

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

INSTABILIDADE ELÁSTICA DE
ESTRUTURAS LINEARES PLANAS USUAIS

ENG.^a HELENA M. C. CARMO ANTUNES

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

PUBL. n.º 165, SÃO CARLOS, FEVEREIRO DE 1972

Class.	1918
Cutt.	1-2-1
Tombo	137

INSTABILIDADE ELÁSTICA DE
ESTRUTURAS LINEARES PLANAS USUAIS

ENG.^a HELENA M. C. CARMO ANTUNES

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas"

Orientador
Prof. M. C. Stamato

Comissão Examinadora:
Prof. M. C. Stamato
Prof. Dante A. O. Martinelli
Prof. Tioeturo Yagui
Prof. Munir Rachid

São Carlos, Fevereiro de 1972

AGRADECIMENTO

ao Prof. Dr. M. C. Stamato que com paciência e interesse me orientou, dando sugestões que tornaram possível a realização deste trabalho,

à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) que me possibilitou, através da concessão de Bôlsa de Aperfeiçoamento, o desenvolvimento do meu Plano de Mestrado que se conclue com esta dissertação,

ao C.P.D. (Centro de Processamento de Dados) da Escola de Engenharia de São Carlos cujo equipamento foi por mim utilizado.

ABSTRACT

This work treats by matrix methods the problem of "elastic instability for plane linear structures with load on the plane itself" and the determination of the critical load by computer programs in FORTRAN language. Such a critical load is defined as that to which the stiffness matrix, corresponding to the possible disturbances (function of the geometric characteristics and of the axial load on the members) becomes singular.

To aim this finality the work developed the following phases:

- a) expressing the stiffness matrix of each member considering the effect of axial load on member stiffness;
- b) determination of the global stiffness matrix for structure from member stiffness;
- c) obtention of the critical load for structures transforming the problem of that singularization of stiffness matrix into determination of the latent root of the largest modulus of an auxiliar matrix.

RESUMO

Este trabalho trata matricialmente o problema da "instabilidade elástica de estruturas lineares planas com cargas em seu plano" e automatiza a determinação da carga crítica através de programas em linguagem FORTRAN. Tal carga crítica é definida como aquela para a qual a matriz de rigidez, correspondente às possíveis perturbações (função das características geométricas e dos esforços axiais nas barras), torna-se singular.

Para atingir essa finalidade o trabalho desenvolve as seguintes etapas:

- a) expressão da matriz de rigidez de cada barra considerando a influência do esforço axial na rigidez à flexão;
- b) determinação da matriz de rigidez global da estrutura a partir da matriz de rigidez das barras que a compõem;
- c) obtenção da carga crítica da estrutura por transformação do problema da singularização da matriz de rigidez em questão relativa à determinação do autovalor de maior módulo de u'a matriz auxiliar.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	2
2.	EFEITO DO ESFORÇO AXIAL NOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DE UMA BARRA	3
2.1.	COEFICIENTES s, c	5
2.2.	COEFICIENTE m	8
3.	INSTABILIDADE ELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS	15
3.1.	INTRODUÇÃO	15
3.2.	PÓRTICOS PLANOS INDESLOCÁVEIS	16
3.3.	PÓRTICOS PLANOS DESLOCÁVEIS	21
3.4.	SINGULARIZAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ ATRAVÉS DE AUTOVALORES	30
4.	FLUXOGRAMAS	36
4.1.	FLUXOGRAMA DO PROGRAMA SIMPLIFICADO PARA PÓRTICOS INDESLOCÁVEIS COM CARGAS NOS NÓS	36
4.2.	FLUXOGRAMA DO PROGRAMA GERAL PARA PÓRTICOS PLANOS	39
5.	PROGRAMAS EM LINGUAGEM FORTRAN PARA O IBM-1130	43
5.1.	PROGRAMA SIMPLIFICADO PARA PÓRTICOS INDESLOCÁVEIS COM CARGAS NOS NÓS	43
5.2.	PROGRAMA GERAL PARA PÓRTICOS PLANOS	58
6.	EXEMPLOS	79
7.	CONCLUSÕES	99
8.	BIBLIOGRAFIA	100

1. INTRODUÇÃO

Pretende-se nesse trabalho dar um tratamento matricial ao problema da instabilidade de estruturas lineares planas e consequentemente sistematizar o cálculo apresentando programas para computador, em linguagem FORTRAN, que permitam encontrar a carga crítica de pórticos planos em regime elástico. Por definição, a carga crítica é aquela em que a estrutura deixa de ser estável em seu próprio plano pois sua estabilidade transversal é suposta assegurada por vinculação adequada.

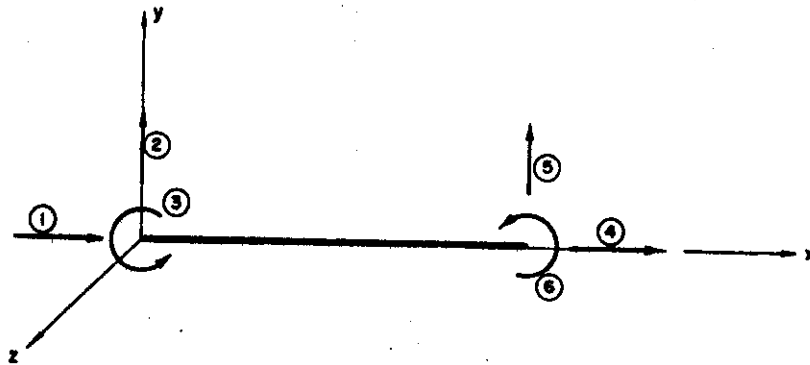
Para tanto, apresenta-se inicialmente a formulação matricial para uma barra isolada dando posterior ênfase à influência do esforço axial (atuante na barra) nos coeficientes de rigidez. Em seguida, procura-se calcular a matriz de rigidez da estrutura em função das matrizes de rigidez de suas barras, e impor condições àquela matriz para que se possa encontrar a carga crítica.

Finalmente, apresenta-se exemplos de estruturas para as quais foram calculadas as cargas críticas através dos programas cujas listagens se encontram no final desse trabalho (Cap. 5).

Faz-se necessário ressaltar ainda, os tipos de pórticos planos que podem ser calculados por essa teoria. A restrição primeira que se coloca é que as barras sejam prismáticas e que as seções que constituem essas barras tenham centro de cisalhamento e centro de gravidade coincidentes, de modo a não permitir torção na seção. Essa restrição se deve ao fato de que a matriz de rigidez de uma barra foi encontrada em função de certos coeficientes, que supõem torção nula. Um outro fato a acrescentar é que o programa que calcula a carga crítica de pórticos deslocáveis, só o faz quando esses são retangulares com carregamento vertical. Essa limitação também é decorrente de hipóteses de cálculo.

2. EFEITO DO ESFORÇO AXIAL NOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DE UMA BARRA

Para uma barra AB, prismática (de momento de inércia constante ao longo de seu comprimento), supondo inexistente o carregamento axial e desprezando as deformações devidas aos esforços cortantes, a matriz de rigidez [SM] referida ao sistema de coordenadas da figura (2.1) tem a forma apresentada na equação (2.1).



(FIG. 2.1)

[SM] = Simétrico

$\frac{EA_x}{L}$	0	0	$-\frac{EA_x}{L}$	0	0
$12 \frac{EJ}{L^3}$	$6 \frac{EJ}{L^2}$	0	$-12 \frac{EJ}{L^3}$	$6 \frac{EJ}{L^2}$	0
$4 \frac{EJ}{L}$	0	0	$-6 \frac{EJ}{L^2}$	$2 \frac{EJ}{L}$	0
$\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0
$12 \frac{EJ}{L^3}$	$-6 \frac{EJ}{L^2}$	0	$12 \frac{EJ}{L^3}$	$-6 \frac{EJ}{L^2}$	0
$4 \frac{EJ}{L}$	0	0	$4 \frac{EJ}{L}$	0	0

.....(2.1)

onde

E = módulo de elasticidade

A_x = área da secção transversal

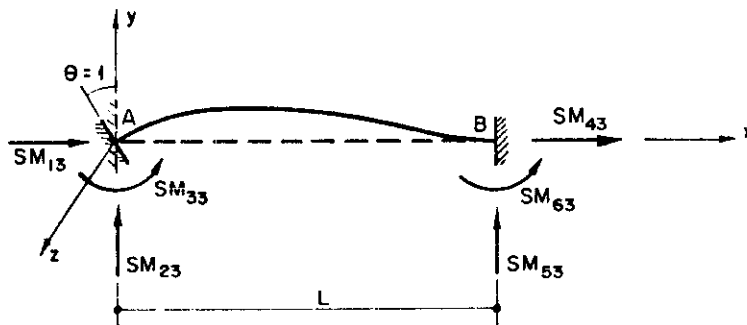
L = comprimento da barra

J = momento de inércia em relação ao eixo Z

Para se determinar os coeficientes de uma coluna genérica j da matriz de rigidez $[SM]$, impõe-se um deslocamento unitário na direção j , mantendo nulos os deslocamentos segundo todas as outras direções. Os elementos SM_{ij} corresponderão aos esforços em cada uma das direções i , necessários para manter tal configuração de deslocamentos.

Fazendo isso, coluna por coluna, tem-se por exemplo:

3ª coluna de $[SM]$ (Fig. 2.2)



(FIG. 2.2)

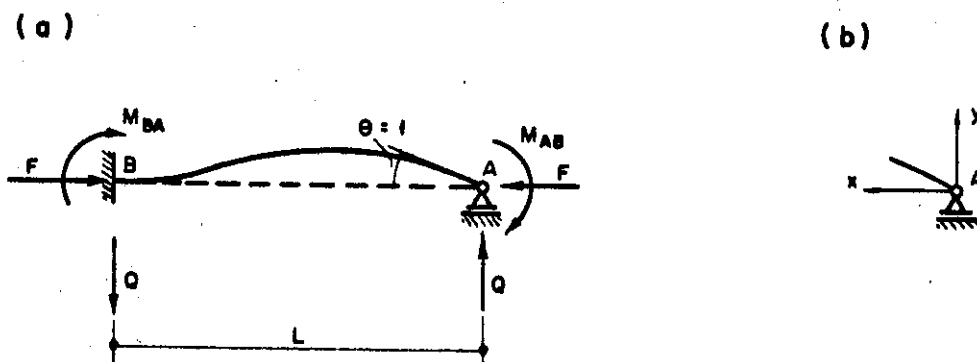
$$\begin{array}{lll}
 SM_{13} = 0 & SM_{23} = 6 \frac{EJ}{L^2} & SM_{33} = 4 \frac{EJ}{L} \\
 SM_{43} = 0 & SM_{53} = -6 \frac{EJ}{L^2} & SM_{63} = 2 \frac{EJ}{L}
 \end{array} \dots\dots (2.2)$$

Admita-se agora, atuando nesta mesma barra AB, um esforço axial F , constante, que pode ser de compressão ou de tração. Os elementos da matriz de rigidez $[SM]$ dependem desse esforço F e podem ser calculados através de um pequeno número de coeficientes (pa

ra os quais é adotada a notação clássica usada entre outros por MERCHANT¹, GREGORY², McMINN³, MATHESON⁴), definidos nos itens seguintes. Inicialmente será suposto que o esforço axial seja de compressão.

2.1. COEFICIENTES "s" E "c"

Seja a barra AB, carregada axialmente pela força F de compressão, conforme figura (2.3a)



(FIG. 2.3)

Convencionando positivos os momentos fletores que produzem tração na borda superior e com o sistema de referência da figura (2.3b) tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EJ} \dots\dots(2.3)$$

onde $M = M_{AB} + Fy - Qx \dots\dots(2.4)$

Para os demais esforços M_{AB} , M_{BA} e Q a figura (2.3a) mostra os seus sentidos reais sem qualquer preocupação de estabelecer convenções, por ora. Mais tarde os resultados aqui obtidos serão adaptados à convenção de sinais da figura (2.1).

Portanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{1}{EJ} (M_{AB} + Fy - Qx)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Fy}{EJ} = - \frac{1}{EJ} (M_{AB} - Qx) \dots\dots\dots(2.5)$$

Definem-se agora os coeficientes adimensionais s, c, tais

que:

$$M_{AB} = s \frac{EJ}{L} \theta = s \frac{EJ}{L} = sk \dots\dots\dots(2.6)$$

$$M_{BA} = cM_{AB} = csk \dots\dots\dots(2.7)$$

$$k = \frac{EJ}{L} \dots\dots\dots(2.8)$$

Sendo

$$Q = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} = \frac{(sk + csk)}{L} \theta = sk \frac{(1 + c)}{L} \dots\dots\dots(2.9)$$

pode-se escrever a equação (2.5) da seguinte forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EJ}y = - \frac{s}{L} + s(1 + c) \frac{x}{L^2} \dots\dots\dots(2.10)$$

cuja solução geral é:

$$y = - \frac{sk}{FL} \left[L - (1 + c)x \right] + C_1 \cos x \sqrt{\frac{F}{EJ}} + C_2 \sen x \sqrt{\frac{F}{EJ}} \dots\dots\dots(2.11)$$

Para os vínculos da barra AB (Fig. 2.3a) as condições de contorno são:

a) Se $x = 0$

$$y = y_A = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta_A = 1$$

b) Se $x = L$

$$y = y_B = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta_B = 0$$

Essas quatro condições de contorno permitem calcular as 4 incógnitas C_1, C_2, s, c em função de F .

Seja P_E tal que:

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

e μ tal que:

$$\mu = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{P_E}} \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

Determinando-se as constantes de integração e introduzindo o valor de μ obtêm-se então:

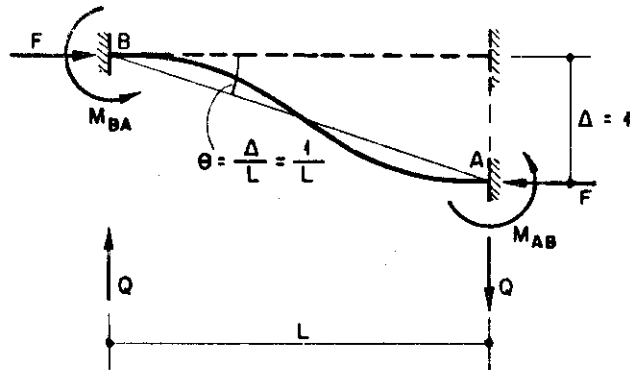
$$s = \frac{1 - 2\mu \cotg 2\mu}{\text{tg} \mu - \mu} \cdot \mu \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

$$c = \frac{2\mu - \text{sen} 2\mu}{\text{sen} 2\mu - 2\mu \cos 2\mu} \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

Observa-se, analisando as equações (2.14) e (2.15), que os coeficientes s , c são dependentes da relação entre F (esforço axial aplicado) e P_E (carga crítica de Euler, supondo a barra AB bi-articulada).

2.2. COEFICIENTE "m"

Para o cálculo desse coeficiente, toma-se agora a barra AB conforme figura (2.4)



(FIG. 2.4)

Impondo-se a condição de equilíbrio de momentos em relação ao ponto B, tem-se:

$$-M_{AB} - M_{BA} + F \cdot l + QL = 0 \quad \dots\dots(2.16)$$

Seja m tal que

$$mQ = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} \quad \dots\dots(2.17)$$

Sendo:

$$M_{AB} = M_{BA} = s(1 + c)k\theta = s(1 + c)k \frac{1}{L} \quad \dots\dots(2.18)$$

e

$$F = \frac{\pi^2 Fk}{P_E L} \dots\dots\dots(2.19)$$

Encontra-se facilmente, substituindo (2.17), (2.18) e (2.19) em (2.16)

$$m = \frac{2s(1 + c)}{2s(1 + c) - \pi^2 \frac{F}{P_E}} \dots\dots\dots(2.20)$$

Novamente, observando a equação (2.20) verifica-se que o coeficiente m só depende da relação F/P_E , já que ele é função de s, c, que por sua vez só dependem daquela relação.

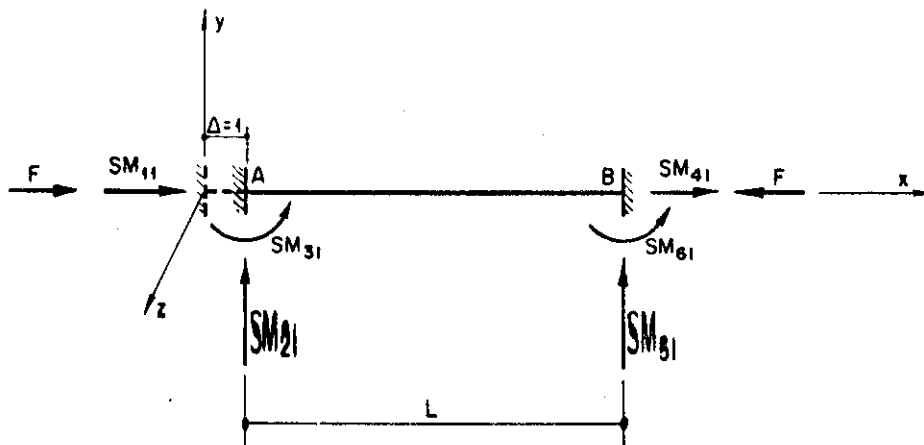
Das equações (2.17) e (2.18) tira-se o valor da força Q.

$$Q = \frac{2s(1 + c)k}{mL^2} \dots\dots\dots(2.21)$$

Calculados que foram os coeficientes s, c, m, pode-se agora construir a matriz [SM] da equação (2.1) levando-se em consideração o efeito de uma força de compressão F. Essa matriz será denominada [SM*].

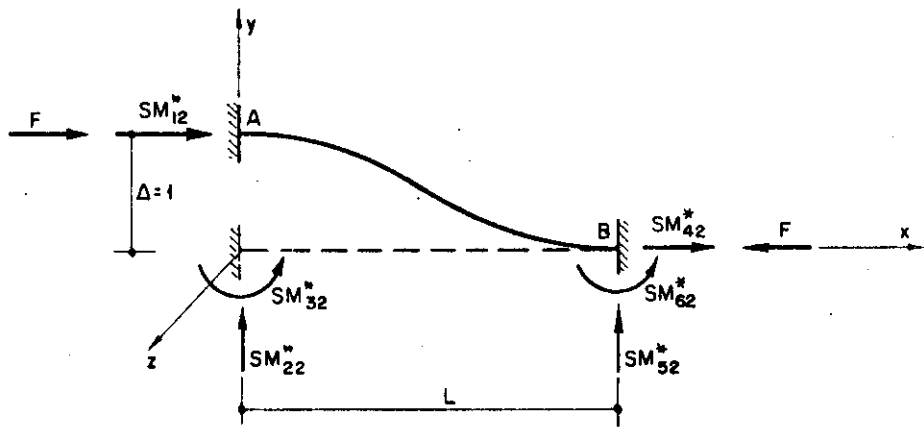
1.^a e 4.^a colunas de [SM*]

Essas colunas de [SM*] coincidem com aquelas de [SM], visto que, se o material está no regime elástico a variação da deformação axial é proporcional ao esforço necessário para produzi-la. Assim, se na barra AB da figura (2.5), já estiver atuando uma força F de compressão os valores dos coeficientes SM_{ij} e SM^*_{ij} serão os mesmos já que para produzir a variação de deformação $\Delta = 1$ no comprimento AB é necessário um esforço $\frac{FA}{L}$, esteja ou não F atuando.



(FIG. 2.5)

2.^a coluna de $[SM^*]$ (Fig. 2.6)



(FIG. 2.6)

Introduzindo os coeficientes \$s, c, m\$, através das equações (2.18) e (2.21) e lembrando-se que \$k = \frac{EJ}{L}\$ tem-se:

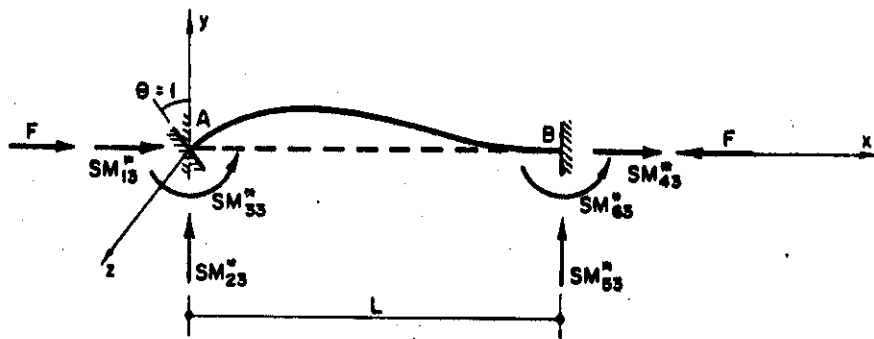
$$SM^*_{12} = 0 \quad SM^*_{22} = 2s \frac{(1+c)}{m} \frac{EJ}{L^3} \quad SM^*_{32} = s(1+c) \frac{EJ}{L^2}$$

$$SM^*_{42} = 0 \quad SM^*_{52} = -2s \frac{(1+c)}{m} \frac{EJ}{L^3} \quad SM^*_{62} = s(1+c) \frac{EJ}{L^2}$$

.....
..... (2.22)
.....

