

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**SOBRE A INSTABILIDADE ELÁSTICA
DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS
DE EDIFÍCIOS**

ENG.º RONALDO GARCIA DE FIGUEIREDO

TESE DE DOUTORADO

Orientador:

MIGUEL CARLOS STAMATO

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

SÃO CARLOS, AGOSTO DE 1976

[data provável de impressão/entrega do exemplar impresso]

PHA
Cutt. F492 N
R.21
Tombo 290/93-SET

UNIVERSITY OF WASHINGTON
LIBRARY
1993

UNIVERSITY OF WASHINGTON
LIBRARY
1993

1993

FLS. N.º _____
PROC. N.º 19/69
RUB. KCL

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
CAMPUS DE SÃO CARLOS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

SET.963/72

MCS/Mas.

São Carlos, 12 de dezembro de 1972

Exmo. Sr.

Prof. Dr. Morency Arouca

D.D. Diretor da Escola de Engenharia de S.Carlos

FACON
[Signature]
12/12/72

Senhor Diretor

Conforme decisão do Conselho do SET, de 6 do corrente mês, venho sugerir à Congregação da E.E.S.C. os seguintes nomes para a Comissão Julgadora do Concurso de Doutorado do Engº Ronaldo Garcia de Figueiredo:

Membros Titulares:

Prof. Dr. Frederico Schiel
Prof. Dr. Telemaco de M. van Langendonck
Prof. Dr. Odelar Leite Linhares
Prof. Dr. Walter Savassi
Prof. Dr. Miguel Carlos Stamato

Suplentes:

Prof. Dr. Octavio Gaspar de Souza Ricardo
Prof. Dr. Dante A. O. Martinelli
Prof. Dr. Marcius F. Giorgetti
Prof. Dr. Paulo Seleguin

Atenciosamente

[Signature]

Prof. M. C. Stamato
Orientador

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
CAMPUS DE SÃO CARLOS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Av. Dr. Carlos Botelho, 1465 — Caixa Postal 359 — fones - 3693 - 4310 — CEP 13560 - SÃO CARLOS — S. P.

São Carlos, 19 de janeiro de 1973.

DA-077/73
MF/hecm/

A conjugação
[assinatura]
19/1/73

Senhor Vice-Diretor:

Temos a honra de comunicar a Vossa Excelência que, de conformidade com a documentação constante do Proc. EESC 19/69 e nos termos da legislação em vigor, foi realizada, nesta data, a prova de defesa de tese de doutoramento do Engenheiro RONALDO GARCIA DE FIGUEIREDO.

Encaminhamos a Vossa Excelência, em anexo, para fins de homologação pelos órgãos competentes, cópias autênticas das atas das reuniões realizadas pela Comissão Julgadora, que concluiu pela aprovação, com distinção, e indicação do candidato à obtenção do título de "Doutor Engenheiro" pela Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo.

Servimo-nos do ensejo para apresentar a Vossa Excelência as expressões de nossa elevada estima e distinto apreço.

A COMISSÃO JULGADORA:

[assinatura]
Frederico Schiel

[assinatura]
Miguel Carlos Stamato

[assinatura]
Walter Savassi

[assinatura]
Telemaco Hippolyto de Macedo van Langendonck

[assinatura]
Odelar Leite Einhares

Ao Ex.^{mo} Sr.
Prof. Dr. RUBENS LIMA PEREIRA
DD. Vice-Diretor em exercício da
EESC - USP
Nesta

AGRADECIMENTOS

Queremos exprimir nosso reconhecimento à orientação constante que nos tem dado o Prof.Dr. Miguel Carlos Stamato, primeiramente quando fomos seu aluno no curso de graduação em Engenharia Civil, posteriormente, como seu assistente na Escola de Engenharia de São Carlos e agora, pelo estímulo recebido durante a realização deste trabalho.

Nossos agradecimentos à CAPES (Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão de bolsa de estudos que muito auxiliou a tornar possível esta publicação.

Agradecemos ao CCUEC (Centro de Computação da Universidade Estadual de Campinas) e ao C.P.D. (Centro de Processamento de Dados) da Escola de Engenharia de São Carlos, pelo uso que fizemos de seus equipamentos.

Agradecemos à FEL (Faculdade de Engenharia de Limeira), pelo apoio recebido para concluir este trabalho.

Finalmente, queremos agradecer ao sr. Rednei Aparecido Botelho pela datilografia eficiente e primorosa do texto e ao sr. José Armando Periotto pelo capricho na realização dos desenhos e figuras.

RESUMO

Este trabalho estuda diversos problemas típicos da instabilidade elástica de estruturas planas e espaciais. O objetivo final é chegar a um procedimento simples e de fácil compreensão para a determinação da carga crítica vertical de estruturas tridimensionais de edifícios. Para representar a estrutura tridimensional, admite-se para a mesma um modelo já conhecido, supondo-a composta de painéis verticais e de diafragmas rígidos horizontais.

Antes porém de resolver o caso tridimensional, são apresentados e resolvidos diversos problemas relativos à instabilidade dos painéis planos verticais que compõem o edifício. São sugeridas técnicas para reduzir o tempo de computação, cuja extensão é um inconveniente desagradável e difícil de ser contornado na análise de instabilidade. Com a finalidade de resolver o problema para estruturas mais gerais é apresentada solução para a análise de instabilidade de pórticos planos retangulares com barras diagonais, pois tais barras são usadas justamente quando é importante o problema de perda de estabilidade.

Tanto para os painéis planos como para o sistema tridimensional, a obtenção do carregamento crítico é acompanhada da determinação dos modos de flambagem correspondentes, pois considera-se que a observação destes últimos é uma grande auxiliar para a compreensão do assunto.

No final do trabalho é apresentado um programa em linguagem FORTRAN para análise de instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios.

ABSTRACT

This paper deals with several typical problems of the elastic instability of plane and three - dimensional frames. The final aim is to achieve a simple and easily understandable procedure for the determination of the vertical critical load of three - dimensional building frames. The actual spatial structure is replaced by a known mathematical model which consists of vertical plane frames (panels) interconnected by horizontal diaphragms. These diaphragms replace the floor slabs and have no transversal stiffness but infinite in-plane rigidity.

The elastic instability of several plane frames is studied first, before dealing with the three-dimensional case. Some techniques are suggested in order to reduce the computing time which is an unpleasant and difficult task to be faced in instability problems. A solution for the instability analysis of plane frames braced with diagonal members is presented. Such braced frames are useful for treating more general structures where the diagonal members are very important in increasing the overall stability.

In both cases (two and three-dimensional frames) the calculation of the critical load is followed by the determination of the corresponding buckling modes. The observation of such modes contributes to a better understanding of the subject.

The paper encloses a FORTRAN program for the numerical solution of the problems considered.

VII

Í N D I C E

	pág.
RESUMO	III
1. INTRODUÇÃO	1
2. ANÁLISE DE PÓRTICOS RETANGULARES PLANOS COM O PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS	5
2.1- Introdução. Matriz de rigidez do pórtico no caso em que são desprezadas as deformações axiais das barras.	5
2.2- Cálculo de $[S^P]$	12
2.3- Deslocamentos do Pórtico	16
2.4- Esforços internos	17
3. INSTABILIDADE DE PÓRTICOS RETANGULARES INDESLOCÁVEIS	20
3.1- Introdução	20
3.2- Influência do esforço axial nas matrizes de rigidez das barras	21
3.3- Determinação da carga crítica	27
3.4- Outro procedimento para determinação da carga crítica	31
3.5- Determinação dos modos de flambagem	37
3.6- Determinação da carga crítica pelo método de Cholesky	40
4. INSTABILIDADE DE PÓRTICOS RETANGULARES DESLOCÁVEIS	43
4.1- Introdução. Obtenção da matriz de rigidez correspon- dente às ações perturbadoras	43
4.2- Determinação da carga crítica	49
4.3- Modos de flambagem	50
5. INSTABILIDADE DE PÓRTICOS RETANGULARES COM BARRAS DIAGO- NAIS	52
5.1- Introdução	52
5.2- 1º Procedimento para análise de instabilidade	56
5.3- Discussão dos procedimentos de análise de instabili- dade	61
5.4- 2º Procedimento para análise de instabilidade	65
5.5- Resultados obtidos com os procedimentos dos parágra- fos 5.2 e 5.4	71
6. INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS DE EDIFÍCIOS.	78
6.1- Introdução	78
6.2- Matriz de rigidez do sistema correspondente aos deslo- camentos horizontais	79
6.3- Carga crítica do sistema.	83
6.4- Modos de flambagem do sistema	84

Í N D I C E (cont.)

	pág.
6.5- Exemplos	91
7. PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO115
7.1- Introdução. Características do programa115
7.2- Preparação dos dados em cartões118
7.3- Programa em Linguagem FORTRAN122
7.4- Explicação para o Programa122
7.5- Tempos de Computação152
8. CONCLUSÕES153
9. BIBLIOGRAFIA158

1. INTRODUÇÃO

Muita atenção é dada atualmente pelos pesquisadores, ao problema de instabilidade de estruturas de edifícios. O motivo desse aumento de interesse pelo assunto se deve a diversos fatores: o aparecimento de novas ligas de aço, de alta resistência, possibilita a execução de estruturas de edifícios de alturas bem mais elevadas que as usadas no passado, com elementos mais esbeltos, nos quais o problema de instabilidade se torna acentuado. A possibilidade de se analisar tais estruturas de maneira "exata" ou mais próximo dessa condição tornou-se evidente com a difusão dos computadores eletrônicos e o desenvolvimento dos métodos matriciais para cálculo de estruturas. Devido a esses fatores, teorias e métodos que a pouco tempo tinham limite de aplicabilidade bastante reduzido voltaram a ser usados e reestudados com maior atenção.

Desde o trabalho de EULER¹ (*) a quem se atribue a primeira solução matemática do problema de instabilidade de colunas no regime elástico, muitos pesquisadores deram também sua contribuição ao assunto, até que se tornasse possível a análise de instabilidade de estruturas como um todo global onde todos os elementos interagem entre si, determinando um carregamento crítico que é função do conjunto de elementos e não de cada elemento trabalhando isoladamente.

Para que a análise de instabilidade de uma estrutura composta de barras se tornasse possível, primeiro foi necessário estudar melhor o comportamento elástico da barra submetida a esforços de compressão axial. O primeiro trabalho que abriu perspectivas para a compreensão do comportamento da barra sob ação de força axial e momentos aplicados nas extremidades é devido a BERRY². É atribuído a JAMES³ a observação da possibilidade de aplicar as funções obtidas por BERRY, na obtenção dos coeficientes de rigidez à rotação das extremidades de barras. Entre outros pesquisadores que estudaram o assunto, é de se destacar o trabalho de MERCHANT⁴ que definiu novos parâmetros relacionados com os coeficientes de rigidez da barra elástica, levando em consideração a inclinação possível entre o eixo das colunas e a força vertical responsável pelo esforço axial (atualmente chamado por muitos autores^{5,6,7,8} de efeito P-Δ).

* Os números que aparecem como expoentes referem-se à bibliografia dada no fim do trabalho.

Na análise de instabilidade de pórticos planos por processos aproximados podem ser apresentados, entre outros, os procedimentos desenvolvidos por BLEICH⁹ e JOHNSON¹⁰.

Os primeiros trabalhos, coroados de êxito, para a solução "exata" do problema parece também serem devidos a MERCHANT, que em seu trabalho⁴ resolve o problema para pórticos planos simétricos, com duas prumadas de pilares e cargas concentradas nos nós. Na conclusão do mesmo trabalho¹¹, MERCHANT estende o processo de cálculo a pórticos de maior número de prumadas de pilares, adotando um pórtico "equivalente" cujo conceito é divulgado por LIGHTFOOT¹². Com o aparecimento e difusão dos computadores eletrônicos e dos métodos matriciais, foi possível aplicar os coeficientes de MERCHANT a pórticos planos mais gerais. Afirmou-se o conceito importante na análise de instabilidade, de se tornar singular a matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras, quando é atingida a carga crítica do pórtico. A solução numérica do problema é encarada como um problema de determinação de autovalores ou então, do acompanhamento da variação do valor do determinante da matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras. Entre outros autores, a solução do problema com o uso de computadores é apresentada de maneira aproximada, em nosso meio, por ANTUNES¹³ e de maneira "exata" por HALDORSSON e WANG¹⁴. A solução exata tem porém como inconveniente levar a tempos de computação demasiadamente longos, mesmo para estruturas de tamanho reduzido.

Em vista dos inconvenientes da solução "exata", SALEM¹⁵ resolve analiticamente o problema para pórticos trapezoidais e apresenta tabelas interessantes para a determinação da carga crítica destes tipos de estruturas. Estudando pórticos planos retangulares com barras diagonais em todos os andares, GOLDBERG¹⁶ admite hipóteses simplificadoras para o comportamento do pórtico e obtém tabelas úteis para o dimensionamento das diagonais, visando o comportamento da estrutura sem perda de estabilidade por deslocamentos horizontais.

Embora quase todos os trabalhos sobre o assunto considerem um comportamento elástico da estrutura, a hipótese que mais se adapta à realidade é a do comportamento elasto-plástico. Porém a análise de acordo com essa hipótese, considerando o aparecimento de rótulas plásticas se torna excessivamente lenta e cara, com os preços atuais de tempo de computação, para estruturas de médio porte. Tentando contornar o problema, KORN¹⁷ procura determinar

empiricamente a carga crítica do comportamento elasto-plástico com a do comportamento elástico.

A determinação da carga crítica de uma estrutura, supondo o comportamento elástico, continua sendo ainda uma ferramenta importante na análise de instabilidade, pois além de ser exequível por procedimento "exato", fornece dados úteis para o estudo do comportamento elasto-plástico.

Dentro do comportamento elástico, um problema para o qual não foi dada ainda a devida atenção é o da determinação da carga crítica vertical e dos modos de flambagem de estruturas tridimensionais de edifícios. Em grande número de casos, a análise de instabilidade dos pórticos planos que pertencem ao edifício não é suficiente para determinar a carga crítica de toda a estrutura, da mesma maneira como o estudo da instabilidade de uma coluna não é suficiente para determinar a carga crítica de um pórtico plano. No edifício aparecem principalmente problemas de flambagem por torsão, o que não existe para os pórticos planos. Outra novidade para as estruturas tridimensionais de edifícios é o aparecimento de modos múltiplos de flambagem associados ao carregamento crítico.

No que concerne ao cálculo "exato", só recentemente, ADAMS⁸ evidencia problemas característicos da instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios sem apresentar porém métodos detalhados de análise.

No presente trabalho, dentro da hipótese de comportamento elástico, procura-se resolver o problema da determinação da carga crítica vertical e modos de flambagem da estrutura tridimensional por procedimento "exato". Para diminuir os inconvenientes do processo, acredita-se ter dado contribuição para a simplificação do problema de determinação de auto-valores a que leva o procedimento. Acredita-se também ter contribuído na análise de instabilidade de pórticos planos retangulares com barras diagonais, principalmente quando não existem barras diagonais em todos os andares, com procedimento que mais se aproxima do comportamento real do pórtico, pois são consideradas as deformações axiais das colunas, sem aumentar significativamente o trabalho numérico. A vantagem da análise "exata" por métodos matriciais é sem dúvida a de permitir grande liberdade na variação dos parâmetros do edifício ou seja: altura dos andares, vãos de vigas, áreas e momentos de inércia das seções. Uma limitação porém é imposta para as colunas: a carga crítica por flambagem lateral deve ser atingida antes daquela que produziria flamba

gem por torção.

Deve-se lembrar que o uso do parâmetro \underline{m} de MERCHANT⁴ nos coeficientes de rigidez das colunas faz com que sejam considerados os efeitos (P- Δ), cuja influência pode ser levada em conta tanto nos problemas de perda de instabilidade como nos problemas de determinação de esforços solicitantes em pórticos planos e espaciais.

Finalmente, alguma contribuição pode ter sido dada para melhor se compreender o comportamento da estrutura tridimensional sob ação de cargas verticais, assim como o aparecimento dos modos múltiplos de flambagem e a determinação dos mesmos.

2. ANÁLISE DE PÓRTICOS RETANGULARES PLANOS COM O PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS

2.1 - Introdução. Matriz de rigidez do pórtico no caso em que são desprezadas as deformações axiais das barras

É admitido na explanação a seguir que os pórticos planos retangulares sejam constituídos de barras de seção constante rigidamente ligadas aos nós, com um dos eixos principais da seção contido no plano do pórtico. Supõe-se pórticos com o mesmo número de pilares em cada andar e com pilares situados sempre na mesma prumada vertical. Nos capítulos 2, 3, 4 e 5, ao serem estudados os pórticos planos, supõe-se que os mesmos sejam eficientemente contraventados na direção normal a seu plano e que suas barras sejam impedidas de perder estabilidade por flexão nesta direção.

De início é levada em consideração a deformabilidade axial de todas as barras. Com essa hipótese e adotando um sistema de coordenadas global $Oxyz$ (x horizontal e y vertical, contidos no plano do pórtico), para cada nó J haverão 3 deslocamentos possíveis: translações D_{Jx} , D_{Jy} e rotação D_{Jz} (no plano do pórtico). Os nós do pórtico retangular serão numerados em ordem crescente, da esquerda para a direita e sequencialmente por andares, a partir do mais elevado. A posição de cada nó do pórtico é fixada por suas coordenadas x_J e y_J no sistema de coordenadas Oxy . Também serão numerados todos os deslocamentos possíveis do pórtico (3 por nó). A numeração dos deslocamentos é feita em ordem crescente a partir do nó número 1 até o nó de maior número, obedecendo em cada nó a sequência de direções x , y , z . A Fig. 2-1 mostra a numeração de nós e deslocamentos

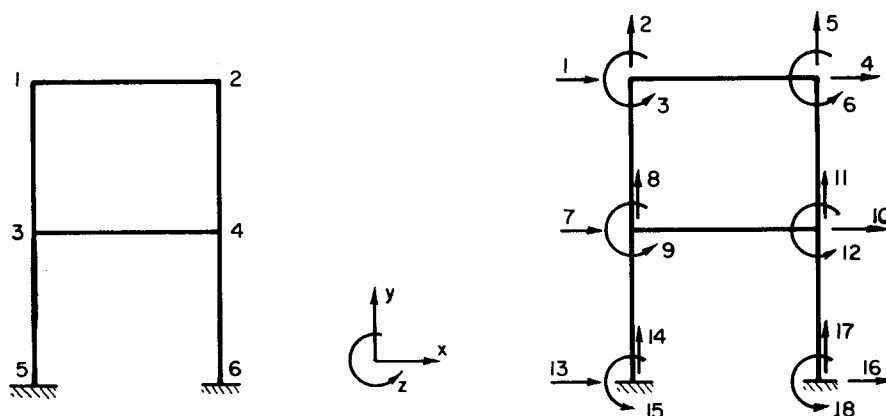


FIG. 2-1 - Numeração dos nós e dos deslocamentos para um pórtico retangular.

para um pórtico exemplo.

O pórtico plano da Fig. 2-1 possui 18 deslocamentos possíveis (12 livres e 6 impedidos). A numeração dos deslocamentos, assim como das ações (forças e momentos) que lhes correspondem é necessária para que a análise da estrutura por métodos matriciais seja levada a bom termo. As ações (diretamente aplicadas nos nós) e os deslocamentos serão positivos quando possuírem os sentidos indicados na mesma Fig. 2-1.

Seja um pórtico retangular plano com n_j nós. Seja $[S_J]$ sua matriz de rigidez global (correspondente a todos os deslocamentos possíveis inclusive dos suportes), que relaciona as eventuais ações $\{A_J\}$ com os correspondentes deslocamentos $\{D_J\}$, através de:

$$\begin{matrix} (3n_j \times 1) & (3n_j \times 3n_j) & (3n_j \times 1) \\ \{A_J\} & = [S_J] \cdot \{D_J\} & \dots\dots\dots(2.1) \end{matrix}$$

onde $\{ \}$ indica vetor coluna, $[\]$ indica matriz retangular ou quadrada e os números entre parênteses as quantidades de linhas e colunas das matrizes. (Esta notação será usada em todo o presente trabalho). Na eq. (2.1) a numeração das linhas e colunas das matrizes que aí aparecem estão em correspondência com os deslocamentos numerados como na Fig. 2-1.

A matriz $[S_J]$, após sofrer uma reordenação das linhas e colunas poderá ser escrita (de maneira partida):

$$\begin{matrix} (3n_j \times 3n_j) \\ [S_J] = \begin{bmatrix} [S_{HH}] & [S_{HV}] & [S_{H\theta}] & [S_{HR}] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ [S_{VH}] & [S_{VV}] & [S_{V\theta}] & [S_{VR}] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ [S_{\theta H}] & [S_{\theta V}] & [S_{\theta\theta}] & [S_{\theta R}] \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ [S_{RH}] & [S_{RV}] & [S_{R\theta}] & [S_{RR}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.2) \end{matrix}$$

onde os índices H, V, θ referem-se aos deslocamentos horizontais, verticais e rotações correspondentes aos graus de liberdade do pórtico (deslocamentos livres) e o índice R aos deslocamentos de vinculação com o solo (deslocamentos impedidos).

A matriz de rigidez global $[S_J]$ é singular. Isto quer di

zer que se na eq. (2.1), procurar-se calcular os deslocamentos $\{D_J\}$ correspondentes a eventuais ações $\{A_J\}$ atuando nos nós do pórtico sem vinculação com o solo, estes deslocamentos resultarão indeterminados. Este fato admite a seguinte interpretação física: imaginando o pórtico sem vinculação com o solo, é o mesmo incapaz de oferecer resistência a esforços aplicados, e sob ação de qualquer sistema de esforços externos, terá deslocamentos infinitos. É lógico que faz-se abstração do peso próprio do pórtico. Então, o pórtico plano livre de vinculação com o solo só pode adquirir uma posição de equilíbrio instável pois é incapaz de oferecer resistência a qualquer perturbação produzida por esforços externos. Em geral o estado de equilíbrio instável de uma estrutura é atingido quando a matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras se torna singular.

Se as condições de vinculação do pórtico com o solo são tais a impedir pelo menos 3 deslocamentos possíveis, terão sido retirados pelo menos 3 graus de liberdade, e o pórtico, como corpo plano, terá uma posição fixa no plano, deformando-se sob ação de eventuais esforços externos, mas capaz de oferecer resistência a esses esforços. Seja por exemplo o pórtico da Fig. 2-1 no qual foram retirados 6 graus de liberdade. Tendo em vista as eqs. (2.1) e (2.2) pode-se escrever a eq. (2.3), fazendo também a partição dos vetores $\{A_J\}$ e $\{D_J\}$:

$$\begin{matrix} (3n_j \times 1) \\ \left\{ \begin{array}{c} \{A_H\} \\ \{A_V\} \\ \{A_\theta\} \\ \{A_R\} \end{array} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} (3n_j \times 3n_j) \\ \left[\begin{array}{cccc} [S_{HH}] & [S_{HV}] & [S_{H\theta}] & [S_{HR}] \\ [S_{VH}] & [S_{VV}] & [S_{V\theta}] & [S_{VR}] \\ [S_{\theta H}] & [S_{\theta V}] & [S_{\theta\theta}] & [S_{\theta R}] \\ [S_{RH}] & [S_{RV}] & [S_{R\theta}] & [S_{RR}] \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} (3n_j \times 1) \\ \left\{ \begin{array}{c} \{D_H\} \\ \{D_V\} \\ \{D_\theta\} \\ \{D_R\} \end{array} \right\} \end{matrix} \dots\dots\dots(2.3)$$

A eq. (2.3) foi obtida levando-se em consideração a deformabilidade axial de todas as barras. Com essa hipótese e a de deslocamentos nulos nos apoios, $\{D_R\} = 0$ pode-se retirar de (2.3) o seguinte sistema de equações:

$$\begin{matrix} (3n_p \cdot n_a \times 1) & (3n_p \cdot n_a \times 3n_p \cdot n_a) & (3n_p \cdot n_a \times 1) \\ \left\{ \begin{matrix} \{A_H\} \\ \{A_V\} \\ \{A_\theta\} \end{matrix} \right\} & = & \begin{bmatrix} [S_{HH}] & [S_{HV}] & [S_{H\theta}] \\ [S_{VH}] & [S_{VV}] & [S_{V\theta}] \\ [S_{\theta H}] & [S_{\theta V}] & [S_{\theta\theta}] \end{bmatrix} & \left\{ \begin{matrix} \{D_H\} \\ \{D_V\} \\ \{D_\theta\} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (2.4)
 \end{matrix}$$

onde n_p é o número de prumadas de pilares e n_a o número de andares. O sistema (2.4) em geral possui solução única para $\{D_H\}$, $\{D_V\}$ e $\{D_\theta\}$.

O número de equações em (2.4) pode ser reduzido enormemente desprezando-se a deformabilidade axial de todas as barras do pórtico (hipótese bastante razoável para pórticos pouco elevados ou com carregamento vertical para baixo, predominante em todos os nós). É simples compreender a maneira de obter esse menor número de equações, quando se usa o Processo dos Deslocamentos em sua formulação clássica, dirigida para o cálculo manual. Mas em se aplicando métodos matriciais e o cálculo automático, algumas explicações se tornam necessárias. Indeformabilidade axial significa rigidez axial in finita. Se para representar a indeformabilidade axial das barras fossem adotados valores bastante grandes para as rigidezes axiais, cometer-se-ia diversos erros:

- 1º)- O número de equações continuaria o mesmo que o da expressão (2.4) não diminuindo de nada o trabalho numérico para a solução do sistema.
- 2º)- A adoção de valores bastante grandes para as rigidezes axiais leva a um sistema de equações mal condicionado, principalmente no caso de pórtico deslocável, como o da Fig. 2-1.

Convém salientar que embora o cálculo em que se despreza a deformabilidade axial das barras leve a valores menos corretos dos esforços internos, dada a diminuição que proporciona no número de equações, convém ser adotado em certos casos. Diminuído o número de equações, fica também diminuída a propagação dos erros de arredondamento que para estruturas de grande número de nós pode vir a ser um problema difícil de ser contornado, a não ser com a hipótese de indeformabilidade axial. No estudo da instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios, convém adotar a hipótese de indeformabilidade axial para obter economia em tempo de computação, po-

is se faz necessário calcular a mesma estrutura diversas vezes, até ser encontrada a carga crítica de instabilidade. Quando a carga para a qual se procura o valor crítico for vertical e atuando em todas as prumadas de pilares, os esforços axiais nas barras, que são importantes na análise de instabilidade, não diferem muito dos encontrados considerando as deformações axiais. A única desvantagem da hipótese, nos problemas de instabilidade, é levar a valores da carga crítica ligeiramente superiores aos que se obtêm considerando as deformações axiais, mas em geral tão próximos destes que justifica a sua adoção, em vista das simplificações conseguidas.

Será introduzida primeiramente a hipótese de indeformabilidade axial dos pilares e depois a das vigas, verificando em cada caso como se modifica o sistema de equações (2.4). Considerando o tipo particular de estrutura associada à eq. (2.4), constituído de barras ortogonais, observa-se que $[S_{HH}]$, $[S_{\theta\theta}]$, $[S_{\theta H}]$ e $[S_{H\theta}]$ não dependem das rigidezes axiais dos pilares, e como os pilares estão sempre numa mesma prumada e engastados no solo, tem-se $\{D_V\} = 0$. Pode-se então retirar da eq. (2.4) o sistema:

$$\begin{matrix} (2n_p \cdot n_a \times 1) & (2n_p \cdot n_a \times 2n_p \cdot n_a) & (2n_p \cdot n_a \times 1) \\ \left\{ \begin{matrix} \{A_\theta\} \\ \text{---} \\ \{A_H\} \end{matrix} \right\} & = & \left[\begin{array}{c|c} [S_{\theta\theta}] & [S_{\theta H}] \\ \text{---} & \text{---} \\ [S_{H\theta}] & [S_{HH}] \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} \{D_\theta\} \\ \text{---} \\ \{D_H\} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(2.5)
 \end{matrix}$$

ou

$$\{A\} = [S] \{D\} \dots\dots\dots(2.6)$$

A hipótese de indeformabilidade axial das vigas pode ser levada em conta através de artifício simples: a indeformabilidade axial estabelece uma dependência entre os deslocamentos horizontais dos nós num mesmo andar, dependência esta que pode ser expressa matricialmente¹⁸. Seja o pórtico da Fig. 2-1 suposto com vigas axialmente deformáveis e os deslocamentos dos seus nós, em correspondência com a eq. (2.5) numerados como na Fig. 2-2a.

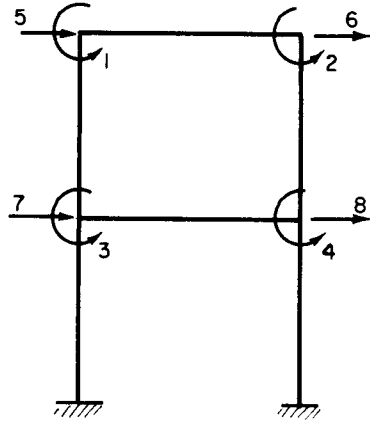


FIG.2-2a - Deslocamentos independentes no pórtico com vigas axialmente deformáveis.

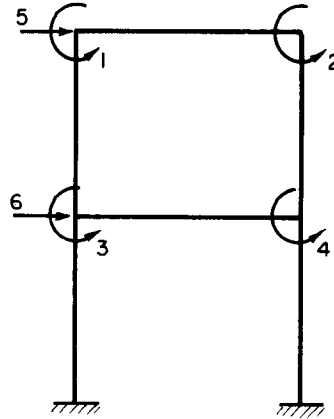


FIG.2-2b - Deslocamentos independentes no pórtico com vigas de rigidez infinita.

Como as vigas têm rigidez axial infinita, serão iguais todos os deslocamentos horizontais num mesmo andar, o que permite associar a cada andar apenas 1 deslocamento horizontal. A Fig. 2-2b mostra os deslocamentos independentes para este caso (numerando primeiramente as rotações dos nós e em seguida os deslocamentos horizontais). Sejam $\{D^P\}$ (P indica painel) os deslocamentos do pórtico numerados como na Fig. 2-2b e $\{D\}$ os deslocamentos numerados como na Fig. 2-2a. Esses deslocamentos estão relacionados através de:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \hline D_5 \\ \hline D_6 \\ \hline D_7 \\ D_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1^P \\ D_2^P \\ D_3^P \\ \hline D_4^P \\ \hline D_5^P \\ \hline D_6^P \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.7)$$

ou

$$\begin{matrix} (8 \times 1) & (8 \times 6) & (6 \times 1) \\ \{D\} & = & [T] \{D^P\} \dots\dots\dots (2.8) \end{matrix}$$

Em decorrência da eq. (2.8), pode-se calcular a matriz de rigidez $[S^P]$ correspondente aos deslocamentos $\{D^P\}$, em função de $[S]$ (eq. 2.6):

$$\begin{matrix} (6 \times 6) & (6 \times 8) & (8 \times 8) & (8 \times 6) \\ [S^P] & = & [T]^T & [S] & [T] & \dots \dots \dots (2.9) \end{matrix}$$

onde $[T]^T$ é a matriz transposta de $[T]$.

Mas sendo

$$[S] = \begin{matrix} (2n_a n_p \times 2n_a n_p) \\ \left[\begin{array}{c|c} [S_{\theta\theta}] & [S_{\theta H}] \\ \hline [S_{H\theta}] & [S_{HH}] \end{array} \right] \dots \dots \dots (2.10) \end{matrix}$$

as eqs. (2.7) e (2.9) mostram que as duas últimas linhas da matriz $[S^P]$ (correspondente ao pórtico da Fig. 2-2b) são obtidas pelas somas das últimas linhas de $[S]$ duas a duas, o mesmo acontecendo para as colunas. Neste procedimento, ficam alteradas as sub-matrizes $[S_{H\theta}]$, $[S_{HH}]$ e $[S_{\theta H}]$ permanecendo inalterada a sub-matriz $[S_{\theta\theta}]$. Em geral, para um pórtico retangular com n_a andares e n_p prumadas de pilares, as últimas n_a linhas e colunas de $[S^P]$ são obtidas das somas n_p a n_p das últimas linhas e colunas de $[S]$.

O sistema (2.5) ficará finalmente em sua forma mais simples, com um número mínimo de deslocamentos independentes:

$$\begin{matrix} (n_a [1 + n_p] \times 4) & (n_a [1 + n_p] \times n_a [1 + n_p]) & (n_a [1 + n_p] \times 4) \\ \left\{ \begin{array}{c} \{A^P_{\theta}\} \\ \hline \{A^P_H\} \end{array} \right\} & = & \left[\begin{array}{c|c} [S^P_{\theta\theta}] & [S^P_{\theta H}] \\ \hline [S^P_{H\theta}] & [S^P_{HH}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{D^P_{\theta}\} \\ \hline \{D^P_H\} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2.11) \end{matrix}$$

ou

$$\{A^P\} = [S^P] \{D^P\} \dots \dots \dots (2.12)$$

com

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \xrightarrow{n_a \cdot n_p \text{ colunas}} \\ \xrightarrow{n_a \text{ colunas}} \end{array} \\
 \left[S^P \right] = \begin{array}{|c|c|} \hline \left[S_{\theta\theta}^P \right] & \left[S_{\theta H}^P \right] \\ \hline \left[S_{H\theta}^P \right] & \left[S_{HH}^P \right] \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{c} \uparrow n_a \cdot n_p \text{ linhas} \\ \downarrow n_a \text{ linhas} \end{array}
 \end{array} \dots\dots\dots (2.13)$$

onde os índices H e θ referem-se respectivamente aos deslocamentos horizontais dos andares e às rotações dos nós; o índice superior P (painel) refere-se à estrutura como na Fig. 2-2b, onde as vigas e colunas possuem rigidez axial infinita. Algumas sub-matrizes da eq. (2.11) são idênticas às da eq. (2.5). Assim:

$$\left\{ A_{\theta}^P \right\} = \left\{ A_{\theta} \right\} ; \left\{ D_{\theta}^P \right\} = \left\{ D_{\theta} \right\} \quad \text{e} \quad \left[S_{\theta\theta}^P \right] = \left[S_{\theta\theta} \right]$$

A matriz [S] (eqs. 2.5 e 2.6) é obtida sem maiores dificuldades por algoritmos bastante conhecidos^{19,20}, somando-se na posição adequada de [S] as contribuições dos coeficientes de rigidez de todas as barras, calculados para as direções globais x, y e z.

2.2 - Cálculo de [S^P]

Para economia de tempo e memória de cálculo pode-se calcular apenas a parte triangular superior de [S^P]. Considerações sobre armazenamento serão dadas nos Capítulos 3 e 4. Não há necessidade de se efetuar o produto do 2º membro de (2.9), sendo mais prático considerar a contribuição de cada barra nas posições adequadas de linha e coluna de [S^P].

Seja J o número do nó do pórtico correspondente à extremidade início da barra e K o número do nó correspondente à extremidade fim, com J < K. (Isto é, barras horizontais orientadas da esquerda para a direita e verticais de cima para baixo, de acordo com ordem de numeração adotada para os nós do pórtico). (pág. 5 - parágrafo 2.1).

Seja [S_{MD}] a matriz de rigidez de uma barra, calculada para os deslocamentos numerados como nas Figs. 2-3a e 2-3b:

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} (4 \times 4) \\ [S_{MD}] \end{matrix} = & \begin{bmatrix} S_{MD11} & S_{MD12} & S_{MD13} & S_{MD14} \\ S_{MD21} & S_{MD22} & S_{MD23} & S_{MD24} \\ S_{MD31} & S_{MD32} & S_{MD33} & S_{MD34} \\ S_{MD41} & S_{MD42} & S_{MD43} & S_{MD44} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}
 \end{matrix} \dots\dots\dots(2.14)$$

ou em termos mais explícitos:

$$\begin{matrix}
 [S_{MD}] = & \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{L} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ & & \left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2\right) & -\left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2\right) \\ \text{simétrico} & & & \left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2\right) \end{bmatrix}
 \end{matrix} \dots\dots\dots(2.15)$$

onde L é o comprimento da barra, A_x a área da seção transversal. I_z o momento de inércia da seção em torno do eixo passando pelo C.G. da seção, perpendicular ao plano do pórtico e

$$C_x = \frac{x_K - x_J}{L} \quad ; \quad C_y = \frac{y_K - y_J}{L} \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

sendo x_J, y_J e x_K, y_K as coordenadas dos nós J e K do pórtico.

Os deslocamentos do pórtico correspondentes aos deslocamentos 1,2,3 e 4 da barra (Figs. 2-3a e 2-3b) serão:

$$\begin{matrix}
 j_1 = J \\
 j_2 = K \\
 j_3 = n_a \cdot n_p + 1 + \text{part.int.} \left(\frac{J-1}{n_p} \right) \\
 j_4 = n_a \cdot n_p + 1 + \text{part.int.} \left(\frac{K-1}{n_p} \right)
 \end{matrix} \dots\dots\dots(2.17)$$

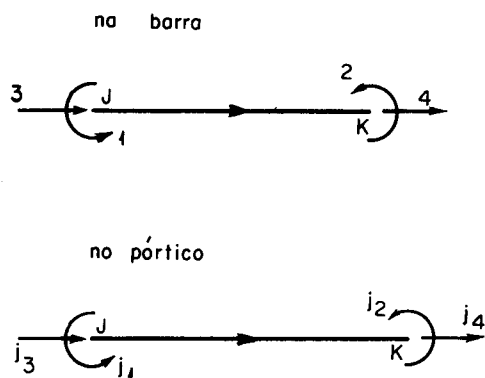


FIG. 2-3a - Deslocamentos possíveis nas barras horizontais e deslocamentos correspondentes no pórtico.

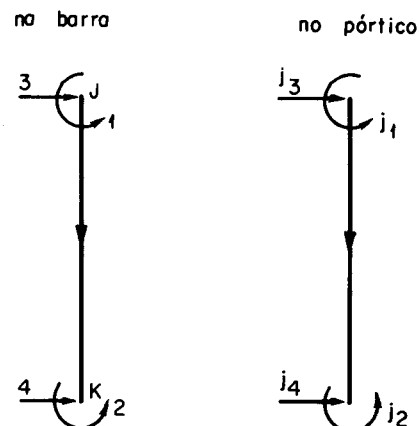


FIG. 2-3b - Deslocamentos possíveis nas barras verticais e deslocamentos correspondentes no pórtico.

com a relação de ordem:

$$j_1 < j_2 < j_3 \leq j_4 \dots\dots\dots(2.18)$$

valendo o sinal de igualdade quando a barra \bar{e} horizontal.

A relação (2.18) subsiste em virtude da numeração dos deslocamentos correspondentes a $[S^P]$ (eq. 2.13) com as $n_a \cdot n_p$ rotações precedendo os n_a deslocamentos horizontais nos andares.

Ter-se-ão os casos:

a) $j_3 < j_4$

A barra \bar{e} vertical. Todos e somente os elementos da parte triangular superior de $[S_{MD}]$ (eqs. 2.14 e 2.15) contribuem para a parte triangular superior de $[S^P]$. A menos do sinal, apenas 4 elementos de $[S_{MD}]$ são diferentes dos demais, bastando serem gerados esses elementos. As expressões para contribuição da barra vertical em $[S^P]$ serão:

$$\begin{aligned}
 S_{j_1, j_1}^P &= S_{MD11} + \text{contribuição das outras barras} \\
 S_{j_1, j_2}^P &= S_{MD12} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_1, j_3}^P &= S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_1, j_4}^P &= -S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_2, j_2}^P &= S_{MD11} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_2, j_3}^P &= S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \dots\dots\dots(2.19) \\
 S_{j_2, j_4}^P &= -S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_3, j_3}^P &= S_{MD33} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_3, j_4}^P &= -S_{MD33} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_4, j_4}^P &= S_{MD33} + \quad " \quad " \quad " \quad "
 \end{aligned}$$

Se $j_4 > n_a \cdot n_p + n_a$, então a extremidade fim da barra vertical é um apoio e devem ser calculadas apenas as contribuições da barra nos elementos S_{j_1, j_1}^P , S_{j_1, j_3}^P e S_{j_3, j_3}^P .

b) $j_3 = j_4$

A barra é horizontal. A rigidez axial não influi na rigidez horizontal do andar que contém a barra, já que na mesma é impedida a deformação axial. Chega-se à mesma conclusão examinando a eq. (2.9): as contribuições S_{MD33} , S_{MD34} , S_{MD43} e S_{MD44} (eqs. - 2.14 e 2.15) na matriz $[S]$ (eq. 2.10) são somadas e levadas para a diagonal principal de $[S^P]$ resultando nula essa soma.

As contribuições da barra na parte triangular superior de $[S^P]$ serão:

$$\begin{aligned}
 S_{j_1, j_1}^P &= S_{MD11} + \text{contribuição de outras barras} \\
 S_{j_1, j_2}^P &= S_{MD12} + \quad " \quad " \quad " \quad " \quad (2.20) \\
 S_{j_2, j_2}^P &= S_{MD11} + \quad " \quad " \quad " \quad "
 \end{aligned}$$

Basta gerar portanto apenas os elementos S_{MD11} e S_{MD12} de $[S_{MD}]$.

2.3 - Deslocamentos do pórtico

No estudo da instabilidade de pórticos retangulares, necessita-se obter a matriz $[S^P]$ definida na eq. (2.9) e calculada como no parágrafo 2.2, não havendo necessidade de completar a análise com o Processo dos Deslocamentos, encontrando os deslocamentos dos nós e os esforços internos nas extremidades das barras. Apenas para completar as considerações já feitas, observe-se como se chegaria ao final do cálculo, admitindo a estrutura carregada com cargas concentradas dos tipos possíveis ou sejam, forças verticais em todos os nós, momentos concentrados em todos os nós e forças horizontais em cada andar:

a) As cargas verticais solicitam os pilares com esforços axiais, não contribuindo porém para o aparecimento de nenhum outro esforço interno nas barras. Estas cargas também não produzem deslocamentos de qualquer tipo nos nós da estrutura. Os esforços axiais nos pilares, devidos às cargas verticais podem ser calculados simplesmente pelo equilíbrio de forças verticais em cada nó do pórtico.

b) As forças horizontais $\{A_H^P\}$ nos andares e os momentos $\{A_\theta^P\}$ (eq. 2.11) atuando simultaneamente nos nós, produzirão deslocamentos horizontais $\{D_H^P\}$ nos andares e rotações $\{D_\theta^P\}$ nos nós, sendo porém nulos os deslocamentos verticais dos nós. Os deslocamentos não nulos são dados por

$$\{D^P\} = \begin{Bmatrix} \{D_\theta^P\} \\ \text{---} \\ \{D_H^P\} \end{Bmatrix} = [S^P]^{-1} \begin{Bmatrix} \{A_\theta^P\} \\ \text{---} \\ \{A_H^P\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.21)$$

Nesta etapa, pode-se reordenar as linhas e colunas de $[S^P]$ (ou já calcular $[S^P]$ com as linhas e colunas reordenadas) agrupando os deslocamentos por andares como faz SOUZA LIMA²¹, tirando proveito do agrupamento dos elementos não nulos em torno da diagonal principal para economia de memória e tempo de computação. Neste trabalho, $[S^P]$ (eq. 2.9) é obtida como no parágrafo 2.2, com os des

locamentos numerados como sugerem a Fig. 2-2b e a eq. (2.13) por serem outros os objetivos pretendidos.

Os deslocamentos horizontais e as rotações em todos os n̄os, numerados como na Fig. 2-2a., são dados pela eq. (2.8):

$$\{D\} = [T] \{D^P\} \dots\dots\dots(2.8)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \{D_\theta\} \\ \text{-----} \\ \{D_H\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{D_\theta^P\} \\ \text{-----} \\ \{D_H^P\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.22)$$

n̄o havendo necessidade de se efetuar o produto matricial da eq. (2.22) mas simplesmente atribuir valores iguais aos deslocamentos horizontais em cada n̄o de um mesmo andar.

