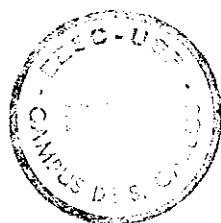


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**SOBRE O COMPORTAMENTO ESTÁTICO DOS
CABOS DE COBERTURAS PÊNSEIS**



ENG.º R. L. A. BARBATO

PUBL. n.º 167, SÃO CARLOS, MAIO DE 1972

SÔBRE O COMPORTAMENTO ESTÁTICO
DOS CABOS DE COBERTURAS PENSEIS

ENGO ROBERTO L. A. BARBATO

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos
da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para
a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas"

Orientador
Prof. Dante A. O. Martinelli

Comissão Examinadora:
Prof. Dante A. O. Martinelli
Prof. Lauro M. dos Santos
Prof. Lafael Petroni

DEDALUS - Acervo - EESC



31100016961

São Carlos, Maio de 1972

SUMÁRIO

Breve apanhado dos principais tipos de coberturas pênseis, com análise de suas características principais, e sucinto relato sobre cabos de aço.

Estudo do cabo inextensível submetido à ação conjunta e à ação isolada de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento do cabo e ao longo do vão.

Estudo do cabo inextensível submetido à ação de carga concentrada atuando simultaneamente ou com carga uniforme segundo o cabo ou com carga uniforme segundo o vão, e também ação conjunta de cargas uniforme e parcialmente distribuídas segundo o vão.

Estudo da influência da deformação do cabo provocada por cargas uniformemente distribuídas, por ação conjunta de carga concentrada e uniformemente distribuída segundo o vão e por variação de temperatura.

Alguns exemplos numéricos sugestivos onde se aplicam as diversas soluções estudadas anteriormente.

Conclusões finais.

ABSTRACT

A brief summary of the main kinds of hanging roofs, with an analysis of its principal characteristics, and a short report about steel cables are presented.

Inextensible cables under simultaneous action of two uniform loads (one referred to the cable length and the other to the cable span) are studied, as well as the isolated action of each load.

A study is then made of inextensible cables subjected to the simultaneous action of uniformly and partially distributed loads, and one concentrated load added to the uniformly distributed one.

The consequences of cable deformation caused by uniformly distributed loads, by one concentrated load and by temperature variation are thereafter analyzed.

Numerical examples for the application of the several solutions and general conclusions close the work.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Professor Dante A. O. Martinelli a orientação recebida durante o desenvolvimento do trabalho e ao Professor N. Onuchic pelas sugestões apresentadas para a elaboração do primeiro item do segundo capítulo. Agradece também aos srs. Antonio R. Lopes, Rednei Aparecido Botelho, José C. Marrara, Tomaz A. Kawauche e Antonio A. Casale pelos cuidadosos trabalhos de datilografia e desenho.

INDICE

1 - INTRODUÇÃO	
1.1 - Generalidades.....	1
1.2 - Noções sôbre coberturas pênseis.....	3
1.3 - Cabos de aço para coberturas pênseis.....	10
2 - CABOS INEXTENSÍVEIS COM CARGAS VERTICAIS UNIFORMEMENTE DIS- TRIBUÍDAS	
2.1 - Ação simultânea de cargas uniformemente distribuídas, ao longo do comprimento do cabo e ao longo do vão (so- lução exata)	
2.1.1 - Equação diferencial de equilíbrio.....	13
2.1.2 - Integração da equação diferencial de equilí- brio.....	14
2.1.3 - Constantes de integração para arranques nive- lados.....	18
2.1.4 - Constantes de integração para arranques desní- velados.....	19
2.1.5 - Comprimento do cabo.....	21
2.1.6 - Tração no cabo.....	26
2.1.7 - Fôrça horizontal H.....	26
2.2 - Carga uniformemente distribuída ao longo do comprimen- to do cabo (suspensão em catenária)	
2.2.1 - Equação diferencial de equilíbrio.....	27
2.2.2 - Integração da equação diferencial de equilí- brio.....	27
2.2.3 - Constantes de integração para arranques nive- lados.....	28
2.2.4 - Constantes de integração para arranques desní- velados.....	29
2.2.5 - Equação da catenária desnivelada em função da flecha no vértice.....	30
2.2.6 - Comprimento do cabo para arranques nivelados,	30
2.2.7 - Comprimento do cabo para arranques desnivelad- dos.....	31
2.2.8 - Tração no cabo para arranques nivelados.....	31
2.2.9 - Tração no cabo para arranques desnivelados...	32
2.2.10 - Fôrça horizontal H.....	32

2.3 - Carga uniformemente distribuída ao longo do vão (suspensão parabólica).	
2.3.1 - Equação diferencial de equilíbrio.....	32
2.3.2 - Integração da equação diferencial de equilíbrio.....	33
2.3.3 - Constantes de integração para arranques nivelados.....	33
2.3.4 - Constantes de integração para arranques desnivelados.....	34
2.3.5 - Comprimento do cabo para arranques nivelados.....	34
2.3.6 - Comprimento do cabo para arranques desnivelados.....	36
2.3.7 - Tração no cabo para arranques nivelados..	37
2.3.8 - Tração no cabo para arranques desnivelados.....	38
2.3.9 - Força horizontal H.....	38
2.3.10- Influência do deslocamento horizontal dos arranques.....	39
2.4 - Ação simultânea de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento do cabo e ao longo do vão (solução aproximada)	
2.4.1 - Equação aproximada.....	41
2.4.2 - Constantes de integração para arranques nivelados.....	42
2.4.3 - Constantes de integração para arranques desnivelados.....	42
2.4.4 - Força horizontal H para arranques nivelados.....	43
2.4.5 - Força horizontal H para arranques desnivelados.....	44
2.4.6 - Comprimento do cabo.....	45
2.4.7 - Tração no cabo.....	45

3 - CABOS INEXTENSÍVEIS COM CARGAS VERTICAIS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS, PARCIALMENTE DISTRIBUÍDAS E CARGA CONCENTRADA.	
3.1 - Ação simultânea de carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento do cabo e carga concentrada.....	46
3.2 - Ação simultânea de carga uniformemente distribuída ao longo do vão e carga concentrada.....	49
3.3 - Ação simultânea de carga uniformemente e parcialmente distribuída ao longo do vão.....	52
4 - CABOS DEFORMÁVEIS	
4.1 - Expressão do alongamento do cabo.....	57
4.2 - Carga vertical uniformemente distribuída ao longo do comprimento do cabo.	
4.2.1 - Catenária nivelada.....	58
4.2.2 - Catenária desnivelada.....	59
4.3 - Carga vertical uniformemente distribuída ao longo do vão.	
4.3.1 - Parábola nivelada.....	60
4.3.2 - Parábola desnivelada.....	62
4.4 - Carga vertical uniformemente distribuída ao longo do vão e carga concentrada.....	63
5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	65
6 - CONCLUSÕES.....	82

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - GENERALIDADES

Omitindo as grandes tendas da antiguidade, é relativamente recente o emprego de estruturas pênseis para a cobertura de grandes vãos, para o que, são particularmente indicadas. Mas têm tido grande desenvolvimento no Exterior e já começaram a ser adotadas com certa frequência em projetos nacionais. Já realizadas, por exemplo, o Pavilhão da Exposição Internacional da Indústria e Comércio e o Templo Israelita, no Rio de Janeiro, o Pavilhão do Rio Grande do Sul na Exposição do IV Centenário de São Paulo, a Igreja Nossa Senhora das Graças, em Araraquara; outras projetadas, como a sede do Esporte Clube Recife, Esporte Clube Corinthians Paulista, Universidade de Brasília, além de outras.

O presente trabalho tem por finalidade essencial fornecer elementos para o cálculo dos cabos, principalmente para o caso de coberturas pênseis não-protendidas. Consideram-se cabos inextensíveis e cabos deformáveis. De fato, as características das suspensões correntes em coberturas pênseis tornam indispensável a consideração da deformação dos cabos. O estudo dos cabos inextensíveis é porém sempre necessário, por ser básico para o estudo dos cabos deformáveis.

Por ser tipo de cobertura ainda relativamente pouco frequente entre nós, julgou-se interessante antepor aos capítulos de cálculo estático um ligeiro apanhado da tipologia, no qual se esboça uma classificação das coberturas pênseis, com ligeira análise das características e dos elementos componentes fundamentais. Descrevem-se também, para fixar ordens de grandeza, as principais características de algumas obras já realizadas com esse tipo de cobertura, entre as quais, a Arena de Raleigh, o Pavilhão do Brasil na Exposição Internacional de Bruxelas, e outras. Para terminar este primeiro capítulo, faz-se breve apanhado sobre as principais características dos cabos de aço usados normalmente nas coberturas pênseis.

No segundo capítulo estuda-se o cabo inextensível submetido à ação simultânea de cargas verticais uniformemente distribuídas ao longo do comprimento do cabo e ao longo do vão. Obtêm-se aí as equações que definem a configuração exata de equilíbrio do cabo sob ação conjunta de duas cargas e, em consequência, as equações que determinam o comprimento, a força horizontal e a tração em um ponto genérico do cabo.

Nesse mesmo capítulo estudam-se em seguida os casos particulares das cargas acima mencionadas, atuando isoladamente; a carga uniforme ao longo do cabo acarreta então configuração de equilíbrio segundo catenária, ao passo que a uniforme ao longo do vão leva à configuração parabólica. Em ambos os casos deduzem-se equações que determinam o comprimento, a força horizontal e a tração em um ponto genérico do cabo. Finalizando o capítulo dá-se solução aproximada para o caso de atuação simultânea de duas cargas. Os exemplos numéricos do capítulo 5 mostram que, para coberturas pênseis usuais (cabos com pequenas inclinações, e pequenas relações flecha/vão e desnível/vão), são muito próximos os resultados obtidos com a solução exata e com a aproximada, e mesmo aqueles obtidos simplesmente adotando como curva do cabo ou a catenária ou a parábola, somando as cargas sem considerar a diversidade de sua distribuição.

No terceiro capítulo faz-se inicialmente o estudo do cabo inextensível submetido à ação conjunta de um carregamento uniformemente distribuído no seu comprimento e de uma carga concentrada aplicada em um ponto genérico. A solução é geral e pode ser estendida para maior número de cargas concentradas.

Ainda nesse capítulo estuda-se o cabo com carga concentrada admitindo-se porém que a carga distribuída seja uniforme segundo o vão. Aqui também o estudo é feito de maneira geral permitindo eventuais extensões. Terminando o capítulo estuda-se a ação conjunta de cargas uniformemente e parcialmente distribuídas ao longo do vão.

No quarto capítulo analisam-se inicialmente os efeitos da deformação do cabo provocada ou pela carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento ou pela carga uniformemente distribuída ao longo do vão.

O exame dos cabos inextensíveis sugere claramente que, mesmo nos cabos deformáveis, a ação simultânea de ambas as cargas pode ser levada em conta com boa aproximação, adotando para a configuração do cabo ou a catenária ou a parábola. Em consequência omitiu-se, no caso dos cabos deformáveis, o estudo da ação simultânea, dada a desproporção entre o algebrismo necessário e a precisão que se obteria. Completa-se o capítulo com o estudo da deformação do cabo para ação conjunta de carga concentrada e de carga uniformemente distribuída ao longo do vão. Por simplicidade admitiram-se arranques em nível com a carga concentrada atuando no meio do vão. Procedimento análogo pode ser utilizado para estudar a deformação do cabo nos outros casos tratados no terceiro capítulo.

No quinto capítulo apresentam-se exemplos numéricos em que se aplicam a casos expressivos as diversas soluções estudadas.

Finalmente, no sexto capítulo, comparam-se os resultados numéricos dos diversos exemplos, alinhando-se algumas conclusões quanto à utilização das soluções analíticas apresentadas ao longo do presente trabalho.

1.2 - NOÇÕES SÔBRE COBERTURAS PÊNSEIS

Em essência a cobertura pênsil se compõe de uma cesta, cujos cabos - ancorados em vigas, pilares, arcos e até mesmo em rocha - sustentam o elemento de vedação, que pode ir desde o concreto, a madeira, a chapa de aço ou de alumínio até a lona ou os plásticos translúcidos.

Fundamentalmente existem duas categorias de coberturas pênsis. Na primeira categoria encontram-se as que empregam cestas não profundas, em que todos os cabos são dispostos com concavidade para cima e cuja forma depende das cargas externas aplicadas. Dentre estas destacam-se as cilíndricas, onde os cabos que formam a cesta são suspensos livremente, em geral, segundo duas geratrizes. Esse tipo de cobertura, que se adapta melhor às plantas retangulares, tende a sofrer grandes deslocamentos pela ação do vento, o que pode ser evitado com peso do material de vedação. Experiências têm mostrado que, para evitar efeitos prejudiciais de sucção, o material de vedação deve pesar de 80 a 100 kg/m². Isto pode ser conseguido, por exemplo, com placas de concreto de 4 a 5 cm de espessura colocadas sôbre os cabos. A fig.1 mostra alguns esquemas de coberturas pênsis cilíndricas.

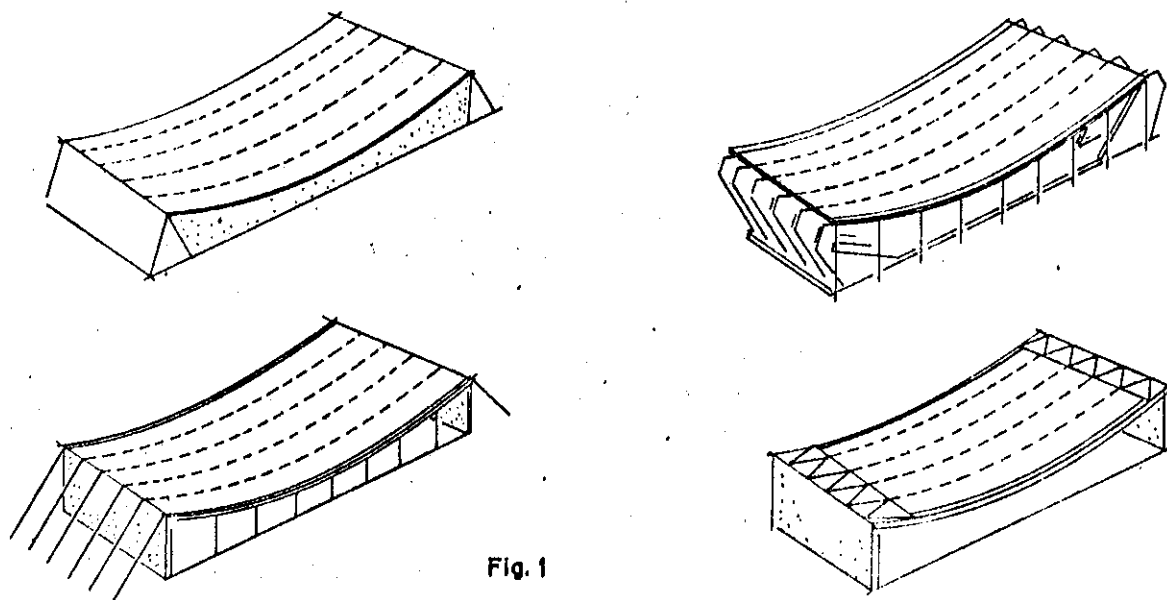


Fig.1

ESQUEMAS DE COBERTURAS PÊNSEIS CILÍNDRICAS

Outro tipo que se enquadra nas coberturas não-protendidas é a que utiliza, normalmente aos cabos, transversinas destinadas a suportarem os elementos de vedação e distribuírem melhor as cargas sobre os cabos. A sede do Caiçaras Clube em Santos e o Templo Israelita no Rio de Janeiro são duas obras que foram projetadas com esse tipo de cobertura.

A primeira se executada, teria 100m de vão, flecha de 10m, cabos de 1" afastados de 1,5m, transversinas em forma de T espaçadas de 1,5m e como elementos de vedação placas de concreto armado com 3cm de espessura. A segunda tem 30m de vão, flecha de 3m, cabos de 1" com espaçamentos de 2,4m, transversinas compostas de duas cantoneiras em L com espaçamentos de 0,90m, e para vedação placas de concreto com 3,5cm de espessura. Esse tipo de cobertura é de fácil montagem e por ser relativamente pesada, os vãos econômicos são da ordem de 100 a 150m. Outros detalhes dessas obras podem ser encontrados em Frago- so(3)*.

Ainda dentro da categoria das não-protendidas, estão as que têm dupla curvatura no mesmo sentido. Exemplo desse tipo de cobertura foi usado no Pavilhão do Brasil na Exposição Internacional de Bruxelas em 1958, idealizado pelo arquiteto Sergio Bernardes e calculado pelo engenheiro Paulo Fragoso. O Pavilhão (fig.2) tinha em planta forma retangular de lados 60 e 37m. A rede compunha-se de cabos de aço, com espaçamentos de 2m, paralelos ao lado maior, e transversinas para lelas ao lado menor. A rede assim constituída era suspensa de 4 torres situadas nos cantos do retângulo e de 8 escoras apoiadas situadas 4 em cada um dos lados menores.

Os cabos, com diâmetro de 33mm e em número de 16, tinham comprimentos variáveis entre 50,6 e 60m. Dos 16 cabos que formavam a rede, os 4 centrais estavam contidos em planos verticais enquanto que os outros 12 eram mantidos em planos inclinados pelas transversinas. Estas, solicitadas por flexo-tração, eram constituídas por duas cantoneiras 45x45x7 reunidas em forma de T. A rede foi dimensionada para carga de 150 kg/m², sendo 75 kg/m² devidos a sobrecarga de neve, 8 kg/m² de peso próprio de cabos e transversinas e 67 kg/m² para os elementos de vedação, constituídos de placas de concreto leve de 6cm de espessura e rejuntados com material compressível. Para sucção admitiram-se 60 a 70 kg/m² e o coeficiente de segurança adotado foi 2. Para maiores detalhes, consultar Frago(3) e Saillard(13).

* referência bibliográfica

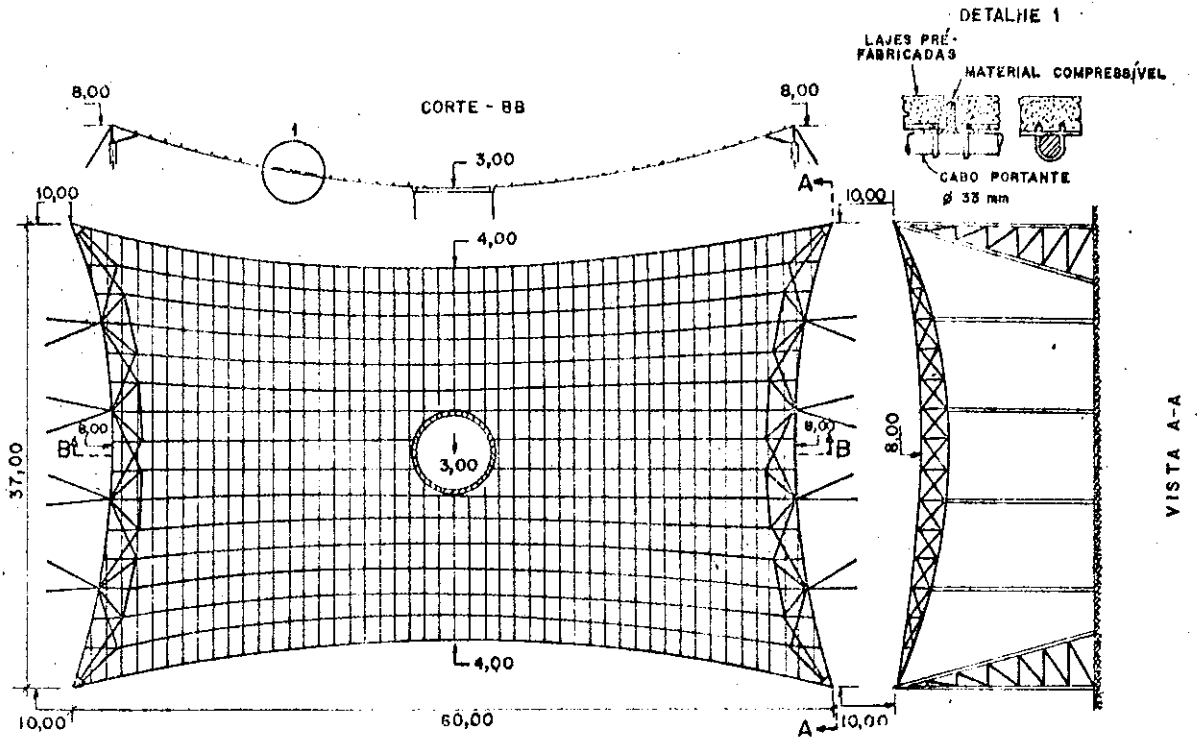


Fig. 2

PAVILHÃO DO BRASIL NA EXPOSIÇÃO DE BRUXELAS

Na segunda categoria encontram-se as coberturas que empregam cabos ou cestas protendidas. No primeiro caso enquadra-se o sistema de protensão Jawerth, (fig.3) em que o cabo portante e o cabo tensor estão contidos em um mesmo plano, sendo que um deles tem concavidade para cima e o outro concavidade para baixo. A ligação entre ambos pode ser feita com peças que, dependendo da posição relativa dos cabos, funcionam como tirantes ou escoras. A rede formada por essas "treliças" oferece boa resistência aos efeitos de sucção e as oscilações da cobertura são pequenas.

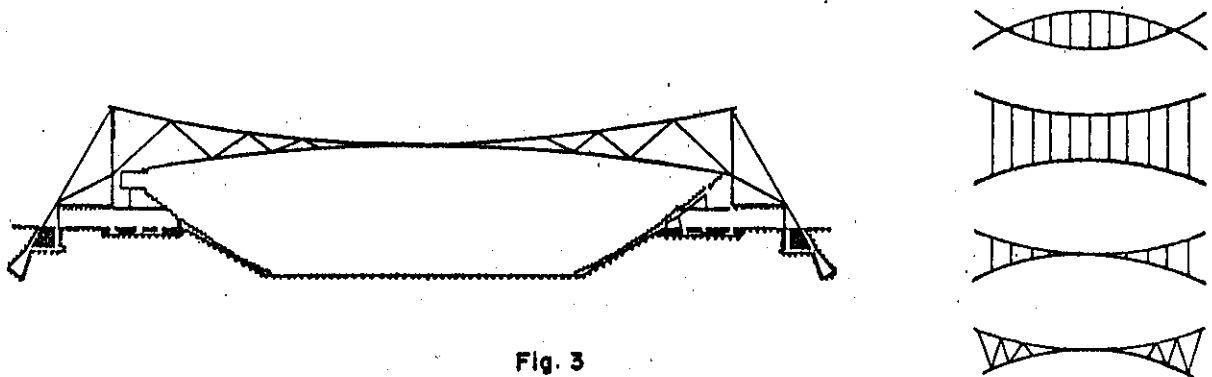


Fig. 3

SISTEMA DE PROTENSÃO JAWERTH

Nas coberturas que empregam cestas protendidas, uma família de cabos (portantes) suporta as cargas positivas (para baixo) enquanto outra família de cabos (tensores), transversais aos primeiros, é previamente tracionada de maneira a impedir que as cargas negativas anulem a solicitação de tração dos cabos portantes, opondo-se portanto à sucção do vento e reduzindo consideravelmente as oscilações da cobertura.