Obs.: Apesar de a barra AB estar submetida a um esforço axial F , encontra-se $SM_{12}^* = SM_{42}^* = 0$. Isto é fácil de compreender, pois SM_{12}^* e SM_{42}^* são esforços que surgem devido à variação de comprimento (deformação axial) da barra, que no caso é suposto nulo, por se desprezarem as deformações axiais devidas à flexão.

3.^a coluna de $[SM^*]$ (Fig. 2.7)

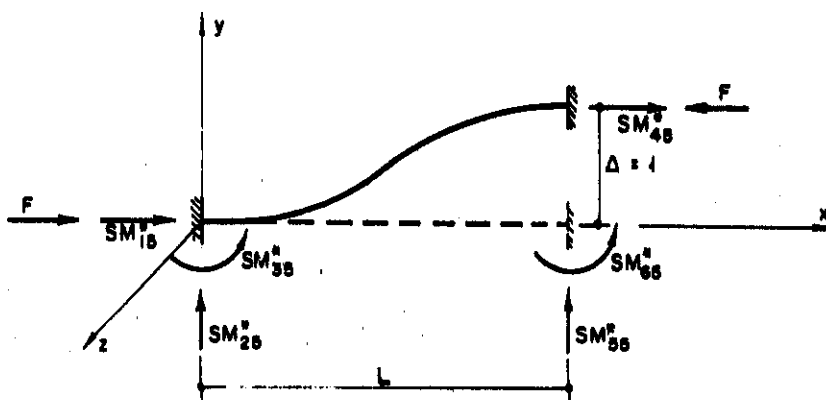


(FIG. 2.7)

Com os coeficientes s , c , através das equações (2.6), (2.7) e (2.9) constrói-se:

$$\begin{array}{lll}
 SM_{13}^* = 0 & SM_{23}^* = s(1+c) \frac{EJ}{L^2} & SM_{33}^* = s \frac{EJ}{L} \\
 SM_{43}^* = 0 & SM_{53}^* = -s(1+c) \frac{EJ}{L^2} & SM_{63}^* = sc \frac{EJ}{L}
 \end{array} \dots\dots(2.23)$$

5.^a coluna de $[SM^*]$ (Fig. 2.8)

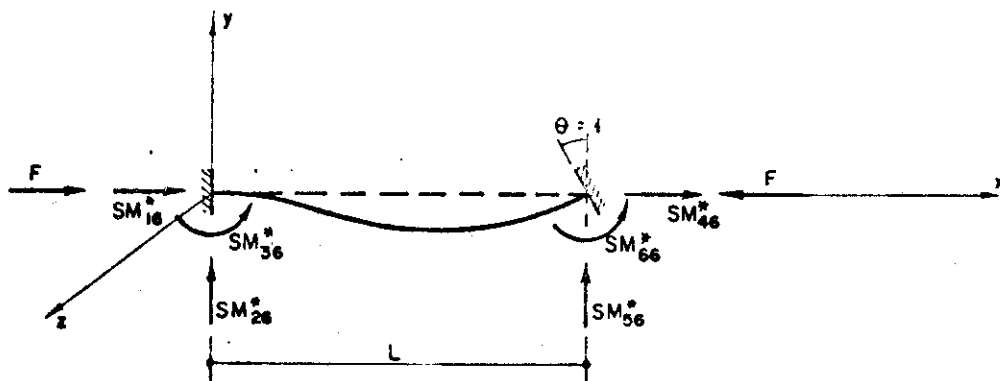


(FIG. 2.8)

Analogamente ao que foi desenvolvido para a 2.^a coluna en-
contra-se

$$\begin{aligned}
 SM_{15}^* &= 0 & SM_{25}^* &= -2s \frac{(1+c)}{m} \cdot \frac{EJ}{L^3} & SM_{35}^* &= -s(1+c) \frac{EJ}{L^2} \\
 SM_{45}^* &= 0 & SM_{55}^* &= 2s \frac{(1+c)}{m} \cdot \frac{EJ}{L^3} & SM_{65}^* &= -s(1+c) \frac{EJ}{L^2}
 \end{aligned} \dots(2.24)$$

6.^a coluna de $[SM^*]$ (Fig. 2.9)



(FIG. 2.9)

$$\begin{aligned}
 SM_{16}^* &= 0 & SM_{26}^* &= s(1+c) \frac{EJ}{L^2} & SM_{36}^* &= sc \frac{EJ}{L} \\
 SM_{46}^* &= 0 & SM_{56}^* &= -s(1+c) \frac{EJ}{L^2} & SM_{66}^* &= s \frac{EJ}{L}
 \end{aligned} \dots\dots\dots(2.25)$$

Obtêm-se assim a matriz $[SM^*]$ da equação (2.26).

Resta ainda verificar o que acontece com a matriz $[SM]$ quando a força F é de tração. Nêsse caso a equação (2.4) passaria a ser

$$M = M_{AB} - Fy - Qx \dots\dots\dots(2.4')$$

e portanto (2.5) seria

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{Fy}{EJ} = - \frac{1}{EJ} (M_{AB} - Qx) \dots\dots\dots(2.5')$$

....(2.26)

$\frac{EA_x}{L}$	0	$-\frac{EA_x}{L}$	0	0
$\frac{(1+c) EJ}{2s} \cdot \frac{L^2}{m}$	$s(1+c) \frac{EJ}{L^2}$	0	$-\frac{(1+c) EJ}{2s} \cdot \frac{L^3}{m}$	$s(1+c) \frac{EJ}{L^2}$
	$\frac{EJ}{s} \cdot \frac{L}{L}$	0	$-\frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{L^3}{m}$	$\frac{EJ}{sc} \cdot \frac{L}{L}$
		$\frac{EA_x}{L}$	0	0
			$\frac{(1+c) EJ}{2s} \cdot \frac{L^3}{m}$	$-\frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{L^3}{m}$
				$\frac{EJ}{s} \cdot \frac{L}{L}$

Simétrico

[SM*]

cuja solução geral é:

$$y = \frac{sk}{FL} \left[L - (1 + c)x \right] + C_1 e^{\sqrt{\frac{F}{EJ}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{F}{EJ}} x} \dots(2.11')$$

As condições de contorno são as mesmas consideradas no caso de compressão. Um procedimento análogo ao do ítem 2.1. conduz aos resultados:

$$s = \frac{1 - 2\mu \operatorname{cotgh} 2\mu}{\operatorname{tgh} \mu - \mu} \cdot \mu \dots\dots(2.14')$$

$$c = \frac{2\mu - \operatorname{senh} \mu}{\operatorname{senh} 2\mu - 2\mu \operatorname{cosh} 2\mu} \dots\dots(2.15')$$

Nota-se, pelas equações (2.14), (2.15) e (2.14'), (2.15') que os coeficientes s, c para F de compressão e tração possuem semelhança formal, bastando para isso substituir as funções trigonométricas pelas hiperbólicas de mesmo nome.

Quanto ao coeficiente m, no caso de F ser de tração bastaria substituir (2.16) por

$$-M_{AB} - M_{BA} - F + QL = 0 \dots\dots(2.16')$$

que conduzirá, com o mesmo tratamento dado ao ítem 2.2. a:

$$m = \frac{2s(1 + c)}{2s(1 + c) + \frac{\pi^2 F}{PE}} \dots\dots(2.20')$$

A matriz de rigidez para esforço axial de tração F é a mesma [SM*], observando entretanto, que se F fôr de compressão deve-se calcular os coeficientes s, c, m com as equações (2.14), (2.15) e (2.20); se, no entanto, F fôr de tração calcula-se os mesmos coeficientes com (2.14'), (2.15') e (2.20').

3. INSTABILIDADE ELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS

3.1. INTRODUÇÃO

Seja uma estrutura formada por barras, submetida a um carregamento genérico constituído de cargas tanto nos nós como ao longo das barras.

Seja ℓ o número de deslocamentos possíveis dos nós da estrutura. Esses deslocamentos

$$\{\Delta\}^T = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_\ell] \quad \dots\dots(3.1)$$

podem ser relacionados com o carregamento, conforme formulação matricial do processo dos deslocamentos, através da expressão:

$$\{P\} = [S]\{\Delta\} \quad \dots\dots(3.2)$$

onde

$$\{P\}^T = [P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_\ell] \quad \dots\dots(3.3)$$

é constituído por esforços, nas direções de cada um dos ℓ deslocamentos considerados, equivalentes ao carregamento dado.

A matriz $[S]$ é a matriz de rigidez da estrutura para os ℓ deslocamentos sendo obtida pela formulação matricial clássica do método dos deslocamentos (WEAVER⁵, RUBINSTEIN⁵)

$$[S] = \sum_j [A]_j^T [SM]_j [A]_j$$

onde $[A]_j$ é a matriz que relaciona os deslocamentos do sistema com os da barra j .

Como $[S]$ é obtida das matrizes $[SM]_j$ cujos elementos, por

sua vez, são funções das forças axiais nas barras, conforme foi visto no Cap. 2, a matriz de rigidez do sistema, $[S]$, dependerá do carregamento da estrutura.

A estrutura em estudo é considerada estável para um certo carregamento $\{P\}$ se para um acréscimo qualquer $\{\delta P\}$ no carregamento, puderem ser perfeitamente definidos os acréscimos $\{\delta \Delta\}$ de deslocamentos, através da expressão (3.2). Assim, de

$$\{\delta P\} = [S] \{\delta \Delta\} \quad \dots\dots(3.4)$$

segue-se que

$$\{\delta \Delta\} = [S]^{-1} \{\delta P\} \quad \dots\dots(3.5)$$

Um carregamento $\{P\}$ será dito crítico, se, para um acréscimo $\{\delta P\}$ qualquer nesse carregamento houver indeterminação nos deslocamentos. A condição para que isso ocorra é que a matriz $[S]$ correspondente a esse carregamento seja singular, isto é, $\det[S] = 0$.

Então, o problema de achar o valor da carga crítica se resume em calcular a matriz de rigidez da estrutura e verificar para que carregamento ela se torna singular.

3.2. PÓRTICOS PLANOS INDESLOCÁVEIS

Considera-se como pórtico plano indeslocável aquele cujos nós têm posição invariável no plano, desprezadas as deformações axiais devidas às forças axiais e à flexão. Assim sendo, o único deslocamento possível para um nó é a rotação, rotação essa que será denominada θ .

A equação matricial (3.2) pode ser portanto a seguinte:

$$\{M\} = [S] \{\theta\} \quad \dots\dots(3.2')$$

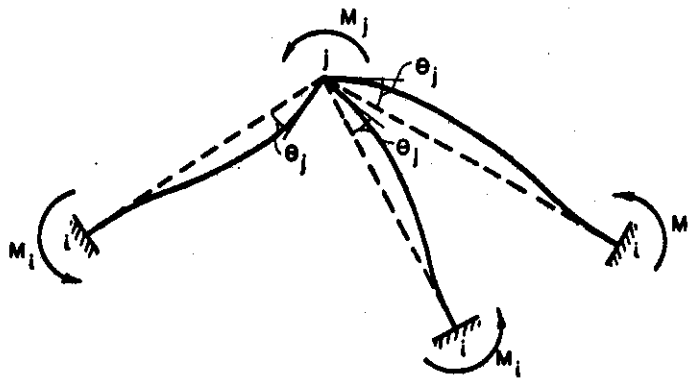
onde

$$\{M\}^T = [M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_\ell] \quad \dots\dots(3.3')$$

$$\{\theta\}^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_\ell] \quad \dots\dots(3.1')$$

e [S] a matriz de rigidez correspondente apenas às rotações.

Resta então, para verificar a instabilidade do pórtico, calcular a matriz [S]. Seja j um nó qualquer do pórtico ao qual estão ligadas as barras cuja extremidade oposta denomina-se genericamente i, conforme figura (3.1)



(FIG. 3.4)

Inicialmente, suponha-se que todos os θ_i sejam nulos e que se imponha ao nó j uma rotação θ_j . Então, lembrando o que foi tratado no capítulo 2 e recorrendo à equação (2.6) tem-se:

$$M_j = \theta_j \sum_i (sk)_{ij} \quad \dots\dots(3.6)$$

onde M_j é o momento aplicado em j para manter tal estado de deformação. Como consequência, aparecerá em i um momento M_i (veja equação(2.7)) tal que:

$$M_i = \theta_j (skc)_{ij} \quad \dots\dots(3.7)$$

Para gerar uma coluna j de $[S]$ basta então impor uma rotação $\theta_j = 1$ ao nó j e calcular o correspondente esforço S_{ij} aplicado ao nó i . Assim pode-se obter:

a) Se $i = j$, pela (3.6)

$$S_{ij} = \sum_h (sk)_{hj} \quad \dots\dots(3.8)$$

b) Se $i \neq j$, pela (3.7)

$$S_{ij} = (skc)_{ij} \quad \dots\dots(3.9)$$

A equação matricial (3.2') pode ser explicitada conforme a equação (3.10)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ \vdots \\ M_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_h (sk)_{h1} & (skc)_{12} & \dots\dots (skc)_{1i} & \dots\dots (skc)_{1\ell} \\ (skc)_{21} & \sum_h (sk)_{h2} & \dots\dots (skc)_{2i} & \dots\dots (skc)_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (skc)_{i1} & (skc)_{i2} & \dots\dots \sum_h (sk)_{hi} & \dots\dots (skc)_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (skc)_{\ell 1} & (skc)_{\ell 2} & \dots\dots (skc)_{\ell i} & \dots\dots \sum_h (sk)_{h\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_\ell \end{bmatrix} \quad \dots\dots(3.10)$$

A determinação da matriz de rigidez $[S]$ não pode ser feita diretamente pois seus coeficientes são calculados em função dos s , c , m das barras os quais, por sua vez, dependem dos esforços axiais nas barras. Tais esforços, todavia, são determinados por meio dos deslocamentos $[\Delta]$ que ficam conhecidos após a inversão de $[S]$ na equação (3.2), operação somente exequível se $[S]$ for conhecida. Em

resumo, fecha-se o círculo vicioso: para determinar $[S]$ é necessário conhecer $[S]$.

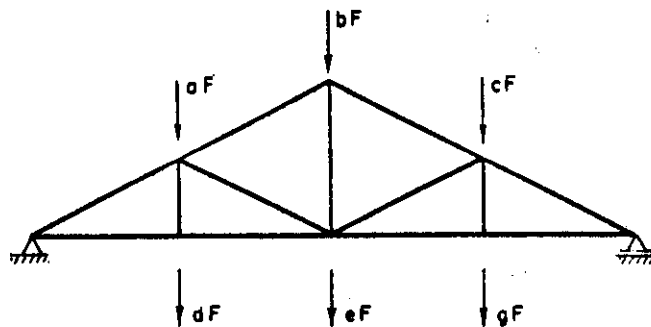
Pode-se contornar esse problema de diversas maneiras dependendo do tipo de carregamento da estrutura. Será apresentado o encaminhamento do cálculo, primeiro para pórticos indeslocáveis com cargas somente nos nós e em seguida para pórticos indeslocáveis num caso mais geral, com cargas também ao longo das barras.

3.2.1. Pórticos indeslocáveis com cargas nos nós

Esse é o caso típico de treliça de nós rígidos. Nesse caso pode-se usar algumas simplificações, já que os momentos nas barras são de segunda ordem e portanto de pequena influência na determinação dos esforços axiais.

O problema de determinação da carga crítica de pórticos será encaminhado, de uma forma geral, no sentido de determinar um único parâmetro que defina o carregamento. Assim, ter-se-á sempre carregamentos proporcionais.

Então, sejam o pórtico e o carregamento proporcional especificados na figura (3.2), onde os coeficientes a , b , c ... são constantes e F o parâmetro considerado.



(FIG. 3.2)

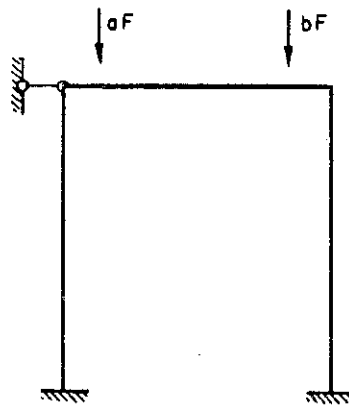
Mesmo variando os coeficientes s , c , m o efeito dos momentos na determinação dos esforços axiais é desprezível e pode-se considerar que a carga numa barra é diretamente proporcional ao parâmetro F , e os esforços axiais, portanto, podem ser calculados considerando a estrutura como uma treliça, originada do pórtico pela introdução de articulações em todos os nós.

Seja então $F \cdot f_i$ o esforço axial numa barra i genérica, onde f_i é a força axial na barra i quando o carregamento é definido por $F = 1$. Para cada valor do parâmetro F , tem-se diretamente as cargas nas barras e pode-se então calcular de imediato a matriz $[S]$ verificando se F é ou não crítico conforme técnica a ser desenvolvida no item 3.4.

3.2.2. Pórticos indeslocáveis com cargas fora dos nós

São pórticos que não se enquadram nas condições do item anterior não permitindo as simplificações aí desenvolvidas.

Seja por exemplo o pórtico da figura (3.3)



(FIG. 3.3)

onde se quer determinar o valor crítico para o parâmetro F , o que será feito por aproximações sucessivas.

Assumindo um determinado valor para F , o primeiro passo no

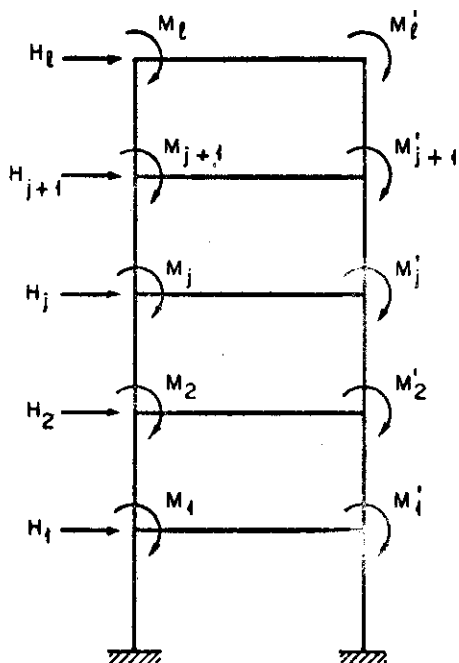
sentido de verificar se ele é o valor crítico, será determinar os esforços internos na estrutura, devidos ao carregamento definido por F . Em virtude do problema já citado anteriormente esse passo não poderá ser feito diretamente; usar-se-á também um processo de aproximações sucessivas. Assim, supõe-se inicialmente, num primeiro estágio, que os coeficientes s , c , m correspondam a esforços axiais nulos. Com esses coeficientes assim definidos calcula-se a matriz de rigidez e resolve-se a estrutura chegando a um primeiro conjunto de valores para os esforços axiais. Com esse conjunto de esforços, num segundo estágio, determina-se novamente os coeficientes s , c , m , recalculando-se a estrutura e chegando a um segundo conjunto de valores para os esforços axiais. Repete-se o processo até que, a menos de um pequeno erro previamente estabelecido, os esforços axiais de um estágio sejam iguais ao do estágio anterior.

Tendo os esforços nas barras devidos ao carregamento definido por F , pode-se determinar a matriz de rigidez $[S]$. O passo seguinte seria então verificar se o parâmetro F é crítico, o que será feito com o procedimento desenvolvido no item 3.4. Convém ressaltar que esse estudo para os pórticos indeslocáveis (com cargas nos nós ou fora deles) não inclui aqueles com grau de deslocabilidade negativo, isso porque nesse tipo de estrutura pode ocorrer instabilidade local sem que o conjunto seja instável.

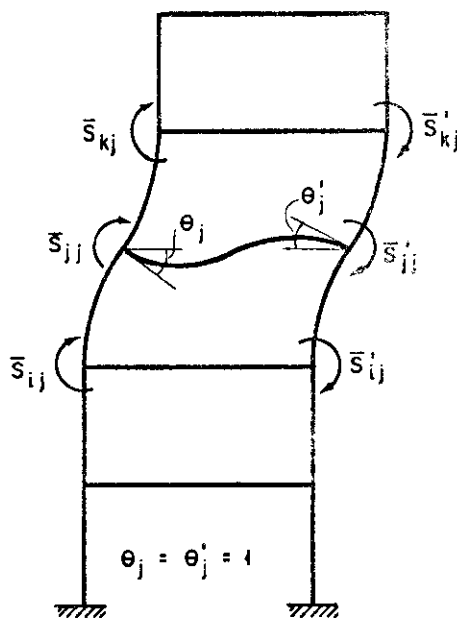
3.3. PÓRTICOS PLANOS DESLOCÁVEIS

Só serão considerados os pórticos retangulares com cargas verticais para os quais se apresentará processo aproximado de determinação da carga crítica. Inicialmente, como base para a explicação desse processo, considere-se um pórtico simétrico de apenas dois pilares com cargas verticais simétricas. Na figura (3.4) as

cargas originais do pórtico não estão representadas; nela apenas aparecem as perturbações possíveis que podem ser causadas por pequenas forças horizontais H_j (aplicada ao nível do andar j) e pelos pequenos momentos M_j, M'_j aplicados aos nós do andar j .