Como $\{D_V\} = \{D_R\} = 0$, os deslocamentos $\{D_J\}$ (eq. 2.1), relativos ao p̄rtico com deslocamentos numerados como na eq. (2.3) ficar̄o:

$$\begin{matrix} (3n_j \times 1) \\ \{D_J\} \end{matrix} = \begin{Bmatrix} \{D_H\} \\ \text{-----} \\ 0 \\ \text{-----} \\ \{D_\theta\} \\ \text{-----} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.23)$$

2.4 - Esforços internos

Conhecidos os deslocamentos dos n̄os do p̄rtico (3 deslocamentos por n̄o) pela eq. (2.23), os esforços cortantes e momentos fletores poder̄o ser calculados nas extremidades de todas as barras, j̄a que as extremidades das mesmas tem os mesmos deslocamentos dos n̄os onde incidem. Mesmo que se use para cada barra a matriz de rigi

dez $[S_M]$ de ordem (6x6), ao se calcular os esforços $\{A_M\}$ na extremidade da barra, através de:

$$\begin{matrix} (6 \times 1) & (6 \times 6) & 6 \times 1 \\ \{A_M\} & = [S_M] & \{D_M\} \end{matrix} \dots\dots\dots(2.24)$$

onde $[S_M]$ é a matriz de rigidez para os deslocamentos nas extremidades da mesma, calculada com os valores corretos da rigidez axial e $\{D_M\}$ os deslocamentos nas extremidades, serão encontrados valores nulos para todos os esforços axiais, devido a hipótese de indeformabilidade axial adotada nos cálculos intermediários. Resultarão porém, valores não necessariamente nulos para momentos fletores e forças cortantes nas mesmas extremidades. Os esforços axiais nas barras devidos ao carregamento em foco (forças horizontais nos andares simultâneas com momentos nos nós), podem ser porém calculados com equações de equilíbrio para forças, nos nós do pórtico, já que os esforços cortantes nas barras horizontais (verticais) que concorrem em um certo nó produzem variação no esforço axial das barras verticais (horizontais) que concorrem no mesmo nó. Para facilitar o trabalho porém, o equilíbrio de cada nó deve ser considerado na sequência em que são numerados.

Os esforços axiais encontrados para as vigas neste último procedimento são os esforços axiais definitivos. Para os pilares, os esforços axiais assim encontrados devem ser somados com os causados pelas cargas verticais. Quando a estrutura é carregada apenas com cargas verticais (ao longo das vigas), após a transformação dessas cargas em momentos e forças verticais equivalentes nos nós, resultarão para os esforços axiais dos pilares valores muito maiores por efeito das cargas equivalentes verticais do que por efeito dos momentos equivalentes nos nós. Este fato será aproveitado para simplificação da análise de instabilidade de pórticos e estruturas tridimensionais de edifícios.

A determinação dos esforços axiais, como dependem estas apenas de condições de equilíbrio em cada nó, pode ser realizada com o cálculo manual sem maiores dificuldades, para qualquer dos casos de carregamento (cargas verticais ou cargas simultâneas momentos e forças horizontais). Esta determinação dos esforços axiais pode também ser realizada automaticamente pelo computador sendo uma característica do cálculo as etapas:

- a) Tomar, em todos os andares, os nós na ordem em que são numerados e procurar as barras verticais e horizontais que nele concorrem.
- b) Testar se o nó pertence à prumada de pilares mais à esquerda ou ao topo do pórtico.
- c) Verificar se o nó em foco é extremidade origem ou fim de cada barra que nele concorre.
- d) Se a barra é vertical e tem extremidade início sobre o nó, calcula-se o seu esforço axial em função da carga vertical concentrada no nó e dos esforços nas outras barras que nele incidem.
- e) Se a barra é horizontal e tem extremidade início sobre o nó, calcula-se o seu esforço axial em função da carga horizontal concentrada no nó e dos esforços nas outras barras que nele incidem.

O procedimento exposto permite determinar, para cada nó, os esforços axiais em uma barra vertical e outra horizontal que a concorrerem. No final do processo ficarão determinados os esforços axiais de todas as barras.

O processo fica facilitado se forem numeradas primeiramente as vigas, da esquerda para a direita em cada andar, e após, os pilares de cada prumada, na sequência dos andares, a partir do mais elevado.

Em todo caso, o cálculo dos esforços internos é aqui apresentado, apenas para mostrar como pode ser completada a análise do pórtico retangular com o Processo dos Deslocamentos, quando se despreza a deformação axial das barras, com sistema de equações bem mais reduzido. Para o desenvolvimento deste trabalho, o que interessa realmente é obter a matriz de rigidez $[S^P]$ (eqs. 2.9 e 2.13), ou melhor, sua parte triangular superior, como sugerido no parágrafo 2.2 .

3. INSTABILIDADE DE PÓRTICOS RETANGULARES INDESLOCÁVEIS

3.1 - Introdução

Continua-se a admitir para os pórticos retangulares de edifício a hipótese de indeformabilidade axial das barras. Neste capítulo, é apresentado o procedimento para a análise da instabilidade elástica do pórtico suposto indeslocável, quando carregado com cargas verticais concentradas nos seus nós.

Pórticos retangulares como o da Fig. 2-2b são pórticos deslocáveis, pois os deslocamentos horizontais nos andares podem ocorrer por flexão dos pilares, independentemente de deformação axial das barras. Porém, quando o pórtico retangular é apenas uma parte ou sub-estrutura de um sistema estrutural mais complexo, a vinculação do pórtico com o sistema pode levá-lo a um comportamento de pórtico indeslocável. Suponha-se o carregamento constituído apenas de cargas verticais concentradas nos nós do pórtico. Dependendo da rigidez do sistema nas direções horizontais de vinculação com o pórtico, é possível que, aumentando-se simultaneamente todas as cargas verticais nos nós do pórtico, este perca instabilidade por rotação indefinida dos seus nós, sem ocorrer deslocamentos horizontais nos andares. Neste caso, o carregamento crítico será encontrado fazendo-se a análise de instabilidade do pórtico com os deslocamentos horizontais impedidos, como é suposto, vinculado ao sistema de grande rigidez horizontal, com os únicos deslocamentos livres $\{D_{\theta}^P\}$ que são as rotações dos seus nós.

Ainda que o sistema, do qual o pórtico retangular é sub-estrutura, não seja suficientemente rígido para determinar um comportamento indeslocável do mesmo até o limite de carregamento

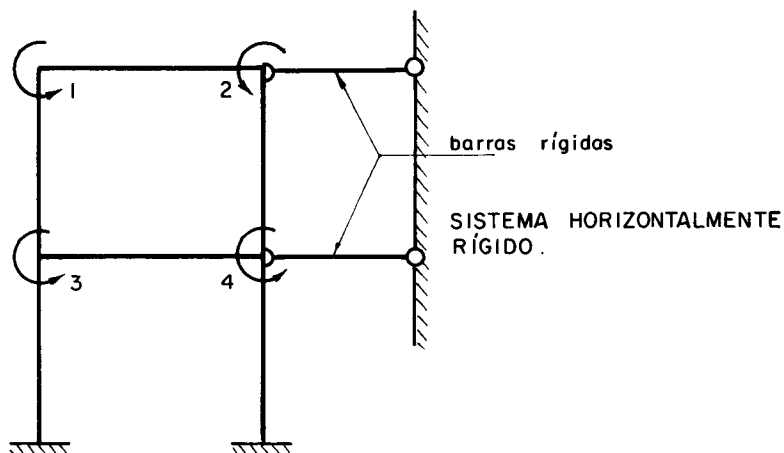


FIG. 3-1 - Deslocamentos livres no pórtico retangular tornado indeslocável por vinculação a um sistema rígido.

crítico, é necessário, para as finalidades deste trabalho, supô-lo indeslocável e determinar o carregamento crítico vertical, pois tal carregamento é um limite superior para o carregamento crítico correspondente à condição real de comportamento do pórtico, condição esta intermediária entre a de pórtico deslocável e de pórtico indeslocável.

Então, como no pórtico da Fig. 3-1, $\{D_H^P\} = 0$ e $\{D_\theta^P\} \neq 0$ pode-se extrair de (2.11) o sistema de equações:

$$\begin{matrix} (n_p \cdot n_a \times 1) & (n_p \cdot n_a \times n_p \cdot n_a) & (n_p \cdot n_a \times 1) \\ \{A_\theta^P\} & = & [S_{\theta\theta}^P] \{D_\theta^P\} \dots \dots \dots (3.1) \end{matrix}$$

O pórtico indeslocável se torna instável, quando mesmo com momentos nulos aplicados nos nós (ações perturbadoras $\{A_\theta^P\} = 0$), ocorrerem rotações $\{D_\theta^P\}$. Tem-se então o sistema homogêneo:

$$0 = [S_{\theta\theta}^P] \{D_\theta^P\} \dots \dots \dots (3.2)$$

que só admite solução quando $[S_{\theta\theta}^P]$ se torna singular, isto é, quando for $\det([S_{\theta\theta}^P]) = 0$.

Portanto,

$$\det([S_{\theta\theta}^P]) = 0 \dots \dots \dots (3.3)$$

é condição necessária para que o pórtico indeslocável esteja numa condição de equilíbrio instável.

3.2 - Influência do esforço axial nas matrizes de rigidez das barras

Pórticos retangulares como o da Fig. 3-1, com ligações rígidas das barras nos nós, não são nunca hipostáticos. Desta maneira, a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ não será nunca singular se não for considerada a influência do esforço axial nas matrizes de rigidez das barras que contribuem para $[S_{\theta\theta}^P]$.

Sejam os deslocamentos possíveis $\{D_M\}$ (no sistema local de coordenadas $Ox_M y_M z_M$ solidário) nas extremidades da barra numerados como na Fig. 3-2 onde E é o módulo de elasticidade, A_x a área da seção transversal, L o comprimento da barra e I_z o momento de in-

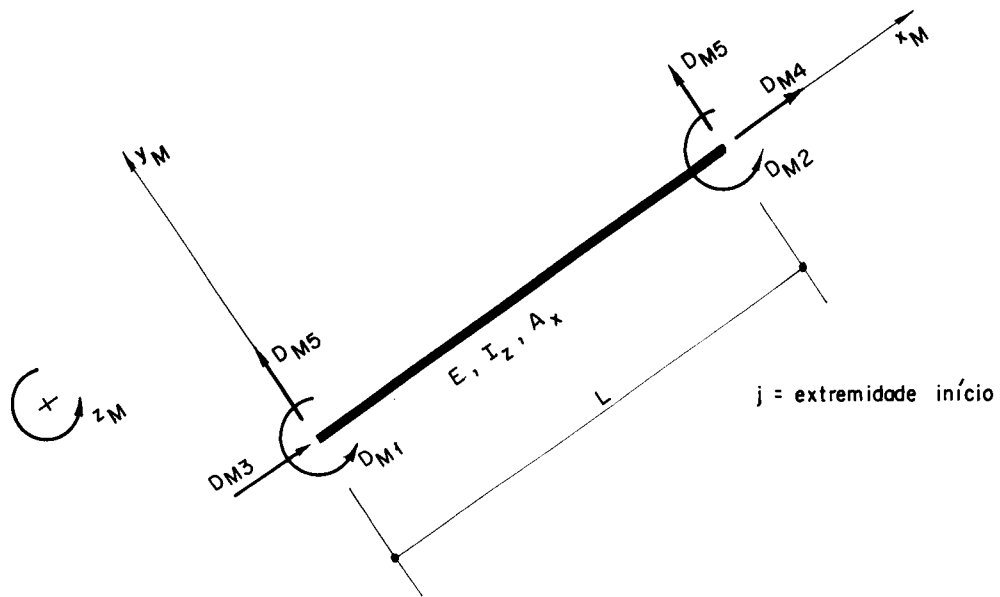


FIG. 3 - 2 - Deslocamentos nas extremidades da barra de pórtico plano, no sistema de coordenadas local $Ox_M y_M z_M$.

nêrcia da seção em torno de eixo pelo seu centro de gravidade, normal ao plano da figura.

A matriz de rigidez da barra (não se considerando a influência do esforço normal) é:

$$\left[S_M \right] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{L} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ \frac{2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & \frac{-EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-EA_x}{L} & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ \hline \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-12EI_z}{L^3} \\ \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{12EI_z}{L^3} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.4)$$

Em se considerando a influência do esforço axial, a matriz de rigidez da barra se torna:

$$\left[S_M \right] = \begin{bmatrix}
 \frac{sEI_z}{L} & \frac{scEI_z}{L} & 0 & 0 & \frac{s(1+c)EI_z}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI_z}{L^2} \\
 \frac{scEI_z}{L} & \frac{sEI_z}{L} & 0 & 0 & \frac{s(1+c)EI_z}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & \frac{-EA_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-EA_x}{L} & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\
 \frac{s(1+c)EI_z}{L^2} & \frac{s(1+c)EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2s(1+c)EI_z}{mL^3} & \frac{-2s(1+c)EI_z}{mL^3} \\
 \frac{-s(1+c)EI_z}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-2s(1+c)EI_z}{mL^3} & \frac{2s(1+c)EI_z}{mL^3}
 \end{bmatrix}$$

.....(3.5)

onde s, c são funções de instabilidade (s é a rigidez à rotação na extremidade e c o coeficiente de propagação de momentos da barra) estudadas primeiramente por BERRY² e tabuladas na forma utilizada neste trabalho por LIVESLEY e CHANDLER²². A função m introduzida por MERCHANT⁴ juntamente com s e c estão tabuladas ainda no trabalho de HORNE e MERCHANT²³. Estas funções são tabuladas em função de $\rho = P/PE$, sendo P o esforço axial e $P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$ a carga de EULER para a barra.

As expressões que definem s, c e m são:

$$s = \frac{(1-2\alpha \cdot \cot 2\alpha)\alpha}{\tan \alpha - \alpha} \dots\dots\dots(3.6)$$

$$c = \frac{2\alpha - \text{sen} 2\alpha}{\text{sen} 2\alpha - 2\alpha \cdot \cos 2\alpha} \dots\dots\dots(3.7)$$

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) - \pi^2 \rho} \dots\dots\dots(3.8)$$

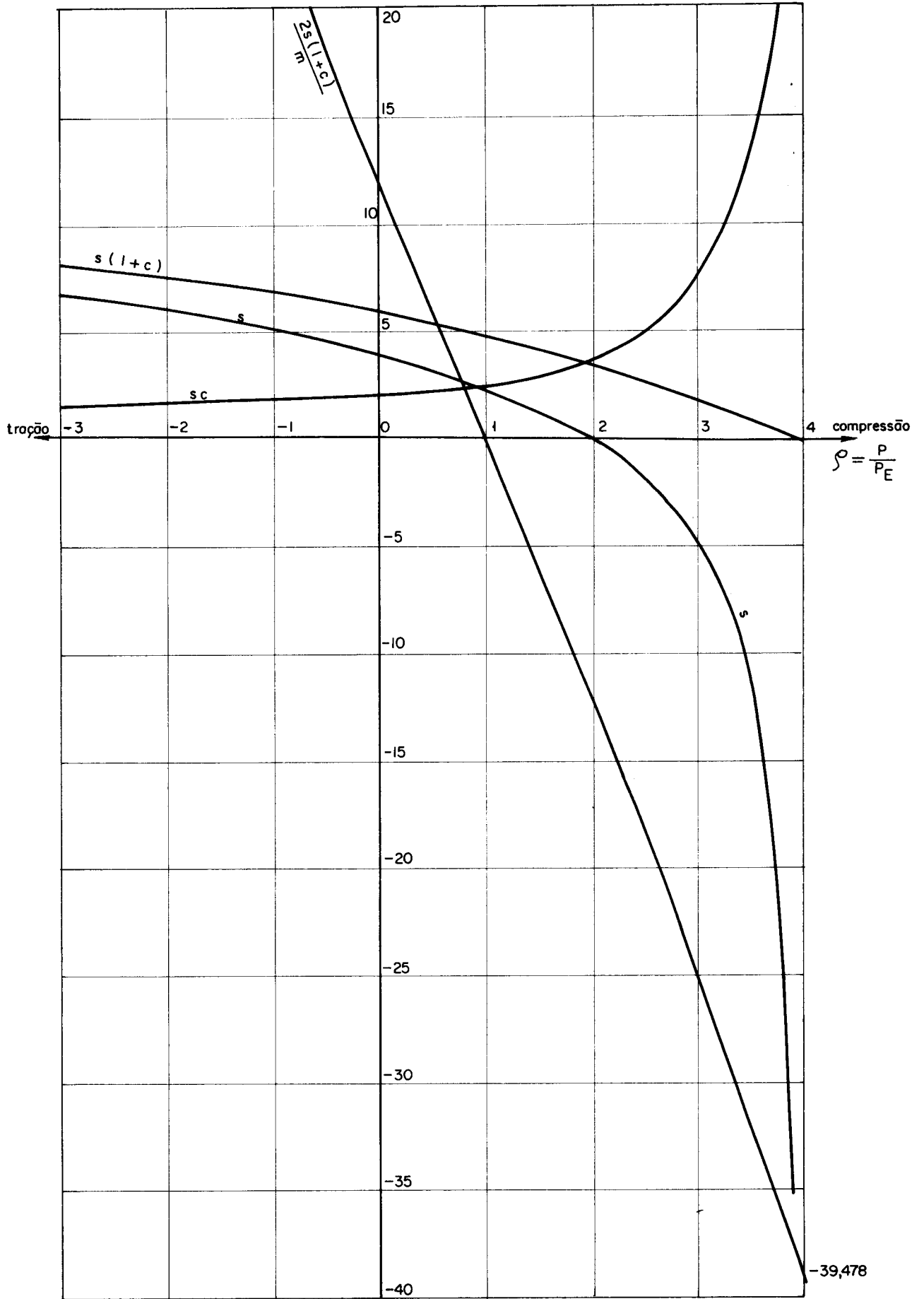


FIG. 3-3 - Gráfico de variação das funções de instabilidade ;
 $s, sc, s(1+c)$ e $2s(1+c)/m$

onde $\rho = \frac{P}{P_E}$ e $\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho}$.

As eqs. (3.6), (3.7) e (3.8) valem para $\rho > 0$; isto é, para barras comprimidas ($P > 0$). Quando $\rho < 0$ (barras tracionadas com $P < 0$) as expressões de \underline{s} e \underline{c} se modificam para:

$$s = \frac{(1-2\gamma\coth 2\gamma)\gamma}{\tanh\gamma-\gamma} \dots\dots\dots(3.9)$$

$$c = \frac{2\gamma-\sinh 2\gamma}{\sinh 2\gamma-2\gamma\cosh 2\gamma} \dots\dots\dots(3.10)$$

onde $\rho = \frac{P}{P_E}$; ($\rho < 0$) e $\gamma = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\rho}$

A expressão (3.8) permanece inalterada, mas convém lembrar que para barra tracionada $\rho < 0$.

Considerando a eq. (3.5), torna-se interessante ter idéia do comportamento das funções \underline{s} , \underline{sc} , $s(1+c)$ e $2s(1+c)/m$. O gráfico de variação dessas funções aparece na Fig. 3-3. Todas as funções de instabilidade aqui usadas são adimensionais.

O coeficiente \underline{m} que aparece na função $2s(1+c)/m$ permite representar a diminuição que sofre a rigidez ao recalque transversal da barra bi-engastada, como consequência da inclinação que ocorre entre o eixo hipotético \overline{AB} da barra (Fig. 3-4) e a direção das forças P , responsáveis pela compressão axial. A Fig. 3-4 mostra a barra AB com recalque transversal Δ e os diversos esforços \underline{a} atuando nas extremidades. O equilíbrio de momentos fornece:

$$FL + P\Delta = M_{AB} + M_{BA} \dots\dots\dots(3.11)$$

ou $F + P \frac{\Delta}{L} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} \dots\dots\dots(3.12)$

A eq. (3.12) indica que ao aplicar-se o esforço transversal F , a barra sofre um recalque transversal Δ , tal que, os momentos M_{AB} e M_{BA} que aparecem nas extremidades equilibram não só as forças F mas a soma $F + P\Delta/L$. Tudo então se passa como se a rigidez transversal da barra AB ficasse diminuída, como consequência

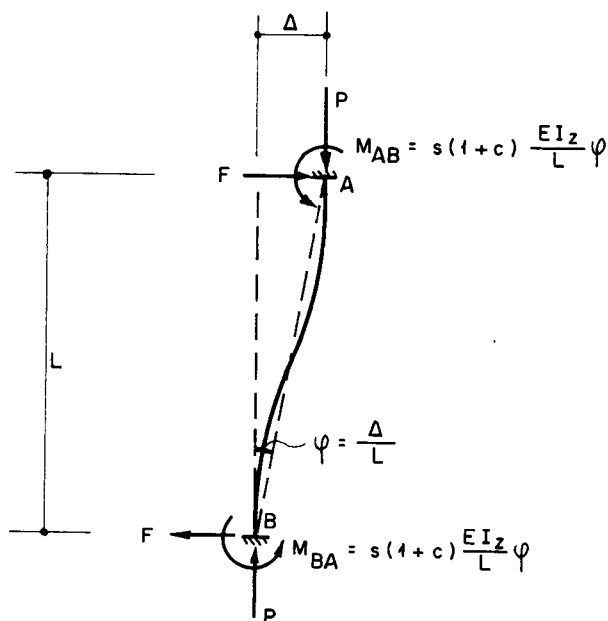


FIG. 3-4 - Barra AB bi-engastada com recalque transversal Δ .

da existência das forças P. A diminuição da rigidez transversal, ou o que é o mesmo, o aparecimento das forças transversais $P\Delta/L$ (eq. 3.12) são chamados na literatura de efeito (P-Δ). Se fosse $P = 0$, a rigidez \underline{r} ao recalque transversal seria:

$$r = \frac{F}{\Delta} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L\Delta} = \frac{2s(1+c)EI_z}{L^3} \dots\dots\dots(3.13)$$

Existindo P, a rigidez \underline{r}' ao recalque transversal será:

$$r' = \frac{F}{\Delta} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L\Delta} - \frac{P}{L} = \frac{2s(1+c)EI_z}{L^3} - \frac{P}{L} \dots\dots(3.14)$$

Definindo \underline{m} de maneira que $r' = r/m$, ter-se-á:

$$m = \frac{r}{r'} = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) - \frac{PL^2}{EI_z}} \dots\dots\dots(3.15)$$

Como a carga de EULER vale $P_E = \pi^2 EI_z / L^2$, a eq. (3.15) se transforma na eq. (3.8):

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) - \pi^2 \rho} \dots\dots\dots(3.8)$$

com $\rho = P/P_E$.

3.3 - Determinação da carga crítica para o pórtico indeslocável

Suponha-se o pórtico indeslocável com cargas verticais $\{A_V\}$ (dirigidas para baixo) em todos os seus nós. Como foi visto no capítulo 2, no caso dos pórticos considerados (pórticos retangulares planos em que se desprezam as deformações axiais das barras) os esforços axiais nos pilares podem ser calculados rapidamente, por cálculo manual, pelo equilíbrio de forças verticais nos nós. Será suposto que as cargas verticais possam variar simultaneamente em todos os nós, fato que pode ser representado admitindo o vetor de cargas verticais $\{A_V\}$ multiplicado por um parâmetro $W > 0$, cujo valor crítico $W_{c\theta}$ deseja-se determinar. $W_{c\theta}$ é o menor valor de W para o qual o pórtico indeslocável se torna instável.

Supondo nulas as cargas horizontais e os momentos atuando nos nós, continua válido o princípio de superposição dos efeitos para as cargas verticais. Assim, chamando de A_{Mli} o esforço axial na barra i para $W = 1$, o esforço axial A_{Mlci} na mesma barra correspondente a qualquer valor de W será dado por

$$A_{Mlci} = A_{Mli} \times W \dots\dots\dots(3.16)$$

Sendo o pórtico indeslocável, da matriz $[S_M]$ (eq. 3.5) de cada barra interessa apenas a parte

$$(2 \times 2) \quad \begin{bmatrix} \frac{sEI_z}{L} & \frac{scEI_z}{L} \\ \frac{scEI_z}{L} & \frac{sEI_z}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.17)$$

Para diversos valores de W são determinadas as matrizes $[S_M^\theta]$ (eq. 3.17) e a partir destas a matriz de rigidez $[S_{\theta\theta}^P]$ (eq. 3.1).

O valor de $W_{c\theta}$ será o menor valor de W para o qual se verifica:

$$\det \left(\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix} \right) = 0 \dots\dots\dots(3.3)$$

Em geral procura-se resolver o problema sem calcular o valor do determinante (eq. 3.3), pois ao crescer de W , o $\det \left(\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix} \right)$ assume alternadamente valores positivos e negativos, tornando difícil a tarefa de saber quando assume pela primeira vez o valor zero. Como o determinante de uma matriz é igual ao produto de seus auto-valores o problema pode ser transformado em outro de determinação de auto-valores da matriz $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$. McMINN²⁴ resolve o problema fazendo:

$$\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.18)$$

onde $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$ é obtido de $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$ igualando a zero os elementos da diagonal principal e $\begin{bmatrix} D \end{bmatrix}$ é a matriz diagonal com os elementos diagonais de $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$. De (3.3) e (3.18):

$$\det \left(\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix} \right) = \det \left\{ \left(\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \right\} = 0 \dots\dots\dots(3.19)$$

Para $W < W_{c\theta}$ os elementos da diagonal principal de $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$ nunca se anulam (senão haveria perda de instabilidade das barras concorrentes em um nó e perfeitamente engastadas nas extremidades opostas, condição esta mais favorável à estabilidade que a condição real de engastamento elástico nas mesmas extremidades). A matriz $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}^{-1}$ é obtida de $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$ dividindo os elementos de cada coluna pelo elemento da mesma pertencente à diagonal principal, igualando em seguida a zero todos os elementos da diagonal principal.

Então, de (3.19):

$$\det \left(\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \right) = 0 \dots\dots\dots(3.20)$$

o que quer dizer que para $W = W_{c\theta}$, $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}^{-1}$ possui auto valor $\lambda = -1$. Para $W = 0$, valem $s = 4,0$ e $c = 0,5$. Pelos círculos de GERSHGORIN²⁵, conclui-se que os auto-valores de $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}^{-1}$ se situam entre $-1/2$ e $+1/2$. Ao crescer de W , todos os auto-valores de $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}^{-1}$ se alteram até que o menor auto-valor atinja o valor $\lambda_{\min} = -1$. Nes

te instante $W = W_{c\theta}$.

Para determinar o mesmo auto-valor pelo método iterativo²⁶ (baseado no método de potenciação) é necessário que ele seja também o de maior módulo. Para tanto realiza-se uma translação no espectro de auto-valores tomando a matriz.

$$[B] [D]^{-1} - [I] \dots\dots\dots(3.21)$$

cujos auto-valores, para $W = 0$ se situam entre $-1\frac{1}{2}$ e $-1/2$. Para esta última matriz, quando for $W = W_{c\theta}$, será também $\lambda_{\min} = -2$, e provavelmente o de maior módulo.

Tal procedimento para determinação de $W_{c\theta}$ funciona bem para o cálculo manual e para pórticos com pequeno número de nós. À medida que aumentam o número de andares e o número de prumadas de pilares, aparecerão auto-valores muito próximos que tornam muito lenta a convergência do método iterativo. O aparecimento de auto-valores próximos pode ser compreendido notando-se que para $W = 0$, todos os auto-valores situam-se sempre entre $-1\frac{1}{2}$ e $-1/2$. Como a análise de instabilidade requer a repetição dos cálculos diversas vezes para a mesma estrutura, o método iterativo (baseado no método de potenciação) torna-se inconveniente de ser adotado durante toda a análise, quando a estrutura é de grandes dimensões.

O procedimento usado por Mc MINN foi aplicado ao pórtico da Fig. 3-5 (analisado como deslocável por BOWLES e MERCHANT¹¹ e recentemente por ANTUNES¹³, com cálculo automático). Os valores I na Fig. 3-5 são os momentos de inércia das seções das barras, em "inch⁴". Todos os comprimentos na Fig. 3-5 são dados em polegadas. Para $W = 1$, valem $P = 14,65t$ e $V = 43,40t$. Encontrou-se para o parâmetro crítico o valor $W_{c\theta} = 24,206$. Porém, como já se salientou, o tempo de computação despendido na determinação do parâmetro crítico com o procedimento de Mc MINN ultrapassa os limites aceitáveis, principalmente se o mesmo for usado repetidamente, como será necessário na análise de instabilidade de estruturas tri-dimensionais.

Em vista dos inconvenientes verificados adotou-se no presente trabalho outro procedimento para determinação do parâmetro crítico $W_{c\theta}$: a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ é sempre simétrica (o mesmo não acontece com $[B] [D]^{-1}$) e enquanto não for atingida a carga crítica, é definida positiva (pelo cálculo da energia de deformação cor

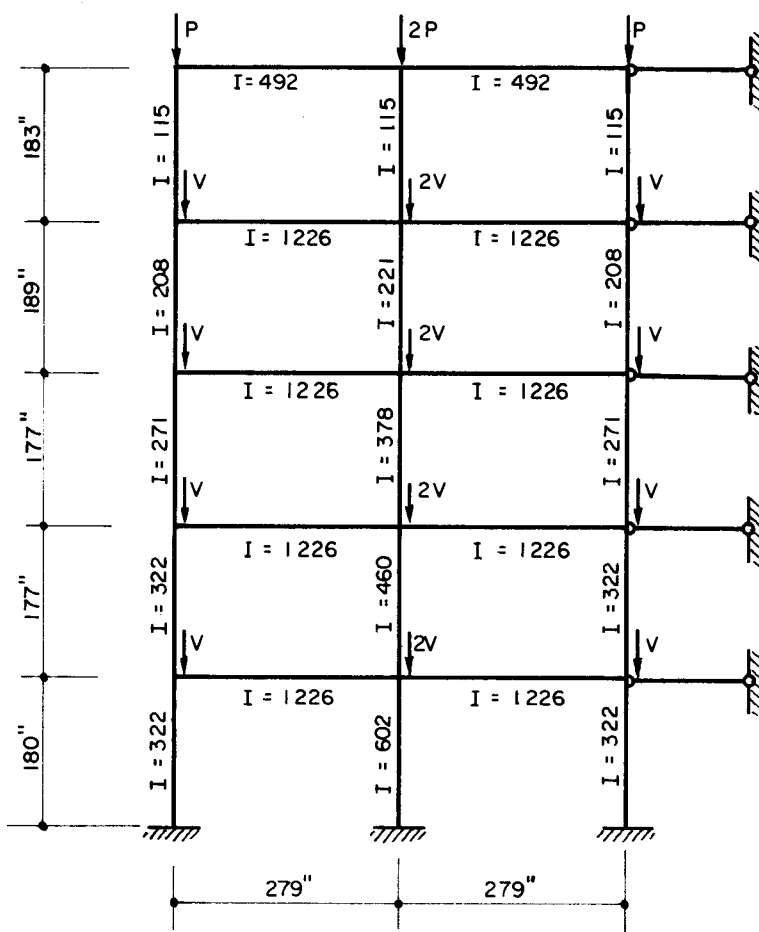


FIG.3-5 - Pórtico indeslocável com 5 andares. Para $W = 1$, os valores correspondentes das cargas verticais são $P = 14,65t$ e $V = 43,40t$.

respondente aos deslocamentos $\{D_{\theta}^P\}$, portanto, enquanto for $W < W_{c\theta}$ todos os auto-valores de $[S_{\theta\theta}^P]$ serão positivos. Quando for $W = W_{c\theta}$, será também $\det([S_{\theta\theta}^P]) = 0$ e o menor auto-valor de $[S_{\theta\theta}^P]$ será $\lambda_{\min} = 0$. Para $W > W_{c\theta}$ existirão auto-valores negativos. Assim o cálculo de $W_{c\theta}$ poderá ser realizado com o seguinte

ALGORÍTMO:

Para $W = 1$, determina-se a barra crítica (barra correspondente ao maior valor $\rho = P/P_E$). Seja ρ_{\max} este valor. $W = 1/\rho_{\max}$ e le vará a $\rho = 1$.

A maior relação ρ que a barra crítica pode suportar sem que o pórtico indeslocável se torne instável é $\rho = 4$, portanto, o li mite superior para o intervalo onde $W_{c\theta}$ será procurado é $W_{\max} = 4/\rho_{\max}$.

Inicia-se o algoritmo com o intervalo $[a,b]$, onde $a = 0$ e $b = W_{\max}$. Adota-se:

$$W = \frac{a + b}{2} \dots\dots\dots (3.22)$$

Calcula-se $[S_{\theta\theta}^P]$ e o menor auto-valor λ_{\min} .

Se $\lambda_{\min} < 0$ adota-se W como novo b

$\lambda_{\min} > 0$ adota-se W como novo a

Repete-se o procedimento dividindo o intervalo ao meio em cada etapa. Ao interromper o processo ter-se-á:

$$a < W_{c\theta} < b \dots\dots\dots(3.23)$$

onde a e b são os últimos adotados. A precisão do resultado dependerá do número de ciclos executados sendo o procedimento rapidamente convergente (Para as finalidades da prática bastam 8 ou 9 ciclos).

Para o cálculo do auto-valor mínimo, sendo $[S_{\theta\theta}^P]$ simétrica, pode-se usar o método de GIVENS-HOUSEHOLDER para matrizes simétricas^{27,28,29}. A vantagem deste método é calcular com relativamente pouco trabalho numérico, somente o auto-valor (ou os auto-valores) desejados, podendo-se escolher a precisão do resultado.

Se em alguma etapa for encontrado $\lambda_{\min} = 0$, o que algumas vezes acontece, convém interromper o processo, com economia de tempo de computação e adotar $W_{c\theta} = W$.

Durante cada etapa são testados os valores dos elementos da diagonal principal de $[S_{\theta\theta}^P]$; se algum deles for negativo ou nulo, quer dizer que a carga crítica foi ultrapassada e toma-se W como novo b .

3.4 - Outro procedimento para determinação da carga crítica do pórtico indeslocável

Uma desvantagem do método de GIVENS-HOUSEHOLDER para cálculo de auto-valores de matrizes simétricas é não tirar proveito do fato de algumas vezes ser a matriz em banda diagonal. Outra desvantagem é não calcular os auto-vetores correspondentes aos auto-valores, auto-vetores esses que são os modos de flambagem da estrutura analisada. Em compensação, é bem mais rápido que outros métodos que fornecem também os modos de flambagem.

Um método que calcula todos os auto-valores e auto-vetores com boa precisão é o método de JACOBI³⁰. Este método depende

tempo de computação bem maior que o método de GIVENS-HOUSEHOLDER, e se usado, convém sê-lo apenas uma vez, no final do algoritmo, para cálculo dos modos de flambagem.

Outro procedimento, bastante econômico (em tempo de computação) que não calcula auto-valores mas é adaptado para o problema de análise de instabilidade foi usado neste trabalho e seus fundamentos são dados em seguida:

Teorema 1:

Seja $[A]$ uma matriz simétrica de ordem n :

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} [B] & \{r\} \\ \hline \{r\}' & a \end{array} \right] \dots\dots\dots (3.24)$$

onde $[B]$ é a matriz simétrica de ordem $(n-1)$, a é o último elemento da diagonal principal, $\{r\}$ é um vetor coluna e $\{r\}'$ o vetor transposto de $\{r\}$.

Sejam $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ os auto-valores de $[A]$ e $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_{n-1}$ os auto-valores de $[B]$.

Então:

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n$$

isto é, os auto-valores de $[B]$ separam os auto-valores de $[A]$.

Teorema 2:

Os auto-valores de uma matriz $[B]$ definida positiva são todos maiores que zero.

Teorema 3:

Se uma matriz simétrica $[B]$ possui todos os auto-valores positivos, então é definida positiva.

As demonstrações dos teoremas acima podem ser encontradas no livro de BARROS³¹.

Os teoremas 2 e 3 e as considerações do parágrafo 3.3 permitem concluir que o carregamento de uma estrutura ultrapassa ou não o limite de estabilidade, conforme sua matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras não seja ou seja definida positiva.

Com $[A]$ e $[B]$ simétricas (eq. 3.24), valem os teoremas:

Teorema 4:

Seja $[B]$ definida positiva.

Então $[A]$ possui no máximo 1 auto-valor negativo.

A demonstração decorre dos teoremas 1 e 2.

Teorema 5:

Se $[B]$ não é definida positiva, então $[A]$ também não é.

Demonstração: teoremas 1 e 2.

Teorema 6:

Seja $[B]$ definida positiva.

Seja α_{\min} o menor auto-valor de $[A]$.

Podem ocorrer 3 casos:

- a) $\alpha_{\min} < 0$ então $[A]$ não é definida positiva e $\det([A]) < 0$
- b) $\alpha_{\min} = 0$ então $[A]$ não é definida positiva e $\det([A]) = 0$
- c) $\alpha_{\min} > 0$ então $[A]$ é definida positiva e $\det[A] > 0$

A demonstração vem dos teoremas 2, 3 e 4 e do fato de ser o valor do determinante de uma matriz igual ao produto dos seus auto-valores.

Deseja-se agora calcular o determinante de uma matriz $[\sigma]$ simétrica de ordem n pelo método de eliminação de GAUSS³². O cálculo do determinante pode ser efetuado por etapas, calculando-se os determinantes das sub-matrizes de $[\sigma]$ cujos elementos diagonais são também elementos diagonais de $[\sigma]$. Calcula-se primeiro o determinante de ordem 1 (\det_1) depois o de ordem 2 (\det_2), etc.

Na etapa k , para cálculo de \det_k pode-se operar somente nos elementos das primeiras k linhas e colunas de $[\sigma]$. A Fig. 3-6

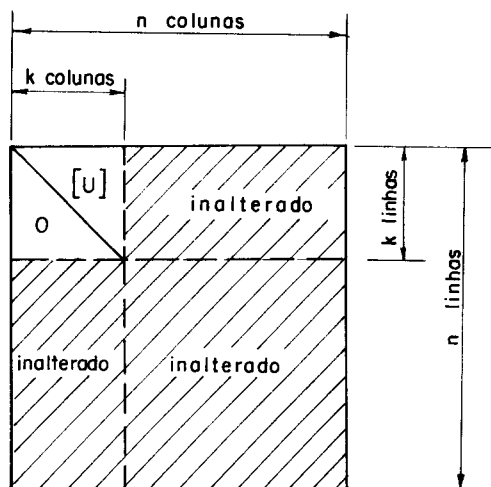


FIG. 3-6- Esquema das alterações efetuadas na matriz $[\sigma]$ de ordem n para cálculo do determinante de ordem k ($k < n$) com o método de eliminação de GAUSS.

esquematiza as alterações realizadas em $[\sigma]$ para o cálculo de \det_k . Na Fig. 3-6, $[U]$ representa matriz triangular superior e 0 a parte triangular inferior anulada no processo. Na realidade, sendo a matriz simétrica, basta alterar somente os elementos de $[U]$. Após as operações efetuadas na etapa k , o \det_k é calculado como o produto dos k primeiros elementos da diagonal principal. Em cada etapa valem as fórmulas de recorrência:

$$\begin{aligned} \det_1 &= \sigma_{11} \\ &\dots\dots\dots(3.25) \\ \det_k &= \sigma_{kk} \cdot \det_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

sendo σ_{kk} o k -ésimo elemento da diagonal principal após as alterações na etapa k .

Os teoremas 5 e 6 garantem que:

- a) Se $[\sigma]$ é não definida positiva, então pelo menos 1 dos \det_k será negativo ou nulo (o mesmo acontecendo com os σ_{kk})
- b) Se $[\sigma]$ é definida positiva, então

$$\begin{cases} \det_k > 0 \\ \sigma_{kk} > 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(3.26)$$

c) Se for

$$\begin{cases} \det_k > 0 \\ \sigma_{kk} > 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \dots\dots\dots (3.27)$$

e

$$\begin{cases} \det_n = 0 \\ \sigma_{nn} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (3.28)$$

então o menor auto-valor de $[\sigma]$ é $\lambda_{\min} = 0$.

O cálculo do determinante de uma matriz simétrica pelo procedimento acima permite saber, durante o cálculo (testando o valor de \det_k ou σ_{kk}) se a matriz $[\sigma]$ é definida positiva ou não, podendo o cálculo ser interrompido no meio do processo com bastante economia. A economia de cálculo será maior se a eliminação for iniciada na linha (1 ou n) próxima às linhas correspondentes aos deslocamentos dos nós onde incide a barra crítica. A conclusão c), - (eqs. 3.27 e 3.28) dá também uma possibilidade de saber se o menor auto-valor de $[\sigma]$ é $\lambda_{\min} = 0$.

O problema da determinação da carga crítica de uma estrutura pode ser então resolvido com o cálculo do determinante pelo método de eliminação de GAUSS acima descrito sem a necessidade de recorrer aos auto-valores. Para se ter uma idéia da economia em tempo de computação, foi analisada a instabilidade da mesma estrutura da Fig. 3-5, com os tempos de cálculo mostrados na tabela I.

TABELA I

Método	Tempo de computação
JACOBI	14m 35s
GIVENS-HOUSEHOLDER	3m 10s
Iterativo	3m 52s
GAUSS adaptado à instabilidade	23s

As expressões para cálculo dos determinantes com o método de GAUSS (adaptado a análise de instabilidade) fazendo proveito da simetria e da forma em banda diagonal da matriz $[\sigma]$ são:

$$\det_1 = \sigma_{11} \dots\dots\dots(3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sum_{k=k_{\min}}^{i-1} \frac{\sigma_{ki} \cdot \sigma_{kj}}{\sigma_{kk}} \dots\dots\dots(3.30) \\ (j = 2, 3, \dots, n), (i = i_{\min}, i_{\min}+1, \dots, j) \\ \det_j = \sigma_{jj} \cdot \det_{j-1} \dots\dots\dots(3.31) \end{array} \right.$$

sendo $i_{\min} = \max \{ j - \ell_{bs\theta} + 2, 2 \} \dots\dots\dots(3.32)$

e $k_{\min} = i_{\min} - 1 \dots\dots\dots(3.33)$

Na eq. (3.32) $\ell_{bs\theta}$ é a largura da banda superior da matriz simétrica. ($\ell_{bs\theta} = \min \{ n_p + 1, n_a \cdot n_p \}$)

Quando houver necessidade de reduzir a área de armazenamento na memória rápida do computador, lidando-se com a matriz de rigidez $[S_{\theta\theta}^P]$ (eq. 3.1) do pórtico indeslocável pode-se armazenar sua banda superior como matriz retangular de $(n_a \times n_p)$ linhas e $\ell_{bs\theta}$ colunas ($\ell_{bs\theta} = n_p + 1$), como mostra a Fig. 3-7.

As expressões para cálculo dos determinantes de ordem j ficarão:

$$\det_1 = \sigma_{11} \dots\dots\dots(3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{i,(j-i+1)} = \sigma_{i,(j-i+1)} - \sum_{k=k_{\min}}^{i-1} \frac{\sigma_{k,(i-k+1)} \cdot \sigma_{k,(j-k+1)}}{\sigma_{k1}} \dots\dots\dots(3.34) \\ (j = 2, 3, \dots, n_a \cdot n_p), (i = i_{\min}, i_{\min}+1, \dots, j) \\ \det_j = \sigma_{j1} \cdot \det_{j-1} \dots\dots\dots(3.35) \end{array} \right.$$

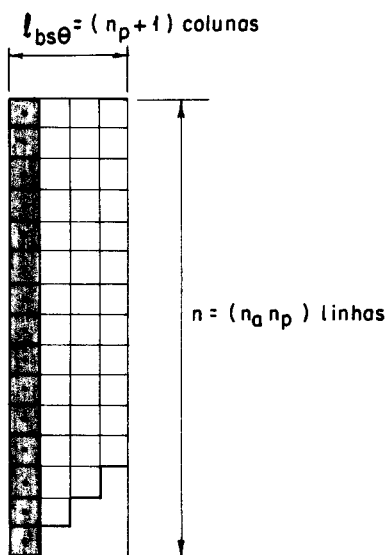


FIG.3-7 - Banda superior da matriz de rigidez $[S_{\theta\theta}^P]$ armazenada como matriz retangular .

$$i_{\min} = \max \left\{ j - l_{bs\theta} + 2, 2 \right\} \dots\dots\dots(3.32)$$

$$k_{\min} = i_{\min-1} \dots\dots\dots(3.33)$$

Vê-se que outra vantagem do método de GAUSS para análise de instabilidade é a facilidade de programação, em confronto com a de outros procedimentos nos quais é necessário calcular auto-valores.