Dentre as obras com este tipo de cobertura destaca-se em primeiro lugar a Arena de Raleigh, construída em 1953, concepção notável de M. Nowicki e que se tornou uma das mais importantes obras da arquitetura moderna (fig. 4). A cobertura é suspensa de dois arcos parabólicos contidos em planos inclinados e suportados por pilares que só recebem esforços verticais. A rede, formada pelos cabos portantes - $\phi 19$ a 32mm - e pelos cabos tensores - $\phi 13$ a 19mm -, foi calculada para receber carga permanente de 30 kg/m^2 e duas cargas acidentais, uma positiva de 122 kg/m^2 e outra negativa de 78 kg/m^2 . Além dos cabos citados, foram utilizados tirantes suplementares com a finalidade de combater as possíveis sucções nas regiões próximas aos vértices dos arcos parabólicos. Essa solução foi adotada porque nessas regiões não foi possível, devido à pequena curvatura da rede, dar aos cabos portantes, por meio dos cabos tensores, a protensão desejada.

Como elemento de vedação foi usada tela de Orlon engomada, que posteriormente foi substituída por lâminas metálicas cobertas com isolantes térmico e devidamente protegidas contra as águas pluviais. A área coberta é de aproximadamente 9.000m^2 e os lados das malhas formadas pelos cabos têm comprimento médio de $1,83\text{m}$. Descrição mais detalhada dessa obra, pode ser encontrada em Frei Otto (10).

A primeira obra brasileira com esse tipo de cobertura foi o Pavilhão do Rio Grande do Sul na Exposição do IV Centenário de São Paulo (fig. 5). Constava de dois arcos circulares de aço laminado, distanciados de $102,80\text{m}$, com $59,40\text{m}$ de vão e 20m de flecha. Sobre os arcos circulares repousavam os 46 cabos portantes, cujas extremidades foram reunidas em 10 grupos e ancorados no solo por meio de blocos de concreto ciclópico. Os cabos tensores, em número de 19, estavam contidos em planos verticais paralelos aos planos dos arcos e também eram ancorados no solo através de blocos de concreto ciclópico. Os cabos empregados eram de aço de fabricação nacional com 163 e 133 fios e bitolas variáveis entre $5/8"$ e $15/16"$. Sobre os cabos de carga e paralelamente aos cabos tensores, repousavam caibros encurvados com a finalidade de receberem os elementos de vedação, formados por telhas on

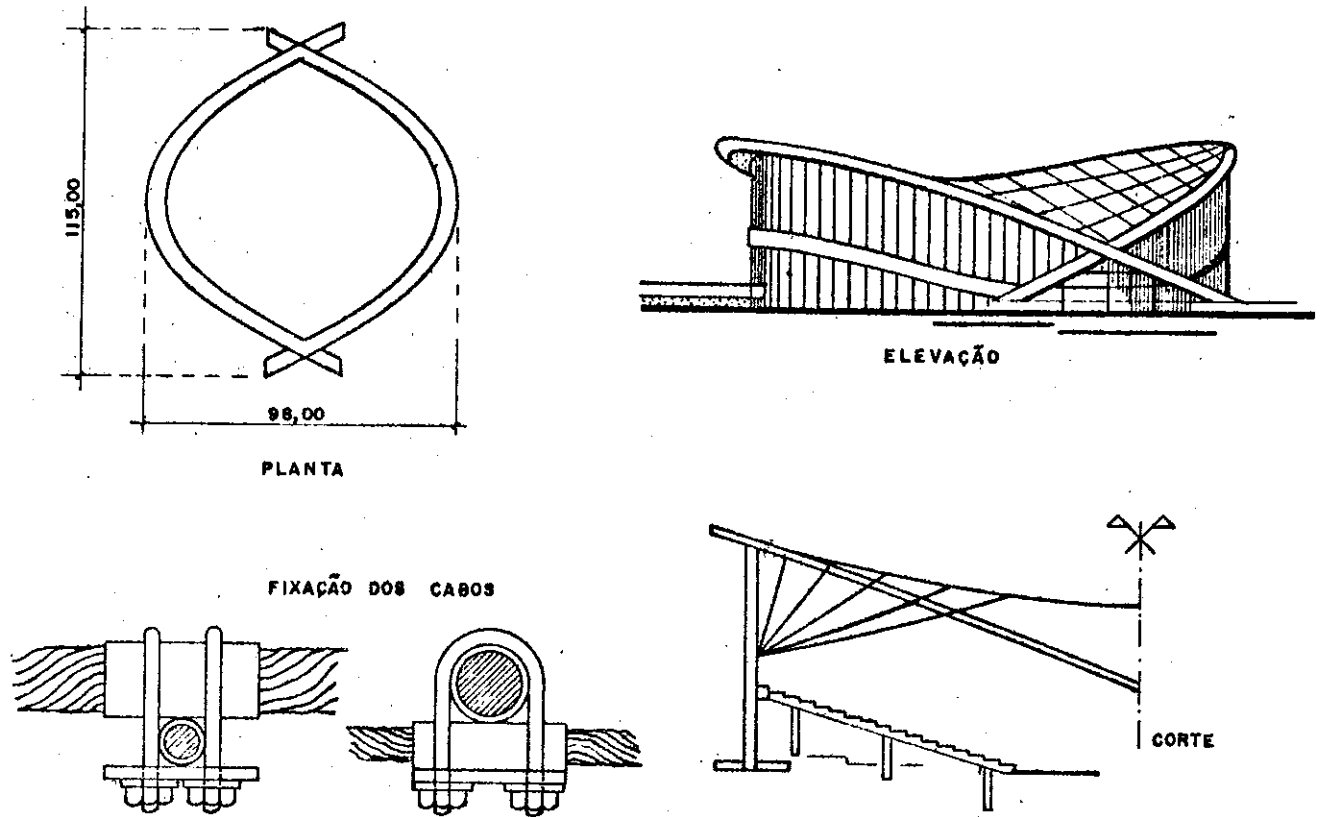


Fig. 4

ARENA DE RALEIGH

coladas de alumínio com comprimento especial de 4,55m. A área coberta pelo pavilhão era de aproximadamente 6.200m². O cálculo da cobertura e outros detalhes, podem ser encontrados em Borges(1)

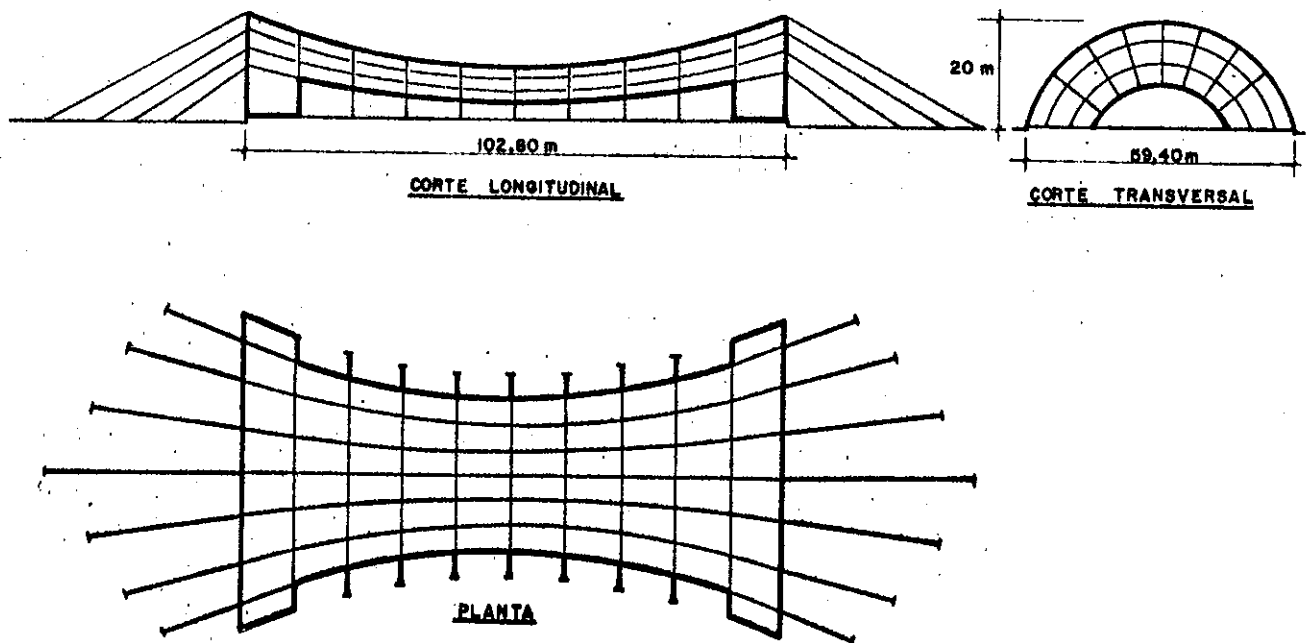


Fig. 5

PAVILHÃO DO RIO GRANDE DO SUL

Outra obra brasileira com o mesmo tipo de cobertura é o notável Pavilhão da Feira Internacional da Indústria e Comércio, construída em 1959 na cidade do Rio de Janeiro (fig.6 e 6a). A cobertura é suspensa de dois arcos parabólicos de concreto armado, simétricos, articulados em dois encontros também de concreto armado e mantidos em planos inclinados por pilares articulados de altura variável que atingem 28,90m.

A rede, que tem cota de 11,10m no meio do pavilhão, é formada por cabos torcidos com alma de cânhamo com diâmetros variáveis entre 3/8" e 1", sendo que os cabos de carga são paralelos ao eixo menor do pavilhão (165m) e os cabos tensores paralelos ao eixo maior (250m).

Nas regiões de pouca curvatura usaram-se, para neutralizar os efeitos da sucção, espigas ancoradas nos pilares de sustentação dos arcos. Para o dimensionamento da rede foi considerada carga positiva de 20 kg/m^2 . A vedação inicialmente projetada em plástico poliéster, foi substituída por placas corrugadas de alumínio. A área coberta de 32.000m^2 está entre as maiores do mundo. Mais detalhes podem ser encontrados em Fragoso(3) e em Martinelli(9).

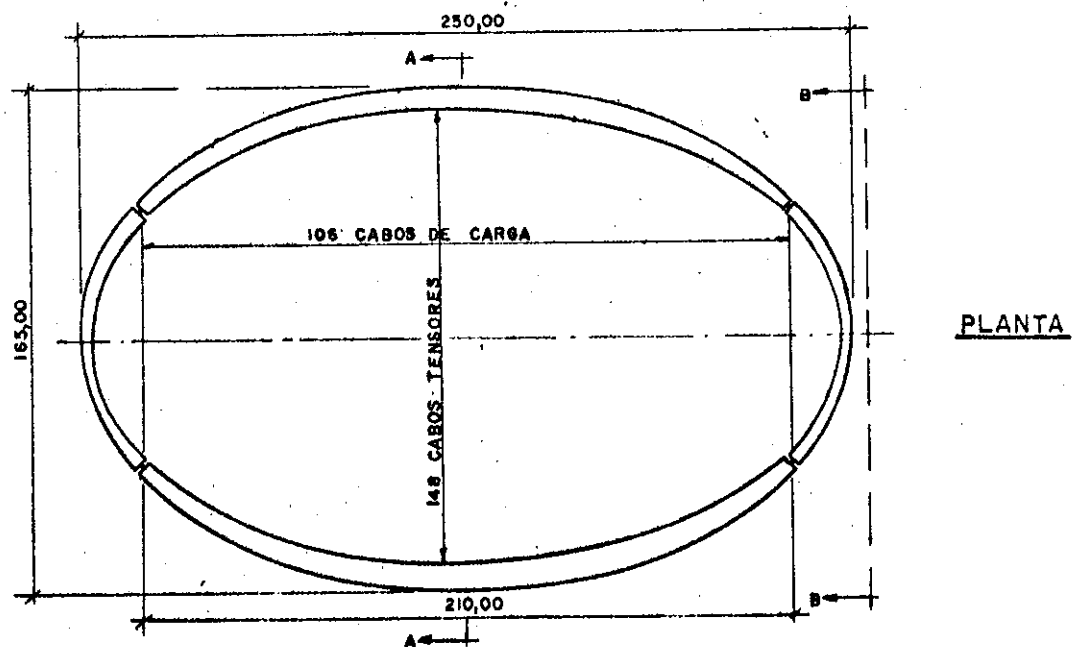


Fig. 6
PAVILHÃO DE SÃO CRISTOVÃO

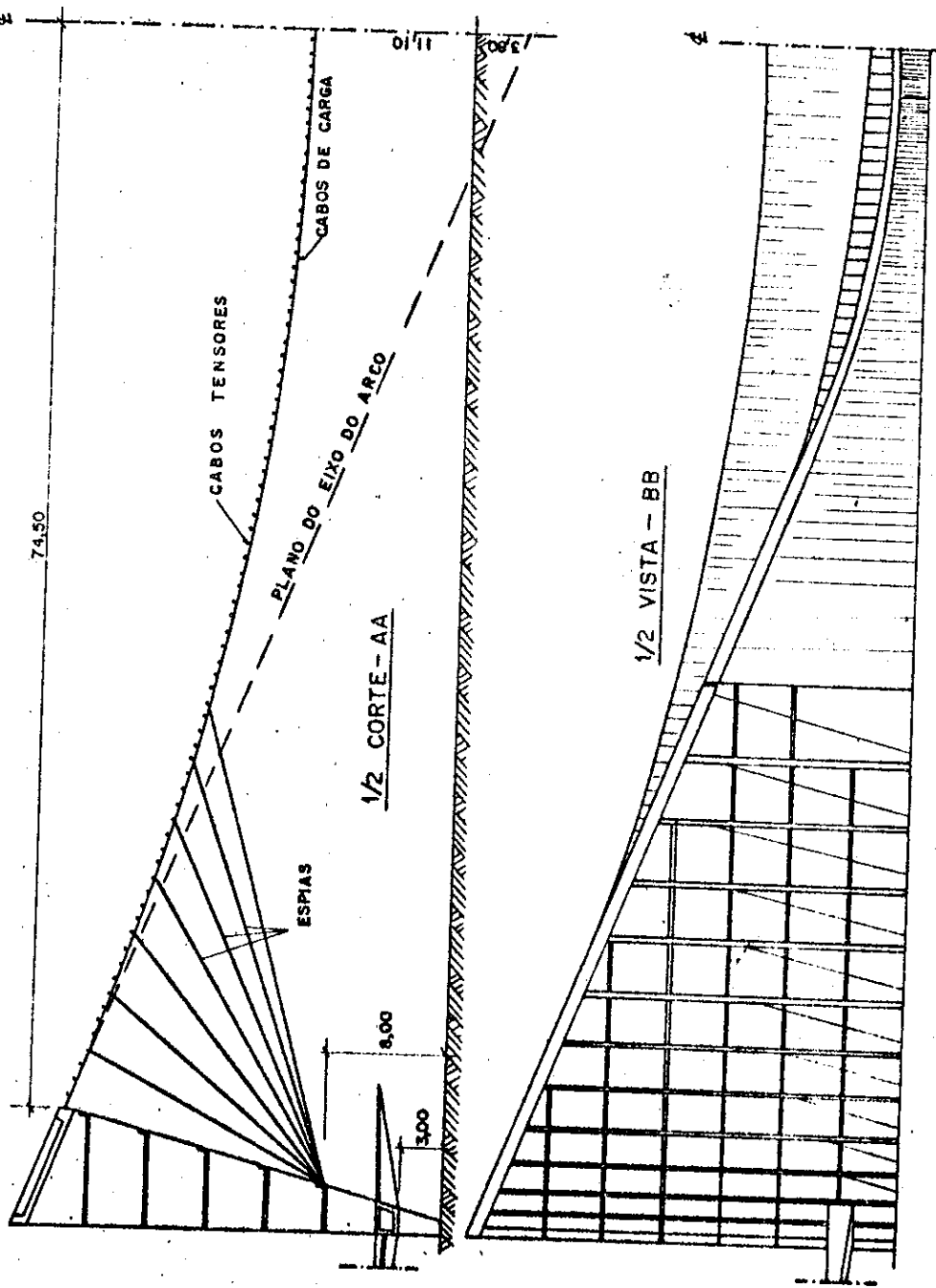


Fig. 6A
PAVILHÃO DE SÃO CRISTOVÃO

1.3 - CABOS DE AÇO PARA COBERTURAS PENSEIS

O material comumente usado para a formação das cestas das coberturas pênseis é o cabo formado por arames de aço cujas resistências variam entre 130 e 200 kg/mm², atingindo em alguns casos até 320 kg/mm². Dependendo da montagem, os cabos podem ser de arames paralelos e arames torcidos. No primeiro caso os arames, de mesmo diâmetro, são justapostos paralelamente e unidos por presilhas espaçadas ou por enrolamento contínuo, de maneira a dar à secção transversal do cabo a forma hexagonal. Uma forma mais arredondada pode ser conseguida com arames de diâmetros menores colocados nos vértices do hexágono. Esse tipo de cabo é menos deformável que os cabos de arames torcidos e seu módulo de elasticidade está compreendido entre $2,0 \times 10^6$ e $2,1 \times 10^6$ kg/cm² (fig.9).

Os cabos de arames torcidos ou cabos em espiral, os mais correntes em coberturas pênseis, compõem-se de pernas formadas por um certo número de fios torcidos em espiral e um núcleo (alma), que pode ser de aço ou de fibra, em torno do qual são enroladas as pernas. As almas de fibras, naturais (sisal, rami, cânhamo) ou artificiais (poli propileno, nylon), dão maior flexibilidade ao cabo ao mesmo tempo que servem de reservatório temporário de lubrificante que evita a corrosão interna do cabo. As almas de aço podem ser formadas por uma perna de cabo (A.A.) ou por um cabo de aço independente (A.A.C.I.), sendo que esta última dá ao cabo maior flexibilidade. Os cabos com alma de aço são menos deformáveis e apresentam em relação a um cabo de alma de fibra de mesma bitola e construção, um aumento de 7,5% na resistência à tração e um aumento de peso de 10%. A fig.7 mostra as secções transversais de alguns cabos de aço de arames torcidos.

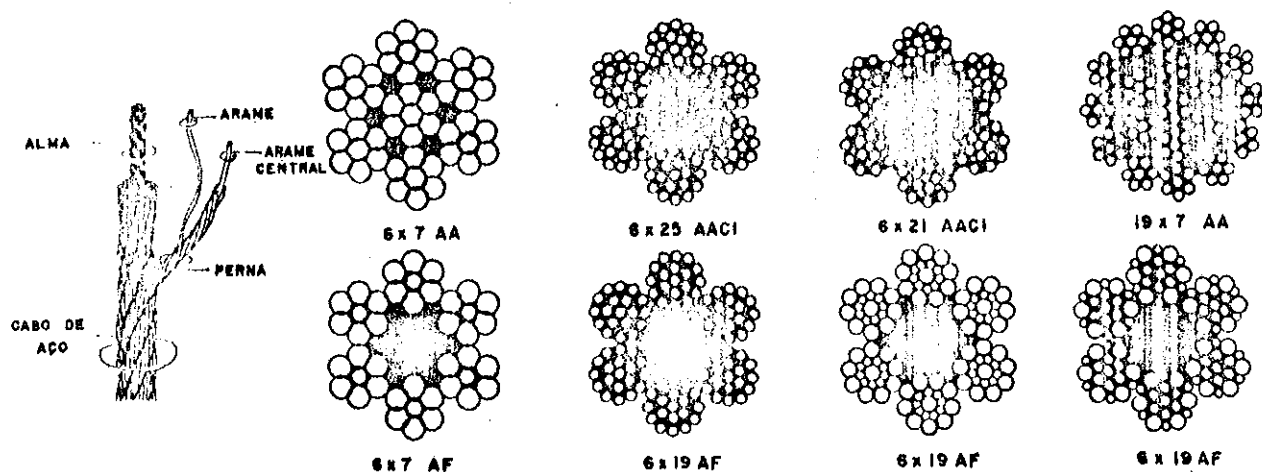


Fig. 7

SECÇÕES TRANSVERSAIS DE CABOS DE AÇOS TORCIDOS

Diz-se que um cabo tem torção regular ou em cruz, à direita ou à esquerda, quando o sentido de enrolamento das pernas não coincide com o sentido de enrolamento do cabo. Quando os sentidos de enrolamento são coincidentes, diz-se que a torção é Lang ou em paralelo. A fig.8 mostra as torções em cruz e em paralelo

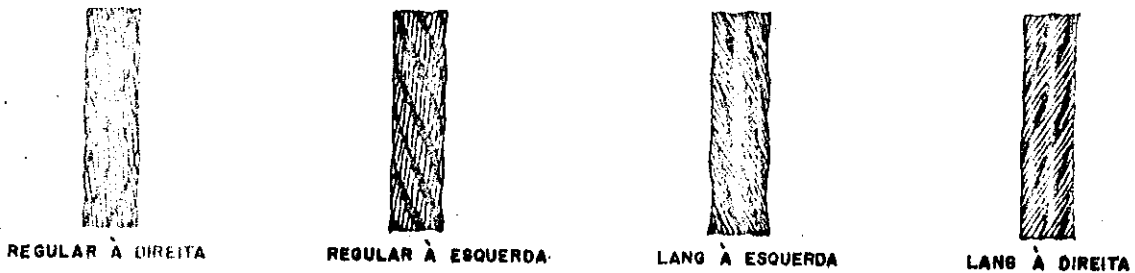


Fig. 8
TORÇÃO DOS CABOS

O módulo de elasticidade desse tipo de cabo é relativamente baixo e depende de sua construção. Nos cabos usados e nos cabos no vos pr-estirados, o módulo de elasticidade é acrescido de aproximadamente 20%. O diagrama tensão-deformação (fig.9) obtido em Frei Otto (10) e os valores do quadro seguinte, obtidos nos catálogos da CIMAF, dão idéia do módulo de elasticidade dos cabos de aço.