(FIG. 3.4)



(FIG. 3.5)

A equação matricial (3.2) pode ser posta sob a forma

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M'_1 \\ M_2 \\ M'_2 \\ \vdots \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta\theta} & S_{\theta\delta} \\ S_{\theta\delta}^T & S_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta'_1 \\ \theta_2 \\ \theta'_2 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_l \end{bmatrix} \quad \dots (3.11)$$

na qual $\theta_j, \theta'_j, \delta_j$ são os deslocamentos angulares e lineares correspondentes às perturbações M_j, M'_j, H_j .

As perturbações com deslocabilidades horizontais dos andares são as mais desfavoráveis. Tais deslocabilidades podem ser, portanto, liberadas de modo a se condensar a equação (3.11) apenas para as rotações θ_j, θ'_j dos nós, conforme a maneira clássica (RUBINSTEIN⁶):

$$\begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\theta\theta} & s_{\theta\delta} \\ s_{\theta\delta}^T & s_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\therefore [M] - [s_{\theta\delta}] [s_{\delta\delta}]^{-1} [H] = \left([s_{\theta\theta}] - [s_{\theta\delta}] [s_{\delta\delta}]^{-1} [s_{\theta\delta}]^T \right) [\theta] \quad \dots(3.12)$$

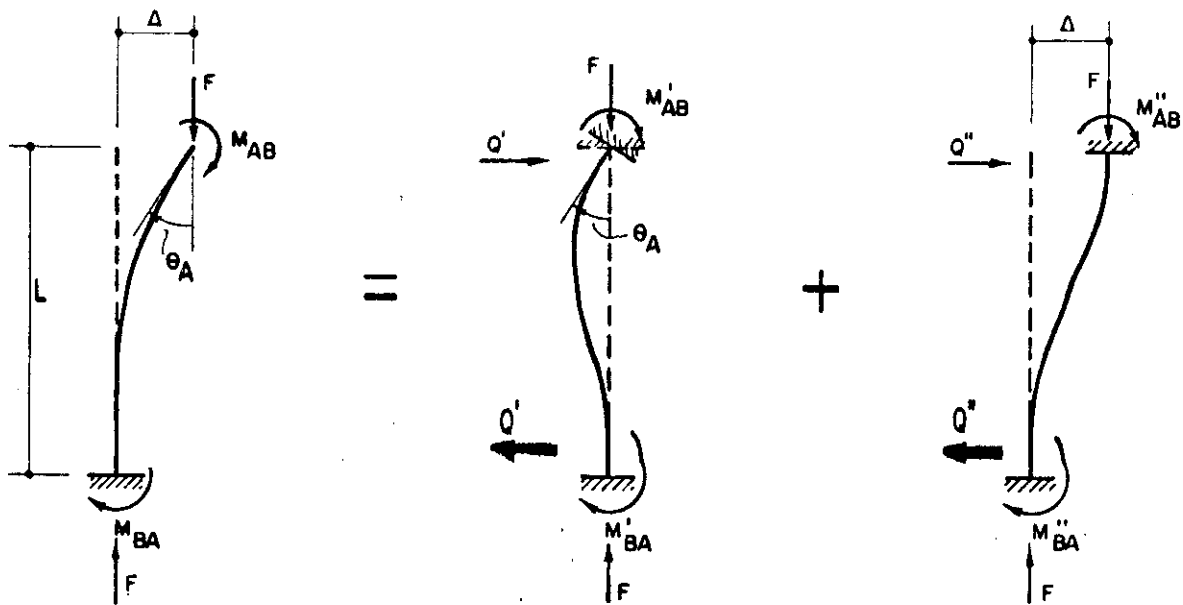
ou, com notação mais sintética para a equação (3.12)

$$[\bar{M}] = [\bar{S}] [\theta] \quad \dots\dots(3.13)$$

Como a estrutura e a carga original são simétricas os coeficientes de rigidez serão simétricos e os estados de perturbação com deslocabilidades horizontais apresentarão rotações θ_j e θ'_j antissimétricas.

Já admitindo a antimetria $\theta_j = -\theta'_j$ os elementos de $[\bar{S}]$ podem ser mais facilmente calculados se forem introduzidos os coeficientes de rigidez \underline{n} (ã rotação da extremidade livre) e de transmissão $\underline{\sigma}$, relativos a barras em balanço (Fig. 3.6).

Os valores de \underline{n} e $\underline{\sigma}$ podem ser obtidos em função de s, c, m através da superposição de efeitos mostrada na figura (3.6).



(FIG. 3 - 6)

$$M_{AB} = M'_{AB} + M''_{AB} = sk\theta_A - s(1 + c)k\frac{\Delta}{L} \dots\dots\dots(3.14)$$

$$M_{BA} = M'_{BA} + M''_{BA} = sck\theta_A - s(1 + c)k\frac{\Delta}{L} \dots\dots\dots(3.15)$$

$$0 = Q' + Q'' = -s(1 + c)k\frac{\theta_A}{L} + \frac{2s(1 + c)}{m} \cdot \frac{k}{L} \cdot \frac{\Delta}{L} \dots\dots(3.16)$$

Substituindo o valor de Δ , encontrado em (3.16), nas duas equações anteriores obtêm-se

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= s \left[1 - \frac{m(1 + c)}{2} \right] k\theta_A \\ M_{BA} &= -s \left[-c + \frac{m(1 + c)}{2} \right] k\theta_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.17)$$

Admitindo $\theta_A = 1$ e usando a notação

$$n = s \left[1 - \frac{m(1 + c)}{2} \right] \dots\dots\dots(3.18)$$

$$\sigma = s \left[-c + \frac{m(1+c)}{2} \right] \dots\dots\dots(3.19)$$

obtêm-se

$$M_{AB} = nk \dots\dots\dots(3.20)$$

$$M_{BA} = -\sigma k \dots\dots\dots(3.21)$$

de modo a definir os valores de \underline{n} e $\underline{\sigma}$ para vigas em balanço com força cortante nula (isto é, deslocamento transversal Δ completamente livre).

Para obter os coeficientes da coluna j de $[\bar{S}]$ (eq. 3.13), já admitindo antimetria das rotações dos nós do mesmo andar, basta impor $\theta_j = \theta'_j = 1$ com os demais θ sendo nulos, como se mostra na figura (3.5), cuja forma da elástica é facilmente percebida quando se lembra que os pilares têm forças cortantes nulas, por inexistirem cargas originais horizontais. Pela figura (3.5) calculam-se os coeficientes.

$$\bar{S}_{jj} = \sum_p nk + \sum_v s(1+c)k \dots\dots\dots(3.22)$$

$$\bar{S}_{ij} = -(\sigma k)_{ij} \dots\dots\dots(3.23)$$

$$\bar{S}_{kj} = -(\sigma k)_{kj} \dots\dots\dots(3.24)$$

em cujas expressões os índices \underline{p} e \underline{v} mostram que as somatórias devem ser estendidas aos tramos de pilares e vigas respectivamente, que concorrem no nó j considerado. (no caso da figura (3.5) só um tramo de viga concorre no nó j ; pretende-se, depois estender a equação (3.22) para pilar central, no qual concorrem dois tramos de vigas, em cada nó)

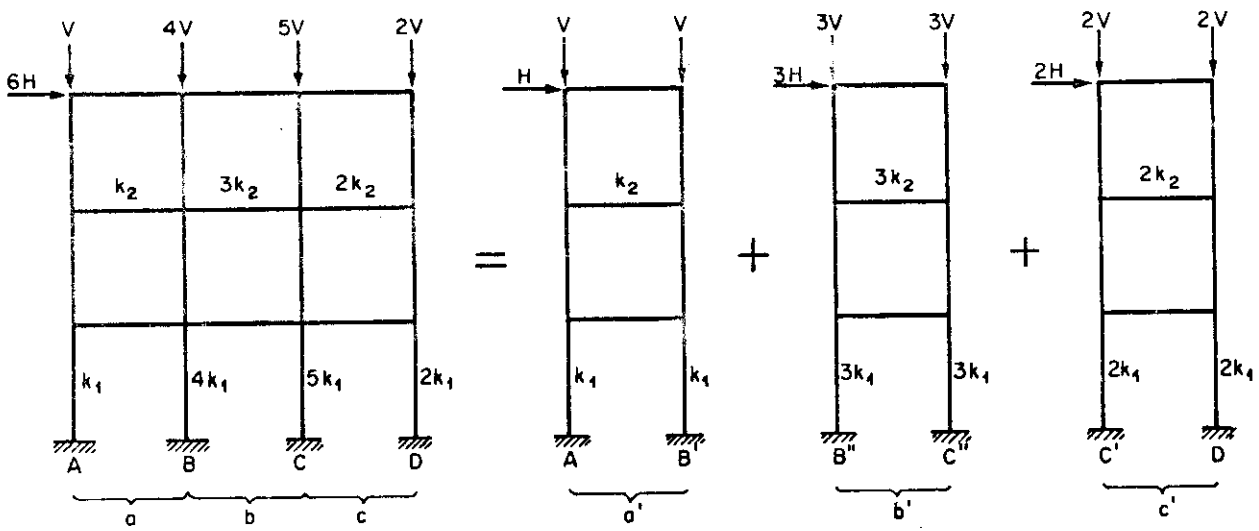
As dimensões do problema ficam reduzidas à metade, bastando considerar somente as rotações θ_j (seria indiferente se se prefe

risse usar somente as rotações θ_j). Em lugar das $2 \cdot \ell$ coordenadas da equação (3.13) usar-se-ia

$$\left\{ \bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_\ell \right\}^T = \left[\bar{S}^* \right] \left\{ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\ell \right\}^T \dots\dots\dots(3.13')$$

Os coeficientes da matriz $\left[\bar{S}^* \right]$, de ordem $\ell \times \ell$ são obtidos das equações (3.22), (3.23), (3.24). Para verificar a instabilidade do pórtico simétrico de ℓ andares da figura (3.4) basta, portanto, estudar em que condições se singulariza a matriz $\left[\bar{S}^* \right]$ de ordem $\ell \times \ell$.

O processo até aqui descrito poderia ser perfeitamente estendido aos pórticos chamados "proporcionais", isto é, aos pórticos que obedecem ao "princípio dos múltiplos", segundo LIGHTFOOT⁹. Um exemplo dessa situação é mostrado na figura (3.7)



(FIG. 3.7)

A figura (3.7) apresenta um pórtico "proporcional", de 4 pilares A, B, C, D e de 3 painéis a, b, c. Tal pórtico pode ser obtido pela simples justaposição dos painéis simétricos a' , b' , c' , de

modo a se somarem os coeficientes de rigidez dos pilares justapostos de painéis consecutivos. As rotações dos nós situados em um mesmo andar são todas iguais e podem ser calculadas quer no pórtico original abc, quer em qualquer dos painéis "componentes" a' , b' , c' . O mesmo ocorre com os deslocamentos horizontais δ dos andares e com os momentos nas vigas (nos nós). Para obter os momentos nos pilares (nos nós) do pórtico original basta somá-los nos pilares justapostos dos painéis consecutivos (B' com B'' ; C'' com C').

Com referência à rigidez global aos deslocamentos horizontais poder-se-ia substituir o pórtico original por um "pórtico equivalente" simétrico (com apenas 2 pilares) obtido pela justaposição de todos os pórticos componentes a' , b' , c' , de modo a se somarem os coeficientes de rigidez k das barras (vigas e pilares) justapostas. No caso da figura (3.7) os pilares e vigas do "pórtico equivalente" teriam rigidez $6k_1$ e $6k_2$ respectivamente e a instabilidade do pórtico original poderia ser verificada pelo processo descrito, aplicado ao pórtico "equivalente".

Para os pórticos retangulares que não estão dimensionados de modo a obedecerem o "princípio dos múltiplos" as rotações dos nós do mesmo andar não são todas iguais. Todavia os pórticos retangulares usuais não apresentam excessiva disparidade entre a rigidez dos tramos dos seus diversos painéis. Desse modo, com referência à rigidez global, obtêm-se resultados razoavelmente aproximados (HORNE e MERCHANT¹), quando o pórtico real é substituído por um "pórtico equivalente" simétrico, obtido pela justaposição de todos os seus painéis "componentes" de modo a se somarem, em um mesmo andar, os k dos tramos de vigas e pilares (em vista da simetria do pórtico equivalente, a metade da soma dos k dos tramos dos pilares do andar considerado deve ser atribuída a cada um dos dois pilares do pórtico equivalente, no mesmo andar).

Essa "globalização" dos coeficientes de rigidez relativos aos pilares pode ser feita "a priori" mediante a técnica do "pórtico equivalente" descrita por McMINN³, na qual é necessário definir um $\rho = P/P_E$ que traduza, em termos médios, a força axial nos pilares do pórtico equivalente. A variante aqui seguida efetua tal globalização "a posteriori" somando as matrizes de rigidez $[\bar{S}^*]$ obtidas para cada pilar do pórtico original pelas equações (3.22), (3.23), (3.13').

Tendo em vista a matriz global $[\bar{S}^{**}]$ correspondente à equação (3.24) (usando o índice superior q para representar um qualquer dos c pilares do pórtico original) seus coeficientes de rigidez valerão:

$$\bar{S}_{jj}^{**} = \sum_1^c \bar{S}_{jj}^q \dots\dots\dots(3.25)$$

$$\bar{S}_{ij}^{**} = \sum_1^c \bar{S}_{ij}^q \dots\dots\dots(3.26)$$

onde \bar{S}_{jj}^q e \bar{S}_{ij}^q são calculados para o pilar genérico q de acordo com as equações (3.22) e (3.23), respectivamente.

A razão dessa "globalização" é algo óbvia. Se o pórtico dado obedecesse ao "princípio dos múltiplos", as matrizes $[\bar{S}^{*q}]$, relativas a cada um dos c pilares, seriam todas proporcionais; no caso do pórtico da figura (3.7), por exemplo, achar-se-iam as proporções

$$\frac{[\bar{S}^{*A}]}{1} = \frac{[\bar{S}^{*B}]}{4} = \frac{[\bar{S}^{*C}]}{5} = \frac{[\bar{S}^{*D}]}{2} = \frac{[\bar{S}^{**}]}{12}$$

respectivamente, entre as matrizes relativas aos pilares A, B, C, D e a matriz global $[\bar{S}^{**}]$. Nesse caso de matrizes proporcionais é indiferente escolher uma delas (ou a matriz global) para ter pesquisa da sua singularidade: uma delas sendo singular as demais o serão.

Para os pórticos retangulares usuais não existe a proporção

nalidade mostrada. Em cada pilar perturba-se a proporcionalidade para mais ou para menos, neste e/ou naquele andar. Escolher um dos pilares para representar o conjunto é menos indicado do que preferir a matriz global $[\bar{S}^{**}]$ onde tais perturbações de certa forma se compensam, de modo a melhor traduzir a rigidez do conjunto às perturbações θ_j (supostas iguais em cada andar). Pesquisa-se portanto, o valor da carga que singulariza a matriz global

$$[\bar{S}^{**}] = \sum_1^c [\bar{S}^{*q}] \dots\dots\dots(3.27)$$

Para recapitular, a determinação aproximada da carga crítica em pórticos retangulares deslocáveis, supostos regulares e solicitados só por cargas verticais, obedece, em resumo, o seguinte roteiro:

- a) Determinam-se as forças axiais nas barras causadas pelas cargas originais. Para as forças axiais nos pilares a contribuição predominante advém das reações verticais dos tramos das vigas supostas bi-articuladas; considerando a "globalização" a ser feita no final, essa etapa pode ser efetuada de modo simplificado, através das reações isostáticas acima citadas (sobre os pilares) e admitindo $F = 0$ nas vigas. Todavia, as forças axiais podem ser obtidas com maior aproximação considerando o pórtico indeslocável calculado com coeficientes de rigidez correspondentes a $F = 0$. Não há necessidade de fazer aproximações sucessivas para ter em conta a influência de F nos coeficientes de rigidez (ao contrário do que foi feito para os pórticos indeslocáveis) visto que os pórticos deslocáveis geralmente trabalham com relações $\rho = P/P_E$ bem menores que os pórticos indeslocáveis.

- b) Conhecidas as forças axiais nas barras determinam-se os coeficientes \underline{s} , \underline{c} das vigas e \underline{n} , $\underline{\sigma}$ dos pilares de modo a se calcular as matrizes $[\bar{S}^{*q}]$ pelas equações (3.22), (3.23), (3.24).
- c) Obtém-se, a seguir, a matriz global $[\bar{S}^{**}]$ pela equação (3.27) e pesquisa-se qual o valor crítico da carga que a torna singular, segundo procedimento a ser descrito no item 3.4 .

3.4. SINGULARIZAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ ATRAVÉS DE AUTOVALORES

Conforme foi visto nos itens 3.2 e 3.3 a carga numa estrutura será crítica se o determinante de $[S]$, ou $[\bar{S}^{**}]$ conforme o tipo da estrutura, for igual a zero.

Seja então a matriz $[S]$, de ordem $l \times l$. Qualquer que seja essa matriz pode-se fazer

$$[S] = [B] + [D] \quad \dots\dots(3.28)$$

onde $[D]$ é uma matriz diagonal e $[B]$ tem os elementos da diagonal principal iguais a zero. (eqs. 3.29)

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & \dots & S_{1l} \\ S_{21} & 0 & \dots & S_{2l} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{ll} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(3.29)$$

Como os coeficientes S_{ii} são calculados supondo as barras que concorrem ao nó i engastadas na extremidade oposta a i , pode-se

perfeitamente admitir que os S_{ii} nunca são menores que a rigidez efetiva à rotação do nó i , já que no cálculo dessa última tem-se a considerar que as extremidades opostas ao nó i , das barras que concorrem em i , permitem algum deslocamento. Assim sendo, como a rigidez efetiva do nó i é no mínimo zero tem-se que os S_{ii} são positivos.

Sendo $D_{ii} = S_{ii}$, então $D_{ii} > 0$ e portanto a matriz diagonal tem determinante não nulo, pois

$$\det[D] = \prod_{i=1}^{\ell} D_{ii} > 0 \quad \dots\dots(3.30)$$

e então a matriz $[D]$ tem inversa e pode-se escrever

$$[S] = ([B][D]^{-1} + [I])[D] \quad \dots\dots(3.31)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. Fazendo

$$[R] = [B][D]^{-1}$$

tem-se

$$[S] = ([R] + [I])[D] \quad \dots\dots(3.32)$$

Como o determinante de um produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes

$$\det[S] = \det([R] + [I]) \cdot \det[D]$$

Para que o determinante de $[S]$ se anule, já que o determinante de $[D]$ é diferente de zero, é preciso que

$$\det([R] + [I]) = 0 \quad \dots\dots(3.33)$$

o que equivale a dizer que -1 é autovalor da matriz $[R]$.

É também interessante ressaltar outras propriedades da matriz $[R]$. Demonstrar-se que (McMINN³) o módulo do autovalor de maior

módulo de uma matriz quadrada é menor ou igual à maior dentre as somas dos módulos dos elementos de qualquer fila. Assim, para um pórtico indeslocável, por exemplo, os elementos da coluna j de $[R]$ valem

a) $r_{jj} = 0$

b) $r_{ij} = 0$ se não existe barra ligando os nós i e j

c) $r_{ij} = \frac{(skc)_{ij}}{\sum_h (sk)_{hj}}$ (3.34)

se existe a barra ij (por h entende-se a outra extremidade de uma barra genérica que concorre em j).

Para o caso de carga externa nula tem-se, em todas as barras,

$s = 4$ $c = 0,5$

valores que conduzem a

$$\sum_i |r_{ij}| = \sum_h |r_{hj}| = 0,5$$

Portanto, o autovalor de maior módulo de $[R]$ está contido no intervalo entre $+0,5$ e $-0,5$.

Ao se aumentar a carga na estrutura, isto é, ao crescer gradativamente o parâmetro de carga, os limites desse intervalo expandem-se, continuamente. Quando se atinge a carga crítica um autovalor será -1 , conforme mostra a equação (3.33). Evidentemente, para a carga crítica, este é o autovalor negativo de maior módulo pois a variação dos autovalores é contínua com a carga: quando a carga é aumentada gradativamente a primeira vez que um autovalor negativo atinge -1 ela torna-se crítica. Em outras palavras, se o autovalor negativo de maior módulo é maior, igual, ou algebricamente menor que -1 então a carga correspondente é menor, igual ou maior que a carga crítica, respectivamente.

Para um pórtico deslocável as conclusões são as mesmas, pois os elementos da coluna j de $[R]$ são:

a) $r_{jj} = 0$

b) $r_{ij} = 0$ se não existe tramo de pilar ligando os nós i e j do pórtico equivalente

$$c) r_{ij} = \frac{-\sigma k_{ij}}{\sum_p (nk)_p + [s(1+c)k]_v} \dots\dots(3.34')$$

se existe o tramo de pilar ij no pórtico equivalente (por p e v são entendidos os tramos de pilar e de viga que concorram em j , no pórtico equivalente).