3.5 - Determinação dos modos de flambagem do pórtico indeslocável

Para diversos pórticos indeslocáveis analisados durante a realização deste trabalho, encontrou-se apenas um modo de flambagem associado ao parâmetro crítico $W_{c\theta}$, ou o que é o mesmo, o menor auto-valor $\lambda_{\min} \approx 0$ de $[S_{\theta\theta}^P]$ (eq. 3.1), naqueles exemplos era único (de multiplicidade 1) existindo apenas um auto-vetor associado ao auto-valor λ_{\min} . Mas, poderão acontecer casos em que aparecem maior número de modos de flambagem para o pórtico indeslocável. Quando tal acontecer, os modos de flambagem associados a λ_{\min} poderão ser determinados pelo método de JACOBI³⁰ para cálculo de auto-valores e auto-vetores, no último ciclo do algoritmo do parágrafo 3.3 . Maiores informações sobre a determinação dos modos múltiplos

de flambagem serão dadas no capítulo 6.

Quando λ_{\min} for único, o método iterativo²⁶ (baseado no método de potenciação) pode também ser usado no final do algoritmo do parágrafo 3.3. Para determinação do auto-vetor correspondente a λ_{\min} , aproveita-se ainda o método de eliminação de GAUSS da maneira seguinte:

a) Após completado o algoritmo do parágrafo 3.3, toma-se uma vez mais a banda superior de $[S_{\theta\theta}^P]$ correspondente a W_{θ} determinado.

b) Para se ter certeza que o menor auto-valor é muito próximo de zero, efetua-se uma redução no espectro de auto-valores de $[S_{\theta\theta}^P]$ fazendo com que todos auto-valores sejam menores que 1. Isto é conseguido dividindo-se todos os elementos de $[S_{\theta\theta}^P]$ por um número c , ou seja, tomando-se a matriz:

$$\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] \dots\dots\dots(3.36)$$

sendo c o extremo superior dos círculos de GERSHGORIN correspondentes a $[S_{\theta\theta}^P]$, ou seja:

$$c = \max_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \sigma_{i1} + \sum_{\substack{j=j_{\min} \\ i \neq 1}}^{i-1} \sigma_{j,(i-j+1)} + \sum_{\substack{j=2 \\ i \neq n}}^{j_{\max}} \sigma_{i,j} \right\} \dots(3.37)$$

com

$$j_{\min} = \max \{ 1, i - l_{bs\theta} + 1 \} \dots\dots\dots(3.38)$$

$$j_{\max} = \min \{ l_{bs\theta}, n-i+1 \} \dots\dots\dots(3.39)$$

sendo $\sigma_{i,j}$ o elemento genérico da matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ e n a ordem da mesma matriz. As eqs. (3.37), (3.38) e (3.39) valem para o armazenamento da banda superior de $[S_{\theta\theta}^P]$ em matriz retangular.

c) A todos elementos da diagonal principal de $\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P]$, soma-se um valor $\lambda^* > 0$. Isto equivale a tomar a matriz:

$$\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] + \lambda^* [I] \dots\dots\dots(3.40)$$

Como o menor auto-valor de $\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P]$ é $\lambda_{\min} \approx 0$, dependendo da escolha de λ^* , a matriz da eq. (3.40) possuirá todos os auto-valores positivos. Um valor adotado com êxito em diversos exemplos resolvidos no presente trabalho foi $\lambda^* = 0,05$; podendo-se tomar valores ainda menores.

d) O maior auto-valor de $\left(\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] + \lambda^* [I]\right)^{-1}$ será $\approx \frac{1}{\lambda^*} = 20$ e também o de maior valor absoluto, possuindo como auto-vetor correspondente o mesmo auto-vetor de $[S_{\theta\theta}^P]$ que corresponde a $\lambda_{\min} \approx 0$. É muito provável também, que o maior auto-valor de $\left(\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^{\min}] + \lambda^* [I]\right)^{-1}$ seja bem maior que os demais. Pode-se então aplicar o método iterativo para o cálculo desse auto-valor à matriz $\left(\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] + \lambda^* [I]\right)^{-1}$.

e) Não é necessário calcular a matriz inversa de $\left(\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] + \lambda^* [I]\right)$. Basta realizar a decomposição de GAUSS (eqs. 3.34, 3.32 e 3.33) até a última coluna ($j=n$) e obter a banda superior $[U]$ da matriz decomposta.

Como

$$\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] + \lambda^* [I] = [L][U] \dots\dots\dots(3.41)$$

onde

$$[L] = [U]' [D]^{-1} \dots\dots\dots(3.42)$$

sendo $[D]$ a matriz diagonal formada com os elementos diagonais de $[U]$. Será também:

$$\left(\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] + \lambda^* [I]\right)^{-1} = [U]^{-1} [L]^{-1} \dots\dots\dots(3.43)$$

f) O método iterativo para cálculo do auto-vetor é aplicado, obtendo as duas seqüências de vetores:

$$\{y^r\} = [U]^{-1} [L]^{-1} \{x^{r-1}\} \dots\dots\dots(3.44)$$

$$\{x^r\} = \frac{\{y^r\}}{y_1^r} \dots\dots\dots(3.45)$$

adotando-se $\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$ e sendo y_1^r o primeiro elemento de $\{y^r\}$.

Com o crescer de r , tanto $\{x^r\}$ como $\{y^r\}$ convergem para o auto-vetor procurado. Para saber se a convergência foi alcançada, convém verificar a cada 5 ou 10 ciclos se as componentes dos vetores estacionaram no valor anterior.

As expressões para o cálculo de $\{y^r\}$ em cada ciclo (adotando-se o armazenamento da banda superior em matriz retangular) serão:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1^r = x_1^{r-1} \dots\dots\dots(3.46) \\ z_i^r = x_i^{r-1} - \sum_{j=j_{\min}}^{i-1} \frac{\sigma_{j,(i-j+1)} \cdot z_j^r}{\sigma_{j1}} \dots\dots\dots(3.47) \\ (i=2,3,\dots,n) \\ j_{\min} = \max \{1, i - \ell_{bs\theta} + 1\} \dots\dots\dots(3.48) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n^r = \frac{z_n^r}{\sigma_{n1}} \dots\dots\dots(3.49) \\ y_i^r = \frac{z_i^r - \sum_{j=i+1}^{j_{\max}} \sigma_{i,(j-i+1)} \cdot y_j^r}{\sigma_{i1}} \dots\dots\dots(3.50) \\ (i=n-1, n-2,\dots,1) \\ j_{\max} = \min \{n, i + \ell_{bs\theta} - 1\} \dots\dots\dots(3.51) \end{array} \right.$$

onde z_i^r é o elemento de ordem i do vetor auxiliar $\{z^r\}$ e σ_{ij} o elemento de linha i e coluna j da banda superior decomposta proveniente de $\frac{1}{c} [S_{\theta\theta}^P] + \lambda^* [I]$.

3.6 - Determinação da carga crítica do pórtico indeslocável pelo método de CHOLESKY

Outro procedimento que permite saber se a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ é ou não definida positiva, com grande economia de tempo de computação, fazendo uso apenas da banda superior dessa matriz, é o método

do de decomposição de matrizes simétricas de CHOLESKY³³. Por esse método, $[S_{\theta\theta}^P]$ pode ser decomposta no produto de uma matriz triangular superior $[R]$ (de largura da banda superior igual a de $[S_{\theta\theta}^P]$) pela sua transposta $[R]'$:

$$[S_{\theta\theta}^P] = [R]'[R] \dots\dots\dots(3.52)$$

Chamando de σ_{ij} os elementos de $[S_{\theta\theta}^P]$, r_{ij} os elementos de $[R]$, sendo $n_a \cdot n_p$ a ordem dessas matrizes e $\ell_{bs\theta} = n_p + 1$ a largura da banda superior das mesmas, os elementos de $[R]$ e os determinantes \det_j da sub-matriz de ordem j ($j=1,2,\dots,n_a \cdot n_p$) de $[S_{\theta\theta}^P]$ podem ser calculados por:

$$\det_0 = 1 \dots\dots\dots(3.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{i-1} r_{ki} \cdot r_{kj}}{r_{ii}} \text{ para } i \neq j \dots\dots\dots(3.54) \\ r_{ij} = \sqrt{\sigma_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{i-1} r_{ki}^2} \text{ para } i = j \dots\dots\dots(3.55) \\ (j=1,2,\dots,n_a \cdot n_p) \\ (i=i_{\min}, i_{\min}+1, \dots, j) \\ i_{\min} = \max \{ i - \ell_{bs\theta} + 1, 1 \} \dots\dots\dots(3.56) \\ \det_j = r_{jj}^2 \cdot \det_{j-1} \dots\dots\dots(3.57) \end{array} \right.$$

Pela conclusão a) do parágrafo 3.4, sabe-se que se a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ for não definida positiva, então, pelo menos um dos \det_j será negativo ou nulo, ou o que é o mesmo, pelo menos um dos valores r_{jj}^2 será negativo ou nulo. Se r_{jj}^2 satisfaz essa condição, o radicando na eq. (3.55) também satisfaz. Portanto, se algum radicando negativo ou nulo for encontrado no cálculo, isto quer dizer que $[S_{\theta\theta}^P]$ é não definida positiva e possui auto-valor $\lambda_{\min} \leq 0$.

Finalmente, convém esclarecer que muitas das conclusões chegadas neste capítulo também se aplicam à análise de instabilidade de outros tipos de estruturas.

4. INSTABILIDADE DE PÓRTICOS RETANGULARES DESLOCÁVEIS

4.1 - Introdução. Obtenção da matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras

A análise de instabilidade de pórticos retangulares com duas prumadas simétricas de pilares, sujeitos a cargas verticais concentradas nos nós, pode ser realizada com o uso de outras duas funções de instabilidade \underline{n} e \underline{o} definidas por:

$$n = s \left[1 - \frac{m(1+c)}{2} \right] \dots\dots\dots(4.1)$$

e

$$o = s \left[-c + \frac{m(1+c)}{2} \right] \dots\dots\dots(4.2)$$

funções estas introduzidas por MERCHANT⁴. Usando \underline{n} e \underline{o} , a análise da instabilidade é realizada obtendo-se uma matriz de rigidez correspondente às rotações dos nós. Admite-se portanto como ações perturbadoras do equilíbrio, momentos aplicados nos nós. As funções \underline{n} e \underline{o} são a rigidez à rotação na extremidade e o coeficiente de propagação de momentos da barra (com sinal trocado), obtidos das funções s , c e m (eqs. 3.6 até 3.10) usando a condição de força cortante nula na barra (como acontece no pórtico com 2 prumadas simétricas de pilares, com carregamento vertical simétrico). Não será mostrado aqui como se realiza tal tipo de análise por ser a mesma mais adaptada ao cálculo manual. Em se tratando de pórticos retangulares com mais de 2 prumadas de pilares, desejando-se usar o cálculo manual, pode-se transformar o pórtico dado em um "pórtico equivalente" de duas prumadas de pilares, mesmo que o pórtico dado não obedeça o "princípio dos múltiplos" de LIGHTFOOT¹². Chega-se assim a um valor aproximado para a carga crítica.

Utilizando o cálculo automático, pode-se chegar a valores mais precisos da carga crítica do pórtico deslocável. Para elaborar este outro procedimento, considere-se o pórtico deslocável da Fig. 4-1, com 5 andares e 3 prumadas de pilares do qual supõe-se já conhecido o carregamento vertical crítico para a condição indeformável dado por $W = W_{c\theta}$. Lembrando a hipótese de indeformabilidade axial das barras, pode ser obtida a matriz $\begin{bmatrix} S^P \end{bmatrix}$ (eq. 2.13) correspondente aos deslocamentos do pórtico da Fig. 4.1, com o procedimento do parágrafo 2.2:

$$\begin{bmatrix} S^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} n_a \cdot n_p \text{ colunas} & n_a \text{ colunas} \\ \left[\begin{matrix} S_{\theta\theta}^P & S_{\theta H}^P \\ \dots & \dots \\ S_{H\theta}^P & S_{HH}^P \end{matrix} \right] & \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} n_a \cdot n_p \text{ linhas} \\ n_a \text{ linhas} \end{matrix} \dots\dots\dots(2.13)$$

Sendo $W_{c\theta}$ já conhecido, pode-se afirmar que para valores de W satisfazendo: $0 < W < W_{c\theta}$; a matriz $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}$ é não singular e de finida positiva, portanto existe $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}^{-1}$. Chamando W_{cH} o valor do parâmetro crítico para o pórtico deslocável, e sendo a carga crítica do pórtico deslocável não maior que a do pórtico indeslocável, a instabilidade do primeiro deverá ser procurada para valores de W satisfazendo

$$0 < W < W_{c\theta} \dots\dots\dots(4.3)$$

isto é, será

$$0 < W_{cH} < W_{c\theta} \dots\dots\dots(4.4)$$

Como existe $\begin{bmatrix} S_{\theta\theta}^P \end{bmatrix}^{-1}$, pode-se calcular a matriz de rigidez reduzida:

$$\begin{matrix} (n_a \times n_a) \\ \left[S_{HH}^* \right] = \left[S_{HH}^P \right] - \left[S_{H\theta}^P \right] \left[S_{\theta\theta}^P \right]^{-1} \left[S_{\theta H}^P \right] \dots\dots\dots(4.5) \end{matrix}$$

onde $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$ (matriz de rigidez reduzida) é a matriz de rigidez correspondente aos deslocamentos horizontais nos andares enquanto são livres as rotações dos nós do pórtico. Os esforços horizontais nos andares e os deslocamentos nos mesmos estarão relacionados por:

$$\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} D_H^P \\ \dots \\ D_H^P \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} A_H^P \\ \dots \\ A_H^P \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(4.6)$$

Outro procedimento bem mais econômico para obtenção de $\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix}$ é usar parcialmente o método de eliminação de GAUSS³² para solução de sistemas lineares. A eq. (2.11) poderá ser escrita:

$$\begin{matrix} n_a \cdot n_p \text{ linhas} \\ n_a \text{ linhas} \\ \left[\begin{matrix} \left[\begin{matrix} S_{\theta\theta}^P & S_{\theta H}^P \\ \dots & \dots \\ S_{H\theta}^P & S_{HH}^P \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \left\{ D_{\theta}^P \right\} \\ \dots \\ \left\{ D_H^P \right\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left\{ A_{\theta}^P \right\} \\ \dots \\ \left\{ A_H^P \right\} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \left\{ D_{\theta}^P \right\} \\ \dots \\ \left\{ D_H^P \right\} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left\{ A_{\theta}^P \right\} \\ \dots \\ \left\{ A_H^P \right\} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(4.7) \end{matrix}$$

A Fig. 4-2 apresenta o esquema de armazenamento da parte simétrica superior da matriz $[S^P]$ correspondente ao pórtico da Fig. 4-1. Na Fig. 4-2, $l_{bs\theta}$ é a largura verdadeira da banda superior de $[S^P_{\theta\theta}]$ e l^*_{bSH} é a largura admitida (para economia de tempo e memória

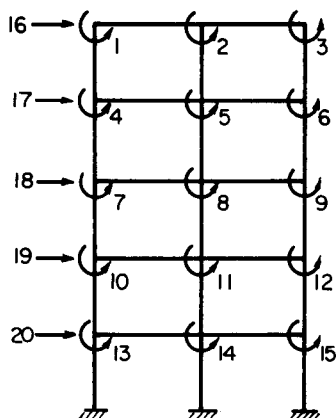


FIG.4-1 - Pórtico deslocável com 5 andares e 3 prumadas de pilares.

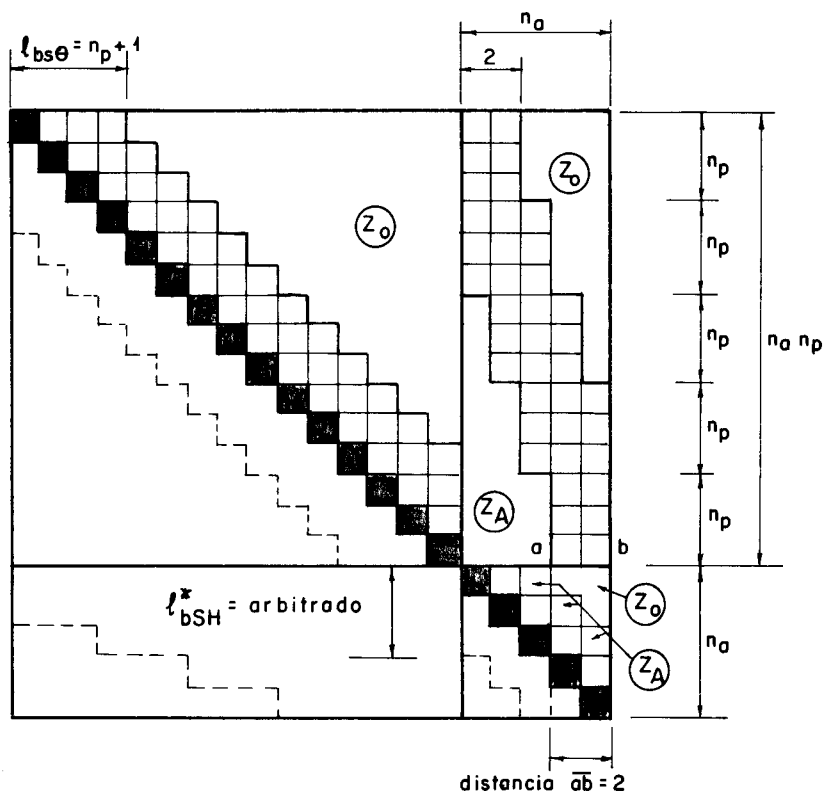


FIG.4-2 - Esquema de armazenamento da parte simétrica superior da matriz $[S^P]$ correspondente ao pórtico deslocável da Fig. 4-1

de cálculo) para a banda superior de $[S_{HH}^*]$. (não confundir com $\ell_{bsH} = 2$ que é a largura da banda superior de $[S_{HH}^P]$).

Como mostram STAMATO e STAFFORD-SMITH³⁴, considerando os deslocamentos absolutos dos andares, pode-se admitir com boa aproximação que o deslocamento horizontal em um andar do pórtico somente influi nos esforços horizontais aplicados nos andares vizinhos. Estudando o comportamento dos pórticos das Figs. 6-22 e 6-23 (capítulo 6), concluiu-se em adotar $\ell_{bsH}^* = 6$ por ser o menor valor para o qual se encontrou valores da carga crítica idênticos aos que se obtêm admitindo influência entre todos os andares. Com $\ell_{bsH}^* = 5$ foram encontrados valores da carga crítica 2 a 3% maiores, e portanto contra a segurança. Já com $\ell_{bsH}^* = 4$, encontrou-se valores 20 a 30% menores, a favor da segurança, mas como se conclui, demasiadamente diferentes dos obtidos com a hipótese de influência entre todos os andares.

Na mesma Fig. 4-2 os elementos escuros na matriz são os elementos da diagonal principal de $[S^P]$ (eq. 2.13). (Z_o) indica elementos nulos que permanecem inalterados na eliminação parcial de GAUSS e (Z_A) os elementos nulos que serão alterados no processo.

Liberar as rotações dos nós do pórtico (Fig. 4-1) equivale a adotar $\{A_\theta^P\} = 0$ na eq. (4.7). Resultará o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} [S_{\theta\theta}^P] & [S_{\theta H}^P] \\ \hline [S_{H\theta}^P] & [S_{HH}^P] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_\theta^P\} \\ \{D_H^P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{A_H^P\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.8)$$

O método de eliminação de GAUSS aplicado parcialmente à eq. (4.8) levará ao sistema:

$$\begin{bmatrix} [U] & [S_{\theta H}^P] \\ 0 & \vdots \\ \hline 0 & [S_{HH}^P] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_\theta^P\} \\ \{D_H^P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{A_H^P\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4.9)$$

donde

$$[S_{HH}^P] \{D_H^P\} = \{A_H^P\} \dots\dots\dots (4.10)$$

Comparando (4.10) com (4.6) conclui-se que:

$$\begin{bmatrix} S_{HH}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{HH} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.11)$$

obtido com o método de eliminação de GAUSS.

A eliminação das primeiras $n_a \cdot n_p$ equações do sistema(4.8) operando apenas na parte simétrica superior de $[S^P]$ (Fig. 4-2) (alterando (Z_A) mas sem alterar (Z_0)) pode ser feita pelas eqs. (3.30), (3.32) e (3.33) (pág. 36 - parágrafo 3.4) seguidas das:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij} - \sum_{\substack{k=k_{\max} \\ i \leq n_a \cdot n_p}}^{i-1} \frac{\sigma_{ki} \cdot \sigma_{kj}}{\sigma_{kk}} - \sum_{\substack{k=i_{\min}-1 \\ i > n_a \cdot n_p}}^{n_a \cdot n_p} \frac{\sigma_{ki} \cdot \sigma_{kj}}{\sigma_{kk}} \dots\dots\dots(4.12) \\ (j &= n_a \cdot n_p + 1, n_a \cdot n_p + 2, \dots n_a \cdot n_p + n_a) \\ i &= i_{\min}, i_{\min} + 1, \dots n_a \cdot n_p, i_{\text{med}}, i_{\text{med}} + 1, \dots\dots\dots j) \end{aligned} \right.$$

$$i_{\min} = \max \left\{ (j - n_a \cdot n_p) n_p - 2n_p + 2, 2 \right\} \dots\dots\dots(4.13)$$

$$i_{\text{med}} = \max \left\{ n_a \cdot n_p + 1, j - \ell_{bsH}^* + 1 \right\} \dots\dots\dots(4.14)$$

$$k_{\min} = \max \left\{ i - \ell_{bs\theta} + 1, i_{\min} - 1 \right\} \dots\dots\dots(4.15)$$

onde σ_{ij} é o elemento pertencente à linha i e coluna j de $[S^P]$.

No final do processo obtêm-se apenas a parte simétrica superior de $[S_{HH}^*]$ (eq. 4.11) de largura ℓ_{bsH}^* , mas que é suficiente para a análise de instabilidade do pórtico deslocável. Como $0 < W < W_{c\theta}$, pode-se garantir que $[S_{\theta\theta}^P]$ é definida positiva e pela conclusão b) (eq. 3.26) os divisores σ_{kk} (eq. 4.12) são sempre positivos.

Para a obtenção da banda superior de $[S_{HH}^*]$ pode-se obter maior economia de memória no computador se a parte simétrica superior for armazenada como esquematizado na Fig. 4-3 (onde os símbolos tem o mesmo significado que na Fig. 4-2). Nesse caso, as expressões para eliminação parcial de GAUSS serão as eqs. (3.34), (3.32) e (3.33) (pág. 36 - parágrafo 3.4) seguidas de:

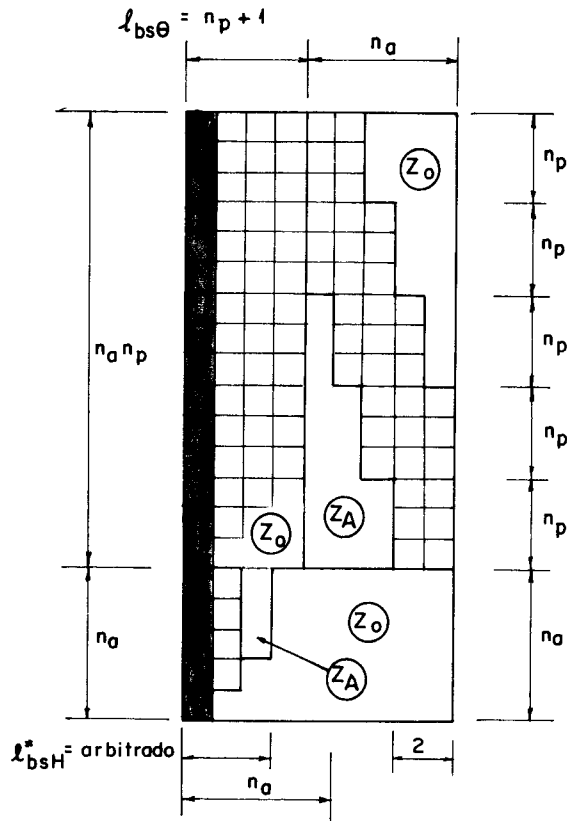


FIG. 4-3 - Armazenamento da matriz $[S^P]$ com maior economia de memória no computador.

a) Para $i \leq n_a \cdot n_p$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sum_{\substack{k=k_{\min} \\ i \leq n_a \cdot n_p}}^{i-1} \frac{\sigma_{k, (i-k+1)} \cdot \sigma_{kj}}{\sigma_{kl}} \\ (j = n_p + 2, n_p + 3, \dots, n_a + 1 + n_a) \quad \dots (4.16) \\ (i = i_{\min}, i_{\min} + 1, \dots, n_a \cdot n_p) \end{array} \right.$$

$$i_{\min} = \max \left\{ (j - n_a \cdot n_p) n_p - 2n_p + 2, 2 \right\} \quad \dots (4.13)$$

$$k_{\min} = \max \left\{ i - l_{bs\theta} + 1, i_{\min} - 1 \right\} \quad \dots (4.15)$$

b) Para $i > n_a \cdot n_p$:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{i, (j-i+1)} &= \sigma_{i, (j-i+1)} - \sum_{\substack{k=i_{\min}-1 \\ i > n_a \cdot n_p}}^{n_a \cdot n_p} \frac{\sigma_{k, (i-n_a \cdot n_p + n_p + 1)} \cdot \sigma_{k, (j-n_a \cdot n_p + n_p + 1)}}{\sigma_{k1}} \\ (j &= n_a \cdot n_p + 1, n_a \cdot n_p + 2, \dots, n_a \cdot n_p + n_a) \dots\dots\dots(4.17) \\ i &= i_{\text{med}}, i_{\text{med}} + 1, \dots, j) \end{aligned} \right.$$

$$i_{\min} = \max \left\{ (j - n_a \cdot n_p) n_p - 2n_p + 2, 2 \right\} \dots\dots\dots(4.13)$$

$$i_{\text{med}} = \max \left\{ n_a \cdot n_p + 1, j - \ell_{\text{bsH}}^* + 1 \right\} \dots\dots\dots(4.14)$$

No final do processo obtêm-se a banda superior simétrica de largura ℓ_{bsH}^* da matriz $[S_{\text{HH}}^*]$, que é suficiente para análise de instabilidade do pórtico deslocável.

4.2 - Determinação da carga crítica do pórtico deslocável

Uma vez determinada a matriz $[S_{\text{HH}}^*]$ (ou sua banda superior), a carga crítica (definida pelo parâmetro $W = W_{\text{CH}}$) do pórtico deslocável sujeito a carregamento vertical concentrado nos nós, pode ser procurada, admitindo-se como ações perturbadoras do equilíbrio os esforços horizontais $\{A_{\text{H}}^{\text{P}}\}$ (eq. 4.6) aplicados nos andares. O pórtico deslocável se torna instável quando mesmo com esforços horizontais nulos aplicados ($\{A_{\text{H}}^{\text{P}}\} = 0$), ocorrem deslocamentos horizontais dos mesmos, ou seja:

$$[S_{\text{HH}}^*] \left\{ D_{\text{H}}^{\text{P}} \right\} = 0 \dots\dots\dots(4.15)$$

sistema que só admite solução quando $\det([S_{\text{HH}}^*]) = 0$. O parâmetro crítico $W = W_{\text{CH}}$ será o menor valor de W para o qual $\det([S_{\text{HH}}^*]) = 0$.

Supondo nulas as cargas horizontais e os momentos nos nós, continua válido o princípio de superposição de efeitos para

as cargas verticais, de maneira que o esforço axial A_{Mlci} em cada barra i pode ser calculado:

$$A_{Mlci} = A_{Mli} \times W \dots\dots\dots (4.16)$$

onde A_{Mli} é o esforço axial na mesma barra para $W = 1$.

Para cada valor de W determinam-se as matrizes de rigidez das barras (apenas alguns elementos) e sua contribuição na parte triangular superior de $[S^P]$ (eq. 2-13) usando o procedimento descrito no parágrafo 2.2. Com as eqs. (3.30), (3.32), (3.33), (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) (ou com as eqs. (3.34), (3.32), (3.33), (4.16), (4.13), (4.15), (4.17), (4.13) e (4.14) se for usado o armazenamento em matriz retangular), calcula-se a banda superior de $[S_{HH}^*]$.

A matriz $[S_{HH}^*]$ não é dominada pela diagonal principal e portanto não se pode assegurar que o procedimento usado por McMINN²⁴ (vide parágrafo 3.3) seja levado a bom termo. No entanto sabe-se que antes de atingida a carga crítica, $[S_{HH}^*]$ é definida positiva, deixando de sê-lo quando a mesma é atingida. Portanto, o procedimento do parágrafo 3.4 (eliminação de GAUSS adaptado à instabilidade) pode ser aplicado, usando-se apenas a banda superior de $[S_{HH}^*]$ de largura ℓ_{bSH}^* . Usa-se também o algoritmo da pg. 30 começando com $a = 0$ e $b = W_{c\theta}$, supondo que $W_{c\theta}$ já tenha sido determinado anteriormente.

4.3 - Modos de flambagem do pórtico deslocável

Para muitos pórticos deslocáveis analisados, encontrou-se apenas um modo de flambagem associado à carga crítica. Embora o aparecimento de um modo seja frequente, poderão acontecer casos em que existe número maior de modos de flambagem associados ao carregamento crítico. Quando existirem diversos modos de flambagem (auto-valor λ_{min} múltiplo), os mesmos podem ser determinados com o método de JACOBI (capítulo 6). Aparecendo apenas um modo, para determiná-lo, pode-se aplicar o procedimento descrito no parágrafo 3.5, operando sobre a banda superior decomposta de $\left(\frac{1}{c}[S_{HH}^*] + \lambda^*[I]\right)$, sendo c calculado como na eq. (3.37), adotando-se $\lambda^* = 0,05$.

Como exemplo de aplicação dos procedimentos descritos

neste capítulo, foi analisada a instabilidade do pórtico da Fig. 4-4a (é o mesmo pórtico da Fig. 3-5, do qual se retira os vínculos de conexão com o sistema horizontalmente rígido). Os valores I na Fig. 4-4a são os momentos de inércia das seções das barras. Para $W = 1$, valem $P = 14,65t$ e $V = 43,40t$.

Encontrou-se para o parâmetro crítico o valor $W_{CH} = 7,978$; com o modo de flambagem da Fig. 4-4b. O máximo valor $\rho = P/P_E$ é atingido na barra 15 e vale $\rho_{max} = 0,84$. Com a adoção do "pórtico equivalente", BOWLES e MERCHANT encontraram $W_{CH} = 7,3$ e McMINN encontrou $W_{CH} = 7,7$.

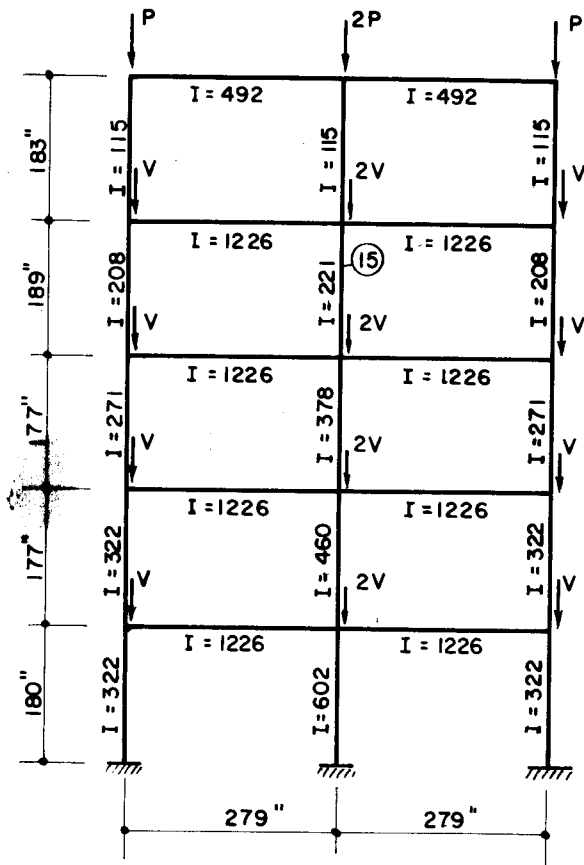


FIG.4-4a- Pórtico deslocável obtido do pórtico da Fig.3-5 pela supressão dos vínculos de conexão com o sistema horizontal.

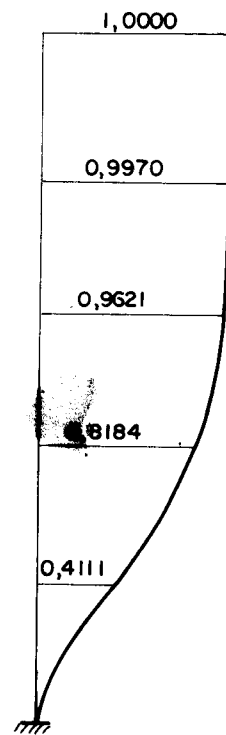


FIG.4-4b - Modo de flambagem encontrado para o pórtico da Fig.4-4 a .

5. INSTABILIDADE DE PÓRTICOS RETANGULARES COM BARRAS DIAGONAIS

5.1 - Introdução

O procedimento para análise de instabilidade apresentado no capítulo 4 é aplicável aos pórticos deslocáveis constituídos de barras verticais e horizontais rigidamente ligadas aos nós, sujeitos a cargas verticais concentradas nos mesmos nós.

Para se aplicar o procedimento descrito no capítulo 4, é necessário que não ocorra ausência de tramo de pilar de uma prumada, em algum andar do pórtico deslocável. Se ocorrer a ausência de tramo de pilar, não poderão ser considerados nulos os deslocamentos verticais dos nós, como decorrência da hipótese adotada de indeformabilidade axial das barras. Portanto, pórticos como o mostrado na Fig. 5-1 não podem ser analisados com o procedimento do capítulo 4. Porém, em alguns casos, ocorrendo ausência de tramos de vigas, o procedimento do capítulo 4 poderá ainda ser usado, desde que as lajes ao redor imponham igualdade de deslocamentos

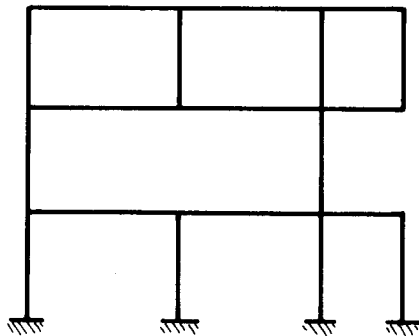


FIG.5-1 - Pórtico retangular com ausência de tramos de pilares em duas prumadas.

horizontais dos nós do mesmo andar.

O método de análise de instabilidade dado no capítulo 4, baseia-se na adoção de forças horizontais nos andares como ações perturbadoras do equilíbrio. Assim é calculada a matriz de rigidez $[S_{HH}^*]$ (eqs. 4-5 e 4-11) correspondente aos deslocamentos horizontais, cuja determinação é possível por ser a carga crítica procurada não maior que a carga crítica do pórtico suposto indeslocável.

A vantagem do procedimento com o uso da matriz $[S_{HH}^*]$ é proporcionar um cálculo "exato" para o valor da carga crítica do

pórtico deslocável, valor este que merece mais confiança que o de terminado pela adoção de um pórtico "equivalente" com duas prumadas de pilares. Uma vantagem do procedimento do capítulo 4 é não assumir nenhum pilar carregado além da carga crítica $4\pi^2 EI_z / L^2$ correspondente à condição bi-engastada.

Neste capítulo determinam-se procedimentos para análise de instabilidade de pórticos planos que, além das barras ortogonais dos pórticos até aqui estudados, possuem ainda barras diagonais em alguns andares. Pórticos retangulares com barras diagonais são estruturas que aparecem frequentemente, sendo as barras diagonais usadas para aumentar a segurança contra a perda de estabilidade. A análise de instabilidade deste tipo de estrutura também será estudada considerando o carregamento vertical e concentrado nos nós.

Quando o pórtico retangular possui barras diagonais em todos os andares, como é o caso do pórtico da Fig. 5-2a, o pórtico é classificado como indeslocável. O fato de ser classificado como indeslocável (classificação esta baseada na obtenção de uma estrutura isostática quando se supõem articulações em todos os nós do pórtico), não garante que ao perder estabilidade por efeito das cargas verticais, o modo de flambagem do pórtico seja caracterizado por grandes rotações dos nós e translações horizontais insignificantes nos andares. Para que isto aconteça é necessário que as rigidezes axiais das diagonais sejam suficientemente grandes, fazendo com que o pórtico classificado como indeslocável perca de fato estabilidade como tal e não como "deslocável". Como será visto no parágrafo 5.3, podem ocorrer casos em que, mesmo sendo grandes as rigidezes axiais das diagonais, a perda de estabilidade do pórtico se dá com translações horizontais significativas nos andares. Com o objetivo de garantir a estabilidade do pórtico como deslocável, GOLDBERG¹⁶, admite hipóteses simplificadoras para o comportamento da estrutura e elabora tabelas para o dimensionamento das diagonais. Em grande número de casos, principalmente quando o pórtico possui poucas prumadas de pilares, resultam para as diagonais áreas das seções bem menores que as dos pilares e vigas no mesmo andar. Para assegurar a eficiência do contraventamento realizado pelas diagonais, o pórtico é construído com 2 diagonais cruzadas em cada andar, admitindo que as mesmas oponham resistência aos esforços de tração e não aos de compressão. Essa disposição das diagonais é mostrada na Fig. 5-2b. Como a finalidade deste trabalho é obter procedimentos para verificação

da instabilidade de pórticos retangulares com ou sem diagonais e também de estruturas tridimensionais de edifícios, será suposto que as características das seções das barras diagonais possam variar entre limites bastante amplos. Neste capítulo são discutidos alguns casos, e os procedimentos que se adaptam aos mesmos para a análise de instabilidade são dados nos parágrafos 5.2 e 5.4 .

Mesmo que o pórtico seja construído como na Fig. 5-2b, com duas diagonais cruzadas em cada andar, na análise de instabilidade com cálculo automático, pode-ser supor a existência de apenas uma diagonal no andar, com rigidez axial que é capaz de opor resistência aos esforços de tração ou de compressão (Fig. 5-2a). Deve-se notar que com cargas verticais concentradas nos nós, são nulas as forças axiais nas diagonais do pórtico indeslocável.

Se para um pórtico classificado como indeslocável, não se sabe se o contraventamento realizado pelas diagonais é suficiente ou não para impedir o pórtico de perder estabilidade como "deslocável", é necessário verificar a instabilidade do mesmo supondo também este último comportamento. Para tanto, serão supostas forças perturbadoras horizontais em todos os andares do pórtico e calculada a matriz de rigidez correspondente, por um dos procedimentos descritos adiante nos parágrafos 5.2 e 5.4 .

Quando no pórtico retangular existirem barras diagonais em alguns andares, mas não em todos (pórtico da Fig. 5-3), a estrutura é ainda deslocável e a análise de instabilidade será realizada supondo também forças perturbadoras horizontais em todos os andares. A matriz de rigidez correspondente a estas ações perturbadoras será calculada por um dos procedimentos descritos nos parágrafos 5.2 e 5.4 .

Então, para os 2 tipos de pórticos retangulares descritos, com barras diagonais em alguns andares ou com diagonais em todos os andares, não se sabendo para estes últimos se o contraventamento feito pelas diagonais é eficiente, deverão ser realizadas duas análises de instabilidade: a primeira supondo o pórtico indeslocável (como no capítulo 3), determinando o parâmetro crítico $W_{C\theta}$; a segunda supondo o pórtico deslocável, procurando encontrar W_{CH} no intervalo:

$$0 < W_{CH} < W_{C\theta} \quad \dots\dots\dots(4-4)$$

Ao usar-se o algoritmo do parágrafo 3.3, se for encontrado $W_{CH} \approx W_{C\theta}$, isto quer dizer que o pórtico perde instabilidade como indeslocável e não como deslocável. Nas duas análises de instabilidade, para cada valor do parâmetro W é determinada a matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras e verificado se a mesma é ou não definida positiva. Se as barras diagonais forem rigidamente ligadas aos nós, além da contribuição de suas rigidezes axiais na matriz de rigidez $[S^P]$ (eq. 2-13) da estrutura, pode-se considerar também a contribuição de suas rigidezes à flexão, embora para o caso frequente, de diagonais esbeltas, as últimas rigidezes sejam pouco significativas. Os esforços axiais nos pilares correspondentes a $W = 1$, são calculados rapidamente, com o equilíbrio de forças verticais nos nós do pórtico. Os esforços axiais correspondentes a qualquer valor de W serão calculados por:

$$A_{M1Ci} = A_{M1i} \times W \quad \dots\dots\dots(3.16)$$

tendo os símbolos o mesmo significado que no parágrafo 3.3 .

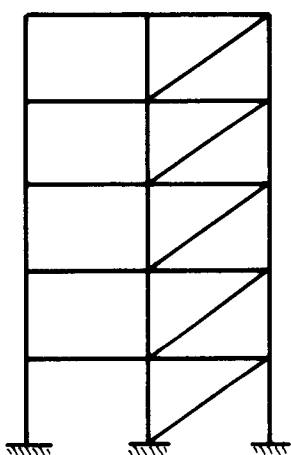


FIG.5-2.a - Pórtico retangular indeslocável com barras diagonais.

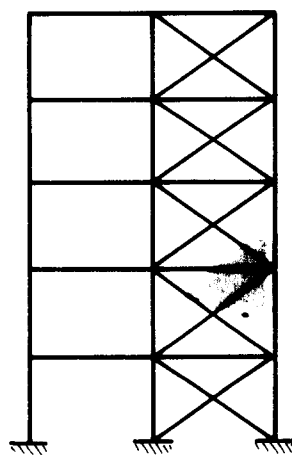


FIG.5-2b - Disposição das diagonais de pequena rigidez axial para assegurar a eficiência do contraventamento.

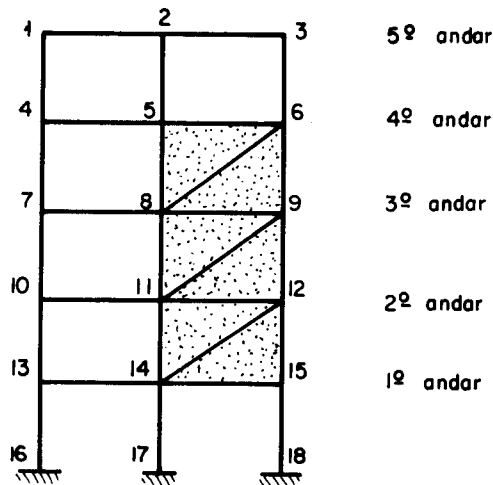


FIG.5-3 - Pórtico retangular deslocável com barras diagonais.

5.2 - 1º Procedimento para análise de instabilidade de pórticos retangulares com barras diagonais

Seja considerado como exemplo o pórtico da Fig. 5-3. Nota-se neste pórtico que a parte formada pelas barras que unem entre si os nós 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14 e 15 constitui um pórtico indeslocável. Se as rigidezes axiais das diagonais forem suficientemente grandes, ao comparar as translações relativas entre os nós desta parte do pórtico com as translações horizontais que podem ocorrer nos outros nós por efeito da flexão dos pilares, nota-se que aquela parte do pórtico tem um comportamento muito próximo ao de treliça isostática rígida. Quanto maiores forem as rigidezes das diagonais, tanto maior a segurança em se afirmar que a parte considerada tem um comportamento "rígido". Então, desprezando a deformação axial das vigas e pilares e supondo que as diagonais sejam suficientemente rígidas axialmente, o modo de flambagem do pórtico da Fig. 5-3 deve ser tal que são iguais os deslocamentos horizontais dos 1º, 2º, 3º e 4º andares (numerados a partir da base do pórtico).

A rigidez da "treliça", ou seja, a resistência que a estrutura faz ao aparecimento de deslocamento horizontal relativo em dois andares consecutivos entre os quais existe barra dia-

gonal, pode ser adequadamente representada na matriz $[S^P]$ (eq. 2-13) (da qual é obtida $[S_{HH}^*]$) somando a contribuição das rigidezes axiais das barras inclinadas nos elementos de $[S_{HH}^P]$ (eq. 2-13) de índices de linha e coluna correspondentes aos andares considerados. Para tanto, quando se proceder o cálculo de $[S^P]$ sugerido no parágrafo 2.2, pode-se tratar a barra inclinada identicamente à barra vertical, com os deslocamentos possíveis numerados como na Fig. 5-4. As barras inclinadas devem ser orientadas de cima para baixo e suas matrizes de rigidez $[S_{MD}]$ serão calculadas também pela eq. (2.15)

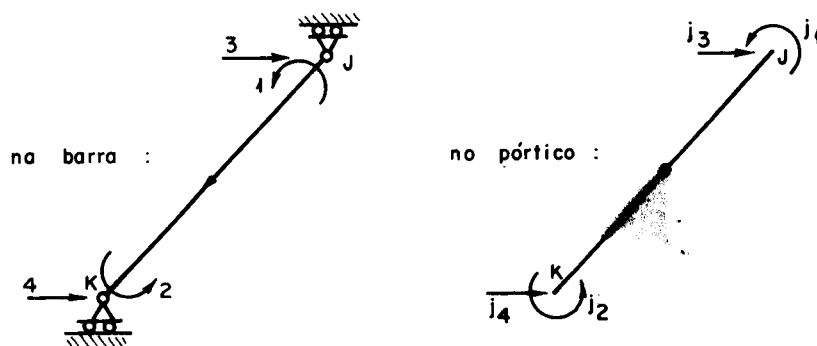


FIG. 5 - 4 - Deslocamentos possíveis nas barras inclinadas e deslocamentos correspondentes no pórtico.