E (kg/mm²)

CATEGORIA \ ALMA	6 x 7	6 x 9	6 x 37
FIBRA	9.000 a 10.000	8.500 a 9.500	7.500 a 8.500
AÇO	10.500 a 11.500	10.000 a 11.000	9.500 a 10.500

MÓDULOS DE ELASTICIDADE PARA CABOS DE AÇO TORCIDOS NOVOS

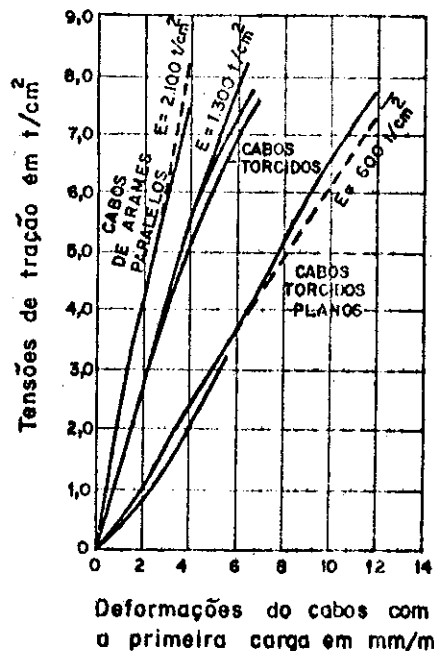


Fig. 9
DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO

O coeficiente de segurança para o cálculo dos cabos de coberturas pênseis pode ser estipulado conforme sugere Frei Otto(10), em função da relação existente entre a carga total e a carga permanente: com relação superior 2,2 , coeficiente 2,5 , com relação compreendida entre 1,5 e 2,2 , coeficiente 2, e com relação inferior a 1,5 , coeficiente de segurança 1,82 .

2 - CABOS INEXTENSÍVEIS COM CARGAS VERTICAIS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS

Neste capítulo estuda-se inicialmente a ação simultânea de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento do cabo e ao longo do vão, a partir da integração da equação diferencial de equilíbrio dada por Freeman (2). Para o estudo da carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento (catenária) e da uniformemente distribuída segundo o vão (parábola) seguiu-se, a menos de diferenças formais, a obra de Fonseca (1). A solução aproximada para a ação conjunta de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento e ao longo do vão foi desenvolvida de acordo com o artigo de Heilig (4).

2.1 - AÇÃO SIMULTÂNEA DE CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS, AO LONGO DO COMPRIMENTO DO CABO E AO LONGO DO VÃO (SOLUÇÃO EXATA)

2.1.1 - Equação diferencial de Equilíbrio

Para determinar a equação diferencial de equilíbrio, isola-se, do cabo em estudo, um elemento genérico AB de comprimento ds . Esse elemento e o sistema de esforços atuantes estão representados na figura abaixo.

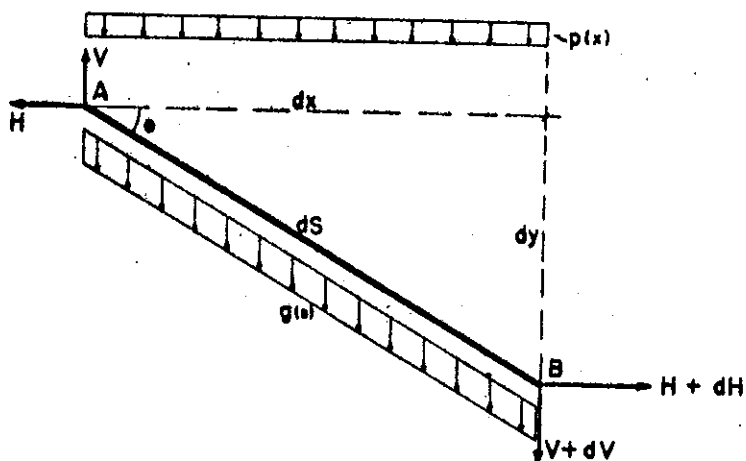


Fig. 10

Fazendo-se equilíbrio de forças verticais e horizontais e tomando-se momento em relação ao ponto B, obtêm-se após desprezar os infinitésimos de ordem superior:

$$dV = -g ds - p dx \quad (2.1-1)$$

$$dH = 0 \quad (2.1-2)$$

$$H dy = V dx \quad (2.1-3)$$

Levando-se o valor de V obtido em (2.1-3) na equação (2.1-1) e tendo em conta que H é constante e que

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

vem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{p}{H} \quad (2.1-4)$$

A (2.1-4) é a equação diferencial que rege os cabos submetidos à ação simultânea de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento e ao longo do vão.

2.1.2-Integração da equação diferencial de Equilíbrio

A integração desta equação diferencial conduz a duas equações paramétricas do tipo $x=f(\theta)$ e $y=f(\theta)$, sendo que a primeira delas depende da relação existente entre as cargas g e p . Fazendo-se em (2.1-4) $g/H = a$; $p/H = b$ e $dy/dx = \operatorname{tg}\theta$, vem:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}\theta) = -a \sqrt{1 + (\operatorname{tg}^2\theta)} - b$$

donde

$$-dx = \frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} + b} = \frac{\sec^2\theta d\theta}{a \sec\theta + b}$$

ou

$$- adx = \frac{d\theta}{\cos\theta} - \frac{b d\theta}{a+b\cos\theta}$$

Integrando, resulta

$$- ax = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} - \int \frac{b d\theta}{a+b\cos\theta}$$

A primeira integral do segundo membro é imediata, e vale $\log|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|$. A segunda porém, é bastante trabalhosa e para integrá-la usa-se a substituição $t = \operatorname{tg}0,5\theta$, que fornece:

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Com os valores de $\cos\theta$ e $d\theta$ em função t , a referida integral se transforma em

$$\int \frac{2bdt}{(a+b)+t^2(a-b)}$$

cuja integração, como já se disse, depende da relação entre $g(a)$ e $p(b)$.

Supondo-se inicialmente $a > b$ e fazendo-se $\alpha = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, obtêm-se:

$$\int \frac{2bdt}{(a+b)+t^2(a-b)} = \frac{2b}{a-b} \int \frac{dt}{\alpha^2+t^2} = \frac{2b}{a-b} \left[\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \right]$$

Substituindo-se t e α por seus valores:

$$\int \frac{bd\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg}0,5\theta \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right] \quad (2.1-5)$$

Supondo-se agora $b > a$ e fazendo-se $\alpha = \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$, vem:

$$\int \frac{2bdt}{(a+b)+t^2(a-b)} = \int \frac{2bdt}{(a+b)-t(b-a)} = \frac{2b}{b-a} \int \frac{dt}{\alpha^2-t^2}$$

ou

$$\int \frac{2bdt}{(a+b)+t^2(a-b)} = \frac{2b}{b-a} \cdot \frac{1}{2\alpha} \log \left| \frac{t+\alpha}{t-\alpha} \right|$$

Substituindo-se t e α , resulta:

$$\int \frac{bd\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}} \cdot \log \left| \frac{\operatorname{tg}0,5\theta + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\operatorname{tg}0,5\theta - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}} \right|$$

ou

$$\int \frac{bd\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \left| \frac{b+a\cos\theta + \sqrt{b^2-a^2} \operatorname{sen}\theta}{a+b\cos\theta} \right| \quad (2.1-6)$$

Finalmente, para $a = b$, vem:

$$\int \frac{2bdt}{(a+b)+t^2(a-b)} = \int \frac{2bdt}{a+b} = \frac{2bt}{a+b}$$

Substituindo-se t por $\operatorname{tg}0,5\theta$ vêm:

$$\int \frac{bd\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2b}{a+b} \operatorname{tg}0,5\theta \quad (2.1-7)$$

Para obter a segunda equação paramétrica faz-se:

$$-\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{d(\operatorname{tg}\theta)/dy}{a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta} + b}$$

ou

$$- dy = \frac{\operatorname{tg}\theta \, d(\operatorname{tg}\theta)}{a \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta} + b} = \frac{\sec\theta \, d(\sec\theta)}{a \sec\theta + b}$$

Integrando resulta:

$$- a^2 y = a \sec\theta + b \log | (a \sec\theta + b) | \quad (2.1-8)$$

Substituindo nas equações paramétricas a por $\frac{g}{H}$ e b por $\frac{p}{H}$ vem:

$$\underline{g > p}$$

$$- \frac{g}{H} x = \log | (\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) | - \frac{2p}{\sqrt{g^2 - p^2}} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} 0,5\theta \sqrt{\frac{g-p}{g+p}} \right] + C_1 \quad (2.1-9)$$

$$- \frac{g^2}{H} y = g \sec\theta - p \log \left| \left(\frac{g}{H} \sec\theta + \frac{p}{H} \right) \right| + C_4 \quad (2.1-10)$$

$$\underline{p > g}$$

$$- \frac{g}{H} x = \log | (\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) | - \frac{p}{\sqrt{p^2 - g^2}} \log \left| \frac{(p + g \cos\theta + \sqrt{p^2 - g^2} \operatorname{sen}\theta)}{g + p \cos\theta} \right| + C_2 \quad (2.1-11)$$

$$- \frac{g^2}{H} y = g \sec\theta - p \log \left| \left(\frac{g}{H} \sec\theta + \frac{p}{H} \right) \right| + C_4 \quad (2.1-12)$$

$$\underline{p = g}$$

$$- \frac{g}{H} x = \log | (\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) | - \frac{2p}{p+g} (\operatorname{tg} 0,5\theta) + C_3 \quad (2.1-13)$$

$$- \frac{g^2}{H} y = g \sec\theta - p \log \left| \left(\frac{g}{H} \sec\theta + \frac{p}{H} \right) \right| + C_4 \quad (2.1-14)$$

2.1.3-Constantes de integração para arranques nivelados.

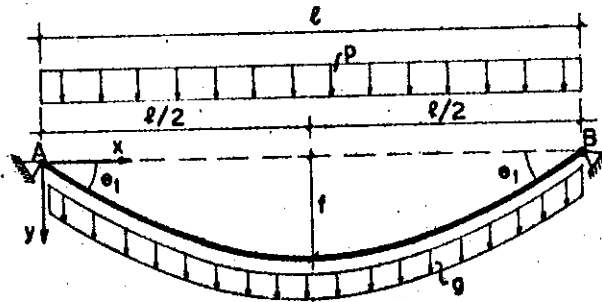


Fig. 11

Com $\theta=0$, tem-se $x = \frac{l}{2}$ e as equações (2.1-9-11-13) fornecem:

$$C_1 = C_2 = C_3 = -\frac{g\ell}{2H}$$

Para $\theta=0$, resulta $y=f$ e com uma das equações (2.1-10-12-14) obtém-se:

$$C_4 = p \log \left| \left(\frac{g}{H} + \frac{p}{H} \right) \right| - g - \frac{g^2 f}{H}$$

Levando os valores de C_1 , C_2 , C_3 e C_4 nas equações anteriores resultam as equações paramétricas que definem a configuração de equilíbrio do cabo nivelado.

$g > p$:

$$-\frac{g}{H}x = \log |(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)| - \frac{2p}{\sqrt{g^2 - p^2}} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} 0,5\theta \cdot \sqrt{\frac{g-p}{g+p}} \right] - \frac{g\ell}{2H} \quad (2.1-15)$$

$$-\frac{g^2}{H}y = g(\sec\theta - 1) + p \log \left| \left(\frac{g+p}{g \sec\theta + p} \right) \right| - \frac{g^2 f}{H} \quad (2.1-16)$$

$$\underline{g < p}$$

$$- \frac{g}{H}x = \log |(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)| - \frac{p}{\sqrt{p^2 - g^2}} \log \left| \frac{p + g \cos\theta + \sqrt{p^2 - g^2} \operatorname{sen}\theta}{g \sec\theta + p} \right| - \frac{g\ell}{2H} \quad (2.1-17)$$

$$- \frac{g^2}{H}y = g(\sec\theta - 1) + p \log \left| \frac{g+p}{g \sec\theta + p} \right| - \frac{g^2 f}{H} \quad (2.1-18)$$

$$\underline{g = p}$$

$$- \frac{g}{H}x = \log |(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)| - \frac{2p}{p+g}(\operatorname{tg}0,5\theta) - \frac{g\ell}{2H} \quad (2.1-19)$$

$$- \frac{g^2}{H}y = g(\sec\theta - 1) + p \log \left| \frac{g+p}{g \sec\theta + p} \right| - \frac{g^2 f}{H} \quad (2.1-20)$$

2.1.4-Constantes de integração para arranques desnivelados

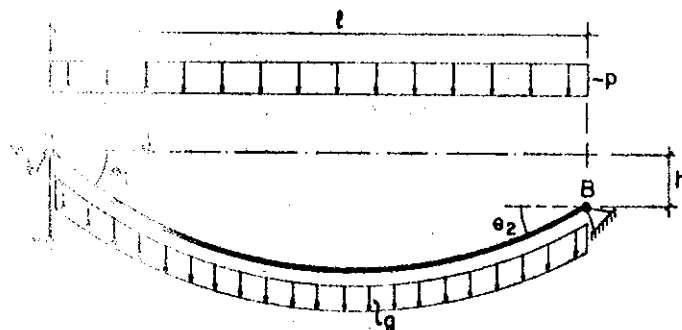


Fig. 12

Para $\theta = \theta_1$, tem-se $x=0$, e portanto as equações (2.1-9) (2.1-11) e (2.1-13) fornecem

$$C_1 = \frac{2p}{\sqrt{g^2 - p^2}} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg}0,5\theta_1, \sqrt{\frac{g-p}{g+p}} \right] - \log |(\sec\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_1)|$$

$$C_2 = \frac{p}{\sqrt{p^2 - g^2}} \log \left| \frac{p + g \cos\theta_1 + \sqrt{p^2 - g^2} \operatorname{sen}\theta_1}{g + p \cos\theta_1} \right| - \log |(\sec\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_1)|$$

$$C_3 = \frac{2p}{p+g} \cdot \operatorname{tg}0,5\theta_1 - \log |(\sec\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_1)|$$

Para $\theta = \theta_1$, tem-se $y=0$, e de uma das equações (2.1-10-12-14) obtém-se

$$C_4 = p \log \left| \left(\frac{g}{H} \sec \theta_1 + \frac{p}{H} \right) \right| - g \sec \theta_1$$

Com os valores de C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , determinam-se, de maneira análoga, as equações paramétricas para o cabo com arranques desnivelados:

$g > p$

$$-\frac{g}{H}x = \log \left| \left(\frac{\sec \theta + \operatorname{tg} \theta}{\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1} \right) \right| - \frac{2p}{\sqrt{g^2 + p^2}} \cdot \left[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,5\theta \cdot \sqrt{\frac{g-p}{g+p}}) - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,5\theta_1 \cdot \sqrt{\frac{g-p}{g+p}}) \right] \quad (2.1-21)$$

$$-\frac{g^2}{H}y = g(\sec \theta - \sec \theta_1) + p \log \left| \left(\frac{g \sec \theta_1 + p}{g \sec \theta + p} \right) \right| \quad (2.1-22)$$

$g < p$

$$-\frac{g}{H}x = \log \left| \left(\frac{\sec \theta + \operatorname{tg} \theta}{\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1} \right) \right| - \frac{p}{\sqrt{p^2 - g^2}} \log \left| \frac{(p + g \cos \theta + \sqrt{p^2 - g^2} \operatorname{sen} \theta)(g + p \cos \theta_1)}{(p + g \cos \theta_1 + \sqrt{p^2 - g^2} \operatorname{sen} \theta_1)(g + p \cos \theta)} \right| \quad (2.1-23)$$

$$-\frac{g^2}{H}y = g(\sec \theta - \sec \theta_1) + p \log \left| \left(\frac{g \sec \theta_1 + p}{g \sec \theta + p} \right) \right| \quad (2.1-24)$$

$g = p$

$$-\frac{g}{H}x = \log \left| \left(\frac{\sec \theta + \operatorname{tg} \theta}{\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1} \right) \right| - \frac{2p}{p+g} (\operatorname{tg} 0,5\theta - \operatorname{tg} 0,5\theta_1) \quad (2.1-25)$$

$$-\frac{g^2}{H}y = g(\sec \theta - \sec \theta_1) + p \log \left| \left(\frac{g \sec \theta_1 + p}{g \sec \theta + p} \right) \right| \quad (2.1-26)$$

2.1.5-Comprimento do cabo

Das igualdades:

$$- dx = \frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{a \sqrt{1+(\operatorname{tg}^2\theta)+b}}$$

e

$$- dy = \frac{\operatorname{tg}\theta d(\operatorname{tg}\theta)}{a \sqrt{1+(\operatorname{tg}^2\theta)+b}}$$

resultam respectivamente:

$$\left[\frac{dx}{d(\operatorname{tg}\theta)} \right]^2 = \frac{1}{[a \sqrt{1+(\operatorname{tg}^2\theta)+b}]^2}$$

e

$$\left[\frac{dy}{d(\operatorname{tg}\theta)} \right]^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{[a \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta+b}]^2}$$

donde:

$$ds = \sqrt{\frac{1}{[a \sqrt{1+(\operatorname{tg}^2\theta)+b}]^2} + \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{[a \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta+b}]^2}} d(\operatorname{tg}\theta) = \frac{\sec^2\theta d\theta}{a \sec\theta + b}$$

Usando-se o artifício anteriormente utilizado, $t = \operatorname{tg}\theta$, após algumas transformações, vêm:

$$ds = \frac{2(1+t^2)^2 dt}{(1-t)^2(1+t)^2 [(a+b)+t^2(a-b)]}$$

Substituindo-se a por $\frac{g}{H}$ e b por $\frac{p}{H}$ e fazendo-se $\lambda^2 = \frac{g+p}{g-p}$, vem para $g > p$:

$$s = \frac{H}{g-p} \int \frac{2(1+t^2)^2 dt}{(1-t)^2(1+t)^2(\lambda^2+t^2)}$$

$$s = \frac{H}{g-p} \int \left[\frac{A}{(1-t)^2} + \frac{B}{(1-t)} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{(1+t)} + \frac{Et+F}{\lambda^2+t^2} \right] dt$$

isto é:

$$s = \frac{H}{g-p} \left[\frac{A}{1-t} - B \log |(1-t)| - \frac{C}{1+t} + D \log |(1+t)| + \frac{E}{2} \log |\lambda^2 + t^2| + \frac{F}{\lambda} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\lambda} \right) \right]$$

Sendo $t = \operatorname{tg} 0,5\theta$, vem:

$$s = \frac{H}{g-p} \left[\frac{A}{1-\operatorname{tg} 0,5\theta} - B \log |(1-\operatorname{tg} 0,5\theta)| - \frac{C}{1+\operatorname{tg} 0,5\theta} + D \log |(1+\operatorname{tg} 0,5\theta)| + \frac{E}{2} \log |\lambda^2 + \operatorname{tg}^2 0,5\theta| + \frac{F}{\lambda} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 0,5\theta}{\lambda} \right) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (2.1-27)$$

De maneira análoga, fazendo-se porém $\lambda^2 = \frac{g+p}{p-g}$, vem para $p > g$:

$$s = \frac{H}{p-g} \int \frac{2(1+t^2)^2 dt}{(1-t)^2 (1+t)^2 (\lambda^2 - t^2)} = \frac{H}{p-g} \int \left[\frac{A_1}{(1-t)^2} + \frac{B_1}{(1-t)} + \frac{C_1}{(1+t)^2} + \frac{D_1}{(1+t)} + \frac{E_1}{(\lambda-t)} + \frac{F_1}{(\lambda+t)} \right] dt$$

ou seja:

$$s = \frac{H}{p-g} \left[\frac{A_1}{1-t} - B_1 \log |(1-t)| - \frac{C_1}{1+t} + D_1 \log |(1+t)| - E_1 \log |(\lambda-t)| + F_1 \log |(\lambda+t)| \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

ou ainda:

$$s = \frac{H}{p-g} \left[\frac{A_1}{1-\text{tg}0,5\theta} - B_1 \log |(1-\text{tg}0,5\theta)| - \frac{C_1}{1+\text{tg}0,5\theta} \right. \\ \left. + D_1 \log |(1+\text{tg}0,5\theta)| - E_1 \log |(\lambda-\text{tg}0,5\theta)| + F_1 \log |(\lambda+\text{tg}0,5\theta)| \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (2.1-28)$$

Finalmente para $p=g$, vem:

$$s = \frac{H}{g+p} \int \frac{2(1+t^2)^2 dt}{(1-t)^2(1+t)^2}$$

$$s = \frac{2H}{g+p} \left[t + \frac{1}{1-t} + \log |(1-t)| - \frac{1}{1+t} - \log |(1+t)| \right]$$

ou ainda:

$$s = \frac{2H}{g+p} \left[\text{tg}0,5\theta + \text{tg}\theta + \log \left(\frac{1-\text{tg}0,5\theta}{1+\text{tg}0,5\theta} \right) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (2.1-29)$$

Nota-se, portanto, que a determinação do comprimento do cabo nos dois primeiros casos depende dos coeficientes A, B, C, \dots, F e $A_1, B_1, C_1, \dots, F_1$, que são obtidos através da resolução de um sistema de 6 equações a 6 incógnitas. Para facilitar os cálculos e reduzir o volume de trabalho, resolveram-se para algumas relações g/p e p/g , os sistemas de equações no computador IBM-1130 do CPD-EESC e os resultados obtidos encontram-se nas tabelas 1 e 2.

