



ISSN 1809-5860

# Cadernos de **ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Estruturas



São Carlos, v.11 n. 52 2009

## **UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Reitora:  
Profa. Dra. SUELY VILELA

Vice-Reitor:  
Prof. Dr. FRANCO M. LAJOLO

## **ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Diretor:  
Profa. Dra. MARIA DO CARMO CALIJURI

Vice-Diretor:  
Prof. Dr. EDUARDO MORGADO BELO

## **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

Chefe do Departamento:  
Prof. Dr. SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA

Suplente do Chefe do Departamento:  
Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

Coordenador de Pós-Graduação:  
Prof. Dr. MARCIO ANTONIO RAMALHO

Editor Responsável:  
Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO SILVA CORRÊA

Coordenadora de Publicações e Material Bibliográfico:  
MARIA NADIR MINATEL  
e-mail: minatel@sc.usp.br

Editoração e Diagramação:  
FRANCISCO CARLOS GUETE DE BRITO  
MARIA NADIR MINATEL  
MASAKI KAWABATA NETO  
MELINA BENATTI OSTINI  
RODRIGO RIBEIRO PACCOLA  
TATIANE MALVESTIO SILVA



# **Cadernos de ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Estruturas



Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos – USP  
Av. Trabalhador São-carlense, 400 – Centro  
CEP: 13566-590 – São Carlos – SP  
Fone: (16) 3373-9481 Fax: (16) 3373-9482  
site: <http://www.set.eesc.usp.br>  
e-mail: [cadernos@sc.usp.br](mailto:cadernos@sc.usp.br)

## SUMÁRIO

Juntas de argamassa solicitadas à compressão na ligação entre elementos pré-moldados <i>Aline da Silva Ramos Barboza &amp; Mounir Khalil El Debs</i> .....	1
A relação entre as pressões horizontais e verticais em silos elevados: o parâmetro K <i>Fernanda Calmon Nascimento &amp; Carlito Calil Junior</i> .....	17
Formulações do Método dos Elementos de Contorno para análise de placas viscoelásticas <i>Rodrigo Couto da Costa &amp; Wilson Sergio Venturini</i> .....	39
Interação de paredes em alvenaria estrutural cerâmica sob ações verticais <i>Valentim Capuzzo Neto &amp; Márcio Roberto Silva Corrêa</i> .....	63
Uma aplicação da técnica dos algoritmos genéticos em detecção de dano estrutural <i>Jesús Daniel Villalba Morales &amp; José Elias Laier</i> .....	81
Método dos Elementos Finitos Posicional aplicado a problemas termo-elasto-plásticos bidimensionais <i>Rogério Carrazedo &amp; Humberto Breves Coda</i> .....	99
Tipos de análise estrutural para elementos lineares segundo a NBR 6118:2003 <i>Fernando Fernandes Fontes &amp; Libânio Miranda Pinheiro</i> .....	117
Análise teórica e experimental de vigas de concreto armadas com barras não metálicas de GFRP <i>Danusa Haick Tavares &amp; José Samuel Giongo</i> .....	143
Avaliação de incertezas em modelo numérico para análise de prismas de alvenaria sob compressão <i>Luis Aquino Gonçalves Júnior &amp; Marcio Antonio Ramalho</i> .....	157



# JUNTAS DE ARGAMASSA SOLICITADAS À COMPRESSÃO NA LIGAÇÃO ENTRE ELEMENTOS PRÉ-MOLDADOS

Aline da Silva Ramos Barboza<sup>1</sup> & Mounir Khalil El Debs<sup>2</sup>

## Resumo

*O tipo de ligação mais comumente usado entre painéis estruturais é a junta de argamassa. Geralmente, a argamassa usada na junta tem uma resistência baixa se comparada aos elementos pré-moldados e como sua deformação transversal tende a ser maior que a do concreto pré-moldado, ocorre uma distribuição de tensões não uniforme na junta. Para analisar o comportamento das juntas de argamassa e sua influência na capacidade resistente dos elementos pré-moldados foi desenvolvida uma análise teórico-experimental. Chegou-se à conclusão que para preenchimento com graute fluido auto-adensável, uma junta com 20mm de espessura permite um melhor comportamento, tanto em relação ao nível de resistência quanto à ductilidade.*

*Palavras-chave: Ligação. Concreto pré-moldado. Juntas de argamassa.*

## MORTAR JOINTS BETWEEN PRECAST COLUMNS UNDER COMPRESSION LOAD

### Abstract

*Mortar joints are commonly used in precast concrete structures as connection between columns, walls and load bearing precast concrete facade elements. Usually, the mortar joint has a lower strength than precast elements and its deformability tends to be larger than the ones, which causes a non-uniform distribution of stress in the joint. This paper reports on the development of an experimental program to analyze the bearing capacity of precast high strength concrete columns connected by mortar joints produced with commercially available materials, with the purpose of making better use of the columns' bearing capacity. The conclusion reached was that a 20mm mortar layer produces an optimal behavior, in terms of both strength and ductility*

*Keywords: Connection. Precast concrete. Mortar joints.*

## 1 INTRODUÇÃO

O desempenho estrutural de um sistema de elementos pré-moldados depende em grande parte do comportamento das ligações entre os elementos. Essas ligações representam pontos de descontinuidade da estrutura pré-moldada e problemas como concentração de esforços e compatibilidade geométrica dos elementos são bastante frequentes, além de dificuldades na execução.

Freqüentemente, as juntas de argamassa moldadas no local são usadas como elementos de ligação entre painéis estruturais pré-moldados. Porém, esse tipo de ligação também aparece entre aduelas pré-moldadas de pontes e de torres e ainda em partes comprimidas de ligações sujeitas à flexão. Em geral, como a resistência da argamassa é menor que a resistência do concreto pré-moldado, a capacidade portante dos elementos fica condicionada ao limite de resistência da

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, alramos@ctec.ufal.br, aline@lccv.ufal.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, mkdebs@sc.usp.br

argamassa. Isso faz com que não haja uma completa utilização da capacidade resistente dos mesmos.

Com a utilização do concreto de alta resistência e a melhoria das técnicas de execução, pode-se fabricar elementos pré-moldados com resistência do concreto bem maior que anteriormente, além de usar argamassas pré-fabricadas de alta resistência na região da ligação. Essa evolução torna necessário avaliar que fator de redução da capacidade resistente deve agora ser considerado para o sistema estrutural.

Fatores como a espessura da camada de argamassa e a relação entre as resistências da argamassa e do concreto pré-moldado, são parâmetros importantes para o comportamento da ligação.

## 2 ESTUDO TEÓRICO DA LIGAÇÃO

### 2.1 Considerações iniciais

A ligação denominada junta de argamassa, que consiste em intercalar uma camada de argamassa ou micro-concreto moldada no local entre dois elementos pré-moldados, é utilizada na prática corrente solicitada predominantemente à compressão. A camada de argamassa pode ser executada:

- Com argamassa de assentamento - permite corrigir imperfeições existentes na superfície dos elementos e uniformiza a distribuição de tensões, porém dificulta o nivelamento dos elementos na montagem;
- Com argamassa de enchimento seca ou fluida - é inserida entre os elementos após a montagem dos mesmos;
- Com argamassa epóxi - é uma mistura de resina epóxi e areia usada quando se deseja alta resistência na camada.

A capacidade resistente da ligação vai está associada ao tipo de material que vai ser utilizado para preenchimento da mesma, bem como à qualidade do serviço de mão-de-obra.

### 2.2 Capacidade resistente da ligação

Considerando que as ligações são pontos cruciais para a segurança e economia de um sistema estrutural pré-moldado, foi estabelecido na Holanda um comitê denominado SBR-Committee B7, com a finalidade de investigar de forma mais detalhada o comportamento estrutural das ligações usadas nas construções. Os resultados dos estudos experimentais, para avaliação da capacidade resistente da ligação com junta de argamassa, desenvolvidos por aquele comitê, que teriam sido incorporados nas recomendações da Norma Holandesa, foram apresentados no trabalho de DRAGOSAVIC. Os experimentos mostraram que é razoável considerar que o valor da capacidade resistente da ligação está relacionado com a resistência à compressão da argamassa usada na junta, a resistência à compressão do concreto usado no elemento pré-moldado e as dimensões da camada de argamassa. A partir destas considerações foi estabelecido que:

Quando a resistência à compressão da argamassa ( $f_{cm}$ ) é maior que a resistência à compressão do concreto usado no elemento pré-moldado ( $f_c$ ), a presença da camada de argamassa não reduz a capacidade resistente da junta. Conseqüentemente, a resistência à compressão da junta ( $f_j$ ) é considerada igual a  $f_c$ .

Quando  $f_{cm} < f_c$  e a relação  $h_j/a$  ( $h_j$ =espessura/  $a$ =menor largura da junta) é muito grande, ou seja,  $h_j \gg a$ , a capacidade resistente da junta ( $f_j$ ) é igual a  $f_{cm}$ .

Se  $f_{cm} < f_c$  e a relação  $h_j/a$  é pequena, a resistência  $f_j$  é dada por:

$$f_j = \alpha \cdot f_c \quad (1)$$

O parâmetro  $\alpha$ , considerado como sendo o fator que mede a eficiência da junta, é definido no intervalo:  $f_m/f_c \leq \alpha \leq 1,0$  como mostra o gráfico da Figura 1. Esse gráfico pode ser construído a partir da Eq. 2, apresentada em VAMBERSKY, arbitrando-se valores para  $\delta$ .

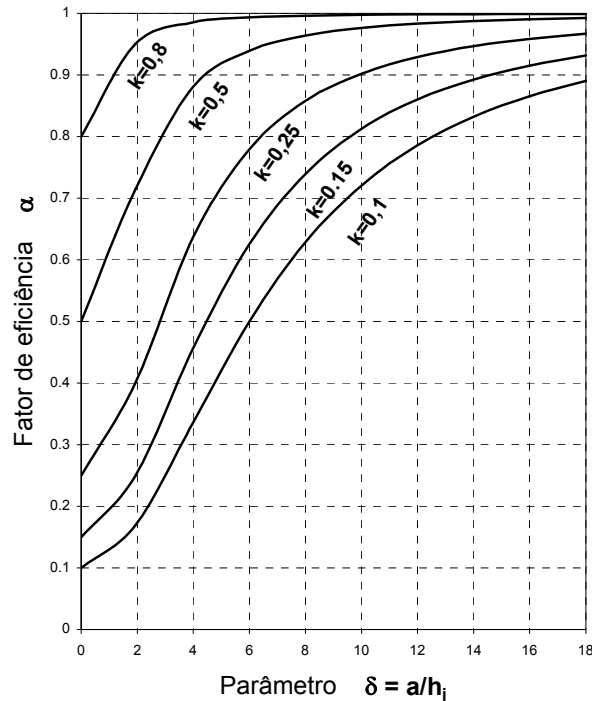


Figura 1 – Fator de eficiência da junta.

$$\alpha = k \frac{5(1-k) + \delta^2}{5(1-k) + k\delta^2} \quad (2)$$

Onde:  $k$  - relação entre a resistência à compressão da argamassa e a menor resistência à compressão do concreto dos elementos pré-moldados adjacentes à junta, afetada por um coeficiente redutor  $\eta_m$ , que varia em função da qualidade da argamassa;

$\delta$  - relação entre a menor largura e a espessura da junta.

Em outros estudos, VAMBERSKY verificou que em muitos casos de juntas horizontais a capacidade resistente da ligação não era governada pela resistência ao esmagamento da argamassa, mas sim pelo descolamento do concreto nos elementos pré-moldados adjacentes a junta. Segundo VAMBERSKY (2), as tensões que provocam o descolamento do concreto aparece como resultado de dois mecanismos:

Como a deformabilidade da argamassa é diferente do concreto pré-moldado, quando ela é comprimida e não existe confinamento lateral ela é expulsa pelas extremidades, gerando assim forças de atrito na área de contato entre a argamassa e o elemento pré-moldado (Figura 2). Estas forças de atrito provocam o aparecimento de tensões de tração no elemento;

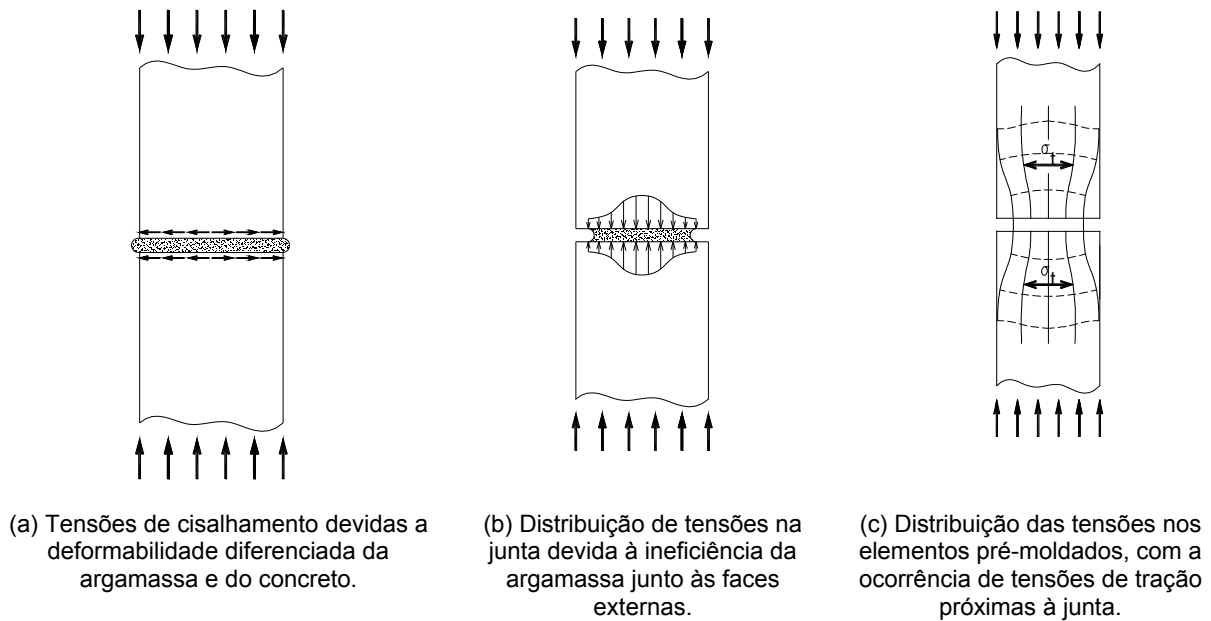


Figura 2 – Forças de atrito e distribuição de tensões na junta.

Devido ao mecanismo anterior a argamassa sofre esmagamento localizado nas extremidades e ocorre uma redistribuição de tensões, resultando com isso numa concentração de tensões no meio da junta. Essa distribuição de tensões não uniforme gera tensões de fendilhamento no elemento pré-moldado.

Com a finalidade de propor uma atualização das recomendações contidas na Norma Holandesa, apresentadas anteriormente por DRAGOSAVIC, considerando a melhoria alcançada para os materiais usados na junta VAMBERSKY analisou o comportamento de juntas de argamassa solicitadas à compressão e propôs a seguinte expressão para o cálculo da capacidade resistente da ligação:

$$f_j = \eta_o \cdot \alpha \cdot f_c \quad (3)$$

Onde:  $\eta_o$  - fator de redução para a área da junta;  
 $\alpha$  - fator de eficiência da junta, definido pela Eq. 2;  
 $f_j$  - menor resistência à compressão do concreto dos elementos pré-moldados adjacentes à junta.

O fator  $\alpha$ , presente na expressão de VAMBERSKY corresponde ao mesmo já apresentado por DRAGOSAVIC através do gráfico mostrado na Figura 1.

O coeficiente  $\eta_o$  é estabelecido através de resultados experimentais considerando as condições de execução da junta.

$\eta_o = 0,9$  para argamassa fluida colocada na junta após a montagem dos elementos pré-moldados;  
 $\eta_o = 0,7$  para argamassa seca colocada na junta após a montagem dos elementos pré-moldados;  
 $\eta_o = 0,3$  se o elemento pré-moldado é colocado sobre argamassa já existente no local da junta.

O parâmetro  $\eta_m$  que avalia a qualidade da argamassa colocada na junta é considerado da seguinte forma:

$\eta_m = 0,75$  se a qualidade da argamassa é verificada através de ensaios aos 28 dias, de corpos de prova moldados no local da obra, cuja estocagem foi feita em ambiente controlado;

$\eta_m = 1,0$  se a qualidade da argamassa é verificada através de ensaios usando-se amostras retiradas da junta executada.

Numa outra parte do estudo, VAMBERSKY analisou numericamente o comportamento da ligação colocando placas de aço nas duas interfaces junta de argamassa-concreto pré-moldado, para melhorar a distribuição de tensões e minimizar o efeito das forças de atrito. O autor observou então, que as tensões de fendilhamento apresentaram praticamente o mesmo valor, independentemente da espessura da placa de aço. Com a placa delgada, não havia melhoria na distribuição de tensões. Já com a placa mais espessa, apesar de uma melhor distribuição de tensões na junta, a mesma restringia a deformação do elemento pré-moldado e aumentava as tensões de fendilhamento. A partir disso, o autor concluiu que o modo mais efetivo de aumentar a capacidade resistente da ligação era usando argamassa e concreto pré-moldado de alta resistência.

A partir das observações de DRAGOSAVIC e VAMBERSKY sobre o comportamento de juntas pré-moldadas foram feitas algumas simulações numéricas usando-se o software ANSYS 5.5.1.

### 2.3 Simulação numérica

O software ANSYS 5.5.1, utiliza o método dos elementos finitos para obtenção dos deslocamentos e esforços da estrutura e permite que se considere na simulação o comportamento não-linear dos materiais envolvidos. Essa não-linearidade corresponde a uma relação não-linear entre tensões e deformações.

O programa ANSYS 5.5.1 tem definido oito tipos de comportamento não-linear para materiais. Dentre eles, foram escolhidos para a modelagem da ligação, os seguintes:

Plasticidade independente do tempo: é caracterizada através das deformações instantâneas irreversíveis que ocorrem no material;

Concrete: introduz no material capacidade de fissuração e esmagamento.

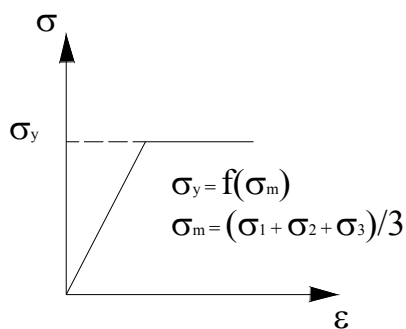


Figura 4 – Diagrama tensão-deformação para o critério de DRUCKER-PRAGER.

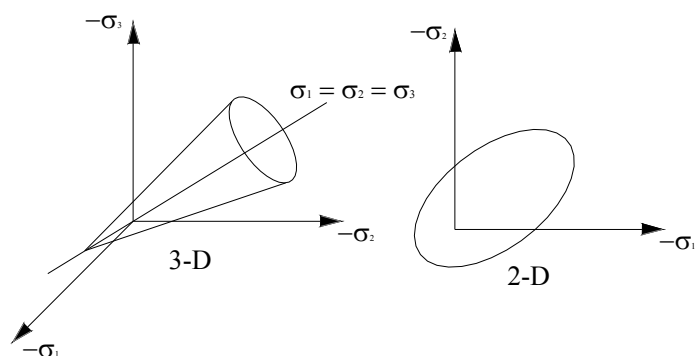


Figura 5 – Superfície de escoamento definida por DRUCKER-PRAGER.

Para considerar a plasticidade independente do tempo o programa permite escolha entre sete relações diferentes. Analisando-se essas relações observou-se que a mais indicada para uso em materiais granulares é a definida pelo critério de plastificação estabelecido por DRUCKER-PRAGER.

Esse critério representa uma modificação do critério de plastificação de VON MISES, considerando-se a influência da componente de tensão hidrostática: quanto maior a tensão

hidrostática maior a resistência ao escoamento. Considera ainda que, o material é elástico perfeitamente-plástico, com diagrama definido de acordo com a Figura 3. A superfície de escoamento do critério de DRUCKER-PRAGER descrita no espaço das tensões é mostrada na Figura 4.

O outro critério considerado nas simulações, denominado CONCRETE, corresponde ao critério estabelecido por WILLIAM-WARNKE apud CHEN (3). Nesse critério, os pesquisadores se preocuparam em encontrar uma expressão para seção transversal de ruptura que obedecesse a critérios de simetria, suavidade e convexidade. Isso foi conseguido considerando-se a seção transversal do plano de ruptura formada por trechos elípticos. A superfície de ruptura no espaço tridimensional das tensões principais é mostrada na Figura 5.

A superfície de ruptura descrita pelo critério CONCRETE é caracterizada através de cinco parâmetros, os quais se encontram relacionados a seguir.

- $f_t$  - resistência última à tração axial;
- $f_c$  - resistência última à compressão axial;
- $f_{cb}$  - resistência última à compressão bi-axial;
- $f_1$  - resistência última à tração para um estado de tensão bi-axial;
- $f_2$  - resistência última à compressão para um estado de tensão bi-axial.

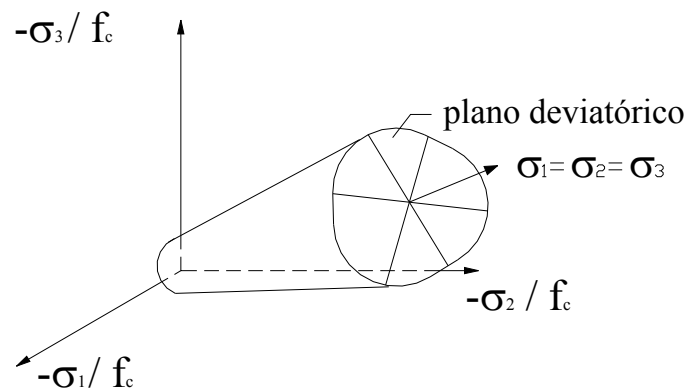


Figura 5 – Superfície de ruptura definida por William-Warnke.

Os modelos tridimensionais analisados nas simulações foram discretizados utilizando-se o elemento finito SOLID65 definido por oito nós, como mostra a Fig. 6. Cada nó possui três graus de liberdade que são as translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Com esse elemento o sólido modelado é capaz de sofrer fissuração (em três direções ortogonais) e esmagamento, já que o mesmo é o único capaz de incorporar o critério CONCRETE associado com o critério de DRUCKER-PRAGER, descritos anteriormente. Com a associação dos dois critérios, o ANSYS verifica se as deformações existentes no modelo correspondem a um nível de plastificação anterior à ruptura frágil por fissuração.

Os modelos simulados consistem em dois blocos de concreto com seção transversal quadrada, ligados através de uma camada de argamassa, como mostra a Figura 7. A vinculação adotada impede as translações em todas as direções na extremidade inferior, e nas direções  $X$  e  $Y$  na extremidade superior. Evitando com isso, qualquer possibilidade de flexão.

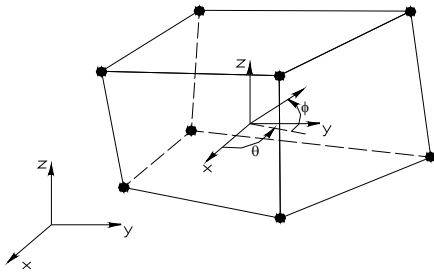


Figura 6 – Elemento SOLID65.

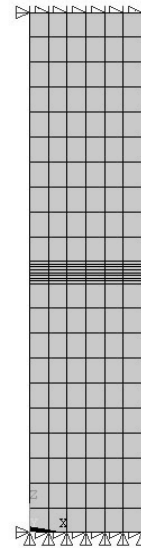


Figura 7 – Discretização dos modelos usando elemento SOLID65.

O carregamento aplicado corresponde a uma pressão uniformemente distribuída na extremidade superior do modelo. Esse carregamento foi aplicado subdividido em passos de carga, para considerar o efeito de não-linearidade dos materiais.

## 2.4 Resultados da simulação numérica

Na simulação numérica da ligação considerou-se como parâmetros de influência a variação na espessura da camada de argamassa e a variação na relação entre as resistências do concreto e da argamassa da junta. Para isso, foram consideradas quatro espessuras diferentes e as relações entre resistências usadas no trabalho de STROBAND et al. (1996), bem como as características mecânicas usadas para o concreto e argamassa. Essas características encontram-se listadas na Tabela 1.

A carga última obtida para cada modelo está mostrada na Figura 8. Observa-se que quando foi usada a argamassa 1, com resistência à compressão mais baixa, o aumento da espessura da junta fez com que a ruptura do modelo acontecesse mais rapidamente.

Tabela 1 – Propriedades mecânicas do concreto e argamassa

Propriedades	Concreto	Argamassa 1	Argamassa a 2
Resistência à compressão (MPa)	113,0	71,0	170,0
Resistência à tração (MPa)	5,9	5,0	27,72
Módulo de Elasticidade Longitudinal (MPa)	37400	16500	54600
Coefficiente de Poisson	0,2	0,3	0,27

Já com o uso da argamassa 2, a ruptura em todos os modelos aconteceu com a mesma carga última. Esse comportamento mostra que, quando o material usado na junta possui resistência maior que a do elemento pré-moldado, a ruptura se dá fora da região da junta qualquer que seja a espessura dela. A Figura 9 mostra o quadro de fissuração considerando o uso dos dois tipos de argamassa.

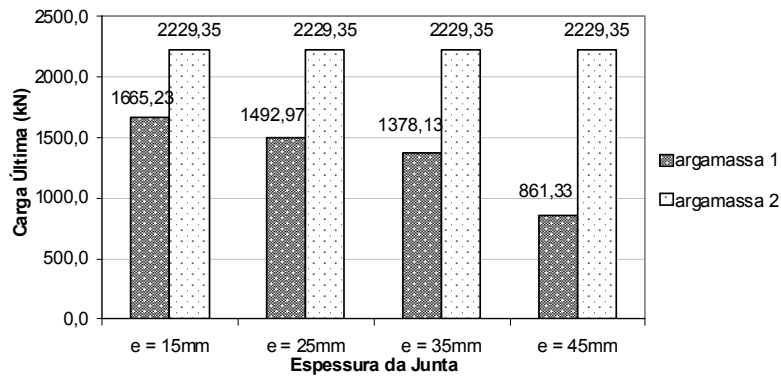


Figura 8 – Comparação para os valores de carga última.

Comparando-se o resultado obtido na simulação numérica com resultados obtidos usando-se as expressões recomendadas por DRAGOSAVIC e VAMBERSKY, apresentadas anteriormente, para o modelo com junta de argamassa de 15mm de espessura e argamassa 1 como material de preenchimento da junta, tem-se o gráfico mostrado na Figura10.

Observa-se que o valor obtido na simulação corresponde a aproximadamente 70% do valor teórico dado pela expressão de VAMBERSKY (2). Essa diferença se deve ao uso do critério CONCRETE que impõe ao material um comportamento elasto-frágil na tração. Com o aumento da fissuração, o modelo perde a convergência.

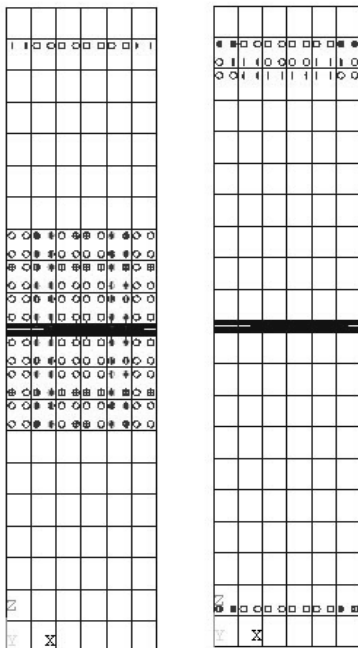


Figura 9 – Fissuras apresentadas pelo modelo para os dois tipos de argamassa.

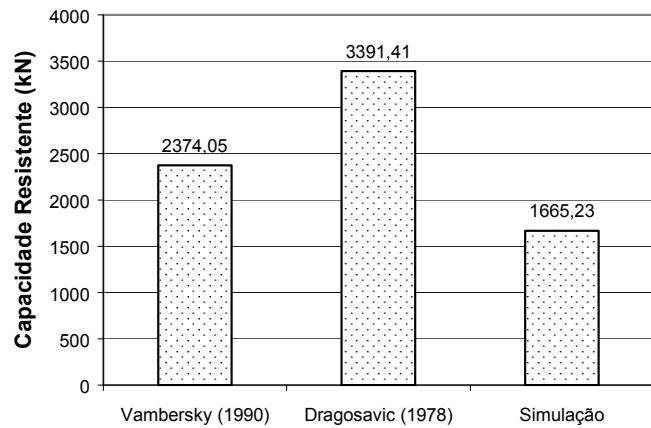


Figura 10 – Gráfico comparativo.

### 3 PROGRAMA EXPERIMENTAL

#### 3.1 Descrição dos modelos

Para avaliar experimentalmente o comportamento da ligação, foram ensaiados sete modelos. Esses modelos possuíam seção transversal quadrada de 175mm de lado e eram confeccionados unindo-se dois segmentos com altura de 400mm através da junta de argamassa como mostrado na Figura 11. Nas extremidades dos modelos havia um reforço com anel metálico preenchido com micro-concreto de alta resistência, para evitar uma possível ruptura por concentração de tensões. A armadura adotada para os modelos era composta de 4 barras de diâmetro 10mm dispostas longitudinalmente e estribos de diâmetro 5mm espaçados a cada 9cm. O cobrimento adotado para a armadura foi de 25mm.

#### 3.2 Execução dos modelos

Os modelos foram confeccionados moldando-se cada metade separadamente na posição vertical. Após a moldagem os segmentos dos modelos permaneciam na forma durante dois dias, sendo curados através de uma manta de espuma molhada posicionada na parte superior dos mesmos.

No terceiro dia, as formas eram retiradas e era feito o enrijecimento nas extremidades dos segmentos. Após o enrijecimento, os modelos eram deixados em temperatura ambiente no laboratório de ensaios. No sétimo dia, contado a partir da primeira concretagem, os segmentos eram posicionados num pórtico metálico para execução da junta.

O preenchimento da junta de argamassa foi feito com grautes e argamassas pré-fabricadas disponíveis comercialmente com a finalidade de avaliar o tipo de material de preenchimento que seria mais adequado para uso num sistema estrutural real. A fim de comparação foram ensaiados dois modelos sem junta, simplesmente apoiando um segmento sobre o outro e considerando uma possível descontinuidade na superfície de apoio.

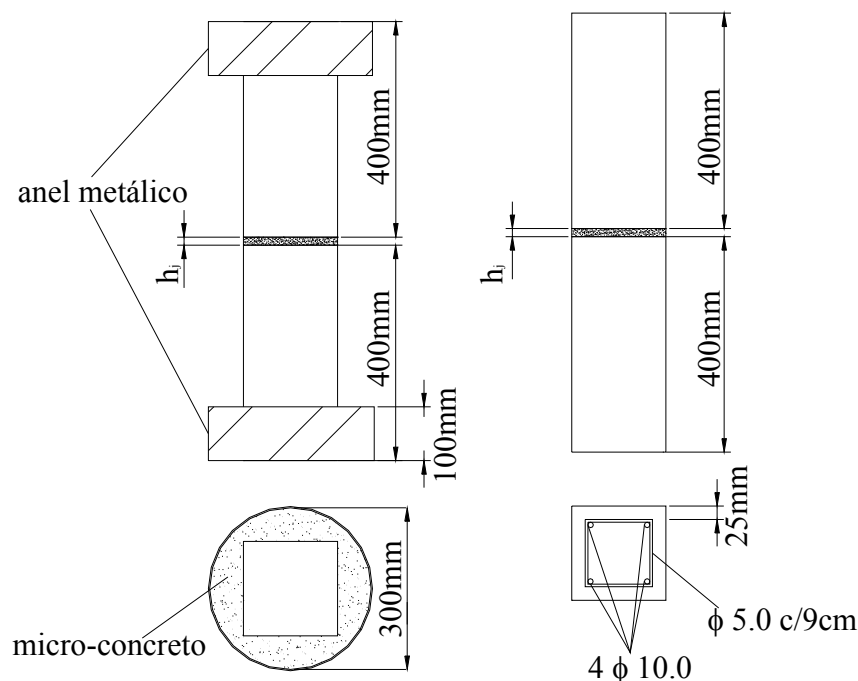


Figura 11 – Configuração dos modelos ensaiados.

### 3.3 Variáveis de ensaio

As variáveis adotadas nos modelos foram escolhidas considerando-se os estudos realizados por DRAGOSAVIC e VAMBERSKY. Essas variáveis foram: a espessura da camada de argamassa, a relação entre as resistências da argamassa e do concreto pré-moldado, a resistência do concreto pré-moldado e o material de preenchimento da junta. As variáveis exploradas em cada modelo e as resistências dos mesmos, estão mostradas na Tabela 2. Para alguns modelos foram confeccionadas duas ou três amostras para prevenir falhas de execução.

As resistências à tração e à compressão do concreto usado nos pilares e das argamassas usadas nas juntas foram obtidas através de ensaios padronizados em corpos de prova cilíndricos de 100mmx200mm e 50mmx100mm, respectivamente, realizados aos catorze dias de idade para o concreto e sete dias de idade para as argamassas.

Tabela 2 – Variáveis exploradas nos modelos

Modelo	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{tm}$ (MPa)	Relação $f_j/f_c$	Tipo de enchimento	Espessura da junta (mm)
M1	32,5	2,4	24,4	3,0	0,75	Graute	15
M2	44.4	3.7	33.8	2.6	0.76	Graute	22.5
M3	35.1	4.1	25.7	3.6	0.73	Graute	30
M4	40.0	4.3	50.4	4.3	1.26	Argamassa seca	15
M5	68	4.2	25.3	1.8	0.37	Graute	15
M6	30.5	3.3	-	-	-	SL	
M7	30.6	3.3	-	-	-	SR	

Nos modelos M1, M2 e M3, foi usado um graute fluido a base de cimento, cuja mistura é composta por cimento Portland, agregados com diâmetro máximo pequeno e aditivos especiais para controlar a retração.

Para avaliar o comportamento dos pilares de alta resistência, ensaiou-se o modelo M5, onde foi usado um graute não retrátil a base de cimento, cuja mistura é composta por cimento Portland, agregados graduados e aditivos químicos que controlam a expansão no estado plástico e minimizam a demanda de água na mistura.



(a) Faixas de madeira coladas no fundo da forma para execução das ranhuras na superfície do segmento de concreto. (b) Superfície do segmento após a concretagem.

Figura 11 – Superfície descontínua do modelo M7.

No modelo M4 foi usada uma argamassa seca do tipo “Dry Pack” que na forma endurecida é isenta de retração.

Nos modelos M6 e M7 não foi executada junta. Esses modelos foram ensaiados apoiando-se um segmento sobre o outro, sendo que no modelo M7 foram feitas algumas ranhuras na superfície de um dos segmentos para simular um apoio descontínuo entre os elementos, como mostra a Figura 11.

### 3.4 Resultados dos ensaios

Os modelos foram ensaiados aos 14 dias de idade, numa máquina servo-hidráulica INSTRON com capacidade para 300t e com controle digital por computador. A instrumentação dos modelos foi feita posicionando-se dois transdutores de deslocamentos em cada face, como mostra a Fig. 12, sendo um com base de medida 51,0 cm centralizado ao longo da face do pilar e outro com base de medida 6,0cm posicionado próximo à junta. Os ensaios foram feitos aplicando-se o carregamento através de deformação controlada a uma velocidade de 0,002 mm/s e o registro de dados foi feito a cada 2 segundos. O valor da carga última obtida em cada modelo está mostrado na Tabela 3.

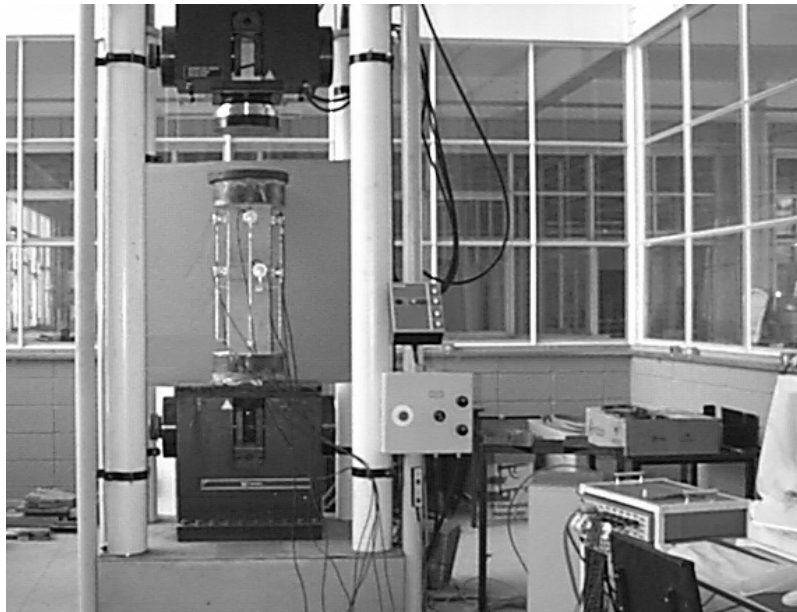


Figura 12 – Posicionamento dos modelos para ensaio.

O valor atingido em cada ensaio foi comparado com o valor dado pela Equação 3, considerando-se o valor teoricamente ressitido pelo concreto pré-moldado e com o valor teórico dado pelas Eqs. 1, 2 desenvolvidas por DRAGOSAVIC e VAMBERSKY, respectivamente.

$$P_u = A_c \cdot f_c \quad (3)$$

Onde:  $A_c$  – área de concreto;  
 $f_c$  – resistência à compressão do concreto;

Considerando que a deformabilidade da ligação é definida como sendo a relação entre o deslocamento relativo entre os elementos e o esforço solicitante na direção desse deslocamento, os valores determinados para as juntas nos modelos ensaiados, estão mostrados na Tabela 4.