Obtida a matriz $[S^P]$ como no parágrafo 2.2, dando às barras diagonais o mesmo tratamento que se dá às barras verticais, obtém-se em seguida a matriz $[S_{HH}^*]$ (parágrafo 4.1), depois a carga crítica (parágrafo 4.2) e os modos de flambagem (parágrafo 4.3).

Na realidade, a rigidez ao deslocamento relativo entre 2 andares consecutivos onde está uma barra diagonal é menor que a calculada desta maneira, considerando a deformabilidade axial da barra diagonal e desprezando a mesma deformabilidade nos pilares. Observa-se que o erro cometido no cálculo da rigidez ao deslocamento horizontal relativo entre andares, seguindo o procedimento descrito, é tanto maior quanto maiores forem as áreas das seções das diagonais relativamente às áreas das seções dos pilares no mesmo andar (as vigas são supostas de rigidez axial infi-

nita por estarem ligadas às lajes). Pode-se pensar então, que a adoção de um modelo mais rígido para a estrutura leve a valores maiores para a carga crítica e contra a segurança. Porém, tal não acontece em grande número de casos.

Se as rigidezes axiais das diagonais forem bem menores que as dos pilares, o procedimento sugerido levará a bons resultados, sendo justificada a consideração da deformação axial das diagonais e não a dos pilares. Como se viu no parágrafo anterior, este caso é frequente, possuindo as diagonais seções bem menores que a dos pilares no andar. Por isso, nos casos correntes, o procedimento descrito levará a valores bem próximos da carga crítica, podendo suceder, como se viu, casos em que a estrutura classificada como indeslocável, perde estabilidade como deslocável.

Quando as rigidezes axiais das barras diagonais forem elevadas (de ordem de grandeza igual ou maior que a dos pilares do andar), mas por observação da estrutura for possível prever um comportamento "rígido" da "treliça" (Fig. 5-3) até o limite de carregamento crítico, não há inconveniente em adotar o presente procedimento de cálculo de $[S_{HH}^*]$ (eq. 4.5) supondo a estrutura mais rígida do que realmente é. Neste caso o cálculo sugerido levará também a valores muito próximos da carga crítica.

O processo que acaba de ser visto, para análise de pórticos retangulares com barras diagonais, não leva a resultados precisos da carga crítica para qualquer tipo de pórtico. No caso em que as rigidezes axiais das diagonais são elevadas, para se obter bons resultados, deve-se prever que a estrutura perderá estabilidade, com grandes deslocamentos relativos horizontais entre os andares sem diagonais e não entre os que existem diagonais. Em geral essa condição é satisfeita quando o pórtico possui também poucas prumadas de pilares. A limitação de aplicabilidade do processo será melhor entendida após as discussões no parágrafo seguinte.

Nos casos acima descritos, em que se aplica o procedimento dado, sendo o pórtico classificado como deslocável (com barras diagonais em alguns andares), a carga crítica obtida considerando o valor real da rigidez axial das diagonais e adotando rigidez axial infinita para os pilares é ligeiramente superior a que se encontraria considerando o valor verdadeiro da rigidez axial dos pilares. Porém, por maiores que sejam os valores adotados para as rigidezes axiais de todas as barras, a carga crítica não ultrapassará o valor correspondente ao comportamento de "treliça

rígida" da parte do pórtico que contém as diagonais. A existência deste limite superior pode ser mostrada de maneira mais rigorosa, do ponto de vista matemático: se a matriz $[S^P]$ (eq. 2.13) for aplicada uma transformação de deslocamentos em que os novos deslocamentos generalizados são as rotações dos nós e os deslocamentos relativos entre andares, as rigidezes axiais das barras não influirão nos elementos de linhas e colunas correspondentes às rotações dos nós e deslocamentos relativos entre andares onde não existem diagonais. Pode-se então retirar da nova $[S^P]$ uma sub-matriz quadrada $[S_L]$, correspondente a esses últimos deslocamentos, que ao tornar-se singular, o fará independentemente de influência das rigidezes axiais das barras. Quando $[S_L]$ se torna singular, para um certo $W = W_L$, a matriz $[S^P]$ deixa de ser definida positiva. Então W_L é um limite superior para a carga crítica procurada.

Um outro caso em que o procedimento descrito neste parágrafo pode ser adotado na análise de instabilidade é mostrado na Fig. 5-5a. Supõe-se que as diagonais do pórtico representado nes-

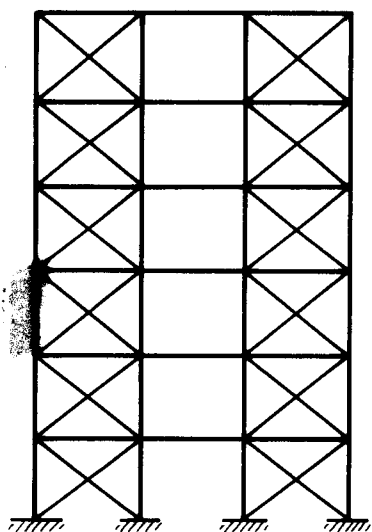


FIG.5-5a - Pórtico retangular contraven-tado com diagonais de seção reduzida.

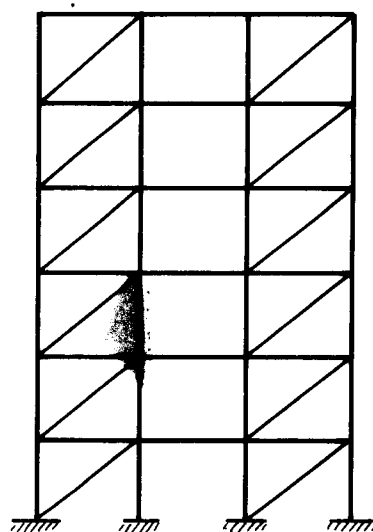


FIG.5-5b - Estrutura admitida para re-presentar o comportamento do pórtico da Fig. 5-5a.

sa figura sejam de seções reduzidas quando comparadas com as seções dos pilares e vigas do mesmo andar.

Admite-se, a favor da segurança, que as diagonais do

pórtico da Fig. 5-5a não resistam a esforços de compressão. Com a proporção existente entre as rigidezes axiais das barras, quando a estrutura se deformar no seu plano, em cada andar serão solicitadas à torção somente as barras diagonais "paralelas" entre si. Suposto o carregamento vertical e concentrado nos nós, resultarão nulas as forças axiais nas diagonais, e as forças de compressão nos pilares podem ser calculadas com simples equações de equilíbrio dos nós. Para o cálculo automático pode-se adotar a estrutura correspondente dada na Fig. 5-5b, com diagonais que resistem a esforços de tração e compressão. Embora o pórtico da Fig. 5-5b seja classificado como de grau de deslocabilidade negativo, devido ao fato de serem nulos os esforços axiais nas diagonais, a análise de instabilidade pode ser realizada para a estrutura suposta indeslocável e suposta deslocável, identicamente ao que se faria para o pórtico da Fig. 5-2a (classificada como indeslocável). Se ao contrário, as rigidezes axiais das diagonais fossem elevadas, a análise de instabilidade do pórtico deveria ser realizada fazendo distinção entre instabilidade local e instabilidade geral do pórtico. Neste trabalho não é feito tal tipo de análise.

A decisão sobre a aplicação ou não do procedimento deste parágrafo à análise de instabilidade de pórticos retangulares com barras diagonais, caberá ao calculista, que ao aplicá-lo diversas vezes ganhará a experiência necessária para o julgamento. Em resumo: o processo pode ser aplicado no caso em que as diagonais são de seções reduzidas (podendo acontecer inclusive, que pórticos classificados como indeslocáveis ou com grau de deslocabilidade negativo venham a perder estabilidade como deslocáveis). O processo pode ser aplicado também nos casos em que as seções das diagonais são de ordem de grandeza igual ou maior que as seções dos pilares do mesmo andar, mas sendo possível assegurar-se de antemão que, quando a estrutura perder estabilidade, os deslocamentos relativos entre os andares que existem diagonais são insignificantes (esta condição é em geral satisfeita nos pórticos com poucas prumadas de pilares). Cada vez que aplicado o processo a pórticos planos com diagonais de seção com ordem de grandeza maior ou igual a dos pilares, a eficiência do mesmo pode ser verificada para o pórtico classificado como indeslocável, constando se foi encontrado $W_{CH} \approx W_{C\theta}$. Para o pórtico com diagonais em apenas alguns andares (classificado como deslocável) os modos de flambagem calculados deverão mostrar deslocamentos horizontais relativos insignificantes, nos andares entre os quais existe

barra diagonal.

5.3 - Discussão dos procedimentos de análise de instabilidade descritos no parágrafo 5.2 e nos capítulos anteriores

Como se conclue do exposto no parágrafo 5.2 e nos capítulos anteriores, a análise de instabilidade de pórticos planos (com ou sem diagonais) fica na realidade completada se são realizados os dois tipos de análise: do pórtico suposto indeslocável (capítulo 3), e do pórtico suposto deslocável (capítulo 4 e parágrafo 5.2) determinando-se nesta última o parâmetro crítico W_{CH} no intervalo

$$0 < W_{CH} < W_{C\theta} \dots\dots\dots(4.4)$$

A existência das barras diagonais pouco altera o procedimento descrito no capítulo 3 para determinação do parâmetro crítico $W_{C\theta}$. Às barras diagonais pode ser dado o mesmo tratamento que se dá às outras barras, tendo apenas o cuidado de orientá-las de cima para baixo para calcular a banda superior de $[S_{\theta\theta}^P]$ (eq. 3.1) usando as equações do parágrafo 2.2. A largura da banda superior de $[S_{\theta\theta}^P]$ será alterada para $\ell_{bS\theta} = \min\{n_p + 2, n_a \cdot n_p\}$.

A determinação de W_{CH} , como sugerida no parágrafo 5.2, dando às barras diagonais o mesmo tratamento que se dá às barras verticais na obtenção de $[S_{HH}^*]$ (eqs. 4.5 e 4.11) (o que equivale a considerar as deformações axiais das diagonais e desprezar as mesmas deformações nos pilares) embora possa ser adotada em grande número de casos, pode em outros, superestimar a rigidez da estrutura e levar a valores da carga crítica que serão maiores que os obtidos com o cálculo, a primeira vista mais laborioso, em que se consideram as deformações axiais de todas as barras. É o caso, por exemplo de pórticos de muitas prumadas de pilares e apenas uma diagonal em cada andar, com rigidez axial das diagonais de ordem de grandeza igual ou maior que as rigidezes axiais dos pilares no mesmo andar. Este caso é mostrado na Fig. 5-6.

Sejam as cargas no pórtico da Fig. 5-6 (classificado como indeslocável) verticais e concentradas nos nós.

Procurar-se-á mostrar que mesmo sendo as diagonais de rigidez elevada, o pórtico da Fig. 5-6 pode possuir parâmetro crítico W_{CH} correspondente à condição deslocável, menor que o parâmetro

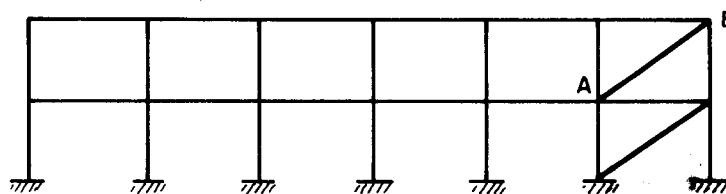


FIG. 5-6 - Caso de pórtico retangular em que a análise de instabilidade do parágrafo 5-2 pode levar a valores errôneos da carga crítica.

tro crítico W_{C0} da condição indeslocável (isto quer dizer que o pórtico perderá estabilidade com deslocamentos horizontais significativos nos andares).

Se o pórtico da Fig. 5-6 possuir vigas com rigidez à flexão bem maiores que as rigidezes à flexão dos pilares (isto acontece em geral para pórticos de pequena altura) os pilares terão comportamento próximo ao de barras com rotações impedidas nas extremidades. Então, teoricamente, a análise de instabilidade poderia ser levada a valores do parâmetro W que produzem esforços de compressão nos pilares de valores até $4\pi^2 EI_z / L^2$ (em vários exemplos estudados a instabilidade foi atingida com esforços axiais próximos de $3\pi^2 EI_z / L^2$)

A resistência que um pilar (com rotações impedidas nas extremidades) faz ao deslocamento horizontal relativo unitário entre os andares em que se situa é:

$$S_{\text{pilar}} = \frac{2s(1+c)}{m} \frac{E I_z}{L^3} \dots\dots\dots(5.1)$$

(O gráfico de variação da função $2s(1+c)/m$ pode ser visto na Fig. 3-3). A fim de efetuar estimativas, admite-se o pilar carregado com esforço axial de até $\approx 3\pi^2 EI_z / L^2$. Na Fig. 3-3, observa-se que a resistência (negativa) do pilar ao deslocamento horizontal relativo unitário será:

$$(S_{\text{pilar}})_{\text{max}} \approx -25,35 \frac{E(I_z)_{\text{pilar}}}{h^3} \dots\dots\dots(5.2)$$

onde h é a altura do andar.

A resistência oferecida pela diagonal será:

$$S_{diag} = \frac{E(A_x)_{diag}}{h} \text{sen}\alpha \cdot \cos^2\alpha \dots\dots\dots(5.3)$$

sendo α o ângulo que o eixo da barra diagonal faz com a horizontal.

Supondo vão de 5,0m e pé direito de 3,0m por exemplo, será:

$$S_{diag} \approx 0,38 \frac{E(A_x)_{diag}}{h} \dots\dots\dots(5.4)$$

A relação entre as resistências oferecidas pela diagonal e pelo pilar vale:

$$k = \frac{-S_{diag}}{(S_{pilar})_{max}} = \frac{0,38}{25,35} \frac{(A_x)_{diag} \cdot h^2}{(I_z)_{pilar}} \approx 0,015 \frac{(A_x)_{diag} \cdot h^2}{(I_z)_{pilar}} \dots\dots(5.5)$$

A relação $(A_x)_{diag}/(I_z)_{pilar}$ depende dos perfis utilizados para o pilar e para a diagonal. Para se ter idéia da variação de k , serão supostos perfis iguais para as duas barras. O gráfico da Fig. 5-7 dá diversos valores de k em função do momento de inércia I_z de perfis I .

Embora o gráfico da Fig. 5-7 seja traçado para perfis I que são mais utilizados para vigas, o mesmo dá idéia da relação entre a resistência positiva que a diagonal faz ao deslocamento horizontal unitário entre andares e a resistência negativa que faz o pilar. Nota-se na Fig. 5-7 que a resistência da diagonal torna-se menos significativa à medida que cresce o momento de inércia do perfil do pilar. pode-se compreender então que aumentando-se o número de pilares, a resistência negativa dos mesmos, somada, poderá ultrapassar a resistência positiva que a diagonal faz ao deslocamento horizontal relativo unitário entre andares. Quando isto acontecer, o pórtico da Fig. 5-6 classificado como in deslocável perderá estabilidade com deslocamentos horizontais de ordem elevada nos andares. Se for aplicado neste caso o procedimento de análise do parágrafo 5.2 para determinação de W_{CH} , a rigidez do pórtico aos deslocamentos horizontais relativos será super estimada, podendo ser encontrado um valor da carga crítica que é

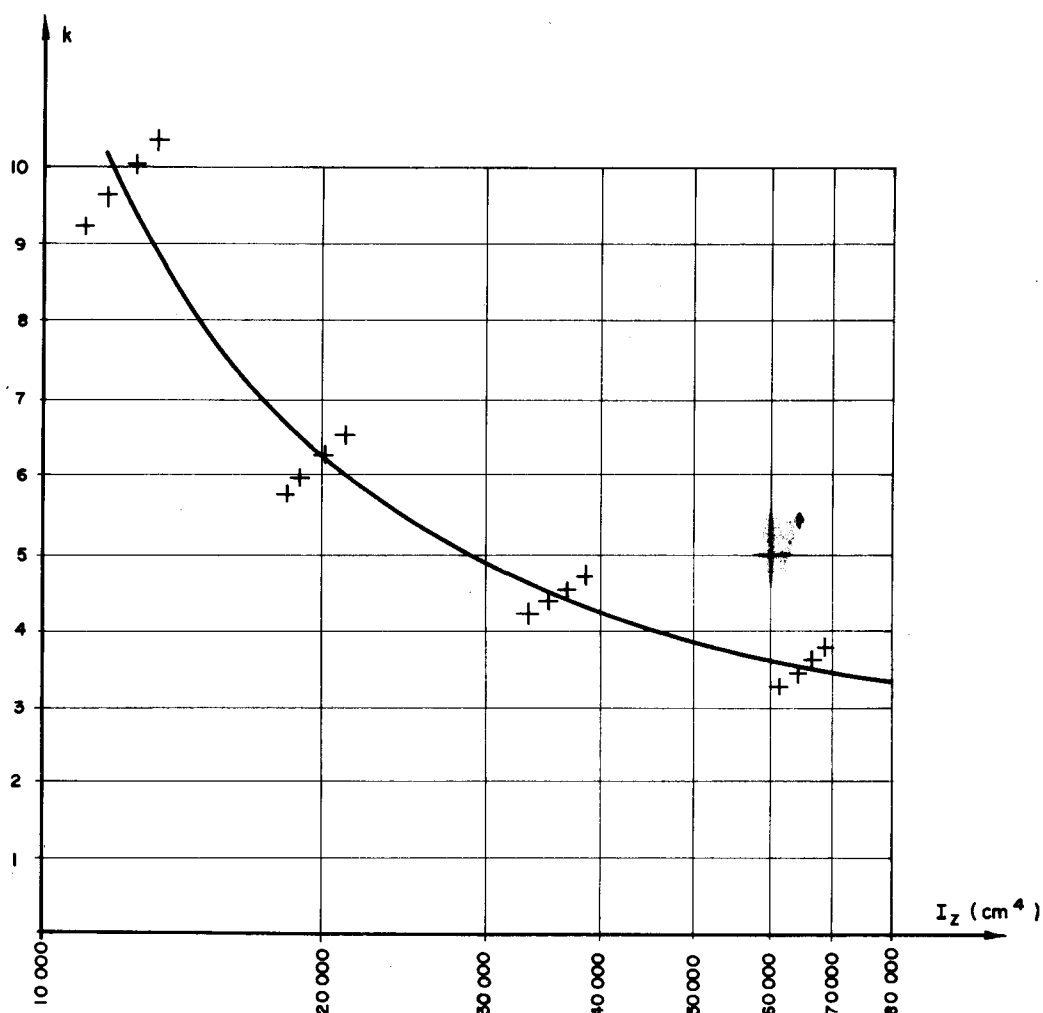


FIG.5-7 - Valores de $k = 0,015 \cdot \frac{A_x \cdot h^2}{I_z}$ para diversos perfis I ($h = 300$ cm)

contra a segurança. Para se ter idéia do erro cometido, considere-se a estrutura da Fig. 5-8. Nesta estrutura bastante simples,

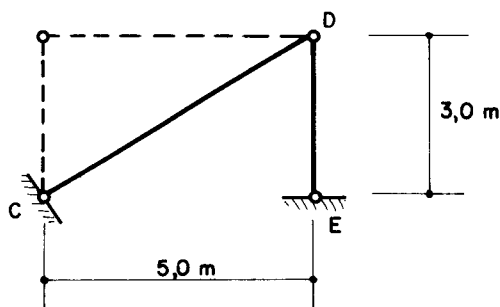


FIG.5-8- Exemplo simples para estimar o erro cometido na rigidez do andar ao deslocamento horizontal, quando se considera o pilar de rigidez infinita.

a rigidez ao deslocamento horizontal encontrada para o nó D, considerando o pilar de rigidez axial infinita, é 12,5% maior que a rigidez encontrada quando se admite seções iguais para o pilar e para a diagonal. Sem dúvida, sendo possível, convém evitar um erro dessa ordem de grandeza e contra a segurança, na determinação da carga crítica do pórtico com barras diagonais.

Se o pórtico da Fig. 5-6 for classificado como deslocável (retirando-se por exemplo a barra AB) e projetado economicamente (todos os pilares com aproximadamente a mesma relação $\rho = P/P_E$, sendo P o esforço de compressão e P_E a carga de EULER), pode-se prever que a perda de estabilidade se dará para um valor do parâmetro crítico W tal que $\rho < 1$. Aparecerão neste caso deslocamentos horizontais consideráveis entre os andares sem diagonal e deslocamentos horizontais insignificantes entre os andares com diagonal. Neste caso, o procedimento do parágrafo 5.2 levará a bons resultados para o valor do parâmetro crítico W_{CH} .

Quando porém o mesmo pórtico deslocável for parte ou sub-estrutura de um sistema tridimensional mais complexo, com certa rigidez horizontal que impede os deslocamentos horizontais relativos entre os andares sem diagonal, a perda de estabilidade do pórtico poderá ser tal que aparecem grandes deslocamentos horizontais entre os andares onde existe diagonal. O procedimento do parágrafo 5.2, para determinação de $[S_{HH}^*]$ poderá então superestimar a rigidez da estrutura conectada ao sistema tridimensional.

Para os tipos de pórticos descritos neste parágrafo, será necessário, na análise de instabilidade, considerar as deformações axiais nos pilares, como será visto no parágrafo seguinte.

5.4 - 2º Procedimento para análise de instabilidade de pórticos retangulares com barras diagonais

Considere-se, para fixar idéias o pórtico da Fig. 5-9, no qual desprezam-se as deformações axiais das vigas mas não as dos pilares e barras diagonais. Suponha-se de início os deslocamentos do pórtico numerados na seguinte ordem: em primeiro as rotações dos nós, depois os deslocamentos horizontais nos andares e em seguida os deslocamentos verticais. Essa numeração é mostrada na Fig. 5-9 .

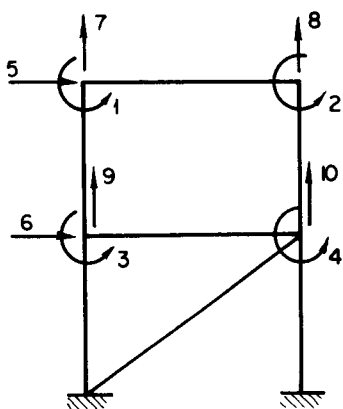


FIG.5-9 - Pórtico retangular deslocável com barras diagonais, no qual são consideradas as deformações axiais dos pilares.

Chamando $\{A\}$ as cargas concentradas nos nós, $\{D\}$ os deslocamentos e $[S]$ a correspondente matriz de rigidez, ter-se-á:

$$\{A\} = [S] \{D\} \dots\dots\dots(5.6)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \{A_{\theta}\} \\ \{A_H\} \\ \{A_V\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{\theta\theta}] & [S_{\theta H}] & [S_{\theta V}] \\ [S_{H\theta}] & [S_{HH}] & [S_{HV}] \\ [S_{V\theta}] & [S_{VH}] & [S_{VV}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_{\theta}\} \\ \{D_H\} \\ \{D_V\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(5.7)$$

onde os índices θ , H e V referem-se às rotações, deslocamentos horizontais e deslocamentos verticais.

Para a possibilidade de um cálculo simplificado, serão desprezados os efeitos dos deslocamentos verticais dos nó sobre os momentos nas vigas e diagonais. Isto equivale a tomar $[S_{\theta V}] = [S_{V\theta}] = 0$ na eq. (5.7). Com essa hipótese, pode-se calcular a matriz de rigidez reduzida correspondente aos deslocamentos horizontais:

$$[S_{HH}^{**}] = [S_{HH}] - [S_{H\theta}] [S_{\theta\theta}]^{-1} [S_{\theta H}] - [S_{HV}] [S_{VV}]^{-1} [S_{VH}] \quad \dots(5.8)$$

A matriz $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 5.8) será adotada como matriz de rigidez correspondente às ações perturbadoras. O seu cálculo fica bastante simplificado com as considerações a seguir.

Se no cálculo de $[S]$ (eqs. 5.6 e 5.7) for considerada apenas a rigidez à flexão das barras e desprezada a rigidez axial das mesmas, $[S]$ terá a forma:

$$[S]_{I_z} = \begin{bmatrix} [S_{\theta\theta}]_{I_z} & [S_{\theta H}]_{I_z} & 0 \\ [S_{H\theta}]_{I_z} & [S_{HH}]_{I_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5.9)$$

onde o índice I_z indica que somente as rigidezes à flexão das barras são consideradas, isto é, as matrizes de rigidez $[S_{MD}]$ das barras horizontais, verticais e inclinadas, com a numeração de deslocamentos das Figs. 2-3a, 2-3b e 5-4, serão dadas por:

$$[S_{MD}] = \begin{bmatrix} \frac{sEI_z}{L} & \frac{scEI_z}{L} & \frac{-s(1+c)EI_z}{L^2} C_y & \frac{s(1+c)EI_z}{L^2} C_y \\ & \frac{sEI_z}{L} & \frac{-s(1+c)EI_z}{L^2} C_y & \frac{s(1+c)EI_z}{L^2} C_y \\ & & \frac{2s(1+c)EI_z}{m L^3} C_y^2 & \frac{-2s(1+c)EI_z}{m L^3} C_y^2 \\ \text{simétrico} & & & \frac{2s(1+c)EI_z}{m L^3} C_y^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5.10)$$

onde $s, c, m, L, A_x, I_z, C_x$ e C_y tem os mesmos significados que nos parágrafos 2.2 e 3.2 .

Se for considerado, no cálculo de $[S]$, somente a rigi-

dez axial das barras e desprezada a rigidez à flexão, $[S]$ terá a forma:

$$[S]_{A_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [S_{HH}]_{A_x} & [S_{HV}]_{A_x} \\ 0 & [S_{VH}]_{A_x} & [S_{VV}]_{A_x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5.11)$$

onde o índice A_x indica que somente as rigidezes axiais das barras são consideradas, isto é, as matrizes de rigidez $[S_{MD}]$ das barras, com a numeração de deslocamentos da Fig. 5-10 são dadas por:

$$[S_{MD}] = \frac{E A_x}{L} \begin{bmatrix} C_y^2 & -C_y^2 & C_x C_y & -C_x C_y \\ -C_y^2 & C_y^2 & -C_x C_y & C_x C_y \\ C_x C_y & -C_x C_y & C_x^2 & -C_x^2 \\ -C_x C_y & C_x C_y & -C_x^2 & C_x^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5.12)$$

onde os símbolos tem o mesmo significado que na eq. (5.10).

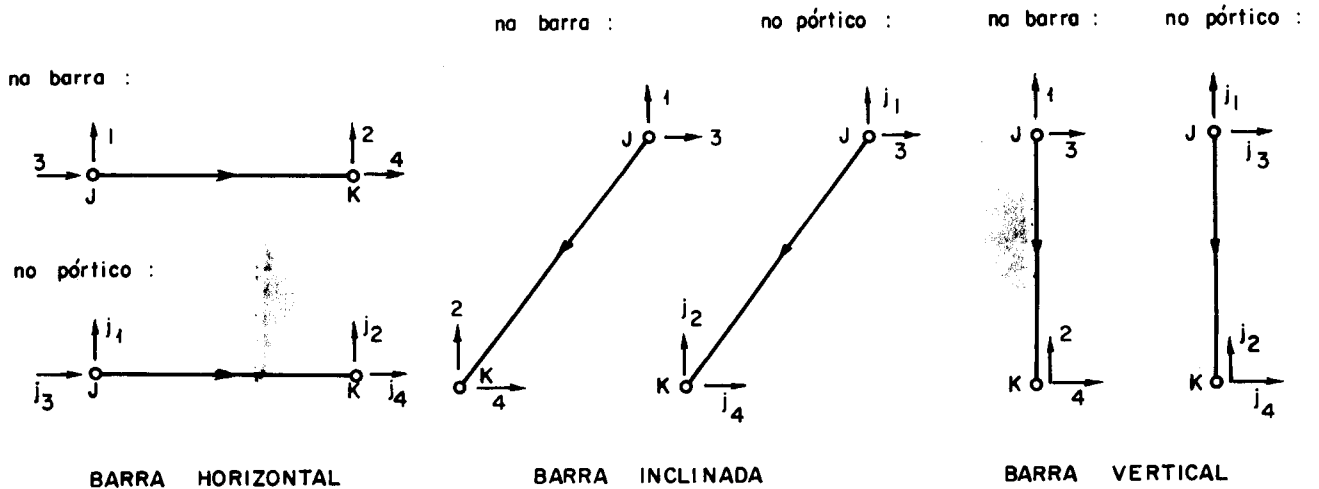


FIG.5-10 - Deslocamentos possíveis nas barras e no pórtico quando são consideradas apenas as deformações axiais das barras.

Das eqs. (5.8), (5.9) e (5.11) conclui-se que a matriz reduzida $[S_{HH}^{**}]$ pode ser escrita:

$$[S_{HH}^{**}] = [S_{HH}^*]_{I_z} + [S_{HH}^*]_{A_x} \dots\dots\dots(5.13)$$

onde

$$[S_{HH}^*]_{I_z} = [S_{HH}]_{I_z} - [S_{H\theta}]_{I_z} [S_{\theta\theta}]_{I_z}^{-1} [S_{\theta H}]_{I_z} \dots\dots(5.14)$$

e

$$[S_{HH}^*]_{A_x} = [S_{HH}]_{A_x} - [S_{HV}]_{A_x} [S_{VV}]_{A_x}^{-1} [S_{VH}]_{A_x} \dots\dots(5.15)$$

Quando se adota a hipótese de indeformabilidade axial e o pórtico não possui diagonais, a rigidez axial dos pilares não influi na matriz de rigidez reduzida correspondente aos deslocamentos horizontais do pórtico. Portanto $[S_{HH}^*]_{I_z}$ é uma matriz de rigidez correspondente ao pórtico com pilares de rigidez axial infinita e diagonais de rigidez axial nula. Na eq. (5.14) a matriz $[S_{\theta\theta}]_{I_z}^{-1}$ existe, pois corresponde às ações perturbadoras do pórtico indeslocável, e a instabilidade é sempre procurada para carregamentos abaixo da carga crítica do pórtico indeslocável.

Na eq. (5.15), $[S_{HH}^*]_{A_x}$ é a matriz de rigidez reduzida de uma treliça plana com 2 deslocamentos significativos por nó. Também existe sempre a matriz $[S_{VV}]_{A_x}^{-1}$, pois as rigidezes axiais não são afetadas pelos esforços axiais nas barras, e mesmo que não existam barras diagonais, a treliça é sempre capaz de equilibrar as cargas verticais concentrada nos nós. (Supõe-se pórticos sem ausência de pilares nas prumadas).

O cálculo da banda superior de $[S_{HH}^*]_{I_z}$ é realizado calculando-se a banda superior de $[S^P]$ (eq. 2-13) como no parágrafo 2.2, mas usando a eq. (5.10) em lugar da eq. (2.15). Em seguida procede-se à eliminação parcial de Gauss (parágrafo 4.1, eqs. (3.30), (3.32), (3.33), (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) ou as correspondentes para o armazenamento em matriz retangular).

O cálculo da banda superior de $[S_{HH}^*]_{A_x}$ ficará facilitado se para o pórtico forem numerados primeiramente os deslocamentos verticais dos nós e em seguida os deslocamentos horizontais dos an

dares, com as barras orientadas de cima para baixo (Fig. 5-9). Com essa numeração, poderão ser realizados os mesmos cálculos com que se obtêm a banda superior de $[S_{HH}^*]_{I_z}$, calculando-se a banda superior de uma $[S^P]$ (da mesma ordem da matriz da eq. (2.13) e usando-se a eliminação parcial de GAUSS (parágrafo 4.1). Não há necessidade de aumentar a área de armazenamento na memória rápida do computador. A largura da banda superior de $[S_{VV}]_{A_x}$ continua sendo $\ell_{bsV} = \ell_{bs\theta} = \min\{n_p + 2, n_a \cdot n_p\}$. Pequenas alterações deverão ser introduzidas no programa de cálculo de $[S^P]$ (parágrafo 2.2).

Em lugar da eq. (2.15) usa-se a eq. (5.12). Com os deslocamentos numerados como nas Figs. 5-9 e 5-10, continuarão válidas as expressões (2.17) e (2.18). Em lugar das eqs. (2.19) e (2.20), ter-se-á:

a) Se $j_3 < j_4$

A barra \bar{e} vertical ou inclinada. As expressões para contribuição da barra na banda superior da matriz $[S^P]$ (para treliça) serão:

$$\begin{aligned}
 S_{j_1, j_1}^P &= S_{MD11} + \text{contribuição das outras barras} \\
 S_{j_1, j_2}^P &= -S_{MD11} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_1, j_3}^P &= S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_1, j_4}^P &= -S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_2, j_2}^P &= S_{MD11} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_2, j_3}^P &= -S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \dots (5.16) \\
 S_{j_2, j_4}^P &= S_{MD13} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_3, j_3}^P &= S_{MD33} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_3, j_4}^P &= -S_{MD33} + \quad " \quad " \quad " \quad " \\
 S_{j_4, j_4}^P &= S_{MD33} + \quad " \quad " \quad " \quad "
 \end{aligned}$$

Apenas 3 elementos da matriz $[S_{MD}]$ (eq. 5.12) são independentes dos demais. Se $j_4 > n_a \cdot n_p + n_a$, a extremidade fim da barra é um apoio e devem ser calculadas apenas as contribuições da barra nos elementos S_{j_1, j_1}^P , S_{j_1, j_3}^P e S_{j_3, j_3}^P .

b) Se $j_3 = j_4$

A barra é horizontal e não contribui na matriz de rigidez reduzida da treliça, correspondente aos deslocamentos horizontais nos andares.

Obtida a matriz $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 5.13), a análise de instabilidade é realizada da mesma maneira como nos parágrafos 4.2 e 4.3, tomando-se $[S_{HH}^{**}]$ em lugar de $[S_{HH}^*]$ (eq. 4.5).

Como a variação do parâmetro W não influe nas rigidezes axiais das barras, a matriz $[S_{HH}^*]_{Ax}$ (eq. 5.15) pode ser calculada apenas uma vez e armazenada na memória auxiliar do computador, sendo chamada cada vez que necessário, quando se executa o algoritmo do parágrafo 3.3. Em cada ciclo do algoritmo, o cálculo de $[S_{HH}^*]$ (eq. 5.14) pode ser efetuado sobrepondo-se aos elementos de ${}^{Iz}[S_{HH}^*]_{Ax}$, os elementos correspondentes de $[S]_{Iz}$ (eq. 5.9), procedendo-se em seguida à eliminação parcial de GAUSS. O resultado após essa operação será a matriz $[S_{HH}^{**}]$.

Deve-se notar, que o método descrito neste parágrafo para análise de instabilidade de pórticos retangulares deslocáveis com barras diagonais, é mais preciso que o do parágrafo 5.2, tornando desnecessário um primeiro julgamento do calculista para a sua aplicação. Tem também como vantagem, não necessitar maior área de memória rápida e crescer de pouco o trabalho numérico em toda a análise, pois a matriz $[S_{HH}^*]_{Ax}$ (eq. 5.15) é calculada apenas uma vez para o pórtico.

5.5 - Resultados obtidos com a aplicação dos procedimentos dos parágrafos 5.2 e 5.4 na análise de instabilidade de pórticos retangulares com barras diagonais

Em todos os exemplos apresentados neste parágrafo, o parâmetro crítico e o modo de flambagem foram determinados usando-se o algoritmo do parágrafo 3.3, com 10 ciclos de iteração.

a) Pórtico da Fig. 5-11a:

Na Fig. 5-11a, os valores escritos sobre as barras são os momentos de inércia da seção das mesmas em "inch⁴". Adotou-se para todas as barras, área da seção de 10 "inch²". Para $W = 1$ vale $P = 0,50t$.

Para este pórtico, sem barras diagonais, as análises segundo os procedimentos do parágrafo 5.2 ou 5.4 se reduzem ao mesmo cálculo. De fato, foram encontrados os mesmos valores para o parâmetro crítico, ou seja $W_{CH} = 285,848$ nos dois cálculos. Os deslocamentos dos modos de flambagem também coincidem até a 10^a casa decimal. O modo de flambagem encontrado aparece na Fig. 5-11b. O mesmo pórtico foi analisado por McMINN²⁴ que encontrou $W_{CH} = 280$.

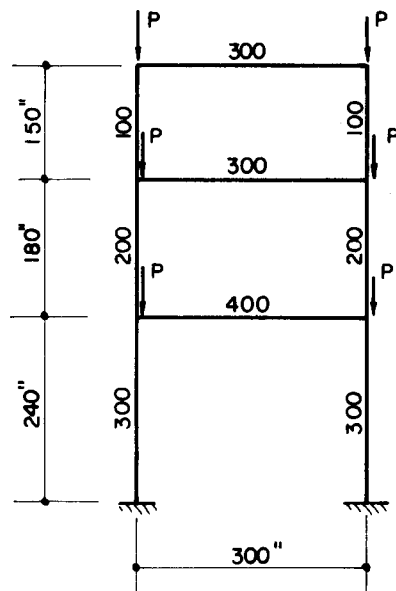


FIG.5-11a - Pórtico deslocável de 3 andares, sem barras diagonais.

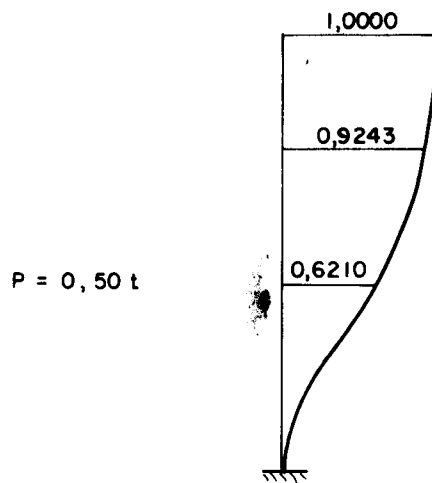


FIG.5-11b - Modo de flambagem encontrado para o pórtico da Fig.5-11a .

b) Pórtico da Fig. 5-12a:

Nessa figura, os valores escritos sobre as barras são os momentos de inércia em "inch⁴". Adotou-se área de seção de 10 inch² para todas as barras. Para $W = 1$ vale $P = 1,0t$. Retirando-se as barras diagonais no pórtico da Fig. 5-12a, encontrou-se parâmetro crítico $W_{CH} = 216,706$. O mesmo valor também foi encontrado, com os dois procedimentos retirando-se as 2 barras diagonais do pórtico e levando-as para os 2 andares superiores.

No exemplo presente, os dois procedimentos (parágrafo 5.2 e 5.4) levaram ao mesmo valor $W_{CH} = 453,512$, com os modos de flambagem das Figs. 5-12b e 5-12c.

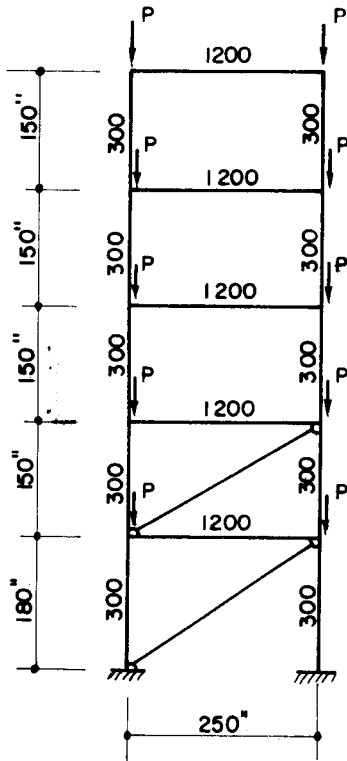


FIG.5-12a - Pórtico retangular deslocável com barras diagonais nos 2 andares inferiores.

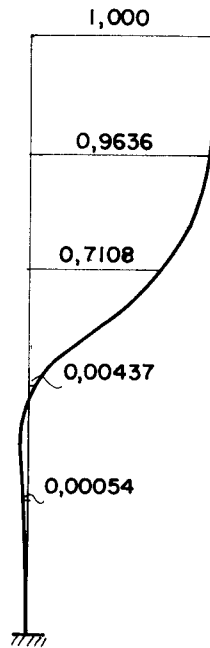


FIG.5-12b - Modo de flambagem encontrado com o procedimento do parágrafo 5-2.

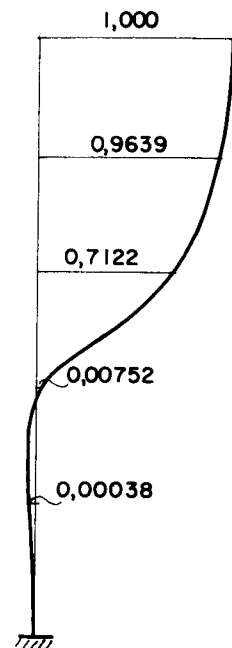


FIG.5-12c - Modo de flambagem encontrado com o procedimento do parágrafo 5-4.

Nota-se que o modo de flambagem encontrado, usando-se o procedimento do parágrafo 5.2, possui deslocamentos horizontais relativos insignificantes entre os andares com diagonais. Este fato justifica a igualdade do parâmetro crítico encontrado nos 2 cálculos diferentes.

c) Pórtico da Fig. 5-13a:

O pórtico da Fig. 5-13a, classificado como indeslocável, foi obtido do pórtico do exemplo anterior, colocando diagonais em todos os andares. As vigas e pilares possuem área da seção de 10 "inch²", enquanto a área das seções das diagonais foi reduzida para 0,80 "inch²". O pórtico perde estabilidade como "deslocável". Com o procedimento do parágrafo 5.2 foi encontrado $W_{CH} = 561,683$ e com o do parágrafo 5.4 encontrado $W_{CH} = 555,836$. Para o pórtico

suposto indeslocável encontrou-se $W_{c\theta} = 748,423$. Os modos de flambagem encontrados com os dois procedimentos estão nas Figs. 5-13b e 5-13c.

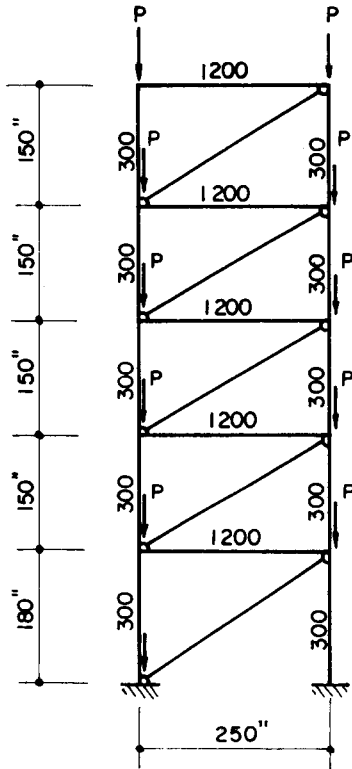


FIG.5-13a- Pórtico retangular indeslocável que perde estabilidade como desloável.

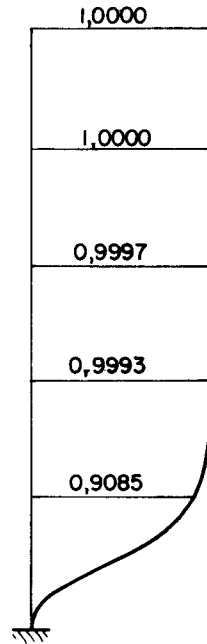


FIG.5-13b- Modo de flambagem encontrado com o procedimento do parágrafo 5-2.

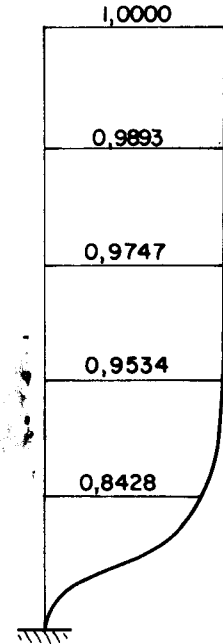


FIG.5-13c- Modo de flambagem encontrado com o procedimento do parágrafo 5-4.