TABELA - 1

g/p	A	B	C	D	E	F
1,2	0,16666	-0,13888	0,16666	-0,13888	0	1,38888
1,4	0,28571	-0,20408	0,28571	-0,20408	0	1,02041
1,6	0,37500	-0,23437	0,37500	-0,23437	0	0,78125
1,8	0,44444	-0,24691	0,44444	-0,24691	0	0,61728
2,0	0,50000	-0,25000	0,50000	-0,25000	0	0,50000
2,2	0,54545	-0,24793	0,54545	-0,24793	0	0,43122
2,4	0,58333	-0,24305	0,58333	-0,24305	0	0,34722
2,6	0,61538	-0,23668	0,61538	-0,23668	0	0,29585
2,8	0,64285	-0,22959	0,64285	-0,22959	0	0,25510
3,0	0,66666	-0,22222	0,66666	-0,22222	0	0,22222
3,2	0,68750	-0,21484	0,68750	-0,21484	0	0,19531
3,4	0,70588	-0,20761	0,70588	-0,20761	0	0,17301
3,6	0,72222	-0,20061	0,72222	-0,20061	0	0,15432
3,8	0,73638	-0,19390	0,73638	-0,19390	0	0,13850
4,0	0,75000	-0,18750	0,75000	-0,18750	0	0,12500
4,2	0,76190	-0,18140	0,76190	-0,18140	0	0,11338
4,4	0,77272	-0,17562	0,77272	-0,17562	0	0,10330
4,6	0,78621	-0,17013	0,78621	-0,17013	0	0,09452
4,8	0,79166	-0,16493	0,79166	-0,16493	0	0,08681
5,0	0,80000	-0,16000	0,80000	-0,16000	0	0,0800

TABELA 2

p/g	A ₁	B ₁	C ₁	D ₁	E ₁	F ₁
1,2	0,20000	-0,24000	0,20000	-0,240000	0,43417	0,43417
1,4	0,40000	-0,56000	0,40000	-0,56000	0,80016	0,80016
1,6	0,60000	-0,96000	0,60000	-0,96000	1,22978	1,22978
1,8	0,80000	-1,44000	0,80000	-1,44000	1,73185	1,73185
2,0	1,00000	-2,00000	1,00000	-2,00000	2,30940	2,30940
2,2	1,20000	-2,64000	1,20000	-2,64000	2,96388	2,96388
2,4	1,40000	-3,36000	1,40000	-3,36000	3,69613	3,69613
2,6	1,60000	-4,16000	1,60000	-4,16000	4,50666	4,50666
2,8	1,80000	-5,04000	1,80000	-5,04000	5,39586	5,39586
3,0	2,00000	-6,00000	2,00000	-6,00000	6,36396	6,36396
3,2	2,20000	-7,04000	2,20000	-7,04000	7,41116	7,41116
3,4	2,40000	-8,16000	2,40000	-8,16000	8,53762	8,53762
3,6	2,60000	-9,36000	2,60000	-9,36000	9,74345	9,74345
3,8	2,80000	-10,64000	2,80000	-10,64000	11,02873	11,02873
4,0	3,00000	-12,00000	3,00000	-12,00000	12,39354	12,39354
4,2	3,20000	-13,44000	3,20000	-13,44000	13,83795	13,83795
4,4	3,40000	-14,96000	3,40000	-14,96000	15,36200	15,36200
4,6	3,60000	-16,56000	3,60000	-16,56000	16,96574	16,96574
4,8	3,80000	-18,24000	3,80000	-18,24000	18,64920	18,64920
5,0	4,00000	-20,00000	4,00000	-20,00000	20,41241	20,41241

2.1.6-Tração no cabo

A força de tração do cabo é determinada em função da força horizontal H, pela relação:

$$T = H \frac{ds}{dx} = H \sec\theta \quad (2.1-30)$$

Como H é constante ao longo do cabo conclui-se de (2.1-30) que a tração máxima se localiza sempre nos arranques e que no vértice da curva do cabo os valores T e H se confundem, ficando assim a tração no cabo compreendida entre T_{max} e H.

Nos cabos com pequenas inclinações e pequenas relações flecha/vão e desnível/vão, o que ocorre usualmente nas coberturas pênseis, o intervalo de variação de T é bastante pequeno. Suponha-se, para exemplificar, uma cobertura cilíndrica cujos cabos tenham extremidades no mesmo nível. Nesses casos, as inclinações dos cabos nos arranques estão geralmente compreendidas entre 10° ($f/l=1/20$) e 22° ($f/l=1/10$), o que dá para a relação T_{max}/H os valores do quadro abaixo.

θ	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°
T_{max}/H	1,054	1,0223	1,0306	1,0403	1,0514	1,0642	1,0785

2.1.7-Força horizontal H

Do que foi exposto, depreende-se imediatamente, que para a determinação das características que definem o cabo, é necessário que se determine inicialmente o valor da força horizontal H. Tratando-se de arranques em nível, com flecha no meio do vão conhecida, a determinação de H é feita com a resolução de duas equações, que são as paramétricas, a duas incôgnitas. Esta resolução além de fornecer H, dá também a inclinação do cabo no arranque. Se por outro lado, for conhecida a inclinação do cabo no arranque ao invés da flecha, determina-se H com a primeira equação paramétrica e a flecha com a segunda. Com os valores de H e f as equações que definem a curva do cabo ficam determinadas.

Ocorrendo desnível, com inclinação no arranque θ_1 , conhecida, determina-se H e também θ_2 resolvendo-se duas equações a duas incógnitas. Quando for dada a flecha no vértice do cabo procede-se por aproximações sucessivas. Estima-se θ_1 , e calcula-se H e θ_2 , e então com a segunda equação paramétrica determina-se f. Procede-se assim até que as flechas, dada e calculada, coincidam.

2.2 - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA AO LONGO DO COMPRIMENTO DO CABO (SUSPENSÃO EM CATENÁRIA)

2.2.1 - Equação diferencial de equilíbrio

Fazendo-se na equação (2.1-4) $p=0$, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{q}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.2-1)$$

A (2.2-1) é a equação diferencial dos cabos submetidos a ação de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento.

2.2.2 - Integração da equação diferencial de equilíbrio

Fazendo-se $\frac{dy}{dx} = z$ em (2.2-1), vem

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{q}{H} \sqrt{1+z^2}$$

ou

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = - \frac{q}{H} dx$$

Integrando, tem-se

$$\text{arcSh}z = - \frac{q}{H} x + C_1$$

ou:

$$\text{Sh}\left(-\frac{g}{H}x + C_1\right) = -\text{Sh}\left(\frac{g}{H}x - C_1\right) = \frac{dy}{dx} \quad (2.2-2)$$

Integrando-se novamente, resulta:

$$y = -\frac{H}{g} \text{Ch}\left(\frac{gx}{H} - C_1\right) + C_2 \quad (2.2-3)$$

Vê-se portanto que a configuração de equilíbrio dos cabos com esse carregamento é uma catenária, vindo daí a denominação comumente usada de "suspensão em catenária".

2.2.3-Constantes de integração para arranques nivelados

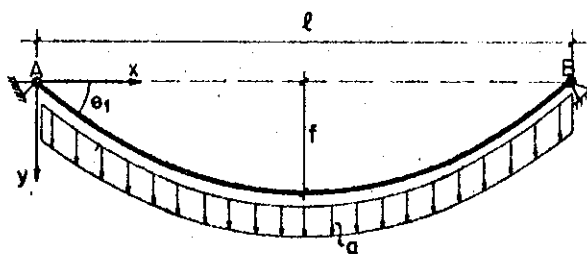


Fig. 13

Para $x = \frac{l}{2}$; tem-se $\theta = 0$ e de (2.2-2) tira-se

$$C_1 = \frac{gl}{2H}$$

Para $x=0$, tem-se $y=0$, e portanto a (2.2-3) fornece:

$$C_2 = \frac{H}{g} \text{Ch } C_1$$

Substituindo-se os valores de C_1 e C_2 nas equações (2.2-2) e (2.2-3), resultam

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) \quad (2.2-4)$$

$$y = - \frac{H}{g} \left[\operatorname{Ch}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) - \operatorname{Ch}\left(\frac{g\ell}{2H}\right) \right] \quad (2.2-5)$$

A (2.2-5) é a equação da catenária para arranques nivelados.

2.2.4-Constantes de integração para arranques desnivelados

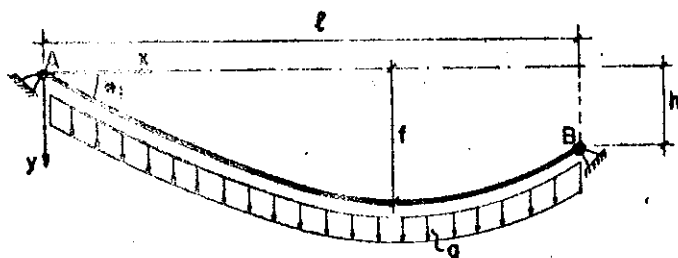


Fig. 14

Para $x=0$; $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta_1$, e com a equação (2.2-2) obtem-se:

$$C_1 = \operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1)$$

Para $x=0$; $y=0$ e com a (2.2-3) obtem-se:

$$C_2 = \frac{H}{g} \operatorname{Ch} C_1$$

Levando-se os valores de C_1 e C_2 nas (2.2-2) e (2.2-3) resulta:

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{Sh}\left[\frac{gx}{H} - \operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1)\right] \quad (2.2-6)$$

$$y = - \frac{H}{g} \left\{ \operatorname{Ch}\left[\frac{gx}{H} - \operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1)\right] - \operatorname{Ch}\left[\operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1)\right] \right\} \quad (2.2-7)$$

A (2.2-7) é a equação da catenária desnivelada, dada em função da inclinação do cabo no arranque.

2.2.5-Equação da catenária desnivelada em função da flecha no vértice.

Fazendo-se em (2.2-6) $x=x_v$, resulta:

$$x_v = \frac{H}{g} \operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1) \quad (2.2-8)$$

Fazendo-se o mesmo em (2.2-7), resulta após substituir x_v por seu valor dado em (2.2-8):

$$f = -\frac{H}{g} \left[1 - \operatorname{Ch}[\operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1)] \right] \quad (2.2-9)$$

donde

$$\operatorname{Ch}[\operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1)] = \frac{gf}{H} + 1 \quad (2.2-10)$$

observando-se que $\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1$, obtem-se:

$$\operatorname{Sh}[\operatorname{arcSh}(\operatorname{tg}\theta_1)] = \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{g}{H} \sqrt{f^2 + \frac{2fH}{g}} \quad (2.2-11)$$

Desenvolvendo-se a equação (2.2-7) e substituindo os valores encontrados em (2.2-10) e (2.2-11), resulta a equação da catenária em função da flecha.

$$y = -\left(\frac{H}{g} + f\right) \left[\operatorname{Ch}\left(\frac{gx}{H}\right) - 1 \right] - \operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H}\right) \sqrt{f^2 + \frac{2fH}{g}} \quad (2.2-12)$$

Com o valor de H em (2.2-11) determina-se a inclinação do cabo no arranque e com (2.2-8) a abscissa do vértice.

2.2.6-Comprimento do cabo para arranques nivelados

Sendo para a catenária em nível $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H} - \frac{gl}{2H}\right)$ resulta:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \text{Sh}^2\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right)} dx = \text{Ch}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) dx$$

e então

$$s = \int_0^{\ell} \text{Ch}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) dx = \left[\frac{H}{g} \text{senh}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) \right]_0^{\ell}$$

donde

$$s = \frac{2H}{g} \text{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H}\right) \quad (2.2-13)$$

2.2.7-Comprimento do cabo para arranques desnivelados

Analogamente

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \text{Ch}\left[\frac{gx}{H} - \text{arcSh}(tg\theta_1)\right] dx$$

Logo

$$s = \int_0^{\ell} \text{Ch}\left[\frac{gx}{H} - \text{arcSh}(tg\theta_1)\right] dx = \frac{H}{g} \left\{ \text{senh}\left[\frac{gx}{H} - \text{arcSh}(tg\theta_1)\right] \right\}_0^{\ell}$$

ou

$$s = \frac{H}{g} \left\{ \text{Sh}\left[\frac{g\ell}{H} - \text{arcSh}(tg\theta_1)\right] + \text{Sh}\left[\text{arcSh}(tg\theta_1)\right] \right\} \quad (2.2-14)$$

2.2.8-Tração no cabo para arranques nivelados

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = \frac{H ds}{dx} = H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H \sqrt{1 + \text{Sh}^2\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right)}$$

ou

$$T = H \cdot \text{Ch}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) \quad (2.2-15)$$

2.2.9-Tração no cabo para arranques desnivelados

Analogamente

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = H \frac{ds}{dx} = H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H \sqrt{1 + \text{Sh}^2 \left[\frac{gx}{H} - \text{arcSh}(\text{tg}\theta_1) \right]}$$

ou

$$T = H \cdot \text{Ch} \left[\frac{gx}{H} - \text{arcSh}(\text{tg}\theta_1) \right] \quad (2.2-16)$$

2.2.10-Fôrça horizontal H

Aqui também, a determinação das características que definem o cabo depende de H.

Para arranques em nível com flecha conhecida, usa-se para determinar H a equação (2.2-5) com $x=\ell/2$. Se for conhecida a inclinação nos arranques e não a flecha, usa-se a equação (2.2-4) com $x=0$ ou $x=\ell$.

Se ocorrerem arranques desnivelados e for conhecida a inclinação θ_1 , usa-se a equação (2.2-7) com $x=\ell$. Sendo conhecida a flecha no vértice do cabo, o valor de H será dado pela equação (2.2-12) com $x=\ell$. Deve-se observar que desta equação resultam dois valores de H, sendo o menor correspondente ao vértice do cabo entre os arranques ($x_v < \ell$).

2.3 -CARGA VERTICAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA AO LONGO DO VÃO (SUSPENSÃO PARABÓLICA)

2.3.1 -Equação diferencial de equilíbrio

Fazendo-se na equação (2.1-4) $g=0$, resulta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{p}{H} \quad (2.3-1)$$

que é a equação de equilíbrio para os cabos carregados uniformemente ao longo do vão. Note-se que admitir $g=0$, implica em desprezar o peso do cabo, o que é, em geral, admissível.

2.3.2-Integração da equação diferencial de equilíbrio

A integração desta equação é imediata e fornece a parábola

$$y = - \frac{px^2}{2H} + C_1x + C_2 \quad (2.3-2)$$

2.3.3-Constantes de integração para arranques nivelados

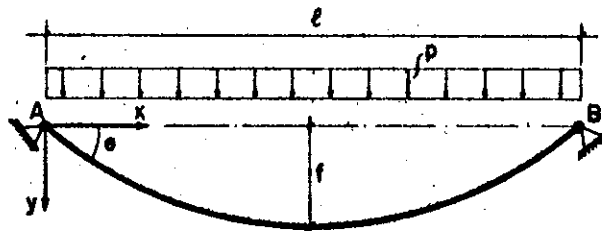


Fig. 15

Fazendo-se na (2.3-2) $x=0$ e $x=l$, resulta $y=0$ e portanto:

$$C_1 = \frac{pl}{2H} \quad \text{e} \quad C_2 = 0$$

Levando o valor de C_1 na (2.3-2) obtem-se a equação da suspensão parabólica para arranques em nível:

$$y = - \frac{px^2}{2H} + \frac{pl}{2H} x \quad (2.3-3)$$

2.3.4-Constantes de integração para arranques desnivelados.

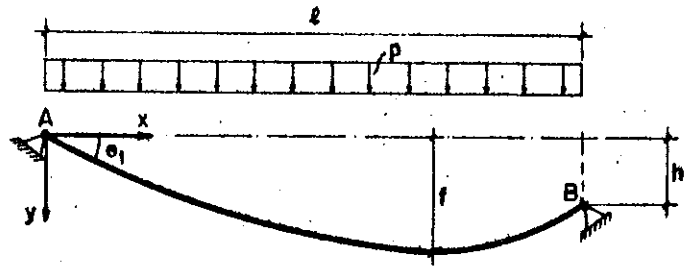


Fig. 16

Fazendo-se na equação (2.3-2) $x=0$ e $x=l$ resultam respectivamente $y=0$ e $y=h$. Portanto:

$$C_1 = \frac{pl}{2H} + \frac{h}{l} \quad \text{e} \quad C_2 = 0$$

Com C_1 na equação (2.3-2), obtem-se:

$$y = -\frac{px^2}{2H} + \left(\frac{pl}{2H} + \frac{h}{l}\right)x \quad (2.3-4)$$

que é a equação da suspensão parabólica para arranques desnive lados.

2.3.5-Comprimento do cabo para arranques nivelados

Sendo:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

e

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{px}{H} + \frac{pl}{2H}$$

vem:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{px}{H} - \frac{pl}{2H}\right)^2} dx$$

Integrando, vem:

$$s = \frac{H}{2p} \left[\left(\frac{px}{H} - \frac{p\ell}{2H} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{px}{H} - \frac{p\ell}{2H} \right)^2} + \log \left| \left(\frac{px}{H} - \frac{p\ell}{2H} \right) + \sqrt{1 + \left(\frac{px}{H} - \frac{p\ell}{2H} \right)^2} \right| \right]_0^{\ell}$$

ou

$$s = \frac{H}{2p} \left[\frac{p\ell}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{p\ell}{2H} \right)^2} + \log \left| \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{p\ell}{2H} \right)^2} + \frac{p\ell}{2H}}{\sqrt{1 + \left(\frac{p\ell}{2H} \right)^2} - \frac{p\ell}{2H}} \right| \right] \quad (2.3-5)$$

Sendo $H = \frac{p\ell^2}{8f}$, como se verá adiante, a equação (2.3-5) se transforma em

$$s = \frac{\ell^2}{16f} \left[\frac{8f}{\ell} \cdot \sqrt{1 + 16(f/\ell)^2} + \log \left| \frac{\sqrt{1 + 16(f/\ell)^2} + 4f/\ell}{\sqrt{1 + 16(f/\ell)^2} - 4f/\ell} \right| \right] \quad (2.3-6)$$

Quando não se necessita de grande exatidão, pode-se usar uma fórmula aproximada, obtida com:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Integrando-se de 0 a ℓ e tendo em conta que $H = \frac{p\ell^2}{8f}$ resulta:

$$s = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} \right] = \ell \left[1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{\ell^2} \right] \quad (2.3-7)$$

É interessante comparar os valores do comprimento do cabo fornecidos pelas fórmulas exata (2.3-6) e aproximada

(2.3-7). O quadro que segue, relacionando s/l com f/l facilita tal comparação:

f/l	s/l	
	2.3-6	2.3-7
1/25	1,00423	1,00427
1/20	1,00663	1,00667
1/15	1,01084	1,01185
1/10	1,02606	1,02667
1/5	1,09823	1,10667

Conclui-se, portanto, que para relações $f/l < 1/10$, o que ocorre normalmente nas coberturas pênseis, a fórmula aproximada é perfeitamente suficiente.

2.3.6-Comprimento do cabo para arranques desnivelados

Sendo agora

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{px}{H} + \left(\frac{p\ell}{2H} + h/\ell\right).$$

vem:

$$ds = \sqrt{1 + \left[\frac{px}{2H} - \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}\right)\right]^2} dx$$

Integrando obtemos:

$$s = \frac{H}{2p} \left\{ \left[\frac{px}{H} - \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}\right) \right] \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{px}{H} - \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}\right) \right]^2} + \log \left| \frac{px}{H} - \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}\right) + \sqrt{1 + \left[\frac{px}{H} - \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}\right) \right]^2} \right| \right\} \Big|_0^\ell$$

(2.3-8)

Uma fórmula aproximada pode ser obtida usando-se a equação (2.3-7). De fato, pela figura, conclui-se:

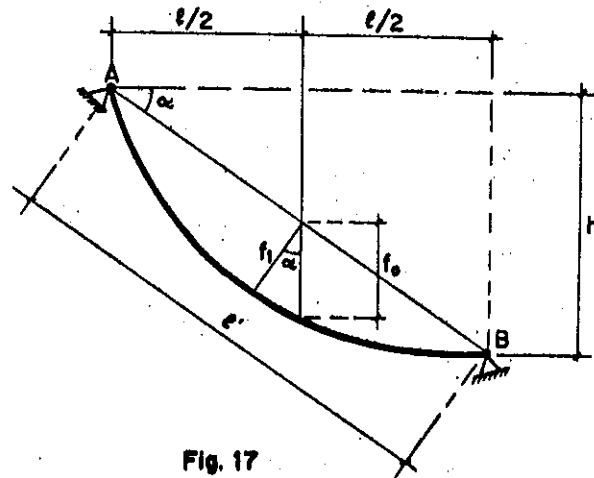


Fig. 17

$$s = l' + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l'}$$

Sendo $l' = l / \cos \alpha$ e $f_1 = f_0 \cos \alpha$, vem:

$$s = \frac{l}{\cos \alpha} + \frac{8}{3} \cdot \frac{f_0^2 \cos^3 \alpha}{l} \quad (2.3-9)$$

Outra fórmula, também aproximada, pode ser obtida com:

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + \left[-\frac{px}{H} + \frac{pl}{2H} + \frac{h}{l} \right]^2} dx \approx \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{px}{H} + \frac{pl}{2H} + \frac{h}{l} \right)^2 \right] dx$$

ou

$$s = l \left[1 + \frac{p^2 l^2}{24H^2} + \frac{h^2}{2l^2} \right] \quad (2.3-10)$$

2.3.7- Tração no cabo para arranques nivelados

Da equação $H = T \cos \theta$, resulta:

$$T = \frac{H}{\cos \theta} = \frac{H ds}{dx} = H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = H \sqrt{1 + \left(-\frac{px}{H} + \frac{pl}{2H} \right)^2} \quad (2.3-11)$$

Aqui também, a exemplo de (2.1-6), pode-se verificar a relação existente entre T_{\max} e H . Fazendo-se $x=0$ ou $x=l$ em (2.3-11) e observando que $H = \frac{p\ell^2}{8f}$, resulta a expressão de T_{\max} em função da relação f/l .

$$T_{\max} = H \sqrt{1 + 16 \left(\frac{f}{\ell}\right)^2}$$

Para as relações usuais de f/l , os valores de T_{\max}/H são os seguintes:

f/l	1/25	1/20	1/15	1/10	1/5
$\frac{T_{\max}}{H}$	1,0127	1,0198	1,0350	1,0770	1,2806

2.3.8- Tração no cabo para arranques desnivelados

Analogamente

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = \frac{H ds}{dx} = H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H \sqrt{1 + \left[-\frac{px}{H} + \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}\right)\right]^2} \quad (2.3-11)$$

2.3.9- Fôrça horizontal H

Para arranques nivelados com flecha conhecida, usa-se a equação (2.3-3) com $x=l/2$. Resulta então:

$$H = \frac{p\ell^2}{8f} \quad (2.3-12)$$

Sendo dada a inclinação do cabo no arranque, tem-se com (2.3-3):

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{p\ell}{2H}$$

e então:

$$H = \frac{p\ell}{2\operatorname{tg}\theta_1} \quad (2.3-13)$$

Para arranques desnivelados e inclinação θ_1 , conhecida, determina-se com (2.3-4)

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}$$

donde

$$H = \frac{p\ell}{2(\operatorname{tg}\theta_1 - h/\ell)} \quad (2.3-14)$$

Quando se conhece a flecha no vértice do cabo o procedimento é o seguinte:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_v} = 0 = -\frac{px_v}{H} + \frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}$$

donde

$$x_v = \frac{H}{p} \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell} \right) \quad (2.3-15)$$

Com $x = x_v$ em (2.3-4) resulta

$$f = -\frac{p}{2H} x_v^2 + \left(\frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell} \right) x_v \quad (2.3-16)$$

Usando-se as equações (2.3-15) e (2.3-16), resultam

$$H = \frac{p\ell^2}{h} \left[f(1 \pm \sqrt{1 - \frac{h}{f}}) - \frac{h}{2} \right] \quad (2.3-17)$$

$$x_v = \frac{\ell}{h} \left[f(1 \pm \sqrt{1 - \frac{h}{f}}) \right] \quad (2.3-18)$$

O duplo sinal nas fórmulas (2.3-17) e (2.3-18) indica os valores de H e x_v para $x_v > \ell$ (sinal positivo) e $x_v < \ell$.

