(I)*EYQ(I)/140.
B(K+4,K+4)=B(K+4,K+4)+12.*E*AJY/H(I)**3+1.2*FN(I)/4(I)-0.6*QX(I)
B(K+4,K+5)=B(K+4,K+5)-6.*E*AJY/H(I)**2-FN(I)/10.
B(K+4,K+6)=B(K+4,K+6)-1.2*FM(I)/H(I)-1.1*FQ(I)+1.2*YD*FN(I)/H(I)+1
27.*H(I)*QY(I)/35.-0.6*YD*QX(I)
B(K+4,K+7)=B(K+4,K+7)+FM(I)/10.+H(I)*FQ(I)/10.-YD*FN(I)/10.-3.*H(I)
2)**2*QY(I)/70.
B(K+5,K+5)=B(K+5,K+5)+4.*E*AJY/H(I)+H(I)*FN(I)/7.5-H(I)**2*QX(I)/1
20.
B(K+5,K+6)=B(K+5,K+6)+1.1*FM(I)+0.9*H(I)*FQ(I)-YD*FN(I)/10.-79.*H(
2I)**2*QY(I)/210.
B(K+5,K+7)=B(K+5,K+7)-H(I)*FM(I)/7.5-H(I)**2*FQ(I)/10.+YD*H(I)*FN(
2I)/7.5+4.*H(I)**3*QY(I)/105.-H(I)**2*YD*QX(I)/10.
B(K+6,K+6)=B(K+6,K+6)+12.*E*AJD/H(I)**3+1.2*G*AJT/H(I)+1.2*QID*FN(
2I)/H(I)+2.4*FM(I)*(AKY-YD)/H(I)+1.2*FQ(I)*(AKY-YD)-0.6*QID*QX(I)-1
32.*H(I)*QY(I)*(AKY-YD)/35.-13.*H(I)*QY(I)*EYQ(I)/35.-PY(I+1)*EYP(I
4+1)
B(K+6,K+7)=B(K+6,K+7)-6.*E*AJD/H(I)**2-G*AJT/10.-QID*FN(I)/10.-FM(
2I)*(AKY-YD)/5.-H(I)**2*QY(I)*(AKY-YD)/35.+11.*H(I)**2*QY(I)*EYQ(I)
3/210.
B(K+7,K+7)=B(K+7,K+7)+4.*E*AJD/H(I)+H(I)*G*AJT/7.5+QID*H(I)*FN(I)/
27.5+4.*H(I)*FM(I)*(AKY-YD)/15.+H(I)**2*FQ(I)*(AKY-YD)/15.-H(I)**2*Q
3ID*QX(I)/10.-3.*H(I)**3*QY(I)*(AKY-YD)/35.-H(I)**3*QY(I)*EYQ(I)/10
45.
509 IF(I8)508,508,509
S=(EXP(H(I)/R)-EXP(-H(I)/R))/2.
C=(EXP(H(I)/R)+EXP(-H(I)/R))/2.
A1=C*(H(I)/R)**4-4.*S*(H(I)/R)**3+12.*C*(H(I)/R)**2-24.*S*(H(I)/R)+2
24.*C-24.
A2=S*(H(I)/R)**4-4.*C*(H(I)/R)**3+12.*S*(H(I)/R)**2-24.*C*(H(I)/R)
2+24.*S
A3=C*(H(I)/R)**3-3.*S*(H(I)/R)**2+6.*C*(H(I)/R)-6.*S
A4=S*(H(I)/R)**3-3.*C*(H(I)/R)**2+6.*S*(H(I)/R)-6.*C+6.
A5=C*(H(I)/R)**2-2.*S*(H(I)/R)+2.*C-2.
A6=S*(H(I)/R)**2-2.*C*(H(I)/R)+2.*S
A7=C*(H(I)/R)-S
A8=S*(H(I)/R)-C+1.
A9=C-1.
C1={36.*A1*(R/H(I))**5-72.*A3*(R/H(I))**4+36.*A5*(R/H(I))**3}/H(I)
C2={36.*A2*(R/H(I))**5-72.*A4*(R/H(I))**4+36.*A6*(R/H(I))**3}/H(I)
C3=R*(9.*A1*(R/H(I))**4-24.*A3*(R/H(I))**3+22.*A5*(R/H(I))**2-8.*A
27*(R/H(I)+A9)
C4=R*(9.*A2*(R/H(I))**4-24.*A4*(R/H(I))**3+22.*A6*(R/H(I))**2-8.*A
28*(R/H(I)+S)
C5=R*(9.*A1*(R/H(I))**4-12.*A3*(R/H(I))**3+4.*A5*(R/H(I))**2)
C6=R*(9.*A2*(R/H(I))**4-12.*A4*(R/H(I))**3+4.*A6*(R/H(I))**2)
C7=18.*A1*(R/H(I))**5-42.*A3*(R/H(I))**4+30.*A5*(R/H(I))**3-6.*A7*
2(R/H(I))**2
C8=18.*A2*(R/H(I))**5-42.*A4*(R/H(I))**4+30.*A6*(R/H(I))**3-6.*A8*
2(R/H(I))**2
C9=18.*A1*(R/H(I))**5-30.*A3*(R/H(I))**4+12.*A5*(R/H(I))**3
C10=18.*A2*(R/H(I))**5-30.*A4*(R/H(I))**4+12.*A6*(R/H(I))**3
C11=R*(9.*A1*(R/H(I))**4-18.*A3*(R/H(I))**3+11.*A5*(R/H(I))**2-2.*
2A7*(R/H(I))
C12=R*(9.*A2*(R/H(I))**4-18.*A4*(R/H(I))**3+11.*A6*(R/H(I))**2-2.*
2A8*(R/H(I))
BT=(BV(I+1)-BV(I)*C)/S
B(K+2,K+2)=B(K+2,K+2)+UW*(BT*C1+BV(I)*C2)/AJD
B(K+2,K+3)=B(K+2,K+3)+UW*(BT*C7+BV(I)*C8)/AJD
B(K+2,K+6)=B(K+2,K+6)-UW*(BT*C1+BV(I)*C2)/AJD
B(K+2,K+7)=B(K+2,K+7)+UW*(BT*C9+BV(I)*C10)/AJD

```

PAGE 4 RACHID