Justifica-se a proximidade dos valores encontrados com os 2 procedimentos, por serem as áreas das seções das diagonais bem menores que as áreas das seções dos pilares do pórtico.

Para o mesmo pórtico da Fig. 5-13a, adotando-se 1,25 inch² para a área das seções das diagonais, obteve-se com o procedimento do parágrafo 5.2, $W_{CH} = 742,942$ ($\approx W_{c\theta} = 748,423$). Adotando-se 1,00 inch² para área das mesmas seções obteve-se $W_{CH} = 643,542$. Para que o contraventamento realizado pelas diagonais seja eficiente, pode-se adotar área das seções das diagonais $\approx 1,30$ inch².

Os procedimentos dos parágrafos 5.2 e 5.4 foram também aplicados aos pórticos planos das Figs. 5.14, 5.15 e 5.16, levando aos valores do parâmetro crítico W_{CH} dados na tabela II.

No pórtico da Fig. 5-14, foi adotada área de 10 inch²

para todas as barras. Os valores sobre as barras são os momentos de inércia das seções. Para $W = 1$ valem $P = 14,65t$ e $V = 43,40t$.

No pórtico da Fig. 5-15, procurou-se atribuir às áreas das seções, valores aproximadamente iguais aos que na prática, correspondem aos momentos de inércia das seções. Na Fig. 5-15, os valores escritos superiormente às barras são os momentos de inércia e os escritos inferiormente são as áreas das seções. Para $W = 1$, vale $P = 1,0t$.

O pórtico da Fig. 5-16, com muitas prumadas de pilares, procura evidenciar o caso em que o procedimento do parágrafo 5.2 leva a valores maiores para o parâmetro crítico e contra a segurança. Na Fig. 5-16, todas as vigas tem momento de inércia da seção $I = 1200 \text{ inch}^4$. Os pilares e barras diagonais possuem $I = 300 \text{ inch}^4$. As vigas e pilares possuem área da seção $A = 10 \text{ inch}^2$. As diagonais tem $A = 8 \text{ inch}^2$. Para $W = 1$ vale $P = 1,0t$.

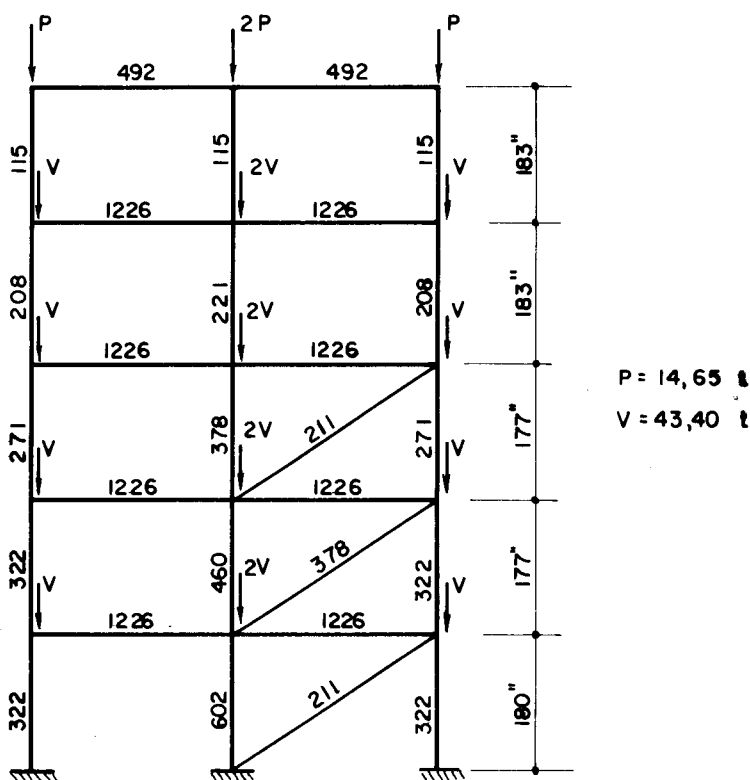


FIG. 5-14 - Pórtico deslocável com barras diagonais cujo parâmetro crítico W_{CH} é determinado pelos dois procedimentos.

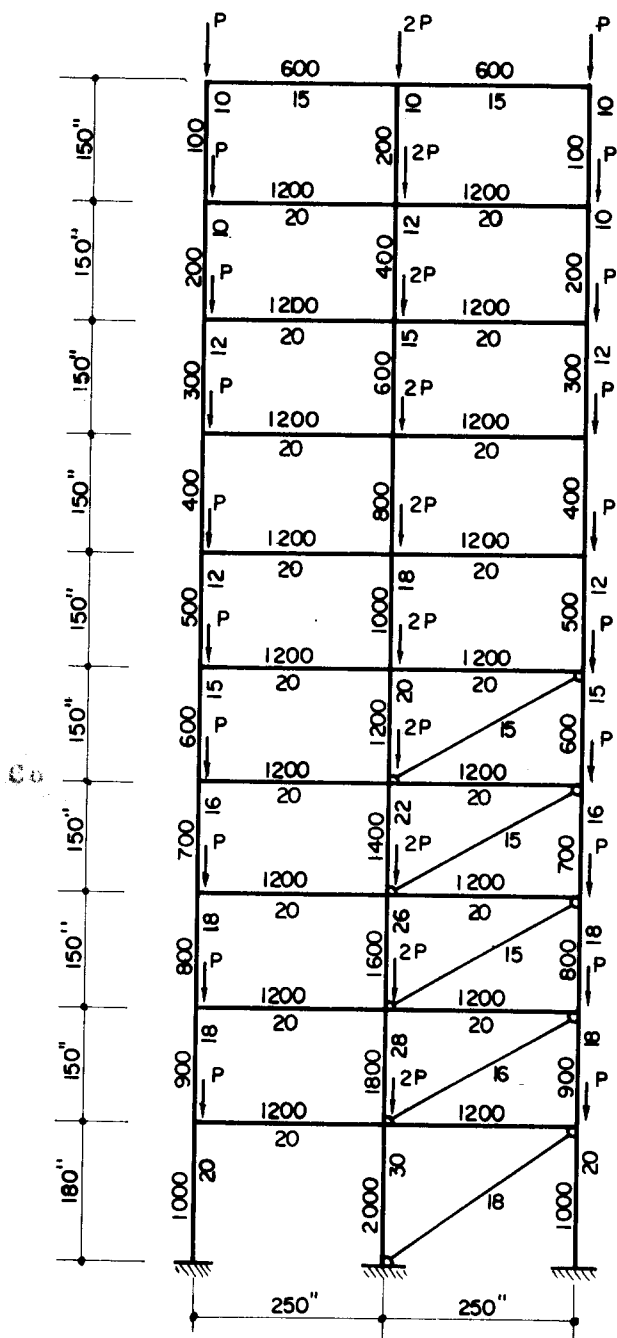


FIG.5-15- Pórtico deslocável com barras diagonais cujo parâmetro crítico W_{CH} é determinado.

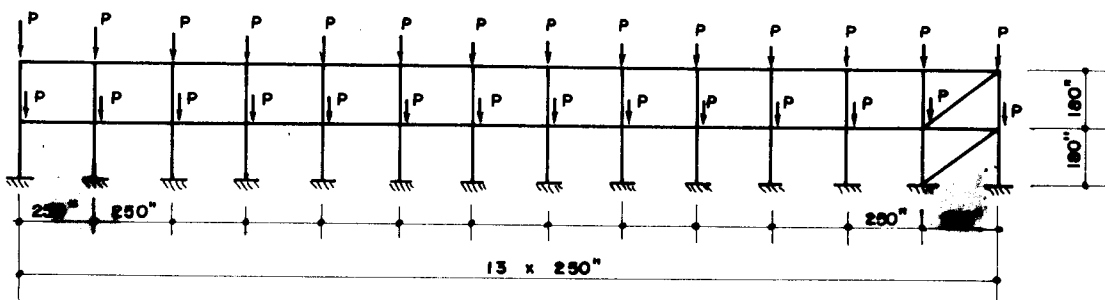


FIG.5-16 - Pórtico indeslocável que perde estabilidade como deslocável, cujo parâmetro crítico W_{CH} é determinado.

TABELA II

Pórtico plano	Parâmetro crítico com o procedimento do parágrafo 5.2	Parâmetro crítico com o procedimento do parágrafo 5.4
Fig. 5-11a	285,848	285,848
Fig. 5-12a	453,512	453,512
Fig. 5-13a	561,683	555,836
Fig. 5-14	11,819	11,819
Fig. 5-15	351,519	350,702
Fig. 5-16	1763,554	1594,840

Conforme foi previsto, apenas o pórtico da Fig. 5-16 a apresenta uma diferença maior ($\approx 10,5\%$) entre os parâmetros críticos calculados pelos 2 procedimentos.

Convém notar que o erro cometido, usando-se o procedimento do parágrafo 5.2, é de mesmo sinal que o erro que se comete ao desprezar as deformações axiais dos pilares, comparadas com as deformações devidas à flexão nas vigas e barras diagonais.

Como o procedimento do parágrafo 5.4 acresce de muito pouco o trabalho numérico, prefere-se usar esse procedimento em lugar daquele do parágrafo 5.2 .

Como o objetivo deste trabalho é analisar a instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios, deve-se notar que o aparecimento de grande número de pilares, pode ocorrer na periferia do edifício, determinando a flambagem do mesmo por torção em torno de um eixo vertical.

6. INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS DE EDIFÍCIOS

6.1 - Introdução

Como foi visto nos capítulos 4 e 5, a adoção das forças horizontais como ações perturbadoras do equilíbrio de pórticos deslocáveis, leva a valores da carga crítica mais precisos que os obtidos com a adoção de um pórtico equivalente. Além disso, a mesma hipótese permite a análise de instabilidade de outra classe de estruturas ou sejam, os pórticos retangulares com barras diagonais.

O uso de forças horizontais como ações perturbadoras leva à obtenção da matriz $[S_{HH}^*]$ (eq. 4.5) ou da matriz $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 5.8) que uma vez obtida (como nos parágrafos 4.1 e 5.4) possibilitam a análise de instabilidade de estruturas tridimensionais, das quais os pórticos são apenas sub-estruturas.

De acordo com hipóteses já bastante divulgadas^{35,36}, em grande número de casos, a estrutura tridimensional de um edifício pode ser assimilada a um conjunto de painéis verticais (no caso os pórticos retangulares) ligados entre si pelas lajes, para as quais se supõe um comportamento de diafragma rígido horizontal (de rigidez infinita no plano da laje e rigidez nula transversalmente). No caso em que se despreza a interação vertical de painéis que se interceptam, as matrizes de rigidez dos painéis, pensados como sub-estruturas do sistema tridimensional, são justamente uma das matrizes $[S_{HH}^*]$ (eq. 4.5) ou $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 5.8).

Como visto (parágrafo 5.2), a primeira destas matrizes descreve o comportamento do pórtico quando no mesmo não existe barra diagonal e a segunda (parágrafo 5.4) quando o pórtico deslocável ou indeslocável possui as diagonais.

Na análise de instabilidade do sistema tridimensional, mesmo que um pórtico seja indeslocável e trabalhando isoladamente perca estabilidade como tal, a matriz de rigidez que melhor descreve seu comportamento, antes de perder estabilidade e trabalhando em conjunto com os outros pórticos, trocando forças horizontais com a laje, é a matriz $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 5.8). Isto porque a outra matriz $([S_{HH}^*])$, superestima a rigidez horizontal do pórtico, e como existem diversos pilares no sistema (pertencentes aos outros painéis), por uma certa analogia com o caso do pórtico da Fig. 5-6 (parágrafo 5.3), o uso de $[S_{HH}^*]$ pode levar a um valor er

rado da carga crítica e contra a segurança. Por isso, em todo estudo que se segue, adota-se para matriz de rigidez que representa o comportamento do pórtico, como sub-estrutura do sistema tridimensional, a matriz $\begin{bmatrix} S^{**} \\ HH \end{bmatrix}$.

Poder-se-ia pensar que determinando-se a carga crítica de cada pórtico separadamente, estaria realizada a análise de instabilidade do edifício. Tal não é verdadeiro pois a existência de diversos pórticos diferentes (que são os painéis verticais) contraventados pelas lajes, impede que cada pórtico perca a estabilidade independentemente dos demais. A análise de instabilidade mais correta será então realizada estudando o comportamento de todo o conjunto sob ação das cargas verticais e considerando as ações perturbadoras. Embora a análise se torne mais laboriosa, é justificada em virtude de ser a carga crítica do conjunto tridimensional um valor algo diferente da menor carga crítica dos seus pórticos isolados. As estruturas analisadas no presente trabalho mostraram que o parâmetro crítico W_{CS} encontrado para o sistema é em geral maior que o parâmetro crítico do pórtico mais crítico.

As bases necessárias à análise de instabilidade do sistema tridimensional são dadas a seguir.

6.2 - Matriz de rigidez do sistema correspondente aos deslocamentos horizontais

Quando se desprezam as interações entre os painéis verticais, como mostram STAMATO e STAFFORD-SMITH³⁷, o comportamento do sistema sob ação de cargas horizontais pode ser descrito pela matriz $\begin{bmatrix} S_S \end{bmatrix}$ de ordem $(3.n_a \times 3.n_a)$ correspondente aos esforços horizontais atuando sobre as lajes. Adotando-se um sistema de coordenadas $0, x_s, y_s, z_s$ para o sistema, com x_s e y_s horizontais, os 3 esforços que carregam cada laje são: uma força na direção x_s , outra na direção y_s e um momento em torno de Oz_s . A posição de cada painel P pode ser dada em planta (assentada no plano $0x_s y_s$) por um vetor unitário \vec{u}^P contido na intersecção do plano do painel com o plano $x_s y_s$ e de sentido concordante com os deslocamentos positivos do painel.

A Fig. 6-1a mostra em planta o caso da associação de 5 painéis, e a Fig. 6-1b dá a representação da posição dos painéis no plano x_s, y_s .

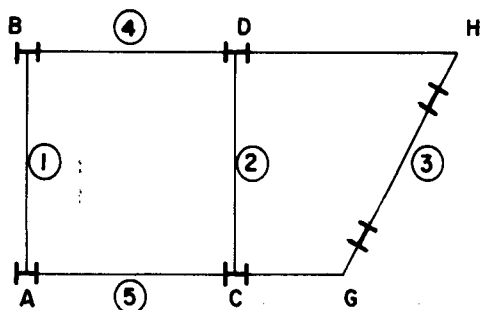


FIG.6-1a - Estrutura de edifício composta de 5 painéis verticais.

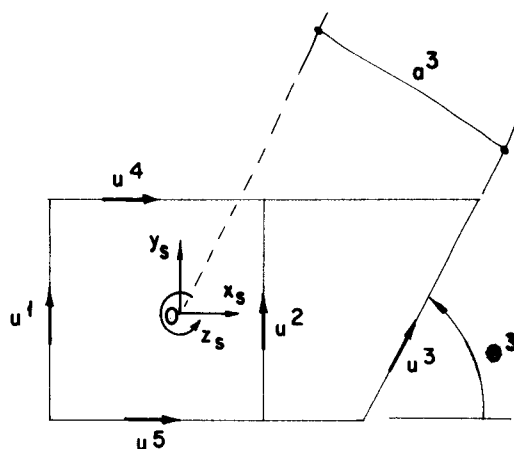


FIG.6-1b - Representação da posição dos painéis na estrutura de edifício da Fig.6-1a.

A posição de cada painel \underline{P} pode ser dada também por uma matriz posição $\left[t^P \right]$ tal que:

$$\left[t^P \right] = \left[t_1^P, t_2^P, t_3^P \right] \dots \dots \dots (6.1)$$

com

$$t_1^P = \cos \theta^P \dots \dots \dots (6.2)$$

$$t_2^P = \text{sen} \theta^P \dots \dots \dots (6.3)$$

$$t_3^P = a^P \dots \dots \dots (6.4)$$

onde θ^P é o ângulo que o vetor \vec{u}^P faz com o eixo x_s , medido a partir de x_s , no sentido de z_s . a^P é a distância do painel \underline{P} ao eixo z_s , considerada positiva se o vetor \vec{u}^P apresentar momento em torno de θ , com o sentido de z_s . A Fig. 6-1b mostra os valores θ^3 e a^3 para o painel (3).

Supõe-se que dois painéis que se cruzam possam possuir pilares comuns na interseção quando esses painéis são ortogonais e com eixos principais da seção do pilar comum, contidos nos planos dos painéis ortogonais. Despreza-se a rigidez à torsão de todas as barras.

Se os deslocamentos horizontais $\{D^P\}$ da cada painel são numerados por andares a partir do mais elevado e os deslocamentos $\{D_s\}$ do sistema numerados também por andares, seguindo a ordem x_s, y_s, z_s em cada andar, estes deslocamentos estarão relacionados por:

$$\{D^P\} = [T^P] \cdot \{D_s\} \dots\dots\dots(6.5)$$

onde $[T^P]$ é a matriz de transformação:

$$[T^P] = \begin{bmatrix} t_1^P, t_2^P, t_3^P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_1^P, t_2^P, t_3^P & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1^P, t_2^P, t_3^P & \dots\dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1^P, t_2^P, t_3^P \end{bmatrix} \dots\dots(6.6)$$

ou

$$[T^P] = \begin{bmatrix} [t^P] & 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & [t^P] & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 & [t^P] & \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots [t^P] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.7)$$

sendo $[t^P]$ dado pela eq. (6.1).

A matriz de rigidez $[S_s]$ do sistema, correspondente aos deslocamentos $\{D_s\}$ é obtida pela soma das contribuições de todos os painéis, ou seja:

$$[S_s] = \sum_{P=1}^n [S_s^P] \dots\dots\dots(6.8)$$

onde n é o número de painéis e $[S_s^P]$ a contribuição de cada painel, dada por

$$[S_s^P] = [T^P]^T [S^P] [T^P] \dots\dots\dots(6.9)$$

sendo $[T^P]^T$ a matriz transposta de $[T^P]$ e $[S^P]$ a matriz de rigidez do painel correspondente aos deslocamentos horizontais nos andares. Embora usada com novo símbolo, $[S^P]$ é justamente a matriz $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 5.8) obtida para o pórtico.

Ao ser efetuado o produto da eq. (6.9), cada elemento $(S^P)_{i,j}$ de $[S^P]$ é pré-multiplicado por $[t^P]^T$ (eq. 6.1) e post-multiplicado por $[t^P]$, dando origem a uma sub-matriz de ordem (3×3) de $[S^P]$. Os elementos (S^P_s) da banda superior de $[S^P_s]$ poderão ser calculados a partir dos elementos da banda superior de $[S^P]$ pelas expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} (S^P_s)_{3(i-1)+k, 3(j-1)+l} = t_k^P (S^P_{i,j}) t_l^P \\ (i = 1, 2, \dots, n_a) \\ (j = i, i+1, \dots, j_{\max}) \\ (k = 1, 2, 3) \\ (l = l_{\min}, l_{\min}+1, \dots, 3) \end{array} \right. \dots \dots \dots (6.10)$$

$$j_{\max} = \min \{ i + l_{bsH}^* - 1, n_a \} \dots \dots \dots (6.11)$$

$$l_{\min} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \\ k & \text{se } i = j \end{cases} \dots \dots \dots (6.12)$$

onde l_{bsH}^* é a largura da banda superior de $[S^P]$. ($l_{bsH}^* = 6$ na análise de instabilidade)

Se a matriz $[S^P]$ (ou $[S_{HH}^{**}]$) é armazenada a partir das $n_a \cdot n_p$ linhas e colunas, como acontece após a eliminação parcial de GAUSS descrita no parágrafo 4.1 (Fig. 4-2), a eq. (6.10) se altera para:

$$\left\{ \begin{array}{l} (S^P_s)_{3(i-1)+k, 3(j-1)+l} = t_k^P (S^P_{n_a n_p+i, n_a n_p+j}) t_l^P \\ (i = 1, 2, \dots, n_a) \\ (j = i, i+1, \dots, j_{\max}) \\ (k = 1, 2, 3) \\ (l = l_{\min}, l_{\min}+1, \dots, 3) \end{array} \right. \dots \dots \dots (6.13)$$

A matriz resultante $\begin{bmatrix} S_s^P \end{bmatrix}$ será de ordem $(3n_a \times 3n_a)$ com banda diagonal superior de largura $3\ell_{bSH}^* = 18$.

Se $\begin{bmatrix} S_s \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} S_s^P \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} S_{HH}^{**} \end{bmatrix}$) são armazenadas em matriz retangular como na Fig. 4-3 a eq. (6.13) será modificada para:

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_s^P)_{3(i-1)+k, 3(i-j)+k-\ell+1} = t_k^P (S_{n_a n_p}^P)_{i, j-i+1} t_\ell^P \\ (i = 1, 2, \dots, n_a) \\ (j = i, i+1, \dots, j_{\max}) \\ (k = 1, 2, 3) \\ (\ell = \ell_{\min}, \ell_{\min}+1 \dots 3) \end{array} \right. \dots (6.14)$$

A matriz de rigidez $\begin{bmatrix} S_s \end{bmatrix}$ (eq. 6.8) do sistema é obtida pela soma das contribuições de todos os painéis.

Como sugerem STAMATO e STAFFORD-SMITH³⁷, chamando de \bar{a} o máximo valor entre os a^P (eq. 6.4), convém dividir todos os a^P por \bar{a} , para obter $\begin{bmatrix} S_s^P \end{bmatrix}$ com elementos da mesma ordem de grandeza. Essa alteração obrigará então a tomar-se todos os momentos aplicados divididos por \bar{a} , e para encontrar as rotações em radianos, dividir os valores encontrados também por \bar{a} .

6.3 - Carga crítica do sistema

Supondo o edifício carregado com cargas verticais e centradas nos nós dos painéis, para cada valor do parâmetro W podem ser determinadas uma a uma as bandas superiores das matrizes de rigidez $\begin{bmatrix} S_{HH}^{**} \end{bmatrix}$ (eq. 5.8) dos painéis e somadas as suas contribuições na banda superior da matriz de rigidez $\begin{bmatrix} S_s \end{bmatrix}$ do sistema. As contribuições de cada painel são calculadas pelas eqs. (6.10), (6.11) e (6.12) ou suas correspondentes (6.13), (6.11) e (6.12) ou (6.14), (6.11) e (6.12), lembrando que $\begin{bmatrix} S_s^P \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} S_{HH}^{**} \end{bmatrix}$ são a mesma matriz.

Admite-se $\begin{bmatrix} S_s \end{bmatrix}$ (eq. 6.8) como correspondente as ações perturbadoras do equilíbrio. Esta adoção é justificada pela observação de que quando os pórticos deslocáveis (que são os painéis) perderem estabilidade, os seus deslocamentos horizontais corresponderão a translações e rotações das lajes nos seus planos.

Para determinar os limites de variação de W de maneira que o esforço axial $4\pi^2 EI_z/L^2$ nunca seja atingido em alguma barra, antes de se proceder à análise de instabilidade do sistema, são determinadas as cargas críticas de todos os pórticos (painéis) trabalhando isoladamente, nas condições deslocável e indeslocável. Chamando de W_{cH}^P a carga crítica do painel p suposto deslocável e $W_{c\theta}^P$ a carga crítica do painel P suposto indeslocável, a instabilidade do sistema é analisada para W satisfazendo:

$$\min_P \left\{ W_{cH}^P \right\} \leq W \leq \min_P \left\{ W_{c\theta}^P \right\} \dots\dots\dots(6.15)$$

intervalo bastante amplo, sendo o extremo superior da ordem de 3 a 4 vezes o extremo inferior.

O parâmetro crítico W_{cs} do sistema será o menor valor de W para o qual $[S_s]$ deixa de ser definida positiva. Nesta fase do cálculo pode ser usado o método de eliminação de GAUSS, aproveitando-se a forma em banda diagonal da matriz $[S_s]$, e seguido um algoritmo análogo ao do parágrafo 3.3 .

6.4 - Modos de flambagem do Sistema

Diferentemente do pórtico indeslocável, para o qual é frequente o aparecimento de apenas um modo de flambagem associado à carga crítica, a estrutura tridimensional de edifício pode apresentar diversos modos de flambagem associado a esta carga. Isto quer dizer que, quando $[S_s]$ (eq. 6.1) se torna singular, pode possuir o auto-valor $\lambda_{\min} \approx 0$ de multiplicidade 2 ou maior. Neste caso que λ_{\min} é auto-valor múltiplo, existirão em correspondência a esse auto-valor, tantos auto-vetores ortogonais entre si, quanto for a ordem de multiplicidade de λ_{\min} . Como já se viu nos capítulos anteriores, estes auto-vetores descrevem os modos de flambagem da estrutura. O aparecimento de diversos modos de flambagem em estruturas tridimensionais, acontece com frequência quando a estrutura possui dois planos verticais de simetria. Observou-se também no presente trabalho que, quando o sistema tridimensional possui dois planos verticais de simetria e é composto de painéis deslocáveis, os quais trabalhando isoladamente tem apenas um modo de flambagem associado à carga crítica, então o edifício pode apresentar 2 ou mais modos de flambagem associado ao carregamento crítico.

O aparecimento de maior número de modos de flambagem em estruturas de edifício está relacionado sem dúvida com o maior número de graus de liberdade (3 por andar) do sistema tridimensional.

Quando um auto-valor de uma matriz $[S_s]$ de ordem n é de multiplicidade m ($m < n$), então qualquer combinação linear de seus m auto-vetores ortogonais é também auto-vetor correspondente ao mesmo auto-valor. O conjunto de todos os auto-vetores correspondentes ao auto-valor de multiplicidade m é então um sub-espaço de ordem m do espaço n -dimensional definido pelos n auto-vetores de $[S_s]$, ortogonais entre si. Então, entre os infinitos auto-vetores possíveis, deve-se determinar m que sejam os mais representativos dos modos de flambagem da estrutura. Esses auto-vetores serão determinados como se verá adiante.

Quando for suficiente encontrar a carga crítica do sistema tridimensional e não os modos de flambagem, pode-se usar apenas a banda superior da matriz $[S_s]$ (eq. 6.1), com grande economia de memória rápida no computador. Porém, quando se deseja os modos de flambagem, essa economia fica prejudicada. O processo iterativo (parágrafo 3.5) para cálculo de auto-valores e auto-vetores não converge quando o auto-valor de maior módulo é múltiplo, não podendo ser usado. Infelizmente, os métodos conhecidos para determinação de auto-valores múltiplos e correspondentes auto-vetores fazem uso de toda a área utilizada pela matriz, impossibilitando a economia de memória. Por isso fica reduzido o tamanho da estrutura a ser analisada quando deseja-se também os modos de flambagem.

Na procura dos modos de flambagem então, o primeiro problema é determinar a ordem de multiplicidade do auto-valor λ_{\min} que, após determinada a carga crítica possui valor $\lambda_{\min} \approx 0$. Para encontrar essa ordem de multiplicidade deve-se determinar diversos auto-valores da matriz $[S_s]$ e compará-los. Quando $\lambda_{\min} \approx 0$, os erros de arredondamento, em geral, impossibilitam essa comparação, podendo a multiplicidade dos auto-valores ficar mascarada por tais erros. O procedimento usado neste trabalho que se mostrou bastante eficiente na determinação da ordem de multiplicidade do auto-valor e de seus auto-vetores foi o seguinte:

- a) Dividir todos os elementos de $[S_s]$ por c , calculado como na eq. (3.37) e somar o valor $\lambda^* > 0$ ($\lambda^* = 0,05$ ou menos) aos elementos da diagonal principal. Isto

equivale a tomar a matriz:

$$\frac{1}{c} [S_s] + \lambda^* [I] \dots\dots\dots(6.16)$$

b) Calcular a matriz inversa de (6.16), ou seja a matriz

$$\left(\frac{1}{c} [S_s] + \lambda^* [I] \right)^{-1} \dots\dots\dots(6.17)$$

c) Determinar todos os auto-valores e auto-vetores da matriz (6.17) pelo método de JACOBI³⁰.

d) Os auto-valores de $\left(\frac{1}{c} [S_s] + \lambda^* [I] \right)^{-1}$ correspondentes aos auto-valores $\lambda_{\min} \approx 0$ de $[S_s]$, sendo os de maior valor absoluto, são comparados e considerados iguais se o maior deles não excede os demais de uma certa ordem (tomada de 0,01% no presente trabalho, obtendo-se bons resultados).

O método de JACOBI, usando sucessivas rotações planas na matriz original de ordem \underline{n} , fornece como resultado duas matrizes quadradas $[A]$ e $[U]$ também de ordem \underline{n} . A matriz $[A]$ é uma matriz diagonal com os \underline{n} auto-valores na diagonal principal numa ordem arbitrária. A matriz $[U]$ contém nas suas colunas os \underline{n} auto-vetores normalizados e ortogonais entre si, correspondentes aos auto-valores situados nas colunas de mesma ordem em $[A]$. Necessário é portanto reordenar todas as colunas de $[U]$ e os elementos diagonais de $[A]$, levando os maiores auto-valores e correspondentes auto-vetores para a posição mais à esquerda.

Seja então \underline{m} o grau de multiplicidade do maior auto-valor. Após a reordenação descrita, $[U]$ aparece da maneira seguinte:

$$[U] = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{m colunas} \\ \hline \begin{matrix} [U_{AA}] & [U_{AB}] \\ [U_{BA}] & [U_{BB}] \end{matrix} \\ \hline \end{matrix} \\ \text{m linhas} \end{matrix} \dots\dots\dots(6.18)$$

As colunas da matriz retangular

$$\begin{matrix} [U_{AA}] \\ \hline [U_{BA}] \end{matrix} \dots\dots\dots(6.19)$$

são auto-vetores ortogonais entre si, correspondentes ao auto-valor máximo de multiplicidade \underline{m} . Sendo a matriz $[U]$ de ordem $3n_a$, e existindo apenas $3n_a$ vetores ortogonais entre si de ordem $3n_a$, quaisquer outros \underline{m} vetores que sejam ortogonais aos vetores coluna da matriz:

$$\begin{bmatrix} [U_{AB}] \\ \hline [U_{BB}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.20)$$

retirada de $[U]$ (eq. 6.18), pertencerão ao sub-espço \underline{m} -dimensional dos auto-vetores correspondentes ao auto-valor de multiplicidade \underline{m} . Então, para determinar \underline{m} auto-vetores que descrevam da melhor maneira os modos de flambagem da estrutura, tem-se a liberdade de adotar arbitrariamente os \underline{m} vetores de $[U_{AA}]$ (eq. 6.18) satisfazendo apenas a ortogonalidade dentro de $[U_{AA}]$. Chamando de $[U_{AA}^*]$ essa matriz arbitrada, $[U]$ terá a forma

$$[U] = \begin{bmatrix} [U_{AA}^*] & [U_{AB}] \\ \hline [U_{BA}^*] & [U_{BB}] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.21)$$

sendo $[U_{BA}^*]$ uma matriz a determinar. Da condição de ortogonalidade tem-se:

$$[U_{AA}^*]' [U_{AB}] + [U_{BA}^*]' [U_{BB}] = 0 \dots\dots\dots(6.22)$$

$$[U_{BA}^*]' = -[U_{AA}^*]' [U_{AB}] [U_{BB}]^{-1} \dots\dots\dots(6.23)$$

e ficam determinados os modos de flambagem representativos.

A escolha de certos modos de flambagem como mais representativos tem seu fundamento no fato de ser algumas vezes a estrutura simétrica e regular. Por exemplo, a estrutura de edifício representada em planta na Fig. 6-2, constituída de 4 painéis iguais e com cargas verticais iguais nos nós, poderá perder estabilidade com translações de todas as lajes na direção x_s ou na direção y_s ou por rotação das mesmas em torno de Oz_s , ou ainda por qualquer combinação linear desses movimentos. Admitindo $m = 3$, será mais interessante porém que os 3 primeiros modos referidos (que são ortogonais entre

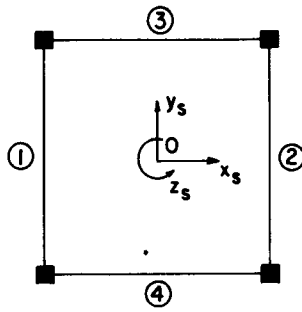


FIG. 6-2 - Estrutura de edifício constituída de 4 painéis iguais e igualmente carregados.

si) sejam obtidos como resultados, para facilitar a interpretação do comportamento da estrutura e uniformizar a saída dos resultados, no caso da estrutura simétrica. No caso da estrutura da Fig. 6-2, como os deslocamentos em $[U]$ (eq. 6-21) estão numerados sequencialmente por andares na ordem x_s, y_s, z_s , para obter os 3 modos de flambagem acima é suficiente supor para $[U_{AA}^*]$, na eq. (6.23), a forma:

$$[U_{AA}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.24)$$

Ter-se-ão então para as demais componentes dos auto-vetores os valores:

$$[U_{BA}^*]^T = -[U_{AB}] [U_{BB}]^{-1} \dots\dots\dots(6.25)$$

A matriz $[U_{BB}]^{-1}$ deverá existir, provavelmente, em decorrência da existência de $[U_{BA}^*]$, a qual deseja-se determinar. Como não se pode afirmar que $[U_{BB}]$ seja definida positiva, usa-se na inversão dessa matriz o método de GAUSS-JORDAN com o máximo pivô em cada eliminação.

Os auto-valores cujos elementos descrevem translações da

laje apenas na direção x_s ou y_s , ou rotações em torno de Oz_s , são procurados, pois sendo a estrutura simétrica, descrevem modos de flambagem que podem ser previstos pela simples observação da estrutura. Como na análise de instabilidade não se procuram esforços internos, também não pode ser realizada a verificação dos cálculos pelo equilíbrio dos nós. Então, uma maneira de efetuar essa verificação na análise de instabilidade é constatar a coincidência dos modos de flambagem previstos com os calculados.

Quando existir apenas um modo de flambagem associado à carga crítica ($m = 1$), não há necessidade de realizar a partição de $[U]$ (eq. 6.21) ou o produto da eq. (6.25). Bastará dividir as componentes do único auto-vetor pela componente de maior valor absoluto, para uniformidade na saída dos resultados.

Quando existirem dois modos de flambagem ($m = 2$) (supondo a estrutura com dois planos verticais de simetria e composta de painéis que possuem apenas um modo de flambagem associado à carga crítica), é necessário saber se o modo constituído apenas de rotações das lajes em torno de Oz_s é um modo de flambagem possível. Se existir esse modo, o outro modo deverá ser constituído apenas de translações da laje na direção x_s ou y_s (supõe-se os eixos x_s e y_s pertencentes aos planos verticais de simetria da estrutura). Neste caso, em vista da numeração dos deslocamentos em $[U]$ (eq. 6.18), não existindo o modo constituído de translação x_s , será necessário permutar as 1ª e 3ª linhas de $[U]$ antes de se efetuar o produto da eq. (6.25). Não existindo o modo constituído de translações y_s dever-se-á permutar a 2ª e 3ª linhas de $[U]$ antes de efetuar aquele produto (eq. 6.25). Após realizada a permutação necessária, adota-se para $[U_{AA}^*]$ (eq. 6.21) o valor:

$$[U_{AA}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.26)$$

Para verificar a inexistência de um dos modos de flambagem constituídos apenas de translações x_s ou apenas de translações y_s , considere-se o seguinte: seja $[u_1]$ a primeira linha de $[U_{BA}]$ (eq. 6.18). A matriz obtida pela anexação dessa linha à matriz $[U_{AA}]$ (na mesma eq. 6.18), será:

$$\begin{bmatrix} [U_{AA}] \\ [u_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.27)$$

A inexistência de translações segundo Ox_s ou segundo Oy_s , com o sistema de referência adotado, implica em serem nulos os elementos da 1ª linha ou da 2ª linha, respectivamente, da matriz da eq. (6.27). Analogamente, a inexistência de rotações em torno de Oz_s implica na nulidade dos elementos da 3ª e última linha da eq. (6.27). O artifício computacional para verificar qual linha tem elementos nulos é encontrar o índice i que minimiza a soma

$$|u_{i1}| + |u_{i2}| \dots\dots\dots(6.28)$$

Se i for igual a 1 (ou 2) será necessário permutar a 1ª (ou 2ª) linha com a 3ª linha de $[U]$ (eq. 6.21); depois dessa permutação adota-se para $[U_{AA}^*]$ a matriz unitária (de ordem 2 x 2). Se i for igual a 3 não se efetua nenhuma permutação das linhas originais de $[U]$ e adota-se para $[U_{AA}^*]$ a matriz unitária referida na eq. (6.26).

Após calculado o produto da eq. (6.25), refaz-se a permutação realizada entre as 1ª (ou 2ª) linha com a 3ª linha de $[U]$ e os modos de flambagem procurados serão as colunas da matriz:

$$\begin{bmatrix} [U_{AA}^*] \\ \hline [U_{AB}^*] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6.29)$$

Se existirem $m(m > 3)$ modos de flambagem associados à carga crítica, o processo acima descrito pode ser estendido, verificando-se a inexistência de modos que possuam translações x_s ou y_s ou rotações em torno de Oz_s , para as lajes mais próximas do topo do edifício com expressões semelhantes às eqs. (6.27) e (6.28). Antes de se efetuar o produto da eq. (6.25), devem ser realizadas permutações nas linhas de $[U]$ de maneira a colocar as linhas correspondentes aos deslocamentos inexistentes além das m primeiras. Após realizadas as permutações, adota-se para $[U_{AA}^*]$ (de ordem $m \times m$) o valor:

$$[U_{AA}^*] = [I] \dots\dots\dots(6.30)$$

sendo $[I]$ a matriz unidade. Uma vez calculado o produto da eq. (6.25), refaz-se as permutações de linhas efetuadas.

Nas estruturas analisadas no presente trabalho, a tarefa de procurar os modos múltiplos de flambagem ficou facilitada por ter-se encontrado sempre no máximo 3 modos de flambagem associados à carga crítica.

Quando a estrutura for simétrica, sendo este o caso mais frequente em que acontecem os modos de flambagem constituídos apenas de translações ou rotações, convém adotar o sistema de coordenadas $Ox_s y_s z_s$ de maneira que os planos $Ox_s z_s$ e $Oy_s z_s$ coincidam com os planos de simetria da estrutura. Essa escolha torna eficiente o artifício de seleção dos modos de flambagem possíveis (expresso pelas eqs. 6.27 e 6.28 ou suas semelhantes) e ainda facilita a interpretação dos resultados fornecidos pelo computador. Convém esclarecer que no caso de modos de flambagem múltiplos, mesmo que não existam os modos de flambagem constituídos só de translações ou rotações, o artifício explanado para a sua procura levará a modos possíveis de flambagem de edifício.

Finalmente, deve-se lembrar que as rotações encontradas nos modos de flambagem devem ser divididas pelo valor $\bar{\alpha}$ (parágrafo 6.2) para representarem os valores das mesmas em radianos.

6.5 - Exemplos

De acordo com as hipóteses e procedimentos descritos neste capítulo e nos anteriores foi elaborado um programa de cálculo para determinação da carga crítica e modos de flambagem de estruturas tridimensionais de edifícios com cargas verticais concentradas nos nós. Primeiramente foram analisadas estruturas de pequeno porte, simétricas, para comprovação da eficiência do programa e verificação de resultados que podem ser previstos de antemão. Os exemplos são os que seguem:

EXEMPLO 1

A estrutura é constituída de 4 painéis idênticos ortogonais entre si. O painel repetido designado por A, foi analisado isoladamente por McMINN²⁴ e justamente por este motivo, visando a comparação de resultados, foi adotado aqui como painel do edifício. O painel A está mostrado na Fig. 6-3. Na mesma figura o carregamento correspondente ao valor unitário do parâmetro W é definido por $P = 0,50t$. Junto às barras estão os valores em "inch⁴" dos momen-

tos de inércia da seção. Todos os comprimentos são dados em polegadas. A estrutura tridimensional é apresentada em planta na Fig. 6-4, onde se vê ainda o sistema de coordenadas $Ox_s y_s z_s$ adotado. As cargas em cada nó da estrutura tridimensional da Fig. 6-4 são as mesmas que aparecem em cada nó do mesmo andar do pórtico plano da Fig. 6-3. Considerações sobre a entrada dos dados para o programa serão dadas no capítulo 7. Para este tipo de estrutura é de se esperar que a mesma possua parâmetro crítico igual ao parâmetro crítico de cada pórtico trabalhando isoladamente e 3 modos de flambagem associados, constituídos apenas de translações x_s , ou y_s , ou rotações em torno de Oz_s .

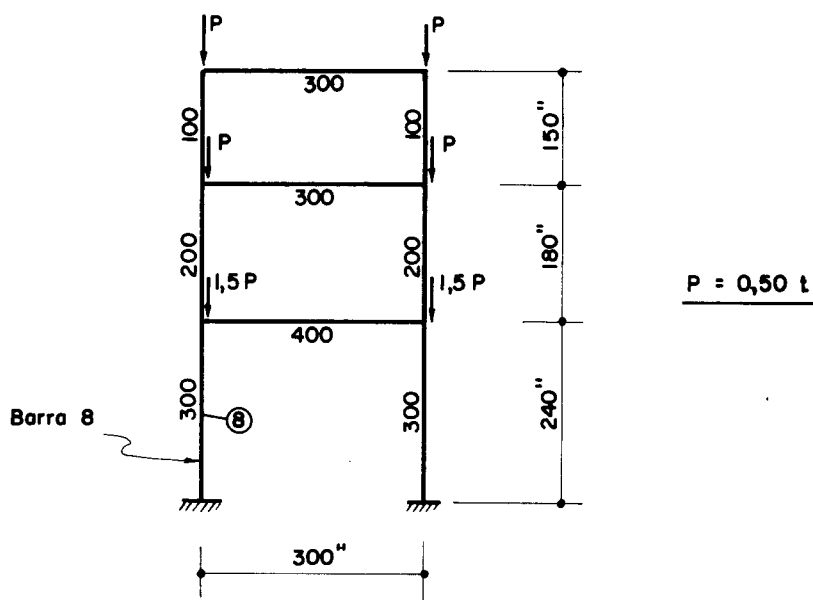


FIG. 6-3 - Painel A para o exemplo 4

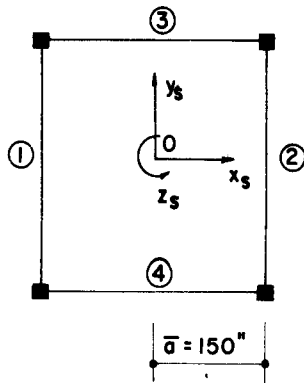


FIG. 6-4 - Estrutura de edifício constituída de 4 painéis do tipo A mostrado na Fig.6-3.

Os resultados impressos pelo programa estão dados a seguir:

```

*****
* O PAINEL 1 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 396.552
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1051.019
* O PAINEL 1 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 285.848

* O PAINEL 2 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 3 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 4 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE
  W= 285.848 E W= 1051.019 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS
  CRITICAS DOS PAINELIS 1 E 1 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S)
  DESLOCAVEL E INDESLOCAVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 286.222

** EXISTEM 3 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS
  AO PARAMETRO CRITICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM
  
```

MODO 1	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
-----	1	1.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9247	-0.0000	0.0000
	3	0.6216	0.0000	0.0000

MODDO 2				
-----	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
	1	0.0000	1.0000	0.0000
	2	-0.0000	0.9247	0.0000
	3	-0.0000	0.6216	0.0000

MODDO 3				
-----	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
	1	0.0000	0.0000	1.0000
	2	0.0000	0.0000	0.9247
	3	0.0000	0.0000	0.6216

 TRABALHO TERMINADO

A barra crítica referida pelo programa é assinalada na Fig. 6-3. As lajes são numeradas a partir do topo do edifício. Como se pode notar, os resultados coincidem perfeitamente com os esperados. A carga crítica encontrada para o edifício é ligeiramente superior à do painel A trabalhando isoladamente por ser encontrada por processo iterativo (com 10 ciclos) com sucessivas divisões ao meio do intervalo inicial (eq. 6.15). Vê-se ainda, pela maneira como são dados os resultados que, quando existem painéis iguais (na estrutura e no carregamento), o programa não efetua cálculos repetidos para determinação da mesma matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ (eq. 3.1) ou $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 4.5). A carga crítica encontrada para o painel A é praticamente igual a encontrada por McMINN²⁴. Na barra crítica, a relação $\rho = P/P_E$ atinge o valor máximo $\rho_{max} = 0,72$.