2.3.10-Influência do deslocamento horizontal dos arranques

Na maioria das coberturas pênseis os cabos acham-se

ancorados em pilares, que sob a ação da força H se deformam. Essa deformação em geral se traduz por um deslocamento horizontal dos arranques, alterando a geometria do cabo e em consequência os esforços inicialmente calculados. Para calcular o valor de H , após o deslocamento dos arranques, basta observar que sendo o cabo inextensível, o seu comprimento será o mesmo antes e após a redução do vão. Sendo $\Delta l = H(K_1 + K_2)$ e usando-se a fórmula aproximada, tem-se arranques em nível:

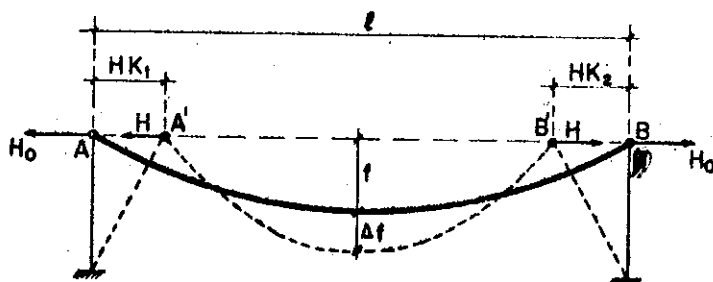


Fig. 10

$$s = l \left[1 + \frac{p^2 l^2}{24 H_0^2} \right] \quad (2.3-19)$$

$$s = \left[l - H(K_1 + K_2) \right] \left[1 + \frac{p^2 [l - H(K_1 + K_2)]^2}{24 H^2} \right] \quad (2.3-20)$$

A igualdade entre as equações (2.3-19) e (2.3-20) fornece o valor de H e em consequência a variação de flecha e o deslocamento dos arranques.

No caso de arranques desnivelados, usando-se a equação (2.3-10) resulta:

$$s = l \left[1 + \frac{p^2 l^2}{24 H_0^2} + \frac{h^2}{2 l^2} \right] \quad (2.3-21)$$

$$s = \left[l - H(K_1 + K_2) \right] \left[1 + \frac{p^2 [l - H(K_1 + K_2)]^2}{24 H^2} + \frac{h^2}{[2 l - H(K_1 + K_2)]^2} \right]$$

(2.3-22)

Igualando-se (2.3-21) e (2.3-22), resulta H e com êle os outros elementos do cabo. É interessante observar, que uma pequena redução no vão influi de maneira apreciável na flecha. Para arranques em nível, por exemplo, com relação inicial $f/L = 1/20$, a uma redução de 0,1% no vão corresponde aumento de flecha da ordem de 7%. Para relação inicial $f/L = 1/10$ e mesma redução no vão, o acréscimo de flecha é de aproximadamente 2%.

2.4 - AÇÃO SIMULTÂNEA DE CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS AO LONGO DO COMPRIMENTO DO CABO E AO LONGO DO VÃO (SOLUÇÃO APROXIMADA)

2.4.1 - Equação Aproximada

Suponha-se o cabo com carga vertical g uniformemente distribuída ao longo do comprimento. Acrescentando-se ao cabo um carregamento p , também vertical, distribuído uniformemente ao longo do vão, a equação (2.1-4) pode assim ser escrita:

$$(H_g + \Delta H_p)(y_g'' + \Delta y_p'') = -g \sqrt{1 + (y_g' + \Delta y_p')^2} - p \quad (2.4-1)$$

Observando que para a catenária $H_g y_g'' = -g \sqrt{1 + y_g'^2}$ e desprezando-se a variação da inclinação do cabo provocada pela carga p , a equação (2.1-4) fica:

$$(H_g + \Delta H_p) \Delta y_p'' = H \Delta y_p'' = -\Delta H_p y_g'' - p \quad (2.4-2)$$

Integrando resulta:

$$(H_g + \Delta H_p) \Delta y_p' = H \Delta y_p' = -\Delta H_p y_g' - \frac{px^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (2.4-3)$$

ou

$$\Delta y_p = -\frac{\Delta H_p}{H} y_g - \frac{px^2}{2H} + \frac{C_1 x}{H} + \frac{C_2}{H} \quad (2.4-4)$$

Sendo, porém, $y = y_g + \Delta y_p$, resulta:

$$y = \left(\frac{H}{g}\right)y_g - \frac{px^2}{2H} + \frac{C_1 x}{H} + \frac{C_2}{H} \quad (2.4-5)$$

A equação (2.4-5) define a configuração aproximada de equilíbrio do cabo sujeito à ação de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento e ao longo do vão.

2.4.2-Constantes de integração para arranques nivelados

Fazendo-se na equação (2.4-5) $x=0$ e $x=l$ resulta

$$x = 0, y = y_g = 0 \therefore C_2 = 0$$

$$x = l; y = y_g = 0 \therefore C_1 = \frac{pl}{2}$$

Com o valor de C_1 , na equação (2.4-5) obtém-se

$$y = \left(\frac{H}{g}\right)y_g - \frac{px^2}{2H} + \frac{pl}{2H} x \quad (2.4-6)$$

A (2.4-6) é a equação aproximada da curva do cabo para arranques nivelados.

2.4.3-Constantes de integração para arranques desnivelados.

Fazendo-se em (2.4-5) $x=0$ e $x=l$, vem:

$$x = 0, y = y_g = 0 \therefore C_2 = 0$$

$$x = l; y = y_g = h \therefore C_1 = \frac{pl}{2} + (H - H_g) \frac{h}{l}$$

Levando C_1 na equação (2.4-5) vem:

$$y = \left(\frac{H}{g}\right)y_g - \frac{px^2}{2H} + \frac{pl}{2H} x + \left(\frac{H - H_g}{H}\right) \cdot \frac{h}{l} x \quad (2.4-7)$$

2.4.4- Fôrça horizontal H para arranques nivelados

Sendo o cabo inextensível podemos escrever:

$$S = \int_0^{\ell} \sqrt{1+y_g'^2} \, dx = \int_0^{\ell} \sqrt{1 + \left[\frac{H_g}{H} y_g' - \frac{px}{H} + \frac{p\ell}{2H} \right]^2} \, dx$$

ou

$$S = \int_0^{\ell} \sqrt{1 + \left[y_g' - \left(\frac{H - H_g}{H} \right) y_g' - \frac{px}{H} + \frac{p\ell}{2H} \right]^2} \, dx \quad (2.4-8)$$

A equação (2.4-8) permite, embora de maneira bastante trabalhosa, a determinação da fôrça H desde que se conheça a priori o comprimento e a fôrça horizontal da catenária. Usando, porém, a expressão

$$\sqrt{1+(a+b)^2} \approx \sqrt{1+a^2} + \frac{ab}{\sqrt{1+a^2}}$$

podemos escrever a (2.4-8) da seguinte forma:

$$\int_0^{\ell} \sqrt{1+y_g'^2} \, dx = \int_0^{\ell} \sqrt{1+y_g'^2} \, dx + \int_0^{\ell} \frac{y_g' \frac{g}{g}}{\sqrt{1+y_g'^2}} \left[-\left(\frac{H-H_g}{H} \right) y_g' - \frac{px}{H} + \frac{p\ell}{2H} \right] dx$$

ou

$$\int_0^{\ell} \frac{y_g' \frac{g}{g}}{\sqrt{1+y_g'^2}} \left[-(H-H_g) y_g' - px + \frac{p\ell}{2} \right] dx = 0$$

Sendo, para a catenária, $y_g' = -\operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H_g} - \frac{g\ell}{2H_g}\right)$, vem

$$\int_0^{\ell} \left[(H-H_g) \operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H_g} - \frac{g\ell}{2H_g}\right) - px + \frac{p\ell}{2} \right] \operatorname{Th}\left(\frac{gx}{H_g} - \frac{g\ell}{2H_g}\right) dx = 0$$

e então:

$$\frac{2H_g}{g}(H-H_g) \left\{ \text{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H_g}\right) - \text{arc tg} \left[\text{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H_g}\right) \right] \right\} -$$

$$- p \left(\frac{g\ell^3}{12H_g} - \frac{g^3\ell^3}{240H_g^3} \right) = 0$$

donde:

$$H = H_g + \frac{\frac{g^2 p \ell^3}{24H_g^2} \left(1 - \frac{g^2 \ell^2}{20H_g^2} \right)}{\text{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H_g}\right) - \text{arctg} \left[\text{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H_g}\right) \right]} \quad (2.4-9)$$

2.4.5-Fôrça horizontal H para arranques desnivelados.

Procedendo de maneira análoga, obtem-se:

$$\int_0^{\ell} \left[(H-H_g) \text{Sh}\left(\frac{gx}{H} - C_1\right) - px + \frac{p\ell}{2} + (H-H_g) \frac{h}{\ell} \right] \text{Th}\left(\frac{gx}{H} - C_1\right) dx = 0$$

Efetuada a integração resulta:

$$H = H_g + \frac{p\ell(2Bg - H_g\ell)}{2H_g(A\ell + hC)} \quad (2.4-10)$$

onde:

$$A = \text{Sh}\left(\frac{g\ell}{H_g} - C_1\right) + \text{Sh}C_1 - \text{arctg} \left[\text{Sh}\left(\frac{g\ell}{H_g} - C_1\right) \right] - \text{arctg} (\text{Sh} C_1)$$

$$B = \frac{C_1}{6} (C_1^2 - 3)\ell^2 + \frac{g}{3H_g} (1 - C_1^2)\ell^3 + \frac{g^2 C_1}{4H_g^2} \ell^4 - \frac{g^3 \ell^5}{15 H_g^3}$$

$$C = \log \left| \frac{\operatorname{Ch}\left(\frac{g\ell}{H_g} - C_1\right)}{\operatorname{Ch} C_1} \right|$$

$$C_1 = \operatorname{arc} \operatorname{Sh}(\operatorname{tg}\theta_1)$$

2.4.6-Comprimento do cabo

Sendo o cabo inextensível, o seu comprimento será da do por (2.2-12) no caso de arranques nivelados e por (2.2-14) para arranques desnivelado; substituindo-se, evidentemente, H por H_g .

2.4.7-Tração no cabo

As trações no cabo para arranques nivelados e desnive-
lados, são respectivamente:

$$T = H \sqrt{1 + \left[-\frac{H_g}{H} \operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H_g} - \frac{g\ell}{2H_g}\right) - \frac{px}{H} + \frac{p\ell}{2H} \right]^2} \quad (2.4-11)$$

$$T = H \sqrt{1 + \left[-\frac{H_g}{H} \operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H_g} - \frac{g\ell}{2H_g}\right) - \frac{px}{H} + \frac{p\ell}{2H} + \left(\frac{H-H_g}{H}\right) \cdot \frac{h}{Z} \right]^2}$$

(2.4-12)

3. - CABOS INEXTENSÍVEIS COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA, PARCIALMENTE DISTRIBUÍDA E CARGA CONCENTRADA

Faz-se neste capítulo primeiramente o estudo da ação conjunta de carga concentrada e carga uniforme segundo o cabo. O tratamento dado se assemelha ao feito em Santos (12) e pode, a menos de excessivo trabalho algébrico, ser estendido para maior número de cargas concentradas. Para estudo da carga uniformemente distribuída segundo o vão, atuando concomitantemente ou com carga concentrada ou com carga parcialmente distribuída, seguiu-se Gravina (3), que estuda os casos simétricos, estendendo-se a análise aos casos de cargas excêntricas e cabos com arranques desnivelados.

3.1 - AÇÃO SIMULTÂNEA DE CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA AO LONGO DO COMPRIMENTO DO CABO E CARGA CONCENTRADA

Suponha-se que inicialmente atue no cabo somente a carga vertical uniformemente distribuída g . Após a aplicação da carga vertical concentrada N , a configuração de equilíbrio anteriormente uma catenária - ficará constituída, como é evidente, por dois segmentos de catenária como está representada na figura abaixo.

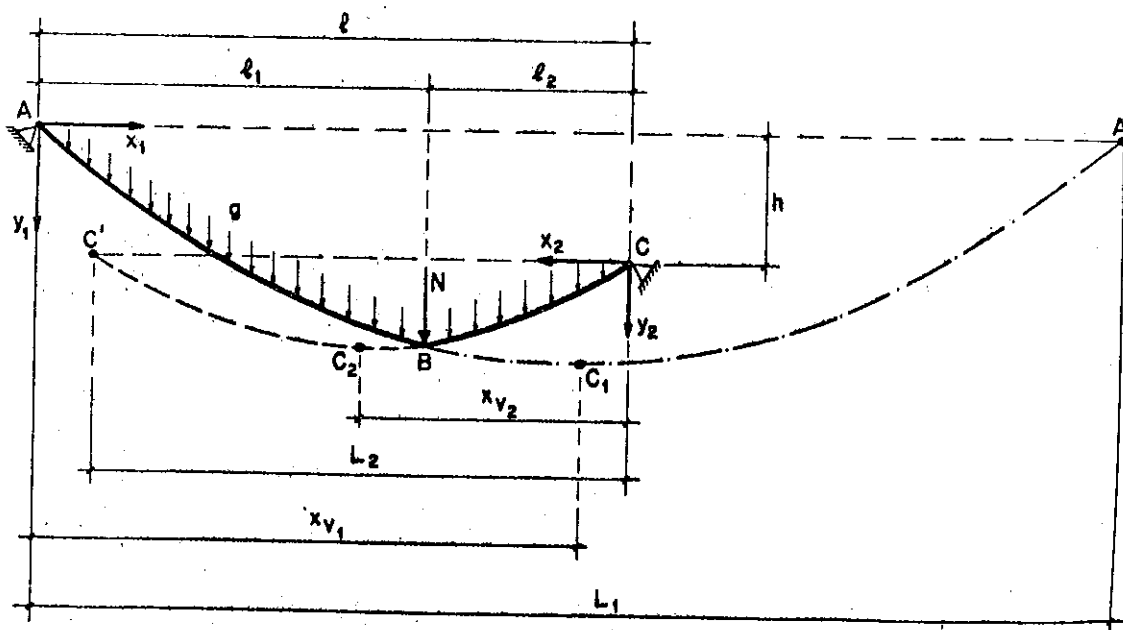


Fig. 19

Tomando-se como referência o par de eixos (x_1, y_1) , a equação do segmento AB será:

$$y_1 = -\frac{H}{g} \left[\text{Ch}\left(\frac{gx_1}{H} - \frac{gL_1}{2H}\right) - \text{Ch}\left(\frac{gL_1}{2H}\right) \right]$$

ou

$$y_1 = -\frac{H}{g} \left[\text{Ch}\left(\frac{gx_1}{H} - \frac{gx_{v1}}{H}\right) - \text{Ch}\left(\frac{gx_{v1}}{H}\right) \right] \quad (3.1-1)$$

Analogamente a equação do segmento CB em relação aos eixos (x_2, y_2) é:

$$y_2 = -\frac{H}{g} \left[\text{Ch}\left(\frac{gx_2}{H} - \frac{gL_2}{2H}\right) - \text{Ch}\left(\frac{gL_2}{2H}\right) \right]$$

ou

$$y_2 = -\frac{H}{g} \left[\text{Ch}\left(\frac{gx_2}{H} - \frac{gx_{v2}}{H}\right) - \text{Ch}\left(\frac{gx_{v2}}{H}\right) \right] \quad (3.1-2)$$

Fazendo, respectivamente, nas equações (3.1-1) e (3.1-2) $x_1 = \ell_1$, $x_2 = \ell_2$, obtém-se após subtrair membro a membro:

$$h = -\frac{H}{g} \left[\text{Ch}\left(\frac{g\ell_1}{H} - \frac{gx_{v1}}{H}\right) - \text{Ch}\left(\frac{gx_{v1}}{H}\right) - \text{Ch}\left(\frac{g\ell_2}{H} - \frac{gx_{v2}}{H}\right) + \text{Ch}\left(\frac{gx_{v2}}{H}\right) \right] \quad (3.1-3)$$

A (3.1-3) é a primeira equação a ser usada para a determinação da força horizontal H e das abscissas dos vértices C_1 e C_2 .

A segunda equação será obtida estudando-se as condições de equilíbrio do ponto B. Observando a figura abaixo, tira-se

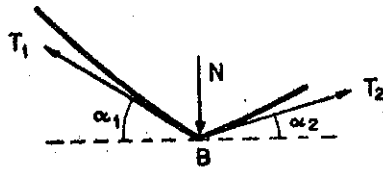


Fig. 20

$$N = T_1 \text{sen} \alpha_1 + T_2 \text{sen} \alpha_2 \quad (3.1-4)$$

Lembrando que $T_1 \text{cos} \alpha_1 = T_2 \text{cos} \alpha_2 = H = \text{cte}$, a (3.1-4) se transforma em:

$$N = H \left[\text{tg} \alpha_1 + \text{tg} \alpha_2 \right] \quad (3.1-5)$$

Levando-se os valores de

$$\text{tg} \alpha_1 = - \text{Sh} \left(\frac{g \ell_1}{H} - \frac{g x_{v1}}{H} \right)$$

e

$$\text{tg} \alpha_2 = - \text{Sh} \left(\frac{g \ell_2}{H} - \frac{g x_{v2}}{H} \right)$$

na equação (3.1-5) obtém-se a segunda equação que é necessária para o cálculo das incógnitas:

$$N = - H \left[\text{Sh} \left(\frac{g \ell_1}{H} - \frac{g x_{v1}}{H} \right) + \text{Sh} \left(\frac{g \ell_2}{H} - \frac{g x_{v2}}{H} \right) \right] \quad (3.1-6)$$

Sendo, finalmente, s o comprimento do cabo antes da aplicação da carga concentrada, s_1 e s_2 respectivamente os comprimentos dos segmentos AB e CB, pode-se escrever após admitir a hipótese da inextensibilidade do cabo:

$$s = \int_0^{\ell_1} \sqrt{1 + \text{Sh}^2 \left(\frac{g x_1}{H} - \frac{g x_{v1}}{H} \right)} dx_1 + \int_0^{\ell_2} \sqrt{1 + \text{Sh}^2 \left(\frac{g x_2}{H} - \frac{g x_{v2}}{H} \right)} dx_2$$

As equações dos arcos parabólicos AB e CB em relação aos pares de eixos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ são:

$$y_1 = -\frac{px_1^2}{2H} + \left(\frac{px_{v1}}{H}\right)x_1 = -\frac{px_1^2}{2H} + \left(\frac{px_{v1}}{H}\right)x_1 \quad (3.2-1)$$

$$y_2 = -\frac{px_2^2}{2H} + \left(\frac{px_{v2}}{H}\right)x_2 = -\frac{px_2^2}{2H} + \left(\frac{px_{v2}}{H}\right)x_2 \quad (3.2-2)$$

Subtraindo-se membro a membro as equações (3.2-1) e (3.2-2), após substituir x_1 por ℓ_1 e x_2 por ℓ_2 , obtem-se a primeira das três equações:

$$h = -\frac{p\ell_1^2}{2H} + \left(\frac{px_{v1}}{H}\right)\ell_1 + \frac{p\ell_2^2}{2H} - \left(\frac{px_{v2}}{H}\right)\ell_2 \quad (3.2-3)$$

As condições de equilíbrio do ponto B (figura abaixo) exigem que:

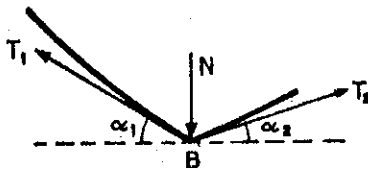


Fig. 22

$$N = T_1 \text{ sen } \alpha_1 + T_2 \text{ sen } \alpha_2$$

Lembrando mais uma vez que $T_1 \text{ cos } \alpha_1 = T_2 \text{ cos } \alpha_2 = H$, vem:

$$N = H \left[\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2 \right] \quad (3.2-5)$$

Levando os valores de

$$\text{tg } \alpha_1 = -\frac{p\ell_1}{H} + \frac{px_{v1}}{H}$$

e

$$\text{tg } \alpha_2 = -\frac{p\ell_2}{H} + \frac{px_{v2}}{H}$$

na equação (3.2-5) obtem-se a segunda equação:

$$x_{v_1} + x_{v_2} - (\ell_1 + \ell_2) = \frac{N}{p} \quad (3.2-6)$$

Admitindo-se novamente a hipótese da inextensibilidade do cabo e usando, por simplicidade, a fórmula aproximada para o cálculo dos comprimentos dos arcos parabólicos, tem-se a última equação

$$s = \int_0^{\ell_1} \left[1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{px_1}{H} + \frac{px_{v_1}}{H} \right)^2 \right] dx_1 + \int_0^{\ell_2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{px_2}{H} + \frac{px_{v_2}}{H} \right)^2 \right] dx_2$$

ou

$$s = \ell_1 + \frac{p^2 \ell_1^3}{6H^2} - \left(\frac{p^2 \ell_1^2}{2H^2} \right) x_{v_1} + \left(\frac{p^2 \ell_1}{2H^2} \right) x_{v_1}^2 +$$

$$\ell_2 + \frac{p^2 \ell_2^3}{6H^2} - \left(\frac{p^2 \ell_2^2}{2H^2} \right) x_{v_2} + \left(\frac{p^2 \ell_2}{2H^2} \right) x_{v_2}^2 \quad (3.2-7)$$

As equações (3.2-3-6-7) formam o sistema que possibilita o cálculo das incógnitas x_{v_1} , x_{v_2} , e H .