Tabela 3 – Carga última obtida para os modelos

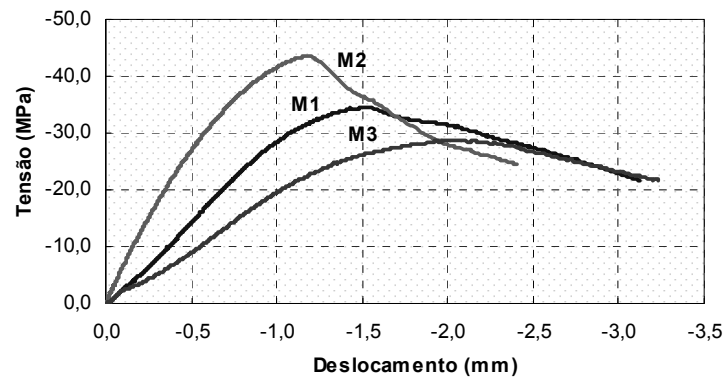
Modelo	Carga última experimental (kN)	$P_u$ (kN)	$P_{exp}/P_u$	Carga Dragosavic (kN)	Carga Vambersky (kN)
M1	956,6	1032,3	0,93	983,26	884,93
M2	1292,5	1395,5	0.93	1325.6	1193.1
M3	855,5	1111,4	0.77	1022.8	920.5
M4	1183,4	1261,1	0.94	1224.9	857.4
M5	1210,3	2113,4	0.57	1949.8	1754.8
M6	831,8	971,0	0.86	-	-
M7	744,3	974,0	0.76	-	-

Tabela 4 – Deformabilidade das juntas de argamassa ensaiadas

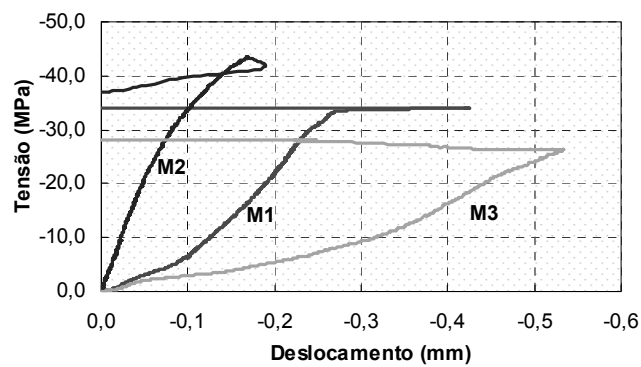
Modelo	Deformabilidade da junta (mm/MPa)
M1	$1,4 \times 10^{-2}$
M2	$2,9 \times 10^{-3}$
M3	$3,8 \times 10^{-2}$
M4	$6,5 \times 10^{-3}$
M5	$2,1 \times 10^{-2}$

### 3.5 Análise dos resultados

Analisando-se o comportamento dos modelos M1, M2 e M3, mostrado na Figura 13, em que se tem a média dos deslocamentos medidos em cada relógio comparador, observa-se uma redução da capacidade resistente e um comportamento mais dúctil, mantendo-se a mesma relação  $f_{cm}/f_c$  e aumentando-se a espessura da junta. No modelo M3 foi usado um graute com agregado maior que o usado nos modelos M1 e M2. Isso resultou no aparecimento de vazios na interface concreto pré-moldado junta e numa maior deformabilidade da junta. Para as condições de execução do modelo, usando graute fluido, a junta com espessura de 22,5mm foi a mais adequada. Observando-se a configuração de ruína desses modelos, mostrada na Figura 14 vê-se que quanto mais espessa a junta menor a região danificada, porém menor capacidade resistente. No modelo M2 as tensões e fendilhamento foram mais significativas. Após o ensaio, observou-se a perda de aderência na interface junta/concreto pré-moldado do elemento superior.

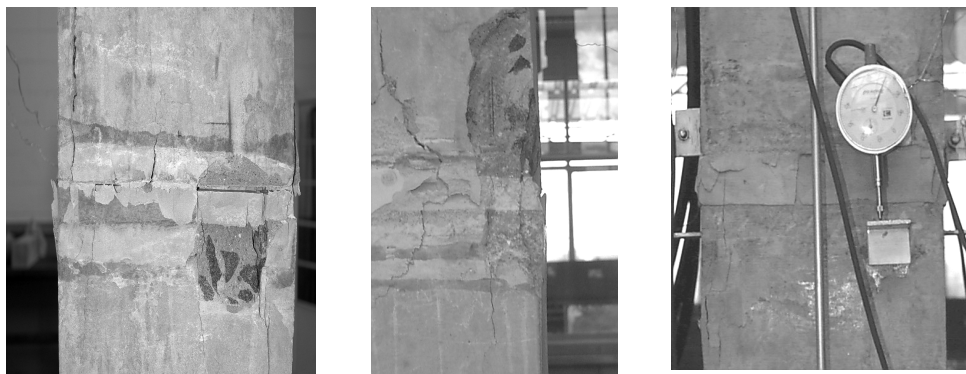


(a) Deformabilidade aparente dos modelos.



(b) Deformabilidade da junta de argamassa.

Figura 13 – Deformabilidade aparente do modelo e da junta de argamassa.



(a) Ruptura do modelo M1 com  $h_j = 15\text{mm}$ .

(b) Ruptura do modelo M2 com  $h_j = 22.5\text{mm}$ .

(c) Ruptura do modelo M3 com  $h_j = 30\text{mm}$ .

Figura 14 – Configuração de ruína dos modelos M1, M2 e M3.

Para o modelo M4 a expressão de VAMBERSKY apresenta uma diferença de 38% em relação ao resultado experimental e comparado-o ao valor obtido para um elemento monolítico, praticamente não houve perda na capacidade resistente do modelo.

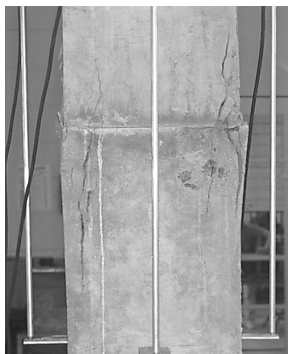
Utilizando-se graute fluido no preenchimento da junta, atinge-se uma carga última maior com uma relação  $f_{cm}/f_c$  menor, em comparação com o modelo M4 cuja junta foi preenchida com argamassa do tipo "Dry Pack".

Considerando as deformabilidades das juntas obtidas nos ensaios, pode-se dizer que para as condições de execução dos modelos, o graute fluido quando comparado com argamassa seca é bem mais flexível numa junta delgada de 15mm de espessura. Isso porque nessa espessura de junta as condições de execução são mais favoráveis ao uso de argamassa seca. Entretanto, para a junta de 22,5mm isso não ocorreu.

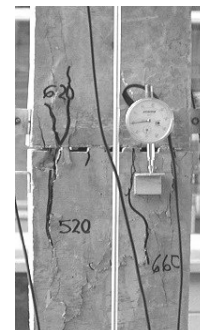
No modelo M5 de alta resistência, a baixa relação  $f_{cm}/f_c$  fez com que houvesse uma redução de 57% em relação ao valor obtido para um pilar monolítico. Essa redução foi ainda maior que a dos modelos sem junta. Além disso, a deformabilidade da junta foi muito alta quando comparada aos outros modelos, ocasionando uma maior danificação dos elementos pré-moldados, como mostra a Figura 15.



Figura 15 – Configuração de ruína do modelo de alta resistência M5.



(a) Configuração de ruína do modelo M6 com superfície plana.



(b) Configuração de ruína do modelo M7 com superfície descontínua.

Figura 16 – Configuração de ruína dos modelos sem junta de argamassa.

Nos modelos ensaiados sem junta observou-se que mesmo para uma superfície plana não existe um contato perfeito entre os elementos pré-moldados e as tensões de contato entre as peças provoca alta redução na capacidade resistente dos elementos. Nos modelos com superfície

descontínua, essa redução é mais significativa pois a fissuração começa concentrada embaixo dos pontos de contato entre as peças e se estende inicialmente para o elemento inferior, como mostrado na Figura 16. Isso faz com que o modelo fique mais flexível.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Pelos resultados obtidos pode-se observar que o apoio direto de elementos pré-moldados, uns sobre os outros, seja com superfície plana ou descontínua, reduz consideravelmente a capacidade resistente do sistema estrutural. Nos elementos produzidos com concreto de alta resistência isso representaria desperdício de material e conseqüentemente maior custo para o sistema, justificando assim a necessidade de um elemento de ligação entre as peças. Nesse caso a junta de argamassa que representa o tipo mais simples de ligação, tanto pela sua popularidade quanto pela sua facilidade de execução, seria uma alternativa interessante. O nível de exigência em relação à mão de obra para a execução da junta tem ficado cada vez menor pela disponibilidade de materiais pré-fabricados que podem ser utilizados no preenchimento, de acordo com a necessidade do nível de resistência e das dimensões da mesma.

Considerando os materiais utilizados no desenvolvimento do trabalho podem ser tiradas as seguintes conclusões:

Quanto se deseja obter alta resistência no sistema como um todo, um material de alta resistência é mais indicado.

A espessura da camada de argamassa representa um fator preponderante para a escolha do tipo de material a ser usado no preenchimento da junta. Com os resultados obtidos pode-se dizer que a utilização do graute fluido seria mais adequada para uma junta com 20mm de espessura, pois tende a apresentar menos falha de execução devido a qualquer irregularidade na superfície dos elementos pré-moldados.

A argamassa do tipo “Dry Pack” é uma alternativa viável quando se tem uma espessura delgada, devido a uma menor incidência de vazios e por geralmente já ser um material de alta resistência.

Para um concreto pré-moldado de resistência à compressão em torno de 35MPa, a redução na capacidade resistente dos elementos pré-moldados foi menor que 10%, quando se tratava de uma junta mais delgada.

Para o concreto de alta resistência, obteve-se uma redução de 57%. Entretanto, deve-se ressaltar que o graute usado para preenchimento da junta tinha baixa resistência quando comparada à dos elementos pré-moldados. Nesse caso, a utilização de um material de alta resistência na junta poderia trazer um melhor aproveitamento para a capacidade resistente do modelo. Essa possibilidade merece ser posteriormente avaliada em outros estudos.

#### 5 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES e FAPESP pela ajuda financeira destinada ao desenvolvimento do trabalho. E a empresa FOSROC pela doação dos materiais de preenchimento da junta

#### 6 REFERÊNCIAS

BARBOZA, A. S. R. **Comportamento de juntas de argamassa solicitadas à compressão na ligação entre elementos pré-moldados**. 2002. Dissertação (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo. 2002.

CHEN, W. F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. McGraw-Hill Book Company, EUA, 474p.

DRAGOSAVIC, M. Load-bearing capacity of joints between precast elements. In: RILEM-CEB-CIB SYMPOSIUM MECHANICAL & INSULATING PROPERTIES OF JOINTS OF PRECAST REINFORCED CONCRETE ELEMENTS. p.29-40, 1978.

VAMBERSKY, J. N. J. A. Mortar joints loaded in compression. In: INTERNATIONAL SEMINAR DELFT, PREFABRICATION OF CONCRETE STRUCTURES. p.167-180. Delft University Press, 1990.

# A RELAÇÃO ENTRE AS PRESSÕES HORIZONTAIS E VERTICAIS EM SILOS ELEVADOS: O PARÂMETRO K

Fernanda Calmon Nascimento<sup>1</sup> & Carlito Calil Junior<sup>2</sup>

## Resumo

*Este trabalho tem por objetivo o estudo teórico e experimental da relação entre as pressões horizontais e verticais em silos elevados, parâmetro K. Este é um importante parâmetro requerido no cálculo das pressões exercidas por produtos armazenados nas paredes e fundo do silo, pois define a porcentagem da distribuição das pressões em função da relação altura (h) / lado ou diâmetro (d) do silo. Na parte teórica deste trabalho, foi realizado um estudo das principais recomendações propostas pelos especialistas e normas internacionais para o cálculo do K, onde se pôde notar que ainda há muita incerteza no cálculo deste parâmetro. Na parte experimental, foram realizados ensaios de cisalhamento direto, no aparelho Jenike Shear Tester, para a determinação das propriedades físicas dos produtos: milho, soja e ração de frango. Também foram realizados ensaios em um silo piloto, cilíndrico, com fundo plano, para quatro diferentes relações h/d, utilizando dois tipos de paredes, lisa e rugosa. Os resultados obtidos mostram que a formulação de Jaky foi a que apresentou a melhor aproximação para o valor do parâmetro K, para a condição de carregamento e para os produtos estudados. A obtenção do parâmetro K por meio do silo piloto foi a mais indicada, porém muito mais trabalhosa e devido a sua grande variabilidade, não recomendada para a caracterização do produto.*

*Palavras-chave: Parâmetro K. Silos. Silos - pressões.*

## THE RELATIONSHIP AMONG THE HORIZONTAL AND VERTICAL PRESSURES IN SLENDER SILOS: THE PARAMETER K

### Abstract

*This work consists of the theoretical and experimental study of the relationship among the horizontal and vertical pressures in slender silos, parameter K. This is an important parameter required in the calculation of the pressures exercised by stored products in the walls and bottom of the silo and defines the percentage of the distribution of the pressures in function of the relationship height (h) / side or diameter (d) of the silo. The theoretical part, correspond to study of the main recommendations proposed by the specialists and international codes for K determination. In the experimental part, tests of direct shear were carried out, using the Jenike Shear Tester, for the determination of the physical properties of the products: maize, soy beam and animal powders. Also tests in a cylindrical pilot silo were conducted, with flat bottom, for four different relationships h/d, using two types of wall, rugose steel and smooth steel. A comparison was accomplished among the theoretical recommendations for the calculation of the K with the experimental data. The results showed that Jaky formulas got the best results for all the storage materials and a good agreement with the pilot silo tests results.*

*Keywords: Parameter K. Silos. Silos - pressures.*

## 1 INTRODUÇÃO

Os silos verticais são largamente utilizados na agricultura, indústria e mineração, portanto de fundamental importância para o armazenamento dos produtos advindos destes setores. São estruturas difíceis de projetar com relação a pressões e fluxo contínuos e como estruturas seguras e econômicas, devido à grande

<sup>1</sup> Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, engcalmon@yahoo.com.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, calil@sc.usp.br

variabilidade das propriedades dos produtos armazenados. Estes tipos de estruturas são as que apresentam um dos mais altos índices de ruínas e colapsos, o que estimula novas investigações sobre as pressões que o produto armazenado exerce sobre a estrutura.

A relação entre as pressões horizontais e verticais (parâmetro K) é um importante parâmetro no cálculo das pressões em silos, pois define a porcentagem da distribuição das pressões em função da relação altura / lado ou diâmetro do silo.

O objetivo principal deste trabalho foi determinar experimentalmente o parâmetro K em um silo piloto e compará-lo com o valor de K obtido por meio das principais formulações propostas pelos especialistas.

## 2 PARÂMETRO K

### 2.1 Generalidades

Um dos pioneiros na pesquisa das pressões em silos foi Janssen (1985) que apresentou formulações para o cálculo das pressões horizontais, verticais e de atrito exercidas pelo produto armazenado. Ele explicitamente declarou que a relação entre as pressões, K, deveria ser medida para cada produto armazenado.

Três são os estados de tensão associados a K: estado ativo ( $K_a$ ), estado passivo ( $K_p$ ) e estado em repouso ( $K_0$ ). Os dois primeiros resultam do movimento da parede, respectivamente, para fora e em direção ao produto armazenado, enquanto o terceiro acontece quando uma estrutura de retenção inflexível não permite a deformação lateral na periferia do produto.

O valor inferior representa o estado ativo e o valor superior representa o estado passivo. Os dois limites são funções do ângulo de atrito interno e do ângulo de atrito com a parede.

$$K_a = \frac{1 - \operatorname{sen} \phi_e}{1 + \operatorname{sen} \phi_e} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_e}{2} \right) \quad K_p = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_e}{1 - \operatorname{sen} \phi_e} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_e}{2} \right) \quad (1) \quad (2)$$

As equações (1) e (2), propostas por Rankine para empuxos de terra, podem ser derivadas do círculo de Mohr e são válidas para as situações onde as paredes do silo são lisas e as tensões horizontais e verticais são as tensões principais.

A base para as equações de Janssen é que a carga seja transferida do produto armazenado à parede por atrito; então nas paredes do silo, as tensões verticais e horizontais não são tensões principais. Isto faz com que o uso das equações (1) e (2) para determinar K na equação de Janssen seja teoricamente incompatível. Este ponto parece ser freqüentemente negligenciado na aplicação destas equações.

Kotter (1899) tentou estabelecer a distribuição de tensão mais rigorosamente dentro do produto armazenado e sugeriu que o caso ativo de tensão de Rankine é desenvolvido durante o enchimento do silo, enquanto o caso passivo de tensão ocorre na descarga. Durante o fluxo, um interruptor ativo-passivo acontece em um plano de transição com condições ativas que prevalecem na porção superior do silo e condições passivas nas porções mais baixas.

Nilsson (1986) baseado em ensaios em um silo grande (diâmetro  $D=6\text{m}$  e altura  $H=12\text{m}$ ) concluiu que durante o estágio de enchimento, os deslocamentos são grandes suficientes para promover movimentos relativos de tal magnitude que mobilizam completamente ou quase completamente, em regiões do silo, tanto condições de estado ativo como de estado passivo. Já em pequenos modelos de silos ( $D=1\text{m}$ ,  $H=3\text{m}$ ), a fatia vertical e conseqüentemente, os máximos movimentos laterais (0,01 a 1 mm) são tão pequenos que mudanças no K e nas pressões laterais são difíceis de detectar. Portanto, os resultados das medidas de pressão em silos modelos podem não ser válidos para grandes silos e medidas com um produto podem não ser válidas para outro com propriedades diferentes de compressibilidade.

### 2.2 Recomendações dos especialistas para o cálculo do K

Uma das expressões mais aceitas para a determinação do valor de K foi proposta por Koenen (1896) para utilização na formulação de Janssen, equação (1), sendo determinada com base no coeficiente de empuxo ativo da teoria de Rankine para empuxos de terra. Esta expressão é válida para ângulos de atrito com a parede igual a zero.

Jaky (1948 apud LOHNES, 1993) obteve a seguinte relação para o parâmetro K para o caso do produto em repouso e parede lisa e rígida:

$$K = \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi_e) \left( 1 + \frac{2}{3} (\operatorname{sen} \phi_e) \right)}{(1 + \operatorname{sen} \phi_e)} \quad (3)$$

Walker (1966 apud LOHNES, 1993) assumindo que o produto ensilado está em ruptura e, simultaneamente, está deslizando ao longo de uma parede rugosa, usou a geometria do círculo de Mohr para incluir o coeficiente de atrito com a parede,  $\phi_w$ , na equação de relação de pressão, obtendo:

$$K = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \phi_e - 2\sqrt{(\operatorname{sen}^2 \phi_e - \mu^2 \cos^2 \phi_e)}}{4\mu^2 + \cos^2 \phi_e} \quad (4)$$

Uma das expressões mais aceitas para a determinação do valor de K foi proposta por Koenen (1896) para utilização na formulação de Janssen, equação (1), sendo determinada com base no coeficiente de empuxo ativo da teoria de Rankine para empuxos de terra. Esta expressão é válida para ângulos de atrito com a parede igual a zero.

Jaky (1948 apud LOHNES, 1993) obteve a seguinte relação para o parâmetro K para o caso do produto em repouso e parede lisa e rígida:

$$K = \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi_e) \left( 1 + \frac{2}{3} (\operatorname{sen} \phi_e) \right)}{(1 + \operatorname{sen} \phi_e)} \quad (5)$$

Walker (1966 apud LOHNES, 1993) assumindo que o produto ensilado está em ruptura e, simultaneamente, está deslizando ao longo de uma parede rugosa, usou a geometria do círculo de Mohr para incluir o coeficiente de atrito com a parede,  $\phi_w$ , na equação de relação de pressão, obtendo:

$$K = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \phi_e - 2\sqrt{(\operatorname{sen}^2 \phi_e - \mu^2 \cos^2 \phi_e)}}{4\mu^2 + \cos^2 \phi_e} \quad (6)$$

De acordo com Hartlen (1984 apud LOHNES, 1993), em 1966 Hartmann baseado na teoria da elasticidade sugere a expressão (7) para calcular a relação entre as pressões em silos de paredes rugosas.

$$K = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \phi_e}{1 + \operatorname{sen}^2 \phi_e} \quad (7)$$

A equação (7) é independente do coeficiente de atrito com a parede. Rotter (1988 apud LOHNES, 1993) considera esta equação válida para paredes que sejam tão rugosas que os grãos do produto armazenado deslizem uns sobre os outros ao contrário de deslizar sobre a parede da célula, como é o caso dos silos metálicos de paredes de chapa de aço corrugado.

Frazer, citado por Calil (1984), considerando o equilíbrio das forças no contorno da superfície da parede para o estado de ruptura incipiente, encontra a seguinte expressão para o cálculo do K:

$$K = \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{sen}^2 \phi_e}{\cos^2 \phi_e} + \frac{2\operatorname{sen} \phi_e}{\cos^2 \phi_e} \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \phi_w}{\operatorname{tg}^2 \phi_e}}} \quad (8)$$

Aoki, citado por Benink (1989), baseando-se na hipótese de Walters propõe a seguinte expressão para o parâmetro K:

$$K = \left[ 1 + 2 \cdot \tan^2(\phi_e) + \frac{4 \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\phi_e)}}{3 \cdot \mu_w^2} \cdot \left\{ \tan^3(\phi_e) - (\tan^2(\phi_e) - \mu_w^2)^{3/2} \right\} \right]^{-1} \quad (9)$$

Bischara et al (1983) através de uma fórmula não linear do método dos elementos finitos, afirmam que a relação entre pressões, K, é um parâmetro constante para um determinado tipo de silo e um dado produto e propõem diferentes fórmulas para o parâmetro K em função da granulometria do produto como a seguir:

Para produtos cujo diâmetro máximo é menor ou igual a 2,5 mm:

$$K = 0,16 \frac{\cot^2 \phi_i \gamma^{0,15}}{\mu^{0,08} d^{0,17}} \quad (10)$$

Para produtos cujo diâmetro máximo é maior que 2,5 mm:

$$K = 0,16 \frac{\cot^2 \phi_i}{\sqrt{\text{sen} \phi_i \gamma^{0,04} \mu^{0,05} d^{0,11}}} \quad (11)$$

Benink (1989) sugere dois valores limites para K: para K no centro do silo, utilizar a equação (1) de Rankine-Koenen e para K na parede do silo, utilizar a equação (12).

$$K_{\text{parede}} = \frac{1 + \text{sen} \phi_e \cdot \cos(2\beta_a)}{1 - \text{sen} \phi_e \cdot \cos(2\beta_a)} \quad (12)$$

Onde,  $\beta_a$  para o estado ativo é dado pela expressão (13):

$$\beta_a = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + \phi_w + \arccos \left( \frac{\text{sen} \phi_w}{\text{sen} \phi_e} \right) \right] \quad (13)$$

Segundo Calil (1990), verificada a relação entre as pressões verticais e horizontais em ensaios de modelos, adotando o valor de K determinado experimentalmente para cada silo a ser projetado, a expressão para o cálculo das pressões horizontais em silos baixos é dada por:  $p_h = \gamma \cdot h \cdot K$ , expressão também citada por Rankine. O modelo empírico então se baseia na determinação do valor de K de forma indireta ou experimentalmente.

Ayuga (1995) determina o valor de K em função do tipo de parede. O autor adota três equações: para o caso de paredes absolutamente lisas,  $\phi_w = 0$ , adota a equação (2) de Rankine-Koenen; para o caso de paredes muito rugosas,  $\phi_i = \phi_w$ , adota a equação (7) de Hartmann; para os casos intermediários, adota a formulação do K proposta pela norma francesa SNBATI (1975), apresentada na equação (14).

$$K = \frac{1 - m \cdot \text{sen} \phi_e}{1 + m \cdot \text{sen} \phi_e} \cdot \cos^2 \phi_w \quad (14) \quad \text{Onde, } m = \sqrt{1 - \frac{\text{tg}^2 \phi_w}{\text{tg}^2 \phi_e}}$$

Haaker (1999) relata que o problema com todas as propostas para o parâmetro K é que elas foram obtidas somente das hipóteses que o produto está em um estado de deslizamento e o atrito com a parede é mobilizado completamente. Estas hipóteses, segundo ele, não são necessariamente cumpridas na parede vertical da célula.

Stoffers, citado por Kaminsk e Wirska (1998), vê a causa da variabilidade na determinação dos valores do parâmetro K, no caráter estocástico das pressões, na falta de bons equipamentos de medição e aponta dificuldades no desenvolvimento de um modelo numérico que incorpore o caráter estocástico do fenômeno das pressões.

Segundo Lohnes (1993), claramente, não existe nenhum acordo completo sobre o que constitui um valor apropriado para o parâmetro K e poucos dados experimentais estão disponíveis para comparação com cálculos teóricos. Também segundo ele, a hipótese do produto armazenado estar em ruptura parece irracional para cargas estáticas e sugere para produtos que estão confinados, mas não em ruptura, a equação simplificada de Jaky (5).

### 2.3 Recomendações das normas internacionais para o cálculo do K

As normas estrangeiras propõem, em tabelas próprias, valores para o parâmetro K para alguns produtos listados ou indicam fórmulas matemáticas para a sua obtenção, fornecendo os valores dos parâmetros envolvidos, ou para o caso dos mesmos serem obtidos experimentalmente.

A norma francesa, SNBATI (1975), define dois valores para K: para o carregamento do silo, adota a equação (14) apresentada anteriormente; para o descarregamento do silo, adota a seguinte expressão:

$$K = \cos^2 \phi_w.$$

A norma canadense, CFBC (1983), somente fornece o valor de K em uma tabela para oito produtos, em função da rugosidade da parede. Para produtos granulares apresenta o valor de 0,4 para paredes lisas e 0,6 para paredes rugosas.

A norma britânica, BMHB (1985), define dois valores para K: para o cálculo das pressões verticais, adota K = 0,25; para o cálculo das pressões horizontais, adota K = 0,60, exceto em casos em que a parede seja muito rugosa, o valor de K deve ser tomado igual a 0,75.

A norma americana, ACI 313-91 (1991), propõe para o valor de K a fórmula de Rankine – Koenen (1), substituindo o efetivo ângulo de atrito interno ( $\phi_e$ ) pelo ângulo de repouso ( $\phi_r$ ), que de um modo geral é menor que ( $\phi_e$ ) e sugere valores para o limite inferior e superior de  $\phi_r$ , para 8 produtos.

A norma australiana, AS3774 (1996), adota a fórmula de Walker para a determinação do valor de K, equação (6), limitando K como maior ou igual a 0,35. Esta norma fornece, em tabela própria, os valores limites inferior e superior de ( $\phi_i$ ) para 23 produtos e o respectivo ( $\phi_w$ ), em função da rugosidade da parede, e propõe em anexo a obtenção de ( $\phi_i$ ), para o caso de silos de parede de chapa de aço corrugada. Com base nos valores de ( $\phi_i$ ) e ( $\phi_w$ ), esta norma propõe a determinação do K através de ábaco próprio, para cada ângulo de atrito com a parede do silo.

A norma européia, ISO 11697 (1997), fornece o valor de K em uma tabela para cinco classes de produtos, apenas para paredes lisas. Os valores fornecidos na tabela variam de 0,30 a 0,75. Para os produtos que não constam nesta tabela, o valor de K pode ser determinado, experimentalmente, semelhantemente ao proposto pela norma PrENV 1991-4 (2002), ou de forma indireta pela expressão de Jaky, considerando um coeficiente de ponderação igual a 1,1, ou seja:

$$K = 1,1(1 - \text{sen} \phi_e) \quad (15)$$

A norma americana, ANSI/ASAE EP 433 (2001), adota um único valor do parâmetro K de 0,50 para produtos granulares agrícolas.

A norma européia, PrENV 1991-4 (2002), fornece o valor de K em uma tabela para dez produtos, para paredes lisas e rugosas, excluindo a de chapa corrugada. Os valores fornecidos na tabela variam de 0,40 a 0,55. Para os produtos que não constam nesta tabela, o valor de K pode ser determinado, experimentalmente, por metodologia definida em anexo da norma, obtenção direta com a determinação da pressão horizontal e vertical ou de forma indireta, como apresentado na equação (16).

A norma alemã, DIN 1055-6 (2005), fornece o valor de K em duas tabelas para 24 produtos, variando entre 0,4 e 0,65. Para os produtos não listados, propõe a forma indireta de determinação pela expressão de Jaky, considerando um coeficiente de ponderação igual a 1,2 (ver equação (16)), onde ( $\phi_e$ ) deverá ser obtido em ensaio de cisalhamento direto.

$$K = 1,2(1 - \text{sen} \phi_e) \quad (16)$$

Segundo a DIN 1055-6, o fator 1,2 foi escolhido para garantir que em pequenas alturas do produto armazenado, ou seja, na parte superior do silo, resultem curvas de pressões mais completas.

### 3 PROGRAMA EXPERIMENTAL

#### 3.1 Ensaios de determinação das propriedades físicas dos produtos armazenados

##### 3.1.1 Ensaios no aparelho Jenike Shear Tester

As propriedades físicas dos produtos armazenados foram determinadas experimentalmente com a utilização do equipamento Jenike Shear Tester disponível no Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeira da Escola de Engenharia de São Carlos (LaMEM/SET/EESC/USP). A metodologia de ensaio utilizada para determinação das propriedades físicas foi a proposta pela Federação Européia de Engenheiros Químicos, no manual Standart Shear Testing Technique for Particulate Solids Using the Jenike Shear Cell (SSTT, 1989).

O aparelho de cisalhamento direto de Jenike (Figura 1) é equipado com: uma célula de cisalhamento de forma circular, posicionada sobre a base da máquina; um pendural com pesos, para aplicação de uma carga vertical por gravidade na célula; um suporte de carga acionado eletro-mecanicamente, o qual promove a ação do cisalhamento movendo-se horizontalmente numa velocidade entre 1 e 3 mm/min; uma célula de carga para medir a força de cisalhamento e um registrador para a indicação desta força. A célula de cisalhamento de Jenike é composta por: base, anel de cisalhamento, tampa de cisalhamento, suporte e pino de carga.



Figura 1 – Aparelho de cisalhamento direto, Jenike Shear Tester.

Segundo Milani (1993), a primeira parte do teste de cisalhamento de Jenike consiste na preparação da amostra e depois o seu pré-cisalhamento com uma seleção das cargas para desenvolver uma zona de cisalhamento dentro da qual ocorra fluxo de estado estável. Tendo alcançado esta estabilidade, a haste de medida de força é retraída e, portanto, a força de cisalhamento cai à zero. Na segunda parte, a carga é trocada por uma menor, o motor é acionado novamente e a força é medida na haste na direção desenvolvida. Quando a haste toca o suporte, a força de cisalhamento aumenta rapidamente, indo direto a um valor máximo, representando a força de cisalhamento de deslizamento e depois ela começa a diminuir. Esta parte do teste é chamada de cisalhamento.

Para a realização dos ensaios de caracterização dos produtos armazenados, foram retiradas 21 amostras aleatórias de cada produto estudado. As amostras foram embaladas em sacos plásticos transparentes, identificados e lacrados com fita adesiva para evitar a perda de umidade (Figura 2).



Figura 2 – Amostras de milho, soja e ração de frango, respectivamente.

A determinação do ângulo de atrito do produto armazenado com a parede também pode ser obtida no aparelho de cisalhamento direto Jenike Shear Tester (Figura 3). Neste caso, a base da célula de cisalhamento é substituída por uma amostra do material da parede que será avaliada. Para a soja, o milho e a ração de frango, foram realizados ensaios de cisalhamento com dois tipos de material de parede (aço liso e aço rugoso).



Figura 3 – Ensaio de cisalhamento com a parede no Jenike Shear Tester.

### 3.1.1 Ensaios de umidade e granulometria dos produtos armazenados

Antes e durante o período do ensaio no silo piloto, coletaram-se amostras dos produtos armazenados para a determinação de seus teores de umidade, temperatura e densidade (in-natura) em equilíbrio ao ar. Para isso foi utilizado o Medidor de Umidade Digital G800 (Figura 4) que possibilita a análise da umidade, temperatura e densidade utilizando a tecnologia Flowthru, totalmente automática. A determinação granulométrica foi feita pelo método de peneiramento, com o auxílio do agitador mecânico das peneiras (Figura 4) o qual, segundo Calil (1984), pode ser utilizado para classificação dos produtos quanto à coesão e ao fluxo.



Figura 4 – Medidor de umidade G800 e agitador mecânico das peneiras, respectivamente.

### 3.1.2 Ensaios no silo piloto para a determinação do parâmetro K

Para a determinação experimental do parâmetro K, foi utilizado o silo piloto construído no LaMEM, doado pela empresa KEPLER WEBER S.A. Este silo foi projetado com base no modelo de Pieper e Schütz (1980), modelo este que também foi utilizado como padrão pela norma alemã DIN 1055. Além do silo piloto, foi necessária a utilização de um silo auxiliar de armazenamento, também doado pela KEPLER WEBER S.A., e um elevador de canecas para a operação de enchimento do silo, doado pela CASP S.A., formando assim uma estação experimental (Figura 5). Segundo Pieper e Schutz (1980), o silo piloto é definido como aquele em que os efeitos de escala são insignificantes, pois suas dimensões e as dimensões do produto são compatíveis com as estruturas reais. Assim sendo, os resultados obtidos podem ser utilizados no estudo de estruturas reais, ou seja, o comportamento do modelo piloto pode ser considerado idêntico (qualitativamente e quantitativamente) ao comportamento em escala 1:1.



Figura 5 – Silo para armazenagem, silo piloto e a estação experimental, respectivamente.

As características do silo piloto utilizado são: diâmetro interno de 70,6 cm com parede interna lisa; diâmetro interno de 64,36 cm com parede interna rugosa; altura de 600 cm; capacidade de armazenagem de 2,3 m<sup>3</sup> para produto granular; 12 anéis independentes suspensos de modo estaticamente determinado, cada um com 50 cm de altura; fundo plano; espessura de parede de 10 mm (necessária para que a deformação do anel permaneça pequena, de modo que não influencie as medidas de pressão). Cada anel do silo piloto foi

calandrado em dois semi-cilindros soldados verticalmente em um lado e do outro lado unido por duas braçadeiras/presilhas horizontais de medição (células de carga de 8 kN), que são pré-tracionadas por três molas helicoidais, para que sempre estejam sujeitas a esforço de tração (Figura 6). Os anéis também são suspensos por braçadeiras/presilhas verticais de medição (células de carga de 8 kN) para determinação da força de atrito nas paredes. Todas as ligações das presilhas são articuladas nos apoios e anéis, cuja conexão se dá por meio de pinos de aço inoxidável. Para que os apoios dos anéis sejam estaticamente determinados, são colocadas braçadeiras verticais lateralmente e posteriormente.

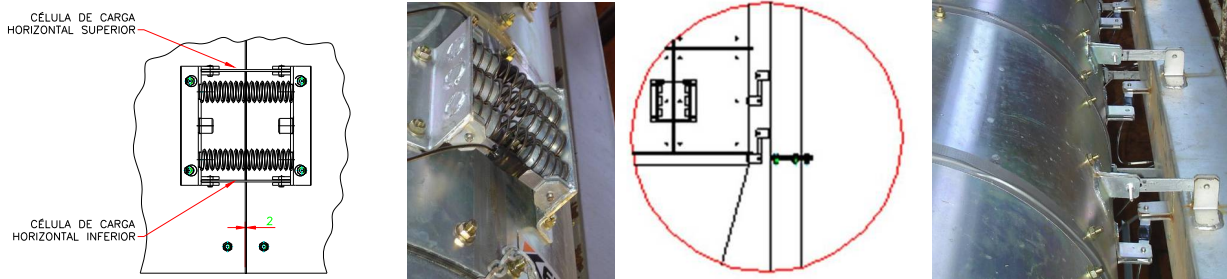


Figura 6 – Sistema de medição das pressões horizontais e da força de atrito nas paredes.

Entre os anéis, foram coladas borrachas internas de vedação que se deterioraram ao longo dos ensaios, sendo necessária sua remoção e reposição. Além das borrachas internas, foi adicionada uma faixa de borracha entre os anéis (Figura 7) para evitar o vazamento do produto armazenado.



Figura 7 – Sistema de vedação entre os anéis do silo piloto.

Sob as duas colunas do silo piloto, foram instaladas células de carga com capacidade de 50 kN para medição da força total mobilizada pelo atrito. As células de carga foram confeccionadas em alumínio com liga especial, pela empresa Micro Sensores Industriais (MSI). O dispositivo de descarga, fundo plano, é suspenso e parafusado nas colunas de medição (Figura 8). Para as medidas de pressão no fundo plano, foram colocadas 4 células de pressão do tipo diafragma, com capacidade nominal de 70 kPa, diâmetro de 53 mm, força total de 160 N, fixadas com o auxílio de uma base de madeira compensada e parafusos passantes.

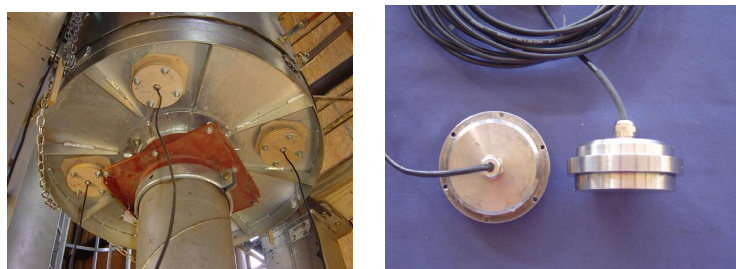


Figura 8 – Fundo plano e as células de pressão tipo diafragma.

A determinação das pressões foi realizada por meio da medição das deformações nas presilhas, obtendo-se os valores das pressões atuantes nos anéis, fundo plano e células de carga nas colunas do silo piloto.

O silo piloto utilizado nos ensaios oferece uma solução adequada para a determinação dos parâmetros envolvidos, satisfazendo as seguintes condições: pontos de medição em quantidade suficiente para determinar todas as possíveis pressões; medição de carregamentos integrados sobre grandes superfícies, tal que não sejam medidos picos de carregamento não importantes na avaliação dos coeficientes de sobrepressão; grande relação altura / diâmetro, possibilitando que as máximas pressões no silo sejam medidas sem a influência da superfície livre e do fundo; parede bastante lisa e a possibilidade de outra bastante rugosa para que a influência da rugosidade da parede possa ser quantificada.

Os ensaios no silo piloto foram realizados variando a rugosidade da parede do silo, aço liso e aço rugoso. Para os ensaios com a parede rugosa foram parafusados internamente semi-anéis de aço rugoso.

Os ensaios no silo piloto foram realizados para quatro alturas ( $h$ ) diferentes de produto armazenado:  $h=1,5\text{m}$  (3 anéis);  $h=3,0\text{m}$  (6 anéis);  $h=4,5\text{m}$  (9 anéis) e  $h=5,5\text{m}$  (11 anéis). Portanto, temos as seguintes relações  $h/d$ : para parede lisa:  $h/d = 2,12$ ;  $h/d = 4,25$ ;  $h/d = 6,37$ ;  $h/d = 7,79$ ; para parede rugosa:  $h/d = 2,33$ ;  $h/d = 4,66$ ;  $h/d = 6,99$ ;  $h/d = 8,54$ . Para controlar o nível de produto armazenado no silo piloto, foi desenvolvido o sistema manual apresentado na Figura 9.



Figura 9 – Controle do nível de produto no silo piloto (CHEUNG, 2007).

A aquisição de sinais foi realizada por meio do sistema de aquisição de dados LYNX (AD 2122), com 4 placas de aquisição, sendo 2 do modelo 2160 e 2 do modelo 2161, perfazendo um total de 64 canais (Figura 10). Este sistema possui uma frequência de amostragem máxima de 65,5 kHz. Porém, foram utilizadas duas frequências de amostragem, uma para o período de carregamento e armazenamento, com o valor de 1 Hz, e outra para o período descarregamento, com o valor de 1 kHz. Essas frequências foram adotadas após ensaios preliminares realizados por Cheung (2007) e mostraram-se adequadas por não apresentarem vazamentos de dados após a utilização de técnicas de análise de sinais.

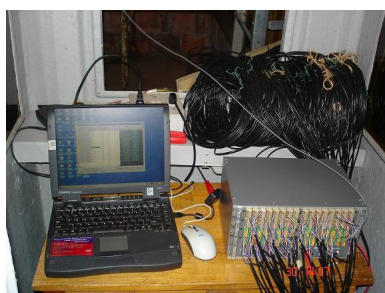


Figura 10 – Sistema de aquisição de dados utilizado no silo piloto.