Para o caso de carga externa nula tem-se, em todas as barras,

$$s = 4 \qquad c = 0,5 \qquad \sigma = n = 1$$

valores que conduzem a

$$\sum_i |r_{ij}| = \frac{\sum_p k_p}{\sum_p k_p + 6k_v}$$

$$\therefore \sum_i |r_{ij}| < 1$$

Daí se conclui que, também para os pórticos deslocáveis aqui estudados, o autovalor negativo de maior módulo é -1 , quando a carga atinge o seu valor crítico.

Infelizmente não se pode afirmar que esse autovalor negativo de maior módulo (-1) seja o autovalor de maior módulo de $[R]$: nada impede a existência de um autovalor positivo de módulo maior que 1 . A existência de autovalores positivos é esperada pelo fato do traço de $[R]$ ser nulo e por se demonstrar (GELFAND¹²) ser o traço

o igual à soma de todos os autovalores da matriz (logo a existência de autovalores negativos implica na existência de autovalores positivos).

Como existem diversas técnicas para determinar o autovalor de maior módulo de uma matriz, o que se faz então é formar a matriz auxiliar

$$[Q] = [R] - [I] \quad \dots\dots\dots(3.35)$$

cujos autovalores são iguais aos de $[R]$ diminuídos de uma unidade. Portanto o autovalor negativo de maior módulo de $[Q]$ é -2 , para a carga crítica. Segundo McMINN³ é "altamente provável" que -2 seja o autovalor de maior módulo de $[Q]$, para a carga crítica.

O procedimento iterativo de determinação da carga crítica das estruturas tratadas neste trabalho é, portanto, o seguinte:

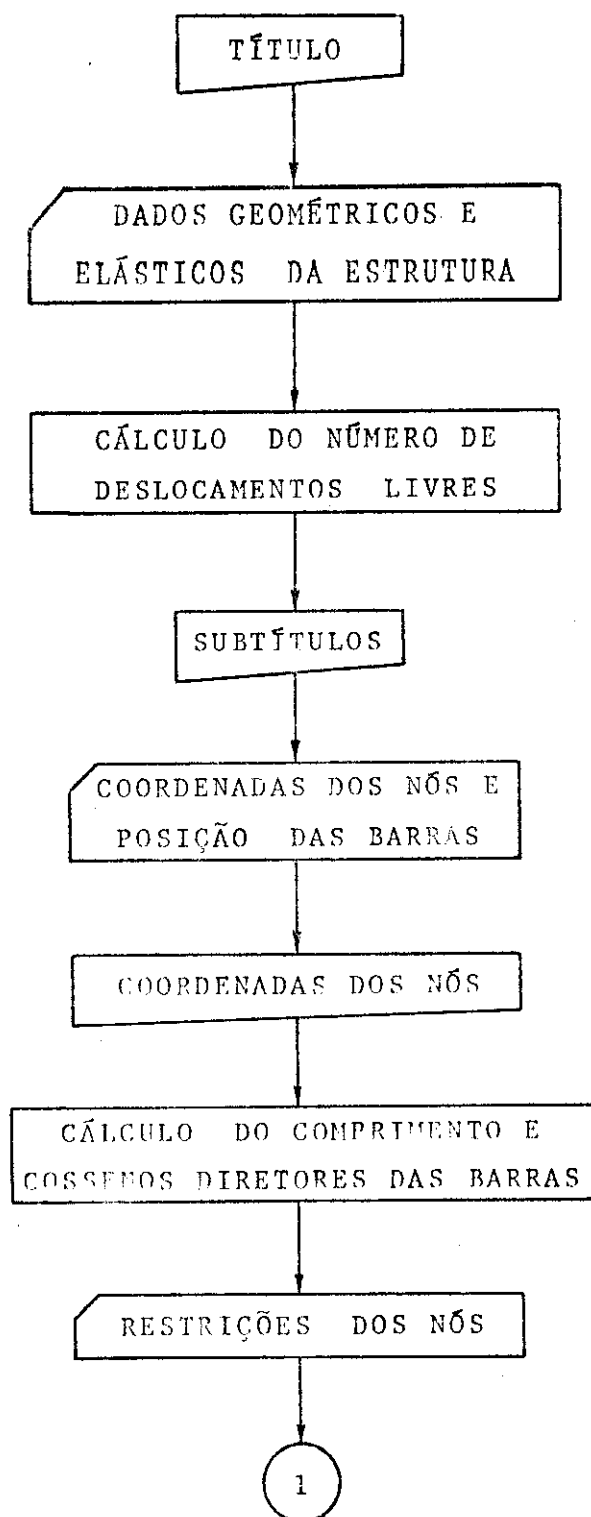
- a) Admite-se um certo carregamento na estrutura para o qual determina-se $[Q]$ segundo a equação (3.35).
- b) Calcula-se o autovalor λ^* , de maior módulo de $[Q]$
- c) Se $\lambda^* = -2$ o problema está resolvido e o carregamento inicialmente admitido é crítico. Se $\lambda^* > -2$ o carregamento inicial é inferior ao crítico e nova tentativa deve ser feita com maior carga. Se $\lambda^* < -2$ o carregamento admitido em (a) supera o carregamento crítico indicando nova tentativa, a ser feita com carga menor que a inicial.
- d) As conclusões de (c) orientam o sentido de novas tentativas para se conseguir $\lambda^* = -2$ ou, pelo menos, um intervalo suficientemente estreito dentro do qual se possa situar a carga crítica.

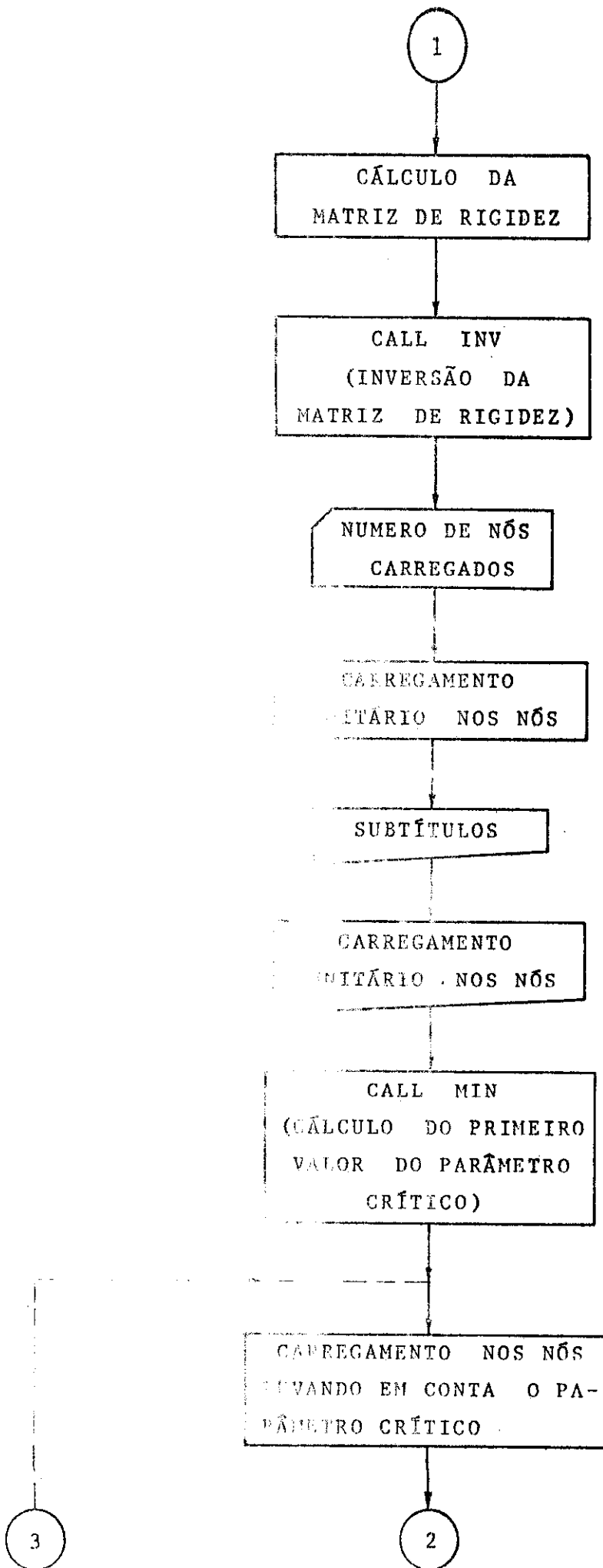
O cálculo de λ^* mencionado na etapa (b) foi efetuado, no presente trabalho, através de processo de convergência descrito por McMINN³ ("Matrix Squaring Method").