Se ocorrer denível igual a zero as equações (3.2-3) e (3.2-6) fornecem

$$x_{v_1} = \frac{N\ell_2}{p\ell} + \frac{1}{2\ell} \left[\ell_1^2 - \ell_2^2 \right] + \ell_2$$

$$x_{v_2} = \frac{N\ell_1}{p\ell} + \frac{1}{2\ell} \left[\ell_2^2 - \ell_1^2 \right] + \ell_1$$

que levados à equação (3.2-7) fornecem o valor de H . Se além de $h=0$, acontecer $\ell_1 = \ell_2 = \ell/2$, tem-se:

$$x_{v_1} = x_{v_2} = \frac{N}{2p} + \frac{\ell}{2}$$

Levando-se os últimos valores de x_{v_1} e x_{v_2} na equação (3.2-7) vem:

$$s = \ell + \frac{p^2 \ell^3}{24H^2} + \frac{pN\ell^2}{8H^2} + \frac{N^2 \ell}{8H^2} \quad (3.2-8)$$

Sendo f_0 e H_0 os valores da flecha no meio do vão e da força horizontal no cabo antes na aplicação da carga concentrada, o comprimento S será, como já se viu, dado por

$$s = \ell \left[1 + \frac{8}{3} \frac{f_0^2}{\ell^2} \right] = \ell \left[1 + \frac{1}{24} \cdot \frac{p^2 \ell^2}{H_0^2} \right] \quad (3.2-9)$$

Igualando as equações (3.2-8) e (3.2-9) resulta:

$$H = H_0 \sqrt{1 + \frac{3N}{p\ell} + 3\left(\frac{N}{p\ell}\right)^2} \quad (3.2-10)$$

Introduzindo na equação (3.2-1) o valor de $x_{v,1}$ e fazendo $x_1 = \ell/2$, obtem-se a flecha no ponto de aplicação da carga N :

$$f = \frac{1}{H} \left[\frac{p\ell^2}{8} + \frac{N\ell}{4} \right] \quad (3.2-11)$$

Levando o valor de H dado por (3.2-10) na equação (3.2-11), e tendo em conta que $H_0 = \frac{p\ell^2}{8f_0}$, resulta

$$f = \frac{f_0 \left(1 + \frac{2N}{p\ell}\right)}{\sqrt{1 + \frac{3N}{p\ell} + 3\left(\frac{N}{p\ell}\right)^2}} \quad (3.2-12)$$

A tração no cabo será dada, evidentemente, por

$$T = H \sqrt{1 + \left[-\frac{p\ell}{H} + \frac{p}{H} \left(\frac{N}{2p} + \frac{\ell}{2} \right) \right]^2} \quad (3.2-13)$$

3.3 - AÇÃO SIMULTÂNEA DE CARGA UNIFORMEMENTE E PARCIALMENTE DISTRIBUÍDA AO LONGO DO VÃO.

Neste caso é necessário um sistema de quatro equações que possibilite a determinação das incógnitas $x_{v,1}$, $x_{v,2}$, $x_{v,3}$ e H .

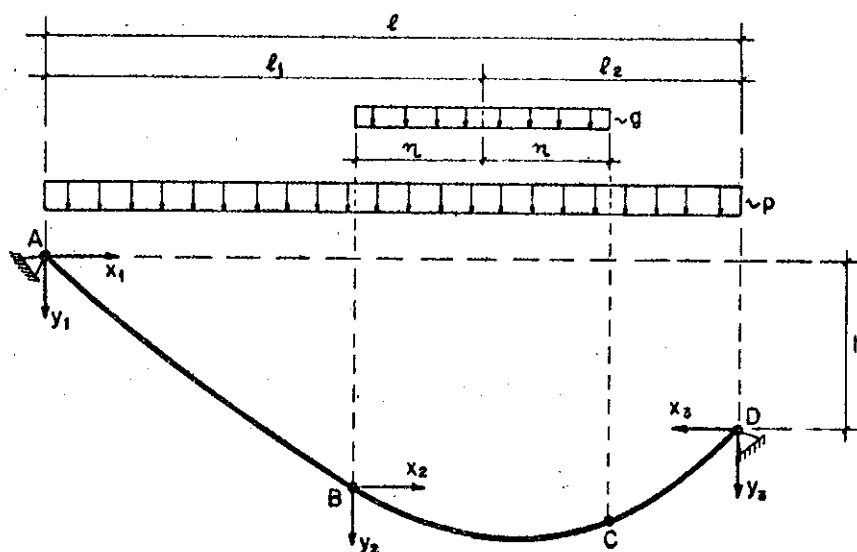


Fig. 23

As equações dos arcos parabólicos AB, BC e DC são:

$$AB: y_1 = -\frac{p x_1^2}{2H} + \left(\frac{p x_{v1}}{H}\right) x_1 \quad (3.3-1)$$

$$BC: y_2 = -\frac{(p+q)x_2^2}{2H} + \frac{(p+q)x_{v2}}{H} \quad (3.3-2)$$

$$DC: y_3 = -\frac{p x_3^2}{2H} + \left(\frac{p x_{v3}}{H}\right) x_3 \quad (3.3-3)$$

A condição de existir uma única tangente nos pontos B e C fornece as duas primeiras equações.

$$-\frac{p(l_1-n)}{H} + \frac{p x_{v1}}{H} = \frac{(p+q)x_{v2}}{H} \quad (3.3-4)$$

$$-\frac{2n(p+q)}{H} + \frac{(p+q)x_{v2}}{H} = \frac{p(l_2-n)}{H} - \frac{p x_{v3}}{H} \quad (3.3-5)$$

A terceira equação é obtida de maneira análoga a equação (3.2-3). Isto é:

$$h = - \frac{p}{2H}(\ell_1 - n)^2 + \frac{p}{H}(\ell_1 - n)x_{v_1} - \frac{p+q}{2H}(2n)^2 +$$

$$+ \frac{p+q}{H}(2n)x_{v_2} + \frac{p}{2H}(\ell_2 - n)^2 - \frac{p}{H}(\ell_2 - n)x_{v_3} \quad (3.3-6)$$

A quarta e última equação será dada pela condição de inextensibilidade do cabo.

$$s = \int_0^{\ell_1 - n} \left[1 + \frac{1}{2} \left(- \frac{px_1}{H} + \frac{px_{v_1}}{H} \right)^2 \right] dx_1 +$$

$$\int_0^{2n} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{(p+q)x_2}{H} + \frac{(p+q)x_{v_2}}{H} \right)^2 \right] dx_2 +$$

$$\int_0^{\ell_2 - n} \left[1 + \frac{1}{2} \left(- \frac{px_3}{H} + \frac{px_{v_3}}{H} \right)^2 \right] dx_3$$

ou

$$s = (\ell_1 - n) + \frac{p^2(\ell_1 - n)^3}{6H^2} - \frac{p^2x_{v_1}(\ell_1 - n)^2}{2H^2} + \frac{p^2x_{v_1}^2(\ell_1 - n)}{2H^2} + 2n +$$

$$+ \frac{p+q}{6H^2}(2n)^3 - \frac{(p+q)x_{v_2}(2n)^2}{2H^2} + \frac{(p+q)x_{v_2}^2(2n)}{2H^2} +$$

$$+ (\ell_2 - n) + \frac{p^2(\ell_2 - n)^3}{6H^2} - \frac{p^2x_{v_3}(\ell_2 - n)^2}{2H^2} + \frac{p^2x_{v_3}^2(\ell_2 - n)}{2H^2} \quad (3.3-7)$$

As equações (3.3-4-5-6-7) permitem o cálculo das incógnitas

procuradas.

No caso de $h=0$, os v̄rtices:

$$x_{v_1} = \frac{2n(p+q)\ell_2}{p\ell} + (\ell_1 - n) + \frac{1}{2\ell} \left[(\ell_2 - n)^2 - (\ell_1 - n)^2 \right]$$

$$x_{v_2} = \frac{p}{2\ell(p+q)} \left[(\ell_2 - n)^2 - (\ell_1 - n)^2 \right] + \frac{2n\ell_2}{\ell}$$

$$x_{v_3} = \frac{2n(p+q)\ell_1}{p\ell} + (\ell_2 - n) + \frac{1}{2\ell} \left[(\ell_1 - n)^2 - (\ell_2 - n)^2 \right]$$

dados pelas equações (3.3-4-5-6) e a equação (3.3-7) determinam o valor de H.

Se ocorrer também $\ell_1 = \ell_2 = \ell/2$, os v̄rtices ser̄o:

$$x_{v_2} = n$$

$$x_{v_1} = x_{v_3} = \frac{nq}{p} + \ell/2$$

Com esses ũltimos valores na equação (3.3-7) e notando-se que s̄ e dado pela (3.2-8), resulta:

$$H = H_0 \sqrt{1 + \frac{6qn}{p\ell} + 12\left(\frac{qn}{p\ell}\right)^2 - \frac{8qn^3}{p\ell^3} \left[\frac{2q}{p} + 1\right]} \quad (3.3-8)$$

Com as equações (3.3-1) e (3.3-2) tira-se a flecha no meio do v̄o

$$f = \frac{1}{H} \left[\frac{p\ell^2}{8} + \frac{nq}{2}(\ell - n) \right] \quad (3.3-9)$$

ou ainda:

$$f = f_0 \left[\frac{1 + \frac{4nq(\ell - n)}{p\ell}}{\sqrt{1 + \frac{6qn}{p\ell} + 12\left(\frac{qn}{p\ell}\right)^2 - \frac{8qn^3}{p\ell^3} \left(\frac{2q}{p} + 1\right)}} \right] \quad (3.3-10)$$

As trações nos segmentos parabólicos AB e CD e no segmento BC serão, respectivamente:

$$T = H \sqrt{1 + \left[-\frac{px}{H} + \frac{p}{H} \left(\frac{nq}{p} + \ell/2 \right) \right]^2}$$

$$T = H \sqrt{1 + \left[-\left(\frac{p+q}{H} \right) x + \left(\frac{p+q}{H} \right) n \right]^2}$$

4. -CABOS DEFORMÁVEIS

No estudo que segue analisa-se o efeito, até aqui desprezado, do alongamento do cabo provocado ou pela carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento do cabo ou pela carga uniformemente distribuída ao longo do vão, levando-se em conta também, num e noutro caso, as possíveis variações de temperatura. O estudo do cabo deformável para a ação conjunta de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento e ao longo do vão, foi omitido, pelas razões já citadas na introdução, relacionadas com o fato de se poder levar em conta, com boa aproximação, a ação simultânea de ambas as cargas, quer adotando para configuração do cabo a parábola, quer a catenária.

Dos casos de carga estudados no capítulo três, analisa-se somente o (3.2) considerando-se arranques em nível e carga concentrada atuando no meio do vão. Embora bastante particular, a solução dada orienta o caso geral de carga concentrada e os demais casos tratados no referido capítulo.

O tratamento aqui dado aos cabos deformáveis não foi encontrado na bibliografia recolhida e que se encontra relacionada no final do trabalho.

4.1 -EXPRESSÃO DO ALONGAMENTO DO CABO

Sendo T a força de tração em um ponto genérico do cabo, E o módulo de elasticidade, F a área da secção transversal, α o coeficiente de dilatação térmica e Δt a variação de temperatura, o alongamento de um elemento de cabo é dado por:

$$d(\Delta s) = \left(\frac{T}{EF} + \alpha \Delta t \right) ds$$

Tendo presente que $T = \frac{Hds}{dx}$ e que $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$ a expressão anterior se transforma em:

$$d(\Delta s) = \frac{H}{EF} (1+y'^2) dx + \alpha \Delta t \sqrt{1+y'^2} dx$$

Sendo l a distância entre os arranques, suposta invariável, e admitindo-se a constância de E e F , ter-se-á, após fazer a integração, a expressão que permite o cálculo do alongamento do cabo:

$$\Delta s = \frac{h}{EF} \int_0^{\ell} (1+y'^2) dx + \alpha \Delta t \int_0^{\ell} \sqrt{1+y'^2} dx$$

4.2 - CARGA VERTICAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA AO LONGO DO COMPRIMENTO DO CABO (CATENÁRIA)

4.2.1 - Catenária nivelada

Sendo para catenária nivelada $y' = - \operatorname{Sh}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right)$, da expressão de Δs , resulta:

$$\Delta s = \frac{H}{EF} \int_0^{\ell} \operatorname{ch}^2\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) dx + \alpha \Delta t \int_0^{\ell} \operatorname{ch}\left(\frac{gx}{H} - \frac{g\ell}{2H}\right) dx$$

e então:

$$\Delta s = \frac{H}{2EF} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{g\ell}{H}\right) + \frac{H}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{H}\right) \right] + 2\alpha \Delta t \left[\frac{H}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H}\right) \right] \quad (4.2-1)$$

O cálculo imediato de Δs com a expressão (4.2-1) não é possível pois se desconhece o valor que H assume após a deformação do cabo. Por outro lado, sendo os comprimentos, inicial e final do cabo, respectivamente, iguais a

$$s_0 = \frac{2H_0}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H_0}\right) \quad (4.2-2)$$

$$s = \frac{2H}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H}\right) \quad (4.2-3)$$

podemos escrever a equação que determina o valor da força horizontal após a deformação do cabo:

$$\frac{2H}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H}\right) = \frac{2H_0}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H_0}\right) + \frac{H}{2EF} \left[\ell + \frac{H}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{H}\right) \right] + 2\alpha \Delta t \left[\frac{H}{g} \operatorname{Sh}\left(\frac{g\ell}{2H}\right) \right] \quad (4.2-4)$$

Com o valor de H determinado pode-se calcular facilmente o acréscimo da flecha, a tração máxima e também o novo comprimento

to do cabo.

Um outro caminho, talvez até mais rápido, para determinar o valor final de H, são as aproximações sucessivas. Para isso, admite-se para H um valor H_1 , que pode ser inclusive H_0 , e calcula-se Δs . Com Δs assim obtido determina-se o comprimento do cabo deformado e com ele, usando-se a equação (4.2-3) um novo valor H_{1+1} . Repete-se essa operação sucessivamente até obter H_1 razoavelmente próximo de H_{1+1} .

4.2.2-Catenária desnivelada

Procedendo de maneira análoga e usando-se a equação (2.2-7), tem-se:

$$\Delta s = \frac{H}{2EF} \left[\ell + \frac{H}{2g} \operatorname{Sh} \left(\frac{2g\ell}{H} - 2C \right) + \frac{H}{2g} \operatorname{Sh} (2C) \right] + \alpha \Delta t \left[\frac{H}{g} \operatorname{Sh} \left(\frac{2g\ell}{H} - C \right) + \frac{H}{g} \operatorname{Sh} (C) \right] \quad (4.2-5)$$

Aqui se apresenta o mesmo inconveniente apontado anteriormente, com a agravante de não se conhecer também a inclinação do cabo no arranque após a deformação, isto é, desconhece-se $C = \operatorname{arc Sh}(\operatorname{tg}\theta)$.

Sendo entretanto

$$s_0 = - \frac{H_0}{g} \left[\operatorname{Sh} \left(\frac{g\ell}{H_0} - C_1 \right) - \operatorname{Sh} C_1 \right] \quad (4.2-6)$$

$$s = - \frac{H}{g} \left[\operatorname{Sh} \left(\frac{g\ell}{H} - C \right) - \operatorname{Sh} C \right] \quad (4.2-7)$$

e desprezando-se, pelo menos em primeira aproximação, a variação da inclinação do cabo no arranque, o que equivale admitir $C = C_1 = \operatorname{arc Sh}(\operatorname{tg}\theta_1)$, tem-se a equação que determina H:

$$\begin{aligned} \frac{H}{g} \left[\sinh\left(\frac{g\ell}{H} - C_1\right) - \text{Sh } C_1 \right] &= \frac{H_0}{g} \left[\text{Sh}\left(\frac{g\ell}{H_0} - C_1\right) - \text{Sh } C_1 \right] + \\ &+ \frac{H}{2EF} \left[\ell + \frac{H}{2g} \text{Sh}\left(\frac{2g\ell}{H} - 2C_1\right) + \frac{H}{2g} \text{Sh}(2C_1) \right] + \\ &+ \alpha \Delta t \left[\frac{H}{g} \text{Sh}\left(\frac{g\ell}{H} - C_1\right) + \frac{H}{g} \text{Sh}(C_1) \right] \end{aligned} \quad (4.2-8)$$

Desejando-se maior exatidão, recorre-se ao processo de aproximações sucessivas. Neste caso estima-se um valor para C e calcula-se H com a equação (4.2-8). Com o mesmo valor de C e $x=\ell$ na equação (2.2-7) calcula-se outro valor H. Procedese assim até que os dois valores sejam razoavelmente próximos. Após a determinação dessas grandezas pode-se calcular os outros elementos do cabo.

4.3 - CARGA VERTICAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA AO LONGO DO VÃO (PARÁBOLA).

4.3.1-Parábola Nivelada

Levando-se na expressão de $\Delta s, y' = -\frac{px}{H} + \frac{p\ell}{2H}$ e fazendo-se por simplicidade $\sqrt{1+y'^2} \approx 1 + \frac{1}{2} y'^2$, tem-se após efetuar as operações necessárias:

$$\Delta s = \frac{H\ell}{EF} \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{12H^2} \right] + \alpha \Delta t \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} \right] \quad (4.3-1)$$

Como

$$s_0 = \ell \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{f_0^2}{\ell^2} \right] = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H_0^2} \right] \quad (4.3-2)$$

$$s = \ell \left[1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{\ell^2} \right] = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} \right] \quad (4.3-3)$$

resulta

$$\ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} \right] = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H_0^2} \right] + \frac{H\ell}{EF} \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{12H^2} \right] + \alpha \Delta t \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} \right]$$

e então a equação que determina H

$$H^3 + H^2 \left(\frac{p^2 \ell^2 EF}{24H_0^2} + \alpha \Delta t EF \right) + H \left(\frac{p^2 \ell^2}{12} \right) - \frac{p^2 \ell^2 EF}{24} (1 - \alpha \Delta t) = 0 \quad (4.3-4)$$

Observando que $H_0 = \frac{p\ell^2}{8f_0}$ e $H = \frac{p\ell^2}{8f}$, pode-se escrever a equação

(4.3-4) sob a forma:

$$f^3(1 - \alpha \Delta t) - f^2 \left(\frac{p^2 \ell^2}{4EF} \right) - f(f_0^2 + \frac{3}{8} \ell^2 \alpha \Delta t) - \frac{3}{64} \frac{p\ell^3}{EF} = 0 \quad (4.3-5)$$

que dá a flecha do cabo deformado e portanto o valor de H.

Aqui também, ao invés de resolver as equações do terceiro grau, pode-se usar aproximações sucessivas. Estima-se um valor para H, calcula-se Δs e então o comprimento do cabo. Com este em (4.3-3) determina-se outro H e compara-se com o H estimado. O ciclo de operações termina quando os dois valores de H estiverem próximos.

Outro procedimento para estudar a deformação do cabo é admitir $T=H_0$ que não leva a erros apreciáveis, principalmente quando a relação f/ℓ é pequena. Assim a expressão de Δs , sem contar o efeito da variação de temperatura, é:

$$\Delta s = \frac{Hs_0}{EF}$$

e então.

$$\ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} \right] = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H_0^2} \right] + \frac{H\ell}{EF} \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H_0^2} \right]$$

ou

$$H^3 \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24 H_0^2} \right] + H^2 \left[\frac{p^2 \ell^2 EF}{24 H_0^2} \right] - \frac{p^2 \ell^2 EF}{24} = 0 \quad (4.3-6)$$

Trocando-se H e H₀ respectivamente por $\frac{p\ell^2}{8f}$ e $\frac{p\ell^2}{8f_0}$ resulta:

$$f^3 - (f_0^2)f - \frac{3p\ell^4}{64EF} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f_0^2}{\ell^2} \right) = 0 \quad (4.3-7)$$

4.3.2-Parábola Desnivelada

Com $y' = -\frac{px}{H} + \frac{p\ell}{2H} + \frac{h}{\ell}$ na expressão de Δs , obtém-se de maneira análoga:

$$\Delta s = \frac{H\ell}{EF} \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{12H^2} + \frac{h^2}{\ell^2} \right] + \alpha \Delta t \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} + \frac{h^2}{2\ell^2} \right] \quad (4.3-8)$$

Como os comprimentos, inicial e final, são

$$s_0 = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24 H_0^2} + \frac{h^2}{2\ell^2} \right] \quad (4.3-9)$$

$$s = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24 H^2} + \frac{h^2}{2\ell^2} \right] \quad (4.3-10)$$

Vem:

$$\begin{aligned} \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24 H^2} + \frac{h^2}{2\ell^2} \right] &= \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24 H_0^2} + \frac{h^2}{2\ell^2} \right] + \frac{H\ell}{EF} \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{12 H^2} + \frac{h^2}{\ell^2} \right] + \\ &+ \alpha \Delta t \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24 H^2} + \frac{h^2}{2\ell^2} \right] \end{aligned}$$

e então

$$H^3 \left[1 + \frac{h^2}{\ell^2} \right] + H^2 \left[\frac{p^2 \ell^2}{24H^2} + \alpha \Delta t EF \left(1 + \frac{h^2}{2\ell^2} \right) \right] + H \left[\frac{p^2 \ell^2}{12} \right] - \frac{p^2 \ell^2 EF}{24} (1 - \alpha \Delta t) = 0 \quad (4.3-11)$$

Com o valor de H obtem-se o v\u00e9rtice, a flecha e a tra\u00e7\u00e3o nos arranques do cabo deformado. Fazendo-se $h=0$ na equa\u00e7\u00e3o (4.3-11), recai-se \u00f3bviamente em (4.3-4).

4.4 - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBU\u00cdDA AO LONGO DO V\u00c3O E CARGA CONCENTRADA.

Considerando-se arranques em n\u00edvel e carga concentrada atuando no meio do v\u00e3o, as equa\u00e7\u00f5es dos segmentos parab\u00f3licos s\u00e3o:

$$y_1 = - \frac{p x_1^2}{2H} + \left(\frac{p x_{v1}}{H} \right) x_1 \quad (4.4-1)$$

$$y_2 = - \frac{p x_2^2}{2H} + \left(\frac{p x_{v2}}{H} \right) x_2 \quad (4.4-2)$$

Derivando as express\u00f5es anteriores e observando que durante a deforma\u00e7\u00e3o do cabo as abscissas dos v\u00e9rtices permanecem invari\u00e1veis, tem-se:

$$y_1' = \frac{p x_1}{H} + \frac{p}{H} \left(\frac{N}{2p} + \frac{\ell}{2} \right) \quad (4.4-3)$$

$$y_2' = \frac{p x_2}{H} + \frac{p}{H} \left(\frac{N}{2p} + \frac{\ell}{2} \right) \quad (4.4-4)$$

Com (4.4-3) e (4.4-4) na express\u00e3o de Δs , resulta:

$$\Delta s = \frac{H\ell}{EF} \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{12H^2} + \frac{pN\ell}{4H^2} + \frac{N^2}{4H^2} \right] + \alpha \Delta t \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} + \frac{pN\ell}{8H^2} + \frac{N^2}{8H^2} \right] \quad (4.4-5)$$

Sendo agora os comprimentos, inicial e final, iguais a

$$s_0 = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H_0^2} \right] \quad (4.4-6)$$

$$s = \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} + \frac{pN\ell}{8H^2} + \frac{N^2}{8H^2} \right] \quad (4.4-7)$$

Vem:

$$\begin{aligned} \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} + \frac{pN\ell}{8H^2} + \frac{N^2}{8H^2} \right] &= \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H_0^2} \right] + \frac{H\ell}{EF} \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{12H^2} + \frac{pN\ell}{4H^2} + \frac{N^2}{4H^2} \right] \\ &+ \alpha \Delta t \ell \left[1 + \frac{p^2 \ell^2}{24H^2} + \frac{pN\ell}{8H^2} + \frac{N^2}{8H^2} \right] \end{aligned}$$

donde resulta a equação que determina H

$$H^3 + H^2 \left[\frac{p^2 \ell^2 EF}{24H_0^2} + \alpha \Delta t \ell \right] + H \left[\frac{p^2 \ell^2}{12} + \frac{N}{4}(p\ell + N) \right]$$

$$- (1 - \alpha \Delta t) EF \left[\frac{p^2 \ell^2}{24} + \frac{pN\ell}{8} + \frac{N^2}{8} \right] = 0 \quad (4.4-8)$$

Quando se faz em (4.4-8) $N=0$, recai-se, evidentemente, na equação (4.3-4). Com H determinado calcula-se os outros elementos característicos do cabo deformado.