O ensaio de calibração das células de carga foi realizado na máquina universal AMSLER. Esse ensaio constituiu-se na aplicação de uma força de tração. As células foram conectadas ao sistema de aquisição de dados para a leitura e comparação com as forças de tração fornecidas pelo fabricante. Para as células de pressão do tipo diafragma, foi utilizado um sistema de calibração com água. Esse sistema é constituído por um tubo de PVC de 65 mm de diâmetro, com um anel torneado em PVC para a colocação de um revestimento plástico. A célula é apoiada sobre um suporte de madeira com uma saliência interna e com a face sensível disposta dentro do tubo (Figura 11). Para que as medidas fossem comparadas, foi adicionada uma mangueira transparente conectada em sistema de vasos comunicantes. Avaliaram-se as pressões em incrementos de 0,5 m de coluna de água até uma altura de 2 m.

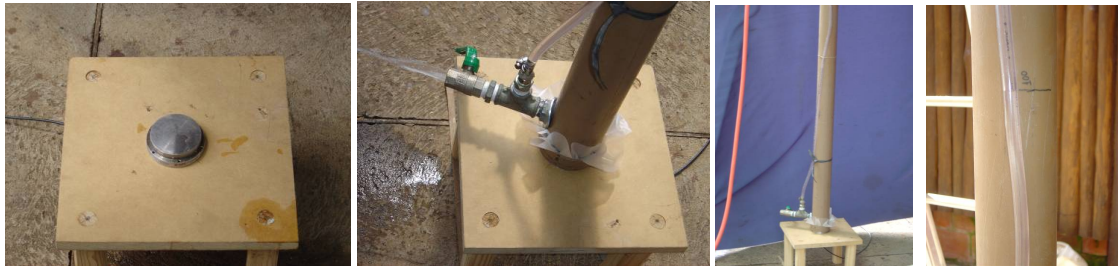


Figura 11 – Calibração da célula de pressão.

O silo piloto foi revestido com uma lona plástica e preenchido com água, para a realização da calibração das constantes dos 12 anéis, em relação às pressões horizontais. Uma mangueira plástica translúcida foi utilizada para a visualização do nível d' água e as leituras correspondentes. Para o descarregamento da água foi adicionado um registro esférico, acoplado a um flange no fundo do silo, que estava apoiado em uma placa de madeira compensada com um furo para a saída da tubulação. Esse procedimento de calibração foi feito para cada tipo de parede do silo piloto, pois a fixação da parede ondulada adicionou rigidez ao sistema e, conseqüentemente, mudança da constante de calibração. Para controle da abertura da boca de descarga do silo piloto, foi afixada no fundo plano, uma chapa metálica tipo gaveta, onde a abertura era feita manualmente (Figura 12). Foi colocado um cano, após a boca de descarga, para evitar a perda do produto, já que foram feitas repetições dos ensaios.



Figura 12 – Detalhes da boca de descarga do silo piloto.

Os primeiros ensaios foram realizados com o milho e a parede interna do silo lisa. Para estas condições foram feitas 12 repetições (ciclos de carga e descarga). Porém, foi constatado que este número poderia ser reduzido após a adequação dos ensaios e verificação da variabilidade com o aumento do número de réplicas. Portanto, para os ensaios com os outros produtos (soja e ração de frango) e tipos de parede (lisa e rugosa) foram feitas 6 repetições para cada combinação de produto com material da parede. Faz-se exceção à ração de frango com a parede rugosa, pois com esta condição, não foi possível obter o fluxo do produto. O total de ensaios realizados no silo piloto foram 144.

## 4 RESULTADOS DOS ENSAIOS DAS PROPRIEDADES FÍSICAS DOS PRODUTOS ARMAZENADOS

### 4.1 Resultados das propriedades físicas do milho

A amostra de milho encontrava-se com a umidade média de 13,57%, com peso específico aparente médio de 7,90 kN/m<sup>3</sup>, a uma temperatura média de 21,84°C. O ensaio de granulometria não é apresentado, pois todas as partículas ficaram retidas na abertura de peneira superior a 0,42mm, fazendo com que o produto seja classificado como granular. Para análise dos ensaios de cisalhamento direto no aparelho Jenike Shear Tester, foi utilizado o programa desenvolvido por Cheung (2007) para a obtenção das envoltórias de resistência Yield Locus, conforme mostrado na Figura 13. Esse programa foi desenvolvido na linguagem C++ Builder 5.0, que oferece, como principal vantagem, a possibilidade de utilização de componentes visuais e programação orientada a objetos.

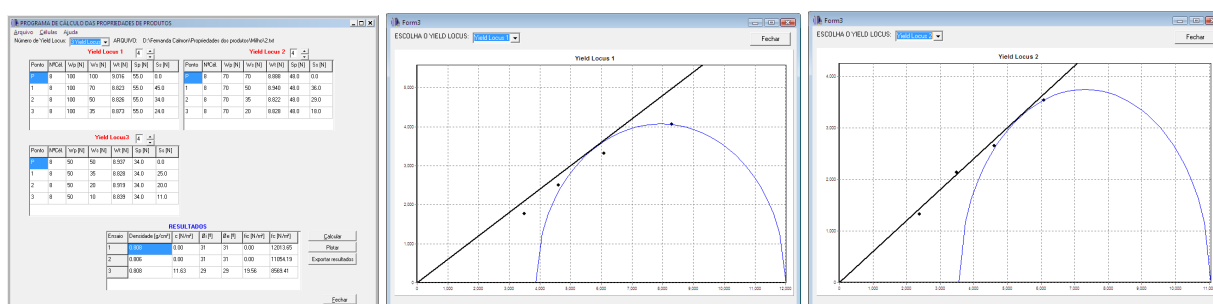


Figura 13 – Programa utilizado para calcular as propriedades físicas dos produtos armazenados.

Os parâmetros estatísticos (média, desvio padrão e coeficiente de variação) do peso específico ( $\gamma$ ), coesão ( $c$ ), ângulo de atrito interno ( $\phi_i$ ), efetivo ângulo de atrito interno ( $\phi_e$ ), tensão confinada ( $\sigma_{ic}$ ) e tensão máxima de consolidação ( $\sigma_c$ ), obtidos nos ensaios de cisalhamento direto para as 21 amostras de milho, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados dos ensaios no Jenike Shear Tester com o milho

Parâmetros Estatísticos	Peso específico ( $\gamma$ ) (kN/m <sup>3</sup> )	Coesão ( $c$ ) (kPa)	Ângulo de atrito interno ( $\phi$ )		Tensão confinada ( $\sigma_{ic}$ )		$\sigma_c$ (kPa)	
			$\phi_i$ (°)	$\phi_e$ (°)	(Aço Liso)	(Aço Rugoso)		
<b>Média</b>	8,10	0,04	29,53	29,78	10,66	12,72	0,11	10,28
<b>Desvio padrão</b>	0,27	-	2,51	2,18	1,58	1,96	-	2,47
<b>Coeficiente de variação</b>	3,29%	-	8,50%	7,30%	14,80%	15,30%	-	24,00%

Com as propriedades físicas do milho, determinadas no Jenike Shear Tester, foram calculados os valores de K, apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores de K encontrados para o milho, segundo os especialistas

	Koenen	Jaky	Walker (Aço liso)	Walker (Aço rugoso)	Hartmann	Frazer (Aço liso)	Frazer (Aço rugoso)
<b>Média</b>	0,34	0,45	0,35	0,35	0,60	0,36	0,35
<b>Desvio padrão</b>	0,0143	0,0155	0,0157	0,0164	0,0206	0,0531	0,0290
<b>Coeficiente de variação</b>	4,26%	3,46%	4,54%	4,69%	3,41%	14,86%	8,33%

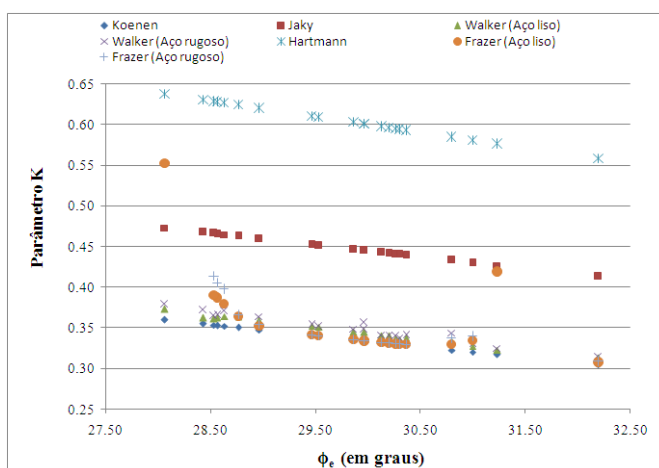


Figura 14 – Valores de K para o milho em função do  $\phi_e$ , segundo os especialistas.

As variabilidades encontradas por meio das formulações sugeridas pelos pesquisadores apresentam diferenças significativas para o valor de K do milho (Tabela 2). As formulações de Hartmann e Jaky apresentaram as menores variabilidades, o que representa que elas são menos susceptíveis a variabilidade do efetivo ângulo de atrito interno. As formulações propostas por Frazer, Walker e Koenen possuem as maiores dispersões, que são influenciadas pelo efetivo ângulo de atrito.

## 4.2 Resultados das propriedades físicas da soja

A amostra de soja encontrava-se com a umidade média de 10,99%, com peso específico aparente médio de 7,15 kN/m<sup>3</sup>, a uma temperatura média de 24,75 °C. Assim como no caso do milho, o ensaio de granulometria não é apresentado, já que todas as partículas ficaram retidas na abertura de peneira superior a 0,42 mm, classificando o produto como granular. A Tabela 3 apresenta os parâmetros estatísticos (média, desvio padrão e coeficiente de variação) do peso específico ( $\gamma$ ), coesão (c), ângulo de atrito interno ( $\phi_i$ ), efetivo ângulo de atrito interno ( $\phi_e$ ), tensão confinada ( $\sigma_{ic}$ ) e tensão máxima de consolidação ( $\sigma_c$ ), obtidos nos ensaios de cisalhamento direto para as 21 amostras da soja.

Tabela 3 – Resultados dos ensaios no Jenike Shear Tester com a soja

Parâmetros Estatísticos	Peso específico ( $\gamma$ ) (kN/m <sup>3</sup> )	Coesão (c) (kPa)	$\phi_i$ (°)	$\phi_e$ (°)	$\phi_{w.}$ (°) (Aço Liso)	$\phi_{w.}$ (°) (Aço Rugoso)	$\sigma_{ic}$ (kPa)	$\sigma_c$ (kPa)
Média	7,18	0,23	34,81	35,71	10,53	10,68	0,84	23,73
Desvio padrão	0,11	-	2,67	2,80	0,97	1,21	-	6,00
Coefficiente de variação	2,00%	-	8,00%	8,00%	9,20%	11,30%	-	25,00%

Tabela 4 – Valores de K encontrados para a soja, segundo os especialistas

	Koenen	Jaky	Walker (Aço liso)	Walker (Aço rugoso)	Hartmann	Frazer (Aço liso)	Frazer (Aço rugoso)
Média	0,26	0,37	0,27	0,27	0,49	0,27	0,27
Desvio padrão	0,0274	0,0319	0,0286	0,0285	0,0442	0,0308	0,0315
Coefficiente de variação	10,40%	8,71%	10,67%	10,60%	8,97%	11,44%	11,67%

As variabilidades encontradas na Tabela 4 e na Figura 15 apresentam diferenças significativas para o valor de K da soja. Os valores encontrados, utilizando as fórmulas de Hartmann e Jaky foram os que apresentaram as menores variabilidades. Já as formulações propostas por Frazer, Walker e Koenen para a determinação de K, foram as que apresentaram as maiores dispersões para a soja.

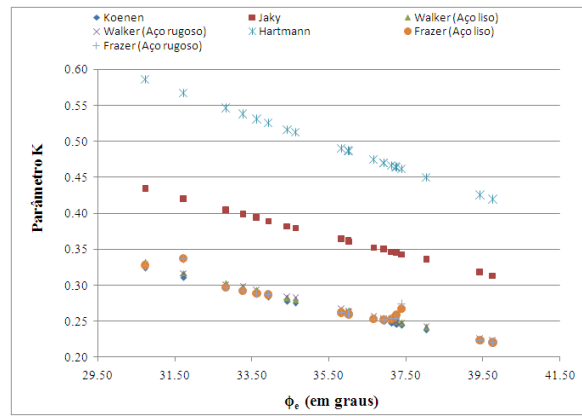


Figura 15 – Valores de K para a soja em função do  $\phi_e$ , segundo os especialistas.

### 4.3 Resultados das propriedades físicas da ração de frango

A amostra de ração de frango encontrava-se com a umidade média de 13,57%, com peso específico aparente médio de 7,91 kN/m<sup>3</sup>, a uma temperatura média de 21,65°C. A curva granulométrica média (Figura 16) obtida para a ração de frango mostra que a maior parte do produto ficou retida entre as peneiras nº 40 (0,42 mm) e nº 100 (0,149 mm). De acordo com a classificação proposta por Calil (1984), a ração de frango é caracterizada como um produto pulverulento coesivo.

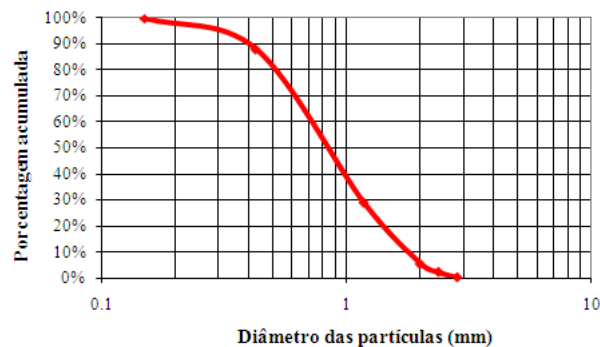


Figura 16 – Curva granulométrica da ração de frango.

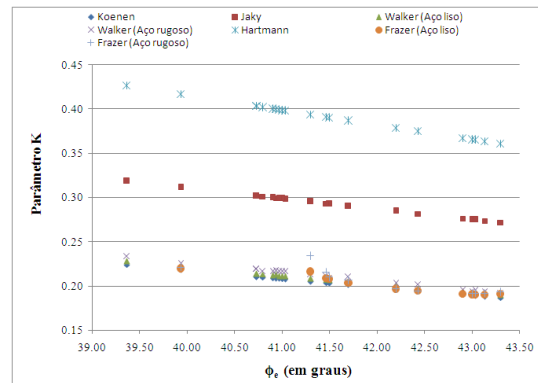
Os parâmetros estatísticos (média, desvio padrão e coeficiente de variação) do peso específico ( $\gamma$ ), coesão ( $c$ ), ângulo de atrito interno ( $\phi_i$ ), efetivo ângulo de atrito interno ( $\phi_e$ ), tensão confinada ( $\sigma_{ic}$ ) e tensão máxima de consolidação ( $\sigma_c$ ), obtidos nos ensaios de cisalhamento direto para as 21 amostras da ração de frango, são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resultados dos ensaios no Jenike Shear Tester com a ração de frango

Parâmetros Estatísticos	Peso específico ( $\gamma$ ) (kN/m <sup>3</sup> )	Coesão ( $c$ ) (kPa)	$\phi_i$ (°)	$\phi_e$ (°)	$\phi_{w.}$ (°) (Aço Liso)	$\phi_{w.}$ (°) (Aço Rugoso)	$\sigma_{ic}$ (kPa)	$\sigma_c$ (kPa)
Média	7,93	0,90	37,98	41,54	12,78	18,17	0,84	24,70
Desvio padrão	0,15	0,35	2,36	1,41	1,01	1,79	1,31	5,58
Coeficiente de variação	1,90%	39,10%	6,20%	3,40%	7,90%	10,00%	36,20%	22,60%

Tabela 6 – Valores de K da ração de frango, segundo os especialistas

	Koenen	Jaky	Walker (Aço liso)	Walker (Aço rugoso)	Hartmann	Frazer (Aço liso)	Frazer (Aço rugoso)
<b>Média</b>	0,20	0,29	0,21	0,21	0,39	0,20	0,20
<b>Desvio padrão</b>	0,0103	0,0130	0,0106	0,0114	0,0183	0,0109	0,0145
<b>Coefficiente de variação</b>	5,10%	4,44%	5,15%	5,44%	4,70%	5,46%	7,12%

Figura 17 – Valores de K da ração de frango em função do  $\phi$ , segundo os especialistas.

Mais uma vez os valores de K encontrados com as fórmulas de Jaky e Hartmann, foram os que apresentaram as menores variabilidades. As formulações propostas por Frazer, Walker e Koenen para a determinação de K, foram as que apresentaram as maiores dispersões para a ração de frango. Resultados dos ensaios no silo piloto com os produtos armazenados.

#### 4.4 Resultados do milho no silo piloto com a parede lisa

Tabela 7 – Variabilidade do K obtida com o milho no ensaio do silo piloto com a parede lisa

Parâmetro K experimental			
h/d	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de variação
2.12	0,455	0,036	7,91%
4.25	0,398	0,037	9,30%
6.37	0,405	0,026	6,42%
7.79	0,402	0,028	6,96%

Os valores que apresentaram as maiores dispersões foram os obtidos com as relações  $h/d=2,12$  e  $h/d=4,25$ , o que indica a influência da geometria no parâmetro K, porém a variabilidade é reduzida à medida que esta relação aumenta. É importante observar que os valores encontrados de K para as relações de  $h/d > 2,12$  são iguais ao valor sugerido por Jenike (1973) de  $K=0,4$ . Ele afirma que este valor deve ser usado para o cálculo das pressões de carregamento, o qual está a favor da segurança. Porém, como pode ser observado dos resultados experimentais, foram obtidos valores de K superiores para a relação de  $h/d = 2,12$ . Desta forma, essa recomendação deve ser seguida com ressalvas, para que as pressões calculadas não sejam inferiores às obtidas experimentalmente. A Figura 18 apresenta os dados experimentais ajustados pela regressão linear do parâmetro K do milho em relação à altura de produto armazenado no silo piloto com parede lisa. A Tabela 8 resume os dados experimentais. A Tabela 9 apresenta a comparação dos valores teóricos do parâmetro K do milho com o valor médio experimental, obtido no silo piloto com a parede lisa (Tabela 8). Observa-se que os valores teóricos possuem diferenças significativas em relação ao experimental, que está contido no intervalo dos

valores encontrados com as formulações de Koenen e Hartmann. Nota-se que a formulação de Jaky foi a que mais se aproximou do valor de K experimental, com uma diferença de 8,89%.

Tabela 8 – Parâmetros estatísticos relativos aos ensaios do milho no silo piloto - parede lisa

	<b>K</b>
<b>Média</b>	0,41
<b>Desvio Padrão</b>	0,03
<b>Coefficiente de variação</b>	7,30%

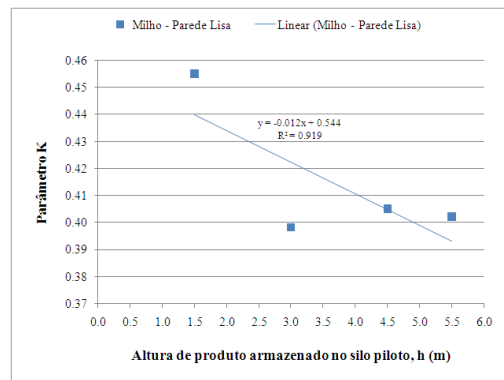


Figura 18 – Comportamento do K do milho armazenado no silo piloto com parede lisa.

Tabela 9 – Comparação entre o K teórico do milho e o obtido no silo piloto com parede lisa

	<b>Experimental</b>	<b>Koenen</b>	<b>Jaky</b>	<b>Walker</b>	<b>Hartmann</b>	<b>Frazer</b>
	0,41	0,34	0,45	0,35	0,60	0,36
<b>Diferença entre o K experimental e o teórico</b>		17.07%	8.89%	14.63%	31.67%	12.19%

#### 4.5 Resultados do milho no silo piloto com a parede rugosa

Tabela 10 – Variabilidade do K obtida com o milho no ensaio do silo piloto - parede rugosa

<b>Parâmetro K experimental</b>			
<b>h/d</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>Coefficiente de variação</b>
<b>2,33</b>	0,442	0,029	6,56%
<b>4,66</b>	0,434	0,024	5,53%
<b>6,99</b>	0,427	0,033	7,73%
<b>8,54</b>	0,431	0,029	6,73%

Os valores de K do milho com a parede rugosa que apresentaram as maiores dispersões foram os obtidos com as maiores relações h/d (6,99 e 8,54), comportando-se de modo oposto ao encontrado com a parede lisa. Ou seja, quanto maior a relação h/d maior será a variabilidade de K com a parede rugosa. Indicando que quanto maior a relação h/d, maior será a influência da rugosidade da parede no parâmetro K. A Figura 19 apresenta os dados experimentais ajustados pela regressão linear do parâmetro K do milho em relação à altura de produto armazenado no silo piloto com parede rugosa. A Tabela 11 resume os dados experimentais.

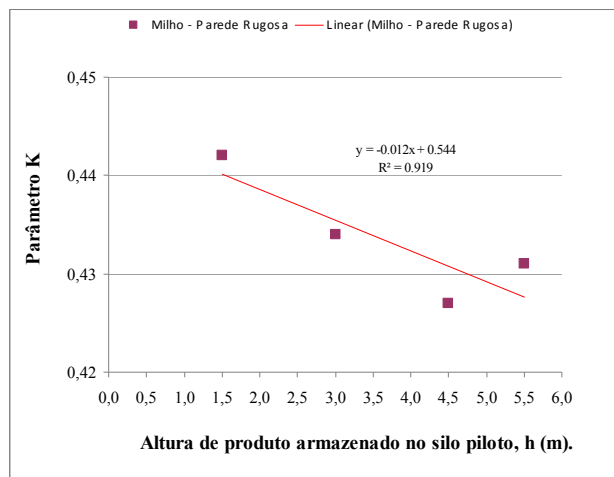


Figura 19 – Comportamento do K do milho armazenado no silo piloto com parede rugosa.

Tabela 11 – Parâmetros estatísticos relativos aos ensaios do milho no silo piloto com parede rugosa

	<b>K</b>
<b>Média</b>	0,43
<b>Desvio Padrão</b>	0,03
<b>Coefficiente de variação</b>	6,98%

Observa-se que o valor de K encontrado para o milho com a parede rugosa (0,43) foi maior do que o valor obtido com a parede lisa (0,41), com uma pequena diferença de 4,65%. Essa diferença conduz à conclusão de que a rugosidade da parede influencia pouco no valor do parâmetro K do milho, podendo até ser desprezível, como foi constatado também pelos pesquisadores estudados. A comparação dos valores teóricos do parâmetro K do milho com os valores obtidos experimentalmente no silo piloto com a parede rugosa está apresentada na Tabela 12. Assim como no caso da parede lisa, nota-se que os valores teóricos possuem diferenças significativas em relação ao experimental, e que o valor de K experimental está contido no intervalo dos valores encontrados com as formulações de Koenen e Hartmann. Novamente, a formulação de Jaky foi a que mais se aproximou do valor de K experimental, com uma diferença de 4,44%.

Tabela 12 – Comparação entre o K teórico do milho e o obtido no silo piloto com parede rugosa

	<b>Experimental</b>	<b>Koenen</b>	<b>Jaky</b>	<b>Walker</b>	<b>Hartmann</b>	<b>Frazer</b>
	0,43	0,34	0,45	0,35	0,60	0,35
<b>Diferença entre o K experimental e o teórico</b>		20,93%	4,44%	18,65%	28,33%	18,65%

#### 4.6 Resultados da soja no silo piloto com parede lisa

As maiores dispersões apresentadas na Tabela 13, foram obtidas com as relações  $h/d=2,12$  e  $h/d=4,25$ , confirmando a influência da geometria no parâmetro K, já percebida com o milho. Nota-se que a variabilidade de K, neste caso, é menor para relações  $h/d$  maiores.

A Figura 20 apresenta os dados experimentais ajustados pela regressão linear do parâmetro K da soja em relação à altura de produto armazenado no silo piloto com parede lisa. A Tabela 14 resume os dados experimentais.

Tabela 13 – Variabilidade do K obtida com a soja no ensaio do silo piloto com a parede lisa

Parâmetro K experimental			
h/d	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de variação
2,12	0,320	0,023	7,19%
4,25	0,318	0,042	13,21%
6,37	0,310	0,009	2,90%
7,79	0,303	0,010	3,20%

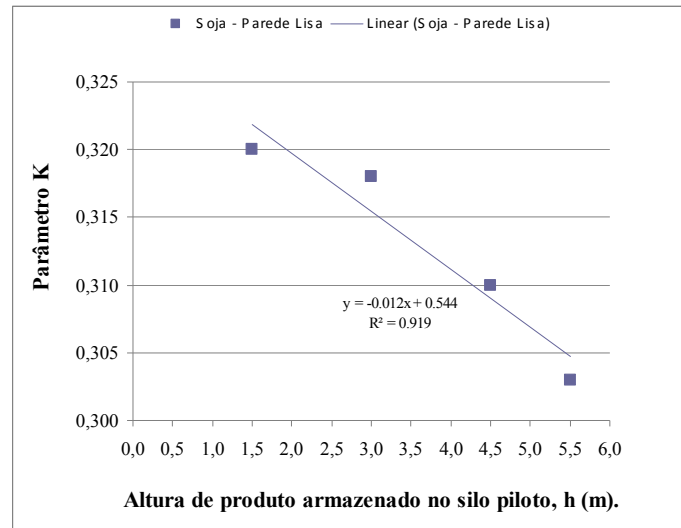


Figura 20 – Comportamento do K da soja armazenada no silo piloto com parede lisa.

Tabela 14 – Parâmetros estatísticos relativos aos ensaios da soja no silo piloto com parede lisa

	K
Média	0,41
Desvio Padrão	0,03
Coefficiente de variação	7,30%

Notam-se diferenças significativas entre os valores teóricos de K da soja em relação aos encontrados no silo piloto com parede lisa, como pode ser visto na Tabela 15. O valor de K experimental está contido no intervalo dos valores encontrados com as formulações de Koenen e Hartmann. A formulação de Jaky foi a que mais se aproximou do valor de K experimental, com uma diferença de 11,43%.

Tabela 15 – Comparação entre o K teórico da soja e o obtido no silo piloto com parede lisa

Experimental	Koenen	Jaky	Walker	Hartmann	Frazer
0,31	0,26	0,35	0,27	0,49	0,27
Diferença entre o K experimental e o teórico	16,13%	11,43%	12,90%	36,73%	12,90%

## 4.7 Resultados da soja no silo piloto com a parede rugosa

Tabela 16 – Variabilidade do K obtida com a soja no ensaio do silo piloto com a parede rugosa

Parâmetro K experimental			
h/d	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de variação
2,33	0,338	0,028	8,28%
4,66	0,340	0,016	4,71%
6,99	0,335	0,041	12,24%
8,54	0,328	0,035	10,67%

As relações  $h/d = 6,99$  e  $h/d = 8,54$  apresentaram as maiores dispersões no ensaio da soja no silo piloto com a parede rugosa, resultado contrário ao encontrado com a parede lisa. Confirmando mais uma vez, assim como nos ensaios com o milho, que quanto maior a relação  $h/d$ , maior será a influência da rugosidade da parede no parâmetro K. A Figura 21 apresenta os dados experimentais ajustados pela regressão linear do parâmetro K da soja em relação à altura de produto armazenado no silo piloto com parede rugosa. A Tabela 17 resume os dados experimentais.

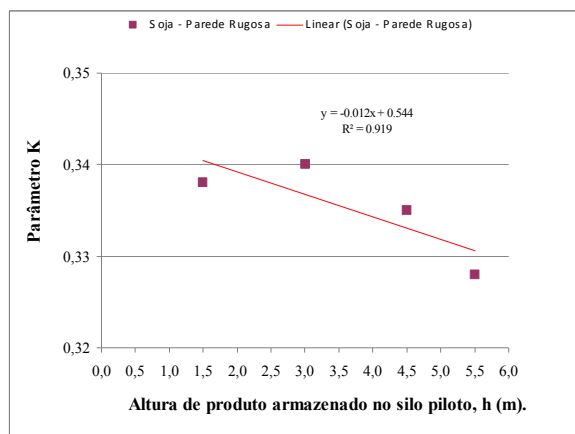


Figura 21 – Comportamento do K da soja armazenada no silo piloto com parede rugosa.

Tabela 17 – Parâmetros estatísticos relativos aos ensaios da soja no silo piloto com parede rugosa

K	
Média	0,34
Desvio Padrão	0,03
Coefficiente de variação	8,82%

Comparando a Tabela 14 e a Tabela 17, nota-se que o valor de K encontrado para a soja com a parede rugosa ( $K=0,34$ ) foi maior do que o valor obtido com a parede lisa ( $K=0,31$ ), com uma pequena diferença de 8,82%. Confirmando a conclusão encontrada para o milho de que a rugosidade da parede pouco influencia no valor do parâmetro K. A comparação dos valores teóricos do parâmetro K da soja com os valores obtidos no silo piloto com a parede rugosa está apresentada na Tabela 18. Assim como no caso da parede lisa, nota-se que os valores teóricos possuem diferenças significativas em relação ao experimental, e que o valor de K experimental está contido no intervalo dos valores encontrados com as formulações de Koenen e Hartmann. Mais uma vez, a formulação de Jaky foi a que mais se aproximou do valor de K experimental, com uma diferença insignificante de 2,86%.

Tabela 18 – Comparação entre o K teórico da soja e o obtido no silo piloto com parede rugosa

Experimental	Koenen	Jaky	Walker	Hartmann	Frazer	
0,34	0,26	0,35	0,27	0,49	0,27	
<b>Diferença entre o K experimental e o teórico</b>		23,53%	2,86%	20,59%	30,61%	20,59%

#### 4.8 Resultados da razão de frango no silo piloto com a parede lisa

Tabela 19 – Variabilidade do K obtida com a razão de frango no ensaio do silo piloto com a parede lisa

h/d	Parâmetro K experimental		
	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de variação
2,12	0,298	0,073	17,67%
4,25	0,292	0,013	3,22%
6,37	0,290	0,037	12,76%
7,79	0,288	0,012	4,17%

Os valores que apresentaram as maiores dispersões foram os obtidos com as relações  $h/d=2,12$  e  $h/d=6,37$ , diferente dos outros produtos ensaiados. Isso indica que para produtos pulverulentos pouco coesivos a influência da geometria no parâmetro K não segue uma lógica, como foi encontrada para os produtos granulares estudados. A Figura 22 apresenta os dados experimentais ajustados pela regressão linear do parâmetro K da razão de frango em relação à altura de produto armazenado no silo piloto com parede rugosa. A Tabela 20 resume os dados experimentais.

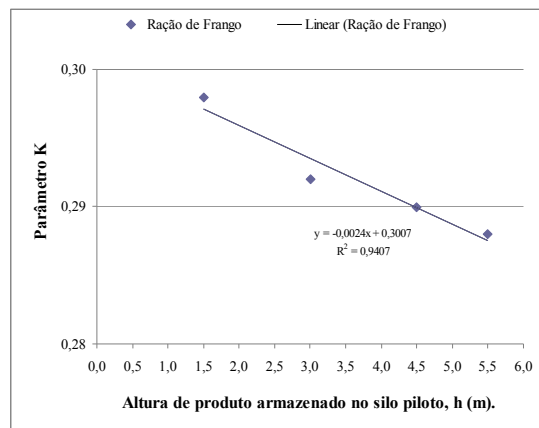


Figura 22 – Comportamento do K da razão de frango armazenada no silo piloto com parede lisa.

Tabela 20 – Parâmetros estatísticos relativos aos ensaios da razão no silo piloto com parede lisa.

K	
Média	0,29
Desvio Padrão	0,03
Coefficiente de variação	10,34%

Tabela 21 – Comparação entre o K teórico da ração de frango e o obtido no silo piloto com parede lisa.

Experimental	Koenen	Jaky	Walker	Hartmann	Frazer
0,29	0,20	0,29	0,21	0,41	0,20
<b>Diferença entre o K experimental e o teórico</b>	31,03%	0,00%	27,59%	29,27%	31,03%

Nota-se, a partir da comparação apresentada na Tabela 21, que os valores teóricos possuem diferenças significativas em relação ao experimental. Como no caso dos ensaios realizados com os outros produtos, o valor de K experimental está contido no intervalo dos valores encontrados com as formulações de Koenen e Hartmann. Assim como para os produtos granulares estudados, a formulação de Jaky foi a que apresentou o resultado mais satisfatório para a ração de frango, chegando a encontrar o valor de K teórico igual ao valor de K experimental.

## 5 CONCLUSÕES

A análise dos resultados experimentais conduziu as seguintes conclusões: a rugosidade da parede do silo exerce pouca influência na determinação do parâmetro K, podendo ser desprezada no seu cálculo; para os produtos granulares estudados, a variabilidade do parâmetro K é inversamente proporcional à relação h/d para parede lisa e diretamente proporcional para parede rugosa; para o produto pulverulento estudado, não foi possível determinar uma tendência para a variabilidade em função da relação h/d; a formulação de Jaky foi a que apresentou a melhor aproximação para o valor do parâmetro K, para a condição de carregamento e dos produtos estudados; a obtenção do parâmetro K por meio do silo piloto foi a mais indicada, porém muito mais trabalhosa e devido a sua grande variabilidade, não recomendada para a caracterização do produto.

A comparação dos valores de K teórico com os obtidos nos ensaios no silo piloto permite apontar a formulação de Jaky, em todos os casos estudados, como sendo a mais eficiente. Essa conclusão está coerente com o fato desta formulação não levar em consideração o ângulo de atrito com a parede, visto que, comprovou-se experimentalmente que a rugosidade da mesma pouco influencia na determinação do K. A formulação de Jaky é indicada pelas normas ISO 11697 (1997), PrENV 1991-4 (2002) e DIN 1055-6 (2005), com os coeficientes de ponderação de 1,1 para as duas primeiras e 1,2 para a última.

## 6 REFERÊNCIAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Standard Practice for Design and Construction of Concrete Silos and Stacking Tubes for Storing Granular Materials**. Revised. ACI 313. EUA, 1991. p. 313-377.

AIRY, W. **The pressure of grain. Minutes of proceedings**. Institution of Civil Engineers. London, 1897. v. 131, p. 507-512.

AUSTRALIAN STANDARD. AS 3774. **Loads on bulk containers**. Sydney, 1996. AS 3774 Supplement 1. Loads on bulk containers – Commentary. Sydney, 1997.

BISCHARA, A. G. et al. Static pressure in concrete circular silos storing granular materials. **ACI Journal**, May-June, 1983. p. 210-216.

CALIL JR., C. **Sobrepresiones en las paredes de los silos para almacenamiento de productos pulverulentos cohesivos**. Tese (Doutorado). Escola Politécnica de Barcelona. Espanha. Publicação do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1984. 184 p.

CANADIAN FARM BUILDING CODE. **Part 2, Structural design**. Ottawa, Canada, 1983.

CHEUNG, A. B. **Modelo estocástico de pressões de produtos armazenados para a estimativa da confiabilidade estrutural de silos esbeltos**. 305 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.

EUROCODE 1. **ENV 1991-4 Part 4: Actions on silos and tanks**. Bruxelas, 1995.

INTERNATIONAL STANDART. **ISO – 11697**. Bases for design of structures: Loads due to bulk materials. 1997.

JENIKE, A. W.; JOHANSON, J. R. Bin Loads. **Journal of the Structural Division**, ASCE, 1968. v. 95, n. ST4.

LOHNES, R. A. Lateral stress rations for particulate materials. **Powder Handling & Processing**, 1993. v. 5, n. 4, p. 331-336.

NASCIMENTO, F. C. **A relação entre as pressões horizontais e verticais em silos elevados: o parâmetro K**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.



# FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE DE PLACAS VISCOELÁSTICAS

Rodrigo Couto da Costa<sup>1</sup> & Wilson Sergio Venturini<sup>2</sup>

## Resumo

*Neste trabalho são propostas formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para placas viscoelásticas com o uso dos modelos reológicos de Kelvin-Voigt e Boltzmann. Desenvolvem-se formulações em que as representações viscosas são obtidas através de integrais de contorno, assim, permitindo análises viscoelásticas com discretizações apenas no contorno e tornando o método mais eficiente, elegante e preciso. Finalizando, aplica-se a técnica de suavização do sistema linear, com a intenção de se obter melhores resultados para discretizações pobres e descontinuidades nas condições de contorno.*

*Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno. Placas. Viscoelástico. Kelvin-Voigt. Boltzmann. Sistema linear suave.*

## FORMULATIONS OF THE BOUNDARY ELEMENTS METHOD FOR ANALYSIS OF VISCOELASTIC PLATES

### Abstract

*In this work formulations of the Boundary Elements Method (BEM) for viscoelastic plates using the Kelvin-Voigt's and Boltzmann's rheological models are proposed. The formulations are developed wherein the viscous influences are given by boundary integrals, therefore allowing viscoelastic analysis with discretizations defined only along the boundary what makes the method more efficient, elegant and accurate. Finally, the least square method is applied, trying to obtain better results using poor discretizations and discontinuities in the boundary conditions.*

*Keywords: Boundary Elements Method. Plates. Viscoelastic. Kelvin-Voigt, Boltzmann. Least square method.*

## 1 INTRODUÇÃO

Na engenharia existem muitas estruturas que são compostas por placas e, por isso, o entendimento do comportamento desses elementos, quando submetidos a diversos tipos de carregamentos, condições de contorno e diferentes situações é de grande importância. Uma dessas situações apresenta-se quando o material que constitui a placa possui comportamento viscoelástico como em polímeros, concreto, madeira, solos e aços sob altas temperaturas, onde os esforços e os deslocamentos são obtidos ao longo do tempo. A solução analítica de um problema de placa com este tipo de material é matematicamente complexa e, por isso, este trabalho tem por objetivo desenvolver formulações do Método dos Elementos de Contorno para placas viscoelásticas, considerando-se a Teoria de Kirchhoff e os modelos reológicos de Kelvin-Voigt e Boltzmann.

---

<sup>1</sup> Mestre em Engenharia de Estruturas – EESC-USP, ercouthotmail.com

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, venturin@sc.usp.br

## 2 MODELOS REOLÓGICOS VISCOELÁSTICOS

### 2.1 Modelo de Kelvin-Voigt

O primeiro modelo viscoelástico estudado é o de Kelvin-Voigt, que é representado pelo arranjo em paralelo de um amortecedor e de uma mola (Figura 1).

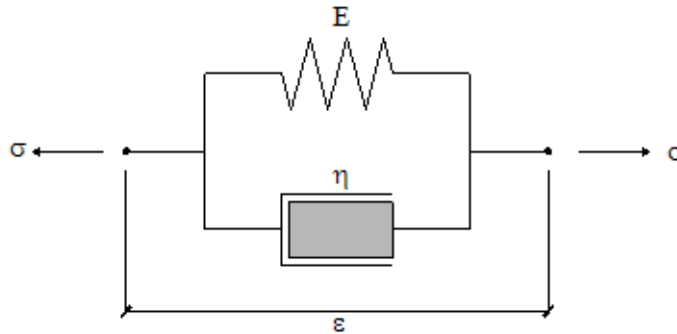


Figura 1 – Modelo viscoelástico de Kevin-Voigt.