EXEMPLO 2

Neste exemplo são analisadas 4 tipos de estruturas, com alguma semelhança com a do exemplo anterior, para observação ainda da eficiência do programa. Para compor essas estruturas é suposto mais um painel B, obtido do painel A pela multiplicação por 1,5 de todos os momentos de inércia, mantendo as mesmas cargas verticais da Fig. 6-3, para $W = 1$.

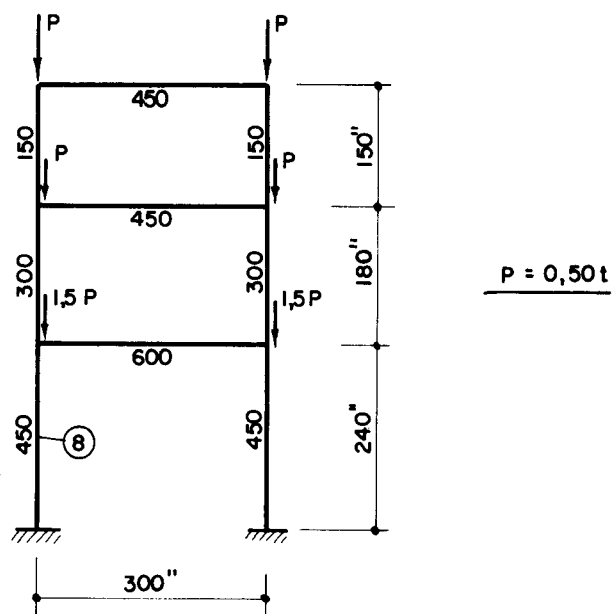


FIG.6-5 - Painel B para o exemplo 2

Logicamente, o parâmetro crítico do painel B será 1,5 vezes o parâmetro crítico do painel A. A Fig. 6-5 mostra o painel B. Para distinguir o painel B, este será representado em planta com traço mais forte. As 4 estruturas tridimensionais estão representadas em planta nas Figs. 6-6, 6-7, 6-8 e 6-9. Nestas representações, supõe-se que cada painel possua apenas 2 colunas extremas, não participando da coluna central que aparece nos desenhos.

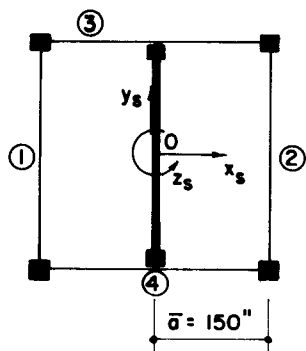


FIG. 6 - 6

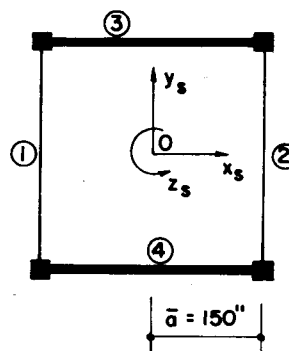


FIG. 6- 7

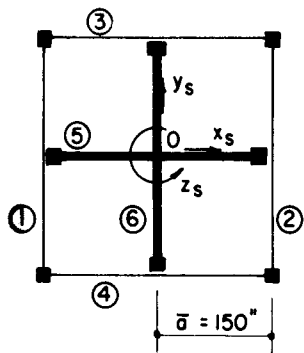


FIG. 6-8

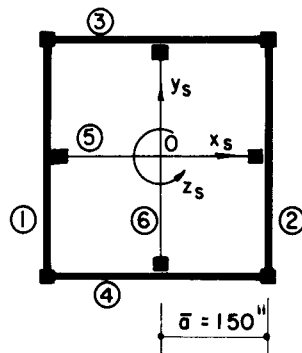


FIG. 6-9

Para a estrutura da Fig. 6-6 espera-se um parâmetro crítico idêntico ao do painel A, com 2 modos de flambagem: translações na direção x_s e rotações em torno de Oz_s .

Para a estrutura da Fig. 6-7 espera-se parâmetro crítico idêntico ao do painel A, com apenas 1 modo de flambagem: translações na direção y_s .

Para a estrutura da Fig. 6-8 espera-se parâmetro crítico idêntico ao do painel A, com apenas 1 modo de flambagem: rotações em torno de Oz_s .

A estrutura da Fig. 6-9 constitui um exemplo bastante interessante de aplicação do processo desenvolvido para análise de instabilidade de estruturas tridimensionais. Como todos os painéis estão igualmente carregados, ao crescer de W , os painéis tipo A trabalhando isoladamente perdem estabilidade antes que os painéis tipo B, os primeiros "carregando" os últimos. Como os painéis mais resistentes se situam na periferia, é de se esperar para a estrutura 2 modos de flambagem: translações na direção x_s e translações na direção y_s . O parâmetro crítico do sistema deverá ter um valor intermediário entre os parâmetros críticos dos painéis A e B. Analisando os resultados a seguir nota-se que o parâmetro crítico encontrado é 34% maior que o do painel A e 11% menor que o do painel B. Este resultado mostra como se pode chegar a um valor errôneo de parâmetro crítico do edifício, se a instabilidade for analisada para cada painel trabalhando isoladamente. O máximo valor da relação

P/P_E atingido na barra crítica é $\rho_{\max} = 0,96$.

A seguir mostram-se os resultados impressos pelo computador na análise de instabilidade das 4 estruturas acima. As barras críticas referidas pelo programa estão assinaladas nas Figs. 6-3 e 6-5.

a) Saida dos resultados para o edifício da Fig. 6-6:

```
*****
* O PAINEL 1 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 396.552
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1051.019
* O PAINEL 1 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 285.848

* O PAINEL 2 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 3 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 4 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1

* O PAINEL 5 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 594.828
* O PAINEL 5 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1576.528
* O PAINEL 5 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 428.772

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE
  W= 285.848 E W= 1051.019 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS
  CRITICAS DOS PAINELIS 1 E 1 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S)
  DESLOCAVEL E INDESLOCAVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 286.222

** EXISTEM 2 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS
  AO PARAMETRO CRITICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM
```

MODDO 1	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
	1	1.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9247	0.0000	0.0000
	3	0.6216	0.0000	0.0000

MODDO 2	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
	1	0.0000	0.0000	1.0000
	2	0.0000	0.0000	0.9247
	3	0.0000	0.0000	0.6216

```
*****
TRABALHO TERMINADO
*****
```

b) Saída de resultados para o edifício da Fig. 6-7:

```
*****
* O PAINEL 1 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 396.552
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1051.019
* O PAINEL 1 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 285.848

* O PAINEL 2 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1

* O PAINEL 3 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 594.828
* O PAINEL 3 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1576.528
* O PAINEL 3 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 428.772

* O PAINEL 4 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 3

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE
  W= 285.848 E W= 1051.019 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS
  CRITICAS DOS PAINELIS 1 E 1 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S)
  DESLOCÁVEL E INDESLOCÁVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 286.222

** EXISTEM 1 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS
  AO PARAMETRO CRITICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM

MODO 1
----- LAJE          DESL.X          DESL.Y          ROT.Z
      1          0.0000          1.0000          0.0000
      2          0.0000          0.9247          0.0000
      3          0.0000          0.6216          0.0000

*****
                          TRABALHO TERMINADO
*****
```

c) Saída de resultados para o edifício da Fig. 6-8:

```
*****
* O PAINEL 1 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 396.552
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1051.019
* O PAINEL 1 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 285.848

* O PAINEL 2 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
```

* O PAINEL 3 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 4 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 5 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 594.828
* O PAINEL 5 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1576.528
* O PAINEL 5 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 428.772
* O PAINEL 6 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 5
** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE
W= 285.848 E W= 1051.019 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS
CRITICAS DOS PAINELIS 1 E 1 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S)
DESLOCÁVEL E INDESLOCÁVEL
** O SISTEMA SE TORNA INSTÁVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 286.222
** EXISTEM 1 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS
AO PARAMETRO CRITICO W
** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM

MODO 1	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z

	1	0.0000	0.0000	1.0000
	2	0.0000	0.0000	0.9247
	3	0.0000	0.0000	0.6216

TRABALHO TERMINADO

d) Saída de resultados para o edifício da Fig. 6-9:

* O PAINEL 1 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 594.828
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1576.528
* O PAINEL 1 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 428.772
* O PAINEL 2 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 3 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 4 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 5 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 396.552
* O PAINEL 5 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 1051.019
* O PAINEL 5 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 285.848
* O PAINEL 6 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 5

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE
W= 285.848 E W= 1051.019 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS
CRITICAS DOS PAINÉIS 5 E 5 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S)
DESLOCÁVEL E INDESLOCÁVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTÁVEL COM PARÂMETRO CRÍTICO W= 381.121

** EXISTEM 2 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS
AO PARÂMETRO CRÍTICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM

MODOS	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
1	1	1.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9245	0.0000	0.0000
	3	0.6212	-0.0000	0.0000

MODOS	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
2	1	0.0000	1.0000	0.0000
	2	-0.0000	0.9245	0.0000
	3	-0.0000	0.6212	0.0000

TRABALHO TERMINADO

Nestes e em todos os exemplos resolvidos, as lajes são numeradas a partir do topo do edifício.

EXEMPLO 3

A estrutura analisada é composta de 7 painéis diferentes como mostrada em planta na Fig. 6-10. Nesta figura os traços mais fortes representam parte dos painéis, situadas entre duas prumadas de pilares, onde existem barras diagonais em todos os andares. As Figs. 6-11 até 6-17 mostram cada painel do edifício. Nessas figuras, os valores junto às barras são os momentos de inércia da seção em "inch⁴". Todos os comprimentos são dados em polegadas. Adotou-se para todas as barras área da seção de 10 inch². As cargas correspondentes a W = 1, em cada nó da estrutura tridimensional da Fig. 6-10, são as mesmas cargas que aparecem nos nós do mesmo andar dos painéis correspondentes nas Figs. 6-11 até 6-17, valendo P = 14,65t e V = 43,40t.

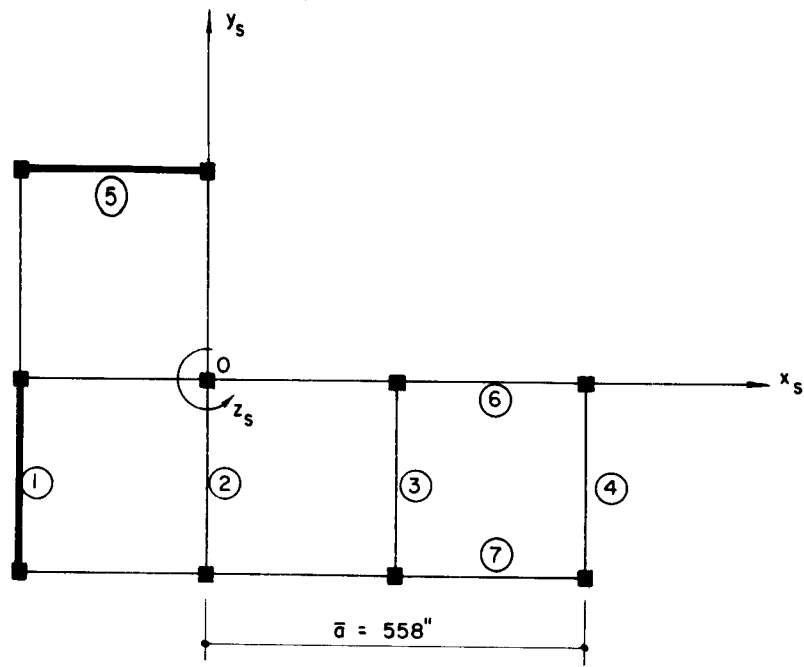


FIG. 6-10 - Planta do edifício do exemplo 3

Os painéis não correspondem a uma estrutura realmente calculada, mas foram obtidos com estimativas e extrapolações para as seções das barras do pórtico da Fig. 3-5 cuja análise de instabilidade foi realizada por BOWLES e MERCHANT¹¹. Como a estrutura não possui simetria é de esperar para a mesma apenas um modo de flambagem associado ao carregamento crítico. É de se esperar também que neste modo de flambagem todas as lajes tenham centro de rotação próximo ao eixo vertical que é interseção dos painéis (1) e (5). Estes resultados são de fato encontrados. Deve-se lembrar que para os dados de entrada foi adotado $a_{max} = 1,0$. Portanto, todas as rotações obtidas devem ser divididas por $\bar{a} = 558''$. Os resultados impressos pelo programa estão dados em seguida:

```
*****
* O PAINEL 1 TEM A BARRA 15 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 9.497
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 25.597
* O PAINEL 1 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 25.497

* O PAINEL 2 TEM A BARRA 15 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 7.763
* O PAINEL 2 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 19.227
* O PAINEL 2 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 6.834
```

- * O PAINEL 3 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 9.497
- * O PAINEL 3 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 18.771
- * O PAINEL 3 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 5.939

- * O PAINEL 4 TEM A BARRA 14 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 14.590
- * O PAINEL 4 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 34.083
- * O PAINEL 4 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 11.050

- * O PAINEL 5 TEM A BARRA 14 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 10.213
- * O PAINEL 5 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 30.560
- * O PAINEL 5 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 30.441

- * O PAINEL 6 TEM A BARRA 21 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 7.763
- * O PAINEL 6 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 19.348
- * O PAINEL 6 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 6.726

- * O PAINEL 7 TEM A BARRA 21 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 9.497
- * O PAINEL 7 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 23.520
- * O PAINEL 7 COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 7.809

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE W= 5.939 E W= 18.771 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS CRITICAS DOS PAINEIS 3 E 3 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S) DESLOCAVEL E INDESLOCAVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 8.113

** EXISTEM 1 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS AO PARAMETRO CRITICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM

MODOS	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
1	1	0.5158	0.5023	1.0000
	2	0.5120	0.4985	0.9924
	3	0.4747	0.4614	0.9189
	4	0.3541	0.3397	0.6799
	5	0.1121	0.0987	0.2058

 TRABALHO TERMINADO

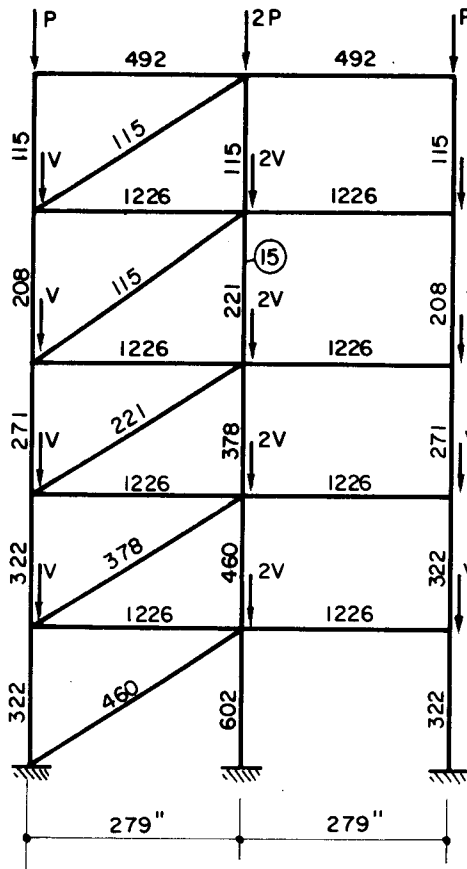


FIG. 6-11 - Painel nº 1 para a estrutura da FIG.6-10

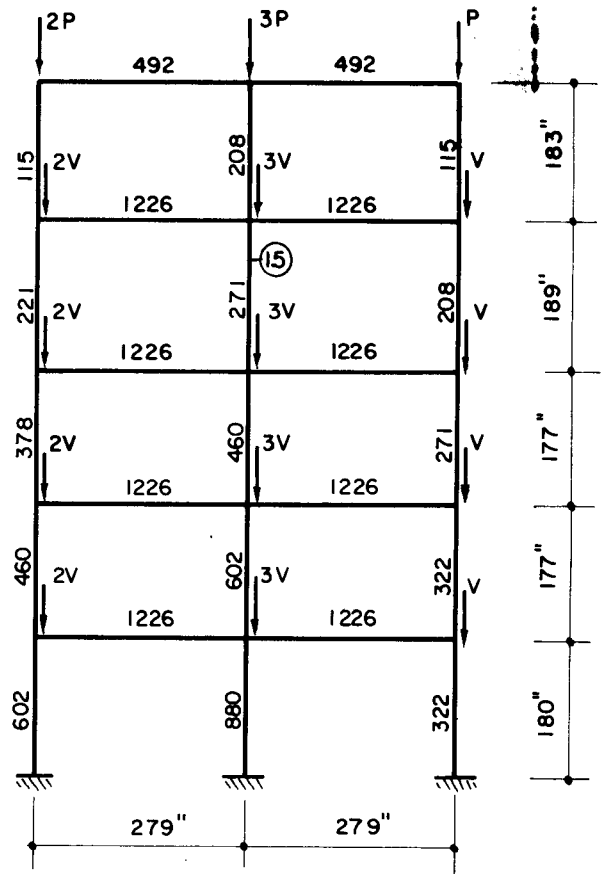


FIG.6-12 - Painel nº 2 para a estrutura da Fig.6-10

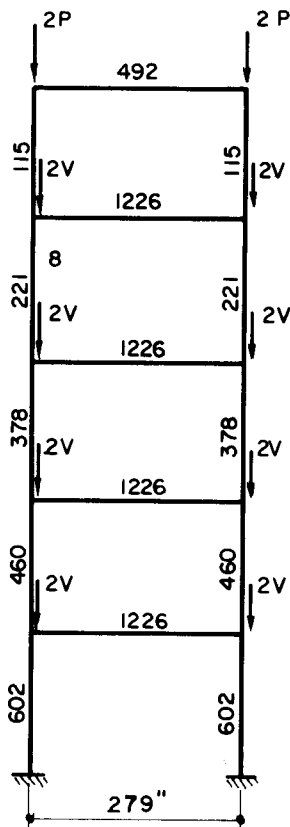


FIG.6-13 - Painel nº 3 para o exemplo 3.

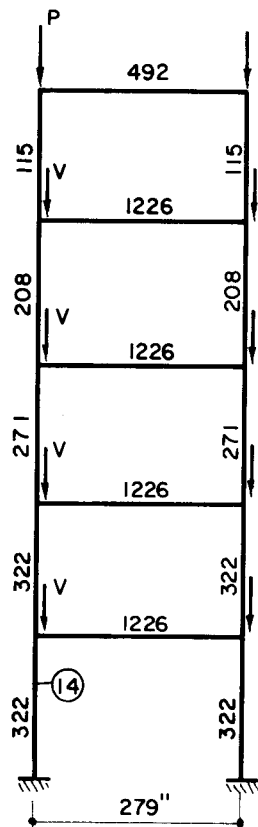


FIG.6-14 - Painel nº 4 para o exemplo 3.

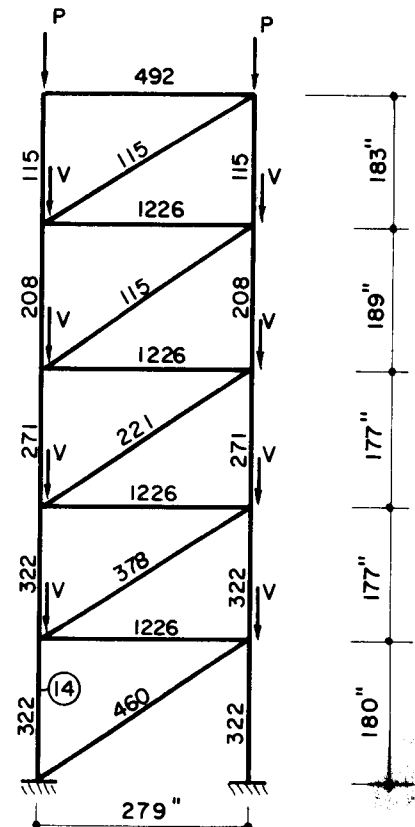


FIG. 6-15 - Painel nº 5 para o exemplo 3.

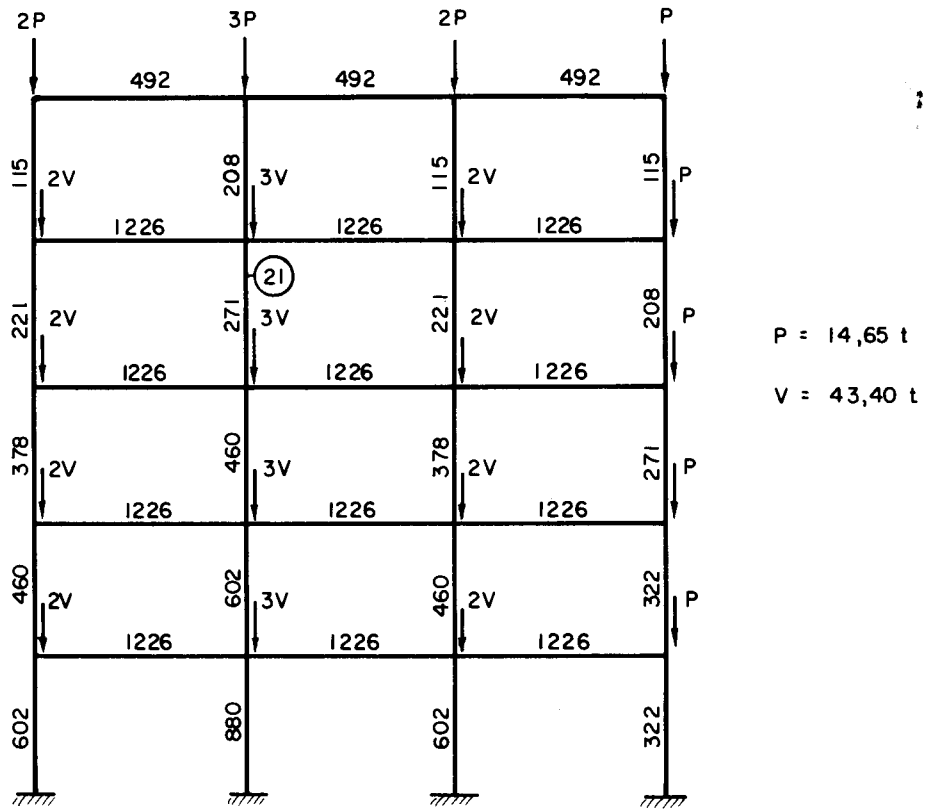


FIG. 6-16 - Painei nº 6 para a estrutura da Fig.6-10

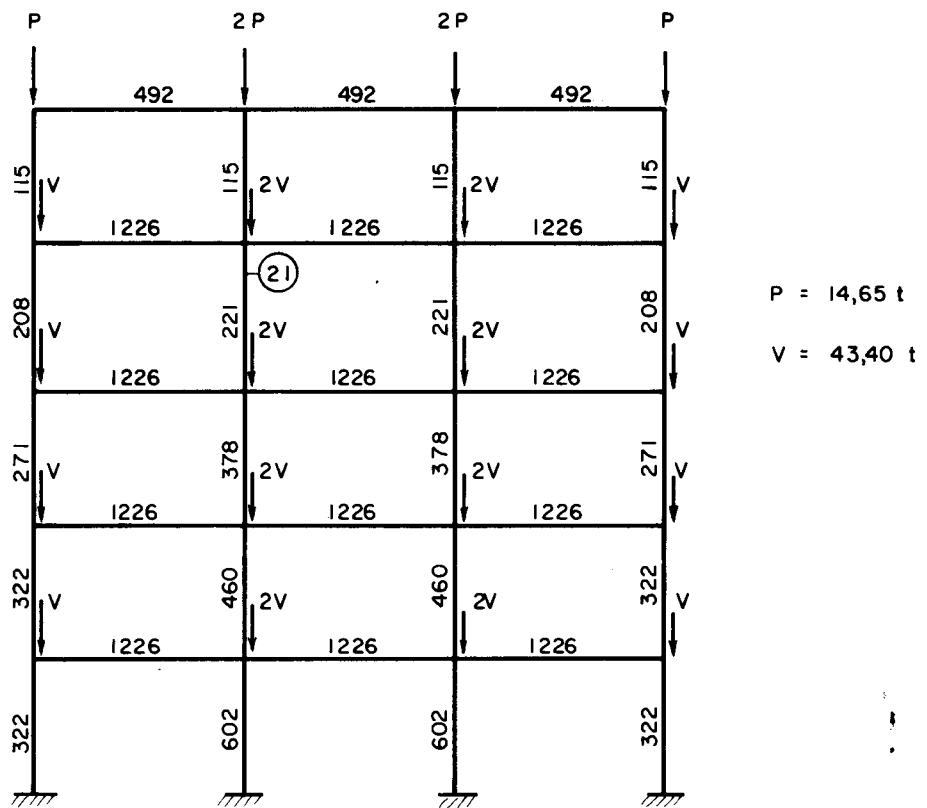


FIG. 6-17 - Painei nº 7 para a estrutura da Fig.6-10

As barras críticas referidas pelo programa estão assinaladas nas Figs. 6-11 até 6-17.

Pode-se observar aqui uma característica interessante do programa de cálculo: para os painéis (1) e (5) que são indeslocáveis, foram encontrados valores do parâmetro crítico para o painel suposto deslocável, ligeiramente inferiores ao parâmetro crítico do painel suposto indeslocável. Isto acontece porque o parâmetro crítico para a condição deslocável é procurado para W satisfazendo:

$$0 < W < W_{c\theta} \dots\dots\dots(4.3)$$

e como o painel não chega a perder instabilidade como deslocável, justifica-se porque foi encontrado $W_{cH} \approx W_{c\theta}$. O máximo valor da relação P/P_E atingido na barra mais crítica é $\rho_{max} = 1,04$.

A Fig. 6-18 mostra os deslocamentos das lajes para o modo de flambagem encontrado.

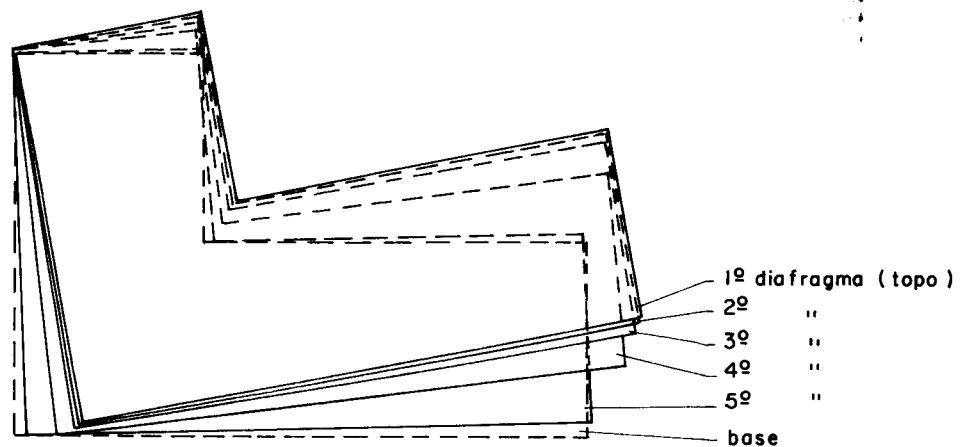


FIG. 6 - 18 - Modo de flambagem encontrado para o edifício da Fig. 6-10 .

Notar que neste exemplo o parâmetro crítico encontrado para o sistema é 37% maior que o do painel deslocável menos resistente e 26% menor que o do painel deslocável mais resistente.

EXEMPLO 4

A estrutura analisada é obtida da do exemplo anterior (Fig. 6-10) com a única alteração de tomar agora os painéis (4) e (5) indeslocáveis e idênticos ao painel (5) da Fig. 6-15, tanto na estrutura como no carregamento. A estrutura possui 3 painéis indeslocáveis não concorrentes e está representada em planta na Fig. 6-19. O fato interessante e digno de nota neste exemplo é que os 3 painéis (1), (4) e (5) indeslocáveis e não concorrentes não chegam a perder estabilidade, sendo o parâmetro crítico determinado pela perda de estabilidade do painel (3), como indeslocável, embora o mesmo, isoladamente, seja deslocável. O máximo valor da relação P/P_E atingido na barra mais crítica é $\rho_{\max} = 2,41$. Neste exemplo como ainda subsistem estáveis 3 painéis indeslocáveis não concorrentes, não há realmente modo de flambagem do edifício, pois acontece flambagem localizada de apenas um painel. O programa dará na saída o auto-vetor correspondente ao menor auto-valor de $[S_s]$ (eq. 6.8) sob o título de modo de flambagem, mas o usuário avisado não deve interpretá-lo como tal.

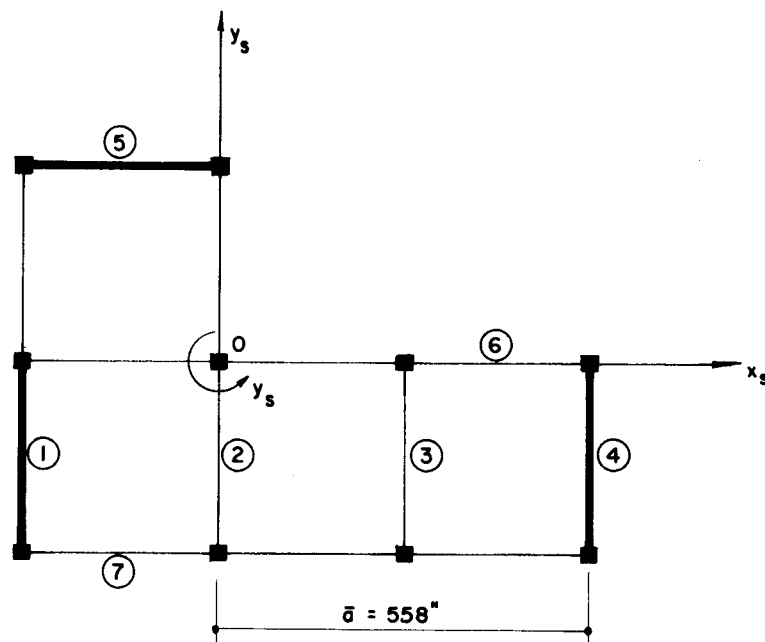


FIG. 6 - 19 - Planta do edifício do exemplo 4 .

A seguir estão os resultados impressos pelo computador:

* O PAINEL 1 TEM A BARRA 15 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 9.497
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 25.597
* O PAINEL 1 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 25.497

* O PAINEL 2 TEM A BARRA 15 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 7.763
* O PAINEL 2 COMO INDESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 19.227
* O PAINEL 2 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 6.834

* O PAINEL 3 TEM A BARRA 8 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 9.497
* O PAINEL 3 COMO INDESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 18.771
* O PAINEL 3 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 5.939

* O PAINEL 4 TEM A BARRA 14 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 10.213
* O PAINEL 4 COMO INDESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 30.560
* O PAINEL 4 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 30.441

* O PAINEL 5 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 4

* O PAINEL 6 TEM A BARRA 21 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 7.763
* O PAINEL 6 COMO INDESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 19.348
* O PAINEL 6 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 6.726

* O PAINEL 7 TEM A BARRA 21 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
CARGA DE EULER PARA W= 9.497
* O PAINEL 7 COMO INDESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 23.520
* O PAINEL 7 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 7.809

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE
W= 5.939 E W= 18.771 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS
CRITICAS DOS PAINES 3 E 3 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S)
DESLOCVEL E INDESLOCVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 18.765

** EXISTEM 1 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS
AO PARAMETRO CRITICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM

MODOS	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
1	1	1.0000	-0.1921	0.5842
	2	0.9696	-0.1851	0.5639
	3	0.8913	-0.1679	0.5140
	4	0.7591	-0.1398	0.4322
	5	0.4770	-0.0847	0.2682

TRABALHO TERMINADO

EXEMPLO 5

Neste exemplo é analisada a instabilidade de um edifício com 6 painéis e 10 andares. São apenas 3 os painéis diferentes. A estrutura está representada em planta na Fig. 6-20. Nesta figura, os traços mais fortes representam partes dos painéis (1) e (2), situadas entre 2 prumadas de pilares, onde existem barras diagonais do térreo até o 5º andar. Qualquer que seja o modo de flambagem en

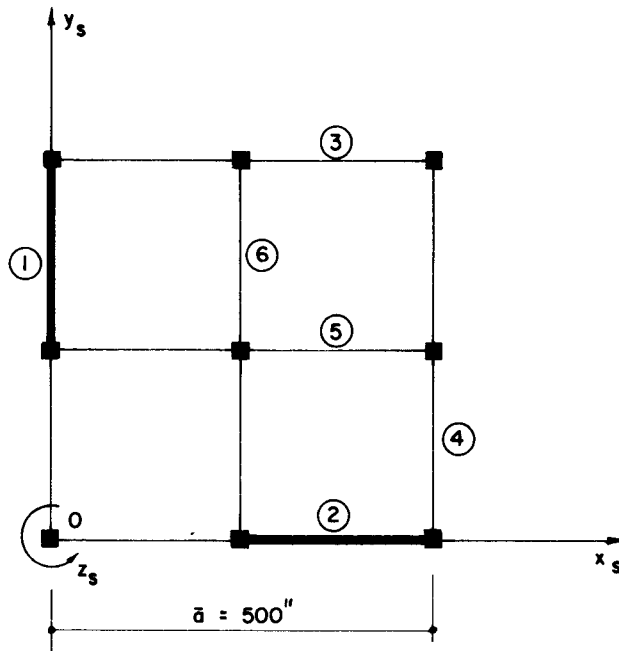


FIG.6 - 20 - Planta do edifício do exemplo 5 .

contrado, é de se esperar que as lajes dos 5 andares inferiores pos-
suam centro de rotação próximo ao eixo vertical da interseção dos
painéis (1) e (2). Para facilitar a observação do resultado previs-
to, o eixo Oz_s foi escolhido de maneira a coincidir com essa inter-
seção. Os painéis são mostrados nas Figs. 6-21, 6-22 e 6-23. Também
neste exemplo a estrutura não foi realmente calculada, mas imagina-
da, estimando valores para as grandezas geométricas das seções. Ado-
tou-se para todas as barras área da seção de 20 inch^2 todos os com-
primentos e momentos de inércia são dados em "inch" e "inch⁴". Nas
mesmas figuras, cada carga correspondente a $W = 1$, que aparece no
nó do painel, é igual à carga total que atua no nó correspondente do
mesmo andar, na estrutura tridimensional. Em seguida estão os re-
sultados impressos pelo programa:

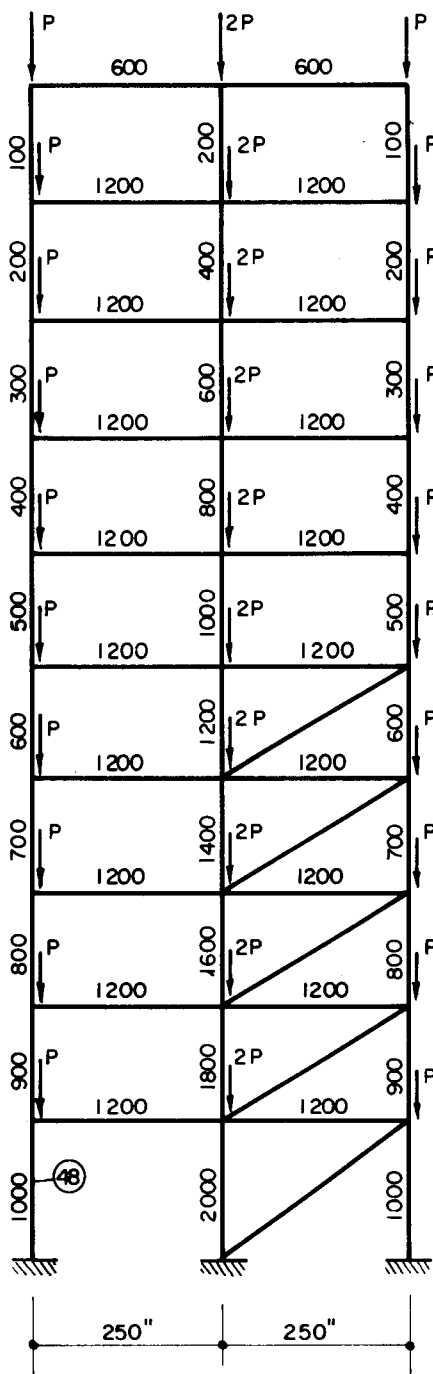


FIG. 6-21 - Painéis ① e ② para a estrutura da Fig. 6-20.

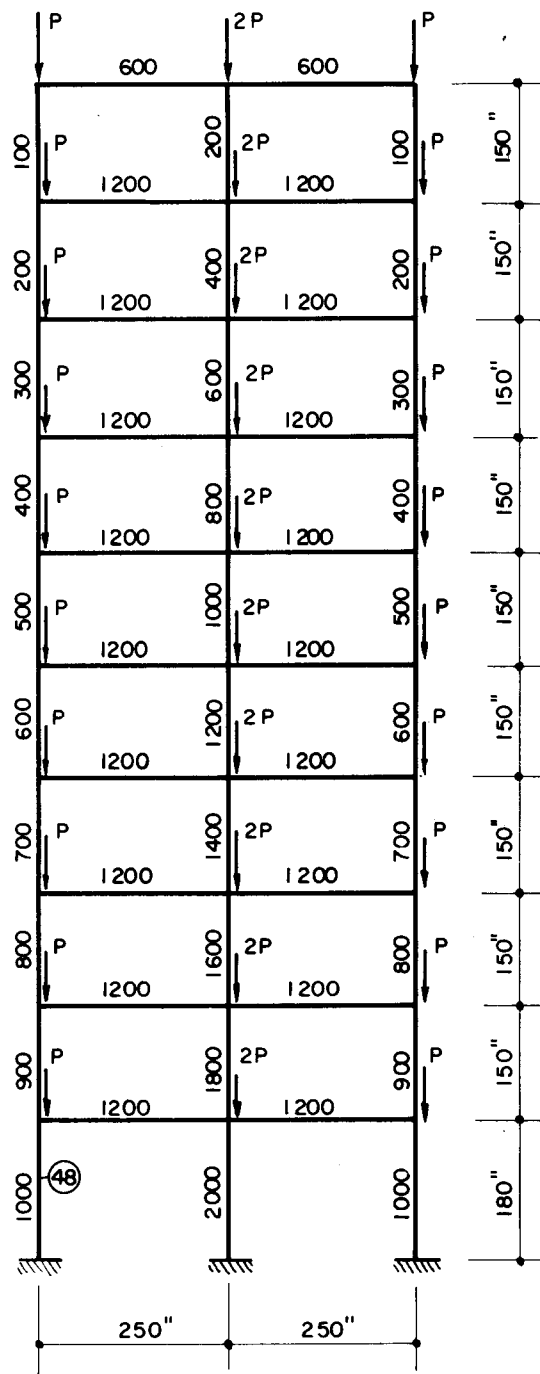


FIG. 6-22 - Painéis ③ e ④ para a estrutura da Fig. 6-20.

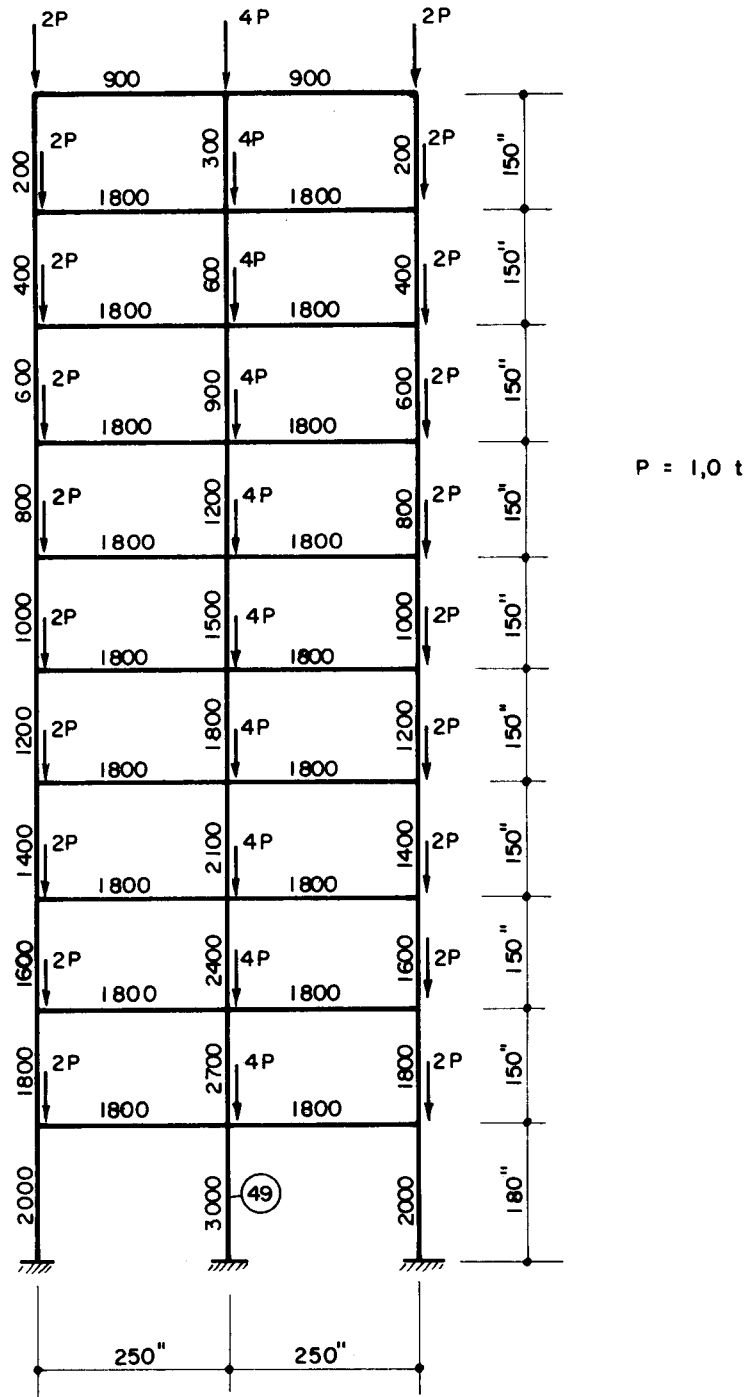


FIG.6-23 - Painéis ⑤ e ⑥ para estrutura da Fig. 6-20 .

- * O PAINEL 1 TEM A BARRA 48 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 411.239
- * O PAINEL 1 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 903.602
- * O PAINEL 1 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 351.646

- * O PAINEL 2 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1

- * O PAINEL 3 TEM A BARRA 48 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 411.239
- * O PAINEL 3 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 836.133
- * O PAINEL 3 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 224.955

- * O PAINEL 4 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 3

- * O PAINEL 5 TEM A BARRA 49 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A CARGA DE EULER PARA W= 308.429
- * O PAINEL 5 COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 680.111
- * O PAINEL 5 COMO DESLOCVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 178.994

- * O PAINEL 6 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 5

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE W= 178.994 E W= 680.111 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS CRITICAS DOS PAINES 5 E 5 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S) DESLOCVEL E INDESLOCVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 209.580

** EXISTEM 1 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS AO PARAMETRO CRITICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM

MODOS	LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
1	1	-0.0139	0.0139	1.0000
	2	-0.0145	0.0145	0.9986
	3	-0.0154	0.0154	0.9966
	4	-0.0162	0.0162	0.9928
	5	-0.0163	0.0163	0.9835
	6	-0.0146	0.0146	0.9571
	7	-0.0119	0.0119	0.8873
	8	-0.0088	0.0088	0.7406
	9	-0.0054	0.0054	0.5038
	10	-0.0020	0.0020	0.2221

TRABALHO TERMINADO

As barras críticas referidas pelo programa estão assinaladas nas Figs. 6-21, 6-22 e 6-23. Deve-se notar que não apenas as lajes dos 5 andares inferiores, mas todas as lajes tem centro de rotação próximo ao eixo Oz_s .

Neste exemplo, o parâmetro crítico encontrado para o sistema é 17% maior que o do painel menos resistente e 40% menor que o do painel mais resistente. O máximo valor P/P_E atingido na barra mais crítica é $\rho_{\max} = 0,68$. A Fig. 6-24 mostra os movimentos das lajes correspondentes ao modo de flambagem encontrado. É interessante notar que as rotações encontradas nos 5 andares superiores (onde não existem diagonais) são quase constantes e também que os centros de rotação das lajes se situam sobre o plano de simetria da estrutura.