5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

EXEMPLO Nº 1

Sendo $g = 100 \text{ kg/m}$ de cabo, $p = 50 \text{ kg/m}$ de vão, $\ell = 80 \text{ m}$ e $f = 4 \text{ m}$, calcular a força horizontal do cabo, o seu comprimento e a tração máxima, supondo:

- a) Solução exata
- b) A carga $(g+p)$ uniformemente distribuída ao longo do cabo (catenária)
- c) A carga $(g+p)$ uniformemente distribuída ao longo do vão (parábola)
- d) Solução aproximada

a) SOLUÇÃO EXATA

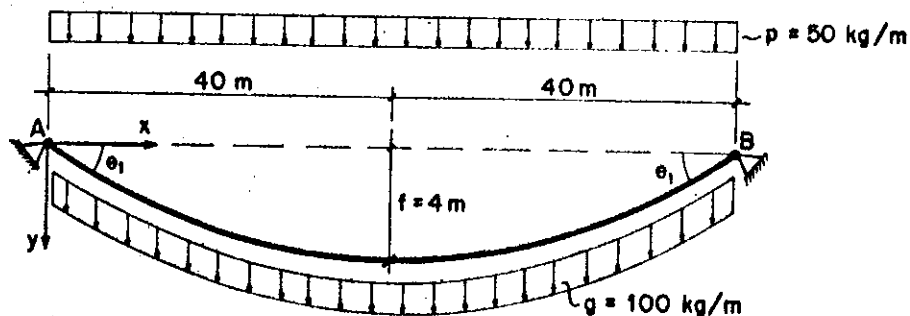


Fig. 24

a-1) Fôrça horizontal H

Fazendo-se x e y iguais a zero nas equações (2.1-15) e (2.1-16), obtem-se após substituir g , p , ℓ e f pelos seus valores numéricos:

$$\log |(\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1)| - 1,1547 \operatorname{arctg}(0,57735 \cdot \operatorname{tg} 0,5 \theta_1) - \frac{4000}{H} = 0$$

$$2(\sec \theta_1 - 1) + \log \left| \frac{3}{2 \sec \theta_1 + 1} \right| - \frac{800}{H} = 0$$

Resolvendo-se o sistema, resultam

$$\theta_1 = 11,920^\circ$$

$$H = 30.068 \text{ kg}$$

a-2) Comprimento do cabo

Com os coeficientes A, B, C, D, E, e F tirados da ta bela 1 em função da relação $g/p = 2$ e com os valores de g, p e H determinado anteriormente, a equação (2.1-27) fornece:

$$S = \frac{30,068}{50} \left[\frac{0,5}{1 - \operatorname{tg} 0,5\theta} - 0,25 \log |(1 - \operatorname{tg} 0,5\theta)| - \frac{0,5}{1 + \operatorname{tg} 0,5\theta} - 0,25 \log |(1 + \operatorname{tg} 0,5\theta)| + \frac{0,5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 0,5\theta}{\sqrt{3}} \right) \right] \begin{matrix} +11920 \\ -11920 \end{matrix}$$

Efetuada as operações necessárias, obtem-se:

$$S = 80,528 \text{ m}$$

a-3) Tração máxima:

Usando-se a equação (2.1-30) e observando que a tração máxima se localiza nos arranques, tem-se

$$T_A = T_B = T_{\max} = H \sec \theta_1 = 30,068 \times 1,0191873 = 30,666 \text{ kg}$$

b) SOLUÇÃO COM CARGA (g+p) ATUANDO AO LONGO DO CABO

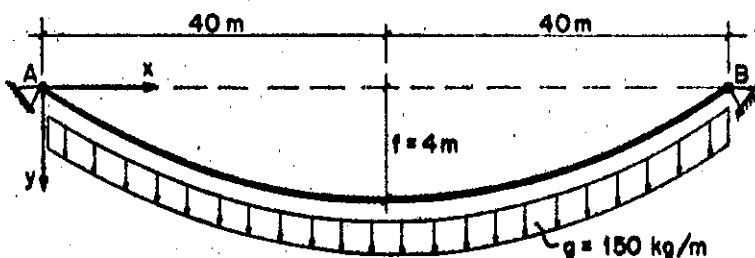


Fig. 25

b-1) Fôrça horizontal H

Fazendo em (2.2-5) $x = l/2$, tem-se a equação

$$4 = - \frac{H}{150} \left[1 - \cosh \left(\frac{150 \times 80}{2H} \right) \right]$$

que resolvida, por tentativa, fornece:

$$H = 30.099 \text{ kg}$$

b-2) Comprimento do cabo

Usando a equação (2.2-13) obtem-se

$$s = \frac{2 \times 30.099}{150} \text{Sh} \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.099} \right) = 80,531$$

b-3) Tração máxima

Com $x=0$ ou $x=l$ na equação (2.2-15), tira-se:

$$T_A = T_B = T_{\max} = 30.099 \text{Ch} \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.099} \right) = 30.699 \text{ kg}$$

c) SOLUÇÃO COM A CARGA (g+p) ATUANDO AO LONGO DO VÃO

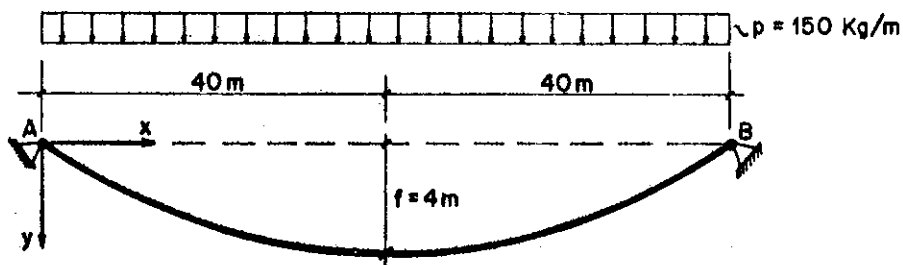


Fig. 26

c-1) Fôrça horizontal H

A fôrça horizontal é obtida, em função da flecha no meio do vão, pela equação (2.3-12)

$$H = \frac{150 \times (80)^2}{8 \times 4} = 30.000 \text{ kg}$$

c-2) Comprimento do cabo

O comprimento exato é fornecido por (2.3-6)

$$S = \frac{(80)^2}{16 \times 4} \left[\frac{8 \times 4}{80} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{4}{80}\right)^2} + \log \left| \frac{\sqrt{1 + 16 \left(\frac{4}{16}\right)^2} + \frac{4 \times 4}{80}}{\sqrt{1 + 16 \left(\frac{4}{80}\right)^2} - \frac{4 \times 4}{80}} \right| \right] = 80,530m$$

O comprimento aproximado, \bar{s} é obtido com (2.3-7)

$$S = 80 + \frac{8}{3} \cdot \frac{16}{80} = 80,533m$$

c-3) Tração máxima

A tração máxima no cabo é dada pela equação (2.3-11)

$$T_A = T_B = T_{\max} = 30.000 \sqrt{1 + \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.000}\right)^2} = 30.594kg$$

d) SOLUÇÃO APROXIMADA

d-1) Fôrça horizontal H

Para calcular H com a expressão (2.4-9) é necessário conhecer a priori, o valor de H_g para a carga de 100 kg/m distribuída ao longo do comprimento do cabo. Esse valor, que no caso é 20.066kg, levado à equação (2.4-9), fornece:

$$H = 20.066 + \frac{(100)^2 \times 50 \times (80)^3}{24 \times (20.066)^2} \left[1 - \frac{(100)^2 \times (80)^2}{20 \times (20.066)^2} \right] = 30.059kg$$
$$\operatorname{Sh}\left(\frac{100 \times 80}{2 \times 20.066}\right) - \operatorname{arct} \operatorname{tg} \operatorname{Sh}\left(\frac{100 \times 80}{2 \times 20.066}\right)$$

d-2) Comprimento do cabo

Como o comprimento do cabo não se altera com a aplicação da p, temos evidentemente,

$$S = 80,531m$$

d-3) Traçãc Máxima

Da equação (2.4-11) tira-se

$$T_A = T_B = T_{max} = 30.059 \sqrt{1 + \frac{20.066}{30.059} \operatorname{Sh}\left(\frac{100 \times 80}{2 \times 20.066}\right) + \left(\frac{50 \times 80}{2 \times 30.059}\right)^2}$$

ou

$$T_A = T_B = T_{max} = 30.657 \text{ kg}$$

EXEMPLO N 2

Mesmos dados do exemplo n1, com exceção da flecha que  o dbro, isto , 8 metros.

a) SOLUÇÃO EXATA

a-1) Fôrça horizontal H

De maneira análoga ao exemplo anterior, vem:

$$\log |(\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1)| - 1.1547 \operatorname{arc} \operatorname{tg} [0.57735 \operatorname{tg} 0.5 \theta_1] - \frac{4000}{H} = 0$$

$$2(\sec \theta_1 - 1) + \log \left| \left(\frac{3}{2 \sec \theta_1 + 1} \right) \right| - \frac{1600}{H} = 0$$

donde:

$$\theta_1 = 21958'$$

$$H = 15.138 \text{ kg}$$

a-2) Comprimento do cabo

Anlogamente:

$$S = \frac{15.138}{50} \left[\frac{0.5}{1 - \operatorname{tg} 0.5 \theta} + 0.25 \log |(1 - \operatorname{tg} 0.5 \theta)| - \frac{0.5}{1 + \operatorname{tg} 0.5 \theta} \right.$$

$$\left. - 0.25 \log |(1 + \operatorname{tg} 0.5 \theta)| + \frac{0.5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 0.5 \theta}{\sqrt{3}} \right) \right] + 21958'$$

$$- 21958'$$

e então

$$S = 82,109m$$

a-3) Tração máxima:

Neste caso

$$T_A = T_B = T_{\max} = H \sec \theta_1 = 15.138 \times 1,078281467 = 16.323 \text{ kg}$$

b) SOLUÇÃO COM A CARGA (g+p) ATUANDO AO LONGO DO CABO

b-1) Fôrça horizontal H

Usando-se como anteriormente a equação (2.2-5) para $x = \ell/2$, vêm:

$$8 = - \frac{H}{150} \left[1 - \text{Ch} \left(\frac{150 \times 80}{2H} \right) \right]$$

Resolvendo, resulta

$$H = 15.196 \text{ kg}$$

b-2) Comprimento do cabo

Da equação (2.2-13), vêm:

$$S = \frac{2 \times 15.196}{150} \text{Sh} \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 15.196} \right) = 82,095m$$

b-3) Tração máxima

A tração máxima será:

$$T_A = T_B = T_{\max} = 15.196 \times \text{Ch} \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 15.196} \right) = 16.396 \text{ kg}$$

c - SOLUÇÃO COM A CARGA (g+p) ATUANDO AO LONGO DO VÃO.

c-1) Fôrça horizontal H

A fôrça horizontal será:

$$H = \frac{150 \times (80)^2}{8 \times 8} = 15.000 \text{ kg}$$

C-2) Comprimento do cabo

O comprimento exato é:

$$S = \frac{80}{16 \times 8} \left[\frac{8 \times 8}{80} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{8}{80}\right)^2} + \log \left| \frac{\sqrt{1 + 16 \left(\frac{8}{80}\right)^2} + \frac{4 \times 8}{80}}{\sqrt{1 + 16 \left(\frac{8}{80}\right)^2} - \frac{4 \times 8}{80}} \right| \right] = 82,085 \text{ m}$$

O comprimento aproximado é:

$$S = 80 + \frac{8}{3} \cdot \frac{64}{80} = 82,133$$

C-3) Cálculo da tração máxima

Com a fórmula (2.3-11), resulta

$$T_A = T_B = T_{\max} = 15.000 \sqrt{1 + \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 15.000}\right)^2} = 16.155 \text{ kg}$$

d - SOLUÇÃO APROXIMADA

d-1) Fôrça horizontal H

Levando o valor de H_g , que neste caso é 10.131kg, na equação (2.4-9) vêm:

$$H = 10.131 + \frac{\frac{(100)^2 \times 50 \times (80)^2}{24 \times (10.131)^2} \left(1 - \frac{(100)^2 \times (80)^2}{20 \times (10.131)^2}\right)}{\text{Sh}\left(\frac{100 \times 80}{2 \times 10.131}\right) - \text{arc tg}\left[\text{Sh}\left(\frac{100 \times 80}{2 \times 10.131}\right)\right]} = 15.112 \text{ kg}$$

d-2) Comprimento do cabo

O comprimento do cabo é, evidentemente:

$$82,095 \text{ m}$$

d-3) Tração máxima

A tração máxima será:

$$T_A = T_B = 15.112 \sqrt{1 + \left[\frac{10.131}{15.112} \operatorname{Sh} \left(\frac{100 \times 80}{2 \times 10.131} \right) + \frac{50 \times 80}{2 \times 15.112} \right]^2} = 16.298 \text{ kg}$$

EXEMPLO 3

Sendo $g = 100 \text{ kg/m}$, $p = 50 \text{ kg/m}$, $l = 80 \text{ m}$, $h = 4 \text{ m}$ e θ_1 , in clinação do cabo no arranque superior, igual a 14° ; determinar a fôrça horizontal H, o comprimento do cabo, a tração nos arranques, e a abscissa do vértice com a respectiva flecha. Resolver com:

- a) Solução exata
- b) Admitindo a carga $(g+p)$ uniformemente distribuída ao longo do cabo.
- c) Admitindo a carga $(g+p)$ uniformemente distribuída ao longo do vão.

a) SOLUÇÃO EXATA

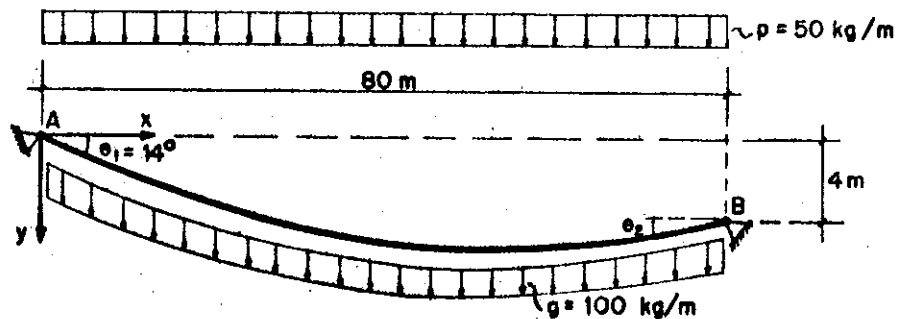


Fig. 27

a-1) Fôrça horizontal H

Fazendo-se na equação (2.1-21) $x=l$ e na equação (2.1-22) $y=h$, obtemos após substituir os valores numéricos:

$$- \frac{8000}{H} = \log \left| \frac{\sec \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_2}{1,279941632} \right|$$

$$- 1,1547 \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg}(0,57735 \operatorname{tg} 0,5\theta_2) - 0,070770053 \right]$$

$$- \frac{800}{H} = 2(\sec \theta_2 - 1,030613629) + \log \left| \frac{3,061227258}{2\sec \theta_2 + 1} \right|$$

e então:

$$\theta_2 = - 8927'$$

$$H = 30.367 \text{ kg}$$

a-2) Comprimento do cabo

Usando-se a equação (2.1-27) e observando que os coeficientes são os mesmos dos exemplos anteriores, tem-se

$$S = \frac{30.367}{50} \left[\frac{0,5}{1 - \operatorname{tg} 0,5\theta} + 0,251 \log \left| (1 - \operatorname{tg} 0,5\theta) \right| - \frac{0,5}{1 + \operatorname{tg} 0,5\theta} \right. \\ \left. - 0,251 \log \left| (\operatorname{tg} 0,5\theta) \right| + \frac{0,5}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 0,5\theta}{\sqrt{3}} \right) \right] \begin{matrix} +149 \\ -8927 \end{matrix}$$

$$S = 80,764 \text{ m}$$

a-3) Tração nos arranques

As trações nos arranques são:

$$T_A = H \sec \theta_1 = 30.367 \times 1,030613 = 31.297 \text{ kg}$$

$$T_B = H \sec \theta_2 = 30.367 \times 1,010974 = 30.700 \text{ kg}$$

a-4) Abcissa do vértice

Fazendo-se na equação (2.1-21) $\theta=0$ e substituindo os valores numéricos, resulta:

$$-\frac{100 x_v}{30.367} = \log \left| \left(\frac{1}{1,279941632} \right) \right| - 1,1547(-0,070770053)$$

donde

$$x_v = 50,135\text{m}$$

a-5) Flecha no vértice

Com $\theta=0$ na equação (2.1-22), vem:

$$-\frac{200f}{30.367} = 2(1-1,030613629) + \log \left| \left(\frac{3,061227258}{3} \right) \right|$$

donde

$$f = 6,228\text{m}$$

b. - SOLUÇÃO COM A CARGA ($g+p$) ATUANDO AO LONGO DO CABO.

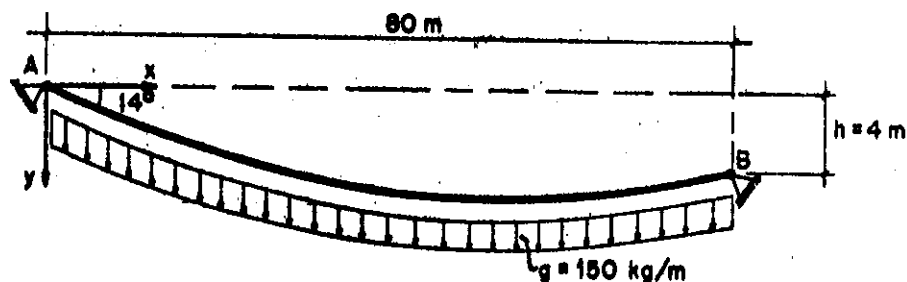


Fig. 28

b-1) Fôrça horizontal H

Sendo conhecida a inclinação ao cabo no arranque, pode-se, para determinar H, usar a equação (2.2-7). Fa-

zendo-se então $x=l$, obtem-se

$$4 = - \frac{H}{150} \operatorname{Ch} \left[\left(\frac{150 \times 80}{H} - 0,246814477 \right) - 1,030613629 \right]$$

cuja solução é:

$$H = 30.432 \text{ kg}$$

b-2) Comprimento do cabo

Da equação (2.2-14) tira-se:

$$S = \frac{30.432}{150} \left[\operatorname{Sh} \left(\frac{150 \times 80}{30.432} - 0,246814477 \right) + \operatorname{Sh} (0,246814477) \right]$$

donde

$$S = 80,618 \text{ m}$$

b-3) Tração nos arranques

Fazendo-se $x=0$ e $x=l$ na equação (2.2-16) obtem-se

$$T_A = H \operatorname{Ch} (-0,246814477) = 30.432 \times 1,030613629 = 31.531 \text{ kg}$$

$$T_B = H \operatorname{Ch} (0,147507290) = 30.432 \times 1,010898941 = 30.763 \text{ kg}$$

b-4) Abscissa do vértice

Da equação (2.2-8) resulta

$$x_v = \frac{30.432}{150} \times 0,246814 = 50,073 \text{ m}$$

b-5) Flecha no vértice

Com a equação (2.2-8); tira-se

$$f = - \frac{30.432}{150} \left[1 - \operatorname{Ch} (0,246814477) \right] = 6,211 \text{ m}$$

c) SOLUÇÃO COM A CARGA (g+p) ATUANDO AO LONGO DO VÃO.