As deformações nesta representação reológica são iguais nos dois elementos do arranjo, portanto:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^v \tag{1}$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações totais,  $\varepsilon_{ij}^e$  é o tensor de deformações elásticas e  $\varepsilon_{ij}^v$  é o tensor de deformações viscosas.

Já as tensões deste modelo são obtidas ao se somar as tensões elásticas e as viscosas, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \tag{2}$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões totais,  $\sigma_{ij}^e$  é o tensor de tensões elásticas e  $\sigma_{ij}^v$  é o tensor de tensões viscosas.

As tensões elásticas e viscosas podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \tag{4}$$

onde  $C_{lm}^{ij}$  é o tensor elástico,  $\dot{\varepsilon}_{lm}$  é o tensor das taxas de deformação com relação ao tempo e  $\eta_{lm}^{ij}$  é o tensor dos parâmetros constitutivos viscosos.

As matrizes  $C_{lm}^{ij}$  e  $\eta_{lm}^{ij}$  são definidas pelas expressões:

$$C_{ij}^{lm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \tag{5}$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \theta_\mu \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \tag{6}$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, dadas por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \tag{7}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{8}$$

$\theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são coeficientes representativos da viscosidade do material.

Entretanto, pode-se reescrever de maneira simplificada  $\eta_{ij}^{lm}$  em função de um único parâmetro viscoso  $\gamma$ , sendo esta a representação utilizada neste trabalho. Assim, tem-se:

$$\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu \tag{9}$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \gamma [\lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl})] = \gamma C_{ij}^{lm} \tag{10}$$

Substituindo-se (3) e (10) em (2), encontra-se a seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \tag{11}$$

## 2.2 Modelo de Boltzmann

O modelo de Boltzmann é representado pelo arranjo em série do modelo de Kelvin-Voigt com uma mola (Figura 2), dessa forma, sendo capaz de simular deformações elásticas instantâneas.

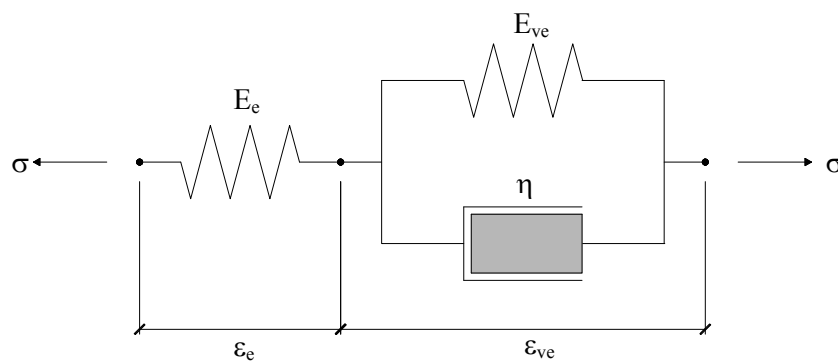


Figura 2– Modelo viscoelástico de Boltzmann.

As tensões nesta representação reológica são iguais no trecho elástico e viscoelástico, assim, se tem:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{ve} \tag{12}$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões totais,  $\sigma_{ij}^e$  é o tensor de tensões elásticas e  $\sigma_{ij}^{ve}$  é o tensor de tensões viscoelásticas.

Já as deformações deste modelo são obtidas ao se somarem as deformações do trecho elástico e viscoelástico, da seguinte forma:

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^{ve} \tag{13}$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações totais,  $\varepsilon_{ij}^e$  é o tensor de deformações elásticas e  $\varepsilon_{ij}^{ve}$  é o tensor de deformações viscoelásticas.

Considerando-se, por simplificação, a igualdade dos coeficientes de Poisson de ambos os trechos e um único parâmetro viscoso  $\gamma$ , as tensões elásticas e viscosas podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij}^e = \tilde{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (14)$$

$$\sigma_{ij}^{el} = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (16)$$

onde  $\sigma_{ij}^{el}$  é o tensor de tensões elásticas da mola em paralelo com o amortecedor,  $\sigma_{ij}^v$  é o tensor de tensões viscosas do amortecedor,  $E_e$  é o módulo de elasticidade do trecho elástico,  $E_{ve}$  é o módulo de elasticidade do trecho viscoelástico,  $\tilde{C}_{ij}^{lm}$  e  $\hat{C}_{ij}^{lm}$  são os tensores elásticos, escritos em função de  $E_e$  e  $E_{ve}$ .

Neste modelo, a matriz constitutiva  $C_{ij}^{lm}$  é expressa sem o módulo de elasticidade, portanto, vem:

$$C_{ij}^{lm} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{lm} + \bar{\mu} (\delta_{ij} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (17)$$

onde  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$  são as constantes de Lamé sem o módulo de elasticidade, dadas por:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (18)$$

$$\bar{\mu} = G = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (19)$$

Para o trecho viscoelástico, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ve} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^v = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (20)$$

A partir de (13), pode-se obter a seguinte relação para as taxas de deformação em relação ao tempo, para os dois trechos do modelo:

$$\dot{\varepsilon}_{lm} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (21)$$

onde  $\dot{\varepsilon}_{lm}$  é o tensor das taxas de deformação totais,  $\dot{\varepsilon}_{lm}^e$  é o tensor das taxas de deformação elásticas e  $\dot{\varepsilon}_{lm}^{ve}$  é o tensor das taxas de deformação viscoelásticas.

Isolando-se os termos referentes às deformações elásticas e viscoelásticas, nas equações (14) e (20), respectivamente, tem-se:

$$\varepsilon_{lm}^e = \frac{1}{E_e} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} \quad (22)$$

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (23)$$

Aplicando-se (21) em (23), obtém-se:

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma (\dot{\varepsilon}_{lm} - \dot{\varepsilon}_{lm}^e) \quad (24)$$

Substituindo-se (22) e (24) em (13), encontra-se a relação reológica para o modelo de Boltzmann, dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (25)$$

onde  $\dot{\sigma}_{ij}$  é o tensor da taxa de variação da tensão total com o tempo.

### 3 FÓRMULAÇÕES DO MEC PARA PLACAS VISCOELÁSTICAS

#### 3.1 Formulação para o modelo de Kelvin-Voigt

Para se encontrar a formulação viscoelástica para o modelo de Kelvin-Voigt, deve-se aplicar a relação constitutiva do modelo, equação (11), no teorema de Betti. Com essa substituição, a proporcionalidade entre o problema fundamental e o real é mantida, pois aos termos da equação (11) são proporcionais ao módulo de elasticidade. Portanto, tem-se:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (26)$$

Aplicando-se (11), obtém-se:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV + \int_V \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (27)$$

Utilizando-se as relações para as deformações e tensões em placas delgadas:

$$\varepsilon_{ij} = -x_3 w_{,ij} \quad (28)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (29)$$

$$\text{sendo } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (30)$$

Substituindo-se em (27), em seguida, integrando-se ao longo da espessura, encontra-se as seguintes integrais de domínio:

$$-\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = -\int_{\Omega} C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega \quad (31)$$

Escrevendo-se os momentos fundamentais do termo no lado esquerdo da igualdade em função das curvaturas fundamentais, vem:

$$-\int_{\Omega} C_{ij}^{lm} w_{,im}^* w_{,ij}^* d\Omega = -\int_{\Omega} C_{ij}^{lm} w_{,im}^* w_{,ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,im}^* w_{,ij}^* d\Omega \quad (32)$$

Sabendo-se que:

$$C_{ij}^{lm} w_{,im}^* w_{,ij}^* = C_{ij}^{lm} w_{,ij}^* w_{,im}^* = M_{ij}^* w_{,ij}^* \quad (33)$$

$$C_{ij}^{lm} w_{,im}^* w_{,ij}^* = C_{ij}^{lm} w_{,ij}^* w_{,im}^* = M_{ij}^* w_{,ij}^* \quad (34)$$

$$\gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,im}^* w_{,ij}^* = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,ij}^* w_{,im}^* = \gamma M_{ij}^* \dot{w}_{,ij}^* \quad (35)$$

A equação (32) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^* d\Omega = -\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \gamma M_{ij}^* \dot{w}_{,ij}^* d\Omega \quad (36)$$

$$\text{ou} \quad -\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^* d\Omega - \gamma \int_{\Omega} M_{ij}^* \dot{w}_{,ij}^* d\Omega = -\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^* d\Omega \quad (37)$$

Desenvolvendo-se os termos da equação anterior conforme a Teoria de Kirchhoff, se obtém a equação integral do deslocamento de um ponto  $q$  do domínio da placa para o modelo de Kelvin-Voigt com apenas integrais de contorno:

$$\begin{aligned} w(q) + \gamma \dot{w}(q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ \gamma \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) \dot{w}(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\ + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (38)$$

Para um ponto do contorno  $Q$ , a equação integral é dada por:

$$\begin{aligned} K(Q) w(Q) + \gamma K(Q) \dot{w}(Q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ \gamma \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) \dot{w}(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\ + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (39)$$

Observa-se que a única diferença entre as equações de Kirchhoff em relação às (38) e (39) é a presença dos termos multiplicados por  $\gamma$ , responsáveis pelo comportamento viscoso.

Para se obter os esforços nos pontos internos, primeiramente, deve-se derivar a equação (38), assim são encontradas as expressões das curvaturas e as derivadas das curvaturas, dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \gamma \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \gamma \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \dot{w}(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^N \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w_c(P) + \gamma \sum_{c=1}^N \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \dot{w}_c(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^N R_c(P) \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) d\Omega_g(p)
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_m \partial x_m} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_m \partial x_m} \right) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) w(P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \gamma \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) \dot{w}(P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^N \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) w_c(P) + \\
 & + \gamma \sum_{c=1}^N \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) \dot{w}_c(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) + \right. \\
 & \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^N R_c(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) \right) d\Omega_g(p)
 \end{aligned} \tag{41}$$

Deste modo, para se determinar os momentos fletores, deve-se aplicar (40) em:

$$M_{ij} = -D \left[ \nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) w_{,ij} \right] \tag{42}$$

Com relação às forças cortantes, deve-se substituir (41) em:

$$q_j = -D w_{,kkj} \tag{43}$$

### 3.1.1 Sistema de equações

A equação integral para os deslocamentos, dada por (39), pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)u(Q) + \gamma K(Q)\dot{u}(Q) + \bar{H}(Q)\bar{U} + \gamma \bar{H}(Q)\bar{\dot{U}} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c + \\
 & + \gamma \bar{H}_c(Q)\bar{\dot{w}}_c = \bar{G}(Q)\bar{P} + \bar{G}_c(Q)\bar{R}_c + \bar{T}(Q)
 \end{aligned} \tag{44}$$

onde:

- $\bar{H}(Q)_e \bar{G}(Q)$  são matrizes que contêm, respectivamente, os coeficientes dos esforços e deslocamentos fundamentais em cada elemento;

- $\bar{H}_c(Q)$  e  $\bar{G}_c(Q)$  são, respectivamente, as matrizes com os coeficientes das reações e deslocamento de canto fundamentais;
- $T(Q)$  é um vetor composto pelos valores resultantes da integração do carregamento na região  $\Omega g$ ;
- $\bar{U}$  é o vetor com os valores nodais dos deslocamentos, expresso por:
 
$$\bar{U} = \left\{ w^1 \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad w^2 \quad \frac{\partial w^2}{\partial n} \quad \dots \quad w^{N_n} \quad \frac{\partial w^{N_n}}{\partial n} \right\}$$
- $\dot{\bar{U}}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos deslocamentos e das taxas de suas derivadas em relação à normal, expresso por:
 
$$\dot{\bar{U}} = \left\{ \dot{w}^1 \quad \frac{\partial \dot{w}^1}{\partial n} \quad \dot{w}^2 \quad \frac{\partial \dot{w}^2}{\partial n} \quad \dots \quad \dot{w}^{N_n} \quad \frac{\partial \dot{w}^{N_n}}{\partial n} \right\}$$
- $\bar{P}$  é o vetor com os valores nodais dos esforços, dado por:
 
$$\bar{P} = \left\{ V_n^1 \quad M_n^1 \quad V_n^2 \quad M_n^2 \quad \dots \quad V_n^{N_n} \quad M_n^{N_n} \right\}$$
- $\bar{w}_c$  é o vetor com os valores dos deslocamentos de canto, expresso por:
 
$$\bar{w}_c = \left\{ w_c^1 \quad w_c^2 \quad \dots \quad w_c^{N_c} \right\}$$
- $\dot{\bar{w}}_c$  é o vetor com os valores das taxas dos deslocamentos de canto, expresso por:
 
$$\dot{\bar{w}}_c = \left\{ \dot{w}_c^1 \quad \dot{w}_c^2 \quad \dots \quad \dot{w}_c^{N_c} \right\}$$
- $\bar{R}_c$  é o vetor com os valores das reações de canto, dado por:
 
$$\bar{R}_c = \left\{ R_c^1 \quad R_c^2 \quad \dots \quad R_c^{N_c} \right\}$$
- $\dot{\bar{u}}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos deslocamentos, expresso por:
 
$$\dot{\bar{u}} = \left\{ \dot{w}^1 \quad \dot{w}^2 \quad \dots \quad \dot{w}^{N_n} \right\}$$
- $N_n$  corresponde ao número de nós do problema;
- $N_c$  é o número de cantos.

Neste trabalho, para a aproximação da geometria dos elementos são utilizadas funções lineares e para a aproximação das variáveis são utilizadas funções polinomiais quadráticas e considerando-se as técnicas empregadas para que  $K(Q)$  seja distribuído em  $\bar{H}(Q)$ , a reação de canto  $\bar{R}_c$  seja nula e o deslocamento de canto  $\bar{w}_c$  seja função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto e aplicando-as, também, nos termos referentes ao comportamento viscoso. Assim, se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\dot{\bar{U}} = \bar{G}\bar{P} + \bar{T} \quad (45)$$

As equações integrais para os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas nos pontos internos, dadas por (38), (40) e (41), respectivamente, podem ser escritas de forma geral, ao se empregar as simplificações para os termos referentes aos cantos, da seguinte maneira:

$$\bar{u}(q) + \gamma\dot{\bar{u}}(q) + \bar{H}'\bar{U} + \gamma\bar{H}'\dot{\bar{U}} = \bar{G}'\bar{P} + \bar{T}' \quad (46)$$

### 3.1.2 Integração temporal numérica

Para se resolver o sistema de equações (45), adotou-se uma simples aproximação linear para definir as taxas dos deslocamentos e as das derivadas dos deslocamentos em relação à normal, assim, tem-se:

$$\dot{w} = \frac{w_{(s+1)} - w_{(s)}}{\Delta t} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial n} = \frac{\frac{\partial w}{\partial n}_{(s+1)} - \frac{\partial w}{\partial n}_{(s)}}{\Delta t} \quad (48)$$

ou seja, matricialmente,

$$\bar{\dot{U}} = \frac{\bar{U}_{(s+1)} - \bar{U}_{(s)}}{\Delta t} \quad (49)$$

Substituindo-se (49) em (45), encontra-se:

$$\tilde{H}\bar{U}_{(s+1)} = \bar{G}\bar{P} + \bar{T} + \tilde{F}_s \quad (50)$$

onde:

$$\tilde{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)\bar{H} \quad (51)$$

$$\tilde{F}_s = \frac{\gamma}{\Delta t}\bar{H}\bar{U}_{(s)} \quad (52)$$

Impondo-se as condições de contorno, trocando-se as colunas das matrizes  $\tilde{H}$  e  $\bar{G}$ , somando-se os vetores, pode-se resolver o sistema linear dado por (50), assim, encontrando-se os deslocamentos e os esforços para o passo de tempo atual. Com os valores dos deslocamentos para o passo de tempo atual e anterior, calculam-se as taxas de deslocamento através de (49).

Para o sistema de equações (46) dos deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas adotam-se a aproximação (47) e as seguintes:

$$\dot{w}_{\gamma_{ij}} = \frac{w_{\gamma_{ij}(s+1)} + w_{\gamma_{ij}(s)}}{\Delta t} \quad (53)$$

$$\dot{w}_{\gamma_{kk\beta}} = \frac{w_{\gamma_{kk\beta}(s+1)} + w_{\gamma_{kk\beta}(s)}}{\Delta t} \quad (54)$$

ou seja,

$$\bar{\dot{u}} = \frac{\bar{u}_{(s+1)} - \bar{u}_{(s)}}{\Delta t} \quad (55)$$

Dessa forma, aplicando-se (55) em (46), obtém-se:

$$\bar{u}_{(s+1)} = \left( -\bar{H}'\bar{U} - \gamma\bar{H}'\bar{U} + \bar{G}'\bar{P} + \bar{T}' + \frac{\gamma}{\Delta t}u_{(s)} \right) / \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (56)$$

Em seguida, substituindo em (56) os valores dos deslocamentos, das taxas dos deslocamentos e dos esforços já encontrados, obtêm-se os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas

para os pontos internos e, conseqüentemente, as suas taxas ao se aplicar os resultados em (47), (53) e (54). Deve-se observar que as expressões (1) a (4) para o modelo reológico de Kelvin-Voigt, podem ser reescritas para a formulação de placas da seguinte forma:

$$w_{,ij} = w_{,ij}^e = w_{,ij}^v \quad (57)$$

$$M_{ij} = M_{ij}^e + M_{ij}^v \quad (58)$$

$$M_{ij}^e = -D \left[ \nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) w_{,ij} \right] \quad (59)$$

$$M_{ij}^v = -\gamma D \left[ \nu \dot{w}_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) \dot{w}_{,ij} \right] \quad (60)$$

Dessa forma, os momentos elásticos são calculados ao substituírem-se as curvaturas em (59), os momentos viscosos ao aplicarem-se as taxas das curvaturas em (60) e os momentos totais se somarem os dois momentos anteriores. Os esforços cortantes são obtidos substituindo-se os valores das derivadas das curvaturas e suas taxas em:

$$q_{\beta} = -D \left( w_{,kk\beta} + \dot{w}_{,kk\beta} \right) \quad (61)$$

### 3.1.3 Exemplo numérico

Considere uma placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído. Esta placa foi discretizada em 24 elementos (Figura 3).

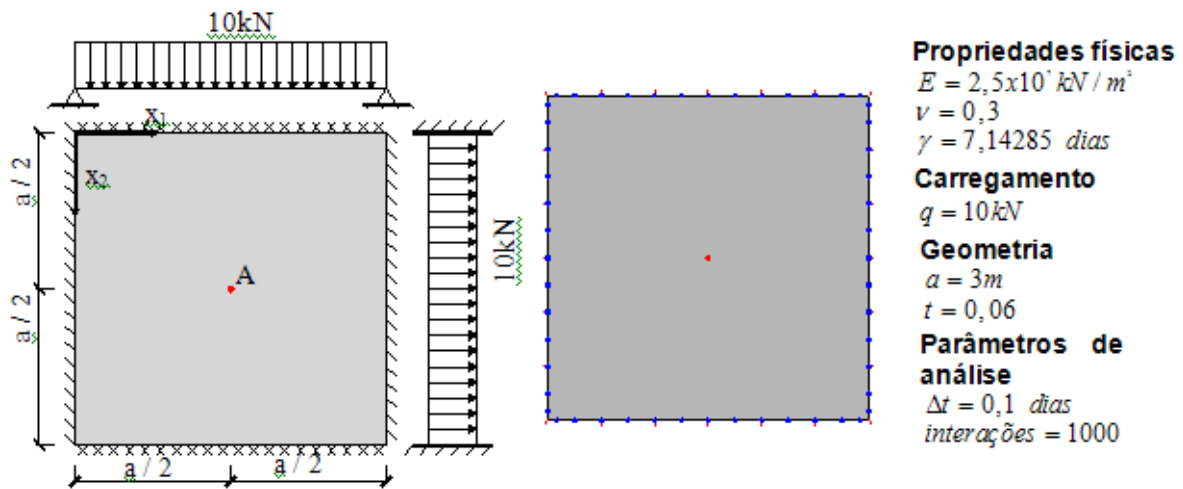


Figura 3 – Geometria e discretização da placa em 24 elementos.

Os resultados para as curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  ao longo do tempo no ponto A são apresentados na Figura 4 e para os momentos  $M_{22}$  na Figura 5.

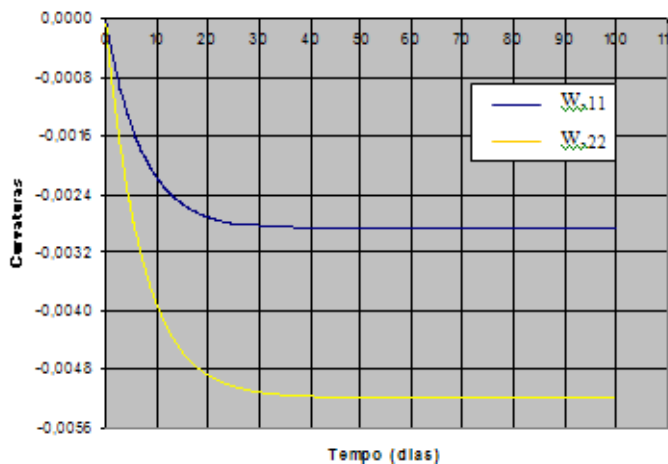
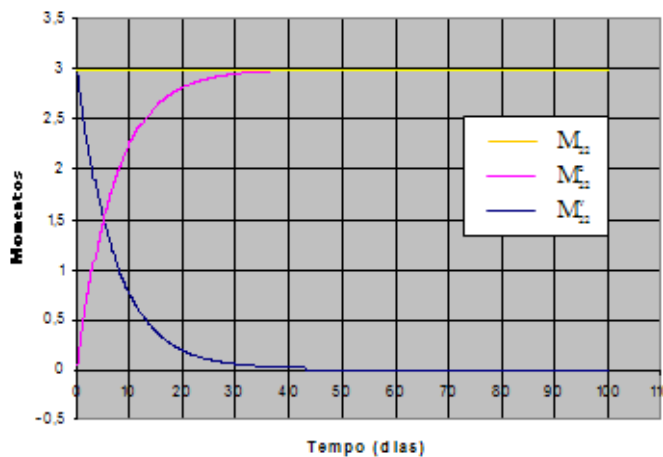


Figura 4 – Curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  do ponto A ao longo do tempo.



Figuras 5 – Momentos  $M_{22}$  do ponto A ao longo do tempo.

Observa-se que em torno dos 50 dias, já ocorre à convergência para os valores finais do deslocamento e dos momentos elásticos no ponto A. Verifica-se, também, na Figura 5 a transferência da tensão presente no amortecedor para a mola, sendo o primeiro representado nas placas pelo momento viscoso e o segundo pelo momento elástico, e que a soma desses momentos gera o total, o qual apresenta o comportamento esperado para o modelo reológico que é ser constante ao longo de todos os passos de tempo.

### 3.2 Formulação para o modelo de Boltzmann

Para se obter a formulação viscoelástica para o modelo de Boltzmann com apenas integrais de contorno, deve-se aplicar a relação constitutiva do modelo, equação (25), no termo à direita do teorema de Betti, expresso em (26), e a deformação elástica do trecho elástico  $\epsilon_{ij}^e$  no termo à esquerda do teorema, deste modo, garante-se a proporcionalidade entre o problema fundamental e o real. Sendo assim, tem-se:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^e dV = \int_V \left( \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\epsilon_{lm} + \gamma \dot{\epsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \right) \epsilon_{ij}^* dV \quad (62)$$

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^e dV = \int_V \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV + \int_V \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} \gamma \dot{\varepsilon}_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV - \int_V \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV \quad (63)$$

ou

Substituindo-se (28) e (29) em (63) e, em seguida, integrando-se ao longo da espessura, encontra-se as seguintes integrais de domínio:

$$-\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^e d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} \gamma \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (64)$$

Escrevendo-se os momentos fundamentais do termo no lado esquerdo da igualdade em função das curvaturas fundamentais, vem:

$$-\int_{\Omega} D_e C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij}^e d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} \gamma \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (65)$$

Sabendo-se que:

$$D_e C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij}^e = D_e C_{ij}^{lm} w_{,ij}^* w_{,lm}^e = M_{ij}^e w_{,ij}^* = M_{ij} w_{,ij}^* \quad (66)$$

$$D_e C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij}^e = D_e C_{ij}^{lm} w_{,ij}^* w_{,lm}^e = M_{ij}^e w_{,ij}^* \quad (67)$$

A equação (65) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^e d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} M_{ij}^* w_{,ij}^e d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} M_{ij}^* \dot{w}_{,ij}^e d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (68)$$

Reorganizando (68), vem:

$$-\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^e d\Omega - \gamma \int_{\Omega} M_{ij}^* \dot{w}_{,ij}^e d\Omega = -\frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^e d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (69)$$

Desenvolvendo-se os termos da equação anterior conforme a Teoria de Kirchhoff, se obtém a equação integral do deslocamento total de um ponto q do domínio da placa para o modelo de Boltzmann com apenas integrais de contorno:

$$\begin{aligned}
 & w(q) + \gamma \dot{w}(q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) \dot{w}(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}^*(q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \int_{\Gamma} \left( \dot{V}_n(P) w^*(q, P) - \dot{M}_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_e} \dot{R}_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) + \\
 & + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p)
 \end{aligned} \tag{70}$$

Para um ponto do contorno Q, a equação integral é dada por:

$$\begin{aligned}
 & K(Q) w(Q) + \gamma K(Q) \dot{w}(Q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) \dot{w}(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}^*(Q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \int_{\Gamma} \left( \dot{V}_n(P) w^*(Q, P) - \dot{M}_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_e} \dot{R}_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) + \\
 & + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p)
 \end{aligned} \tag{71}$$

Observa-se que a diferença entre as equações de Kirchhof em relação às (70) e (71) e a presença de uma constante, que relaciona  $D_e$  e  $D_{ve}$ , e dos termos multiplicados por  $\gamma$ , os quais do lado esquerdo da igualdade são responsáveis pelo comportamento viscoso e do lado direito pelo comportamento instantâneo, porém estes últimos podem contribuir também para o comportamento viscoso, caso ocorra variações com o tempo da carga aplicada.

Para se obter os esforços nos pontos internos, primeiramente, deve-se derivar a equação (70), assim são encontradas as expressões das curvaturas e as derivadas das curvaturas, dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \gamma \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \dot{w}(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \right. \\
 & \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) d\Gamma(P) + \gamma \int_{\Gamma} \left( \dot{V}_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{M}_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \Bigg) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \\
& + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \dot{R}_{ci}(P) \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) d\Omega_g(p) + \\
& + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) d\Omega_g(p)
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) w(P) + \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \gamma \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) \dot{w}(P) + \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) w_{ci}(P) + \\
& + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_\Gamma \left( V_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) \right) d\Gamma(P) + \gamma \int_\Gamma \left( \dot{V}_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) + \right. \\
& \left. - \dot{M}_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) \right) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) + \\
& + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \dot{R}_{ci}(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \right) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) \right) d\Omega_g(p) + \\
& + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) \right) d\Omega_g(p)
\end{aligned} \tag{73}$$

Deste modo, para se determinar os momentos fletores, deve-se aplicar (72) em (42) e com relação às forças cortantes, deve-se substituir (73) em (43).

### 3.2.1 Sistema de equações

A equação integral para os deslocamentos, dada por (71), pode ser escrita na forma matricial. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
& K(Q)u(Q) + \gamma K(Q)\dot{u}(Q) + \bar{H}(Q)\bar{U} + \gamma \bar{H}(Q)\bar{\dot{U}} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c + \\
& + \gamma \bar{H}_c(Q)\bar{\dot{w}}_c = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{G}(Q)\bar{P} + \gamma \bar{G}(Q)\bar{\dot{P}} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{G}_c(Q)\bar{R}_c + \\
& \gamma \bar{G}_c(Q)\bar{\dot{R}}_c + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{T}(Q) + \gamma \bar{\dot{T}}(Q)
\end{aligned} \tag{74}$$

onde, além das matrizes e vetores expostos em 3.1.1, encontra-se:

- $\bar{\dot{P}}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos momentos normais e das taxas das forças cortantes equivalentes, expresso por:

$$\bar{\dot{P}} = \left\{ \dot{V}_n^1 \quad \dot{M}_n^1 \quad \dot{V}_n^2 \quad \dot{M}_n^2 \quad \dots \quad \dot{V}_n^{N_n} \quad \dot{M}_n^{N_n} \right\}$$

- $\bar{\dot{R}}_c$  é o vetor com os valores das taxas das reações de canto, expresso por:

$$\bar{\dot{R}}_c = \{ \dot{R}_c^1 \quad \dot{R}_c^2 \quad \dots \quad \dot{R}_c^{N_c} \}$$

- $\bar{\dot{T}}(Q)$  é um vetor composto pelos valores resultantes da integração das taxas dos carregamento na região  $\Omega_g$ .

Considerando-se as técnicas empregadas para que  $K(Q)$  seja distribuído em  $\bar{H}(Q)$ , a reação de canto  $\bar{R}_c$  seja nula e o deslocamento de canto  $\bar{w}_c$  seja função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto e aplicando-as, também, nos termos referentes ao comportamento viscoso. Assim, se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\bar{U} = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{G}\bar{P} + \gamma\bar{G}\bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{T} + \gamma\bar{T} \quad (75)$$

As equações integrais para os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas nos pontos internos, dadas por (70), (72) e (73), respectivamente, podem ser escritas de forma geral, ao se empregar as simplificações para os termos referentes aos cantos, da seguinte maneira:

$$\bar{u}(q) + \gamma\bar{u}(q) + \bar{H}'\bar{U} + \gamma\bar{H}'\bar{U} = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{G}'\bar{P} + \gamma\bar{G}'\bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{T}' + \gamma\bar{T}' \quad (76)$$

### 3.2.2 Integração temporal numérica

Para resolver o sistema de equações (75), adotam-se as seguintes aproximações lineares:

$$\dot{w} = \frac{w_{(s+1)} - w_{(s)}}{\Delta t} \quad (77)$$

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial n} = \frac{\frac{\partial w}{\partial n}_{(s+1)} - \frac{\partial w}{\partial n}_{(s)}}{\Delta t} \quad (78)$$

$$\dot{V}_n = \frac{V_{n(s+1)} - V_{n(s)}}{\Delta t} \quad (79)$$

$$\dot{M}_n = \frac{M_{n(s+1)} - M_{n(s)}}{\Delta t} \quad (80)$$

$$\dot{g} = \frac{g_{(s+1)} - g_{(s)}}{\Delta t} \quad (81)$$

Considerando as representações de  $\bar{U}$ ,  $\bar{P}$  e  $\bar{T}$  na equação matricial, pode-se reescrever (77) a (81) da seguinte forma:

$$\bar{U} = \frac{\bar{U}_{(s+1)} - \bar{U}_{(s)}}{\Delta t} \quad (82)$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{P}_{(s+1)} - \bar{P}_{(s)}}{\Delta t} \quad (83)$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{T}_{(s+1)} - \bar{T}_{(s)}}{\Delta t} \quad (84)$$

Substituindo-se (82) a (84) em (75), encontra-se:

$$\tilde{H}\bar{U}_{(s+1)} = \tilde{G}\bar{P}_{(s+1)} + \tilde{T} + \tilde{F}_s \quad (85)$$

onde:

$$\tilde{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \bar{H} \quad (86)$$

$$\tilde{G} = \left(\frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \bar{G} \quad (87)$$

$$\tilde{T} = \left(\frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \bar{T}_{(s+1)} \quad (88)$$

$$\tilde{F}_s = \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{H}\bar{U}_{(s)} - \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{G}\bar{P}_{(s)} - \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{T}_{(s)} \quad (89)$$

Impondo-se as condições de contorno, trocando-se as colunas das matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$ , somando-se os vetores resultantes do lado direito da igualdade, pode-se resolver o sistema linear dado por (85), assim, encontrando-se os deslocamentos e os esforços para o passo de tempo atual. Com os valores dos deslocamentos e esforços para o passo de tempo atual e anterior, calculam-se suas taxas através de (82) e (83), e com os valores do carregamento atual e anterior, sendo estes definidos como um dado do problema analisado, calcula-se a sua taxa por (84).

Para o sistema de equações (76) dos deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas totais adotam-se a aproximação (77) e as seguintes:

$$\dot{w}_{\gamma_{ij}} = \frac{w_{\gamma_{ij}(s+1)} + w_{\gamma_{ij}(s)}}{\Delta t} \quad (90)$$

$$\dot{w}_{\gamma_{kk\beta}} = \frac{w_{\gamma_{kk\beta}(s+1)} + w_{\gamma_{kk\beta}(s)}}{\Delta t} \quad (91)$$

ou seja,  $\bar{u} = \frac{\bar{u}_{(s+1)} - \bar{u}_{(s)}}{\Delta t}$  (92)

Dessa forma, aplicando-se (92) em (76), obtém-se:

$$\bar{u}_{(s+1)} = \left( -\bar{H}'\bar{U} - \gamma\bar{H}'\bar{U} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{G}'\bar{P} + \gamma\bar{G}'\bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{T}' + \gamma\bar{T}' + \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{u}_{(s)} \right) \left/ \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \right. \quad (93)$$

Em seguida, substituindo em (93) os valores já encontrados dos deslocamentos, esforços, carregamentos e de suas respectivas taxas, obtém-se os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas totais para os pontos internos e, conseqüentemente, as suas taxas ao se aplicar os resultados em (77), (90) e (91).

Para se calcularem os momentos totais, deve-se definir a seguinte aproximação:

$$\dot{M}_{ij} = \frac{M_{ij(s+1)} - M_{ij(s)}}{\Delta t} \quad (94)$$

Reescrevendo a expressão (25) para placas, vem:

$$M_{ij} = \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} (w_{\gamma_{lm}} + \gamma \dot{w}_{\gamma_{lm}}) - \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} \quad (95)$$

Substituindo-se (94) em (95), obtém-se:

$$M_{ij(s+1)} = \left( \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} (w_{,lm} + \gamma \dot{w}_{,lm}) + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} M_{ij(s)} \right) \Big/ \left( 1 + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (96)$$

Assim, aplicando-se as curvaturas totais, suas taxas e os valores dos momentos totais para o passo de tempo anterior em (96), encontra-se os momentos totais atuais.

Observa-se que não é possível se calcular os momentos elásticos e viscosos de forma direta, como no modelo de Kelvin-Voigt, pois os resultados encontrados são as curvaturas totais e suas taxas, portanto, uma forma de resolver este problema seria escrever um novo sistema de equações, de maneira que fosse possível obter as curvaturas instantâneas. Deste modo, se subtrairia das curvaturas totais as instantâneas e se encontraria as elásticas para o trecho viscoelástico. Entretanto, esta abordagem é computacionalmente dispendiosa e pode-se contornar esta dificuldade através de um procedimento proposto por MESQUITA & CODA (2001), onde as tensões ou os momentos, no caso deste trabalho, são obtidos pela solução de uma equação diferencial. Esta equação é obtida ao se escrever a expressão (15) para placas, em forma de taxa, do seguinte modo:

$$\dot{M}_{ij}^{el} = D_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \gamma D_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \dot{M}_{ij}^v \quad (97)$$

ou seja,  $M_{ij}^v = \gamma \dot{M}_{ij}^{el}$  (98)

A equação (98) expressa uma relação entre as taxas dos momentos elásticos e os momentos viscosos. Reescrevendo a expressão (20) para placas, vem:

$$M_{ij} = M_{ij}^{el} + M_{ij}^v \quad (99)$$

Em seguida, aplicando-se (98) em (99), tem-se a equação diferencial:

$$\gamma \dot{M}_{ij}^{el} + M_{ij}^{el} - M_{ij} = 0 \quad (100)$$

Adotando-se a seguinte aproximação para as taxas dos momentos elásticos:

$$\dot{M}_{ij}^{el} = \frac{M_{ij(s+1)}^{el} - M_{ij(s)}^{el}}{\Delta t} \quad (101)$$

Substituindo (101) em (100), obtém-se:

$$M_{ij(s+1)}^{el} = \left( M_{ij(s+1)} + \frac{\gamma}{\Delta t} M_{ij(s)}^{el} \right) \Big/ \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (102)$$

Deste modo, encontra-se a resolução numérica para a equação diferencial (100) dos momentos elásticos. Verifica-se que na expressão (102) necessita-se do valor dos momentos totais que são calculados por (96) e, assim, encontrados os momentos totais e os elásticos, pode-se obter os momentos viscosos aplicando-se a relação (99).

Para se calcular os esforços cortantes totais, deve-se substituir (95) na seguinte relação de esforços para placas:

$$M_{ij, \gamma_i} - q_j = 0 \quad (103)$$

Dessa forma, tem-se:

$$q_{\beta} = -\frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \left( w_{,kk\beta} + \gamma \dot{w}_{,kk\beta} \right) - \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{q}_{\beta} \quad (104)$$

Adotando-se a aproximação:

$$\dot{q}_{\beta} = \frac{q_{\beta(s+1)} - q_{\beta(s)}}{\Delta t} \quad (105)$$

Em seguida, aplicando (105) em (104), vem:

$$q_{\beta(s+1)} = \left( -\frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \left( w_{,kk\beta} + \gamma \dot{w}_{,kk\beta} \right) + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} q_{\beta(s)} \right) \Bigg/ \left( 1 + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (106)$$

Dessa forma, substituindo-se as derivadas das curvaturas totais, suas taxas e os valores dos esforços cortantes totais para o passo de tempo anterior em (106), encontra-se os esforços cortantes totais atuais.

### 3.2.3 Exemplo numérico

Este é o mesmo exemplo apresentado no item 3.1.3, sendo que a discretização utilizada é a mesma apresentada na Figura 3 e os dados são os mesmos, com a única diferença da existência de um módulo de elasticidade para o trecho elástico, dado por  $1,25 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ , e outro para o trecho viscoelástico de  $2,5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ . Os resultados para as curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  ao longo do tempo no ponto A são apresentados na Figura 11 e para os momentos  $M_{22}$  na Figuras 12.

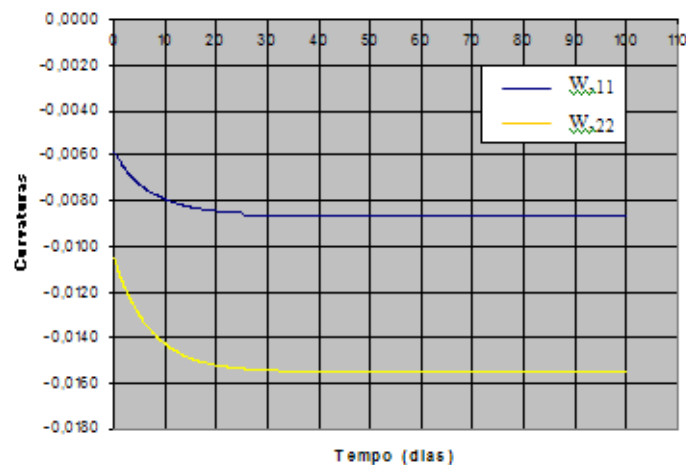


Figura 6 – Curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  do ponto A ao longo do tempo.

Confirma-se, através da Figura 6, a deformação elástica inicial instantânea e, em seguida, a deformação viscoelástica, características do modelo de Boltzmann. Verifica-se, pela Figuras 7, a transferência da tensão presente no amortecedor para a mola, sendo o primeiro representado pelo momento viscoso e o segundo pelo momento elástico para o trecho viscoelástico, e que a soma desses momentos gera o total, que é igual ao momento elástico gerado pela mola responsável pelo comportamento instantâneo.