```
B(K+3,K+3)=B(K+3,K+3)+UW*(BT*C3+BV(I)*C4)/AJD
B(K+3,K+6)=B(K+3,K+6)-UW*(BT*C7+BV(I)*C8)/AJD
B(K+3,K+7)=B(K+3,K+7)+UW*(BT*C11+BV(I)*C12)/AJD
B(K+5,K+6)=B(K+5,K+6)+UW*(BT*C1+BV(I)*C2)/AJD
B(K+6,K+7)=B(K+6,K+7)-UW*(BT*C9+BV(I)*C10)/AJD
B(K+7,K+7)=B(K+7,K+7)+UW*(BT*C5+BV(I)*C6)/AJD
508 K=K+4
    L=L+1
    IF(I-NH)80,80,90
90 DO100I=2,NM
    L=L-1
    DO100J=1,L
100 R(I,J)=B(J,I)
LC CONDIÇÕES DE CONTORNO
    L=1
270 IF(NCC(L))250,250,260
260 NCA=NCC(L)
    DO240K=1,NM
    B(NCA,K)=0.
240 B(K,NCA)=0.
    B(NCA,NCA)=1.
    L=L+1
    GOTU270
CD MANIPULACAO DO DETERMINANTE
250 CALDET(B,NM,DB)
    IF(DB)120,110,120
110 WRITE(5,4)PMQ
    4 FORMAT(///,10X,13HCARGA CRITICA,2X,E13.6)
    GOTU220
120 IF(IC-1)140,130,140
130 DC=DB
    IC=2
150 PMQ=PMQ+S1
    GOTU10
140 IF(DC*DB)170,170,160
160 IF(ICP-1)150,180,150
180 IF(IC-5)190,200,200
190 IC=IC+1
    GOTU150
200 WRITE(5,5)
    5 FORMAT(///,2X,81HNENHUM AUTOVALOR OU NUMERO PAR DELES NO INTERVALO
    2 PMQ INICIAL E PMQ+50*S1 INICIAL)
    GOTU220
170 IF(ICP-3)230,210,210
230 ICP=ICP+1
    PMQ=PMQ-S1
    S1=S1/10.
    GOTU150
210 PMQA=PMQ-S1
    WRITE(5,6)PMQA,PMQ
    6 FORMAT(///,10X,10HCARGA CRITICA ENTRE,1X,E13.6,1X,1HE,1X,E13.6)
220 GOTU300
221 CALL EXIT
    END

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
IGCS.

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 9216 PROGRAM 5278

END OF COMPILATION
// XEQ
```

BIBLIOGRAFIA

- 1 - VLASSOV, B.Z. - Pièces Longues en Voiles Minces - Eyrolles, 1962.
- 2 - LANGHAAR, H.L. - Energy Methods in Applied Mechanics - Wiley, 1962.
- 3 - RACHID, M. - Características de Perfis - Revista da Escola de Engenharia da UFMG - nº 12, ano 8 (junho de 1969).
- 4 - ZIEGLER, H. - Principles of Structural Stability - Blaisdell, 1968.
- 5 - ELSGOLTZ, L. - Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional - Editorial MIR, 1969.
- 6 - KETTER, R.L. e PRAWEL, S.P. - Modern Methods of Engineering Computation - Mc Graw-Hill, 1969.
- 7 - SCHIEL, F. - Barras de Seção Delgada - Serviço de Publicações da EESC, 1964.
- 8 - TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M. - Theory of Elastic Stability - Mc Graw-Hill, 1961.
- 9 - RUBINSTEIN, M.F. - Structural Systems-Statics, Dynamics and Stability - Prentice-Hall, 1970.
- 10- JAHNKE, E. e EMDE, F. - Tables of Functions - Dover Publications - 4<sup>a</sup> edição.
- 11- ABRAMOWITZ, M. e SEGUN, I.A. - Handbook of Mathematical Functions - Dover - 5<sup>a</sup> edição.
- 12- KREYSZIG, E. - Advanced Engineering Mathematics - Wiley, 1962.