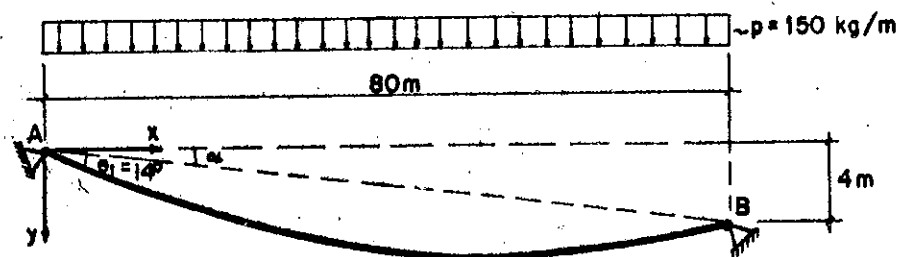


Fig. 29

C-1) Fôrça horizontal H

Sendo conhecida a inclinação do cabo no arranque, $\theta_1 = 14^\circ$, a equação (2.3-14) fornece:

$$H = \frac{150 \times 80}{2(0,249328 - \frac{4}{80})} = 30.101 \text{ kg}$$

C-2) Comprimento do cabo

Para achar o comprimento do cabo por (2.3-9), é necessário determinar a flecha no meio do vão. Fazendo-se em (2.3-4) $x = l/2$, resulta:

$$f(l/2) = - \frac{150 \times (40)^2}{2 \times 30.101} + \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.101} + \frac{4}{80} \right) 40 = 5,986 \text{ m}$$

e então:

$$f_0 = f(l/2) - \frac{h}{2} = 5,986 - 2 = 3,986 \text{ m}$$

Com o valor de f_0 em (2.3-9) e sendo $\cos \alpha = 0,99875$ vem:

$$S = \frac{80}{0,99875} + \frac{8}{3} \cdot \frac{(3,986)^2 (0,99875)^3}{80} = 80,627 \text{ m}$$

C-3) Trações nos arranques

Com $x=l$, na equação (2.3-11) obtêm-se respectivamente:

$$T_A = 30.101 \sqrt{1 + \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.101} + \frac{4}{80} \right)^2} = 31.022 \text{ kg}$$

$$T_B = 30.101 \sqrt{1 + \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.101} - \frac{4}{80} \right)^2} = 30.435 \text{ kg}$$

C-4) Abcissa do vértice

Da equação (2.3-15) resulta:

$$x_v = \frac{30.101}{150} \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.101} + \frac{4}{80} \right) = 50,033 \text{ m}$$

c) Flecha no vértice

Com $x=x_v = 50,033$ na equação (2.3-3) vêm:

$$f = - \frac{150 \times (50,033)^2}{2 \times 30.101} + \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 30.101} + \frac{4}{80} \right) 50,033 = 6,237 \text{ m}$$

EXEMPLO Nº 4

Sendo 150 kg/m a carga uniformemente distribuída, $f_0 = 4 \text{ m}$ a flecha inicial, $l = 80 \text{ m}$ a distância entre os arranques $E = 21 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$ o módulo de elasticidade e $F = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ a área da secção transversal ao cabo; determinar, admitindo-se nula a variação de temperatura, as grandezas que caracterizam o cabo deformado, supondo:

a) Suspensão em catenária

b) Suspensão parabólica

a) SUSPENSÃO EM CATENÁRIA

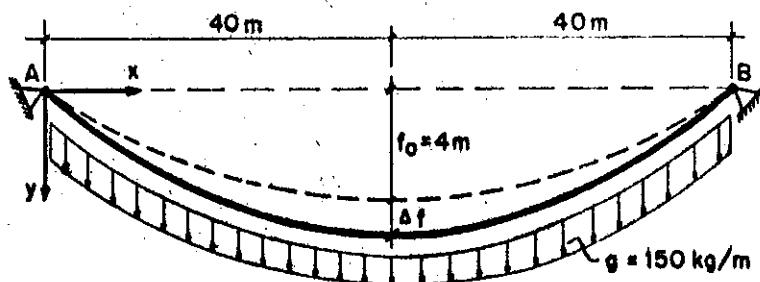


Fig. 30

a-1) Fôrça horizontal H

Introduzindo-se na equação (4.2-4) os dados numéricos e observando que H_0 , já determinado anteriormente, é igual a 30 099 kg, resulta:

$$\frac{2H}{150} \operatorname{Sh}\left(\frac{150 \times 80}{2H}\right) = 80,531 + \frac{H}{2 \times 126 \times 10^8} \left[80 + \frac{H}{150} \operatorname{Sh}\left(\frac{150 \times 80}{H}\right) \right]$$

Resolvendo-se, por tentativas, obtêm-se:

$$H = 26.210 \text{ kg}$$

a-2) Comprimento do cabo

Com o valor de H em (4.2-3), obtêm-se

$$s = \frac{2 \times 26.210}{150} \operatorname{Sh}\left(\frac{150 \times 80}{2 \times 26.210}\right) = 80,700 \text{ m}$$

a-3) Flecha

Fazendo-se $x = \ell/2$ em (2.2-5), têm-se:

$$f = - \frac{26.210}{150} \left[1 - \operatorname{Ch}\left(\frac{150 \times 80}{2 \times 26.210}\right) \right] = 4.5984 \text{ m}$$

d-4) Tração nos arranques

De (2.2-15) com $x=0$ ou $x=l$, obtém-se:

$$T_A = T_B = 26.210 \operatorname{Ch}\left(\frac{150 \times 80}{2 \times 26.210}\right) = 26.889 \text{ kg}$$

b) SUSPENSÃO PARABÓLICA

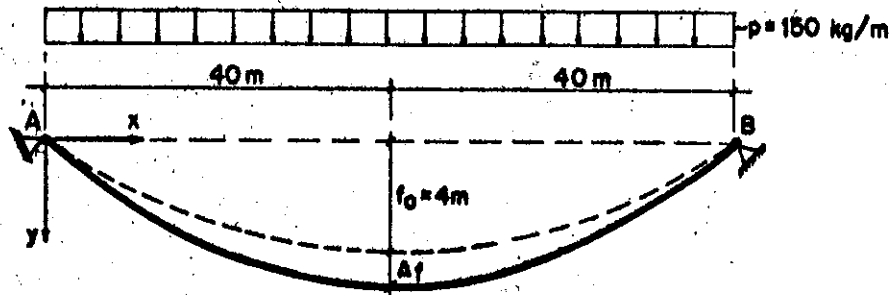


Fig. 31

b-1) Fôrça horizontal H

Com $(H_0 = 30.000 \text{ kg})$ e os dados numéricos, a equação (4.3-4) fornece:

$$H^3 + (84 \times 10^3)H^2 + (12 \times 10^6)H - 75,6 \times 10^{12} = 0$$

donde:

$$H = 26.144 \text{ kg} \checkmark$$

b-2) Flecha

A flecha do cabo deformado é:

$$f = \frac{150 \times (80)^2}{8 \times 26.144} = 4,5899 \text{ m}$$

b-3) Comprimento do cabo

Usando-se a equação aproximada, resulta

$$S = 80 + \frac{8}{3} \cdot \frac{(4,5899)^2}{80} = 80,702 \text{ m}$$

b-4) Tração nos arranques

As trações nos arranques são:

$$T_A = T_B = 26.144 \sqrt{1 + \left(\frac{150 \times 80}{2 \times 26.144}\right)^2} = 26.823 \text{ kg}$$

EXEMPLO Nº 5

Com os mesmos dados do exemplo anterior, estudar a deformação do cabo quando atua uma carga concentrada de 200kg no meio do vão.

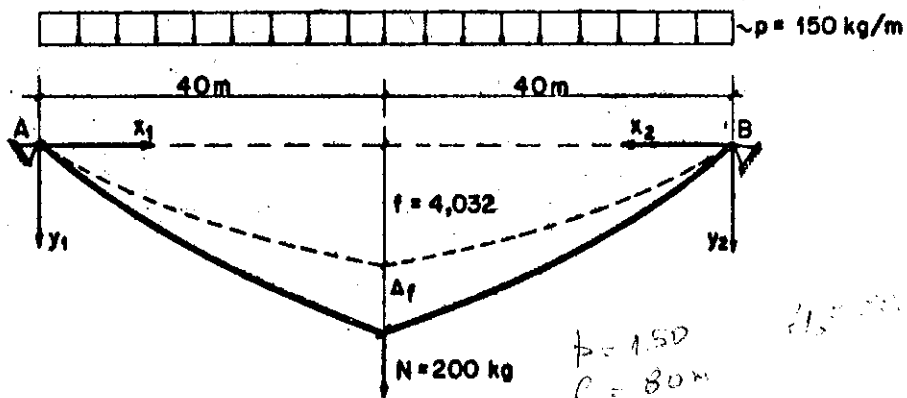


Fig. 32

a) Fôrça horizontal H

Com os dados numéricos na equação (4.4-8), obtem-se

$$H^3 + (84)H^2 + (12,61)H - 79,443 = 0$$

donde:

$$H = 26.729 \text{ kg}$$

b) Comprimento do cabo

Da equação (4.4-7) resulta:

$$S = 80 \left[1 + \frac{(150)^2 + (80)^2}{24 \times (26.729)^2} + \frac{150 \times 200 \times 80}{8 \times (26.729)^2} + \frac{(200)^2}{8 \times (26.729)^2} \right] = 80,706 \text{ m}$$

c) Flecha

Usando-se a equação (3.2-11), resulta para a flecha o valor:

$$f = \frac{1}{26.729} \left[\frac{150 \times (80)^2}{8} + \frac{200 \times 80}{4} \right] = 4,6391\text{m}$$

d) Tração nos arranques

Da equação (3.2-13), obtem-se:

$$T_A = T_B = 26.729 \sqrt{1 + \left(\frac{150 \times 40.666}{26.729} \right)^2} = 27.416 \text{ kg}$$

B. João
4.11.12

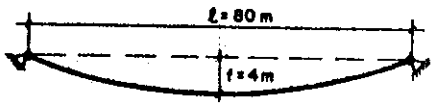
6 - CONCLUSÕES

Neste capítulo tiram-se algumas conclusões através da comparação dos resultados obtidos nos exemplos numéricos do capítulo precedente.

No primeiro exemplo escolheram-se para o vão e para as cargas valores possivelmente reais e para a relação flecha/vão o sugestivo valor de 1/20, valor este que se aproxima do mínimo usual nas coberturas pênseis não protendidas. Os resultados encontrados neste exemplo para a solução exata (E), para a catenária (C) e para a parábola (P), encontram-se reunidos no quadro abaixo.

EXEMPLO 1

$g(s) = 100 \text{ kg/m}$
 $p(x) = 50 \text{ kg/m}$



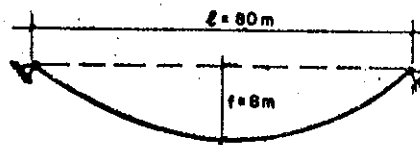
The diagram shows a cable of length $L = 80 \text{ m}$ with a sag of $f = 4 \text{ m}$. The cable is supported at two points and has a dashed line representing the parabolic approximation and a solid line representing the exact catenary curve.

	C	C/E	E	P/E	P
H	30.099	1,001	30.068	0,998	30.000
T	30.699	1,001	30.666	0,998	30.594
S	80,531	1,000	80,528	1,000	80,535

No segundo exemplo foram mantidos vão e cargas, alterando-se entretanto a relação flecha/vão para 1/10. Este valor é considerado usualmente como limite superior para a relação f/L . Como anteriormente, os resultados encontrados para a solução exata, para a catenária e para a parábola, acham-se reunidos no quadro que segue.

EXEMPLO 2

$q(s) = 100 \text{ kg/m}$
 $p(x) = 50 \text{ kg/m}$

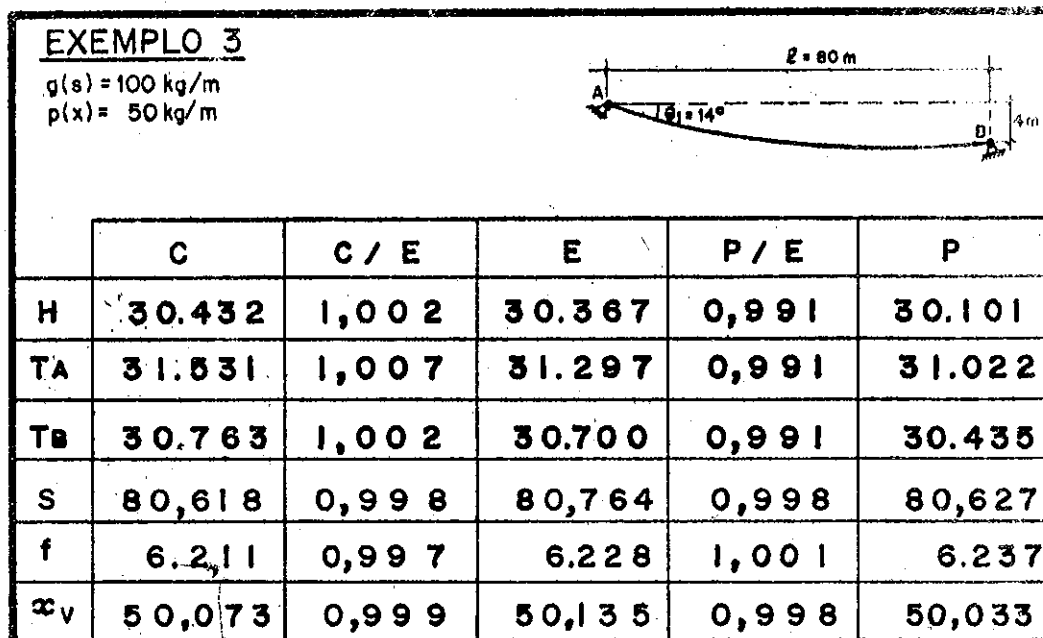


	C	C/E	E	P/E	P
H	15.196	1,004	15.138	0,991	15.000
T	16.369	1,003	16.323	0,990	16.155
S	82,095	1,000	82,109	1,000	82,085

Da análise dos quadros apresentados, depreende-se que para as coberturas pênseis usuais (relação f/L compreendidas entre $1/20$ e $1/10$) pode-se sem erro apreciável, substituir a configuração exata de equilíbrio pela catenária ou pela parábola, adotando-se de preferência esta última por apresentar soluções mais rápidas e mais fáceis. O inconveniente da hipótese da suspensão parabólica está no cálculo do comprimento do cabo, o que entretanto, pode ser facilmente contornado com o uso da fórmula aproximada, que fornece para pequenas relações f/L resultados suficientemente satisfatórios.

Outro fato interessante de se observar, e que já foi mencionado, é a pequena variação da força de tração no cabo. No segundo exemplo, onde esta variação é mais sensível, a relação T_{\max}/H é de aproximadamente 1,08 na solução exata na catenária e na parábola.

No terceiro exemplo mantiveram-se as mesmas cargas e o mesmo vão, introduzindo-se porém um desnível nos arranques do cabo. Os resultados das três soluções encontram-se reunidos no quadro abaixo, cabendo também aqui as considerações feitas anteriormente.

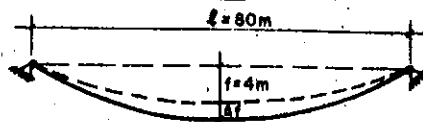


Note-se que a solução aproximada que foi desenvolvida seguindo Heilig, quando comparada com as soluções em catenária e em parábola, não apresenta vantagem apreciável de precisão. Em relação à solução exata não diminui de maneira sensível o volume de trabalho numérico, principalmente quando se observa que a parte mais trabalhosa da solução exata, a resolução por tentativa do sistema de equações transcendentais, é facilitada quando se adota para primeira tentativa o valor obtido a partir da hipótese da suspensão parabólica.

Para avaliar os efeitos da deformação do cabo escolheram-se as cargas do primeiro exemplo e admitiu-se para relação inicial f/L o valor $1/20$. Compararam-se também os resultados obtidos com a catenária e a parábola. Finalmente, o exemplo 5 mostra a aplicação das fórmulas deduzidas para o caso de carga concentrada e uniformemente distribuída. Nele, foram conservados os mesmos dados do exemplo anterior, adicionando porém uma carga concentrada no meio do vão. Os valores para o cabo inextensível foram obtidos com as fórmulas (3.2-10-11-13). Todos os resultados encontram-se reunidos nos quadros que seguem.

EXEMPLO 4: CATENARIA

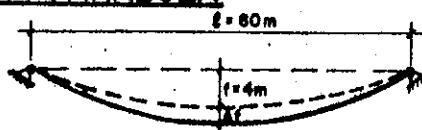
$g(x) = 150 \text{ kg/m}$



	INEX.	DEF.	I / D
H	30.099	26.210	1,148
T	30.699	26.889	1,142
S	80,531	80,700	0,998
f	4,000	4,598	0,870

EXEMPLO 4: PARABOLA

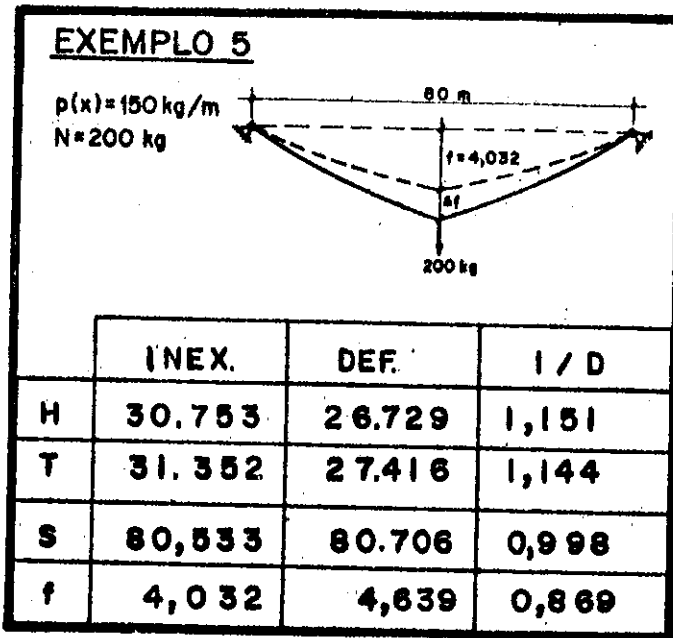
$p(x) = 150 \text{ kg/m}$



	INEX.	DEF.	I / D
H	30.000	26.144	1,147
T	30.594	26.823	1,141
S	80,533	80,702	0,998
f	4,000	4,590	0,871

EXEMPLO 4: CATENARIA x PARABOLA

	H	T	S	ΔS	f	Δf
C	26.210	26.889	80,700	0,169	4,598	0,598
P	26.144	26.826	80,702	0,169	4,590	0,590
C/P	1,003	1,002	1,000	1,000	1,002	1,014



Desses quadros conclui-se que o efeito da deformação do cabo não pode ser desprezado, principalmente quando se utilizarem cabos de arames torcidos, que têm módulos de elasticidade bem mais baixos que o admitido no exemplo. Com o penúltimo dos quatro quadros, ficou evidenciado mais uma vez que no caso de pequenas relações flecha/vão, a parábola substitui com vantagens a catenária, quando se tratar de cargas distribuídas e, com maior razão, quando houver também carga concentrada.

Finalizando o trabalho, é oportuno observar que existem outros aspectos do problema ainda simples das coberturas pênseis cilíndricas que merecem análise sistemática com vistas na fixação racional de diretrizes de projeto e execução.

Dentre esses aspectos cabe bem um estudo do cabo submetido a várias cargas concentradas, iguais ou desiguais, atuando conjuntamente com a carga uniformemente distribuída. Esse estudo serviria para analisar as coberturas que necessitam de cabos-espia para neutralizar os efeitos do vento. Isso sem contar com as eventuais cargas concentradas que podem ocorrer, com aparelhos de climatização, de iluminação ou calhas para esgotamento das águas pluviais, quando for o caso.

Merece também atenção o caso de duas ou mais cargas parcialmente distribuídas atuando simultaneamente com a carga uniformemente distribuída, inclusive admitindo-se cargas parciais de sentidos contrários, o que simularia os efeitos de sucção e pressão do vento agindo concomitantemente.

É evidente que o estudo do cabo com as combinações de cargas acima referidas é bastante trabalhoso mesmo quando se admite a configuração parabólica e se considera o cabo inextensível. Levar em conta a deformabilidade do cabo nesses casos é trabalhosíssimo, mesmo quando se adota para configuração de equilíbrio a parábola. Estudar até que ponto se pode substituir um carregamento discreto por um contínuo, seria bastante proveitoso e resolveria até com facilidade os casos citados.

De grande importância e não está suficientemente esclarecido, principalmente para as coberturas pênseis, é o efeito da ação do vento. Um estudo sistemático com modelos reduzidos de alguns tipos fundamentais de cobertura, permitiria recolher informações que poderiam ser estendidas, com certas limitações, a outros tipos de coberturas.

Outro problema a ser analisado é o de escoamento das águas pluviais. Note-se que um escoamento ineficaz poderá provocar em algumas regiões da rede de cabos acréscimos de cargas não previstos e em consequência deformações não desejáveis.

Outro ponto que merece estudo mais completo, é o referente aos diversos tipos de deslocamentos dos arranques. Tratado aqui para o caso mais simples, poderia ser estendido para outros carregamentos.

A escolha dos elementos de vedação mais adequados para cada tipo de cobertura -placas de concreto com ou sem protensão, placas de argamassa armada, lâminas de aço ou madeira- suas características -impermeabilidade, durabilidade, deformabilidade- e suas fixações nos cabos da rede, quer diretamente ou através das vigas de rigidez, são aspectos que merecem estudo detalhado.

Um estudo a respeito dos elementos de sustentação da rede, de cabos também se faz necessário. No caso de pilares seria interessante, por exemplo, estudar seus espaçamentos, suas formas e posições, e suas fundações.

A escolha do tipo de cabo a ser utilizado -cabo de arames paralelos, de arames torcidos com alma de aço ou fibra cabos fechados- e a ancoragem dos mesmos nos elementos de sustentação, são aspectos que não podem ficar sem estudo detalhado.

Sem falar nos problemas de acústica, ventilação, iluminação, muitos outros ainda surgem e devem receber o devido cuidado.

BIBLIOGRAFIA

- 1) Borges, A. e Alliana, R.C. - Pavilhão do Rio Grande do Sul - Revista de Engenharia, nº 35, Escola Nacional de Engenharia, Rio de Janeiro, Novembro/Dezembro/1954.
- 2) Fonseca, A. - Curso de Mecânica, vol. II - Ao Livro Técnico Ltda., Rio de Janeiro, 1958.
- 3) Fragoso, P.R. - Considerações Sobre Coberturas Suspensas - Revista Estrutura nº 56-57 - Rio de Janeiro, 1964/65.
- 4) Freeman, I. - A General Form of the Suspension Bridge Catenary - Bulletin of the American Mathematical Society, vol. XXXI, 1925.
- 5) Gravina, P.B.J. - Teoria das Pontes Pênseis - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - São Paulo, 1948.
- 6) Heilig, R. - Statik der Scweren Seile - Der Stahlbau - Berlin, november, dezember, 1954.
- 7) Makowski, Z.S. - Estructuras Espaciales de Acero - Gustavo Gill, S.A. - Barcelona.
- 8) Martinelli, D.A.O. - Introdução ao Estudo de Coberturas Pênseis - Notas de Aula - Curso de Pós-Graduação - E.E.S.C., São Carlos, 1953
- 9) Martinelli, D.A.O. - A Observação da Cobertura Pênseil da Exposição Internacional da Indústria e Comércio - Revista Engenharia, nº217, dezembro de 1960.
- 10) Otto, F. - Cubiertas Colgantes - Editorial Labor S.A. - Barcelona, 1958.
- 11) Otto, F. - Tensile Structures, vol.II - Massachussets Institute of Technology - Cambridge, 1967.
- 12) Pugsley, A. - The Theory of Suspension Bridges - Edward Arnold Publishers - London, 1968.
- 13) Saillard, Y. e Esquillan, N. - Proceedings of the IASS Colouquium on Hanging Roofs, Continuous Metallic Shell Roofs and Superficial Lattice Roofs - Paris, 9-11 julho 1962 - North Holland Publishing Company - Amsterdam, 1963.

- 14) Santos, S.M.G. - Cálculo Estrutural - Ao Livro Técnico - Rio de Janeiro, 1959.
- 15) Siegel, C. - Formas Estructurales en la Arquitectura Moderna - Compañía Editorial Continental S.A. - México, D.F., 1966.
- 16) Stussi, F. - Statique Appliquée et Resistance des Matériaux, vol. I - Dunod - Paris, 1949.