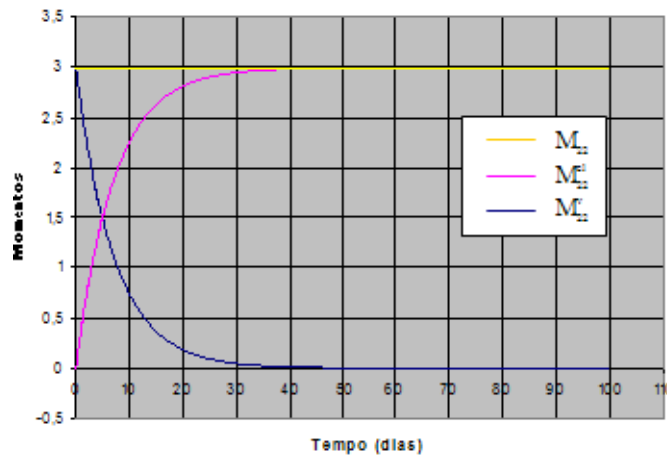


Figura 7 – Momentos  $M_{22}$  do ponto A ao longo do tempo.

## 4 SISTEMA LINEAR SUAVE – MÍNIMOS QUADRADOS

### 4.1 Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados

Respostas obtidas pelo método dos elementos de contorno podem apresentar oscilações quando existem descontinuidades em certas condições de contorno ou ocorrendo grandes diferenças de módulo de elasticidade ao longo de interfaces de sub-regiões ou em acoplamento MEC/MEF. Para se evitar estas oscilações dos resultados, sem que se aumente excessivamente a discretização, escreve-se um número maior de equações algébricas para o mesmo problema, para isso, adicionam-se mais pontos fontes na discretização. Deste modo, nos elementos escolhidos para possuir nós adicionais são posicionados dois pontos fontes novos, que estarão localizados, respectivamente, entre o nó inicial e intermediário e entre este e o final, sendo, no caso da existência de nó duplo, posicionados entre este e o intermediário.

Escrevendo-se as equações algébricas para os pontos fontes adicionais, os sistemas de equações para a formulação de Kelvin-Voigt e Boltzmann podem ser expressos da seguinte forma:

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\bar{U} = \bar{G}\bar{P} + \bar{T} \tag{107}$$

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\bar{U} = \frac{D_e + D_{ve}}{D} \bar{G}\bar{P} + \gamma\bar{G}\bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D} \bar{T} + \gamma\bar{T} \tag{108}$$

onde:

$\bar{H}$  e  $\bar{G}$  são de ordem  $(2N_n + 2N_{ed}) \times 2N_n$ ;

$\bar{T}$  tem ordem  $2N_n + 2N_{ed}$ ;

$\bar{\dot{T}}$  tem ordem  $2N_n + 2N_{ed}$ ;

$\bar{U}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{\dot{U}}$  e  $\bar{\dot{P}}$  possuem  $2N_n$  elementos e são os mesmos do problema original;

$N_n$  corresponde ao número de nós do problema;

$N_{ed}$  é o número de elementos que possuem nós adicionais.

Segundo VOLTERRA (1956), a solução de um sistema de equações pelo método dos mínimos quadrados, dado por:

$$[A]_{mn} \{X\}_n = \{B\}_m, \text{ onde } m > n \tag{109}$$

Equivale a resolver o seguinte sistema de equações:

$$[A]^T [A] \{X\} = [A]^T \{B\} \quad (110)$$

Assim, os sistemas (107) e (108) podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\bar{H}^T \bar{H} \bar{U} + \gamma \bar{H}^T \bar{H} \bar{U} = \bar{H}^T \bar{G} \bar{P} + \bar{H}^T \bar{T} \quad (111)$$

$$\bar{H}^T \bar{H} \bar{U} + \gamma \bar{H}^T \bar{H} \bar{U} = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{H}^T \bar{G} \bar{P} + \gamma \bar{H}^T \bar{G} \bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{H}^T \bar{T} + \gamma \bar{H}^T \bar{T} \quad (112)$$

onde  $\bar{H}^T$  é a transposta de  $\bar{H}$ , sendo de ordem  $2N_n \times (2N_n + 2N_{ed})$ .

Em seguida, aplicando-se as integrações temporais numéricas em (111) e (112), apresentadas nos itens 3.1.2 e 3.2.2, encontram-se sistemas semelhantes a (110).

## 4.2 Exemplo numérico

Neste exemplo tem-se uma placa retangular com dois lados parcialmente apoiados, um totalmente apoiado e o outro livre, com um carregamento uniformemente distribuído (Figura 13).

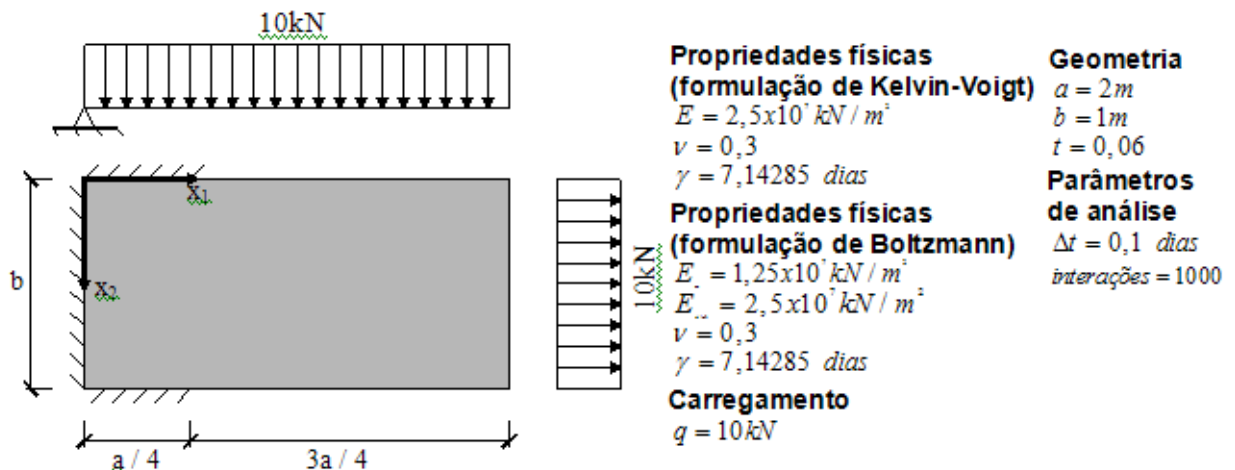


Figura 8 – Placa retangular com dois lados parcialmente apoiados, um totalmente apoiado e o outro livre.

A discretização foi realizada de duas formas diferentes, sendo utilizados 24 elementos e 54 nós na primeira e 192 elementos e 390 nós na segunda. Os deslocamentos na borda inferior da placa para a formulação de Kelvin-Voigt, considerando-se as discretizações 1 e 2 com a aplicação da técnica dos mínimos quadrados e nós adicionais em todos os elementos e, em seguida, sem a técnica, podem ser analisados na Figura 14.

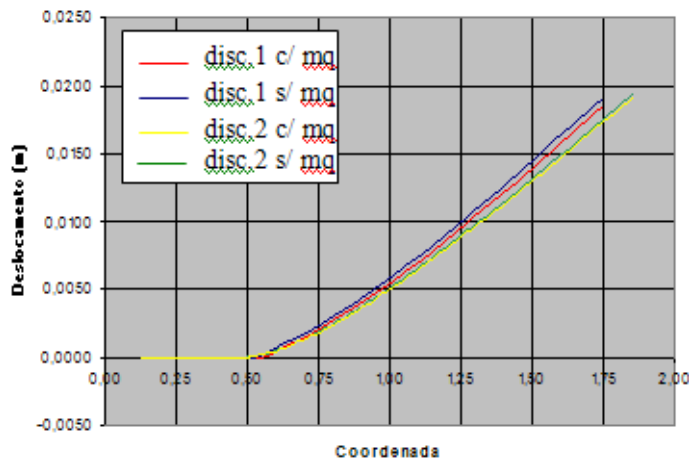


Figura 9 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt.

Neste exemplo é possível notar pela figura a influência dos mínimos quadrados na melhora dos resultados para os deslocamentos, pois se verifica que os valores obtidos para a discretização 1 com uso da técnica estão mais próximos dos encontrados com a discretização 2. Nota-se, também, que o uso da técnica na discretização 2 não gerou grandes alterações devido aos ótimos resultados obtidos ao se utilizar apenas esta discretização sem nós adicionais, assim sendo, somente proporcionou uma convergência um pouco melhor para os resultados.

As forças cortantes equivalentes na borda inferior da placa para o modelo reológico de Boltzmann podem ser analisadas através da Figura 10, considerando-se as mesmas condições para as discretizações.

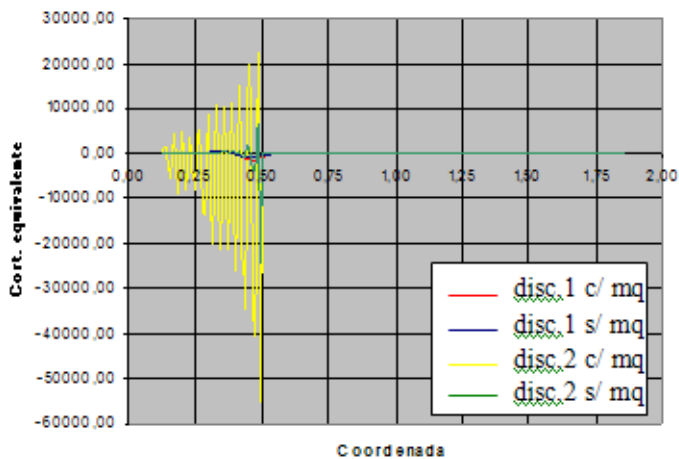


Figura 10 – Forças cortantes equivalentes na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann.

Verifica-se que a utilização da técnica na discretização 1 e principalmente na 2, geram grandes oscilações nas forças cortantes equivalentes, sendo obtidos os melhores resultados quando não se usa os mínimos quadrados.

## 5 CONCLUSÕES

As formulações desenvolvidas neste trabalho são de grande importância para a análise de placas viscoelásticas através do Método dos Elementos de Contorno, pois na literatura não se encontra facilmente estudos específicos sobre este assunto, tanto que não foi possível se obter resultados analíticos ou numéricos de outros autores, de modo que fosse possível realizar um estudo comparativo.

Neste trabalho adotou-se a abordagem desenvolvida por MESQUITA (2002) para problemas viscoelásticos, onde os modelos reológicos são introduzidos adequadamente nas equações integrais, assim, evitaram-se os problemas comuns em formulações viscoelásticas clássicas, que são matematicamente complexas, dispendiosas computacionalmente ou simulam somente o modelo de Kelvin-Voigt, desconsiderando o comportamento instantâneo.

As formulações para Kelvin-Voigt e Boltzmann foram muito eficientes e elegantes, pois permitiram executar análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo, evitando o uso de células internas e singularidades, assim, necessitava-se de poucos dados de entrada e o custo computacional diminuiu drasticamente. Outra vantagem foi a possibilidade de alteração do carregamento ao longo do tempo para a formulação de Boltzmann, deste modo, permitindo verificar situações mais gerais para as placas.

Com relação à técnica de suavização aplicada nas formulações com representações no contorno, verificaram-se bons resultados para os deslocamentos, pois se obteve valores mais precisos e menores oscilações com discretizações mais pobres quando se utilizava a técnica, ao contrário das demais variáveis do contorno que apresentaram um grande acréscimo nas oscilações. Estas oscilações obtidas nas demais variáveis de contorno foram inesperadas e não foi possível encontrar o que as geravam, pois implementou-se esta técnica no final do trabalho e, assim, não houve tempo suficiente para realizar uma análise mais aprofundada dos motivos que ocasionaram este erro. Este problema também ocorrerá nas placas elásticas, pois os resultados finais viscoelásticos são iguais aos elásticos encontrados através das molas que compõem os modelos reológicos.

## 6 REFERÊNCIAS

BETTI, E. **Teoria dell elasticita**: Il Nuovo Cimento. p. 7-10. 1872

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978.

CALDERÓN, E. T. **Uma formulação alternativa para o cálculo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno**. 191p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1991.

CHUEIRI, L. H. M. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**. 219p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1994.

COSTA, R. C. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de placas viscoelásticas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.

FERNANDES, G. R. **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas**. 178p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

KIRCHHOFF, G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen sceleibe. **J. Math.**, n. 40, p. 51-58, 1850.

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Na alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: A BEM approach. **Computers & Structures**, v. 79, n. 16, p. 1487-1496, 2001.

MESQUITA, A. D. **Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEC/MEF**. 291p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2002.

MUNAIAR NETO, J. **Um estudo de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos para a sua integração numérica**. 214p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura**. 195p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1987.

VOLTERRA, V. Opere mathematiche. **Acad. Naz.**, Lincei, Rome, v. 2, p. 216-275, 1956.

WUTZOW, W. W. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de chapas com enrijecedores**. 140p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.



# INTERAÇÃO DE PAREDES EM ALVENARIA ESTRUTURAL CERÂMICA SOB AÇÕES VERTICAIS

Valentim Capuzzo Neto<sup>1</sup> & Márcio Roberto Silva Corrêa<sup>2</sup>

## Resumo

*O objetivo do presente trabalho é esclarecer, sob o ponto de vista estrutural, a interação de paredes em alvenaria estrutural cerâmica com amarração direta submetidas a ações verticais. Para permitir a execução de ensaios complexos, empregam-se as técnicas de modelos físicos reduzidos. Estuda-se, experimentalmente, a influência das características geométricas dos painéis de alvenaria, da presença de lajes e de cintas de amarração. Verifica-se que a cinta de amarração na fiada intermediária produz um prolongamento do comportamento linear dos painéis de alvenaria, mas não um acréscimo de resistência. Conclui-se, também, que a presença das lajes de concreto produz efeitos benéficos no aspecto de resistência da alvenaria.*

*Palavras-chave: Alvenaria estrutural. Interação. Modelos reduzidos. Análise experimental. Ações verticais.*

## THE INTERACTION OF CERAMIC STRUCTURAL MASONRY WALLS UNDER VERTICAL LOADS

### Abstract

*The main goal of the present work is to clarify, under the structural point of view, the interaction of walls with running bond under vertical loads. To allow the execution of complex tests, small-scale models techniques are used. The influence of the geometric characteristics of the masonry panels, the slabs and bond-beams are experimentally studied. The bond-beam in the intermediate course extends the linear behavior of the masonry panels, but doesn't increase the strength. It is also concluded that the existence of the concrete slab enlarge the masonry load bearing capacity.*

*Keywords: Structural masonry. Interaction. Small-scale models. Experimental analysis. Vertical loads*

## 1 INTRODUÇÃO

A maior influência da consideração da interação no dimensionamento estrutural está no procedimento de distribuição das ações verticais, pois a trajetória das tensões ao longo da altura de um edifício de alvenaria estrutural é dependente das interseções de paredes. No entanto, são necessários maiores estudos para a compreensão do comportamento dessas interseções.

A interação de paredes adjacentes somente ocorrerá se na ligação entre esses elementos puderem se desenvolver as forças de interação. No caso dos cantos e bordas, a principal característica a ser analisada para se verificar a existência das forças de interação é a amarração direta dos blocos componentes. Nesse caso, é praticamente impossível a ocorrência de deslocamentos relativos entre as paredes, a menos que se verifique uma ruptura no local, o que garante a transferência de forças entre a parede mais solicitada para a menos solicitada. Já a inexistência de amarração entre as paredes praticamente elimina a possibilidade da ocorrência das forças de interação e, conseqüentemente, o espalhamento das forças que atuem em um ou outro elemento. Ressalta-se que neste trabalho aborda-se apenas o caso de amarração direta.

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, capuzzo@ifto.edu.br / valentim@uft.edu.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, mcorrea@sc.usp.br

Em estudos realizados por Capuzzo Neto (2005) observou-se que a distribuição das ações verticais, conseqüentemente a interação de paredes, é influenciada pelas dimensões em planta dos painéis de alvenaria. Dessa forma, verificou-se a necessidade de executar e ensaiar modelos de painéis com diferentes seções em planta para comprovação desse comportamento. Estudou-se, ainda, qual o efeito proporcionado pela presença das lajes de concreto e das cintas de amarração.

Devido às dimensões e aos equipamentos de aplicação de força necessários, os ensaios de painéis em escala natural seriam onerosos e alguns seriam até mesmo impraticáveis para as condições disponíveis no Laboratório de Estruturas da EESC/USP, com isso todos os ensaios de painéis foram realizados em escala reduzida (1:3). Todavia, foi feita uma comparação de um tipo de painel ensaiado com os ensaios em escala natural realizados anteriormente por Capuzzo Neto (2000), para efeito de controle.

## **2 METODOLOGIA**

Inicialmente foi realizada a caracterização dos materiais nas escalas natural e reduzida, determinando-se as propriedades de resistência e de deformabilidade do material empregado. Por meio desta caracterização será possível determinar fatores de escala para a correlacionar os resultados em escala natural e reduzida.

Após a caracterização dos materiais foram executados ensaios dos painéis de alvenaria em escala reduzida. Foram definidos painéis com duas seções transversais diferentes, denominadas de H1, de menor seção transversal, e H2, de maior seção transversal. Nos ensaios dos painéis tipo H1 variou-se a presença ou não da laje de topo. Já para os painéis tipo H2, além da presença da laje de topo, variou-se a presença ou não da cinta intermediária. Vale ressaltar que a geometria do painel H1 sem laje de topo é semelhante aos ensaios em escala natural de Capuzzo Neto (2000), o que permitirá realizar comparações entre as escalas.

A partir dos resultados dos ensaios do tipo H1 e H2 será possível estudar a distribuição das ações verticais, observar a influência da seção em planta observada nos modelos numéricos de Capuzzo Neto (2005) e investigar a ação das cintas de amarração e das lajes de concreto. A comparação de resultados com os ensaios em escala natural de Capuzzo Neto (2000) demonstrará a representatividade dos modelos reduzidos em ensaios mais complexos.

## **3 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS UTILIZADOS**

### **3.1 Caracterização da unidade em escala natural e reduzida**

Para a caracterização dos blocos cerâmicos nas diferentes escalas (Figura 01) foram determinadas as dimensões reais, a resistência à compressão, bem como o índice de absorção, massa específica e a área líquida. Para tanto, seguiram-se as recomendações dispostas nas normas brasileiras, com as adaptações necessárias à escala. Para os ensaios de resistência à tração indireta dos blocos e de índice de absorção inicial (IRA), seguiu-se os preceitos de normas americanas, visto a inexistência de norma brasileira similar. Também realizou-se o ensaio para a determinação do módulo de deformação do bloco, que não é normalizado. Os procedimentos de ensaios, os equipamentos utilizados e as particularidades relacionadas a cada escala estão detalhados em Capuzzo Neto (2005).



Figura 1 – Comparação das seções transversais dos blocos nas escalas (1:1) e (1:3).

Apesar das diferenças na seção geométrica e na resistência à compressão dos blocos em escala reduzida, estes foram capazes de representar bem o comportamento da alvenaria com blocos na escala natural (ver Tabela 01). Os valores de absorção, massa específica e razão entre as resistências de tração indireta e de compressão na área líquida foram próximos para as duas escalas, indicando que as características do material cerâmico são as mesmas. As diferenças entre as taxas de absorção inicial (IRA) estão mais ligadas ao tipo de seção transversal das unidades do que ao tipo de material dos blocos. Um outro fator positivo foi a manutenção da razão entre o módulo de deformação e a resistência do bloco para as duas escalas, que foi próximo a 360.

Tabela 1 – Resumo dos resultados dos blocos nas escalas reduzida (1:3) e natural (1:1)

Ensaio dos blocos		Escala (1:3)	Escala (1:1)
Dimensões	Largura (cm)	4,70	14,03
	Altura (cm)	6,23	18,97
	Comprimento (cm)	9,54	28,69
Compressão	Resistência (MPa)	30,31	14,44
	Módulo (MPa)	11147,7	5151,1
Tração indireta	Resistência (MPa)	5,91	4,43
Área líquida	(% em relação à área bruta)	44,5	37,2
Absorção	(%)	15,00	13,04
Massa específica	(g/cm <sup>3</sup> )	1,88	1,91
Taxa de absorção inicial	(kg/min/m <sup>2</sup> )	1,42	1,75

Em relação às técnicas de modelos reduzidos, Capuzzo Neto (2005) classificou que o bloco na escala reduzida se encaixou no caso de modelos distorcidos, principalmente por causa das diferenças nas seções transversais dos blocos, que gerou uma distorção da geometria. Ressalta-se que os fatores de escala foram todos calculados em função das propriedades referidas à área bruta. O fator de escala de comprimento ( $s_L$ ) foi direto e igual a 3, o fator de escala de tensão ( $s_\sigma$ ) foi igual 0,47, que é a razão entre a resistência à compressão do bloco em tamanho natural e reduzido. Já o fator de escala de deformação ( $s_\epsilon$ ) foi considerado igual a 1, apesar de não ter sido possível obter as deformações últimas do bloco em tamanho natural. Todavia, a razão entre os módulos de deformação para as duas escalas, que é função de ( $s_\sigma / s_\epsilon$ ), foi igual a 0,46; praticamente o mesmo valor de ( $s_\sigma$ ). Portanto, é razoável a adoção de ( $s_\epsilon$ ) = 1.

A Figura 02 exibe os diagramas tensão x deformação dos blocos naturais em relação à área bruta e dos blocos reduzidos, sendo que estes últimos têm a tensão na área bruta multiplicada pelo fator de escala de tensão ( $s_\sigma$ ). São apresentados para os blocos naturais os trechos anteriores à perturbação dos resultados anteriormente comentada. Percebe-se na figura uma grande similaridade

entre os diagramas, indicando que o bloco na escala reduzida representa bem o comportamento do bloco em escala natural.

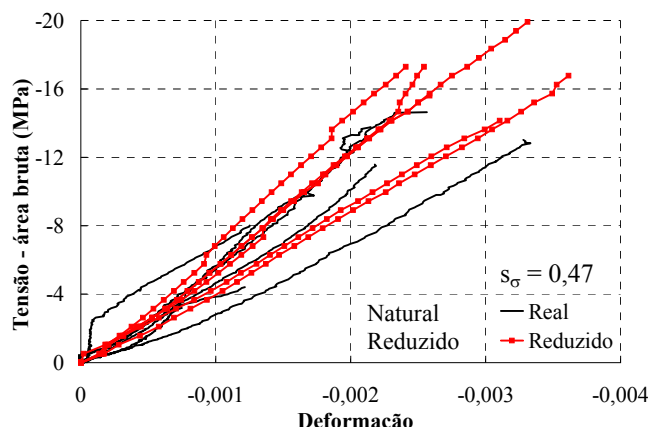


Figura 2 – Diagramas tensão x deformação considerando os fatores de escala.

### 3.2 Caracterização da alvenaria em escala natural e reduzida

Apresenta-se na Tabela 02 um quadro resumo com os principais resultados obtidos nos ensaios de caracterização realizados por Capuzzo Neto (2005), em que todos os valores são referidos à área bruta. Observa-se que para os ensaios na direção normal à junta de assentamento as resistências dos corpos-de-prova (bloco, prisma de três blocos e paredinha) na escala reduzida (1:3) foram cerca de 105% superiores às na escala natural (1:1), com exceção da argamassa (+14%). As relações entre os módulos de deformação do bloco medidos nos ensaios do bloco isolado e do prisma estão na mesma faixa de valores que as obtidas para as resistências. Contudo, no ensaio das paredinhas, onde a base de medições da deformação considera a presença da argamassa, a relação entre os módulos de deformação nas duas escalas foi inferior à verificada para a relação entre as resistências. Verificou-se, ainda, que a deformação última e o coeficiente de Poisson ( $\nu_x$ ) da paredinha na escala reduzida foram também cerca de 100% superiores aos da escala natural.

Tabela 2 – Resumo dos resultados e comparações dos ensaios nas escalas reduzida (1:3) e natural (1:1) – referidos à área bruta

Ensaio		Escala (1:3)	Escala (1:1)	(1:3) / (1:1)
<b>Bloco - Direção normal à junta</b>	Resistência (MPa)	30,31	14,44	+ 109,9%
	Módulo (MPa)	11147,7	5151,1	+ 116,4%
<b>Argamassa</b>	Resistência (MPa)	4,20	3,68	+14%
	Módulo (MPa)	7057,8	5876,7	+ 20%
<b>Prisma - Direção normal à junta</b>	Resistência (MPa)	11,74	5,83	+ 101,4%
	Módulo (MPa)	10793,8	5644,6	+ 91,2%
<b>Paredinha – Direção normal à junta</b>	Resistência (MPa)	7,49	3,41	+119,6%
	Módulo (MPa)	7784,9	6358,3	+ 22,4%
	Deformação última	-1,42 ‰	-0,70 ‰	+102,8%
	Poisson ( $\nu_x$ )	0,12	0,06	+100,0%
<b>Prisma à flexão (aderência)</b>	Resistência (MPa)	0,388	0,235	+65,1%

Por tudo apresentado sobre a caracterização dos materiais na escala reduzida e natural, ficou clara a boa representatividade dos modelos reduzidos para os ensaios na direção normal à junta

de assentamento. Analisando-se os resultados de acordo com a teoria de modelos reduzidos, apresentada em Capuzzo Neto (2005), a alvenaria na escala (1:3) foi classificada como modelo do tipo distorcido, em função das diferenças geométricas das seções transversais dos blocos. Todas as propriedades foram consideradas em função da área bruta. O fator de escala de comprimento ( $s_L$ ) foi o único de obtenção direta, sendo igual a 3.

Examinando-se os resultados dos ensaios na direção normal à junta de assentamento, o fator de escala de tensão ( $s_\sigma$ ), que é a razão entre a resistência da alvenaria na escala natural e na reduzida, pode ser considerado igual a 0,48. Este valor corresponde à média das relações entre prismas e paredinhas, sendo idêntica à obtida para o bloco. Já o valor do fator de escala de deformação ( $s_\epsilon$ ) foi obtido indiretamente da relação entre os módulos de deformação, que é função de ( $s_\sigma / s_\epsilon$ ). Dessa forma, como o fator de tensão ( $s_\sigma$ ) já é conhecido, a determinação do fator de deformação ( $s_\epsilon$ ) foi imediata. No caso do ensaio de prisma de três blocos, onde as medições das deformações foram realizadas apenas no bloco intermediário, ( $s_\epsilon$ ) foi praticamente igual a 1, fato que também ocorreu na análise do bloco isolado.

A Figura 03 apresenta os diagramas tensão – deformação obtidos nos ensaios de prismas, considerando-se os fatores de escala de tensão e de deformação para os resultados obtidos na escala reduzida. Verificou-se uma ótima correlação dos resultados, sendo que as diferenças nas curvas estão relacionadas à forma dos ensaios. Na escala reduzida o carregamento foi aplicado com controle de força e na escala natural foi utilizado o controle de deslocamento, por isso foi possível obter um patamar de deformações apenas para o último caso.

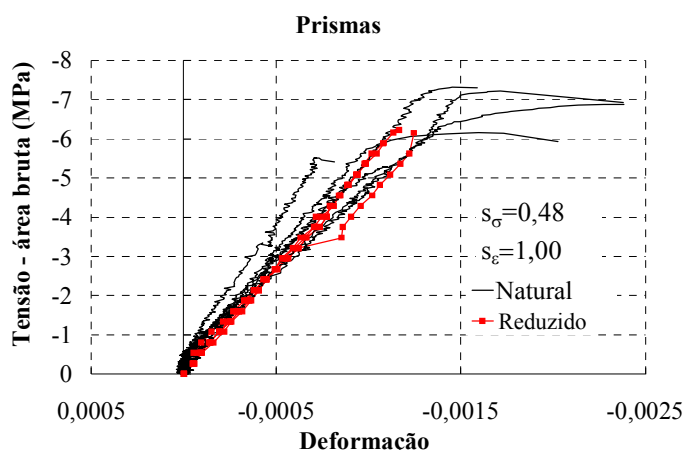


Figura 3 – Diagramas tensão - deformação dos prismas na direção normal à junta de assentamento considerando-se os fatores de escala.

No ensaio da paredinha na direção normal à junta de assentamento, as deformações englobavam tanto os blocos quanto as juntas de argamassa. O fator de escala de deformação ( $s_\epsilon$ ) obtido por meio da relação entre os módulos de deformação já não foi igual a 1, passando a valer 0,59. Essa mudança no fator ( $s_\epsilon$ ) foi creditada às diferenças de confinamento das juntas de assentamento entre as paredinhas nas duas escalas. Na Figura 04 é possível observar que a utilização dos fatores de escala mostra novamente uma boa correlação entre os resultados das diferentes escalas, com as curvas possuindo uma mesma tendência.

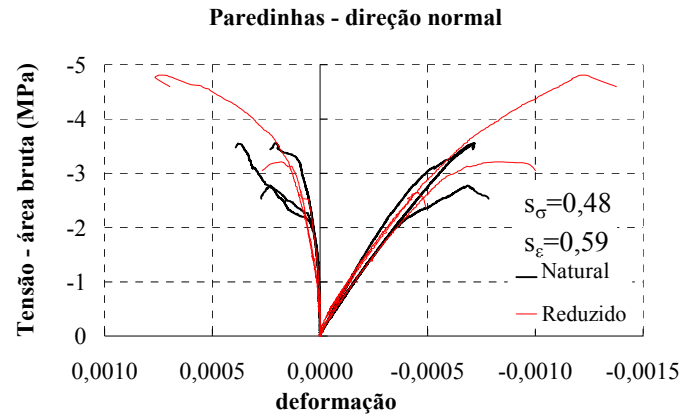


Figura 4 – Diagramas tensão - deformação das paredinhas na direção normal à junta de assentamento considerando-se os fatores de escala.

Conclui-se que a utilização dos fatores de escala para os ensaios na direção normal à junta de assentamento levou a uma excelente correlação dos resultados, como pode ser verificado nas figuras 02,03 e 04.

#### 4 ENSAIOS DOS PAINÉIS EM ESCALA REDUZIDA TIPO H1

Efetou-se inicialmente o ensaio do painel em formato “H” com menores dimensões na escala (1:3) na tentativa de se comparar com os resultados obtidos com os encontrados por Capuzzo Neto (2000) em painéis em escala natural. Investigou-se, também, a influência da presença de uma laje no topo, visando simular uma condição mais próxima à de um painel de alvenaria pertencente a um edifício, impedindo parcialmente a flexão dos flanges. Com isso, ensaiou-se um painel H1 sem a presença da laje de topo e um segundo com a sua presença (Figura 05).

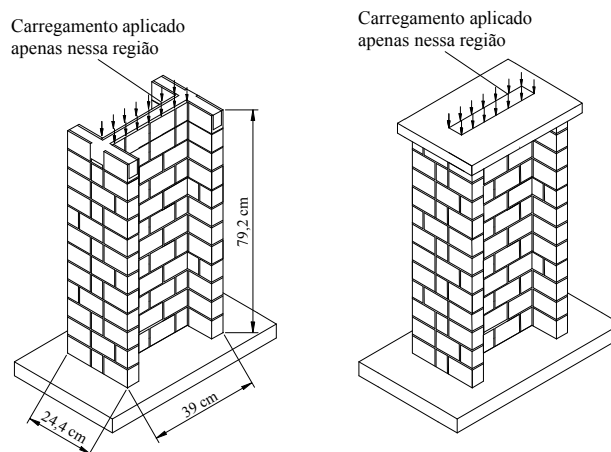


Figura 5 – Painéis H1 com e sem laje de topo.

Em ambos os casos empregou-se a cinta de amarração de respaldo (última fiada). Ressalta-se que toda a base do painel foi apoiada e que o carregamento foi aplicado apenas na região correspondente à parede central. A instrumentação utilizada está representada na Figura 06.

#### 4.1 Comparação dos resultados dos painéis H1 com e sem laje de topo

A única diferença entre os painéis H1 foi a presença ou não da laje no topo do painel. Conseqüentemente, uma comparação entre os resultados dos ensaios fornece a influência da presença da laje no comportamento do painel. A comparação das forças de ruptura dos painéis H1-1 (sem laje no topo) e H1-1a (com laje no topo) está na Tabela 03, onde percebe-se que a laje promoveu um aumento de 37% na força de ruptura. No painel H1-1 (sem laje) a ruptura do painel ocorreu quando o grau de fissuração da interseção das paredes foi alto. Nesse instante houve um alívio de forças nos flanges e apenas a parede central passou a resistir à força aplicada. Dessa forma, a resistência do painel H1-1 ficou limitada à resistência da parede central. No Painel H1-1a (com laje) também ocorreu um alto grau de fissuração na interseção das paredes. No entanto a laje de topo não permitiu o alívio total de força nos flanges, além de transmitir diretamente para eles uma parcela do carregamento. Com isso, a capacidade resistente do painel foi composta pela capacidade da parede central mais a força transferida para os flanges.

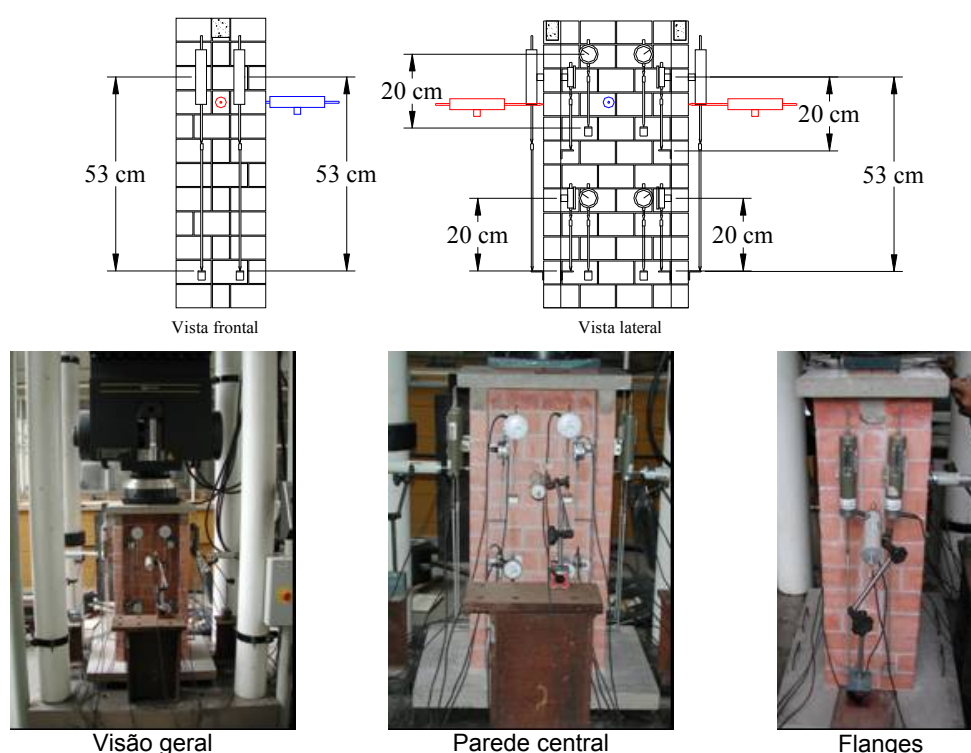


Figura 6 – Esquema e instrumentação dos ensaios dos painéis H1.

Tabela 3 – Comparação das forças de ruptura dos painéis H1

Tipo do painel	Força de ruptura (kN)	Força Painel / Força Painel H1-1
H1-1 (sem laje no topo)	121,32	1,00
H1-1a (com laje no topo)	166,18	1,37

Observa-se na Figura 07 que a presença da laje de topo levou a modificações na forma de ruptura do painel. No painel H1-1 (sem laje) a fissuração ocorreu principalmente na região da interseção das paredes (Figura 07-a). Já no painel H1-1a (com laje), ocorreram fissuras verticais, que indicam a ruptura por compressão, além das fissuras na interseção da parede (Figura 07-b).

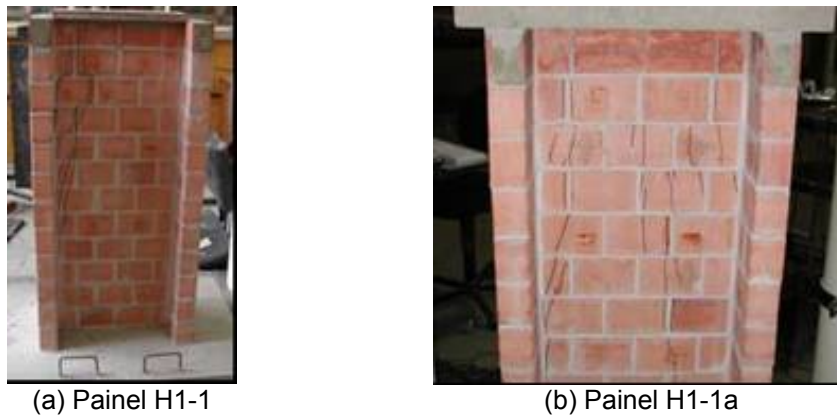


Figura 7-- Comparação das formas de ruptura dos painéis H1-1 e H1-1a.

Para a análise do comportamento dos painéis H1-1 e H1-1a foram utilizadas as deformações médias calculadas pro meio das leituras de determinados grupos de transdutores. Os grupos foram definidos em relação à sua disposição no painel. O grupo alma inferior corresponde aos transdutores localizados na região inferior da parede central. Os transdutores posicionados na região superior da parede central foram denominados de grupo alma superior. Em relação aos flanges, puderam-se ter transdutores nas faces externas e internas. Como na face externa dos flanges houve uma única disposição, esses transdutores foram pertencentes ao grupo flange externo. Na face interna os transdutores foram divididos em dois grupos, flange superior e flange inferior, que correspondem respectivamente à região superior e inferior da face interna dos flanges do painel.

Por meio da figura 08 verifica-se que o comportamento global dos painéis H1-1 e H1-1a foram semelhantes até aproximadamente a força de 100 kN. A partir desse valor, no painel H1-1 ocorreu um alívio de forças nos flanges, culminando na ruptura do painel para uma força de 122 kN (Figura 08-a). Já no painel H1-1a (com laje) ocorreu uma perturbação quando o carregamento atingiu os 120 kN. No entanto, o painel continuou a resistir até os 166 kN (Figura 08-b). Observa-se, também, que as deformações nos flanges externo e inferior permaneceram ao final praticamente constantes, enquanto no flange superior continuou a ocorrer o acréscimo das deformações.

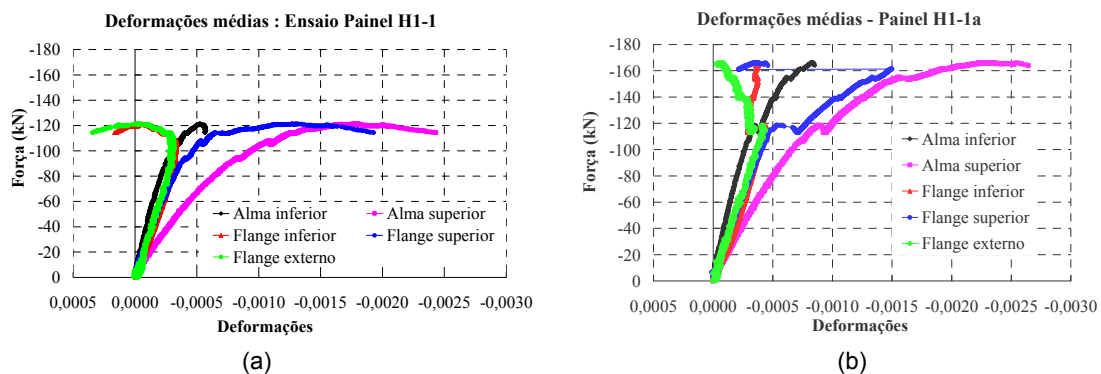


Figura 8 – Comparação dos comportamentos dos painéis H1.