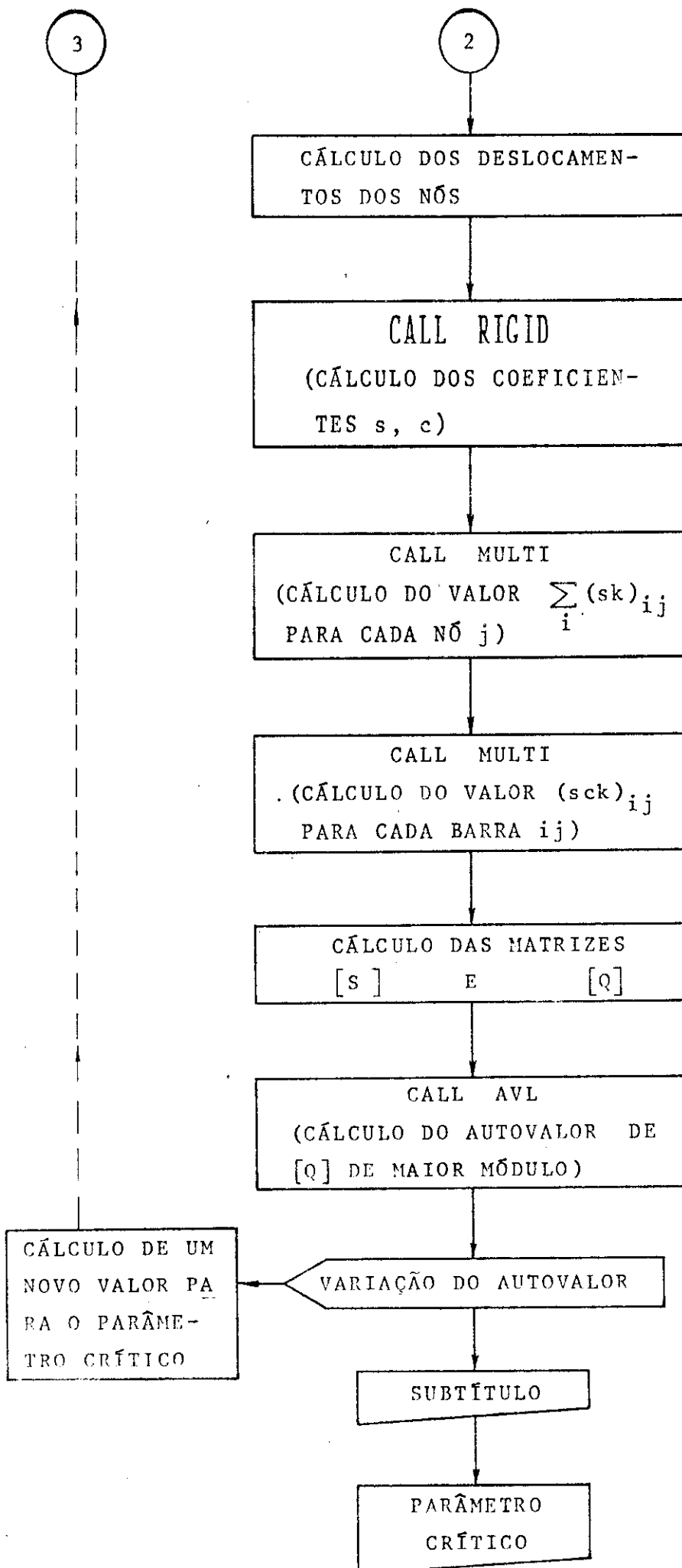
4. FLUXOGRAMAS

4.1. FLUXOGRAMA DO PROGRAMA SIMPLIFICADO PARA PÓRTICOS

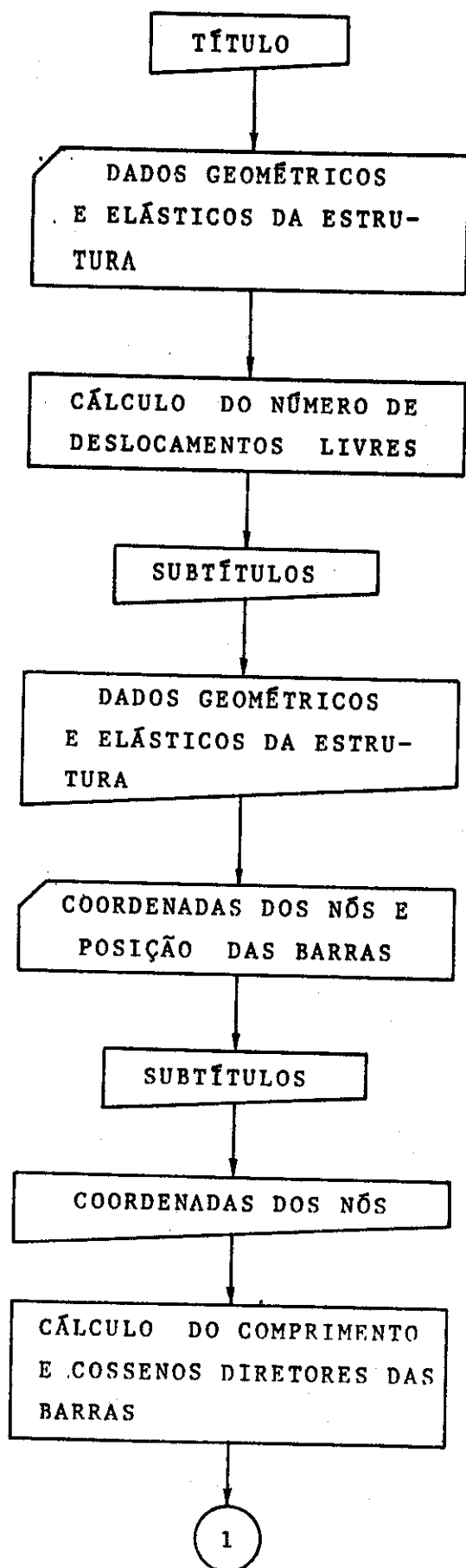
INDESLOCÁVEIS COM CARGAS NOS NÓS

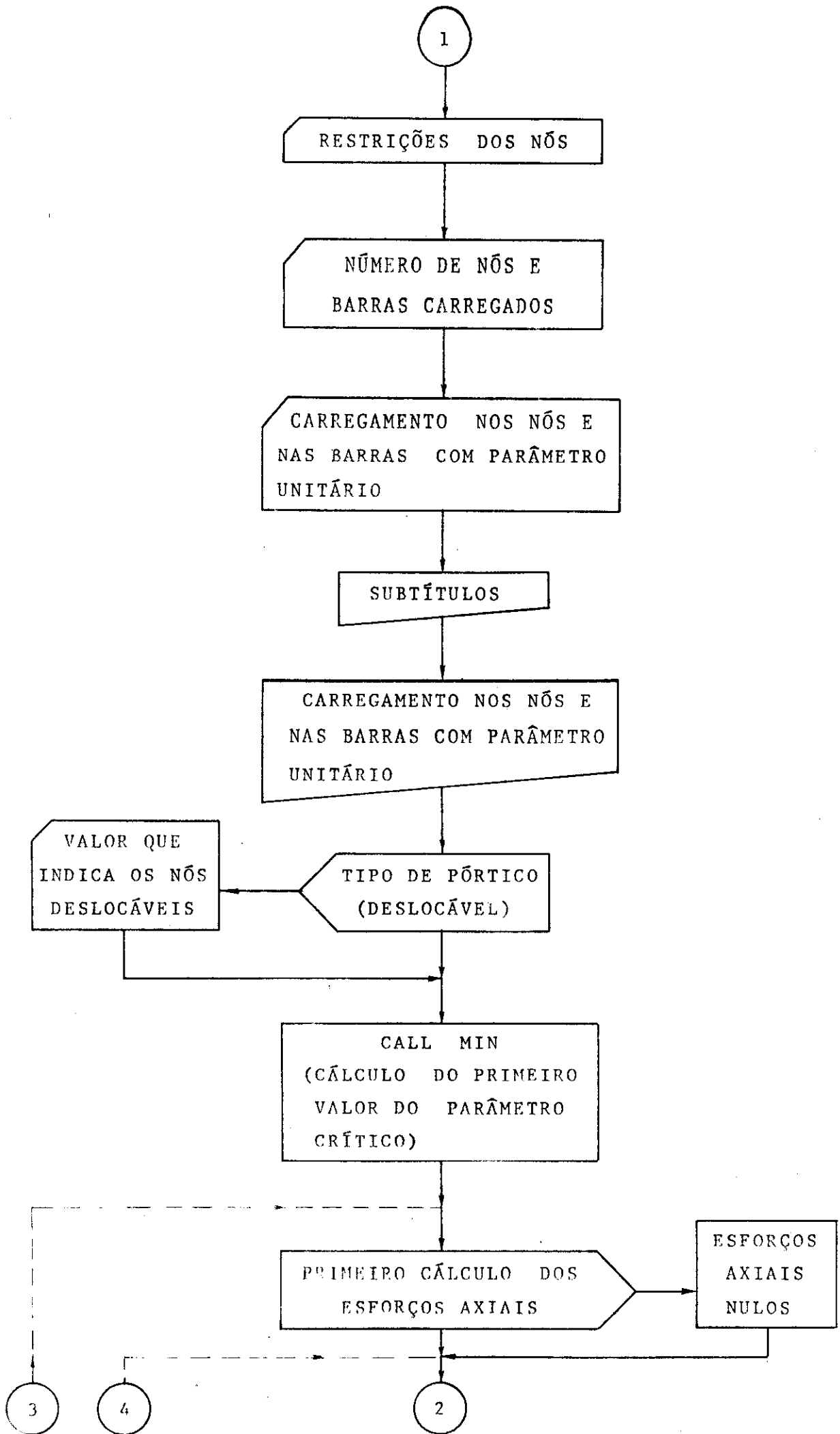


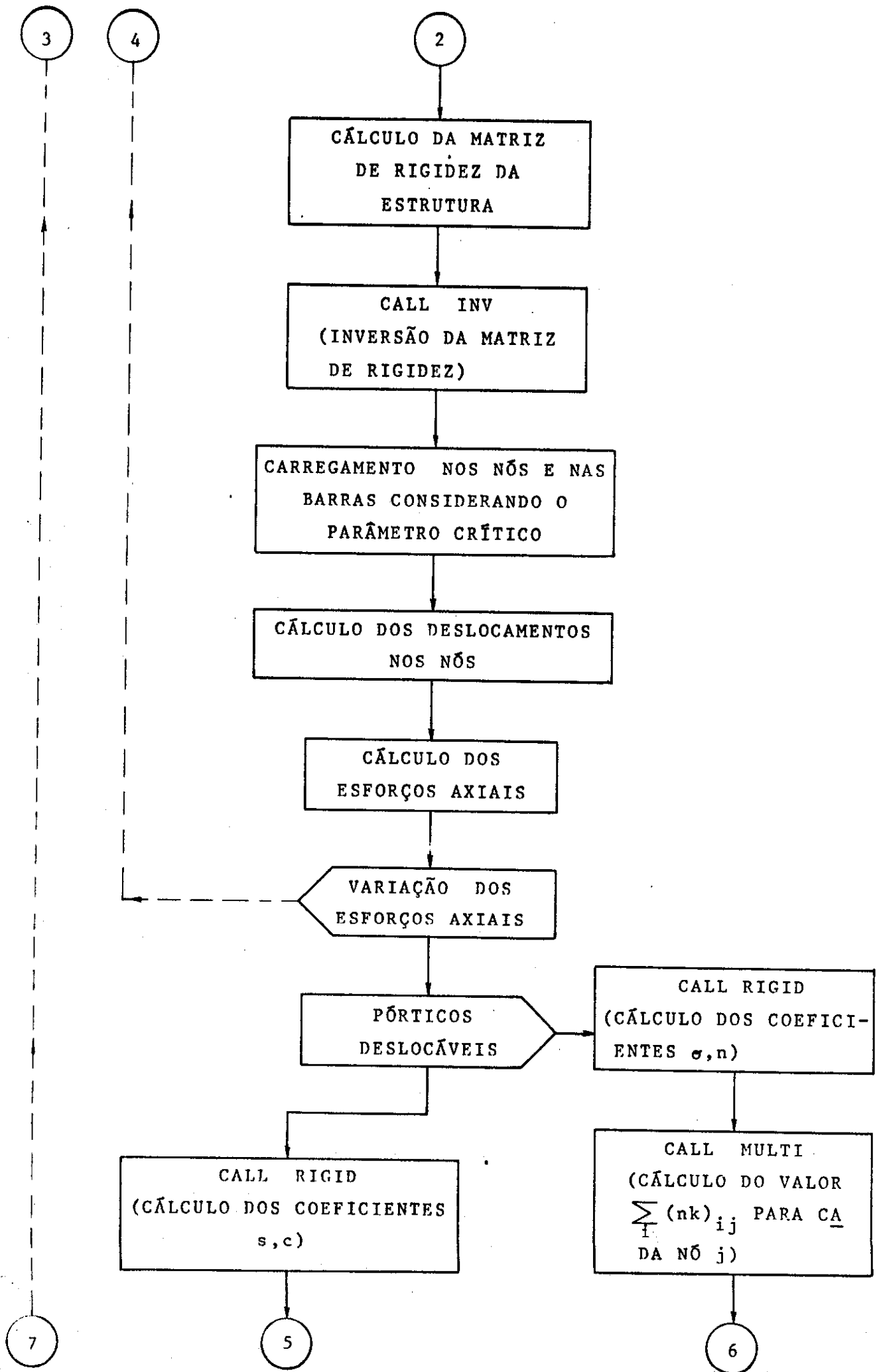


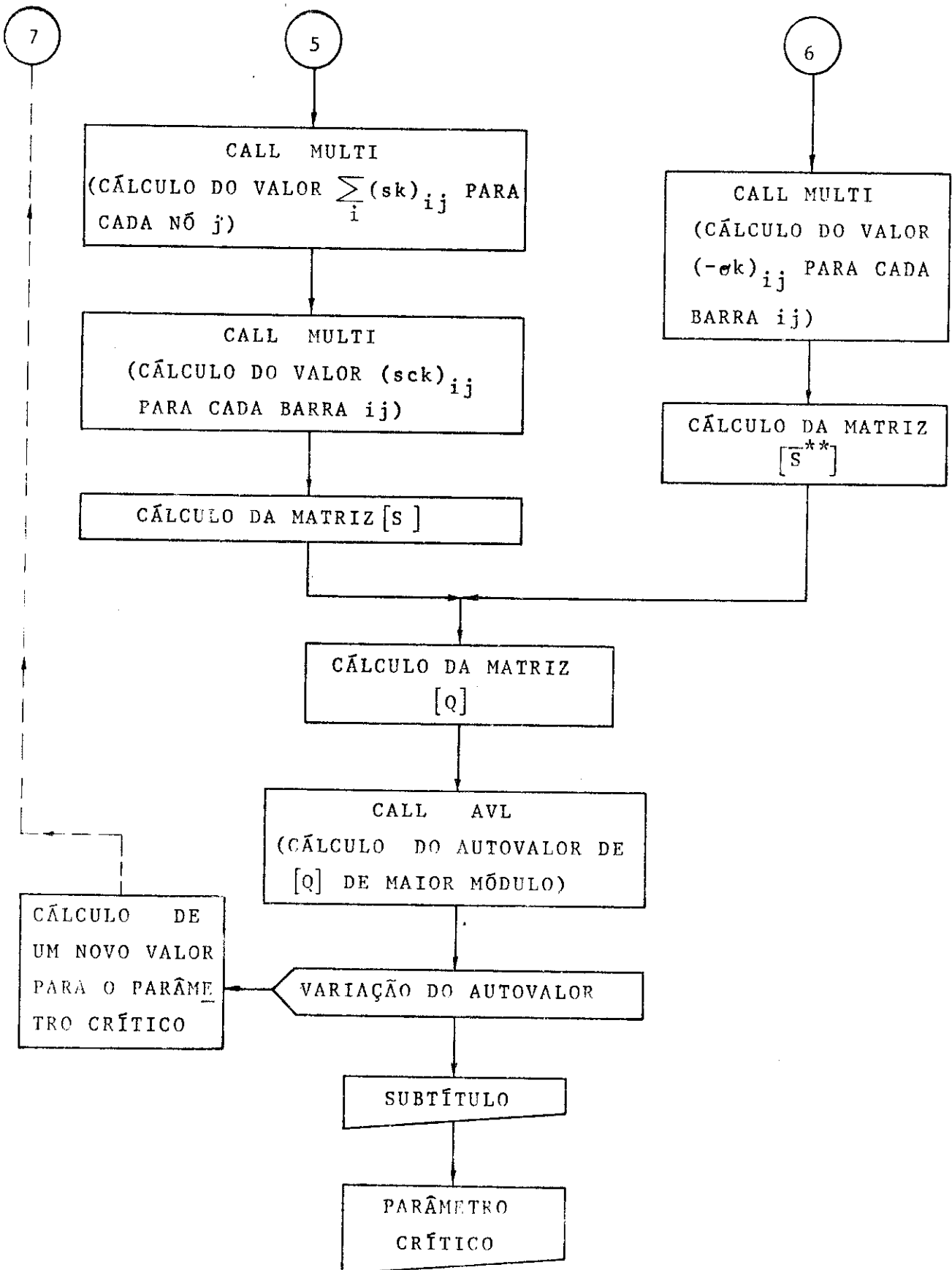


4.2. FLUXOGRAMA DO PROGRAMA GERAL PARA PÓRTICOS PLANOS









5. PROGRAMAS EM LINGUAGEM FORTRAN PARA O IBM-1130

5.1. PROGRAMA SIMPLIFICADO PARA TÓRNICOS INDESLOCÁVEIS COM CARGAS NOS NÓS

5.1.1. Notações

N	número de barras
NJ	número de nós
NR	número de deslocamentos impedidos
NRJ	número de nós com deslocamentos impedidos
E	módulo de elasticidade
X(I), Y(I)	coordenadas do nó I
JJ(I), JK(I)	nós que correspondem às extremidades, respectivamente, inicial e final da barra I
AX(I)	área da seção transversal da barra I
IZ(I)	momento de inércia da barra I em relação ao eixo Z
RL(I)	número inteiro que pode ser <u>0</u> (se o deslocamento I fôr livre) ou <u>1</u> (se o deslocamento I fôr impedido)
NLJ	número de nós carregados
AF(I)	carga na direção do deslocamento I, com parâmetro unitário

5.1.2. Cartões de entrada

5.1.2.1. Conjunto (a)

H,NJ,NR,NRJ,E 1 cartão

5.1.2.2. Conjunto (b)

K,X(K),Y(K) NJ cartões

5.1.2.3. Conjunto (c)

J,JJ(J),JK(J),AX(J),IZ(J) M cartões

5.1.2.4. Conjunto (d)

K,PL(2*K-1),RL(2*K) NRJ cartões

5.1.2.5. Conjunto (e)

NLJ 1 cartão

5.1.2.6. Conjunto (f)

K,AF(2*K-1),AF(2*K) NLJ cartões

Obs.: Os formatos de entrada são I10 e F10.0, respectivamente, para os números inteiros e reais.

5.1.3. Listagem

```

// JOB T
LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL   PHY DRIVE
0000        0016       0016         0000

V2 M09      ACTUAL 32K  CONFIG 32K

*EQUAT(PRNTZ, PRNZ)

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE RIGID(RATIO,N,S,C)
CALCULO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DE UMA BARRA EM FUNCAO DO
ESFORCO AXIAL
DIMENSION RATIO(NJ,NJ),C(NJ,NJ),S(NJ,NJ)
DIMENSION RATIO(20,20),C(20,20),S(20,20)
PI=3.1416
DO 500 I=1,N
DO 500 J=1,N
IF(I-J)501,500,501
501 IF(RATIO(I,J))502,503,504
502 AXMI=(PI/2.)*SQRT(-RATIO(I,J))
XI=2*AXMI
ATAN=SQRT(TANH(XI)**2-1.)
SENH=1./ATAN
COSH=TANH(XI)/ATAN
ACOTA=1./TANH(XI)
C(I,J)=(XI-SENH)/(SENH-XI*COSH)
S(I,J)=(XI**2)/(XI*ACOTA-1.-C(I,J))+C(I,J)*XI/SENH)
GO TO 500
503 S(I,J)=4.
C(I,J)=0.5
GO TO 500

```

```
504 XMI=(PI/2.)*SORT(RATIO(I,J))
    TAN=SIN(XMI)/COS(XMI)
    COTAN=COS(2.*XMI)/SIN(2.*XMI)
    S(I,J)=((1.-2.*XMI*COTAN)/(TAN-XMI))*XMI
    C(I,J)=(2.*XMI-SIN(2.*XMI))/(SIN(2.*XMI))-2.*XMI*COS(2.*XMI))
500 CONTINUE
    RETURN
    END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR RIGID 38 PROGRAM 358
COMMON 0 VARIABLES

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0032 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA RIGID
CART ID 0016 DB ADDR 3EDC DB CNT 001B

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
  SUBROUTINE INV(A,N)
  INVERSAO DE UMA MATRIZ
  C    DIMENSION A(2*NJ,2*NJ-3)
  C    DIMENSION A(40,37)
      IF(N-1)8,9,8
  9    A(1,1)=1./A(1,1)
      GO TO 10
  8    DO 11 I=1,N
      AUX=A(I,I)
      A(I,I)=1.
      DO 12 J=1,N
```

```
12 A(I,J)=A(I,J)/AUX
DO 13 K=1,N
IF(I-K)14,13,14
14 AUX=A(K,I)
A(K,I)=0.
DO 15 M=1,N
A(K,M)=A(K,M)-AUX*A(I,M)
15 CONTINUE
13 CONTINUE
11 CONTINUE
10 RETURN
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR INV
COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 174

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000D (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA INV
CART ID 0016 DB ADDR 3EF7 DB CNT 000C

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE MULTI(N,A,B,D)
C MULTIPLICACAO DOS ELEMENTOS DE DUAS MATRIZES TAL QUE
C D(I,J)=A(I,J)*B(I,J)
C DIMENSION A(NJ,NJ),B(NJ,NJ),D(NJ,NJ)
DIMENSION A(20,20),B(20,20),D(20,20)
DO 600 I=1,N

```

DO 600 J=1,N
600 D(I,J)=A(I,J)*B(I,J)
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR MULTI
COMMON 0 VARIABLES 4 PROGRAM 54

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0005 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*STORE WS UA MULTI
CART ID 0016 DB ADDR 3F03 DB CNT 0005

```

// FOR

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE MULT(A,B,C,N)
C MULTIPLICACAO DE DUAS MATRIZES TAL QUE C=A*B
C DIMENSION A(NJ,NJ),B(NJ,NJ),C(NJ,NJ)
DIMENSION A(20,20),B(20,20),C(20,20)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
SOMA=0.
DO 12 K=1,N
12 SOMA=SOMA+A(I,K)*B(K,J)
10 C(I,J)=SOMA
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR MULT
COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 98

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000B (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS. UA MULT
CART ID 0016 DB ADDR 3F08 DB CNT 0007

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS

C SUBROUTINE AVL(N,D,A)
C CALCULO DO AUTOVALOR DE MAIOR MODULO DE UMA MATRIZ QUALQUER
C DIMENSION A(NJ,NJ),B(NJ,NJ),C(NJ,NJ)
C DIMENSION A(20,20),B(20,20),C(20,20)

DO 2 I=1,N

DO 2 J=1,N

2 C(I,J)=A(I,J)

400 CALL MULT(C,A,B,N)

D=B(1,1)/A(1,1)

DO 30 I=1,N

DO 30 J=1,N

IF(I-1)31,32,31

32 IF(J-1)31,30,31

31 P=B(I,J)/A(I,J)

33 IF(ABS(ABS(P)-ABS(D))>.1)30,30,33

DO 80 I=1,N

DO 80 J=1,N

IF(ABS(B(I,J))-10000000.)80,21,21

80 CONTINUE

GO TO 70

21 DO 90 I=1,N

DO 90 J=1,N

```

90 A(I,J)=B(I,J)/100000000.
70 DO 20 K=1,N
DO 20 L=1,N
20 A(K,L)=B(K,L)
GO TO 400
30 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR AVL
COMMON 0 VARIABLES 1612 PROGRAM 280

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0651 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA AVL
CART ID 0016 DB ADDR 3FOF DB CNT 0012

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS

```

C SUBROUTINE MIN(N,A,B)
C CALCULO DO MENOR VALOR EM MODULO, DADO UM CONJUNTO DE NUMEROS
C DIMENSION B(M)
C DIMENSION B(40)
A=2.**38
DO 10 I=1,N
IF(A-ABS(B(I)))10,10,20
20 A=ABS(B(I))
10 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

COPE REQUIREMENTS FOR MIN
COMMON 0 VARIABLES 2 PROGRAM 72

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0006 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA MIN
CART ID 0016 DB ADDR 3F21 DB CNT 0006

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*IOCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)

*ONE WORD INTEGERS

```

REAL L(40),KD(20,20),IZ(40)
INTEGER RL(40),CRL(40)
DIMENSION X(20),Y(20),JJ(40),JK(40),AX(40),CX(40),CY(40),SMD(4,4),
IA(40),AC(40),D(40),S(40,37),COMP(20,20),CLE(20,20),AL(20,20),SA(20
2,20),C(20,20),R(20,20),EKI(20,20),SK(20,20),SC(20,20),SKC(20,20),Q
3(20,20),AF(40),EULER(40)
REAL L(M),KD(NJ,NJ),IZ(M)
INTEGER RL(2*NJ),CRL(2*NJ)
DIMENSION X(NJ),Y(NJ),JJ(M),JK(M),AX(M),CX(M),CY(M),SMD(4,4),
A(2*NJ),AC(2*NJ),D(2*NJ),S(2*NJ,2*NJ-3),COMP(NJ,NJ),CLE(NJ,NJ),
AL(NJ,NJ),SA(NJ,NJ),C(NJ,NJ),R(NJ,NJ),EKI(NJ,NJ),SK(NJ,NJ),
SC(NJ,NJ),SKC(NJ,NJ),Q(NJ,NJ),AF(2*NJ),EULER(M)
WRITE(3,1)

```

```

1 FORMAT(20X,33('*'),/,26X,'ANALISE DA INSTABILIDADE DE',/,20X,'PORT
ICOS PLANOS INDESLOCAVEIS COM',/,29X,'CARGAS APLICADAS NOS NOS',/,
220X,33('*'),///,1X,'DADOS DA ESTRUTURA',/)
PI=3.1416

```

```

C ENTRADA DOS DADOS GEOMETRICOS E ELASTICOS DA ESTRUTURA
READ(2,2)M,NJ,NR,NRJ,E

```

```
2 FORMAT(4I10,F10.0)
  N=2*NJ-NR
  WRITE(3,3)M,NJ,NRJ,NR,N,E
  3 FORMAT(1X,'NUMERO DE BARRAS',I56,/,1X,'NUMERO DE NOS',I59,/,1X,'NU
  IMERO DE NOS COM DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS',I31,/,1X,'NUMERO DE DESLO
  2CAMENTOS IMPEDIDOS',I39,/,1X,'NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES',I42,
  3/,1X,'MODULO DE ELASTICIDADE',F50.2,/,)
  C ENTRADA DAS COORDENADAS DOS NOS E POSICAO DAS BARRAS
  WRITE(3,4)
  4 FORMAT(1X,'COORDENADAS DOS NOS',/,1X,'NO',9X,'X',8X,'Y')
  DO 5 J=1,NJ
  READ(2,6)K,X(K),Y(K)
  6 FORMAT(I10,2F10.0)
  5 WRITE(3,7)K,X(K),Y(K)
  7 FORMAT(1X,I2,F11.1,F9.1)
  DO 9 I=1,M
  READ(2,10)J,JJ(J),JK(J),AX(J),IZ(J)
  10 FORMAT(3I10,2F10.0)
  JJI=JJ(J)
  JK1=JK(J)
  XCL=X(JK1)-X(JJI)
  YCL=Y(JK1)-Y(JJI)
  L(J)=SQRT(XCL**2+YCL**2)
  CX(J)=XCL/L(J)
  CY(J)=YCL/L(J)
  9 CONTINUE
  NJ1=2*NJ
  DO 1000 IL=1,NJ1
  1000 RL(IL)=0
  DO 13 J=1,NRJ
  13 READ(2,14)K,RL(2*K-1),RL(2*K)
  14 FORMAT(3I10)
  CRL(1)=RL(1)
  DO 16 K=2,NJ1
  16 CRL(K)=CRL(K-1)+RL(K)
  C CALCULO E INVERSAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA, SUPONDO A UMA
  C TRELICA
  DO 570 I=1,NJ1
```



```
DO 570 J=1,N
570 S(I,J)=0.
DO 17 I=1,M
  J1=2*JJ(I)-1
  J2=2*JJ(I)
  K1=2*JK(I)-1
  K2=2*JK(I)
  SCM=(E*AX(I))/L(I)
  IF(RL(J1))18,19,18
18 J1=N+CRL(J1)
   GO TO 20
19 J1=J1-CRL(J1)
20 IF(RL(J2))21,22,21
21 J2=N+CRL(J2)
   GO TO 23
22 J2=J2-CRL(J2)
23 IF(RL(K1))24,25,24
24 K1=N+CRL(K1)
   GO TO 26
25 K1=K1-CRL(K1)
26 IF(RL(K2))27,28,27
27 K2=N+CRL(K2)
   GO TO 29
28 K2=K2-CRL(K2)
29 SMD(1,1)=SCM*CX(I)**2
  SMD(1,2)=SCM*CX(I)*CY(I)
  SMD(1,3)=-SCM*CX(I)**2
  SMD(1,4)=-SCM*CX(I)*CY(I)
  SMD(2,2)=SCM*CY(I)**2
  SMD(2,3)=-SCM*CX(I)*CY(I)
  SMD(2,4)=-SCM*CY(I)**2
  SMD(3,3)=SCM*CX(I)**2
  SMD(3,4)=SCM*CX(I)*CY(I)
  SMD(4,4)=SCM*CY(I)**2
DO 30 II=1,4
DO 30 J=1,4
IF(II-J)31,30,30
```

```
31 SMD(J,II)=SMD(II,J)
30 CONTINUE
   JJ1=JJ(I)
   JK1=JK(I)
   IF(RL(2*JJ1-1))33,32,33
32 S(J1,J1)=S(J1,J1)+SMD(1,1)
   S(J2,J1)=S(J2,J1)+SMD(2,1)
   S(K1,J1)=SMD(3,1)
   S(K2,J1)=SMD(4,1)
33 IF(RL(2*JJ1))35,34,35
34 S(J1,J2)=S(J1,J2)+SMD(1,2)
   S(J2,J2)=S(J2,J2)+SMD(2,2)
   S(K1,J2)=SMD(3,2)
   S(K2,J2)=SMD(4,2)
35 IF(RL(2*JK1-1))37,36,37
36 S(J1,K1)=SMD(1,3)
   S(J2,K1)=SMD(2,3)
   S(K1,K1)=S(K1,K1)+SMD(3,3)
   S(K2,K1)=S(K2,K1)+SMD(4,3)
37 IF(RL(2*JK1))17,38,17
38 S(J1,K2)=SMD(1,4)
   S(J2,K2)=SMD(2,4)
   S(K1,K2)=S(K1,K2)+SMD(3,4)
   S(K2,K2)=S(K2,K2)+SMD(4,4)
17 CONTINUE
CALL INV(S,N)
ENTRADA DO CARREGAMENTO NOS NOS COM PARAMETRO UNITARIO
READ(2,42)NLJ
42 FORMAT(I10)
DO 44 IL=1,NJ1
44 AF(IL)=0.
WRITE(3,47)
47 FORMAT(1X,/,1X,'ACOES APLICADAS NOS NOS COM PARAMETRO UNITARIO',/,
11X,'NO',8X,'ACAO EM X',11X,'ACAO EM Y')
DO 48 J=1,NLJ
READ(2,49)K,AF(2*K-1),AF(2*K)
49 FORMAT(I10,2F10.0)
48 WRITE(3,50)K,AF(2*K-1),AF(2*K)
```

C

```
50 FORMAT(IX,I2,F15.1,F20.1)
C   CALCULO DA CARGA CRITICA
DO 7000 I=1,N
7000 EULER(I)=(PI**2*IZ(I)*E)/(L(I)**2)
W=0
CALL MIN(M,DELTW,EULER)
8000 W=W+DELTW
DO 552 IL=1,NJ1
552 A(IL)=AF(IL)*W
DO 58 J=1,NJ1
IF(RL(J))59,60,59
60 K=J-CRL(J)
GO TO 61
59 K=N+CRL(J)
61 AC(K)=A(J)
58 CONTINUE
DO 62 J=1,N
D(J)=0.
DO 62 K=1,N
62 D(J)=D(J)+S(J,K)*AC(K)
J=N+1
K2=NJ1+1
DO 64 JEE=1,NJ1
K2=K2-2
JE=JEE+K2
IF(RL(JE))65,66,65
66 J=J-1
D(JE)=D(J)
GO TO 64
65 D(JE)=0.
64 CONTINUE
DO 2001 I=1,NJ
DO 2001 J=1,NJ
COMP(I,J)=0.
AL(I,J)=0.
EKI(I,J)=0.
2001 CLE(I,J)=0.
DO 2002 I=1,N
```