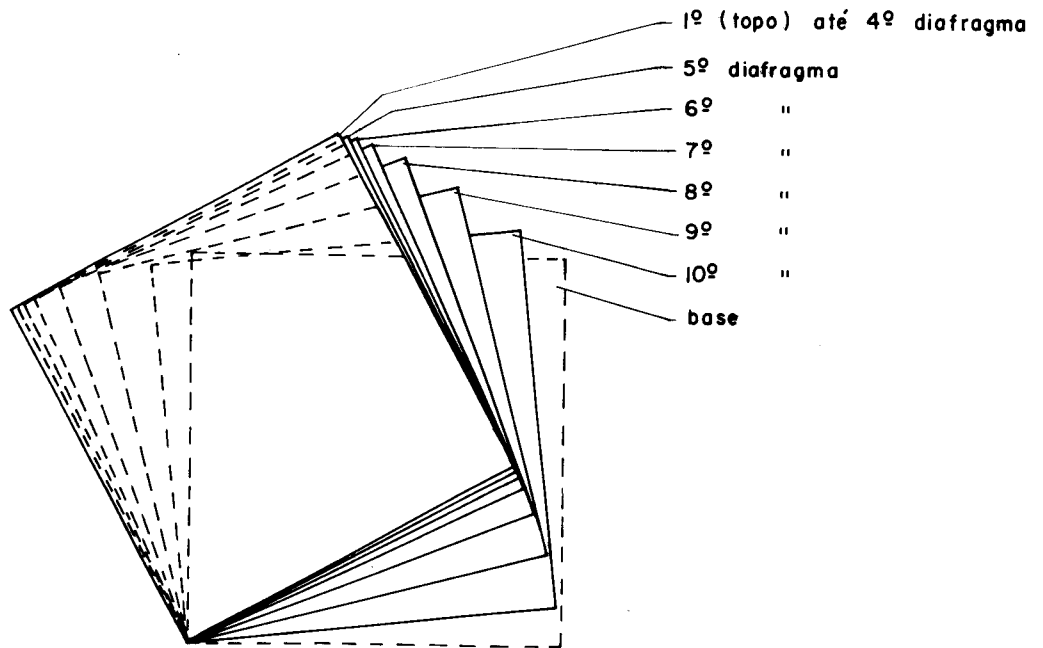


FIG. 6 - 24 - Modo de flambagem encontrado para o edifício da Fig. 6-20.

EXEMPLO 6

Neste último exemplo, a estrutura analisada é representada na Fig. 6-25.

Os painéis (1), (2), (3) e (4) são idênticos ao painel mostrado na Fig. 6-21 enquanto os painéis (5) e (6) são mostrados na Fig. 6-23. O sistema de coordenadas $Ox_s y_s z_s$ foi escolhido de maneira

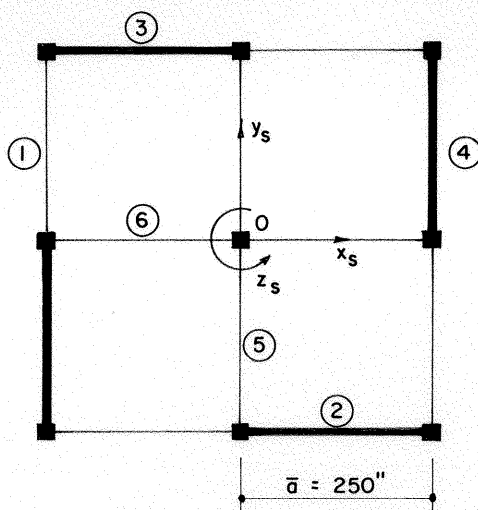


FIG.6-25 - Planta do edifício do exemplo 6

ra que os planos coordenados coincidam com os planos de simetria da estrutura. Este exemplo é apresentado apenas para verificar o efeito das barras diagonais no contraventamento da estrutura: nos modos de flambagem a serem obtidos, os deslocamentos das lajes nos 5 andares inferiores são desprezíveis enquanto são significativos os deslocamentos nos andares superiores. O parâmetro crítico encontrado para o sistema é 78% maior que o do painel menos resistente e 10% menor que o do painel mais resistente. A máxima relação P/P_E atingida na barra mais crítica é $\rho_{max} = 1,03$. O resultado impresso é dado a seguir:

```

*****
* O PAINEL 1 TEM A BARRA 48 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 411.239
* O PAINEL 1 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 903.602
* O PAINEL 1 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 351.646

* O PAINEL 2 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 3 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1
* O PAINEL 4 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 1

* O PAINEL 5 TEM A BARRA 49 CRITICA, ATINGINDO ANTES QUE TODAS A
  CARGA DE EULER PARA W= 308.429
* O PAINEL 5 COMO INDESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 680.111
* O PAINEL 5 COMO DESLOCÁVEL TEM PARAMETRO CRITICO W= 178.994

* O PAINEL 6 ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS QUE O PAINEL 5
  
```

** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVALO ENTRE
W= 178.994 E W= 680.111 VALORES ESTES CORRESPONDENTES AS CARGAS
CRITICAS DOS PAINELIS 5 E 5 RESPECTIVAMENTE SUPOSTO(S)
DESLOCAVEL E INDESLOCAVEL

** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMETRO CRITICO W= 317.731

** EXISTEM 2 MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIADOS
AO PARAMETRO CRITICO W

** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM

MODDO 1

----- LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	0.9846	0.0000	0.0000
3	0.9111	0.0000	0.0000
4	0.6976	0.0000	0.0000
5	0.3386	0.0000	0.0000
6	0.0432	0.0000	0.0000
7	0.0226	0.0000	0.0000
8	0.0144	0.0000	0.0000
9	0.0069	0.0000	0.0000
10	0.0021	0.0000	0.0000

MODDO 2

----- LAJE	DESL.X	DESL.Y	ROT.Z
1	0.0000	1.0000	0.0000
2	0.0000	0.9846	0.0000
3	0.0000	0.9111	0.0000
4	0.0000	0.6976	0.0000
5	0.0000	0.3386	0.0000
6	0.0000	0.0431	0.0000
7	0.0000	0.0226	0.0000
8	0.0000	0.0144	0.0000
9	0.0000	0.0069	0.0000
10	0.0000	0.0021	0.0000

TRABALHO TERMINADO

7. PROGRAMA PARA O CÁLCULO AUTOMÁTICO

7.1 - Introdução. Características do Programa

Para a aplicação dos procedimentos descritos nos capítulos anteriores na análise de instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios, foi escrito um programa de cálculo, em linguagem FORTRAN IV, para o computador IBM-1130 com 32K de memória interna. A seguir são dadas as características do programa:

a) Identificação do Programa: INETE (Instabilidade de Estruturas tridimensionais de Edifícios). O programa é executado fornecendo à leitora de cartões os dois comandos:

```
// XEQ INETE 01
*LOCAL,LDDSP,VIN1P,VINSS
```

b) Limitações de "tamanho" da estrutura:

Número máximo de andares do edifício:	13
Número máximo de nós em cada painel:	33
Número máximo de barras em cada painel:	60
Relação entre o número de andares (n_a) e o número de prumadas de pilares (n_p) em cada painel:	$n_a(1+n_p) \leq 40$
Número máximo de painéis:	7

Esta última limitação pode ser facilmente modificada, alterando no programa o comando DEFINE FILE, de maneira a ampliar a área de memória auxiliar para armazenamento dos dados relativos a cada painel e da matriz de rigidez calculada para o mesmo.

c) Organização do programa:

O programa principal faz uso de 3 subrotinas principais e de 6 subrotinas secundárias cujas funções são as seguintes:

INETE - Realiza a leitura e impressão dos dados que definem o edifício e imprime mensagens relativas ao cálculo.

LDDSP - Realiza a leitura e impressão dos dados que definem cada painel.

VIN1P - Calcula os parâmetros críticos do painel suposto indescalável e suposto deslocável.

- VINSS - Calcula o parâmetro crítico do edifício e os modos de flambagem associados.
- STPNL - Calcula a matriz de rigidez do pórtico correspondente às rotações dos nós, ou então, correspondente às translações dos andares.
- VINGS - Verifica se uma matriz simétrica é definida positiva com o método de GAUSS, ou então, efetua a decomposição da banda superior pelo mesmo método.
- SIMBR - Calcula os elementos da matriz de rigidez da barra que contribuem na matriz de rigidez do painel.
- INVGJ - Faz a inversão da matriz quadrada pelo método de GAUSS-JORDAN sem pivotamento.
- AVJCB - Determina todos os auto-valores e auto-vetores de uma matriz pelo método de JACOBI.
- INVPV - Faz a inversão da matriz quadrada pelo método de GAUSS-JORDAN, usando o máximo pivô em cada eliminação.

A interligação entre o programa principal e as diversas subrotinas é mostrada na Fig. 7-1.

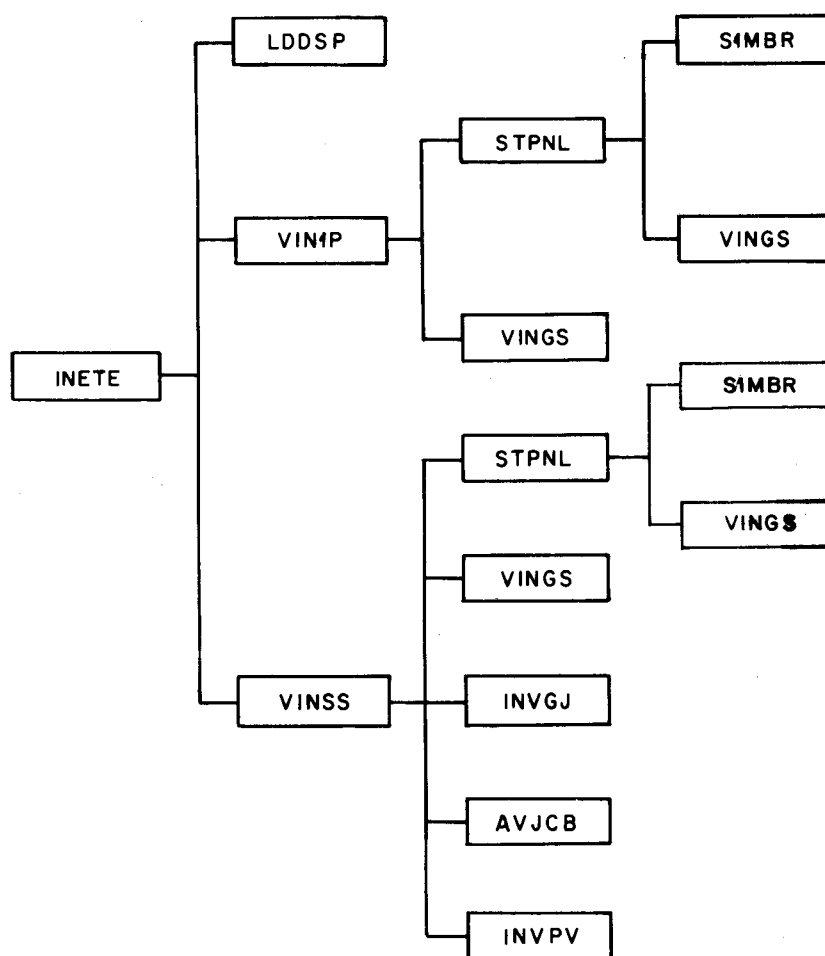


FIG. 7-1-Interligação entre o programa principal e as subrotinas.

d) Identificadores de variáveis:

A tabela III lista os principais identificadores usados no programa principal e nas subrotinas:

TABELA III

Identificadores	Definição
NA	Número de andares (número de lajes).
NPANS	Número de painéis.
NPNEL	Número do painel.
IRP	Indicador de painel repetido.
NJ	Número de nós do painel.
M	Número de barras do painel.
NP	Número de prumadas de pilares do painel.
X(),Y()	Coordenadas dos nós do painel (no sistema de coordenadas contido em seu plano).
JJ()	Extremidade início da barra.
JK()	Extremidade fim da barra.
E	Módulo de Elasticidade.
AX()	Área da seção transversal da barra.
IZ()	Momento de inércia da seção da barra.
W	Parâmetro multiplicador do carregamento vertical do painel.
AM1W1()	Esforço de compressão na barra, correspondente a $W = 1$.
AM1C()	Esforço de compressão na barra para o valor corrente do parâmetro W.
L()	Comprimento da barra.
CX(),CY()	Cossenos diretores da barra.
T()	Elemento da matriz $[t^P]$ de transformação dos deslocamentos do edifício nos deslocamentos do painel em cada andar.
WCP(,1)	Parâmetro crítico do pórtico suposto deslocável.
WCP(,2)	Parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável.
XILW	Extremo inferior do intervalo de variação de W onde será procurado o parâmetro crítico do edifício.
SLW	Extremo superior do mesmo intervalo de variação de W.
SMD(,)	Elemento da matriz de rigidez da barra para os eixos orientados nas direções vertical e horizontal

TABELA III (cont.)

Identificadores	Definição
SP(,)	Elemento da matriz de rigidez do painel.
J1, J2, J3, J4	Índices de deslocamentos do painel.
IDS, JDS	Índices dos deslocamentos do sistema.
IDL, JDL	Índices dos deslocamentos da laje (3 por laje).
SS(,)	Elemento da matriz de rigidez do sistema (edifício).
CE	Carga de EULER para a barra.
SO	Relação P/P_E para a barra.
ROMAX	Relação P/P_E para a barra crítica.
IBC	Número da barra crítica.
WCB	Parâmetro crítico para a barra suposta bi-articulada nas extremidades.
LBS	Largura da banda superior de uma matriz simétrica.
ITR	Número do ciclo de iteração.
SCM1, SCM2, SCM3 e SCM4	Constantes de rigidez da barra.
IACR	Indicador de que foi atingida a carga crítica do sistema (edifício).
C	Extremo superior dos círculos de GERSHGORIN.
AMAVM	Número de multiplicidade do auto-valor máximo (correspondente ao parâmetro crítico do edifício).
IAD	Número do deslocamento, no topo do edifício, ausente nos modos duplos de flambagem.

7.2 - Preparação dos dados em cartões para o programa de análise de instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios

Os cartões de dados para o programa INETE, devem ser fornecidos ao computador na forma e ordenação da tabela IV. Na última coluna desta tabela, as expressões entre parênteses são dados alfa numéricos que o programa lê nos cartões e imprime na impressora. O programa de cálculo foi elaborado de maneira a imprimir os dados na impressora em posições de coluna idênticas as dos dados escritos nos cartões. Esse procedimento traz a vantagem de facilitar a preparação dos dados da estrutura tridimensional, quando se tem os dados impressos de uma estrutura analisada anteriormente. Para facilitar a tarefa de elaboração dos dados de uma estrutura qualquer, na tabela V estão listados os dados impressos para a estrutura da Fig. 6-9 (que tem os painéis das Figs. 6-3 e 6-5). Na mesma

TABELA IV

Dados		Nº de cartões	Valores numéricos e alfanuméricos em cada cartão
Dados relativos ao sistema.	a. Número de lajes	1	(NUMERO DE LAJES); NA
	b. Número de painéis	1	(NUMERO DE PAINES); NPANS
Dados relativos a um painel ainda não repetido.	a. Número do painel e índice de repetição	1	(PAINEL NUMERO); NPNEL, IRP
	b. Número de nós	1	(NUMERO DE NOS); NJ
	c. Nº de barras	1	(NUMERO DE BARRAS); M
	d. Nº de pilares	1	(NUMERO DE PILARES); NP
	e. Mód.de Elast.	1	(MODULO DE ELASTICIDADE); E
	f. Cabeçalho	1	(COORDENADAS DOS NOS)
	g. Sub-cabeçalho	1	(NO X Y)
	h. Coordenadas dos nós	NJ	K,X(K),Y(K)
	i. Cabeçalho	1	(CARACTERISTICAS E PROPR.DAS BARRAS)
	j. Sub-cabeçalho	1	(NO JJ JK AX IZ AM1W1)
k. Características e propriedades das barras	M	K,JJ(K),JK(K),AX(K),IZ(K),AM1W1(K)	
l. Cabeçalho	1	(MATRIZ T)	
m. Elementos da matriz $[t^P]$	1	T(1),T(2),T(3)	
Dados relativos a um painel repetido (idêntico ou anterior).	a. Nº do painel e ind.de repet.	1	(PAINEL NUMERO); NPNEL, IRP
	b. Cabeçalho	1	MATRIZ T
	c. Elementos da matriz $[t^P]$	1	T(1),T(2),T(3)

tabela V, os números que estão mais à esquerda são os números de cada cartão de dados, numerados apenas na tabela e não nos próprios cartões. Os cartões da tabela V seguem a forma e ordem determinada pela tabela IV. Pode-se notar pela tabela V que para

TABELA V

Coluna do cartão →	1	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45		
Dados relativos ao sistema	1	NUMERO DE LAJES							3				
	2	NUMERO DE PAINES							6				
Dados relativos ao painel ainda não repetido.	3	PAINEL NUMERO							1		0		
	4	NUMERO DE NOS							8				
	5	NUMERO DE BARRAS							9				
	6	NUMERO DE PILARES							2				
	7	MODULO DE ELASTICIDADE							13500.				
	8	COORDENADAS DOS NOS											
	9		NO	X		Y							
	10		1	0.00		570.00							
	11		2	300.00		570.00							
	12		3	0.00		420.00							
	13		4	300.00		420.00							
	14		5	0.00		240.00							
	15		6	300.00		240.00							
	16		7	0.00		0.00							
	17		8	300.00		0.00							
	18	CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS											
	19	BARRA	JJ	JK		AX			IZ		AMIWI		
	20	1	1	2		10.00			450.00		0.00		
	21	2	3	4		10.00			450.00		0.00		
	22	3	5	6		10.00			600.00		0.00		
	23	4	1	3		10.00			150.00		0.50		
	24	5	2	4		10.00			150.00		0.50		
	25	6	3	5		10.00			300.00		1.00		
	26	7	4	6		10.00			300.00		1.00		
	27	8	5	7		10.00			450.00		1.75		
	28	9	6	8		10.00			450.00		1.75		
	29	MATRIZ T											
	30		0.000		1.000		-1.000						
	Painel idêntico ao anterior	31	PAINEL NUMERO							2		1	
		32	MATRIZ T										
33			0.000		1.000		1.000						
Painel idêntico ao anterior	34	PAINEL NUMERO							3		1		
	35	MATRIZ T											
	36		1.000		0.000		-1.000						
Painel idêntico ao anterior	37	PAINEL NUMERO							4		1		
	38	MATRIZ T											
	39		1.000		0.000		1.000						

TABELA V (Cont.)

Coluna do cartão	→	1	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45		
Dados relativos ao painel ainda não repetido.	40	PAINEL NUMERO							5	0				
	41	NUMERO DE NOS							8					
	42	NUMERO DE BARRAS							9					
	43	NUMERO DE PILARES							2					
	44	MODULO DE ELASTICIDADE							13500.					
	45	COORDENADAS DOS NOS												
	46	NO	X	Y										
	47	1	0.00	570.00										
	48	2	300.00	570.00										
	49	3	0.00	420.00										
	50	4	300.00	420.00										
	51	5	0.00	240.00										
	52	6	300.00	240.00										
	53	7	0.00	0.00										
	54	8	300.00	0.00										
	55	CARACTERISTICAS E PROPRIEDADES DAS BARRAS												
	56	BARRA	JJ	JK	AX	IZ	AMIWI							
	57	1	1	2	10.00	300.00	0.00							
	58	2	3	4	10.00	300.00	0.00							
	59	3	5	6	10.00	400.00	0.00							
	60	4	1	3	10.00	100.00	0.50							
	61	5	2	4	10.00	100.00	0.50							
	62	6	3	5	10.00	200.00	1.00							
	63	7	4	6	10.00	200.00	1.00							
	64	8	5	7	10.00	300.00	1.75							
	65	9	6	8	10.00	300.00	1.75							
	66	MATRIZ T												
	67	0.000	1.000	0.000										
	Painel idên- tico ao ante- rior	68	PAINEL NUMERO							6	1			
		69	MATRIZ T											
		70	1.000	0.000	0.000									

os dados que são números inteiros é reservado um campo de 5 colunas em cada cartão, enquanto para os dados que são números reais são reservadas 10 colunas. Os dados dos painéis repetidos devem ser fornecidos logo após os dados do painel ainda não repetido, que antecede os repetidos que lhe são idênticos. Considere-se o cartão nº3 que é o 1º cartão de dados do painel número 1. O valor $IRP = 0$, na 40ª coluna deste cartão indica que o painel é ainda não repetido. Testando este valor de IRP, o programa passa à leitura dos dados relativos ao painel. Se $IRP = 1$, como aparece no cartão 31, o programa lerá apenas mais 2 cartões (nºs 32 e 33)

para o painel, correspondentes aos dados da matriz $[t^P]$ de posição do painel. Na tabela IV, nota-se que são só 2 os cartões de dados relacionados apenas com o sistema (cartões 1 e 2 na tabela V). Para definir um painel ainda não repetido são necessários $M+NJ+11$ cartões de dados. O painel repetido requer 3 cartões. A estrutura da Fig. 6-9, cujos cartões de dados aparecem na tabela V, possui os painéis de número 1 e de número 5 diferentes, sendo os painéis 2, 3 e 4 idênticos ao de número 1 e o painel 6 idêntico ao de número 5.

Os nós e as barras de cada painel podem ser fornecidos em qualquer ordem para o programa, não havendo necessidade de serem ordenados, como aparecem nos cartões de dados da tabela V. Deve-se ressaltar que o programa supõe que os nós de cada painel são numerados como determinado no parágrafo 2.1 (Fig. 2-1). Baseado naquela convenção, o programa adotará, para cada painel, os últimos n_p nós como engastes perfeitos. Se para alguma barra for dado o número do nó início maior que o número do nó fim, o programa faz automaticamente a correção.

Pode-se notar nas tabelas IV e V que alguns cartões fornecem apenas dados alfanuméricos (cartões 8, 9, 18, 19, 29, 32, 35, 38, 45, 46, 55, 66 e 69). Note-se também que a 1ª coluna de todos os cartões é deixada em branco por ser esta coluna adotada para controle da impressora no sistema de computação IBM-1130.

7.3 - Programa de cálculo em linguagem FORTRAN IV

As listagens do programa principal e das subrotinas utilizadas são dadas nas páginas seguintes.

7.4 - Explicação para o programa de análise de instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios

Algumas explicações resumidas são dadas a seguir para o programa em linguagem FORTRAN IV listado nas páginas seguintes.

a) Programa Principal INETE:

1) Linhas 1 até 9. É impresso o título do programa e são lidos os valores NA e NPANS.

2) Linhas 10 até 12. Se existem menos que 3 painéis no edifício, o programa não é executado.

```

1 // FOR
2 *EXTENDED PRECISION
3 *IOCS(CARD,1403PRINTER,KEYBOARD,TYPEWRITER,PLOTTER,DISK)
4 *LIST SOURCE PROGRAM
5 *NAME INETE
6
7 REAL IZ(60),L(60)
8 COMMON XNOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP,NJ,M,NP,E,X(33),Y(33),
9 1 JJ(60),JK(60),AX(60),IZ,AMIWI(60),AMIC(60),L,CX(60),CY(60),T(3),
10 2 WCP(7,2),XILW,SLW,SMD(6,6),SP(40,40),SS(40,40)
11 DEFINE FILE I(10,320,U,IR),2(10,320,U,IR),3(10,320,U,IR),
12 1 4(10,320,U,IR),5(10,320,U,IR),6(10,320,U,IR),7(10,320,U,IR),
13 2 8(50,320,U,IR),9(50,320,U,IR),10(50,320,U,IR),11(50,320,U,IR),
14 3 12(50,320,U,IR),13(50,320,U,IR),14(50,320,U,IR)
15 C1. *****IMPRESSAO DO CABECALHO E LEITURA DO NRO DE LAJES, NRO DE PAINES
16 WRITE(5,1)
17 1 FORMAT(//4X,ANALISE DE INSTABILIDADE DE ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL
18 1DE EDIFICIO'/1X,72('**'))
19 DO 10 I=1,2
20 READ(2,2)(XNOME(J),J=1,6),NOME(I)
21 10 WRITE(5,2)(XNOME(J),J=1,6),NOME(I)
22 2 FORMAT(6A4,I6)
23 NA=NOME(1)
24 NPANS=NOME(2)
25 IF(NPANS-3)102,101,101
26 101 WRITE(5,3)
27 3 FORMAT(1X,72('**'))
28 C2. *****LEITURA DOS DADOS DE CADA PAINEL
29 DO 20 I=1,NPANS
30 CALL LDDSP
31 20 WRITE(NPNEL'I)IRP,NJ,M,NP,E,X,Y,JJ,JK,AX,IZ,L,CX,CY,AMIWI,T
32 C3. *****VERIFICACAO DA INSTABILIDADE DE CADA PAINEL
33 DO 30 I=1,NPANS
34 NPNEL=I
35 READ(NPNEL'I)IRP,NJ,M,NP,E,X,Y,JJ,JK,AX,IZ,L,CX,CY,AMIWI,T
36 IF(IRP)5,4,5
37 4 IUPNR=NPNEL
38 CALL VINIP
39 GO TO 30

```

```
23 5 WCP(NPNEL,1)=WCP(IUPNR,1)
24 WCP(NPNEL,2)=WCP(IUPNR,2)
25 WRITE(5,6)NPNEL,IUPNR
26 6 FORMAT(1X,' O PAINEL',I3,2X,'ISOLADO TEM AS MESMAS CARGAS CRITICAS Q
27 1UE O PAINEL',I3/)
28 30 CONTINUE
29 C4. *****DETERMINACAO DOS LIMITES ENTRE OS QUAIS SERA PESQUISADA
30 C A INSTABILIDADE DO SISTEMA
31 SLW=10.**35
32 DO 40 I=1,NPANS
33 IF(WCP(I,2)-SLW)7,40,40
34 7 SLW=WCP(I,2)
35 NPNC2=I
36 40 CONTINUE
37 XILW=10.**35
38 DO 50 I=1,NPANS
39 IF(WCP(I,1)-XILW)8,50,50
40 8 XILW=WCP(I,1)
41 NPNC1=I
42 50 CONTINUE
43 C5. *****INTERRUPCAO DO PROGRAMA SE NAO EXISTIR INTERVALO
44 C ONDE A INSTABILIDADE DO SISTEMA POSSA SER PESQUISADA
45 IF(SLW-XILW)9,9,12
46 9 WRITE(5,11)NPNC2,NPNC1
47 11 FORMAT(1X,'** NAO HA INTERVALO DE VARIACAO DE W PARA ANALISAR A INS
48 TABILIDADE',/1X, DO SISTEMA. O PAINEL',I4,' SUPOSTO INDESLOCABEL S
49 2E TORNA INSTAVEL',/1X,' ANTES QUE O PAINEL SUPOSTO DESLOCABEL MAIS
50 3 CRITICO(PAINEL',I3,I4,2X,'I4,2X,'RESPECTIV
51 CALL EXIT
52 12 WRITE(5,13)XILW,SLW,NPNC1,NPNC2
53 13 FORMAT(1X,'** A INSTABILIDADE DO SISTEMA SERA ANALISADA NO INTERVAL
54 10 ENTRE',/1X, W='F10.3,2X'E W='F10.3,2X'VALORES ESTES CORRESPONDE
55 2NTES AS CARGAS',/1X,' CRITICAS DOS PAINES',I3,2X'E',I4,2X,'RESPECTIV
56 3AMENTE SUPOSTO(S)',/1X,' DESLOCABEL E INDESLOCABEL',/)
57 C6. *****VERIFICACAO DA INSTABILIDADE DO SISTEMA
58 CALL VINSS
59 WRITE(5,14)
60 14 FORMAT(/1X,72('**')/25X,'TRABALHO TERMINADO'////)
```

```

C7. *****IMPRESSAO DOS AUTO-VALORES MULTIPLOS E DO MENOR AUTO-VALOR
   WRITE(5,15)(SS(I,I),I=1,8)
15  FORMAT(1X,** ABAIXO ESTAO OS 8 MAIORES AUTO-VALORES DA MATRIZ TRAN
   1SFORMADA'/4X'DA MATRIZ DE RIGIDEZ CORRESPONDENTE AS ACES PERTUBAD
   2ORAS ( O MAIOR'/4X'AUTO-VALOR CORRESPONDE A CARGA CRITICA E AOS MO
   3DOS DE FLAMBAGEM )'//(4X,4E20.10))
      N2=3*NA
      WRITE(5,16)SS(N2,N2)
16  FORMAT(1X,** VALOR DO MENOR AUTO-VALOR ( DEVE SER POSITIVO )'//4X,
      1E20.10)
      GO TO 17
102 WRITE(5,103)
103 FORMAT(//1X,** PROBLEMA PREJUDICADO. E PRECISO HAVER PELO MENOS 3
      1PAINAIS'/4X'PARA QUE O PROGRAMA SEJA EXECUTADO'.)
17  CALL EXIT
      END
// DUP      WS UA INETE
*STORE

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
  SUBROUTINE LDDSP
  REAL IZ(60),L(60)
  COMMON XNOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP,NJ,M,NP,E,X(33),Y(33),
1  JJ(60),JK(60),AX(60),IZ,AMLW1(60),AMIC(60),L,CX(60),CY(60),T(3),
2  WCP(7,2),XILW,SLW,SMD(6,6),SP(40,40),SS(40,40)
C1. *****LEITURA DO NRO DO PAINEL, INDICE DE REPETICAO, NRO DE
C      PRUMADAS DE PILARES
      READ(2,2)(XNOME(J),J=1,6),NPNEL,IRP
      WRITE(5,2)(XNOME(J),J=1,6),NPNEL,IRP
2  FORMAT(6A4,I6,I10)
      IF(IRP)13,3,13
3  DO 10 I=1,3
      READ(2,4)(XNOME(J),J=1,6),NOME(I)
10  WRITE(5,4)(XNOME(J),J=1,6),NOME(I)
4  FORMAT(6A4,I6)

```

56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69

1
2
3
4
5
6
7
8

```
9 NJ=NOME(1)
10 M=NOME(2)
11 NP=NOME(3)
12 READ(2,5)(XNOME(J),J=1,6),E
13 WRITE(5,5)(XNOME(J),J=1,6),E
14 5 FORMAT(6A4,F11.0)
15 C2. *****LEITURA DAS COORDENADAS DOS NOS
16 DO 20 I=1,2
17 READ(2,6)XNOME
18 20 WRITE(5,6)XNOME
19 6 FORMAT(20A4)
20 DO 30 I=1,NJ
21 READ(2,7)K,X(K),Y(K)
22 WRITE(5,8)K,X(K),Y(K)
23 7 FORMAT(I5,2F10.0)
24 8 FORMAT(I5,2F10.2)
25 C3. *****LEITURA DAS BARRAS, INCIDENCIAS, SECOES E ESFORCOS PARA W=1
26 DO 40 I=1,2
27 READ(2,6)XNOME
28 40 WRITE(5,6)XNOME
29 DO 50 I=1,M
30 READ(2,9)K,JJ(K),JK(K),AX(K),IZ(K),AMIW1(K)
31 FORMAT(3I5,F10.0,F10.0,F10.0)
32 IF(JJ(K)-JK(K))50,11,11
33 11 JAUX=JJ(K)
34 JJ(K)=JK(K)
35 JK(K)=JAUX
36 50 WRITE(5,12)K,JJ(K),JK(K),AX(K),IZ(K),AMIW1(K)
37 12 FORMAT(3I5,F10.2,F10.2,F10.2)
38 C4. *****CALCULO DOS COMPRIMENTOS E COSSENDOS DIRETORES DAS BARRAS
39 DO 60 I=1,M
40 N1=JJ(I)
41 N2=JK(I)
42 XL=X(N2)-X(N1)
43 YL=Y(N2)-Y(N1)
44 L(I)=SQRT(XL**2+YL**2)
45 CX(I)=XL/L(I)
46 CY(I)=YL/L(I)
```

C5. *****LEITURA DA MATRIZ (T) DE TRANSF. DE DESLOC. DE DESLOC. DO SISTEMA NOS
C

44
45
46
47
48
49
50
51
52

```
13 READ(2,6)XNOME
   WRITE(5,6)XNOME
   READ(2,14)T
14 FORMAT(3F10.0)
   WRITE(5,15)T
15 FORMAT(3F10.3)
   WRITE(5,16)
16 FORMAT(1X,72('**'))
   RETURN
   END
```

```
// DUP
*STORE WS UA LDDSP
```

// FOR

```
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
```

```
SUBROUTINE VINIP
```

```
REAL IZ(60),L(60)
```

```
COMMON XNOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP,NJ,M,NP,E,X(33),Y(33),
```

```
1 JJ(60),JK(60),AX(60),IZ,AMIWI(60),AMIC(60),L,CX(60),CY(60),T(3),
```

```
2 WCP(7,2),XILW,SLW,SMD(6,6),SP(40,40),SS(40,40)
```

C1. *****CALCULO DE (RO=P/PE) E OBTENCAO DA BARRA CRITICA

```
PI=3.141616
```

```
ROMAX=-1.*10.**35
```

```
DO 10 I=1,M
```

```
IF(IZ(I))10,10,801
```

```
801 CE=PI**2*E*IZ(I)/L(I)**2
```

```
RO=AMIWI(I)/CE
```

```
IF(RO-ROMAX)10,10,1
```

```
1 ROMAX=RO
```

```
IBC=I
```

```
10 CONTINUE
```

```
WCB=1.0/ROMAX
```

```
WRITE(5,2)NPNEL,IBC,WCB
```

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


```
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48

2 FORMAT(IX,* O PAINEL,I3,2X,TEM A BARRA,I3,2X,CRITICA, ATINGINDO
1 ANTES QUE TODAS A,I3, CARGA DE EULER PARA W='F10.3)
C2. *****VERIFICACAO DA INSTABILIDADE DO PORTICO COMO INDESLOCAVEL
W1=0.0
W2=4.*WCB
IND=0
LBS=NP+2
IF(LBS-NA*NP)803,803,802
802 LBS=NA*NP
803 N1=1
N2=NA*NP
DO 40 ITR=1,10
W=(W1+W2)/2.0
DO 20 I=1,M
20 AMIC(I)=AM1WI(I)*W
CALL STPNL(2)
PIVOT=10.**35
DO 30 I=N1,N2
IF(SP(I,I)-PIVOT)3,30,30
3 PIVOT=SP(I,I)
30 CONTINUE
IF(PIVOT)6,6,4
4 CALL VINGS(SP,N1,N2,LBS,INS,IND)
5 W1=W
GO TO 40
6 W2=W
40 CONTINUE
W=(W1+W2)/2.0
7 WCP(NPNEL,2)=W
WRITE(5,8)NPNEL,W
8 FORMAT(IX,* O PAINEL,I3,2X,COMO INDESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO
1 W='F10.3)
C3. *****VERIFICACAO DA INSTABILIDADE DO PORTICO DESLOCAVEL
W1=0.0
W2=W
IND=0
LBS=NA
```

```
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79

IF(LBS-6)902,902,901
901 LBS=6
902 N1=NA*NP+1
      N2=NA*NP+NA
      NDISC=NPNEL+7
      DO 160 ITR=1,10
      IF(ITR-1)701,701,702
701 CALL STPNL(3)
702 WRITE(NDISC,1)SP
      W=(W1+W2)/2.0
      DO 140 I=1,M
140 AMIC(I)=AM1W1(I)*W
      CALL STPNL(1)
      PIVOT=10.**35
      DO 150 I=N1,N2
      IF(SP(I,I)-PIVOT)15,150,150
15 PIVOT=SP(I,I)
150 CONTINUE
16 CALL VINGS(SP,N1,N2,LBS,INS,IND)
17 W1=W
      GO TO 160
18 W2=W
160 CONTINUE
      W=(W1+W2)/2.0
19 WCP(NPNEL,1)=W
      WRITE(5,21)NPNEL,W
21 FORMAT(1X,' O PAINEL',I3,2X' COMO DESLOCAVEL TEM PARAMETRO CRITICO
      1 W='F10.3/)
      RETURN
      END
// DUP      WS UA VINIP
*STORE
```

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE STPNL(INDP)
  REAL IZ(60),L(60)
  COMMON XNOME(20),NOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP,NJ,M,NP,E,X(33),Y(33),
1  JJ(60),JK(60),AX(60),IZ,AMIWI(60),AMIC(60),L,CX(60),CY(60),T(3),
2  WCP(7,2),XILW,SLW,SMD(6,6),SP(40,40),SS(40,40)
C1. *****MATRIZ DE RIGIDEZ DO PORTICO INDESLOCVEL
  IND=1
  INS=1
  N1=1
  N2=NA*NP
  N3=N2+1
  N4=NA*NP+NA
  IF(INDP-2)9,1,1
1  DO 10 I=1,N2
  DO 10 J=I,N2
10 SP(I,J)=0.0
  IF(INDP-2)5,2,5
2  DO 20 N=1,M
  CALL SIMBR(N,2)
  J1=JJ(N)
  J2=JK(N)
  IF(J2-N2)3,3,4
3  SP(J1,J2)=SP(J1,J2)+SMD(1,2)
  SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
4  SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
20 CONTINUE
  GO TO 25
C2. *****MATRIZ DE RIGIDEZ DO PORTICO DESLOCVEL
5  DO 40 J=N3,N4
  DO 40 I=N1,J
40 SP(I,J)=0.0
  DO 50 N=1,M
  J3=N2+(JJ(N)-1)/NP+1
  J4=N2+(JK(N)-1)/NP+1
  J1=JJ(N)

```

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28

```
29 J2=JK(N)
30 IF(J3-J4)6,50,6
31 6 CALL SIMBR(N,3)
32 IF(J4-N4)7,7,8
33 7 SP(J1,J2)=SP(J1,J2)-SMD(1,1)
34 SP(J1,J4)=SP(J1,J4)-SMD(1,3)
35 SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
36 SP(J2,J3)=SP(J2,J3)-SMD(1,3)
37 SP(J2,J4)=SP(J2,J4)+SMD(1,3)
38 SP(J3,J4)=SP(J3,J4)-SMD(3,3)
39 SP(J4,J4)=SP(J4,J4)+SMD(3,3)
40 8 SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
41 SP(J1,J3)=SP(J1,J3)+SMD(1,3)
42 SP(J3,J3)=SP(J3,J3)+SMD(3,3)
43 50 CONTINUE
44 GO TO 15
45 9 NDISC=NPNEL+7
46 READ(NDISC,1)SP
47 DO 60 N=1,M
48 J3=N2+(JJ(N)-1)/NP+1
49 J4=N2+(JK(N)-1)/NP+1
50 J1=JJ(N)
51 J2=JK(N)
52 IF(J3-J4)12,11,12
53 11 CALL SIMBR(N,2)
54 SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
55 SP(J1,J2)=SP(J1,J2)+SMD(1,2)
56 SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
57 GO TO 60
58 12 CALL SIMBR(N,1)
59 IF(J4-N4)13,13,14
60 13 SP(J1,J2)=SP(J1,J2)+SMD(1,2)
61 SP(J1,J4)=SP(J1,J4)-SMD(1,3)
62 SP(J2,J2)=SP(J2,J2)+SMD(1,1)
63 SP(J2,J3)=SP(J2,J3)+SMD(1,3)
64 SP(J2,J4)=SP(J2,J4)-SMD(1,3)
65 SP(J3,J4)=SP(J3,J4)-SMD(3,3)
66 SP(J4,J4)=SP(J4,J4)+SMD(3,3)
```

```
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94

14 SP(J1,J1)=SP(J1,J1)+SMD(1,1)
   SP(J1,J3)=SP(J1,J3)+SMD(1,3)
   SP(J3,J3)=SP(J3,J3)+SMD(3,3)
60 CONTINUE
15 LBS=NP+2
   IF(LBS-NA*NP)17,17,16
16 LBS=NA*NP
17 CALL VINGS(SP,N1,N2,LBS,INS,IND)
   DO 80 J=N3,N4
   IMIN=(J-NA*NP)*NP-2*NP+2
   IF(IMIN-2)19,19,21
19 IMIN=2
21 DO 70 I=IMIN,N2
   KMIN=I-LBS+1
   IF(KMIN-IMIN+1)22,23,23
22 KMIN=IMIN-1
23 KMAX=I-1
   DO 70 K=KMIN,KMAX
70 SP(I,J)=SP(I,J)-SP(K,I)*SP(K,J)/SP(K,K)
   KI=IMIN-1
   DO 80 I=N3,J
   DO 80 K=KI,N2
80 SP(I,J)=SP(I,J)-SP(K,I)*SP(K,J)/SP(K,K)
24 DO 90 I=1,N2
   DO 90 J=I,N4
90 SP(I,J)=0.0
25 RETURN
   END
// DUP
*STORE WS UA STPNL
```

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE SIMBR(N, INDM)
REAL IZ(60), L(60)
COMMON XNOME(20), NOME(3), NA, NPANS, NPNEL, IRP, NJ, M, NP, E, X(33), Y(33),
1 JJ(60), JK(60), AX(60), IZ, AMIWI(60), AMIC(60), L, CX(60), CY(60), T(3),
2 WCP(7,2), XILW, SLW, SMD(6,6), SP(40,40), SS(40,40)
IF(INDM-2)1,1,15
1 IF(IZ(N))16,16,2
2 PI=3.141616
3 S=4.0
SC=2.0
XM=1.0
GO TO 9
4 CE=PI**2*E*IZ(N)/L(N)**2
RO =AMIC(N)/CE
U=PI/2.0*SQRT(RO)
U2=2.*U
SEN2=SIN(U2)
GOS2=COS(U2)
IF(ABS(U2-3.1416)-0.0005)5,5,6
5 S=2.4674
GO TO 8
6 SEN1=SIN(U)
GOS1=COS(U)
TAN1=SEN1/GOS1
COT2=GOS2/SEN2
S=(1.0-U2*COT2)/(TAN1-U)*U
IF(ABS(U-2.246705)-0.000005)7,7,8
7 SC=3.604
GO TO 9
8 C=(U2-SEN2)/(SEN2-U2*GOS2)
SC=S*C
9 IF(INDM-2)11,13,11
11 IF(AMIC(N))14,14,12
12 XM=2.*(S+SC)/(2.*(S+SC)-PI**2*RO)
```

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30

```
31 GO TO 14
32 SMD(1,1)=S*E*IZ(N)/L(N)
33 SMD(1,2)=SC*E*IZ(N)/L(N)
34 GO TO 17
35 SCM2=S*E*IZ(N)/L(N)
36 SCM3=(S+SC)*E*IZ(N)/L(N)**2
37 SCM4=2.*SCM3/(XM*L(N))
38 SMD(1,1)=SCM2
39 SMD(1,2)=SC*E*IZ(N)/L(N)
40 SMD(1,3)=-SCM3*CY(N)
41 SMD(3,3)=SCM4*CY(N)**2
42 GO TO 17
43 SCM1=E*AX(N)/L(N)
44 SMD(1,1)=SCM1*CY(N)**2
45 SMD(1,3)=SCM1*CX(N)*CY(N)
46 SMD(3,3)=SCM1*CX(N)**2
47 GO TO 17
48 SMD(1,1)=0.0
49 SMD(1,2)=0.0
50 SMD(1,3)=0.0
51 SMD(3,3)=0.0
52 17 RETURN
    END
// DUP      WS  UA  SIMBR
*STORE

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE VINSS
REAL IZ(60),L(60)
COMMON XNDOME(20),NDOME(3),NA,NPANS,NPNEL,IRP,NJ,M,NP,E,X(33),Y(33),
1 JJ(60),JK(60),AX(60),IZ,AMIWI(60),AMIC(60),L,CX(60),CY(60),T(3),
2 WCP(7,2),XILW,SLW,SMD(6,6),SP(40,40),SS(40,40)
IACR=0
N1=1
N2=3*NA
```

```

4  *****VERIFICACAO DA INSTABILIDADE DO SISTEMA
5
6  W1=XILW
7  W2=SLW
8  IND=0
9  LBS=3*NA
10 IF(LBS-18)2,2,1
11
12 1 LBS=18
13 2 DO 60 ITR=1,10
14  WRITE(1,3)ITR
15 3 FORMAT(/1X, INICIADO O CICLO NUMERO,I4,2X, DO PROCESSO ITERATIVO
16 1.)
17
18 W=(W1+W2)/2.0
19
20 C1.1 *****IGUALAR A ZERO MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA COMO PREPARACAO
21 C
22 PARA O CALCULO
23 4 DO 10 I=1,N2
24 DO 10 J=1,N2
25 10 SS(I,J)=0.0
26
27 C1.2 *****CONTRIBUICAO DE CADA PAINEL NA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA
28 DO 40 N=1,NPANS
29 NPANEL=N
30 READ(NPANEL,1)IRP,NJ,M,NP,E,X,Y,JJ,JK,AX,IZ,L,CX,CY,AMIW1,T
31 IF(IRP)6,5,6
32 5 DO 20 I=1,M
33 20 AMIC(I)=AMIW1(I)*W
34 CALL STPNL(1)
35 N3=NA*NP
36 6 DO 30 I=1,NA
37 IDP=N3+I
38 DO 30 IDL=1,3
39 IDS=3*(I-1)+IDL
40 DO 30 J=I,NA
41 JDP=N3+J
42 IF(J-I)7,7,8
43 7 J1=IDL
44 GO TO 9
45 8 J1=1
46 9 DO 30 JDL=J1,3
47 JDS=3*(J-1)+JDL