Comparando-se, na Figura 09, os trechos lineares das deformações da parede central dos painéis H1-1 (sem laje) e H1-1a (com laje) observa-se uma grande semelhança dos seus comportamentos. As diferenças nas inclinações das retas foram inferiores a 13%, o que sugere que a influência da laje seja pequena para baixos carregamentos. Por meio da Figura 10, que apresenta os trechos lineares das deformações dos flanges dos dois painéis, também foi possível chegar à mesma conclusão.

Neste caso, com base nas comparações feitas, pode-se concluir que a contribuição da laje no topo além de aumentar a capacidade máxima do painel, também prolonga o trecho de comportamento linear do material.

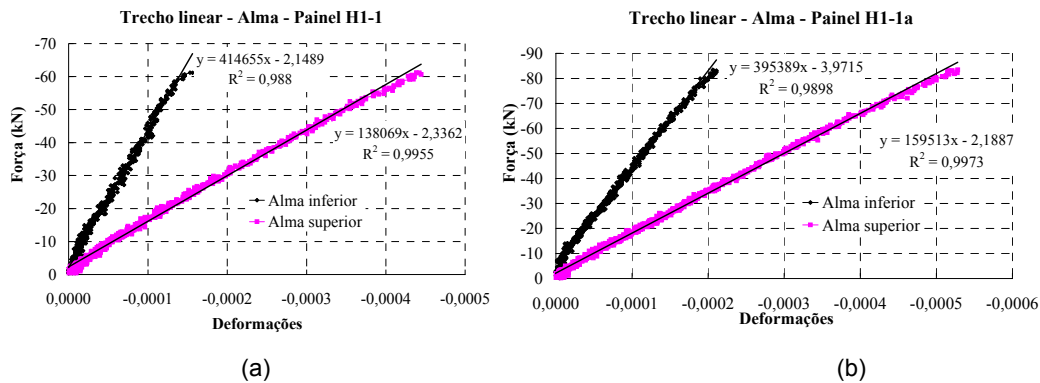


Figura 9 – Comparação das deformações na parede central dos painéis H1.

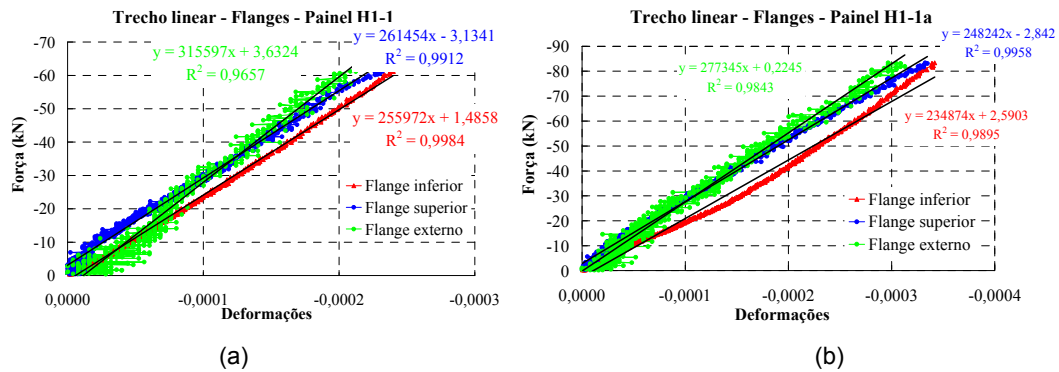
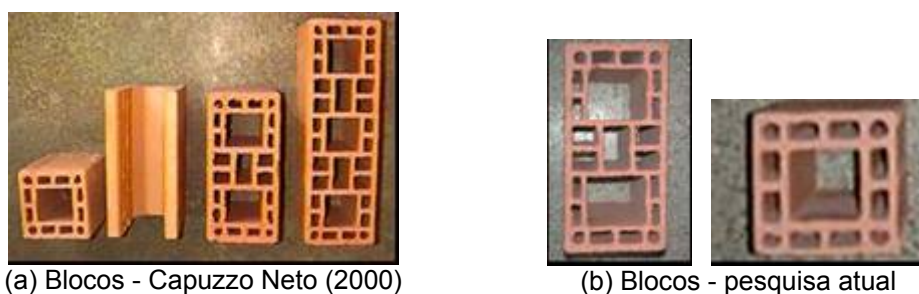


Figura 10 – Comparação das deformações nos flanges dos painéis H1.

#### 4.2 Comparação dos resultados do painel H1-1 em escala reduzida (1:3) com os ensaios de painéis em escala natural de Capuzzo Neto (2000)

Capuzzo Neto (2000) realizou ensaios de painéis H de alvenaria estrutural de blocos cerâmicos em escala natural. As condições de carregamento e as dimensões do painel H1 em escala reduzida são similares a esses painéis. Contudo, a disposição das fiadas possui uma diferença, pois no caso dos ensaios em escala natural existia o bloco de amarração (Figura 11).



(a) Blocos - Capuzzo Neto (2000)

(b) Blocos - pesquisa atual

Figura 11 – Comparação dos tipos de blocos.

Ressalta-se que os blocos cerâmicos utilizados por Capuzzo Neto (2000) não são do mesmo fabricante dos blocos utilizados nesta pesquisa. Entretanto, possuem as mesmas dimensões nominais, uma seção transversal semelhante e uma resistência à compressão um pouco inferior, cerca de 11 MPa na área bruta.

Os painéis tinham as bases todas apoiadas, sendo que o carregamento foi aplicado apenas na parede central. Na Figura apresenta-se novamente a instrumentação utilizada nos ensaios, onde se percebe a semelhança com a disposição dos transdutores nos modelos em escala reduzida (ver Figura 12). A principal diferença entre as instrumentações ocorreu em relação à face externa dos flanges. Nos ensaios de Capuzzo Neto (2000) havia transdutores em dois níveis ao longo da altura (trecho superior e inferior), enquanto que nos ensaios em modelos reduzidos havia um único nível de transdutores, englobando os trechos superior e inferior. Outra diferença percebida foi que nos painéis H1-1 em escala reduzida, devido ao pequeno espaço físico, houve a necessidade dos transdutores referentes ao trecho superior da parede central serem deslocados um bloco na altura, fato desnecessário nos ensaios em escala natural.

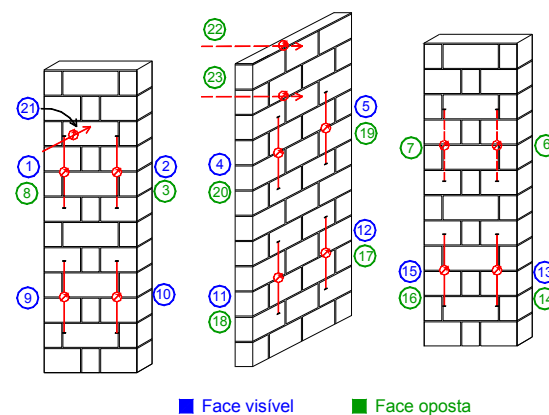


Figura 12 – Instrumentação utilizada por Capuzzo Neto (2000).

Para realizar a comparação entre os resultados dos ensaios em escala natural (1:1) e do ensaio do painel H1-1 em escala reduzida (1:3) empregou-se a teoria de modelos físicos reduzidos. Contudo, os fatores de escala para este caso não foram conhecidos, pois os blocos utilizados por Capuzzo Neto (2000) foram diferentes. Porém, ao se utilizarem os fatores de escala referentes aos blocos reais deste trabalho e multiplicá-los pelos resultados do painel H1-1 em escala reduzida obteve-se, teoricamente, o comportamento de um painel H1-1 na escala (1:1). Desse modo, foi possível realizar uma comparação dos resultados dos ensaios dos painéis de Capuzzo Neto (2000) com o resultado do painel H1-1 na escala (1:1), determinado pela teoria dos modelos reduzidos. Assim, a principal diferença entre os dois painéis foi que os blocos possuem propriedades mecânicas diferentes.

Para a obtenção do comportamento do painel H1 na escala natural (1:1) os valores obtidos no modelo reduzido foram multiplicados pelos fatores de escala. No caso de medidas relacionadas ao comprimento, o fator ( $s_L$ ) foi direto e igual a 3. Para as deformações e tensões utilizaram-se os valores obtidos nos ensaios de caracterização de compressão normal à junta de assentamento,  $s_\epsilon = 0,59$  e  $s_\sigma = 0,48$  respectivamente. Já o fator de escala para força ( $s_F$ ) foi dado pela relação  $s_F = s_\sigma \cdot s_L^2$ , que foi igual a 4,32.

A Tabela 04 apresenta uma comparação das forças de ruptura e das resistências à compressão dos prismas de três blocos entre o painel H1-1, transformado por meio dos fatores de escala para a escala natural (1:1), e o valor médio dos ensaios da série 1 de Capuzzo Neto (2000). Observa-se que a força de ruptura nos dois casos foi bastante próxima, com uma diferença inferior a 3%. Nota-se, também, que a resistência dos prismas de Capuzzo Neto (2000) foi cerca de 12%

superior. Portanto, estão dentro da faixa de variação obtida usualmente para estruturas de alvenaria estrutural.

Tabela 4 – Comparação entre o painel H1-1 na escala (1:1) e os painéis de Capuzzo Neto (2000)

Tipo	Força de Ruptura (kN)	Resistência dos prismas (MPa)
Painel H1-1 escala (1:1)	524,1*	4,99*
Painéis Série 1- Capuzzo Neto (2000)	510,0	5,60
* Resultado obtido pela multiplicação do resultado do ensaio na escala (1:3) pelos fatores de escala		

As formas de ruptura do painel H1-1 em escala reduzida e dos painéis da série 1 de Capuzzo Neto (2000) também foram semelhantes como pode ser visto na Figura 13, com fissuras ao longo da altura na região da interseção da parede central com os flanges.

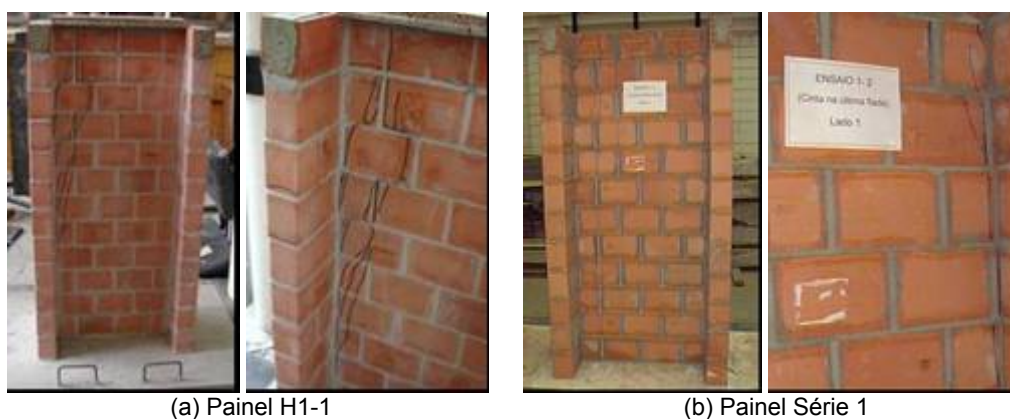


Figura 13 – Comparação das formas de ruptura.

Ainda foram realizadas as comparações das evoluções das deformações na parede central (Figura 14-a e -b) e nos flanges (Figura 14-c e -d). Lembra-se que não foi possível fazer a comparação das medidas relacionadas ao flange externo e que houve uma pequena diferença no posicionamento dos transdutores na região superior da parede central. Ressalta-se, também, que no caso dos ensaios de Capuzzo Neto (2000) os transdutores foram retirados antes da ruptura dos painéis. Portanto não houve leituras que representassem sua ruína.

Observa-se, na Figura 14-a, que a tendência do comportamento da parede central na região superior foi bem próxima para todos os casos. Já para a região inferior (Figura 4-b), apenas o painel em tamanho natural série 1-3 se aproximou do comportamento do painel H1-1 transformado para a escala natural (1:1). Em relação aos flanges (Figura 14-c e d), nota-se um comportamento praticamente idêntico em grande parte do carregamento, inclusive na região do flange inferior, em que os painéis série 1-1 e série 1-3 apresentaram uma tendência de inversão das deformações também registrada no caso do painel H1-1.

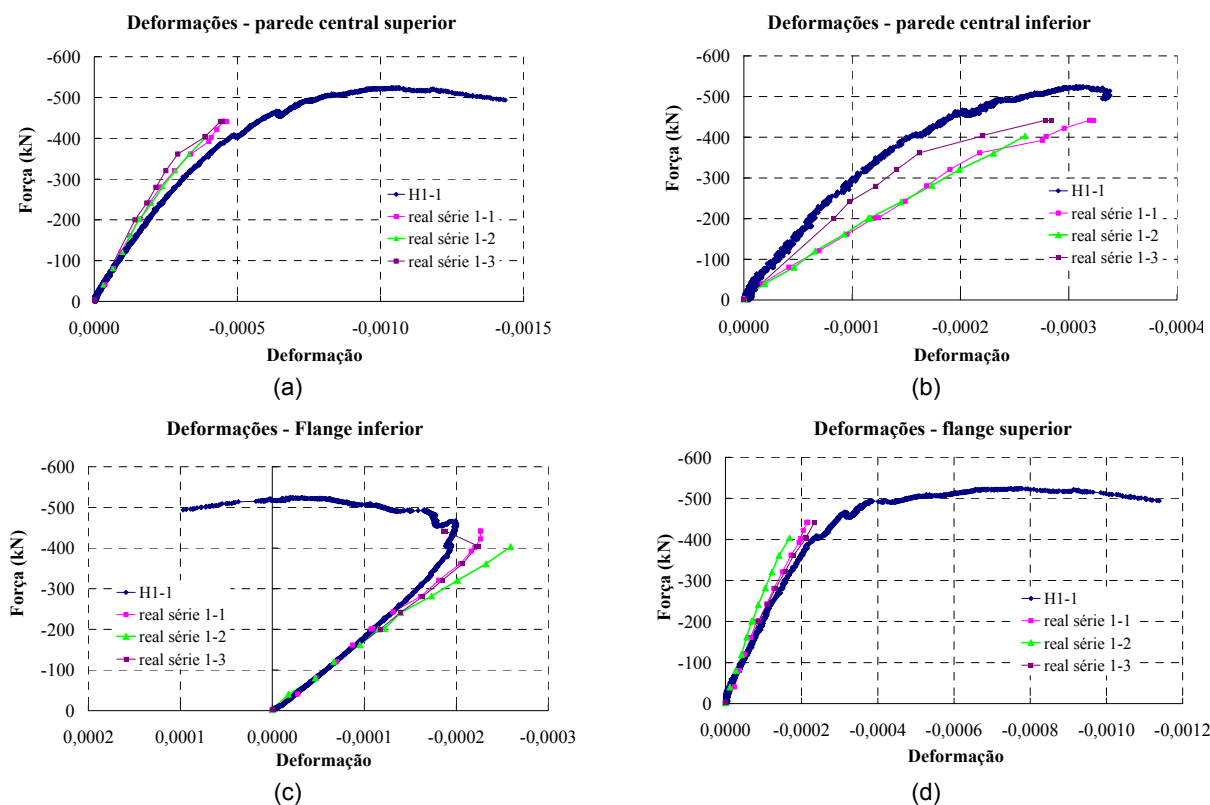


Figura 14 – Comparação das deformações da parede central e dos flanges.

Desse modo, conclui-se que o painel H1-1 na escala (1:3) foi capaz de representar bem o comportamento e, até mesmo, a ruptura de um painel em escala natural (1:1).

## 5 ENSAIOS DOS PAINÉIS EM ESCALA REDUZIDA TIPO H2

Além do painel H1 apresentado no item anterior, ensaiou-se um segundo caso que foi o do painel H2, sendo que os exemplares foram novamente em escala reduzida (1:3). O objetivo deste ensaio foi comprovar que a uniformização das tensões não ocorre em um único pavimento, assim o carregamento foi aplicado apenas na região da parede central. Além da cinta de respaldo presente em todos os painéis, estudou-se o efeito da cinta intermediária, pois, neste caso, a transferência de força se daria ao longo de toda a altura do painel; dessa forma, a presença dessa cinta poderia ter um efeito benéfico. Similarmente ao painel H1, investigou-se o efeito da presença de uma laje no topo do painel (Figura 15). Dessa maneira, foram ensaiados no total quatro painéis do tipo H2. Para facilitar a desenvoltura do texto foram utilizadas denominações para os painéis H2 ensaiados, que estão indicadas na Tabela 05.

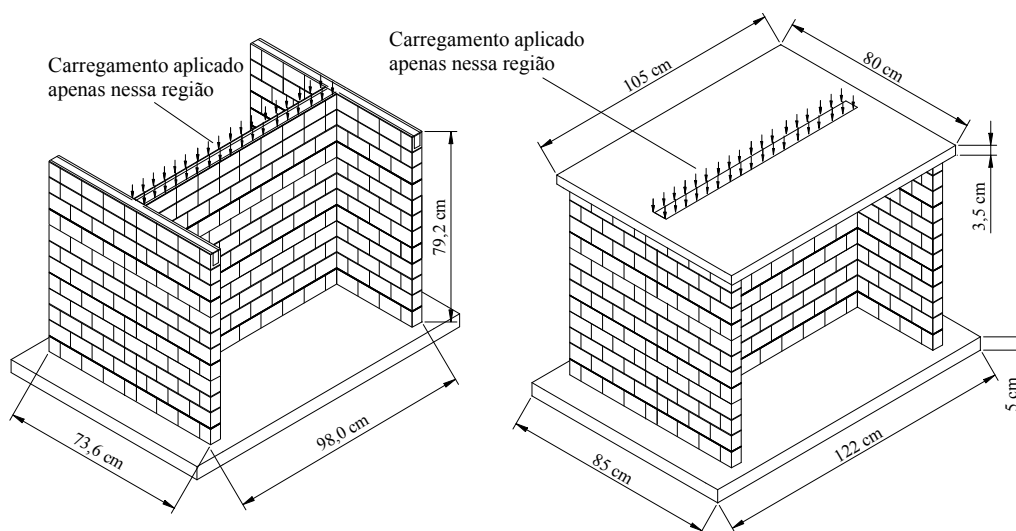


Figura 15 – Painéis H2 com e sem laje no topo.

Tabela 5 – Denominações dos painéis H2

Painel	Cinta de amarração no topo	Cinta de amarração intermediária	Laje no topo
Painel H2-1	Sim	Não	Não
Painel H2-1a	Sim	Não	Sim
Painel H2-2	Sim	Sim	Não
Painel H2-2a	Sim	Sim	Sim

Novamente a instrumentação empregada, em todos os painéis H2, permitiu avaliar as deformações das diferentes paredes em dois níveis, na metade superior e inferior do painel (Figura 16).

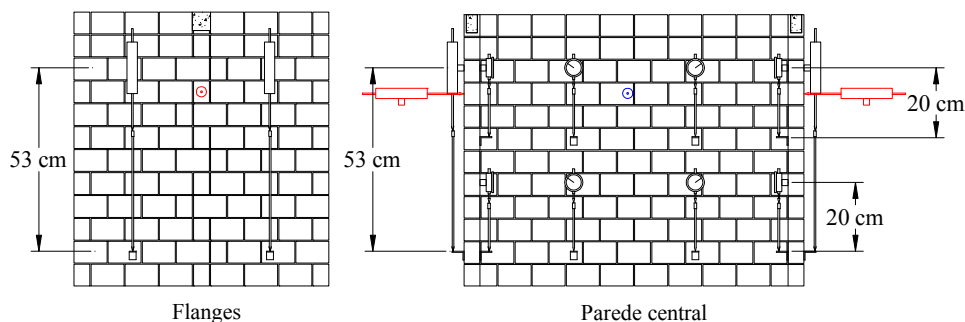


Figura 16 – Esquema e instrumentação dos ensaios dos painéis H2.

## 5.1 Comparações entre os resultados dos painéis H2

As comparações entre os resultados dos ensaios dos diferentes painéis H2 fornecem uma idéia da influência da presença da cinta intermediária e da laje no topo. Nesse item analisá-se comparativamente os resultados dos quatro painéis H2.

A Tabela 06 apresenta os resultados das forças de ruptura de cada painel, bem como uma comparação com o valor obtido no ensaio do painel H2-1, tomado como referência. O valor da força de ruptura do Painel H2-2a foi descartado devido à ocorrência de uma ruptura atípica. Analisando-se os resultados percebeu-se que a influência da cinta de amarração intermediária foi pequena em termos de resistência. Já a laje de topo proporcionou um ganho de resistência, comprovado nos ensaios dos painéis H1, pois sua presença física impediu que as ações transferidas pelos flanges fossem dissipadas no momento em que ocorreu a ruptura da ligação com a parede central.

As formas de ruptura da parede central dos painéis H2 estão apresentadas na Figura 17. Ressalta-se que no caso do painel H2-1 o carregamento foi retirado de maneira que não ocorresse a ruptura explosiva da parede central. Já nos demais painéis, mesmo aplicando-se o carregamento por controle de deslocamento, não se conseguiu evitar a ruptura frágil dos painéis. Observa-se que em todos os casos ocorreu uma intensa fissuração inclinada na região do encontro das paredes gerada pelo cisalhamento vertical, o que provocou a separação entre a parede central e os flanges. A partir desse momento todo o carregamento aplicado passou a ser resistido pela parede central, até que ela rompeu por compressão. Acredita-se que no caso do painel H2-2a tenha ocorrido uma falha no apoio da laje da base, pois a ruptura se deu na região inferior do painel e com um carregamento bem inferior ao seu similar (painel H2-1a).

Tabela 6 – Comparação das forças de ruptura dos painéis H2

Tipo do painel	Laje de topo	Cinta intermediária	Força de ruptura (kN)	Força Painel / Força Painel H2-1
H2-1	não	não	367,15	1,00
H2-1a	sim	não	467,05	1,27
H2-2	não	sim	379,15	1,03
H2-2a	sim	sim	302,64*	*

\* Obs.: Ruptura atípica, não deve ser considerado para comparações



(a) Painel H2-1



(b) Painel H2-1a



(c) Painel H2-2



(d) Painel H2-2a

Figura 17 – Comparação das formas de ruptura da parede central (alma) dos painéis H2.

Apresentam-se na Figura 18 as fissurações típicas dos flanges dos quatro painéis H2. Verificou-se que em todos os casos a forma principal é a de flexão, com a tendência de giro das fiadas, separando-se os blocos das juntas de argamassa de assentamento. Nos painéis H2-1, H2-1a e H2-2 a fissuração por flexão se concentrou nas quatro últimas fiadas. Já no painel H2-2a ocorreram fissuras de flexão em fiadas inferiores e fissuras escalonadas relacionadas ao cisalhamento do painel, indicando novamente um comportamento atípico.

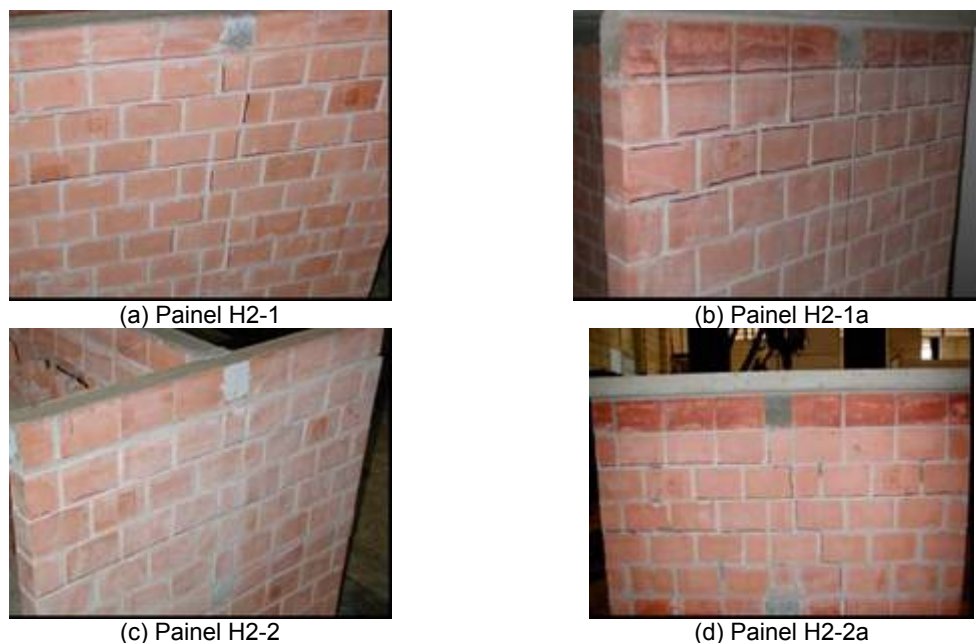


Figura 18 – Comparação das formas de ruptura dos flanges dos painéis H2.

O comportamento em diferentes porções dos quatro painéis H2 ao longo do ensaio estão apresentados na Figura 19. Observa-se que nos painéis sem laje de topo (H2-1 e H2-2) as diferenças entre as deformações da região superior e inferior da parede central (alma) foram superiores às constatadas nos painéis com laje de topo (H2-1a e H2-2a). Em relação aos flanges verificou-se que quando não há presença da laje de topo ocorreu uma flexão pronunciada do flange externo, com deformações de tração desde o início dos ensaios. Nos painéis com laje de topo os flanges possuíram uma tendência de estarem todos comprimidos até o momento em que ocorreu a fissuração na interseção das paredes. A partir desse ponto a flexão tornou-se dominante e, na região externa dos flanges, chegaram a ocorrer alongamentos. Comparando-se os painéis H2-1 e H2-2 verificou-se que a influência da cinta intermediária nas deformações dos painéis não é tão significativa, apenas há uma redução dos valores máximos dos alongamentos no flange externo.

Na Figura 20 comparam-se os trechos lineares das paredes centrais dos painéis H2. Observa-se que as deformações da região superior das paredes centrais dos painéis sem laje de topo foram cerca de 55% maiores que da região inferior, indicando uma transferência do carregamento aplicado na alma para os flanges. Já para os painéis com laje de topo a região superior da parede central apresentou valores cerca de 28% maiores que a região inferior. Acredita-se que essa redução das diferenças entre as deformações na região superior e inferior se deva ao fato da laje de topo transmitir parte do carregamento diretamente para os flanges antes de comprimir a região superior da alma. Nota-se, ainda na mesma figura, que a influência da cinta de amarração intermediária foi pequena em termos de comportamento. Porém, percebe-se que os painéis com a presença dessa cinta apresentaram uma rigidez superior à daqueles sem cintas, com um aumento entre 20% e 40%.

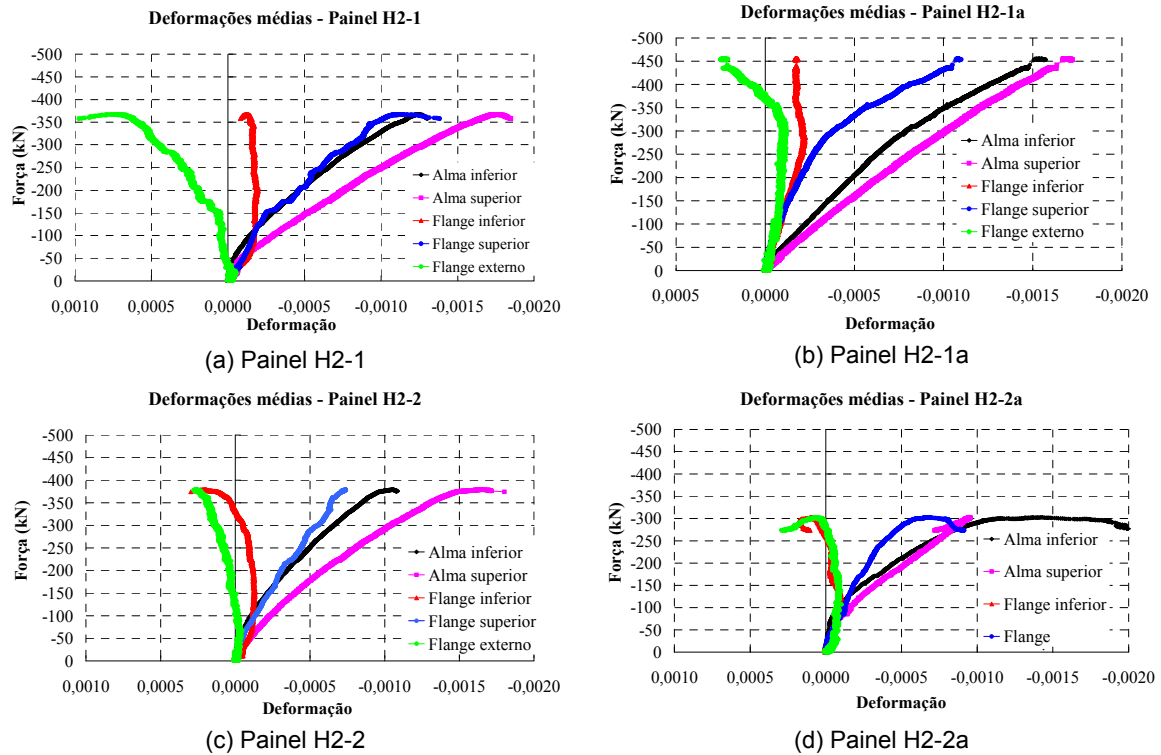


Figura 19 – Comparação dos comportamentos dos painéis H2.

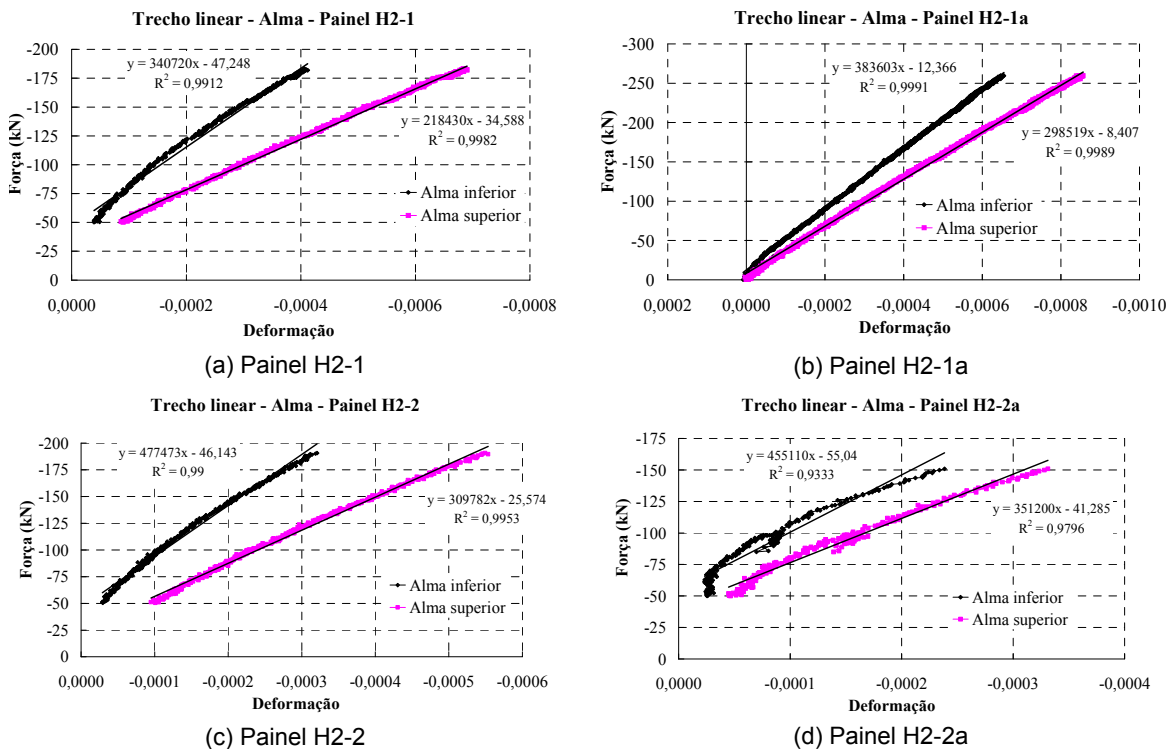


Figura 20 – Comparação dos trechos lineares das almas dos painéis H2.

Os comportamentos dos trechos iniciais das curvas para os flanges dos painéis H2 estão ilustrados na Figura 21. Percebe-se que os flanges possuíam perturbações mesmo para baixos carregamentos, o que dificulta a análise dos resultados. Entretanto, nota-se claramente uma diferença entre os painéis sem e com laje de topo. Nos painéis sem laje de topo (H2-1 e H2-2) a flexão dos

flanges foi predominante, sendo que o flange externo apresenta tendência de alongamentos desde o início dos ensaios. Nos painéis com laje de topo (H2-1a e H2-2a) verifica-se uma tendência de flexão, sendo que até mesmo o flange externo permaneceu comprimido nessa fase inicial do ensaio. Em relação à presença da cinta intermediária não se observa nenhuma influência significativa no comportamento dos painéis.

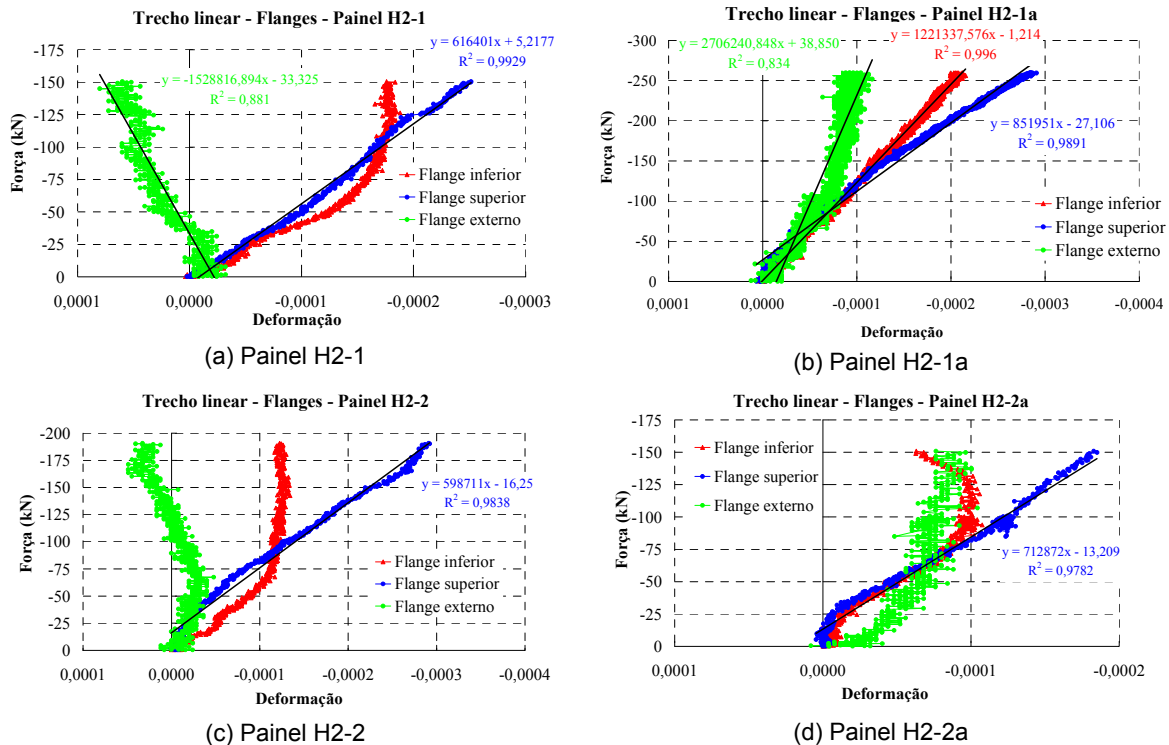


Figura 21 – Comparação dos trechos iniciais das deformações nos flanges dos painéis H2.

## 6 CONCLUSÕES

Nos ensaios de caracterização, determinaram-se as principais propriedades mecânicas, tanto dos materiais isolados (unidade, argamassa e interface) quanto do conjunto (alvenaria). Verificou-se que os valores de absorção, massa específica e razão entre as resistências de tração indireta e de compressão das unidades foram próximos para as duas escalas, indicando que as características do material cerâmico eram as mesmas. Observou-se que os modelos reduzidos representaram bem o comportamento dos ensaios para carregamento na direção normal à junta de assentamento em escala real, obtendo-se os fatores de escalas para a correlação dos resultados.

Em relação à distribuição das ações verticais, investigaram-se a influência da seção geométrica do painel e da presença de cintas de amarração e de lajes em que é aplicado o carregamento. Dessa investigação inferiu-se que:

- a comparação dos ensaios dos painéis tipo H1 com os realizados por Capuzzo Neto (2000) demonstrou que os modelos reduzidos foram representativos do comportamento da alvenaria em escala real;
- a influência das cintas de amarração na fiada intermediária foi praticamente nula em termos de resistência, entretanto modificou o comportamento dos flanges e prolongou o trecho do comportamento linear;
- a presença das lajes de concreto no topo indicou um acréscimo na resistência dos painéis de alvenaria, que foi cerca de 30% para os painéis ensaiados. Esse acréscimo foi devido às lajes que

impediram que a força transferida para os flanges se dissipasse no instante da ruptura da interface das paredes;

- outros efeitos das lajes de concreto são a redução da flexão nos flanges dos painéis de alvenaria e o prolongamento do trecho de comportamento linear;

Após o estudo apresentado neste trabalho recomenda-se, para o desenvolvimento de projetos de edifícios de alvenaria estrutural, a utilização de processos de distribuição das ações verticais que considerem a interação de paredes. No entanto, é necessário verificar o nível de cisalhamento atuante nas interfaces, com o intuito de evitar concentrações de tensão que possam levar à ruptura da ligação das paredes. Ressalta-se que essas indicações são válidas apenas para o caso de amarração direta, sendo necessários estudos complementares para aplicações em situações com amarração indireta.

## 7 AGRADECIMENTOS

Prestam-se agradecimentos à empresa JCE Tecnologia em Boquilhas, pelo desenvolvimento e doação das boquilhas utilizadas na produção dos blocos em escala reduzida.

Agradecimentos especiais à Cerâmica Maristela, na pessoa da Eng<sup>a</sup>. Paula Marchi, não só pela doação dos blocos, mas também por permitir e auxiliar o desenvolvimento do processo de produção dos blocos em escala reduzida.

À FAPESP pelo financiamento da pesquisa, através da bolsa de doutorado e sua reserva técnica.