```
J1=2*JJ(I)-1
J2=2*JJ(I)
K1=2*JK(I)-1
K2=2*JK(I)
JP=JJ(I)
KP=JK(I)
SCM=(E*AX(I))/L(I)
COMP(JP,KP)=L(I)
EKI(JP,KP)=(E*IZ(I))/L(I)
CLE(JP,KP)=(PI**2*IZ(I)*E)/(L(I)**2)
AL(JP,KP)=SCM*((D(J1)-D(K1))*CX(I)+(D(J2)-D(K2))*CY(I))
2002 CONTINUE
DO 2011 I=1,NJ
DO 2011 J=1,NJ
SA(I,J)=0.
C(I,J)=0.
2011 R(I,J)=0.
DO 2012 I=1,NJ
DO 2012 J=1,NJ
IF(I-J)2013,2012,2013
IF(CLE(I,J))2120,2012,2120
2120 R(I,J)=AL(I,J)/CLE(I,J)
2012 CONTINUE
CALL RIGID(R,NJ,SA,C)
CALL MULTI(NJ,SA,EKI,SK)
DO 1015 I=1,NJ
DO 1015 J=1,NJ
1015 SK(J,I)=SK(I,J)
CALL MULTI(NJ,SA,C,SC)
CALL MULTI(NJ,SC,EKI,SKC)
DO 2210 I=1,NJ
DO 2210 J=1,NJ
2210 SKC(J,I)=SKC(I,J)
DO 1016 I=1,NJ
DO 1016 J=1,NJ
IF(I-J)1017,1018,1017
1018 SOMA=0.
```

```
DO 1019 NA=1,NJ
1019 SOMA=SOMA+SK(I,NA)
   KD(I,J)=SOMA
   IF(KD(I,J))8003,8003,1016
1017 KD(I,J)=SKC(I,J)
1016 CONTINUE
DO 1020 I=1,NJ
   AUX=KD(I,I)
DO 1020 J=1,NJ
   IF(I-J)1021,1022,1021
1022 Q(I,J)=-1.
   GO TO 1020
1021 Q(J,I)=KD(J,I)/AUX
1020 CONTINUE
CALL AVL(NJ,AUTOV,Q)
IF(ABS(AUTOV)-1.90)8000,8001,8001
8001 IF(ABS(AUTOV)-2.10)8002,8002,8003
8003 W=W-DELTW
   DELTW=DELTW/2.
   GO TO 8000
8002 WRITE(3,8004)W
8004 FORMAT(IX,///,1X,'O PARAMETRO CRITICO VALE',F48.2,/,)
CALL EXIT
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 13690 PROGRAM 2410

END OF COMPILATION

// XEQ

5.2. PROGRAMA GERAL PARA PÓRTICOS PLANOS

5.2.1. Notações

N número de barras
NJ número de nós
NR número de deslocamentos impedidos
NRJ número de nós com deslocamentos impedidos
TIPO número inteiro que pode ser <u>0</u> (pórtico deslocável) ou <u>1</u> (pórtico ind deslocável)
KONST número de rotações livres
E módulo de elasticidade
X(I),Y(I) coordenadas do nó I
JJ(I),JK(I) nós que correspondem às extremidades, respectivamente, inicial e final da barra I
AX(I) área da secção transversal da barra I
IZ(I) momento de inércia da barra I em relação ao eixo Z
RL(I) número inteiro que pode ser <u>0</u> (se o deslocamento I fôr livre) ou <u>1</u> (se o deslocamento I fôr impedido)
NLJ número de nós carregados
NLM número de barras carregadas
AF(I) carga concentrada, com parâmetro unitário, na direção da coordenada I
AMPLI(I,J) esforço de engastamento perfeito, com parâmetro unitário, na barra I na direção da coordenada J

IH(I,J) número inteiro que pode ser 0 (se a barra IJ fôr um pilar) ou 1 (idem, uma viga)

NB número de andares

5.2.2. Cartões de entrada

5.2.2.1. Conjunto (a)

M,NJ,NR,NRJ,TIPO,KONST,NB,E 1 cartão

5.2.2.2. Conjunto (b)

K,X(K),Y(K) NJ cartões

5.2.2.3. Conjunto (c)

K,JJ(K),JK(K),AX(K),IZ(K) M cartões

5.2.2.4. Conjunto (d)

K,RL(3*K-2),RL(3*K-1),RL(3*K) NRJ cartões

5.2.2.5. Conjunto (e)

NLJ,NLM 1 cartão

5.2.2.6. Conjunto (f)

K,AF(3*K-2),AF(3*K-1),AF(3*K) NLJ cartões

5.2.2.7. Conjunto (g)

K,AMLI(K,1),AMLI(K,2),AMLI(K,3),AMLI(K,4),
AMLI(K,5),AMLI(K,6) NLM cartões

5.2.2.8. Conjunto (h)

IH(JJ(I),JK(I)),IH(JK(I),JJ(I)) M cartões

5.2.3. Listagem

```

// JOB T
LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
0000        0016       0016        0000

V2 M09   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

*EQUAT(PRNTZ, PRNZ)

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE MULTI(N,A,B,D)
C  MULTIPLICACAO DOS ELEMENTOS DE DUAS MATRIZES TAL QUE
C  D(I,J)=A(I,J)*B(I,J)
C  DIMENSION A(NJ,NJ),B(NJ,NJ),D(NJ,NJ)
C  DIMENSION A(18,18),B(18,18),D(18,18)
DO 600 I=1,N
DO 600 J=1,N
600 D(I,J)=A(I,J)*B(I,J)
RETURN
END

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR MULTI
COMMON      0  VARIABLES      4  PROGRAM      54

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0005 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```


*STORE MS UA MULTI
CART ID 0016 DB ADDR 4140 DB CNT 0005

```
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
  SUBROUTINE INV(A,N)
  C  INVERSAO DE UMA MATRIZ
  C  DIMENSION A(3*NJ,3*NJ)
  DIMENSION A(54,54)
  IF(N-1)8,9,8
  9 A(1,1)=1./A(1,1)
  GO TO 10
  8 DO 11 I=1,N
  AUX=A(I,I)
  A(I,I)=1.
  DO 12 J=1,N
  12 A(I,J)=A(I,J)/AUX
  DO 13 K=1,N
  IE(I-K)14,13,14
  14 AUX=A(K,I)
  A(K,I)=0.
  DO 15 M=1,N
  A(K,M)=A(K,M)-AUX*A(I,M)
  15 CONTINUE
  13 CONTINUE
  11 CONTINUE
  10 RETURN
  END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR INV
COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 174

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000D (HEX)
END OF COMPILATION

```
// DUF
*STORE WS CA INV
CART ID 0016 DB ADDR 4145 DB CNT 000C

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C SUBROUTINE RIG(RELAC,S,C,AM,AN,O)
C CALCULO DOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DE UMA BARRA EM FUNCAO DO
C ESFORCO AXIAL
PI=3.1416
IF(RELAC)502,503,504
502 AXMI=(PI/2.)*SORT(-RELAC)
XI=2*AXMI
ATAN=SQRT(TANH(XI)**2-1.)
SENH=1./ATAN
COSH=TANH(XI)/ATAN
ACOTA=1./TANH(XI)
C=(XI-SENH)/(SENH-XI*COSH)
S=(XI**2)/(XI*ACOTA-1.-C+(C*XI/SENH))
AM=2.*S*(1.+C)/(2.*S*(1.+C)-PI**2*RELAC)
AN=S*(1.-AM*(1.+C)/2.)
O=S*(-C+AM*(1.+C)/2.)
GO TO 600
503 S=4.
C=0.5
AM=1.
AN=1.
O=1.
GO TO 600
504 XMI=(PI/2.)*SQRT(RELAC)
TAN=SIN(XMI)/COS(XMI)
COTAN=COS(2.*XMI)/SIN(2.*XMI)
S=((1.-2.*XMI*COTAN)/(TAN-XMI))*XMI
C=(2.*XMI-SIN(2.*XMI))/(SIN(2.*XMI)-2.*XMI*COS(2.*XMI))
AM=2.*S*(1.+C)/(2.*S*(1.+C)-PI**2*RELAC)
AN=S*(1.-AM*(1.+C)/2.)
```

```

O=S*(-C+AM*(1.+C)/2.)
600 RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

```

CORE REQUIREMENTS FOR RIC
COMMON      0  VARIABLES      34  PROGRAM      472

```

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 002D (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*STORE      WS  UA  RIG
CART ID 0016  DB ADDR 4151  DB CNT 0026

```

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS

```

C  SUBROUTINE MULT(A,B,C,N)
C  MULTIPLICACAO DE DUAS MATRIZES TAL QUE C=A*B
C  DIMENSION A(NJ,NJ),B(NJ,NJ),C(NJ,NJ)
C  DIMENSION A(18,18),B(18,18),C(18,18)
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,N
SOMA=0.
DO 12 K=1,N
12 SOMA=SOMA+A(I,K)*B(K,J)
10 C(I,J)=SOMA
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR MULT
COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 98

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 000B (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE MS UA MULT
CART ID 0016 DB ADDR 4177 DB CNT 0007

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM:
*ONE WORD INTEGERS:

C SUBROUTINE AVL(N,D,A)
C CALCULO DO AUTOVALOR DE MAIOR MODULO DE UMA MATRIZ QUALQUER

C DIMENSION A(NJ,NJ),B(NJ,NJ),C(NJ,NJ)
C DIMENSION A(18,18),B(18,18),C(18,18)

DO 2 I=1,N
DO 2 J=1,N

2 C(I,J)=A(I,J)

400 CALL MULT(C,A,B,N)

D=B(1,1)/A(1,1)

DO 30 I=1,N

DO 30 J=1,N

IF(I-1)31,32,31

32 IF(J-1)31,30,31

31 P=B(I,J)/A(I,J)

IF(ABS(ABS(P)-ABS(D))-0.1)30,30,33

33 DO 80 I=1,N

DO 80 J=1,N

IF(ABS(B(I,J))-10000000.)80,21,21

80 CONTINUE

GO TO 70

21 DO 90 I=1,N

DO 90 J=1,N

90 B(I,J)=B(I,J)/10000000.

```

70 DO 20 K=1,N
DO 20 L=1,N
20 A(K,L)=B(K,L)
GO TO 400
30 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR AVL
COMMON 0 VARIABLES 1308 PROGRAM 280

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0521 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

```

*STORE WS UA AVL
CART ID 0016 DB ADDR 417E DB CNT 0012

```

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE MIN(N,A,B)
C CALCULO DO MENOR VALOR EM MODULO DADO UM CONJUNTO DE NUMEROS
C DIMENSION B(M)
DIMENSION B(25)
A=2.**38
DO 10 I=1,N
IF(A-ABS(B(I)))10,10,20
20 A=ABS(B(I))
10 CONTINUE
RETURN
END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR MIN
COMMON 0 VARIABLES 2 PROGRAM 72

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0006 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA MIN
CART ID 0016 DB ADDR 4190 DB CNT 0006

// FOR

*LIST SOURCE PROGRAM

*IOCS(CARD,1132PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK,PLOTTER,1403PRINTER)

*ONE WORD INTEGERS

```

REAL L(25), IZ(25), KD(18, 18)
INTEGER RL(54), CRL(54), TIPO
DIMENSION X(18), Y(18), JJ(25), JK(25), AX(25), CX(25), CY(25), S(54, 54)
DIMENSION SMD(6, 6), A(54), AE(54), AML(25, 6), AC(54), D(54), AR(54)
DIMENSION AXIAL(25), EULER(25), COMP(18, 18), AL(18, 18), EKI(18, 18)
DIMENSION CLE(18, 18), SA(18, 18), C(18, 18), R(18, 18), SK(18, 18)
DIMENSION SC(18, 18), SKC(18, 18), Q(18, 18), AF(54), AMLI(25, 6), IH(18, 18
1), COND(18, 18)
EQUIVALENCE (COMP(1), S(1)), (AL(1), S(325)), (EKI(1), S(649))
EQUIVALENCE (CLE(1), S(973)), (SA(1), S(1297)), (C(1), S(1621))
EQUIVALENCE (R(1), S(1945)), (SK(1), S(2269)), (SC(1), S(2593))
REAL L(M), IZ(M), KD(NJ, NJ)
INTEGER RL(3*NJ), CRL(3*NJ), TIPO
DIMENSION X(NJ), Y(NJ), JJ(M), JK(M), AX(M), CX(M), CY(M), S(3*NJ, 3*NJ-3)
DIMENSION SMD(6, 6), A(3*NJ), AE(3*NJ), AML(M, 6), AC(3*NJ), D(3*NJ)
DIMENSION AR(3*NJ), AXIAL(M), EULER(M), COMP(NJ, NJ), AL(NJ, NJ)
DIMENSION EKI(NJ, NJ), CLE(NJ, NJ), SA(NJ, NJ), C(NJ, NJ), R(NJ, NJ)
DIMENSION SK(NJ, NJ), SC(NJ, NJ), SKC(NJ, NJ), Q(NJ, NJ), AF(3*NJ)
DIMENSION AMLI(M, 6), IH(NJ, NJ), COND(NJ, NJ)

```

```

WRITE(3,1)
1 FORMAT(15X,43('*')),/,15X,'ANALISE DA INSTABILIDADE DE PORTICOS PLA
INOS',/,15X,43('*'))///,1X,'DADOS DA ESTRUTURA',/,)
C ENTRADA DOS DADOS GEOMETRICOS E ELASTICOS DA ESTRUTURA
READ(2,2)M,NJ,NR,NRJ,TIPO,KONST,NB,E
2 FORMAT(7I10,F10.0)
N=3*NJ-NR
WRITE(3,3)M,NJ,NRJ,NR,N,E
3 FORMAT(1X,'NUMERO DE BARRAS',I56,/,1X,'NUMERO DE NOS',I59,/,1X,'NU
IMERO DE NOS COM DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS',I31,/,1X,'NUMERO DE DESLO
2CAMENTOS IMPEDIDOS',I39,/,1X,'NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES',I42,
3/,1X,'MODULO DE ELASTICIDADE',F50.2,/,)
WRITE(3,4)
4 FORMAT(1X,'COORDENADAS DOS NOS',/,1X,'NO',9X,'X',8X,'Y')
DO 5 J=1,NJ
C ENTRADA DAS COORDENADAS DOS NOS E POSICAO DAS BARRAS
READ(2,6)K,X(K),Y(K)
6 FORMAT(I10,2F10.0)
5 WRITE(3,7)K,X(K),Y(K)
7 FORMAT(1X,I2,F11.1,F9.1)
DO 9 I=1,M
READ(2,10)K,JK(K),JK(K),AX(K),IZ(K)
10 FORMAT(3I10,2F10.0)
JJ1=JJ(K)
JK1=JK(K)
XCL=X(JK1)-X(JJ1)
YCL=Y(JK1)-Y(JJ1)
L(K)=SQRT(XCL**2+YCL**2)
CX(K)=XCL/L(K)
CY(K)=YCL/L(K)
9 CONTINUE
PI=3.1416
DO 594 I=1,M
594 EULER(I)=(PI**2*E*IZ(I))/L(I)**2
NJ1=3*NJ
DO 923 J=1,NJ1
923 RL(J)=0
DO 13 J=1,NRJ