```



```

38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
30 SS(IDS,JDS)=SS(IDS,JDS)+T(IDL)*SP(IDP,JDP)*T(JDL)
40 CONTINUE
   PIVOT=10.**35
   DO 50 I=1,N2
   IF(SS(I,I)-PIVOT)11,50,50
11 PIVOT=SS(I,I)
50 CONTINUE
   IF(IACR)18,12,18
12 IF(PIVOT)15,15,13
13 CALL VINGS(SS,N1,N2,LBS,INS,IND)
14 W1=W
   GO TO 60
15 W2=W
60 CONTINUE
   W=(W1+W2)/2.0
16 WRITE(5,17)W
17 FORMAT(1X,** O SISTEMA SE TORNA INSTAVEL COM PARAMEIRO CRITICO W=
   1 F8.3/)
   IACR=1
   GO TO 4
18 DO 70 I=N1,N2
   DO 70 J=I,N2
70 SS(J,I)=SS(I,J)
C2. *****CALCULO DO NUMERO DE MULTIPLICIDADE DO AUTO-VALOR MAXIMO
   C=-10.**35
   DO 90 I=N1,N2
   TC=SS(I,I)
   DO 80 J=N1,N2
   IF(J-I)19,80,19
19 TC=TC+ABS(SS(I,J))
80 CONTINUE
   IF(TC-C)90,90,21
21 C=TC
90 CONTINUE
   DO 100 I=N1,N2
   DO 100 J=N1,N2
100 SS(I,J)=SS(I,J)/C

```

```
75 DO 110 I=N1,N2
76 SS(I,I)=SS(I,I)+0.05
77 CALL INVGJ(N1,N2,SS)
78 IND=1
79 CALL AVJCB(SS,SP,N1,N2,IND)
C2.1 *****ORDENACAO DOS AUTO-VETORES E AUTO-VALORES EM ORDEM DECRESCENTE
C   DESTES ULTIMOS
80 I2=N2-1
81 DO 130 I=1,I2
82 J2=N2-I
83 DO 130 J=1,J2
84 IF(SS(J,J)-SS(J+1,J+1))22,130,130
85 22 AUX=SS(J,J)
86 SS(J,J)=SS(J+1,J+1)
87 SS(J+1,J+1)=AUX
88 DO 120 K=1,N2
89 AUX=SP(K,J)
90 SP(K,J)=SP(K,J+1)
91 SP(K,J+1)=AUX
92 120 CONTINUE
C2.2 *****MULTIPLICIDADE DO AUTO-VALOR MAXIMO
93 NMAVM=1
94 DO 140 I=2,4
95 IF(ABS(1.0-SS(I,I)/SS(1,1))-0.00001)23,23,140
96 23 NMAVM=NMAVM+1
97 140 CONTINUE
98 IAD=4
99 IF(NMAVM-2)24,26,31
C3. *****CALCULO DOS AUTO-VETORES CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM
100 24 PIVOT=0.0
101 DO 150 K=1,N2
102 IF(ABS(SP(K,1))-ABS(PIVOT))150,150,25
103 25 PIVOT=SP(K,1)
104 150 CONTINUE
105 DO 160 K=1,N2
106 SP(K,1)=SP(K,1)/PIVOT
107 GO TO 35
108 26 PIVOT=10.***35
```

```
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146

DO 170 K=1,3
AUX=ABS(SP(K,1))+ABS(SP(K,2))
IF(AUX-PIVOT)27,27,170
27 IAD=K
PIVOT=AUX
170 CONTINUE
IF(IAD-2)28,29,31
28 DO 180 K=1,N2
AUX=SP(1,K)
SP(1,K)=SP(2,K)
SP(2,K)=SP(3,K)
180 SP(3,K)=AUX
GO TO 31
29 DO 190 K=1,N2
AUX=SP(2,K)
SP(2,K)=SP(3,K)
190 SP(3,K)=AUX
31 DO 200 I=1,NMAVM
DO 200 J=1,NMAVM
200 SP(I,J)=0.0
DO 210 I=1,NMAVM
210 SP(I,I)=1.0
N1=NMAVM+1
N2=3*NA
CALL INVPV(N1,N2,SP)
DO 220 I=1,NMAVM
DO 220 J=N1,N2
SP(J,I)=0.0
DO 220 K=N1,N2
SP(J,I)=SP(J,I)-SP(I,K)*SP(K,J)
220
32 IF(IAD-4)32,35,32
33 IF(IAD-2)33,34,35
DO 230 K=1,N2
AUX=SP(3,K)
SP(3,K)=SP(2,K)
SP(2,K)=SP(1,K)
230 SP(1,K)=AUX
GO TO 35
```

```

147 34 DO 240 K=1,N2
148     AUX=SP(2,K)
149     SP(2,K)=SP(3,K)
150 240 SP(3,K)=AUX
151 C4. *****IMPRESSAO DOS MODOS DE FLAMBAGEM
152 35 WRITE(5,36)NMAVM
153 36 FORMAT(1X,** EXISTEM I4,2X'MODOS FUNDAMENTAIS DE FLAMBAGEM ASSOCIA
154     100S'//1X' AO PARAMETRO CRITICO W'//)
155     WRITE(5,37)
156 37 FORMAT(1X,** DESLOCAMENTOS CORRESPONDENTES AOS MODOS DE FLAMBAGEM'
157     1//)
158     DO 250 I=1,NMAVM
159     WRITE(5,38)I
160 38 FORMAT(/4X'MODO' I3/4X,7('-''),2X'LAJE'7X'DESL.X'8X'DESL.Y'8X'ROT.Z'
161     1//)
162     DO 250 J=1,NA
163 250 WRITE(5,39)J,SP(3*J-2,I),SP(3*J-1,I),SP(3*J,I)
164 39 FORMAT(4X,I12,2X,F12.4,2X,F12.4,2X,F12.4)
165     RETURN
     END

// DUP     WS UA VINSS
*STORE

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE VINGS(S,N1,N2,LBS,INS,IND)
DIMENSION S(40,40)
IF(IND)2,1,2
1 IF(S(N1,N1))9,9,2
2 INS=1
  J1=N1+1
  DO 20 J=J1,N2
  I1=J-LBS+2
  IF(I1-N1-1)3,4,4
  3 I1=N1+1
  4 K1=I1-1

```

```
10 DO 10 I=I1,J
11 K2=I-1
12 DO 10 K=K1,K2
13 10 S(I,J)=S(I,J)-S(K,I)*S(K,J)/S(K,K)
14 IF(I=ND)20,5,20
15 5 IF(S(J,J))6,6,20
16 20 CONTINUE
17 GO TO 11
18 6 IF(J=N2)9,7,7
19 7 IF(S(J,J))9,8,8
20 8 INS=0
21 GO TO 11
22 9 INS=-1
23 11 RETURN
    END
// DUP
*STORE WS UA VINGS
```

```
1 // FOR
2 *LIST SOURCE PROGRAM
3 *EXTENDED PRECISION
4 SUBROUTINE INVGJ(N1,N2,S)
5 DIMENSION S(40,40)
6 DO 30 I=N1,N2
7 AUX=S(I,I)
8 S(I,I)=1.0
9 DO 10 J=N1,N2
10 S(I,J)=S(I,J)/AUX
11 DO 30 K=N1,N2
12 IF(I-K)1,30,1
13 1 AUX=S(K,I)
14 S(K,I)=0.0
15 DO 20 L=N1,N2
16 S(K,L)=S(K,L)-S(I,L)*AUX
17 30 CONTINUE
18 RETURN
```

```
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

        END
// DUP
*STORE      WS  UA  INVGJ

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE AVJCB(A,U,N1,N2,IND)
DIMENSION A(40,40),U(40,40),AIK(40)
C1. *****PREPARACAO PARA O CALCULO DE AUTO-VALORES E AUTO-VETORES
      IF(IND)1,2,1
1    DO 10 I=N1,N2
      DO 10 J=N1,N2
10   U(I,J)=0.0
      DO 20 I=N1,N2
20   U(I,I)=1.0
2    OLDQD=0.0
      QDSFD=0.0
      DO 30 I=N1,N2
      OLDQD=OLDQD+A(I,I)**2
      J1=I+1
      IF(I-N2)3,4,4
3    DO 30 J=J1,N2
30   QDSFD=QDSFD+A(I,J)**2
C2. *****ITERACAO PELO METODO DE JACOBI PARA MATRIZES SIMETRICAS
4    EPS=10.**(-10)
      I2=N2-1
      DO 90 NITR=1,50
      DO 70 I=N1,I2
      J1=I+1
      DO 70 J=J1,N2
      Q=ABS(A(I,I))-A(J,J)
      IF(Q-EPS)7,7,5
5    IF(ABS(A(I,J))-EPS)70,70,6
6    P=2.*A(I,J)*Q/(A(I,I)-A(J,J))
      AUX=SQRT(P*P+Q*Q)
```

```
26 CSN=SQRT((1.0+Q/AUX)/2.0)
27 SEN=P/(2.*CSN*AUX)
28 GO TO 8
29 7 CSN=1.0/SQRT(2.0)
30 SEN=CSN
31 8 IF(IND)9,11,9
32 9 DO 40 K=N1,N2
33 AUXKI=U(K,I)
34 U(K,I)=AUXKI*CSN+U(K,J)*SEN
35 U(K,J)=AUXKI*SEN-U(K,J)*CSN
36 11 DO 50 K=I,N2
37 IF(K-J)12,12,14
38 12 AIK(K)=A(I,K)
39 A(I,K)=AIK(K)*CSN+A(K,J)*SEN
40 IF(K-J)50,13,50
41 13 A(J,K)=AIK(K)*SEN-A(J,K)*CSN
42 GO TO 50
43 14 AUXIK=A(I,K)
44 A(I,K)=AUXIK*CSN+A(J,K)*SEN
45 A(J,K)=AUXIK*SEN-A(J,K)*CSN
46 50 CONTINUE
47 AIK(J)=AIK(I)*SEN-AIK(J)*CSN
48 DO 60 K=N1,J
49 IF(K-I)15,15,16
50 AUXKI=A(K,I)
51 A(K,I)=AUXKI*CSN+A(K,J)*SEN
52 A(K,J)=AUXKI*SEN-A(K,J)*CSN
53 GO TO 60
54 16 A(K,J)=AIK(K)*SEN-A(K,J)*CSN
55 60 CONTINUE
56 70 A(I,J)=0.0
57 QD=0.0
58 DO 80 I=N1,N2
59 QD=QD+A(I,I)**2
60 IF(1.0-OLDQD/QD-10.**(-5))18,17,17
61 17 OLDQD=QD
62 90 CONTINUE
63 18 RETURN
```

```

// END
// DUP
*STORE MS UA AVJCB

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*EXTENDED PRECISION
SUBROUTINE INVPV(N1,N2,S)
DIMENSION S(40,40),IND1(40),IND2(40)
DO 10 I=N1,N2
10 IND1(I)=0
I2=0
1 PIVOT=-1.0
DO 30 I=N1,N2
5 IF(IND1(I))30,2,30
2 DO 20 J=N1,N2
5 IF(IND1(J))20,3,20
3 AUX=ABS(S(I,J))
4 IF(AUX-PIVOT)20,20,4
4 IPV=I
JPV=J
PIVOT=AUX
20 CONTINUE
30 CONTINUE
5 IF(PIVOT)11,12,5
5 IND1(JPV)=IPV
6 IF(IPV-JPV)6,7,6
6 DO 40 K=N1,N2
AUX=S(IPV,K)
S(IPV,K)=S(JPV,K)
40 S(JPV,K)=AUX
I2=I2+1
IND2(I2)=JPV
7 AUX=S(JPV,JPV)
S(JPV,JPV)=1.0
AUX=1./AUX
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
```



```
28 DO 50 J=NI,N2
29 S(JPV,J)=S(JPV,J)*AUX
30 DO 70 K=NI,N2
31 IF(K-JPV)8,70,8
32 AUX=S(K,JPV)
33 S(K,JPV)=0.0
34 DO 60 L=NI,N2
35 S(K,L)=S(K,L)-S(JPV,L)*AUX
36 70 CONTINUE
37 GO TO 1
38 9 JPV=IND2(I2)
39 IPV=IND1(JPV)
40 DO 80 K=NI,N2
41 AUX=S(K,IPV)
42 S(K,IPV)=S(K,JPV)
43 S(K,JPV)=AUX
44 I2=I2-1
45 11 IF(I2)9,14,9
46 12 WRITE(5,13)
47 13 FORMAT(IX:** MATRIZ SINGULAR E INVERTIDA COM OS ERROS DECORRENTES*
48 1/)
49 GO TO 5
50 14 RETURN
END
// DUP
*STORE WS UA INVPV
// XEQ INETE 01
*LOCAL,LDDSP,VINIP,VINSS
```

3) Linhas 13 até 15. Os dados referentes a cada painel são lidos pela subrotina LDDSP e em seguida são armazenados no disco.

4) Linhas 16 até 28. Os dados relativos a cada painel e os parâmetros críticos do painel, trabalhando isoladamente, são calculados pela subrotina VIN1P. Se o painel é repetido, os valores de seus parâmetros críticos são idênticos ao do painel anterior.

5) Linhas 29 a 40. São determinados os extremos do intervalo de variação de W, onde será procurado o parâmetro crítico do edifício (vide eq. 6.15).

6) Linhas 41 a 52. Se o intervalo de variação de W for degenerado, o programa imprime mensagem e termina. Se existir o intervalo, são impressos os valores dos extremos.

7) Linhas 53 a 55. O parâmetro crítico do edifício e os modos de flambagem são determinados pela subrotina VINNS.

8) Linhas 56 a 65. Como teste dos cálculos efetuados, o programa imprime o menor e os 8 maiores auto-valores da matriz $\left(\frac{1}{c} [S_s] + \lambda^* [I]\right)^{-1}$ (eq. 6.17).

9) Linhas 66 a 69. É impressa a mensagem de erro, se o edifício possui menos que 3 painéis.

b) Subrotina LDDSP:

1) Linhas 1 até 14. São lidos e impressos os valores NPANEL, IRP, NJ, NP e E para o painel. Se IRP \neq 0 (painel repetido) o programa lê apenas NPANEL, IRP e vai para o comando nº 13 (linha 44).

2) Linhas 15 até 23. São lidas e impressas as coordenadas dos nós do painel assim como os cabeçalhos correspondentes.

3) Linhas 24 a 35. São lidas e impressas as incidências das barras, áreas das seções transversais, momentos de inércia e esforços de compressão correspondentes a W = 1.

4) Linhas 36 a 43. São calculados os comprimentos e os cossenos diretores de todas as barras do painel.

5) Linhas 44 a 52. São lidos e impressos os elementos da matriz $[t^P]$ (eq. 6.1) do painel.

c) Subrotina VIN1P:

1) Linhas 1 até 14. É determinada a barra crítica e o valor do parâmetro W correspondente à carga de EULER na mesma

barra. Em seguida são impressos os números do painel, da barra crítica e o valor do parâmetro W.

2) Linhas 15 e 16. São estabelecidos os extremos do intervalo de W onde será procurada a carga crítica do pórtico suposto indeslocável.

3) Linha 17. É adotado $IND = 0$. Esta variável é um parâmetro para a subrotina VINGS que será chamada logo adiante.

4) Linhas 18 a 20. É determinada a largura $l_{bs\theta}$ da banda superior da matriz de rigidez $[S_{\theta\theta}^P]$ (eq. 3.1).

5) Linhas 21 a 22. São calculados os índices do 1º e do último deslocamentos correspondentes a $[S_{\theta\theta}^P]$.

6) Linha 23. Iniciado o processo iterativo para determinação do parâmetro crítico do pórtico suposto indeslocável.

7) Linha 24 a 26. Para W é tomado o valor médio dos extremos do intervalo e são calculados os esforços axiais nas barras correspondentes ao valor de W.

8) Linha 27. É chamada a subrotina STPNL que calcula a matriz de rigidez $[S_{\theta\theta}^P]$ (eq. 3.1). Esta matriz é calculada quando é 1 o valor do parâmetro da subrotina.

9) Linhas 28 a 33. Se a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ possui elemento negativo ou nulo na diagonal principal, é não definida positiva e pode-se tomar outro intervalo de variação de W.

10) Linha 34. A subrotina VINGS, com o parâmetro de entrada $IND = 0$ verifica, pelo método de eliminação de GAUSS, se a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ é ou não definida positiva.

11) Linhas 35 a 39. Se o parâmetro INS fornecido pela subrotina VINGS, valer zero ou -1, a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ é não definida positiva. Se $INS = 1$ a matriz é definida positiva. Em qualquer das alternativas, o intervalo de variação de W é alterado convenientemente.

12) Linhas 40 a 44. O valor do parâmetro crítico do pórtico indeslocável é impresso pelo programa.

13) Linhas 45 e 46. São estabelecidos os extremos do intervalo de W onde será procurada a carga crítica do pórtico suposto deslocável.

14) Linha 47. É tomado $IND = 0$ para uso como parâmetro de entrada na subrotina VINGS.

15) Linhas 48 a 50. É determinada a largura da banda superior de $[S_{HH}^{**}]$ (eq. 5.8).

16) Linhas 51 a 53. São calculados os índices do 1º e do último deslocamentos correspondentes a $[S_{HH}^{**}]$. É calculado tam-

bem o número do arquivo onde será armazenada a matriz $[S_{HH}^*]_{Ax}$ (eq. 5.15).

17) Linhas 54 a 56. Iniciado o processo iterativo para determinação do parâmetro crítico do pórtico suposto deslocável. No primeiro ciclo é calculada a matriz $[S_{HH}^*]_{Ax}$ e armazenada no disco. A matriz $[S_{HH}^*]_{Ax}$ é calculada quando é 3 o parâmetro da subrotina STPNL.

18) Linhas 57 a 61. Com o parâmetro 2 na subrotina STPNL, é calculada a matriz $[S_{HH}^{**}]$ correspondente ao valor de W.

19) Linhas 62 a 73. Da mesma maneira como para o pórtico indeslocável, o parâmetro crítico do pórtico deslocável é determinado.

20) Linhas 74 a 79. O valor do parâmetro crítico do pórtico deslocável é impresso pelo programa.

d) Subrotina STPNL (INDP)

1) Linhas 1 e 2. É tomado $IND = 1$ para uso como parâmetro na subrotina VINGS. Para INS é atribuído o valor 1, apenas para que a variável não apareça como indefinida durante a compilação.

2) Linhas 3 a 6. São calculados os índices do 1º e do último deslocamentos correspondentes às matrizes $[S_{\theta\theta}^P]$ e $[S_{HH}^P]$ (eq. 2.13).

3) Linhas 7 a 10. Se $INDP = 2$ ou 3 são igualados a zero os elementos de $[S_{\theta\theta}^P]$ como preparação para o cálculo de $[S_{\theta\theta}^P]$ ou $[S_{HH}^*]_{Ax}$ (eq. 5.15).

4) Linha 11. Se $INDP = 2$, será calculada a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$. Se $INDP = 3$, será calculada a matriz $[S_{HH}^*]_{Ax}$.

5) Linhas 12 até 21. É calculada a matriz $[S_{\theta\theta}^P]$ através das eqs. (2.19). O valor 2 para o parâmetro de SLMBR indica que são calculados alguns elementos da matriz de rigidez da barra do pórtico indeslocável (eq. 3.17).

6) Linhas 22 a 24. São igualados a zero os elementos de $[S_{HV}]_{Ax}$ e de $[S_{HH}]_{Ax}$ (eq. 5.11) como preparação para o cálculo de $[S_{HH}^*]_{Ax}$.

7) Linhas 25 a 44. É calculada a matriz da eq. (5.11) através das eqs. (5.16). O valor 3 para o parâmetro de SLMBR indica que são calculados alguns elementos da barra de treliça (eq. 5.12 e Fig. 5-10).

8) Linhas 45 e 46. É lida no arquivo a matriz de rigidez $[S_{HH}^*]_{A_x}$ do pórtico suposto deslocável.

9) Linhas 47 a 70. A matriz da eq.(5.9) é calculada e superposta à matriz da eq.(5.11) para obtenção em seguida de $[S_{HH}^{**}]$. O valor 1 para o parâmetro de SLMBR indica que são calculados alguns elementos da matriz de rigidez da barra de pórtico sem considerar a contribuição da rigidez axial (eq. 5.10).

10) Linhas 71 a 73. É calculada a largura da banda superior de $[S_{VV}]_{A_x}$, necessária para o cálculo de $[S_{HH}^*]_{A_x}$ com menor número de operações.

11) Linha 74. A subrotina VINGS, com o parâmetro de entrada IND = 1 efetua os cálculos indicados nas eqs.(3.30),(3.32) e(3.33), necessários para obtenção de $[S_{HH}^*]_{A_x}$ ou $[S_{HH}^*]_{I_z}$.

12) Linhas 75 a 89. São efetuados os cálculos indicados nas eqs.(4.12),(4.13),(4.14) e(4.15), para obtenção de $[S_{HH}^*]_{A_x}$ ou $[S_{HH}^*]_{I_z}$.

13) Linhas 90 a 94. Se INDP = 3, devem ser igualados a zero os elementos de $[S_{VV}]_{A_x}$ e $[S_{VH}]_{A_x}$ (eq. 5.11) antes que $[S_{HH}^*]_{A_x}$ seja armazenada no disco. O armazenamento no disco é efetuado pela subrotina VIN1P que chamou STPNL.

e) Subrotina SLMBR (N, INDM):

1) Linha 1. Se INDM = 3 serão calculados elementos da matriz de rigidez de barra de treliça, sem considerar a influência do esforço normal na barra N. Se INDM = 1 ou 2 serão calculados elementos da matriz de rigidez da barra sem considerar a influência da rigidez axial.

2) Linha 2. Se o momento de inércia da seção da barra é zero (corresponde à barra biarticulada), serão nulos os elementos da matriz de rigidez da barra.

3) Linhas 3 a 8. Se o esforço axial é nulo, os coeficientes s, c e m dos elementos da matriz de rigidez da barra são calculados.

4) Linhas 9 a 31. São calculados os coeficientes s, c e m para a barra, considerando a influência do esforço normal de compressão, através das eqs.(3.6),(3.7) e(3.8). Note-se que para os casos de indeterminação ∞/∞ e $0x\infty$ que aparecem naquelas equa-

ções, os valores de S e SC são obtidos atribuindo aos coeficientes os valores já conhecidos, levantando a indeterminação.

5) Linhas 32 a 34. São calculados os elementos da matriz de rigidez da barra de pórtico indeslocável (eq. 3.17).

6) Linhas 35 a 42. São calculados os elementos da matriz de rigidez da barra de pórtico deslocável sem considerar a rigidez axial (eq. 5.10).

7) Linhas 43 a 47. São calculados os elementos da matriz de rigidez de barra de treliça.

8) Linhas 48 a 52. São iguallados a zero os elementos da barra de pórtico (sem considerar a rigidez axial) quando é nulo o momento de inércia da seção.

f) Subrotina VINNS:

1) Linha 1. É atribuído o valor zero a IACR como preparação para o cálculo. Quando for atingida a carga crítica do edifício será adotado IACR = 1. Este índice indica que deve ser calculada pela última vez a matriz de rigidez $[S_s]$ do edifício (eq. 6.8) para determinação dos modos de flambagem.

2) Linhas 2 até 6. São calculados os índices do 1º e do último deslocamentos correspondentes a $[S_s]$. São estabelecidos os limites de variação de W. É adotado IND = 0 para uso como parâmetro na subrotina VINGS.

3) Linhas 7 a 9. É determinada a largura l_{bSH}^* da banda superior da matriz de rigidez $[S_s]$ do edifício.

4) Linha 10. É iniciado o processo iterativo para determinação do parâmetro crítico do edifício.

5) Linhas 11 a 14. O programa envia mensagem pela máquina de escrever sobre o número do ciclo que está sendo executado. Isto é útil para se ter idéia do tempo de computação a ser gasto, antes de terminar a execução do programa. Para W, é tomado em cada ciclo o ponto médio do intervalo de variação.

6) Linhas 15 a 17. São iguallados a zero os elementos de $[S_s]$ como preparação para o cálculo.

7) Linhas 18 a 39. São calculadas as contribuições de cada painel na matriz de rigidez $[S_s]$ do sistema (vide eqs. 6-9, 6.13, 6-11 e 6-12).

8) Linhas 40 a 46. Se a carga crítica do sistema ainda não foi atingida (IACR = 0) é verificado se a matriz $[S_s]$ possui algum elemento negativo ou nulo na diagonal principal. Se is-

to acontece, a matriz é não definida positiva e outro intervalo de variação de W é adotado.

9) Linhas 47 a 62. Se o valor INS fornecido pela subrotina VINGS, valer zero ou -1, a matriz $[S_s]$ é não definida positiva. Se $INS = 1$ a matriz é definida positiva. Em qualquer das alternativas o intervalo de variação de W é alterado convenientemente.

10) Linhas 53 a 57. O valor do parâmetro crítico do edifício é impresso pelo programa. É adotado $IACR = 1$ por ter sido atingida a carga crítica do edifício.

11) Linha 58. O programa transfere o controle para o comando 4 (linha 15), para ser calculada mais uma vez a matriz de rigidez $[S_s]$, objetivando-se o cálculo dos modos de flambagem.

12) Linhas 59 a 61. Para cálculo dos modos de flambagem são necessários todos os elementos da matriz $[S_s]$ e não apenas a sua parte triangular superior.

13) Linhas 62 a 71. É calculado o valor C do extremo superior dos círculos de GERSHGORIN para a matriz $[S_s]$.

14) Linhas 72 a 76. É calculada a matriz $(\frac{1}{c}[S_s] + \lambda^*[I])$ (eq. 6.16).

15) Linhas 77 a 79. É calculada a inversa da matriz $(\frac{1}{c}[S_s] + \lambda^*[I])$ (eq. 6.17) com a subrotina INVGJ. Através da subrotina AVJCB são calculados todos os auto-vetores da matriz anterior (armazenados em $SP [,]$) e todos os auto-valores da mesma matriz (na diagonal de $SS [,]$). O parâmetro $IND = 1$ na subrotina AVJCB faz com que sejam calculados também os auto-vetores e não os auto-valores somente.

16) Linhas 80 a 92. São reordenadas as colunas de $SP [,]$ e os elementos diagonais de $SS [,]$, levando os maiores auto-valores e correspondentes auto-vetores para a posição mais à esquerda.

17) Linhas 93 a 97. É calculada a ordem de multiplicidade do maior auto-valor de $(\frac{1}{c}[S_s] + \lambda^*[I])^{-1}$.

18) Linha 98. É adotado $IAD = 4$. Se existirem 2 modos de flambagem, o valor de IAD será modificado.

19) Linhas 99 a 107. Se existe apenas 1 modo de flambagem ($NMAVM = 1$), todos os deslocamentos correspondentes a esse modo são divididos pelo deslocamento de maior módulo.

20) Linhas 108 a 114. Se existirem 2 modos de flambagem, determina-se qual o deslocamento de índice IAD que é ausente (vide eqs. 6.27 e 6.28).

21) Linha 115. Se $IAD = 1$ ou 2 devem ser realizadas permutações nas linhas da matriz $[U]$ (eq. 6.18). Se $IAD = 3$ não há necessidade de fazer permutações.

22) Linhas 116 a 125. São realizadas permutações nas linhas da matriz $[U]$ (eq. 6.18) como preparação para o produto da eq.(6.25).

23) Linhas 126 a 130. Para a matriz $[U_{AA}^*]$ (eq. 6.21) é adotada a matriz unidade.

24) Linhas 131 a 138. É calculado o produto matricial $[U_{BA}^*]' = -[U_{AB}][U_{BB}]^{-1}$ (eq. 6.25).

25) Linha 139. Se continua sendo $IAD = 4$, é porque não foram realizadas permutações nas linhas de $[U]$ e portanto não há necessidade de refazer permutações nas linhas de $[U_{AA}^*]$.

26) Linhas 140 a 150. São refeitas as permutações existentes nas linhas de $[U_{AA}^*]$ (eq. 6.29).

27) Linhas 151 a 165. Os modos de flambagem correspondentes ao parâmetro crítico são impressos pelo programa.

g) Subrotina VINGS:

Se $IND = 1$ esta subrotina faz a decomposição da parte triangular superior da matriz simétrica S , de largura LBS pelo método de decomposição de GAUSS. Se $IND = 0$ a subrotina faz a mesma decomposição, porém testando, em cada passo, se o elemento da diagonal principal é negativo ou nulo. Aparecendo algum elemento negativo ou nulo, a subrotina interrompe a decomposição de GAUSS e atribui a INS o valor -1 . Se nenhum elemento negativo ou nulo é obtido para a diagonal principal, é adotado $INS = +1$. Se apenas o último elemento da diagonal é encontrado igual a zero, sendo todos os demais positivos, é adotado $INS = 0$. Portanto, se $INS = +1$, a matriz simétrica é definida positiva. Se $INS = 0$ ou -1 , a matriz é não definida positiva.

h) Subrotina INVGJ

Esta subrotina calcula a matriz inversa da matriz S (suposta definida positiva) pelo método de GAUSS-JORDAN, adotando para pivô, em cada eliminação, o elemento que aparece na diagonal principal.

i) Subrotina AVJCB:

Se $IND = 1$, a subrotina calcula todos os auto-valores e auto-vetores da matriz simétrica A pelo método de JACOBI. Os auto-valores aparecerão na diagonal de A e os auto-vetores nas colunas correspondentes da matriz U.

Se $IND = 0$, são calculados apenas os auto-valores que aparecerão na diagonal da matriz A.

j) Subrotina INVPV:

Esta subrotina calcula a matriz inversa da matriz S pelo método de GAUSS-JORDAN, adotando em cada eliminação, o pivô de maior valor absoluto.

7.5 - Tempos de computação

O tempo de computação despendido na análise de instabilidade de estrutura tridimensional de edifício depende de diversos fatores como sejam: número de andares, número de painéis, número de prumadas de pilares de cada painel e número de painéis repetidos. Para se ter uma idéia do tempo de computação necessário em alguns problemas, a tabela VI resume os tempos gastos nos diversos exemplos do capítulo 6.

TABELA VI

Estrutura	Tempo de cálculo do parâmetro crítico.	Tempo de cálculo dos modos de flambagem.
Exemplo 1	1m 55s	20s
Exemplo 2 (Fig. 6-6)	2m 43s	17s
Exemplo 2 (Fig. 6-7)	2m 32s	13s
Exemplo 2 (Fig. 6-8)	2m 53s	21s
Exemplo 2 (Fig. 6-9)	2m 45s	20s
Exemplo 3	14m 30s	3m 10s
Exemplo 5	19m 40s	32m 00s
Exemplo 6	14m 30s	23m 40s

8. CONCLUSÕES

Pelo estudo dos exemplos resolvidos no capítulo 6, chega-se a concluir que os resultados obtidos no presente trabalho, na análise de instabilidade de estruturas tridimensionais de edifícios, é levada a bom termo, para tipos de estruturas que ocorrem frequentemente. Em alguns daqueles exemplos, nota-se que foram encontrados valores da carga crítica e modos de flambagem que podem ser previstos de antemão, o que vem comprovar a eficiência do programa de cálculo, que é baseado nos processos estudados.

O valor da carga crítica, para os diversos exemplos é obtido com tempos de computação (vide parágrafo 7.5) que não chegam a ser proibitivos, principalmente quando existem na estrutura grande número de painéis repetidos. A determinação dos modos de flambagem do edifício é um pouco demorada e é justificada pelas conclusões que se obtêm sobre o comportamento da estrutura e para assegurar-se da coincidência com alguns resultados que podem ser previstos de antemão. Uma desvantagem que acarreta a procura dos modos de flambagem é reduzir o tamanho das estruturas que podem ser analisadas. Na prática, depois de depurado o programa de cálculo, pode-se usá-lo para determinar apenas a carga crítica vertical.

A hipótese adotada de desprezar os deslocamentos verticais provenientes das deformações axiais das barras, quando comparados com os deslocamentos verticais provenientes da flexão das mesmas é justificada pela simplificação que traz ao cálculo e por tornarem aceitáveis os tempos de computação despendidos. Deve-se salientar porém, que, para estruturas muito elevadas, essa hipótese é otimista, pois superestima a rigidez da estrutura, podendo levar a valores da carga crítica que se afastam da carga crítica obtida considerando nas barras todas as deformações possíveis.

Deve-se notar, que em todo o presente trabalho, ao analisar a instabilidade da estrutura tridimensional ou dos pórticos planos, referiu-se às cargas verticais como sendo concentradas nos nós. Essa hipótese não ocorre realmente. Em geral, os painéis recebem as cargas provenientes das lajes, distribuídas sobre as vigas. As cargas que melhor descrevem o carregamento dos painéis, para efeito da análise de instabilidade serão constituídas de forças concentradas verticais e momentos concentrados nos

nós. Esse carregamento é mostrado no pórtico da Fig. 8-1. Nesta figura, se o carregamento vertical sobre as vigas for uniformemente distribuído, será $M = Pl/6$. A análise de instabilidade considere

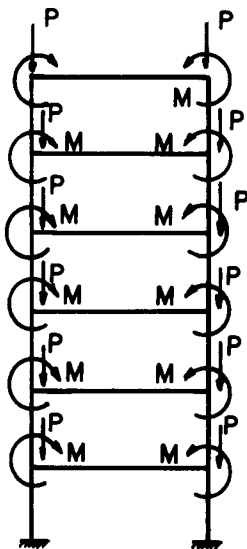


FIG. 8-1 - Cargas atuando nos nós do pórtico que melhor representam o carregamento vertical das vigas

rando o efeito das cargas M pode ser realizada, mas será mais demorada. Se fossem consideradas as cargas M da Fig. 8-1 e seus efeitos sobre os esforços axiais dos pilares, esses esforços axiais, que são calculados com simples equações de equilíbrio dos nós quando se admite a existência apenas das cargas P, se tornaria demorado e inconveniente. Para cada valor do parâmetro W seria preciso calcular diversas vezes a mesma estrutura e determinar os esforços internos nas barras. Isto seria necessário por não se conhecer "a priori" as matrizes de rigidez das barras, que dependem dos esforços axiais, os quais precisam ser encontrados. Então, dever-se-ia supor de início certos valores para os esforços axiais, calcular o pórtico com o método matricial, encontrando novos valores para os esforços axiais, repetindo-se o procedimento até encontrar valores repetidos para esses esforços. Só após esta convergência, poderia ser calculada a matriz de rigidez relativa às ações perturbadoras, correspondente ao valor de W. Além deste aumento na quantidade de cálculo, outras dificuldades surgiriam na solução do sistema de equações, quando o parâmetro W se aproximasse de seu valor crítico. Acontece porém, que com valores usuais de M e P (Fig. 8-1), os esforços axiais

nos pilares (que são os principais responsáveis pela perda de estabilidade da estrutura), pouco se alteram se são calculados como efeito de M e P ou de P atuando isoladamente. Por este motivo, e visando diminuir o tempo de computação, admite-se que o carregamento dos painéis é constituído apenas de cargas concentradas nos nós. Uma influência que pode ser considerada na análise de instabilidade de estruturas tridimensionais, mas que certamente levará a tempos de computação muito longos, é considerar os efeitos produzidos por M e P (Fig. 8-1) e também pelas cargas horizontais.

Como já se afirmou no capítulo 1, muito ainda se pode fazer para se obter uma solução mais acurada do problema de instabilidade de estruturas tridimensionais, principalmente no que se refere ao comportamento elasto-plástico da estrutura.

Mesmo para o comportamento elástico, outras hipóteses podem ser admitidas. Por exemplo, a adoção de 3 deslocamentos horizontais do sistema em cada andar, como admitido no presente trabalho, considerando nos painéis a compatibilidade de deformações axiais de pilares e barras diagonais, resolve com boa aproximação estruturas como a da Fig. 8-2. Nesta figura, na prumada de pilares DD' somente concorrem barras inclinadas pertencentes a um dos painéis que se interceptam em DD'.

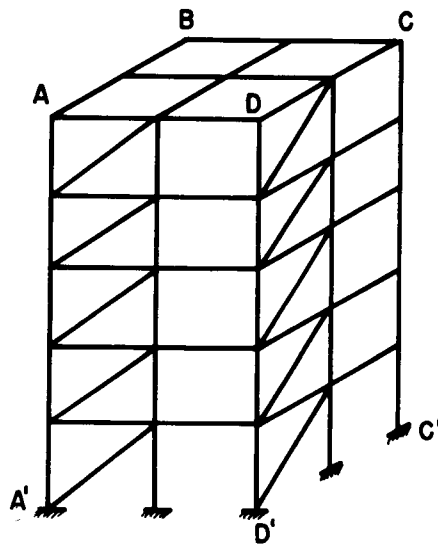


FIG. 8-2- Tipo de estrutura com barras diagonais para a qual as hipóteses de cálculo adotadas no presente trabalho representam seu comportamento com boa aproximação.

Considere-se agora a estrutura da Fig. 8-3. Nesta estrutura, na prumada de pilares DD' concorrem barras diagonais pertencentes aos dois painéis que a se interceptam. Para estruturas deste tipo, principalmente assimétricas, os painéis que se inter-

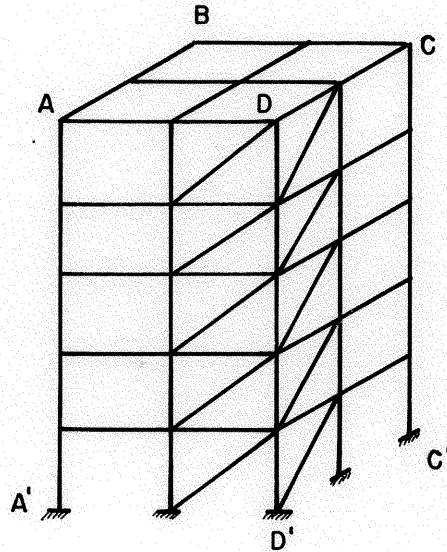


FIG. 8-3 - Tipo de estrutura com barras diagonais para a qual pode-se adotar procedimento mais refinado na análise de instabilidade.

ceptam como na prumada DD', podem trocar esforços verticais de grandeza bastante significativas, que devem ser consideradas no cálculo. Em outras palavras, ao calcular as matrizes $[S_{HH}^{**}]$ (eqs. 5-8 e 5-13) para os painéis, não se pode admitir que os pilares comuns aos dois painéis tenham deformações axiais independentes em cada painel. A análise de instabilidade de estruturas tridimensionais com essas características poderá ser realizada, adotando-se em cada andar do sistema, mais uma incógnita deslocamento. Os novos deslocamentos serão as translações verticais dos nós pertencentes à prumada DD'. Para cálculo da matriz de rigidez $[S_s]$ do sistema, pode-se admitir que as rigidezes axiais dos pilares pertencentes à DD' sejam divididas entre os painéis a se concorrentes. Essa hipótese também foi adotada por STAMATO e STAFFORD-SMITH³⁵ no cálculo do efeito do vento em estruturas tridimensionais de edifícios. Antes porém de se afirmar que a análise de instabilidade agora sugerida leva a valores muito diferentes dos obtidos com a adoção de apenas 3 deslocamentos horizontais do edifício por andar, será necessário realizar o novo tipo de análise e comparar os resultados com os do presente tra-

balho. Para essa nova hipótese, a programação automática será um pouco mais laboriosa, com tempos de computação maiores, havendo uma redução no "tamanho" das estruturas a serem analisadas com o programa.

9. BIBLIOGRAFIA

1. EULER, L. - On the column strength - Mémoires de l'Académie de Berlin, Berlin, 1759.
2. BERRY, A. - The calculation of Stresses in Aeroplane Spars - Trans. Roy. Aer. Soc., Nº1, 1916.
3. JAMES, B.W. - Principal Effects of Axial Load on Moment Distribution Analysis of Rigid Structures - N.A.C.A. Tech. Note 534, 1935.
4. MERCHANT, W. - Critical Loads of Tall Building Frames - Structural Engineer, Março de 1955, p.85.
5. ROSENBLUETH, E. - Slenderness effects in Buildings - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.91, ST1, Fevereiro de 1965.
6. GOEL, S.C. - P- Δ and Axial Column Deformation in Aseismic Frames - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.95, ST8, Agosto de 1969.
7. IFFLAND, J.S.B. - Design for Stability in High Rise Buildings - State of Art Report 2, Committee 16, ASCE-IABSE, International Conference on Tall Buildings, Bethlehem, Pa, Agosto de 1972.
8. ADAMS, P.F. - Stability of Three Dimensional Building Frames - State of Art Report 2, Committee 16, ASCE-IABSE, International Conference on Tall Buildings, Bethlehem, Pa, Agosto de 1972.
9. BLEICH, F. - Buckling Strength of Metal Structures - Mc Graw Hill Company, New York, 1952, pp 250-255.
10. JOHNSON, D.E. - Lateral Stability of Frames by Energy Methods - Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.86, EM4, Agosto de 1960.
11. BOWLES, R.E. e MERCHANT, W. - Critical Loads of Tall Building Frames, Part.IV, Structural Engineer, Junho de 1958, Nº 36, p.187.
12. LIGHTFOOT, E. - The Analysis of Wind Loading of Rigid Jointed Multi-Storey Building Frames - Civil Engineering, 1956, nº51, pp 757-887.
13. ANTUNES, H.M.C.C. - Instabilidade Elástica de Estruturas Lineares Planas Usuais - Tese de Mestrado - Esc.Eng.S.Carlos, public. EESC-USP, nº165, Fevereiro de 1972.

14. HALDORSSON, O.P. e WANG, C.K. - Stability Analysis of Frameworks by Matrix Methods - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.94, ST7, Julho de 1968.
15. SALEM, A.H. - Buckling of Trapezoidal Frames Permitted to Sway - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.95, ST12, Dezembro de 1969.
16. GOLDBERG, J.E. - Lateral Buckling of Braced Multistory Frames - Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.94, ST12, Dezembro de 1968.
17. KORN, A. - The approximation of Stability Effects on Frames Publications of International Association for Bridge and Structural Engineering. Vol.28-II, 1968, pp 101-112.
18. RUBINSTEIN, M.F. - Matrix Computer Analysis of Structures - Prentice Hall Inc, 1966, pp 186-196.
19. GERE, J.M. e WEAVER JR., W. - Analysis of Framed Structures D. Van Nostrand Co. Inc, 1965.
20. WEAVER JR., W. - Computer Programs for Structural Analysis D. Van Nostrand Co. Inc, 1967.
21. SOUZA LIMA, V.M. - Estruturas Ortogonais de Edifícios - Tese para concurso de Cátedra - Fac. de Arquitetura e Urb. da USP, São Paulo, 1968.
22. LIVESLEY, R.K. e CHANDLER, D.B. - Stability Functions for Structural Frameworks - Manchester University Press, 1956.
23. HORNE, M.R. e MERCHANT, W. - The Stability of Frames - Pergamon Press, 1965.
24. Mc MINN, S.J. - Matrices for Structural Analysis - E. and F.N. Spon Limited, 1964, pp 179-187.
25. KREYZIG, E. - Advanced Engineering Mathematics - John Wiley and Sons, Inc, 1965, pp 455-457.
26. PIPES, L.A. e HOVANESSIAN, S.A. - Matrix Computer Methods in Engineering - John Wiley and Sons, 1969, pp 69-76.
27. RALSTON, A. e WILF, H.S. - Mathematical Methods for Digital Computers, Vol.II - John Wiley and Sons, Inc, 1967, pp 94-115.
28. BARROS, I.Q. - Métodos Numéricos, vol.I, Álgebra Linear - Univ.Est.de Campinas, 1970, pp 143-158.