## 8 REFERÊNCIAS

CAPUZZO NETO, V. **Estudo teórico e experimental da interação de paredes de alvenaria estrutural submetidas a ações verticais**. 2000. 111p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

CAPUZZO NETO, V. **Interação de paredes de alvenaria estrutural cerâmica sob ações verticais**. 2005. 322p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

# UMA APLICAÇÃO DA TÉCNICA DOS ALGORITMOS GENÉTICOS EM DETECÇÃO DE DANO ESTRUTURAL

Jesús Daniel Villalba Morales<sup>1</sup> & José Elias Laier<sup>2</sup>

## Resumo

*No presente trabalho o problema de detecção de dano estrutural é resolvido por meio de um processo de otimização no qual se pretende encontrar as propriedades do sistema que fazem com que a estrutura apresente determinadas características dinâmicas. Como técnicas de otimização foram utilizados três tipos de algoritmos genéticos de codificação diferente: binária, real e binária com representação redundante implícita. A função objetivo é formulada a partir das mudanças existentes em frequências naturais e formas modais entre as condições com e sem dano. Uma viga simplesmente apoiada e um pórtico sob casos de dano simples e múltiplo são estudados, mostrando a aplicabilidade dos algoritmos genéticos na resolução do problema de detecção de dano. A aplicabilidade de uma metodologia que permite determinar elementos provavelmente danificados é também estudada.*

*Palavras-chave: Detecção de dano. Algoritmos genético. Parâmetros dinâmicos.*

## APPLYING GENETIC ALGORITHMS FOR SOLVING THE DAMAGE DETECTION PROBLEM

### Abstract

*In this work, the damage detection problem is solved for formulating an optimization problem in which one wants to find the system's properties that permit to the structure to have certain dynamic properties. Three different genetic algorithms are employed: binary, real and binary with implicit redundant representation. The objective function is formulated from changes in natural frequencies and mode shapes, after damage. A beam and frame type structure under simple and multiple damage scenarios are studied. Results show the performance of genetic algorithms for solving the damage detection problem. The applicability of a methodology that can find probably damaged elements is analyzed.*

*Keywords: Damage detection. Genetic algorithm. Dynamic parameters.*

## 1 INTRODUÇÃO

Diferentes setores industriais, como o civil, o mecânico e o aeronáutico encontram-se desenvolvendo técnicas de detecção de dano não destrutivas (DDND) que permitem avaliar dano em suas estruturas - aviões, plataformas marítimas de petróleo, pontes, torres de transmissão. Sendo o dano resultado decorrente simplesmente do uso, envelhecimento, sobrecargas, fadiga da estrutura ou da ocorrência de um evento extremo.

A importância das metodologias de detecção de dano está no fato que elas ajudam na tomada de decisões sobre a necessidade de reforçar ou reparar as estruturas. Se incluídas em programas de manutenção de estruturas ajudam que sejam reduzidas ao mínimo as conseqüências do dano, assim como as perdas econômicas que se produziriam no caso da estrutura deixar de funcionar corretamente, ou entrar em regime de colapso.

---

<sup>1</sup> Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, villalba@sc.usp.br

<sup>2</sup> Professor Titular do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, jelaier@sc.usp.br

As principais técnicas do tipo DDND consistem ou em inspeção visual ou utilizam acústica, ultra-som, campos magnéticos, raios-X, ou, ainda, princípios térmicos para a determinação do dano. Essas técnicas podem realizar uma detecção de dano local e conseguem funcionar bem se o dano está localizado dentro de uma região da estrutura que seja conhecida a priori e que seja acessível (Ren e De Roeck, 2002).

Outro tipo de técnica DDND, é aquela que utiliza variações dos parâmetros dinâmicos da estrutura entre o estado inicial e atual, na qual, a condição não danificada da estrutura pode ser representada por um modelo de elementos finitos apropriado ou a partir de dados experimentais. A base física destas técnicas se encontra no fato que o dano introduz mudanças nas propriedades de uma estrutura - rigidez, massa e amortecimento- ocasionando variações nas propriedades dinâmicas da estrutura, quais sejam frequências naturais, formas modais e amortecimentos modais.

Algumas das principais vantagens de se utilizar as técnicas DDND são: não se precisa conhecer a priori os locais danificados; a possibilidade de determinar o comportamento global da estrutura; a obtenção a partir de um número limitado de sensores da informação suficiente para a localização e quantificação do dano, a utilização na maioria dos casos de um número de equipamento não excessivo (Humar, 2006); e a capacidade de se realizar medições remotamente, o que rapidamente minimiza o impacto sobre o funcionamento da estrutura (Doebbling *et al*, 1998). Os recentes progressos obtidos no desenvolvimento das técnicas DDND foram o resultado dos grandes avanços obtidos pela comunidade científica nos campos da análise modal, do processamento de informação de dados e do método dos elementos finitos.

De outra parte, sendo o problema de detecção de dano essencialmente um problema de otimização, a aplicabilidade de técnicas heurísticas é evidente, já que dadas as condições do problema essas poderiam ter um melhor desempenho quando comparadas com o que poderiam ter algoritmos clássicos de otimização. Entre as principais razões se encontra o fato que as funções objetivo utilizadas são altamente não lineares e que as técnicas heurísticas apresentam maior possibilidade de fugir de ótimos locais, assim como menor dependência dos valores iniciais utilizados para a inicialização do algoritmo e a não necessidade de cálculos de derivadas das funções objetivo.

Uma dessas técnicas é conhecida como algoritmos genéticos, a qual faz uma analogia com o processo evolutivo e a sobrevivência do mais apto para levar uma população inicial de soluções candidatas ao nosso problema a evoluir através de gerações; e encontrar assim a melhor resposta. Algoritmos genéticos mostraram já sua efetividade para a resolução de múltiplos tipos de problemas em diversas áreas- otimização de funções numéricas, otimização combinatória, dimensionamento de elementos, aprendizagem de máquinas, entre outras (Beasley, Bull e Martin, 1993).

O presente trabalho apresenta uma contribuição nesse sentido ao estudar a aplicabilidade de metodologias que a partir das variações nos parâmetros dinâmicos da estrutura, e da utilização de Algoritmos Genéticos para a resolução do problema inverso, conseguem localizar e quantificar dano estrutural.

## 2 TEORIA ALGORITMOS GENÉTICOS

Algoritmos genéticos (AGs) são de natureza estocástica e permitem encontrar soluções ótimas ou quase ótimas em problemas de otimização através de uma analogia com as leis de seleção natural e sobrevivência do mais apto. AGs foram desenvolvidos por Holland e seus estudantes na Universidade de Michigan com dois objetivos principais: explicar de forma rigorosa o processo adaptativo de sistemas naturais e criar programas de computadores baseados em mecanismos de sistemas naturais (Goldberg, 1989).

No mundo real e em diversos ambientes indivíduos competem por recursos e pela possibilidade de encontrar um par. Assim, indivíduos que apresentem maiores probabilidades para conseguir recursos para a sua sobrevivência e de encontrar um par terão maiores oportunidades para se reproduzir, transmitindo, assim, parte das suas características aos novos indivíduos. As características

de indivíduos com pouca probabilidade de obter recursos e de encontrar um par serão perdidas com o passar de poucas gerações. Sendo assim, os novos indivíduos apresentam melhores características que os Pais, levando o problema à convergência para o melhor indivíduo, ou seja, a uma melhor adaptação da população ao seu ambiente.

A analogia que um AG clássico – algoritmo originalmente proposto por Holland- segue como base fundamental é descrita a seguir. Primeiro, define-se uma população de indivíduos em forma codificada (código binário ou real), os quais correspondem a possíveis soluções ao problema. Esses indivíduos são avaliados para observar a sua adaptação ao ambiente no qual se encontram, sendo os melhores indivíduos escolhidos e permitidos de se reproduzir. Os novos indivíduos, os quais compartilham algumas características dos pais, podem ou não ser submetidos a um processo de mutação, o qual permite a introdução de novas características ao indivíduo. A nova população tem agora as características dos melhores indivíduos da geração anterior.

O procedimento anterior é repetido até encontrar uma convergência da população ao indivíduo mais apto ou quando é atingido um número predeterminado de gerações. Na Figura 1 é mostrado o esquema de execução de um AG clássico. Dado que o AG é um algoritmo estocástico precisa-se de varias execuções para obter uma boa resposta do problema.

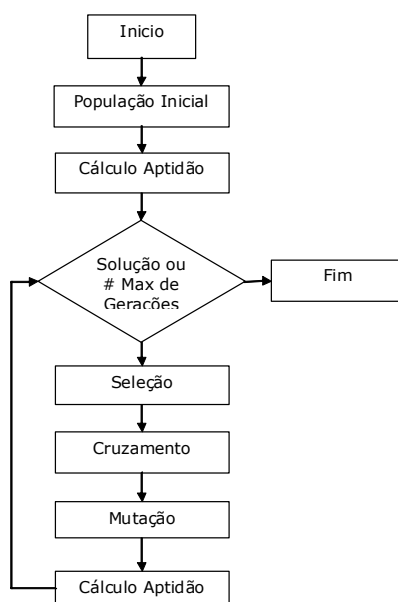


Figura 1 – Esquema algoritmo genético clássico.

Para se garantir que o melhor indivíduo não seja perdido de uma geração para outra pelas aplicações dos operadores genéticos, cruzamento e mutação, freqüentemente é utilizada a estratégia elitista, que consiste em que o melhor indivíduo de cada geração passa a ser parte da seguinte.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Modelamento do dano

No presente trabalho o dano é modelado de acordo à mecânica do meio contínuo (Lemaitre, 1996). Quando utilizado o modelo de elementos finitos da estrutura, a rigidez danificada,  $K_{Dj}$ , do elemento  $j$ , pode ser expressa como :

$$K_{Dj} = (1 - \beta_j) \times K_j, \quad (1)$$

onde  $K_j$  é a matriz de rigidez original do elemento  $j$  e  $\beta$  é o coeficiente de redução de rigidez. Se  $\beta$  for zero indica que não há presença de dano no elemento e um valor de um indica que o elemento apresenta uma rigidez nula. Os valores de  $\beta$  para cada elemento constituem as variáveis do problema a serem otimizadas pelos algoritmos genéticos.

### 3.2 Modelamento de ruído nas medições

A presença de ruído nas medições foi modelada mediante a introdução de pequenas perturbações em freqüências naturais e formas modais, na seguinte forma:

$$\omega_{\text{exp}} = \omega_n \times (1 + \text{rand}(-1,1) \times \text{Ruido}_f), \quad (2)$$

$$\Phi_{\text{exp}} = \Phi_n \times (1 + \text{rand}(-1,1) \times \text{Ruido}_\phi), \quad (3)$$

na qual  $\omega_n$  e  $\Phi_n$  correspondem às freqüências naturais e formas modais originais, respectivamente;  $\omega_{\text{exp}}$  e  $\Phi_{\text{exp}}$  os valores dos anteriores parâmetros contaminados com ruído e  $\text{Ruido}_f$  e  $\text{Ruido}_\phi$  são as porcentagem de ruído introduzidas, sendo para este trabalho de 1% e 3%, respectivamente.

### 3.3 Função objetivo

A função objetivo utilizada foi baseada nos valores de freqüência e formas modais da estrutura quando ela se encontra danificada:

$$f_{\text{obj}} = \sum_{i=1}^{nm} \left( \left| \frac{\omega_{AG} - \omega_{\text{exp}}}{\omega_{\text{exp}}} \right| \right) + W_{\phi_w} \sum_{i=1}^{nm} \sum_{j=1}^{ngll} \left( \left| \frac{\phi_{ijAG} - \phi_{ijEXP}}{\phi_{ijEXP}} \right| \right), \quad (3)$$

onde  $nm$  é o número de modos disponíveis;  $ngll$  o número de graus de liberdade lidos por cada modo;  $AG$  e  $EXP$  representam os valores dos parâmetros dados pelo algoritmo genético e em forma experimental, respectivamente e  $W_{\phi_w}$  é um termo de ponderação definido pelo usuário, e que depois de alguns testes encontrou-se que o valor que permitia encontrar as melhores soluções era 0.05. Para evitar uma divisão por zero, no segundo termo da função objetivo foi utilizada uma tolerância de 10e-8 tal que se o valor da coordenada modal for menor que essa tolerância, então, não será utilizada a coordenada na avaliação da função objetivo.

O problema, a ser resolvido pelos AG utilizados, deve ser formulado como um problema de maximização, sendo a Eq. (3) transformada em:

$$g_{\text{obj}} = \frac{a_1}{a_2 + f_{\text{obj}}}, \quad (4)$$

na qual  $a_1$  e  $a_2$  são parâmetros definidos pelo usuário e que são dados neste trabalho como 20000 e 1, respectivamente.

### 3.4 Algoritmo genético de código binário com metodologia de localização de elementos provavelmente danificados (CoBin2)

O algoritmo CoBin2, seguindo a filosofia do trabalho de Au *et al* (2003), realiza o procedimento de localização e quantificação de elementos danificados em forma separada. Inicialmente, é utilizada uma metodologia determinística para a localização de elementos provavelmente danificados; para, em

seguida utilizar o algoritmo genético de código binário na determinação da extensão do dano nesses elementos.

Para a determinação dos elementos provavelmente danificados foi utilizada a metodologia da relação da diferença do quociente de energia elementar (Law, Shi e Zhang, 1998). Na qual é considerado que, para efeitos de localização de dano, o conteúdo de energia dentro de cada elemento não muda com o dano, ou seja, que a soma da energia de deformação modal (MSE) com a energia cinética (EC) permanece constante. Por tanto, a variação da relação entre estas duas energias poderia ser um indicativo da presença de dano. O quociente de energia elementar  $EEQ_{ij}$ , associado ao elemento  $j$  e o modo  $i$ , para a condição inicial e danificada, é expresso como:

$$EEQ_{ij} = \frac{MSE_{ij}}{CE_{ij}}, \quad (5)$$

$$EEQ_{dij} = \frac{MSE_{ij}^d}{CE_{ij}^d}. \quad (6)$$

Considerando-se que não há variação na matriz de massa da estrutura, a EC e a MSE para a condição inicial e danificada são expressas por (LAW, SHI, ZHANG, 1998):

$$MSE_{ij} = \{\varphi_i\}^T [K_j] \{\varphi_i\}, \quad (7.a)$$

$$MSE_{ij}^d = \{\varphi_{di}\}^T [K_{dj}] \{\varphi_{di}\}, \quad (7.b)$$

$$CE_{ij} = \{\varphi_i\}^T [M_j] \{\varphi_i\}, \quad (7.c)$$

$$CE_{di} = \{\varphi_{di}\}^T [M_j] \{\varphi_{di}\}, \quad (7.d)$$

com  $K_j$  e  $M_j$  sendo as matrizes de rigidez e massa do elemento. Devido a que não é conhecida a matriz de rigidez danificada é utilizada a matriz original.

A relação da diferença do cociente de energia elementar  $EEQDR_{ij}$  fica então:

$$EEQDR_{ij} = \frac{|EEQ_{ij} - EEQ_{dij}|}{EEQ_{ij}}. \quad (8)$$

Quando utilizados um número  $r$  de modos, o  $EEQDR_j$  do  $j$ -ésimo elemento, define-se como:

$$EEQDR_j = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{EEQDR_j^i}{EEQDR_{\max}^i}. \quad (9)$$

Os elementos danificados serão aqueles que apresentem os maiores valores relativos dos coeficientes  $EEQDR_j$  como calculados na Eq. (9).

A seguinte modificação foi proposta com o objetivo de propiciar a identificação dos elementos provavelmente danificados de maneira mais evidente em relação à identificação realizada pela metodologia original, qual seja:

$$EEQDR_{j\text{mod}} = \left( \frac{EEQDR_j}{\text{Max}(EEQDR)} \right)^{1,5}. \quad (10)$$

Devido ao fato dessa metodologia requer formas modais completas, será utilizada uma técnica de expansão de modos. Neste trabalho foi escolhida a técnica exata modificada (Gysin, 1990), a qual contempla na sua formulação contribuições de todos os termos das matrizes de massa e rigidez. Esse procedimento poderia ser muito benéfico para o caso de detecção de dano devido a que não se conhece *a priori* os locais danificados.

De outra parte, o algoritmo genético utilizado para a quantificação do nível de dano é aquele de código binário com os parâmetros e os operadores como definidos nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 – Operadores genéticos do algoritmo CoBin2

Operador	Tipo
Seleção	Torneio
Cruzamento	2 pontos
Mutação	“Jump”
Outros	Elitismo

Tabela 2 – Parâmetros do algoritmo CoBin2

Parâmetro	Valor
Tamanho População	100
Taxa de Cruzamento	0,85
Taxa de Mutação	0,01
No máximo de Iterações	300

O tamanho do cromossomo,  $Tam\_Cromo$ , variará dependendo do número de elementos provavelmente danificados,  $ElemDam$ , encontrados na primeira etapa, sendo definido como:

$$Tam\_Cromo = ElemDan \times Tam\_Gene. \quad (11)$$

Para este trabalho o tamanho do gene foi de 10 bits o qual permite uma precisão até o terceiro algarismo depois da vírgula.

A população inicial é gerada para o AG binário em forma aleatória, mas introduzindo um valor fixo de zero para o primeiro bit de cada gene. Com isto, garantimos que o número gerado esteja entre 0 e 0.5, orientando assim a busca para condições no qual o dano não é severo.

### 3.5 Algoritmo genético de código real com processo de re-inicialização da população de indivíduos (CoRea1)

O processo de detecção de dano pode ser realizado numa etapa quando a localização dos elementos danificados e a quantificação da extensão do dano são realizadas simultaneamente. Metodologias que utilizam esta orientação podem apresentar dificuldades do tipo computacional devido ao amplo tamanho do espaço de busca, produzido quando é definido para cada elemento um parâmetro de diminuição da rigidez. Por isso, é proposta a utilização de um AG de código real, que utiliza um bit para codificar cada variável do problema, sendo neste trabalho o valor da extensão do dano. Um tamanho muito menor do cromossomo é obtido quando comparado com o AG de código binário tradicional.

Os operadores genéticos e os parâmetros que definem o AG são apresentados nas Tabelas 3 e 4, respectivamente. Da mesma forma que para o AG de código binário, foram determinados depois de alguns testes.

Tabela 3 – Operadores Genéticos do algoritmo CoRea1

Operador	Tipos
Seleção	Torneio
Cruzamento	BLX- $\alpha$
Mutação	Jump
Outros	Elitismo

Tabela 4 – Parâmetros do algoritmo CoRea1

Parâmetro	Valor
Tamanho População	100
Taxa de Cruzamento	0,90
Taxa de Mutação	0,05
No máximo de iterações	300

Para a geração da população inicial uma heurística está sendo proposta tendo-se em vista o fato de que na prática o número de elementos danificados é, em geral, pequeno. Para a definição do valor de cada gene em cada indivíduo da população é gerado um número aleatório tal que se esse número for menor a 0.4 o gene assumirá um valor entre 0 e 0.6, senão assumirá um valor de zero.

Outra característica importante do AG de código real implementado consiste na re-inicialização da população. Depois de uma primeira execução do algoritmo, aqueles elementos que apresentarem valores de dano menores a 0,05 são descartados e uma nova rodada do algoritmo é realizada só com aqueles elementos não descartados. A configuração entre as duas rodadas que apresentar o melhor indivíduo será a resposta do algoritmo.

Finalmente, o tamanho do cromossomo na rodada inicial corresponderá ao número de elementos na estrutura e para a etapa de re-inicialização terá o tamanho do total de elementos que apresentarem valores de dano maiores a 0,05.

### 3.6 Algoritmo genético de código binário com representação redundante implícita (CoRed1)

O terceiro algoritmo implementado consiste na aplicação do AG de codificação implícita redundante como proposto em Raich e Liskay (2007), que realiza o processo de localização e quantificação de dano em uma única etapa. Um cromossomo é composto de três segmentos: localizadores de genes, genes e segmentos redundantes. Nesse algoritmo o número de genes no cromossomo pode variar durante todo o processo evolutivo e é constituído por um segmento que codifica o identificador do elemento danificado e outro segmento codificando a extensão do dano. Cada indivíduo deste algoritmo representa uma solução do problema, mas contendo só um pequeno número de elementos considerados como danificados (Raich e Liskay, 2007).

Os operadores de seleção, cruzamento e mutação são aplicados como no AG binário tradicional, nos termos da Tabela 5, sendo os parâmetros para a execução deste algoritmo aqueles da Tabela 6. A população inicial é gerada de forma aleatória.

Tabela 5 – Operadores do algoritmo CoRed1

Operador	Tipos
Seleção	Roleta
Cruzamento	Dois Pontos
Mutação	Jump
Outros	Elitismo

Tabela 6 – Parâmetros do algoritmo CoRed1

Parâmetro	Valor
Tamanho População	200
Taxa de Cruzamento	0,85
Taxa de Mutação	0,005
No máximo de Iterações	300

Em relação ao localizador do gene cabe assinalar que foi utilizado aquele proposto em Raich e Gaboussi (1998), que consiste numa seqüência de três bits com valor de 1. Deseja-se salientar que não é permitida a sobreposição de genes, ou seja, quando for encontrado um gene, o localizador só começara a procurar pelo seguinte gene no bit que segue o gene previamente localizado.

Como comentado anteriormente, o gene é formado por um segmento que codifica a posição do elemento e mais outro segmento codificando a extensão do dano. O tamanho do gene é determinado por

$$Tam\_gene = Bits\_Loc + Bits\_Elem + Bits\_Ext, \quad (12)$$

onde  $Tam\_gene$  é o tamanho do gene,  $Bits\_Loc$  é o tamanho do localizador de genes,  $Bits\_Elem$  e  $Bits\_Ext$  são o número de bits necessário para codificar o identificador do elemento danificado e a extensão do dano, respectivamente. Na Figura 2 é mostrado um cromossomo típico para este algoritmo.

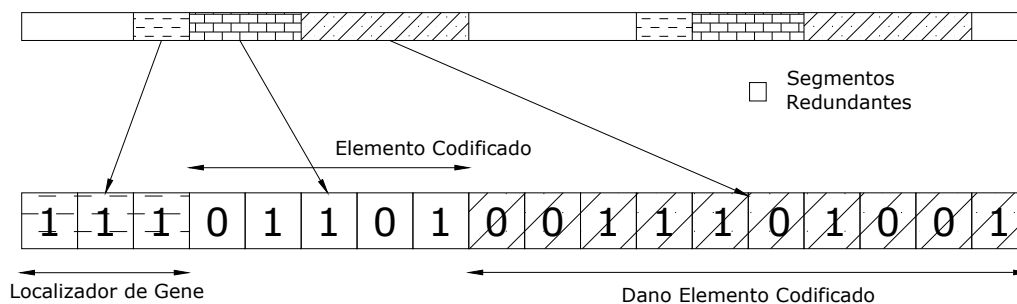


Figura 2 – Codificação redundante implícita para detecção de dano (Raich e Liskai, 2007).

Assim por exemplo, para o nosso problema o tamanho de bits necessário para poder identificar os elementos seria 5 bits e para a quantificação do dano seria de 10. Por tanto, o tamanho do gene será:

$$Tam\_Gene = 3 + 5 + 10 = 18$$

Agora, o tamanho do cromossomo é calculado mediante a heurística:

$$Tam\_Cromo = 0,4 \times Tam\_Gene \times NElem. \quad (13)$$

Para a viga simplesmente apoiada o tamanho do cromossomo aplicando a Eq. (13) é:

$$Tam\_Cromo = 0,4 \times 18 \times 20 = 144$$

No processo de decodificação do identificador do elemento danificado, este poderia ser maior que o número de elementos máximo da estrutura, devido a que a totalidade de elementos que podem ser gerados é superior ao número verdadeiro de elementos na estrutura. Para se resolver esse

problema, quando gerado um número de elemento inválido, escolhe-se em forma aleatória um elemento da estrutura e realiza o processo inverso, ou seja, determina qual o número binário que representa esse elemento, e os bits correspondentes no cromossomo original são substituídos. Observou-se que nas gerações iniciais este número é grande mais na medida em que a população evolui a quantidade diminui para zero.

Outro problema relacionado ao identificador de elemento decodificado pelo AG esta ligado ao fato de que para um cromossomo determinado podem ser gerados varias vezes a mesma posição para o dano, então, para se determinar o valor do dano para esse elemento é utilizada a media dos valores encontrados.

## 4 EXEMPLOS NUMERICOS

### 4.1 Cenários de dano estudados

A aplicação dos diferentes AGs para detecção de dano será realiza na viga simplesmente apoiada da Figura 3, cujo comprimento é de 2.0 m. e está dividida em 20 elementos finitos. Assim mesmo, o pórtico da Figura 4 é estudado, o qual apresenta um total de 17 elementos finitos, uma altura de 5m e um vão de 7m.

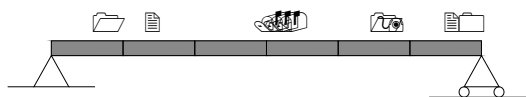


Figura 3 – Viga Simplesmente apoiada de 20 elementos.

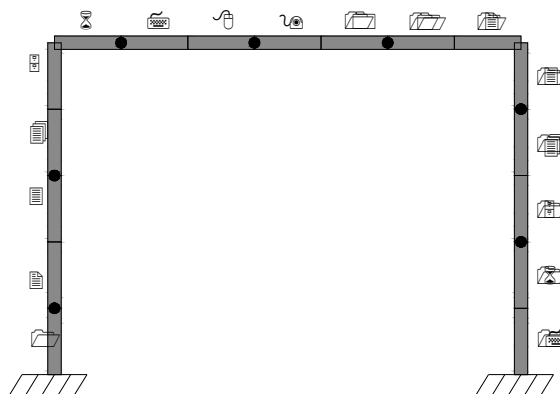


Figura 4 – Pórtico.

As propriedades do material e do tipo de seção utilizados foram os mesmos para as duas estruturas e são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Definição do tipo de material e do tipo de seção utilizados

Tipo	Propriedade	Valor
Material	Modulo de elasticidade	200 GPa
	Densidade	7800 Kg/m <sup>3</sup>
Seção	Área	4E-3 m <sup>2</sup>
	Inércia	5E-5 m <sup>4</sup>

Os cenários de dano propostos encontram-se na Tabela 8, onde VS1, VS2 E VS3 são aplicados na viga e P3A e P3B no pórtico. Para todos os casos supõe-se que estão disponíveis 8 formas modais.

Para levar em conta a incompletude dos dados é considerado que só graus de liberdade verticais são obtidos experimentalmente no caso da viga. Já no caso do pórtico são utilizados medições nos graus de liberdade verticais e horizontais nos nós que apresentam um círculo preenchido, vide Figura 4.

Tabela 8 – Cenários de dano estudados

Cenário	Elemento	% Dano ( $\beta$ )
VS1	2	20
VS2	10	20
VS3	5	20
	12	20
P3A	3	20
P3B	4	20
	7	20
	15	20

## 4.2 Metodologia de localização de elementos provavelmente danificados

A seguir será apresentado o desempenho da metodologia de localização de elementos provavelmente danificados quando as medições apresentam ruído e não são completas. Os resultados são comparados contra a aplicação da metodologia em condições ideais, ou seja, medições completas e sem ruído. Os valores de ruído e o tipo de incompletude de dados foram mostrados nas seções 3.2 e 4.1, respectivamente. Nas Figuras serão utilizados os seguintes símbolos: CS para medições completas e sem ruído e IR para medições incompletas e com ruído.

Na Figura 5, para o cenário de dano no qual um elemento é danificado perto do apoio na viga simplesmente apoiada, a metodologia consegue encontrar claramente o elemento danificado, mas também define o elemento que se encontra no apoio como danificado. No caso de medições completas e sem ruído o elemento 2 é definido como o único danificado.

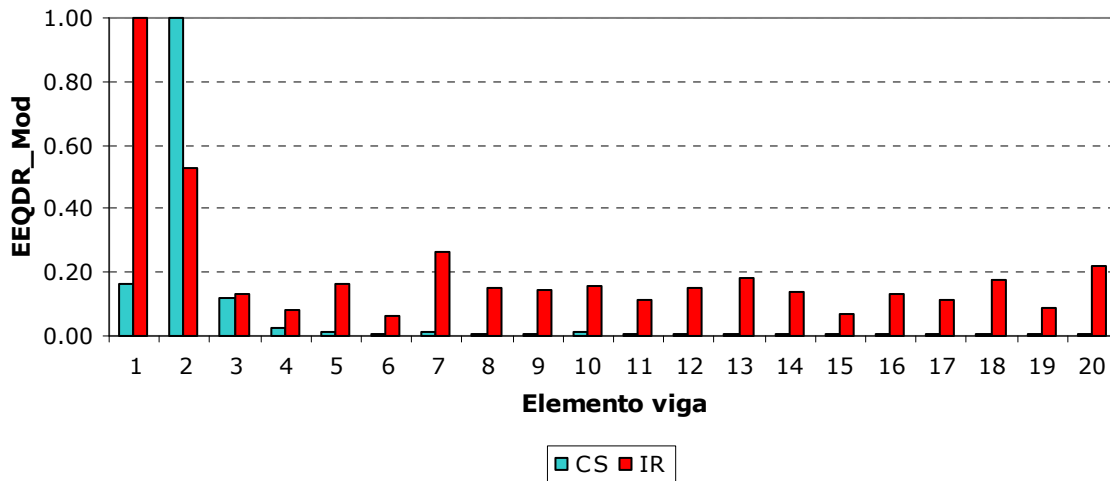


Figura 5 – Valores do EEQDR\_Mod para o cenário VS1: Dano no elemento 2.

Já para quando o elemento danificado se encontra no meio do vão, vide Figura 6, o algoritmo identifica uma região danificada entre os elementos 7 e 12. Também é observado que os elementos dos apoios aparecem como danificados, mas isto tem sua origem no erro total introduzido no valor do EEQD por causa do ruído e as medições incompletas.

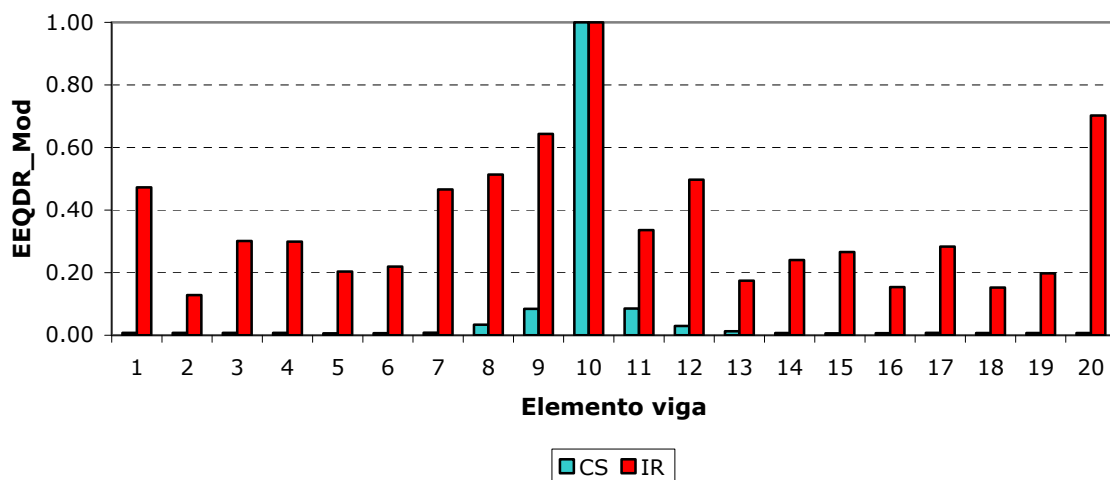


Figura 6 – Valores do EEQDR\_Mod para o cenário VS2: Dano no elemento 10.

No caso do dano múltiplo na viga simplesmente apoiada, vide Figura 7, observa-se uma uniformização dos valores do EEQDR\_Mod para a maioria dos elementos, porém os indivíduos provavelmente danificados são identificáveis, sendo eles os elementos 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 20.

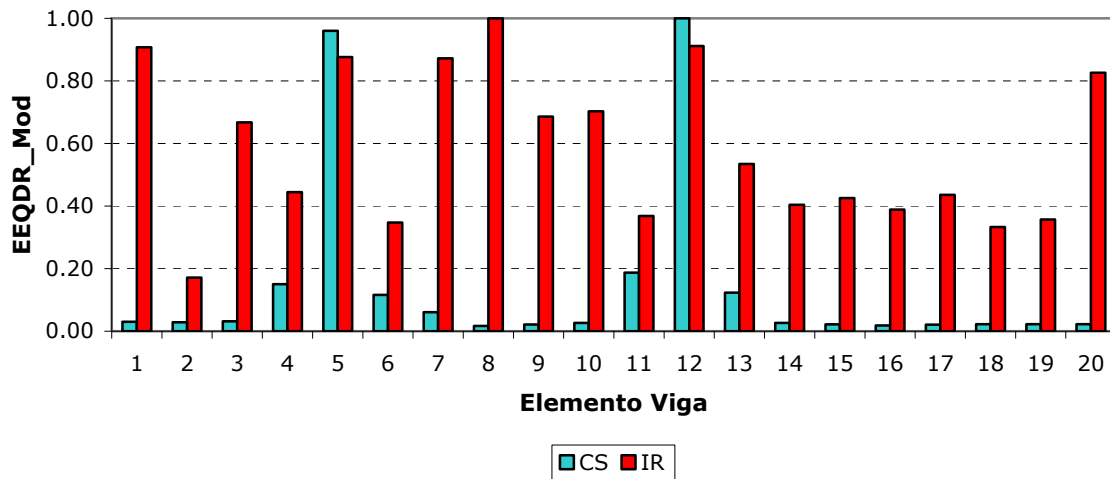


Figura 7 – Valores do EEQDR\_Mod para o cenário de dano VS3: Dano em elementos 5 e 12.

Para o caso do dano simples no pórtico é observado na Figura 8 que o elemento 3 é identificado como danificado, mas que se tem uma região considerada como danificada que compreende os elementos 7-10.

Na Figura 9 é mostrado que os valores do EEQDR\_Mod dos elementos danificados apresentam uma diminuição quando comparado com os valores para as condições de medições incompletas e sem ruído. Porém, todos os elementos danificados são corretamente identificados. Já para o caso no qual os dados contem ruído e são incompletos apresenta-se também como danificados os elementos 5, 8 e 13.

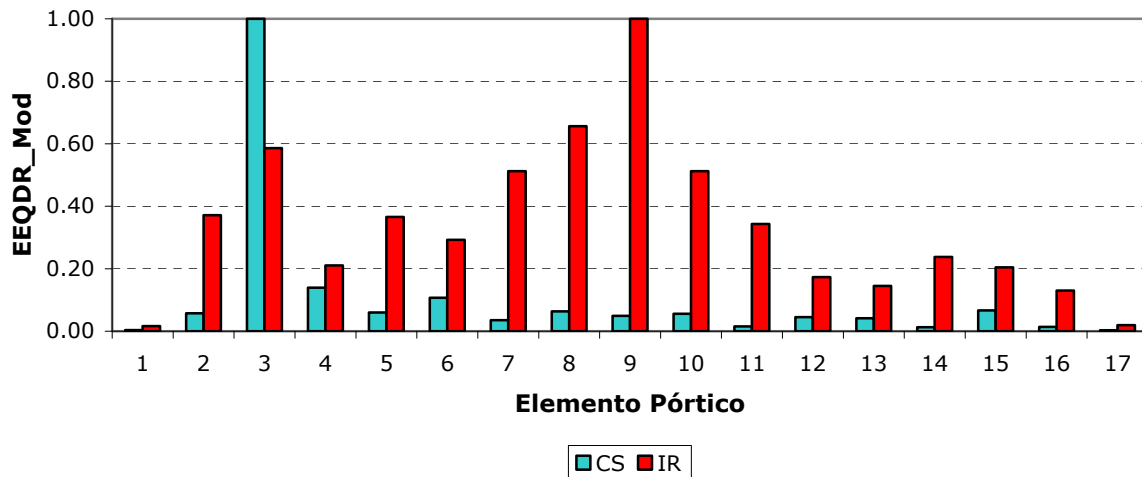


Figura 8 – Valores do EEQDR\_Mod para o cenário de dano P3A: Dano em elemento 3.

As Figuras 5 a 9 indicariam que a influencia do efeito conjunto de ruído e medições incompletas consiste em um aumento do número de elementos identificados como provavelmente danificados, quando comparado com as condições experimentais ideais. O grau do efeito parece variar segundo o tipo de estrutura e o tipo de cenário de dano.

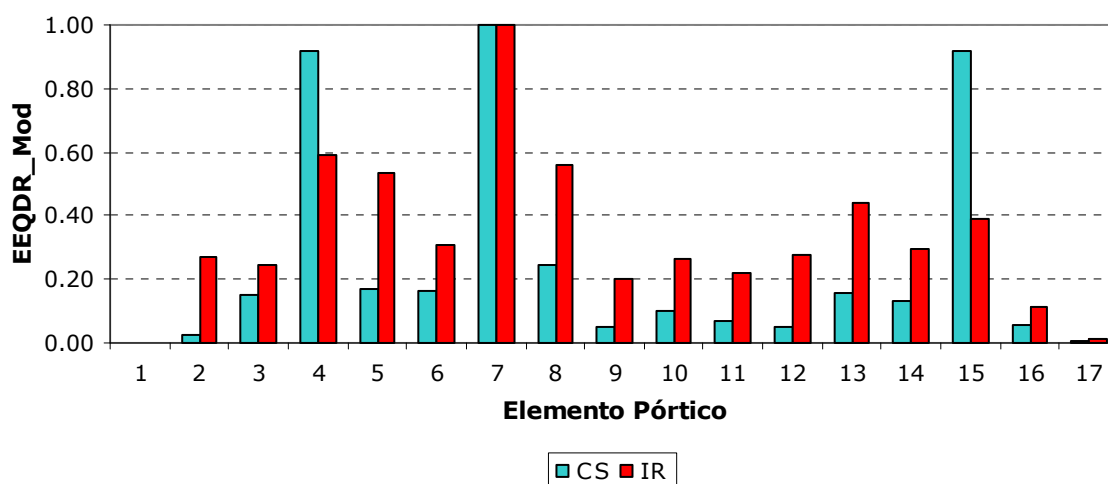


Figura 9 – Valores do EEQDR\_Mod para o cenário de dano P3B: Dano em elementos 4, 7 e 15.

Na Tabela 9 são mostrados os elementos encontrados como danificados pela metodologia de localização para cada um dos cenários de dano analisados. Pode ser observado que no caso menos favorável o número de elementos provavelmente danificados é reduzido à metade do total de elementos da estrutura.

Tabela 9 – Elementos definidos como provavelmente danificados

Cenário Dano	Elementos provavelmente danificados.	Total	% do Total de Elem.
VS1	1, 2, 7, 20	4	20
VS2	1, 7, 8, 9, 10, 20	6	30
VS3	1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 20	10	50
P3A	3, 7, 8, 9, 10	5	29
P3C	4, 5, 7, 8, 13, 15	6	35

### 4.3 Algoritmos genéticos

A seguir são mostrados os resultados da aplicação dos distintos algoritmos genéticos implementados nos distintos cenários de dano quando as medições são incompletas e ruidosas.

A Figura 10 mostra que, para um elemento danificado que se encontra perto de um dos apoios em uma viga simplesmente apoiada, os algoritmos identificam corretamente este elemento. A quantificação do dano apresenta erros menores a 3% e o algoritmo CoBin2 identificou erroneamente os elementos 1, 7 e 20 como danificados.