```

```
READ(2,14)K,RL(3*K-2),RL(3*K-1),RL(3*K)
14 FORMAT(4I10)
13 CONTINUE
CRL(1)=RL(1)
DO 16 K=2,NJ1
16 CRL(K)=CRL(K-1)+RL(K)
DO 7000 IL=1,NJ1
7000 AF(IL)=0.
DO 7001 IL=1,M
DO 7001 JL=1,6
7001 AMLI(IL,JL)=0.
C ENTRADA DO CARREGAMENTO NOS NOS E NAS BARRAS COM PARAMETRO UNITARIO
READ(2,65)NLJ,NLM
65 FORNAT(2I10)
IF(NLJ)69,70,69
69 WRITE(3,71)
71 FORMAT(1X,/,1X,'ACOES APLICADAS NOS NOS COM PARAMETRO UNITARIO',/,
11X,'NO',18X,'ACAO X',14X,'ACAO Y',14X,'ACAO Z',)
DO 72 J=1,NLJ
READ(2,73)K,AF(3*K-2),AF(3*K-1),AF(3*K)
73 FORMAT(I10,3F10.0)
72 WRITE(3,74)K,AF(3*K-2),AF(3*K-1),AF(3*K)
74 FORMAT(1X,I2,F24.2,F20.2,F20.2/)
70 IF(NLM)75,76,75
75 WRITE(3,77)
77 FORMAT(1X,/,1X,'ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO NAS EXTREMIDADES',/
1,1X,'DAS BARRAS COM PARAMETRO UNITARIO',/,1X,'BARRA',5X,'AMLI',6X,
2'AML2',6X,'AML3',6X,'AML4',6X,'AML5',6X,'AML6',)
DO 78 J=1,NLM
READ(2,79)K,AMLI(K,1),AMLI(K,2),AMLI(K,3),AMLI(K,4),AMLI(K,5),AMLI
1(K,6)
79 FORMAT(I10,6F10.0)
78 WRITE(3,80)K,AMLI(K,1),AMLI(K,2),AMLI(K,3),AMLI(K,4),AMLI(K,5),AML
1I(K,6)
80 FORMAT(1X,I3,F11.2,5F10.2/)
76 IF(TIPO)6230,6231,6230
6231 DO 6232 I=1,NJ
DO 6232 J=1,NJ
```



```
6232 IH(I,J)=0
DO 6233 I=1,M
JP=JJ(I)
KP=JK(I)
6233 READ(2,6234)IH(JP,KP),IH(KP,JP)
6234 FORMAT(2I10)
6230 W=0.
CALL MIN(N,DELTW,EULER)
8000 N=W+DELTW
KX=0
4000 IF(KX)4001,4002,4001
4002 DO 593 I=1,M
593 AXIAL(I)=0.
GO TO 4003
4001 DO 4004 I=1,M
J1=3*JJ(I)-2
J2=3*JJ(I)-1
K1=3*JK(I)-2
K2=3*JK(I)-1
SCM1=(E*AX(I))/L(I)
AML1=ANL(I,1)+SCM1*((D(J1)-D(K1))*CX(I)+(D(J2)-D(K2))*CY(I))
4004 AXIAL(I)=AML1
4003 DO 360 I=1,NJ1
DO 360 J=1,N
360 S(I,J)=0.
C CALCULO E INVERSAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ CONSIDERANDO OS ESFORCOS
C AXIAIS
DO 30 I=1,M
J1=3*JJ(I)-2
J2=3*JJ(I)-1
J3=3*JJ(I)
K1=3*JK(I)-2
K2=3*JK(I)-1
K3=3*JK(I)
RELAC=AXIAL(I)/EULER(I)
CALL RIG(RELAC,SP,B,AM,AN,O)
SCM1=(E*AX(I))/L(I)
SCM2=(SP*E*IZ(I))/L(I)
```

```
SCM3=SP*(1.+B)*E*IZ(I)/L(I)**2
SCM4=(2.*SP*(1.+B)*E*IZ(I))/(AM*L(I)**3)
IF(RL(J1))31,32,31
31 J1=N+CRL(J1)
GO TO 33
32 J1=J1-CRL(J1)
33 IF(RL(J2))34,35,34
34 J2=N+CRL(J2)
GO TO 36
35 J2=J2-CRL(J2)
36 IF(RL(J3))37,38,37
37 J3=N+CRL(J3)
GO TO 39
38 J3=J3-CRL(J3)
39 IF(RL(K1))40,41,40
40 K1=N+CRL(K1)
GO TO 42
41 K1=K1-CRL(K1)
42 IF(RL(K2))43,44,43
43 K2=N+CRL(K2)
GO TO 45
44 K2=K2-CRL(K2)
45 IF(RL(K3))46,47,46
46 K3=N+CRL(K3)
GO TO 48
47 K3=K3-CRL(K3)
48 SMD(1,1)=SCM1*CX(I)**2+SCM4*CY(I)**2
SMD(1,2)=(SCM1-SCM4)*CX(I)*CY(I)
SMD(1,3)=-SCM3*CY(I)
SMD(1,4)=-SMD(1,1)
SMD(1,5)=-SMD(1,2)
SMD(1,6)=SMD(1,3)
SMD(2,2)=SCM1*CY(I)**2+SCM4*CX(I)**2
SMD(2,3)=SCM3*CX(I)
SMD(2,4)=-SMD(1,2)
SMD(2,5)=-SMD(2,2)
SMD(2,6)=SMD(2,3)
SMD(3,3)=SCM2
```

```
SMD(3,4)=-SMD(1,3)
SMD(3,5)=-SMD(2,3)
SMD(3,6)=SCM2*B
SMD(4,4)=SMD(1,1)
SMD(4,5)=SMD(1,2)
SMD(4,6)=-SMD(1,3)
SMD(5,5)=SMD(2,2)
SMD(5,6)=-SMD(2,3)
SMD(6,6)=SCM2
DO 49 II=1,6
DO 49 J=1,6
IF(II-J)50,49,49
50 SMD(J,II)=SMD(II,J)
49 CONTINUE
JJ1=3*JJ(I)
JK1=3*JK(I)
IF(RL(JJ1-2))52,51,52
51 S(J1,J1)=S(J1,J1)+SMD(1,1)
S(J2,J1)=S(J2,J1)+SMD(2,1)
S(J3,J1)=S(J3,J1)+SMD(3,1)
S(K1,J1)=SMD(4,1)
S(K2,J1)=SMD(5,1)
S(K3,J1)=SMD(6,1)
52 IF(RL(JJ1-1))54,53,54
53 S(J1,J2)=S(J1,J2)+SMD(1,2)
S(J2,J2)=S(J2,J2)+SMD(2,2)
S(J3,J2)=S(J3,J2)+SMD(3,2)
S(K1,J2)=SMD(4,2)
S(K2,J2)=SMD(5,2)
S(K3,J2)=SMD(6,2)
54 IF(RL(JJ1))56,55,56
55 S(J1,J3)=S(J1,J3)+SMD(1,3)
S(J2,J3)=S(J2,J3)+SMD(2,3)
S(J3,J3)=S(J3,J3)+SMD(3,3)
S(K1,J3)=SMD(4,3)
S(K2,J3)=SMD(5,3)
S(K3,J3)=SMD(6,3)
56 IF(RL(JK1-2))58,57,58
```

```
57 S(J1,K1)=SMD(1,4)
   S(J2,K1)=SMD(2,4)
   S(J3,K1)=SMD(3,4)
   S(K1,K1)=S(K1,K1)+SMD(4,4)
   S(K2,K1)=S(K2,K1)+SMD(5,4)
   S(K3,K1)=S(K3,K1)+SMD(6,4)
58 IF(RL(JK1-1))60,59,60
59 S(J1,K2)=SMD(1,5)
   S(J2,K2)=SMD(2,5)
   S(J3,K2)=SMD(3,5)
   S(K1,K2)=S(K1,K2)+SMD(4,5)
   S(K2,K2)=S(K2,K2)+SMD(5,5)
   S(K3,K2)=S(K3,K2)+SMD(6,5)
60 IF(RL(JK1))30,61,30
61 S(J1,K3)=SMD(1,6)
   S(J2,K3)=SMD(2,6)
   S(J3,K3)=SMD(3,6)
   S(K1,K3)=S(K1,K3)+SMD(4,6)
   S(K2,K3)=S(K2,K3)+SMD(5,6)
   S(K3,K3)=S(K3,K3)+SMD(6,6)
30 CONTINUE
   DO 6201 I=1,N
   DO 6201 J=1,N
   IF(I-J)6201,9000,6201
9000 IF(S(I,J))8003,8003,6201
6201 CONTINUE
   CALL INV(S,N)
   CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NOS NOS
   DO 67 IL=1,NJ1
67 AE(IL)=0.
   DO 7002 IL=1,NJ1
7002 A(IL)=W*AF(IL)
   DO 7003 IL=1,M
   DO 7003 JL=1,6
7003 AML(IL,JL)=W*AMLI(IL,JL)
   DO 81 I=1,M
   JJ1=3*JJ(I)
   JK1=3*JK(I)
```

```
AE(JJ1-2)=AE(JJ1-2)-AML(I,1)*CX(I)+AML(I,2)*CY(I)
AE(JJ1-1)=AE(JJ1-1)-AML(I,1)*CY(I)-AML(I,2)*CX(I)
AE(JJ1)=AE(JJ1)-AML(I,3)
AE(JK1-2)=AE(JK1-2)-AML(I,4)*CX(I)+AML(I,5)*CY(I)
AE(JK1-1)=AE(JK1-1)-AML(I,4)*CY(I)-AML(I,5)*CX(I)
81 AE(JK1)=AE(JK1)-AML(I,6)
   NNR=N+NR
DO 82 J=1,NNR
IF(RL(J))83,84,83
84 K=J-CRL(J)
   GO TO 85
83 K=N+CRL(J)
85 AC(K)=A(J)+AE(J)
82 CONTINUE
DO 86 J=1,N
D(J)=0.
DO 86 K=1,N
D(J)=D(J)+S(J,K)*AC(K)
N1=N+1
DO 87 K=N1,NNR
AR(K)=-AC(K)
DO 87 J=1,N
87 AR(K)=AR(K)+S(K,J)*D(J)
   J=N+1
   K2=NJ1+1
DO 88 JEE=1,NJ1
K2=K2-2
JE=JEE+K2
IF(RL(JE))89,90,89
90 J=J-1
D(JE)=D(J)
   GO TO 88
89 D(JE)=0.
88 CONTINUE
   K=N
DO 91 KE=1,NNR
IF(RL(KE)-1)92,93,92
93 K=K+1
```

```
AR(KP)=AR(K)
GO TO 91
92 JP(KE)=0.
91 CONTINUE
DO 4005 I=1,
APX=AXIAL(I)
J1=3*JJ(I)-2
J2=3*JJ(I)-1
K1=3*JK(I)-2
K2=3*JK(I)-1
SCN1=(F*AX(I))/L(I)
ANL1=AML(I,1)+SCN1*((D(J1)-D(K1))*CX(I)+(D(J2)-D(K2))*CY(I))
AXIAL(I)=ANL1
IF(TIPO)25200,4005,25200
25200 PORCE=ABS(AXIAL(I)/100.)
IF(ABS(AXIAL(I)-AUX)-PORCE)4005,4005,4006
4006 KX=KX+1
GO TO 4000
4005 CONTINUE
C CALCULO DO PARAMETRO CRITICO
DO 5000 I=1,NJ
DO 5000 J=1,NJ
COMP(I,J)=0.
AL(I,J)=0.
EKI(I,J)=0.
5000 CLE(I,J)=0.
DO 5001 I=1,M
JP=JJ(I)
KP=JK(I)
COMP(JP,KP)=L(I)
EKI(JP,KP)=(E*IZ(I))/L(I)
CLE(JP,KP)=EULER(I)
AL(JP,KP)=AXIAL(I)
5001 CONTINUE
DO 5011 I=1,NJ
DO 5011 J=1,NJ
SA(I,J)=0.
C(I,J)=0.
5011 R(I,J)=0.
```

```
DO 5012 I=1,NJ
DO 5012 J=I,NJ
IF(I-J)5013,5012,5013
5013 IF(CLE(I,J))5120,5012,5120
5120 R(I,J)=AL(I,J)/CLE(I,J)
5012 CONTINUE
DO 7300 I=1,NJ
DO 7300 J=I,NJ
EKI(J,I)=EKI(I,J)
7300 R(J,I)=R(I,J)
IF(TIPO)6210,6210,6211
6211 DO 6200 I=1,NJ
DO 6200 J=I,NJ
RELAC=R(I,J)
CALL RIG(RELAC,SP,B,AU,AN,O)
SA(I,J)=SP
C(I,J)=B
6200 CONTINUE
GO TO 6213
6210 DO 6212 I=1,NJ
DO 6212 J=I,NJ
RELAC=R(I,J)
IF(IH(I,J))13000,13000,6212
13000 IF(ABS(RELAC)-0.99)11000,8003,8003
11000 CALL RIG(RELAC,SP,B,AM,AN,O)
SA(I,J)=AM
C(I,J)=0
6212 CONTINUE
6213 CALL MULTI(NJ,SA,EKI,SK)
DO 6214 I=1,NJ
DO 6214 J=I,NJ
6214 SK(J,I)=SK(I,J)
IF(TIPO)13100,13100,13200
13200 CALL MULTI(NJ,SA,C,SC)
CALL MULTI(NJ,SC,EKI,SKC)
GO TO 13300
13100 CALL MULTI(NJ,C,EKI,SKC)
13300 DO 6215 I=1,NJ
DO 6215 J=I,NJ
```

```
6215 SKC(J,I)=SKC(I,J)
IF(TIPO)6216,6216,6217
6217 DO 5016 I=1,KONST
DO 5016 J=1,KONST
IF(I-J)5017,5018,5017
5018 SOMA=0.
DO 5019 NA=1,NJ
5019 SOMA=SOMA+SK(I,NA)
KD(I,J)=SOMA
GO TO 5016
5017 KD(I,J)=SKC(I,J)
5016 CONTINUE
NB=KONST
GO TO 6226
6216 DO 6218 I=1,KONST
DO 6218 J=1,KONST
IF(I-J)6219,6220,6219
6220 SOMA=0.
DO 6221 NA=1,NJ
IF(IH(I,NA))6223,6222,6223
6222 SOMA=SOMA+SK(I,NA)
GO TO 6221
6223 RELAC=R(I,NA)
CALL RIG(RELAC,SP,B,AM,AN,O)
SOMA=SOMA+EKI(I,NA)*SP
6221 CONTINUE
KD(I,J)=SOMA
IF(KD(I,J))8003,8003,6218
6219 IF(IH(I,J))6224,6225,6224
6225 KD(I,J)=-SKC(I,J)
GO TO 6218
6224 RELAC=R(I,J)
CALL RIG(RELAC,SP,B,AM,AN,O)
KD(I,J)=EKI(I,J)*B
6218 CONTINUE
NP=KONST/NB
IM=0
II=0
16000 IT=II+1
```



```
II=II+NP
IM=IM+1
DO 15000 I=1,KONST
SOMA=0.
DO 21000 J=IT,II
21000 SOMA=SOMA+KD(J,I)
15000 COND(IM,I)=SOMA
IF(IM-NB)16000,16000,17000
17000 IM=0
II=0
IT=II+1
II=II+NP
IM=IM+1
DO 18000 I=1,NB
SOMA=0.
DO 22000 J=IT,II
22000 SOMA=SOMA+COND(I,J)
18000 KD(I,IM)=SOMA
IF(IM-NB)20000,20000,6226
6226 DO 5020 I=1,NB
AUX=KD(I,I)
DO 5020 J=1,NB
IF(I-J)5021,5022,5021
5022 Q(I,J)=-1.
GO TO 5020
5021 Q(J,I)=KD(J,I)/AUX
5020 CONTINUE
CALL AVL(NB,AUTOV,Q)
IF(ABS(AUTOV)-1.90)8000,8001,8001
8001 IF(ABS(AUTOV)-2.10)8002,8002,8003
8003 W=N-DELTW
DELTW=DELTW/2.
GO TO 8000
8002 WRITE(3,8004)W
8004 FORMAT(1X,///,1X,'O PARAMETRO CRITICO VALE',F48.2,/,)
CALL EXIT
END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 10746 PROGRAM 4690

END OF COMPILATION

// XEQ

6. EXEMPLOS

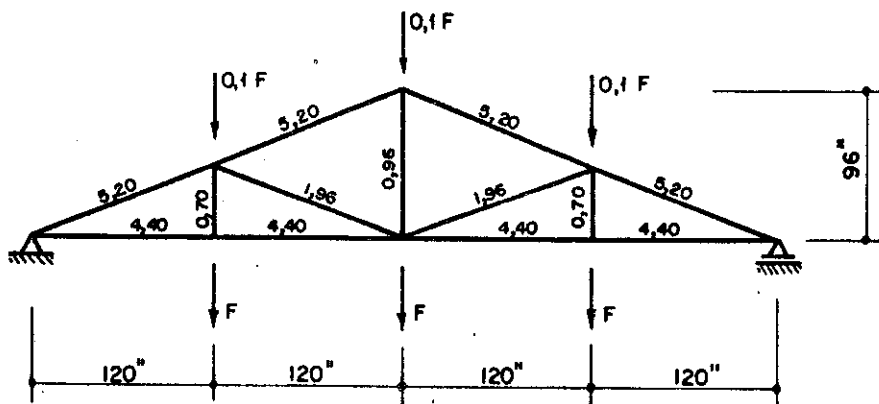
6.1. EXEMPLO I

6.1.1. Dados

Calcular o valor do parâmetro crítico F para a estrutura da figura (6.1).

$$E = 13500 \text{ tons/in}^2$$

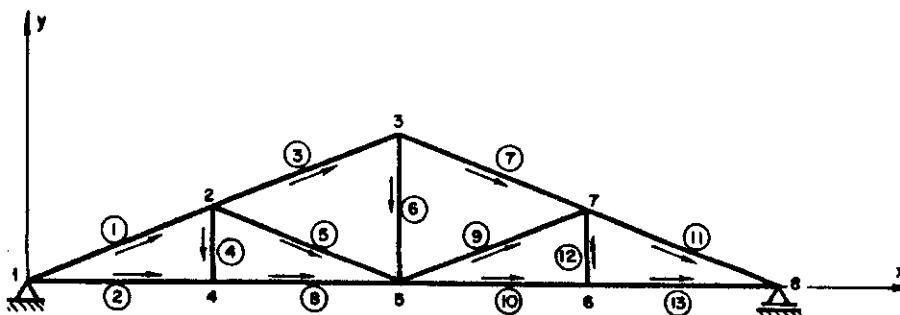
$$A_x = 100 \text{ in}^2$$



(FIG. 6.1)

Obs.: Os valores anotados junto às barras correspondem aos seus momentos de inércia em "in⁴"; as unidades utilizadas são inglesas para posterior comparação com McMINN⁷.

6.1.2. Numeração dos nós e barras, orientação das barras e sistema de referência (Fig. 6.2)



(FIG. 6.2)

6.1.3. Cartões de Entrada

Em se tratando a estrutura da figura (6.1), de um pórtico indeslocável com carga nos nós, o programa utilizado será aquele do item (5.1).

6.1.3.1. Conjunto (a) 1 cartão

10	20	30	40	50	60	70	80
13	8	3	2	13500.			

6.1.3.2. Conjunto (b) 8 cartões

10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.	0.					
2	120.	48.					
3	240.	96.					
4	120.	0.					
5	240.	0.					
6	360.	0.					
7	360.	48.					
8	480.	0.					

6.1.3.3. Conjunto (c) 13 cartões

10	20	30	40	50	60	70	80
1	1	2	100.	5.20			
2	1	4	100.	4.40			
3	2	3	100.	5.20			
4	2	4	100.	0.70			
5	2	5	100.	1.96			
6	3	5	100.	0.96			
7	3	7	100.	5.20			

	10	20	30	40	50	60	70	80
8		4	5	100.	4.40			
9		5	7	100.	1.96			
10		5	6	100.	4.40			
11		7	8	100.	5.20			
12		6	7	100.	0.70			
13		6	8	100.	4.40			

6.1.3.4. Conjunto (d) 2 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1		1	1					
8		0	1					

6.1.3.5. Conjunto (e) 1 cartão

	10	20	30	40	50	60	70	80
6								

6.1.3.6. Conjunto (f) 6 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
2		0.	-0.1					
3		0.	-0.1					
4		0.	-1.					
5		0.	-1.					
6		0.	-1.					
7		0.	-0.1					

6.1.4. Resultados impressos pelo programa

 ANALISE DA INSTABILIDADE DE
 PORTICOS PLANOS INDESLOCÁVEIS COM
 CARGAS APLICADAS NOS NOS

DADOS DA ESTRUTURA

NUMERO DE BARRAS	13
NUMERO DE NOS	8
NUMERO DE NOS COM DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS	2
NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS	3
NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES	13
MODULO DE ELASTICIDADE	13500.00

COORDENADAS DOS NOS

NO	X	Y
1	0.0	0.0
2	120.0	48.0
3	240.0	96.0
4	120.0	0.0
5	240.0	0.0
6	360.0	0.0
7	360.0	48.0
8	480.0	0.0

ACOES APLICADAS NOS NOS COM PARAMETRO UNITARIO

NO	ACAO EM X	ACAO EM Y
2	0.0	-0.1
3	0.0	-0.1
4	0.0	-1.0
5	0.0	-1.0
6	0.0	-1.0
7	0.0	-0.1

O PARAMETRO CRITICO VALE

17.34

Obs.: Esse exemplo foi resolvido por McMINN⁷ que obteve para o parâmetro crítico F o valor "aproximadamente 17.50 tons".

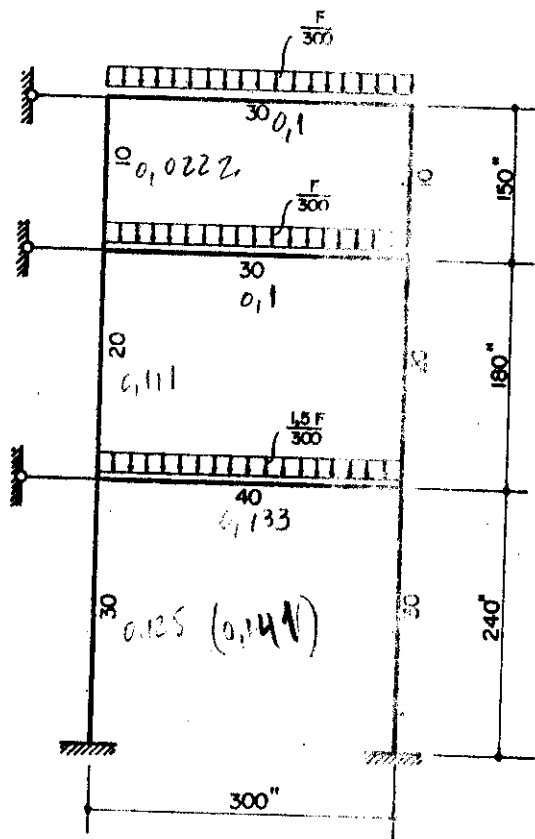
6.2. EXEMPLO II

6.2.1. Dados

Calcular o valor do parâmetro crítico F para a estrutura da figura (6.3).

$$E = 13500 \text{ tons/in}^2$$

$$A_x = 1000 \text{ in}^2$$

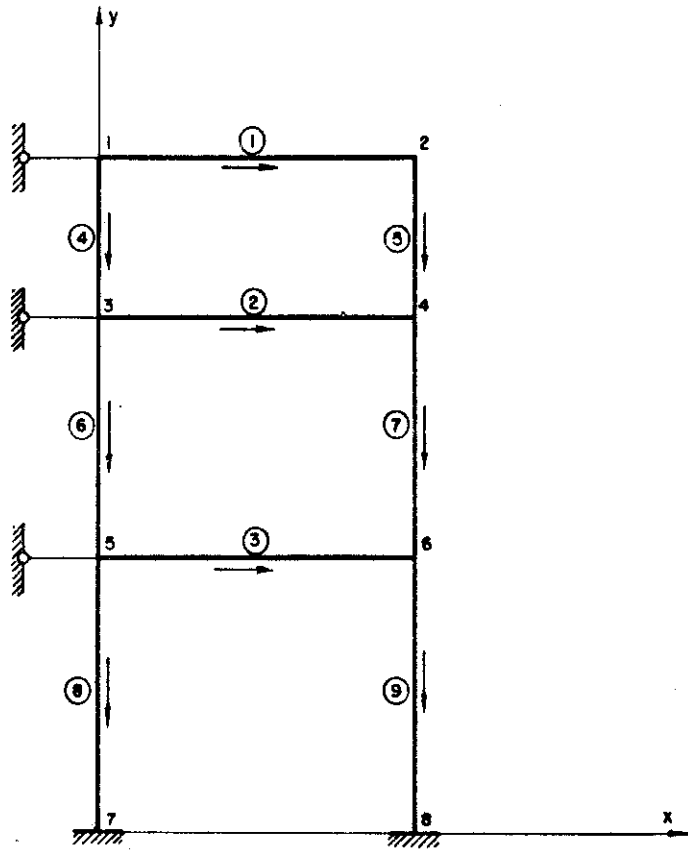


(FIG. 6.3)

Obs.: Os valores anotados junto às barras são os seus momentos de inércia em "in⁴"; as unidades são inglesas para posterior comparação com o exemplo III.

6.2.2. Numeração dos nós e barras, orientação das barras e sistema de referência

Para esse tipo de pórtico, deve-se primeiro numerar os nós cujas rotações são livres e em seguida os nós impedidos à rotação (Fig. 6.4).



(FIG. 6 · 4)

6.2.3. Cartões de entrada

A estrutura da figura (6.3) é um pórtico indeslocável com carregamento nas barras; assim, o programa utilizado será aquele do item (5.2)

6.2.3.1. Conjunto (a) 1 cartão

10	20	30	40	50	60	70	80
0	8	9	5	1	6	3	13500.

6.2.3.2. Conjunto (b) 8 cartões

10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.	570.					
2	300.	570.					
3	0.	420.					

	10	20	30	40	50	60	70	80
4		300.	420.					
5		0.	240.					
6		300.	240.					
7		0.	0.					
8		300.	0.					

6.2.3.3. Conjunto (c) 9 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1		1	2	1000.	30.			
2		3	4	1000.	30.			
3		5	6	1000.	40.			
4		1	3	1000.	10.			
5		2	4	1000.	10.			
6		3	5	1000.	20.			
7		4	6	1000.	20.			
8		5	7	1000.	30.			
9		6	8	1000.	30.			

6.2.3.4. Conjunto (d) 5 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1		1	0	0				
3		1	0	0				
5		1	0	0				
7		1	1	1				
8		1	1	1				

6.2.3.5. Conjunto (e) 1 cartão

	10	20	30	40	50	60	70	80
0		3						

6.2.3.6. Conjunto (g) 3 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.	0.50	25.0	0.	0.50	-25.0		
2	0.	0.50	25.0	0.	0.50	-25.0		
3	0.	0.75	37.5	0.	0.75	-37.5		

6.2.4. Resultados impressos pelo programa

 ANALISE DA INSTABILIDADE DE PORTICOS PLANOS

DADOS DA ESTRUTURA

NUMERO DE BARRAS 9
 NUMERO DE NOS 8
 NUMERO DE NOS COM DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS 5
 NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS 9
 NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES 15
 MODULO DE ELASTICIDADE 13500.00

COORDENADAS DOS NOS

NO	X	Y
1	0.0	570.0
2	300.0	570.0
3	0.0	420.0
4	300.0	420.0
5	0.0	240.0
6	300.0	240.0
7	0.0	0.0
8	300.0	0.0

ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO NAS EXTREMIDADES
 DAS BARRAS COM PARAMETRO UNITARIO

BARRA	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
1	0.00	0.50	25.00	0.00	0.50	-25.00
2	0.00	0.50	25.00	0.00	0.50	-25.00
3	0.00	0.75	37.50	0.00	0.75	-37.50

O PARAMETRO CRITICO VALE

105.48

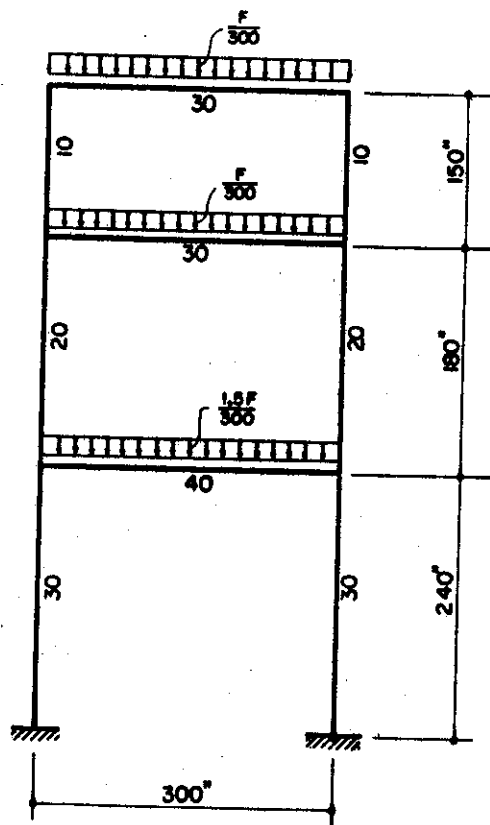
6.3. EXEMPLO III

6.3.1. Dados

Calcular o valor do parâmetro crítico F para a estrutura da figura (6.5)

$$E = 13500 \text{ tons/in}^2$$

$$A_x = 1000 \text{ in}^2$$

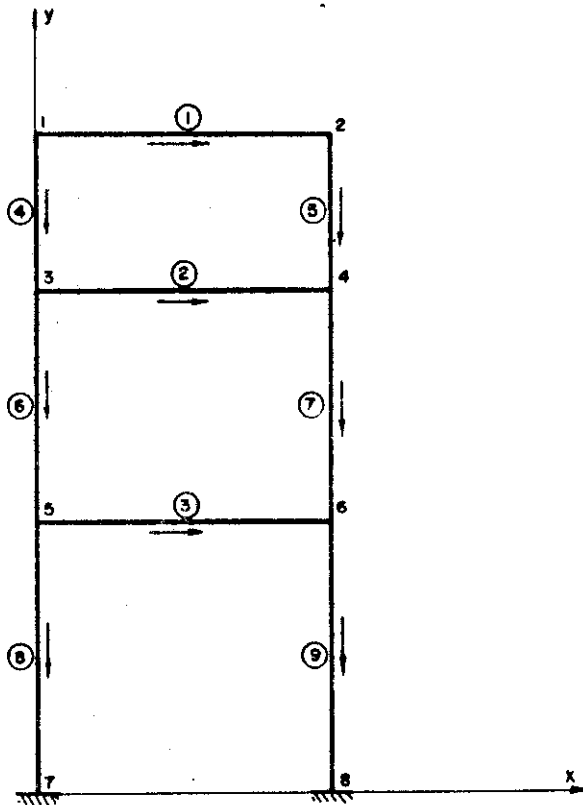


(FIG. 6.5)

Obs.: Os valores anotados junto às barras são os seus momentos de inércia em "in⁴"; as unidades inglesas são para comparação com McMINN.⁸

6.3.2. Numeração dos nós e barras, orientação das barras e sistema de referência

Também para esse pórtico, a numeração dos nós obedece a sequência: primeiro aqueles cujas rotações são livres e em seguida os nós impedidos à rotação (Fig. 6.6).



(FIG. 6 · 6)

6.3.3. Cartões de entrada

A estrutura da figura (6.5) é um pórtico deslocável com carregamento vertical; assim, o programa utilizado será aquele do item (5.2).

6.3.3.1. Conjunto (a) 1 cartão

10	20	30	40	50	60	70	80
9	8	9	5	0	6	3	13500.

6.3.3.2. Conjunto (b) 8 cartões

10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.	570.					
2	300.	570.					
3	0.	420.					

	10	20	30	40	50	60	70	80
4		300.	420.0					
5		0.	240.0					
6		300.	240.					
7		0.	0.					
8		300.	0.					

6.3.3.3. Conjunto (c) 9 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1		1	2	1000.	30.			
2		3	4	1000.	30.			
3		5	6	1000.	40.			
4		1	3	1000.	10.			
5		2	4	1000.	10.			
6		3	5	1000.	20.			
7		4	6	1000.	20.			
8		5	7	1000.	30.			
9		6	8	1000.	30.			

6.3.3.4. Conjunto (d) 5 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1		1	0	0				
3		1	0	0				
5		1	0	0				
7		1	1	1				
8		1	1	1				

6.3.3.5. Conjunto (e) 1 cartão

	10	20	30	40	50	60	70	80
0		3						

6.3.3.6. Conjunto (g) 3 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.	0.50	25.0	0.	0.50	-25.0		
2	0.	0.50	25.0	0.	0.50	-25.0		
3	0.	0.75	37.5	0.	0.75	-37.5		

6.3.3.7. Conjunto (h) 9 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1		1						
1		1						
1		1						
0		0						
0		0						
0		0						
0		0						
0		0						
0		0						

6.3.4. Resultados impressos pelo programa

 ANALISE DA INSTABILIDADE DE PORTICOS PLANOS

DADOS DA ESTRUTURA

NUMERO DE BARRAS	9
NUMERO DE NOS	8
NUMERO DE NOS COM DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS	5
NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS	2
NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES	15
MODULO DE ELASTICIDADE	13500.00

COORDENADAS DOS NOS

NO	X	Y
1	0.0	570.0
2	300.0	570.0
3	0.0	420.0
4	300.0	420.0
5	0.0	240.0
6	300.0	240.0
7	0.0	0.0
8	300.0	0.0

ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO NAS EXTREMIDADES
DAS BARRAS COM PARAMETRO UNITARIO

BARRA	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
1	0.00	0.50	25.00	0.00	0.50	-25.00
2	0.00	0.50	25.00	0.00	0.50	-25.00
3	0.00	0.75	37.50	0.00	0.75	-37.50

O PARAMETRO CRITICO VALE

26.02

Obs.: Esse exemplo foi resolvido por McMINN⁸ que encontrou para F o valor "entre 28 e 29 tons". Nota-se que esse mesmo exemplo foi resolvido anteriormente (EXEMPLO II) como indeslocável e se obteve para F um valor 4 vezes maior.

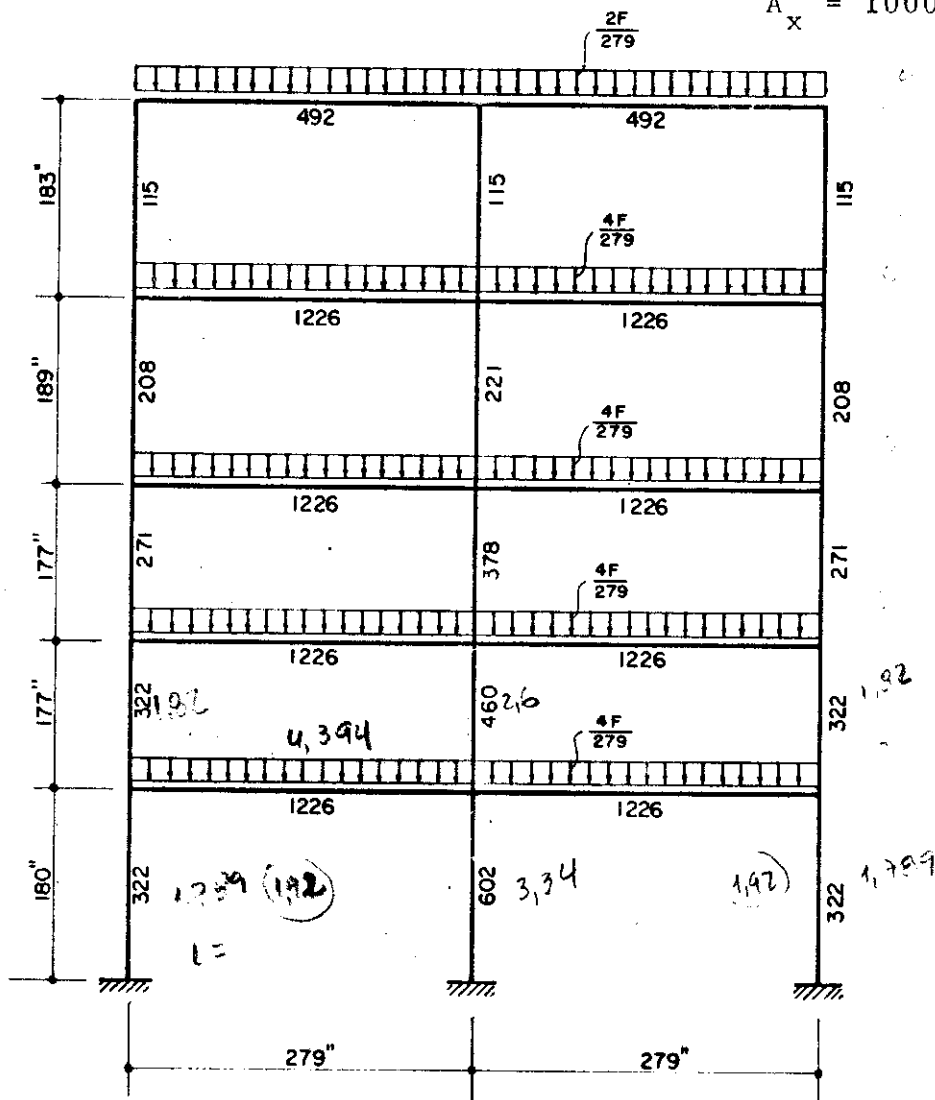
6.4. EXEMPLO IV

6.4.1. Dados

Calcular o valor do parâmetro crítico F para a estrutura da figura (6.7).

$E = 13500 \text{ tons/in}^2$

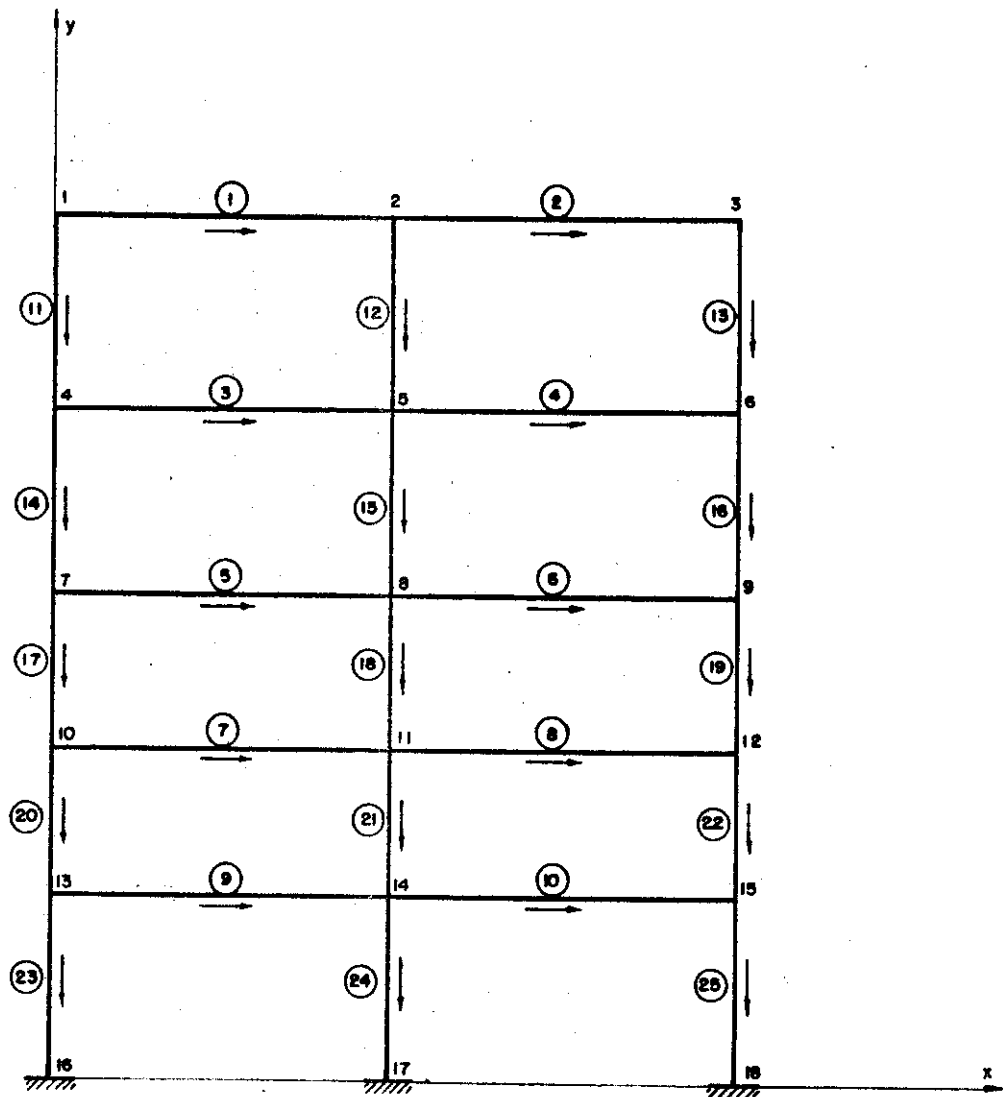
$A_x = 1000 \text{ in}^2$



(FIG. 6.7)

Obs.: Os valores anotados junto às barras são os seus momentos de inércia em "in⁴"; as unidades são inglesas para comparação com o mesmo exemplo resolvido por McMINN¹⁰.

6.4.2. Numeração dos nós e barras, orientação das barras e sistema de referência (Fig. 6.8)



(FIG. 6 · 8)

6.4.3. Cartões de entrada

Sendo essa estrutura um pórtico deslocável, o programa utilizado será aquele do item (5.2).

6.4.3.1. Conjunto (a) 1 cartão

10	20	30	40	50	60	70	80
25	18	14	8	0	15	5	13500.

6.4.3.2. Conjunto (b) 18 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.	906.						
2	279.	906.						
3	558.	906.						
4	0.	723.						
5	279.	723.						
6	558.	723.						
7	0.	534.						
8	279.	534.						
9	558.	534.						
10	0.	357.						
11	279.	357.						
12	558.	357.						
13	0.	180.						
14	279.	180.						
15	558.	180.						
16	0.	0.						
17	279.	0.						
18	558.	0.						

6.4.3.3. Conjunto (c) 25 cartões

10	20	30	40	50	60	70	80
1	1	2	1000.	492.			
2	2	3	1000.	492.			
3	4	5	1000.	1226.			
4	5	6	1000.	1226.			
5	7	8	1000.	1226.			
6	8	9	1000.	1226.			
7	10	11	1000.	1226.			
8	11	12	1000.	1226.			
9	13	14	1000.	1226.			
10	14	15	1000.	1226.			
11	1	4	1000.	115.			
12	2	5	1000.	115.			
13	3	6	1000.	115.			
14	4	7	1000.	208.			
15	5	8	1000.	221.			
16	6	9	1000.	208.			
17	7	10	1000.	271.			
18	8	11	1000.	378.			
19	9	12	1000.	271.			
20	10	13	1000.	322.			
21	11	14	1000.	460.			
22	12	15	1000.	322.			
23	13	16	1000.	322.			
24	14	17	1000.	602.			
25	15	18	1000.	322.			

6.4.3.4. Conjunto (d) 8 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1		1	0	0				
4		1	0	0				
7		1	0	0				
10		1	0	0				
13		1	0	0				
16		1	1	1				
17		1	1	1				
18		1	1	1				

6.4.3.5. Conjunto (e) 1 cartão

	10	20	30	40	50	60	70	80
0		10						

6.4.3.6. Conjunto (g) 10 cartões

	10	20	30	40	50	60	70	80
1	0.	1.	46.5	0.	1.	-46.5		
2	0.	1.	46.5	0.	1.	-46.5		
3	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		
4	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		
5	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		
6	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		
7	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		
8	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		
9	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		
10	0.	2.	93.0	0.	2.	-93.0		

6.4.4. Resultados impressos pelo programa

 ANALISE DA INSTABILIDADE DE PORTICOS PLANOS

DADOS DA ESTRUTURA

NUMERO DE BARRAS	25
NUMERO DE NOS	18
NUMERO DE NOS COM DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS	8
NUMERO DE DESLOCAMENTOS IMPEDIDOS	14
NUMERO DE DESLOCAMENTOS LIVRES	40
MODULO DE ELASTICIDADE	13500.00

COORDENADAS DOS NOS

NO	X	Y
1	0.0	906.0
2	279.0	906.0
3	558.0	906.0
4	0.0	723.0
5	279.0	723.0
6	558.0	723.0
7	0.0	534.0
8	279.0	534.0
9	558.0	534.0
10	0.0	357.0
11	279.0	357.0
12	558.0	357.0
13	0.0	180.0
14	279.0	180.0
15	558.0	180.0
16	0.0	0.0
17	279.0	0.0
18	558.0	0.0

ACOES DE ENGASTAMENTO PERFEITO NAS EXTREMIDADES
 DAS BARRAS COM PARAMETRO UNITARIO

BARRA	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
1	0.00	1.00	46.50	0.00	1.00	-46.50
2	0.00	1.00	46.50	0.00	1.00	-46.50
3	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00
4	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00
5	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00
6	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00
7	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00
8	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00
9	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00
10	0.00	2.00	93.00	0.00	2.00	-93.00

O PARAMETRO CRITICO VALE 114.00

Obs.: Esse exemplo foi resolvido por McMINN¹⁰ que encontrou para F o valor 112.80 tons (ou seja 7.7*14.65).

7. CONCLUSÕES

Tornou-se possível com esse trabalho, calcular estruturas com grande número de variáveis (a limitação dessas variáveis só depende da capacidade do computador), que o cálculo manual não permitia. Ou seja, a teoria aqui exposta não apresenta novidades quanto à sua formulação e o intuito principal foi torná-la programável, para a utilização de computadores digitais. As aproximações, principalmente nos pórticos deslocáveis, deram resultados satisfatórios conforme mostram os exemplos apresentados no capítulo 6.

Com isso, torna-se mais simples calcular a carga crítica de pórticos planos, apesar de ainda não se poder trabalhar com pórticos absolutamente gerais. Foi possível, no entanto, automatizar o cálculo para estruturas mais frequentes, nas quais o problema da instabilidade é maior, como por exemplo as treliças de nós rígidos (pequenas seções e grandes esforços axiais) e os pórticos com carregamentos verticais (flexão pequena e grandes esforços axiais nos pilares).

8. BIBLIOGRAFIA

1. HORNE, M.R., e MERCHANT, W. - "The Stability of Frames", Pergamon Press Ltd. 1965.
2. GREGORY, M. - "Elastic Instability", E. & F.N. Spon Ltd. 1967.
3. McMINN, S.J. - "Matrices For Structural Analysis", John Wiley, 1962.
4. MATHESON, J.A.L. - "Hyperstatic Structures", vol.I, Butterworths Publications Ltd. 1959.
5. WEAVER, W. e GERE, J.M. - "Analysis of Framed Structures", D.V. Nostrand 1968.
6. RUBINSTEIN, M.F. - "Matrix Computer analysis of Structures", Prentice-Hall Inc. 1966.
7. McMINN, S.J. - op. cit. (3), pp 185 - 191.
8. McMINN, S.J. - op. cit. (3), pp 193 - 196
9. LIGHTFOOT, E. - "The Analysis of Wind Loading of Rigid Jointed Multi-storey Building Frames", Civil Engineering, 51, pp 757-887, 1956.
10. McMINN, S.J. - op. cit. (3), pp 196 - 201.
11. RUBINSTEIN, M.F. - "Structural Systems-Statics, Dynamics and Stability", Prentice-Hall Inc. 1970.
12. GELFAND, I.M. - "Lectures on Linear Algebra", 1951.
13. FADEEVA, V.N. - "Computational Methods of Linear Algebra", Dover Publications Inc. 1959.

14. TIMOSHENKO, S.P., e GERE, J.H. - "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill 1961.
15. PACITTI, T. - "Fórmula de Monitor", Livro Técnico 1968.
16. LIVESLEY, K. - "Matrix Method of Structural Analysis", Pergamon Press 1964.
17. MERCHANT, R. - "Wind Loads of Tall Building Frames", Structural Engineering, 36, pp 197 - 200.
18. SILVA, J.R. - "Os Métodos das Condensações Simultâneas no Cálculo de Alçados Estruturais Retangulares", Engenharia nº 38, pp 35 - 43, 1956.
19. ANTUNES, H.M.C. - "Estabilidade Elástica de Treliças Planas", E.E.S.C. 1972.