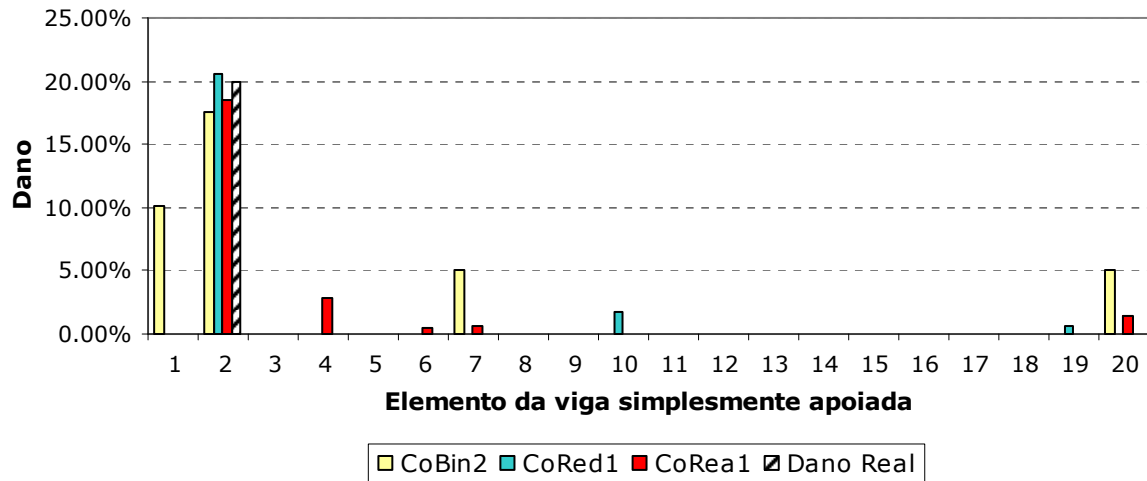


Figura 10 – Aplicação dos AGs estudados no cenário de dano VS1.

No caso do elemento danificado estar no centro da viga simplesmente apoiada, os diferentes algoritmos encontram o cenário de dano certo, vide Figura 11. Erros na extensão do dano são menores a 1,5%.

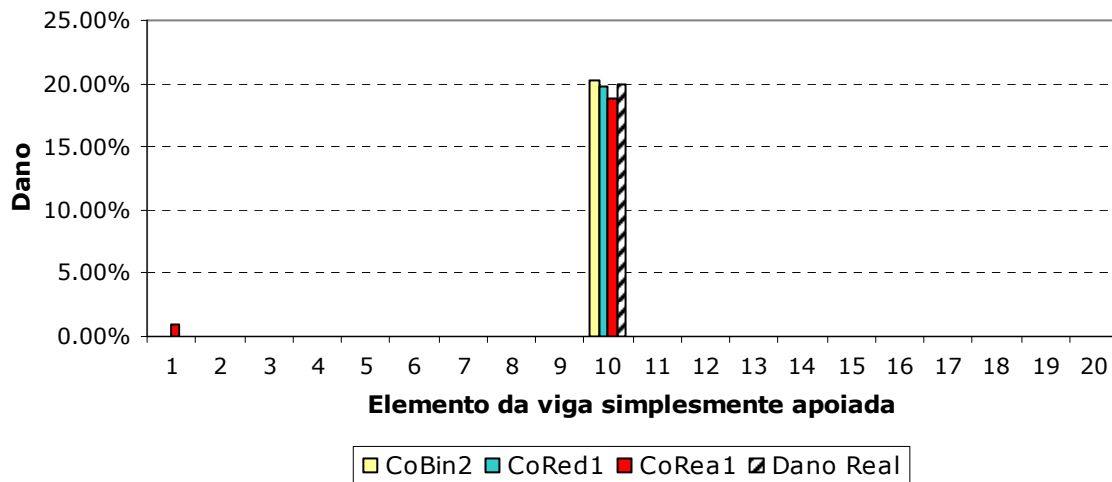


Figura 11 – Aplicação dos AGs estudados no cenário de dano VS2.

Para o cenário de dano múltiplo na viga simplesmente apoiada, vide Figura 12, é mostrado que o algoritmo CoRed1 apresenta os melhores resultados, chegando-se a obter os valores exatos para a extensão do dano. CoRea1 consegue igualmente detectar os dois elementos danificados mas apresenta um erro de 2% na determinação da extensão do dano, assim como definir em forma errada que o elemento 13 encontra-se danificado, porém o valor do dano é muito baixo. O pior desempenho é apresentado pelo CoBin2, que apresenta um erro de 7% na extensão do dano do elemento 12, e ainda identifica o elemento 13 como danificado com um valor de dano de 5%.

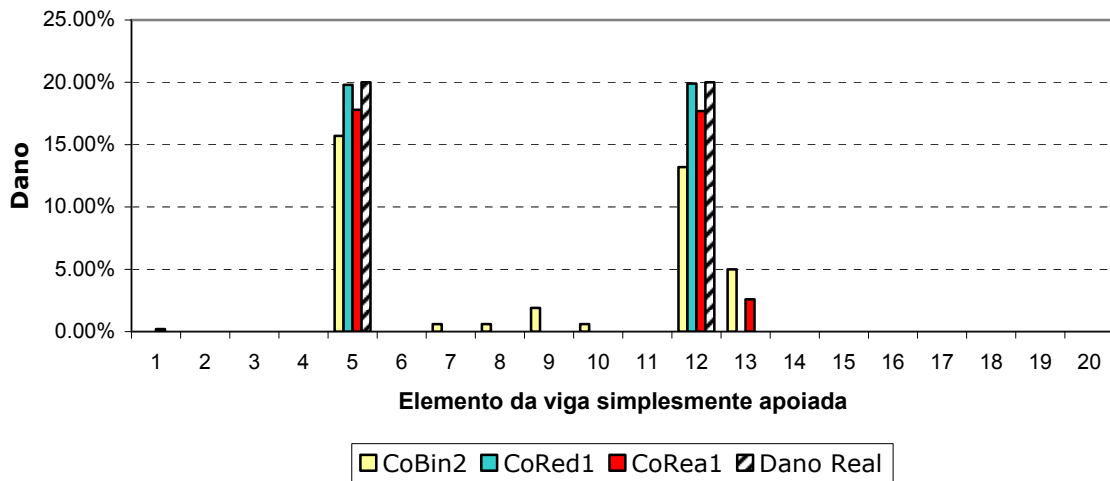


Figura 12 – Aplicação dos AGs estudados no cenário de dano VS3.

Na Figura 13 é mostrado o cenário de dano simples para o pórtico. Para esse cenário é observado que os três tipos de AGs conseguem detectar o elemento danificado com uma boa exatidão no valor da extensão do dano. Elementos falsamente identificados como danificados apresentam valores de dano menores a 2%.

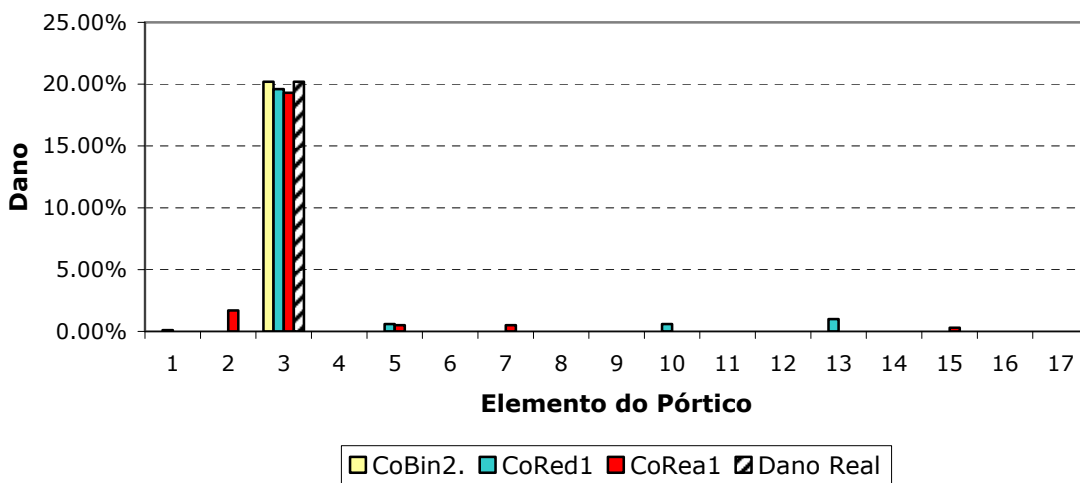


Figura 13 – Aplicação dos AGs estudados no cenário de dano P3A.

A Figura 14 mostra que os três algoritmos encontram o cenário de dano múltiplo correto. O algoritmo CoBin2 apresenta os melhores resultados na determinação da extensão do dano, isto pode ser devido ao fato de que o número de elementos provavelmente danificados foi altamente reduzido. O algoritmo CoRed1 apresenta um elemento falsamente identificado como danificado com um valor de dano de 4%.

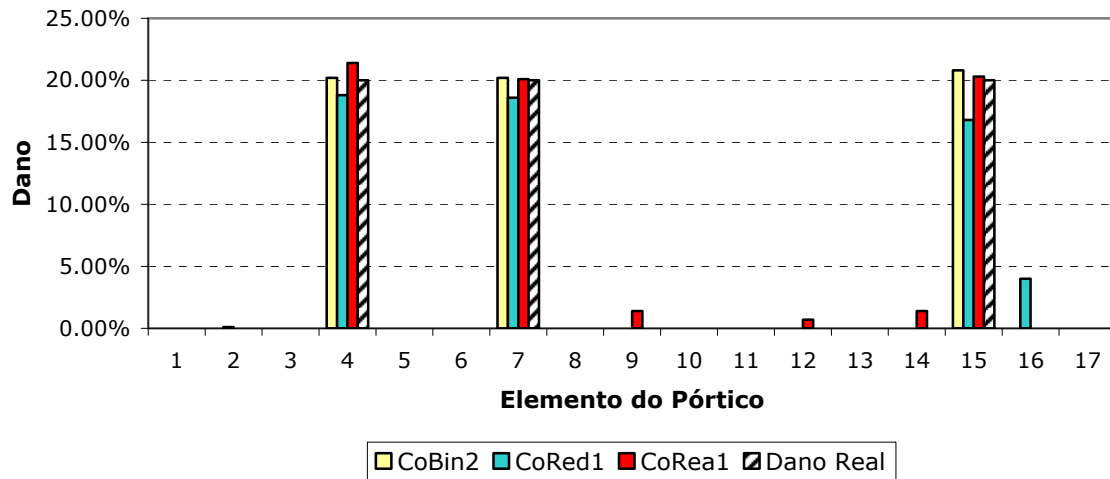


Figura 14 – Aplicação dos AGs estudados no cenário de dano P3B.

## 5 CONCLUSÕES

No presente trabalho foram estudados três tipos de Algoritmos Genéticos baseados em diferentes tipos de codificação, e sua aplicação na resolução do problema de detecção de dano. Igualmente, foi estudada uma metodologia baseada em energia, que permite detectar elementos provavelmente danificados.

No relacionado à metodologia de localização de dano, uma variante da metodologia original é proposta. Resultados mostram que com medições experimentais ideais a metodologia consegue detectar quais os elementos danificados na estrutura. Quando as medições são incompletas e ruidosas o desempenho da metodologia é menor, resultado que é apreciado pelo aumento no número de elementos definidos como danificados. Devido ao fato de que a finalidade da metodologia de localização é a redução do espaço de busca, concluiu-se que sua aplicação é muito viável, já que são obtidas reduções que podem variar entre 0 e 50% do número total de elementos na estrutura, isto em função do tipo de estrutura, da qualidade das medições e do tipo de dano. A principal vantagem desta metodologia é sua simplicidade conceitual, permitindo-se, sem cálculos avançados, a determinação dos elementos provavelmente danificados. O tempo gasto no processamento é mínimo quando comparado ao tempo necessário para a execução do AG. A principal desvantagem da utilização desta metodologia radica no caráter subjetivo da definição de quando um elemento se encontra danificado. já que a determinação dos elementos danificados é realizada mediante uma comparação relativa entre os valores do EEQDR<sub>mod</sub> para os elementos.

No relacionado ao desempenho dos três AGs aplicados (CoBin2, CoRea1 e CoRed1), observa-se um bom comportamento na detecção de dano dos diversos casos estudados, para os exemplos estudados mostra-se a capacidade que eles têm para encontrar cenários de dano em condições de medições reais: incompletas e com ruído. A seguir, alguns comentários sobre o desempenho individual de cada AG.

O algoritmo CoBin2, consiste de um algoritmo genético de código binário que realiza o processo de detecção de dano em duas etapas. Na primeira etapa é utilizada uma técnica de localização de elementos provavelmente danificados com o objetivo de reduzir o espaço de busca. Na segunda etapa o AG determina a extensão do dano naqueles elementos preliminarmente determinados como danificados. Resultados mostram o bom desempenho deste algoritmo, principalmente quando a metodologia de localização de dano reduz a uns poucos os elementos considerados como danificados; porém foi o algoritmo que apresentou os piores resultados no tocante à quantificação da extensão do dano. A principal desvantagem deste algoritmo é que se a metodologia de localização de dano não encontra entre os elementos definidos como provavelmente danificados

aqueles que realmente estão o algoritmo procurará a solução do problema com as variáveis erradas. Caso o anterior conseguisse ser garantido, este algoritmo seria, quiçá, o de melhor desempenho em estruturas de grande porte.

De outra parte, um segundo AG estudado foi o de código real, dito de CoRea1, o qual apresenta uma representação mais natural do problema. Este algoritmo apresenta a vantagem de ter um cromossomo de menor tamanho, quando comparado ao AG de código binário, o que cobra importância na medida em que se aumenta o número de elementos na estrutura. Duas heurísticas importantes foram propostas, uma para a geração da população inicial e outra de re-inicialização do algoritmo, as quais ajudam a melhorar a convergência e a encontrar uma melhor resposta por parte do algoritmo. É observado que o AG de código real apresenta um bom comportamento, mas que pode produzir alguns elementos considerados em forma errônea como danificados com valores baixos de dano. Os resultados mostraram que as pequenas quantidades de dano em alguns indivíduos afetam a extensão dos elementos realmente danificados.

O último tipo de algoritmo estudado foi o AG com codificação redundante implícita, dito de CoRed1, o qual permite uma variação em forma dinâmica das variáveis do problema durante a execução do algoritmo. Em detecção de dano isto é uma característica essencial já que a localização dos elementos danificados não é conhecida a priori, e comumente o dano está limitado a uns poucos elementos. Em geral os resultados mostram que o algoritmo realiza uma boa determinação da extensão do dano dos elementos danificados e que são muito poucos elementos os considerados em forma errada como danificados. Em comparação com os outros dois AGs este é quem apresenta os melhores resultados, porém precisa de uma população maior para um correto funcionamento.

Finalmente, a definição dos parâmetros do Algoritmo Genético: Taxa de mutação, Taxa de cruzamento, Tamanho da População, Número máximo de gerações, foi realizada com base em revisão bibliográfica realizada e alguns testes. A magnitude de tais parâmetros é uma desvantagem já que a configuração desses parâmetros poderia não funcionar quando testados em outros tipos de estruturas. Por tanto, a utilização de algoritmos auto-configurados poderia ser algo desejável.

## 6 AGREDECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual esta pesquisa não poderia ter sido realizada.

## 7 REFERÊNCIAS

- AU, F.; CHENG Y. S.; THAM L. G.; BAI, Z. Z. Structural damage detection based on a micro-genetic algorithm using incomplete and noisy modal test data. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 69, p. 1085-1107, 2003.
- BEASLEY, D.; BULL, D.; MARTIN, R. An overview of Genetic Algorithms: Part 1, Fundamentals. **University Computing**, v.15, n. 2, p. 58-69, 1993.
- DOEBLING, S.; FARRAR, C.; PRIME, M. A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods. **The Shock and Vibration Digest**, v. 30, n. 2, p. 91-105, 1998.
- GOLDBERG, D. **Genetic Algorithms in Search Optimization, and Machine Learning**. United States. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989. 412p.

GYSIN, H. Comparison of Expansion Methods for FE Modeling Error Localization. In: VIII INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 1990, Kissimmee. **Proceeding...** Schenectady: Union College. p. 195-204. ISBN: 0-912053-27-5.

HUMAR, J.; BAGCHI, A.; XU, H. Performance of Vibration-based Techniques for the Identification of Structural Damage. **Structural Health Monitoring**, v. 5, n. 3, p. 0215-0227, 2006.

LAW, S. S.; SHI, Z.Y.; ZHANG, L. M. Structural Damage Detection From Incomplete and Noisy Modal Test Data. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 11, p. 1280-1288, 1998.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. Berlin: Springer, 1996. 228p.

RAICH, A.; GHABOUSSI, J. Implicit representation in genetic algorithms using redundancy. **Evolutionary Computation**, v. 5, n. 3, p. 277-302, 1998.

RAICH, A.; LISKAI, T. Improving the Performance of Structural Damage Detection Methods Using Advanced Genetic Algorithms. **Journal of Structural Engineering**, v. 133, n. 3, p. 449-461, 2007.

REN, W. X.; DE ROECK, G. Structural Damage Identification using Modal Data.I: Simulation Verification. **Journal of Structural Engineering**, v. 128, n.1, p. 87-95, 2002.

VILLALBA MORALES, J. D. **Detecção de dano em estruturas utilizando algoritmos genéticos e parâmetros dinâmicos**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL APLICADO A PROBLEMAS TERMO-ELASTO-PLÁSTICOS BIDIMENSIONAIS

Rogério Carrazedo<sup>1</sup> & Humberto Breves Coda<sup>2</sup>

## Resumo

*Este artigo apresenta uma formulação para resolução de problemas termomecânicos através do método dos elementos finitos. A metodologia proposta é baseada no teorema da mínima energia potencial, escrita em relação às posições nodais, para solução do problema mecânico. O problema térmico é solucionado pelo método dos elementos finitos. Tal formulação tem a vantagem de ser simples e precisa. Como estratégia de solução, é utilizada a divisão do problema termomecânico em dois sub-problemas, resolvendo cada sub-problema separadamente, utilizando os resultados de um como dados para o outro. Além desta consideração, foi adotada a decomposição aditiva do tensor de deformações e a teoria das variáveis internas para representar o comportamento plástico do material. Dois exemplos são fornecidos para demonstrar a aplicabilidade da técnica, e os resultados são comparados à solução numérica de outros autores.*

*Palavras-chave: Termo-elasto-plasticidade. Variáveis internas. Método dos Elementos Finitos Posicional.*

## POSITIONAL FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO BIDIMENSIONAL THERMO-ELASTOPLASTIC PROBLEMS

### Abstract

*This article introduces a thermo-mechanical problem resolution through the finite element method. The proposed methodology to solve the mechanical problem is based on the minimum potential energy theorem, written regarding the nodal positions. The thermal problem is solved by the standard finite element method. Such formulation has the advantage of being quite simple. As solution strategy, the thermo-mechanical problem is split, which leads to a two-step solution procedure, solving each sequentially. Besides, the additive decomposition of the strain tensor was adopted and the plastic behavior was modeled by the internal variable theory. Two examples show the applicability of the technique, and the results are compared with other authors.*

*Keywords: Thermo-elastoplasticity. Internal variables. Positional Finite Element Method.*

## 1 INTRODUÇÃO

Desde os primeiros experimentos relativos ao estudo do aquecimento provocado pelas deformações plásticas, realizados por Farren e Taylor (1925) e por Taylor e Quinney (1934), foi percebido que era necessário desenvolver os modelos constitutivos para se obter a resposta mecânica de estruturas termo-elasto-plásticas. Assim, Dillon (1963) e Perzyna e Sawczuk (1973) foram os primeiros a tentar desenvolver, dentro de um fundamento termodinâmico, os modelos constitutivos dos materiais, podendo descrever tanto a resposta elasto-plástica da estrutura como a geração de calor decorrente de sua deformação (Hakansson et al., 2005).

---

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, rogcarrazedo@yahoo.com.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, hbcoda@sc.usp.br

Parte do desenvolvimento decorreu da incorporação de variáveis termodinâmicas adicionais à teoria da termo-elasticidade, conhecidas como variáveis internas. Isto levou a descrições mais gerais do comportamento de materiais com propriedades inelásticas. Estas variáveis foram incorporadas com o objetivo de representar os efeitos dissipativos, como dano, relaxamento, deformação lenta e deformação plástica (Holzapfel, 2004).

Este trabalho segue esta linha de pesquisa, baseada na teoria da termo-plasticidade de variáveis internas, seguindo os conceitos apresentados por Truesdell e Toupin (1960), Kamlah e Haupt (1997), Rosakis et al. (2000) e Holzapfel (2004). No entanto o problema mecânico foi solucionado por uma formulação simples, porém robusta, que se baseia no princípio da mínima energia potencial, descrevendo o comportamento através das posições nodais, conforme apresentado por Coda (2003), conhecida como método dos elementos finitos posicional (MEFP). Em Greco (2004) são apresentadas as passagens algébricas para a análise dinâmica de pórticos planos considerando o MEFP. Para o caso de sólidos planos e tridimensionais, vide Marques (2006) e Maciel (2008), respectivamente. O caso de cascas é apresentado em Coda e Paccola (2007) e em Coda e Paccola (2008), considerando a deformação de engenharia e de Green, respectivamente. Finalmente, o MEFP foi aplicado às barra gerais bi- e tridimensionais laminadas em Minski (2008) e em Coda (2008), respectivamente. Uma descrição do artigo é realizada na seqüência.

A seção 2 descreve o problema termo-mecânico acoplado, apresentando as leis de equilíbrio e as equações constitutivas adotadas. Na mesma seção, a definição de energia de trabalho frio é apresentada e como esta foi considerada na formulação. A seção 3 descreve a implementação numérica do problema termo-elastoplástico acoplado, mostrando como o problema acoplado foi dividido em dois sub-problemas e, então, cada qual resolvido por uma metodologia distinta. A seção 3 ainda apresenta um resumo da formulação não-linear dinâmica baseada no teorema da mínima energia potencial escrita em relação às posições nodais. A seção 4 apresenta três exemplos, com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade e precisão da formulação. As conclusões são apresentadas na seção 5 e a bibliografia ao final.

## 2 METODOLOGIA

Esta seção apresenta o sistema de equações diferenciais que governa o problema termo-mecânico, que é definido pelas leis fundamentais de conservação de massa e energia, pela segunda lei da termodinâmica e pelos balanços de momento linear e angular, de acordo com Rosakis et al. (2000).

### 2.1 Equilíbrio local

As leis de equilíbrio dinâmico local, de conservação de energia e de conservação de massa podem ser escritas como (Lee e Chen, 2001):

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \dot{v}_i = 0 \quad (1)$$

$$\rho \dot{\theta} = \rho R - q_{i,i} + \sigma_{ij} \dot{\theta}_{ij} \quad (2)$$

$$[\rho] = \rho_0 \quad (3)$$

onde  $\sigma$  é o tensor de tensões,  $F$  são as forças de corpo,  $\rho$  e  $\rho_0$  são a massa específica na configuração deformada e indeformada, respectivamente,  $\dot{\theta}$  é a segunda derivada no tempo da

posição,  $\varepsilon$  é a energia interna,  $R$  é uma fonte interna de geração de calor,  $q$  é o fluxo de calor,  $\varepsilon$  é o tensor de deformação e  $J$  é um operador relacionado às mudanças de forma do corpo.

Para que a Eq. (2) possa ser implementada, há a necessidade de se reescrevê-la em termos apenas da variável principal, a temperatura. Para tanto, utiliza-se a segunda lei da termodinâmica na forma da inequação de Clausius-Duhem, dada por

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho R + q_{t,i} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (4)$$

onde  $\theta$  é a variação de temperatura e  $\eta$  é a entropia. Substituindo o balanço de energia dado pela Eq. (2) na segunda lei dada pela Ineq. (4), esta assume a forma

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\varepsilon} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (5)$$

A segunda lei também pode ser escrita em termos da energia livre de Helmholtz, dada por  $\psi = \varepsilon - \theta\eta$ , reduzindo a

$$[-\rho\dot{\psi} - \rho\dot{\theta}\eta + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}] - \frac{q_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \quad (6)$$

Os termos presentes na Ineq. (6) dentro dos colchetes serão chamados de dissipação interna, e designados por  $\Lambda$ . Com isso a primeira lei da termodinâmica, Eq. (2), pode ser escrita como

$$\rho\theta\dot{\eta} = \Lambda + \rho R - q_{t,i} \quad (7)$$

## 2.2 Variáveis internas

Para continuar desenvolvendo a equação de conservação de energia, é necessário desenvolver o termo de dissipação interna. Para tanto, será considerado que o tensor de deformação é decomposto de forma aditiva, i.e.:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (8)$$

onde  $\varepsilon^p$  define a deformação plástica e  $\varepsilon^e$  representa a deformação elástica. Além disso, pelo axioma de equipresença, um material termo-plástico pode ser parametrizado pelas suas variáveis de estado. Neste caso, a energia livre de Helmholtz pode ser definida como:

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}^e, \xi_i, \theta, \theta_{,i}) \quad (9)$$

onde  $\xi$  é uma medida de trabalho plástico na forma de um vetor, que por sua vez define o endurecimento do material. Escrevendo a taxa de mudança da energia livre de Helmholtz através da regra da cadeia, e também considerando a decomposição aditiva do tensor de deformação, Eq. (8), a Eq. (9) pode ser reescrita como

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_t} \dot{\xi}_t + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} \quad (10)$$

onde  $\dot{\theta}_{,i}$  foi substituído por  $\dot{\vartheta}$  para simplificar a notação.

Voltando à Ineq. (6), inserindo a função de energia livre Eq. (10), a seguinte inequação é obtida

$$\left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \rho \left( \eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi_t} \dot{\xi}_t - \frac{q_t}{\theta} \theta_{,i} \geq 0 \quad (11)$$

Inequação (11) deve ser respeitada para qualquer processo termo-mecânico, o que significa que deve manter a relação para qualquer variação de  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ ,  $\dot{\theta}$  and  $\dot{\vartheta}$ . Desta forma, a Ineq. (11) é satisfeita se, e apenas se, as seguintes equações se manterem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 0 \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (13)$$

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (14)$$

A Eq. (11) pode ser reduzida ao substituir as Eq. (12) a (14), levando a

$$\left[ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi_t} \dot{\xi}_t \right] - \frac{q_t}{\theta} \theta_{,i} \geq 0 \quad (15)$$

Comparando a Ineq. (15) com a Ineq. (6), percebe-se que os termos presentes dentro dos colchetes representam a dissipação interna. Assim sendo, a equação de balanço de energia, Eq. (7), pode ser reescrita na seguinte forma

$$-\rho \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi_t} \dot{\xi}_t + \rho R - q_{k,k} \quad (16)$$

Observando a Eq. (12), o primeiro termo da Eq. (16) pode ser expandido pela regra da cadeia, levando a

$$-\rho \theta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \xi_t} \dot{\xi}_t + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} \right) = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi_t} \dot{\xi}_t + \rho R - q_{k,k} \quad (17)$$

### 2.3 Trabalho frio

Eq. (17) apresenta todos os termos necessários para se chegar à equação de condução de calor transiente para resolução do problema termo-elastoplástico. Porém, para facilitar sua

implementação em um ambiente computacional, duas definições se fazem necessárias. A primeira é a do calor específico, definido por

$$c_e = -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (18)$$

A segunda é a do trabalho frio, uma forma de energia absorvida pelo corpo decorrente do realinhamento dos cristais da estrutura interna do corpo durante a deformação plástica (Rosakis et al., 2000). Este é definido como

$$E_f = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_t} - \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \xi_t} \quad (19)$$

Utilizando tais definições, a Eq. (17) pode ser escrita como

$$\rho c_e \dot{\theta} = \rho R - q_{k,k} + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial E}{\partial \xi_t} \dot{\xi}_t \quad (20)$$

Na Eq. (20) podem ser vistos três termos relativos ao aquecimento decorrente de mudanças no corpo. O primeiro é relacionado à deformação elástica, o segundo é relacionado ao trabalho plástico e o último decorre do trabalho frio.

Assim sendo, durante a deformação de uma estrutura, calor é gerado internamente e dissipado. Porém parte do trabalho mecânico não é transformada em calor, mas sim absorvida como trabalho frio (Hakansson et al., 2005). Em geral tal absorção é tratada como constante, em especial para o caso de ligas metálicas. Assim, este termo será considerado constante no presente trabalho, através da seguinte relação:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial E}{\partial \xi_t} \dot{\xi}_t = \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (21)$$

onde  $\beta$  é uma constante do material que irá definir a parcela de trabalho plástico convertido em calor. Usualmente, emprega-se um valor entre  $0.8 \leq \beta \leq 1.0$  (Rosakis et al., 2000).

Finalmente, considerando a lei de condução de calor de Fourier,  $k$  como sendo o coeficiente de condução de calor e a relação observada na Eq. (21), a equação de energia (Eq. (20)) pode ser escrita na forma

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,k,k} + \rho R + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (22)$$

### 3 DESENVOLVIMENTO

Esta seção apresenta as técnicas utilizadas na resolução do problema termo-plástico. Primeiramente é feita a dissolução do problema acoplado em duas partições naturais: uma fase térmica, através da Eq. (22), em que a configuração é mantida constante, e outra fase mecânica, utilizando a Eq. (1), em que a temperatura é mantida constante. Esta estratégia de solução é chamada escalonada com separação isotérmica, pois as equações são resolvidas seqüencialmente. A figura 1 mostra os principais passos na solução do problema termo-elastoplástico.

Na figura 1 podem ser vistas duas alternativas para a resolução do problema acoplado: o implícito e o explícito. No algoritmo implícito, o equilíbrio termo-mecânico é requisitado em todo o passo de tempo. Isso significa que, dentro do passo de tempo atual, a variação é determinada e então a configuração da estrutura é calculada com os carregamentos térmicos obtidos. Após isto, a fonte de calor mecânica é recalculada para que seja determinada uma nova variação na temperatura. Estes resultados são utilizados para atualizar os carregamentos térmicos e, com isso, estabelecer uma nova configuração para a estrutura. Se a variação de temperatura ou da deformação estiverem conforme requisitados pelo critério de parada, um novo passo de tempo é iniciado, senão uma nova tentativa de equilíbrio termo-mecânica é realizada.

No algoritmo explícito, a variação da temperatura é calculada utilizando a fonte de calor mecânica do passo de tempo anterior, e a configuração atual da estrutura é então calculada através dos carregamentos térmicos obtidos. Após isso, um novo passo de tempo já é iniciado.

Ambos os processos foram implementados, mas como o problema mecânico demanda passos de tempos pequenos, o uso do algoritmo implícito não resultou em diferenças significativas. Assim sendo, a não ser que seja afirmado o contrário, o algoritmo explícito será utilizado neste trabalho.

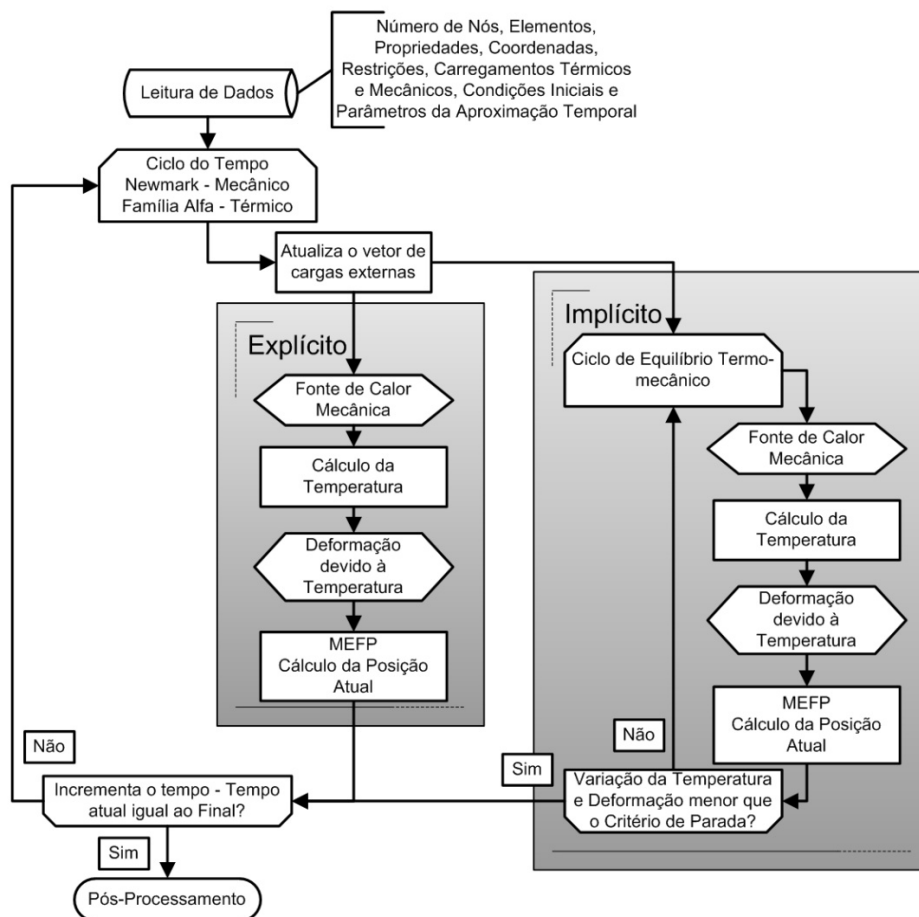


Figura 1 – MEFP aplicado ao problema termo-elastoplástico.

### 3.1 A equação de condução de calor

Desconsiderando o termo referente a fonte de calor interna, a equação de energia (Eq. (22)) pode ser reescrita na seguinte forma, para simplificar a sua implementação:

$$\rho c_e \dot{\theta} - k \theta_{,kk} = R_M \quad (23)$$

onde  $R_M$  é a fonte de calor mecânica, conhecida e definida como

$$R_M = -\theta \sigma_{ij,p} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (24)$$

Percebe-se pela figura 1 que o problema térmico é solucionado antes do problema mecânico. Assim sendo, no cálculo da fonte de calor mecânica serão utilizados os resultados do passo de tempo anterior ou da iteração anterior. Desta forma, a Eq. (23) pode ser escrita na forma

$$\rho c_e \dot{\theta} - k \theta_{,kk} = R_M^{t-1} \quad (25)$$

Para aproximar numericamente a Eq. (25), será utilizado o método dos elementos finitos e, para tanto, a temperatura deve ser aproximada através de uma série de funções, dada por

$$\theta = \theta_i \phi_i \quad (26)$$

onde  $\theta_i$  é a variação de temperatura no nó  $i$  e  $\phi_i$  são as funções de aproximação. Além disso, a Eq. (25) deve ser ponderada em seu domínio através de funções ponderadoras  $\omega$ , dadas por

$$\omega = \omega_j \phi_j \quad (27)$$

onde  $\phi_j$  são as funções de ponderação, que, de acordo com o método de Galerkin, tem a mesma forma das funções de forma, e  $\omega_j$  são constantes arbitrárias. Dito isto, a Eq. (25) fica na forma

$$\int_V [\rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV] \omega_j + \int_V [k \theta_{i,kk} \phi_j dV] \omega_j - \int_V [R_M^{t-1} \phi_j dV] \omega_j = 0 \quad (28)$$

Como  $\omega_j$  são constantes arbitrárias e a Eq. (28) deve valer para quaisquer que sejam seus valores, esta pode ser reescrita como

$$\int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV + \int_V k \theta_{i,kk} \phi_j dV - \int_V R_M^{t-1} \phi_j dV = 0 \quad (29)$$

Para reduzir a condição de continuidade no segundo termo da Eq. (29), utiliza-se o teorema da divergência após tê-lo integrado por partes, levando à

$$\int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \phi_i \phi_j dV + \int_V k \theta_{i,k} \phi_{j,k} dV - \int_V R_M^{t-1} \phi_j dV + \int_A q_n \phi_j dA = 0 \quad (30)$$

Eq. (30) pode ser escrita de forma matricial da seguinte maneira

$$C_{ij} \dot{\theta}_i + K_{ij} \theta_i = F_j \quad (31)$$

onde

$$C_{ij} = \int_V \rho c_e \phi_i \phi_j dV \quad (32)$$

$$K_{ij} = \int_V k \phi_{i,k} \phi_{j,k} dV \quad (33)$$

$$F_j = \int_V R_M^{-1} \phi_j dV - \int_A q_n \phi_j dA \quad (34)$$

Como a Eq. (31) depende da primeira derivada no tempo, a família alfa de aproximação temporal pode ser utilizada para integrá-la. São utilizadas duas equações para aproximar a temperatura no tempo:

$$\theta_j^{t+\Delta t} = \frac{\theta_j^{t+\Delta t} - \theta_j^t}{\Delta t} \quad (35)$$

$$\theta_j^{t+\Delta t} = (1 - \alpha)\theta_j^t + \alpha\theta_j^{t+\Delta t} \quad (36)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro da aproximação temporal, ajustado conforme necessário. Substituindo as Eq. (35) e Eq. (36) na Eq. (31) resulta em

$$[C_{ij} + \alpha\Delta t K_{ij}]\theta_j^{t+\Delta t} = [C_{ij} - (1 - \alpha)\Delta t K_{ij}]\theta_j^t + \Delta t [\alpha F_j^{t+\Delta t} + (1 - \alpha)F_j^t] \quad (37)$$

Estabelecido o sistema de equações algébricas utilizado para resolver a temperatura atual, o próximo passo para solução do problema termo-elasto-plástico é obter a posição atual através da solução do problema mecânico.

### 3.2 MEFP aplicado a problemas bidimensionais

Este estudo utiliza uma formulação simples baseada no princípio da mínima energia potencial para resolver o problema mecânico. Seu principal diferencial está na sua descrição posicional, ao invés do deslocamento. Uma breve revisão é feita aqui. Para completa descrição da formulação, vide os trabalhos de Greco (2004) para pórticos planos, de Marques (2006) para sólidos planos, Maciel (2008) para sólidos tridimensionais, de Coda e Paccola (2007) e de Coda e Paccola (2008) para casca, e de Minski (2008) e de Coda (2008) para barras gerais bi- e tridimensionais laminadas, respectivamente.

A resposta de uma estrutura a esforços termo-mecânicos é definida pelo equilíbrio dinâmico local, Eq. (1). Assim como no problema térmico, é necessário determinar a forma discreta da equação e, para tanto, esta deve ser multiplicada pela posição atual e integrada em seu domínio, levando à

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_V F_i \gamma_i dV - \int_V \rho \ddot{\gamma}_i \gamma_i dV = 0 \quad (38)$$

Eq. (38) está escrita em termos da configuração atual, ou seja, a descrição é Euleriana. Para escrever a forma Lagrangeana da Eq. (38), a primeira parcela da equação, referente à energia interna, é substituída por

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{V_0} \mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij} dV_0 \quad (39)$$

onde  $\mathbf{E}_{ij}$  é o tensor de deformação de Green e  $\mathbf{P}_{ij}$  é seu par conjugado energético, o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie. Considerando que

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{f}_i \quad , \quad (40)$$

e aplicando a Eq. (39) e o teorema de conservação da massa, Eq. (3), na Eq. (38), resulta em

$$\int_{V_0} \mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij} dV_0 + \int_{V_0} f_i \gamma_i dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\gamma}_i \gamma_i dV_0 = 0 \quad (41)$$

onde  $f_i$  são as forças aplicadas no corpo, relacionadas à configuração inicial. Aplicando o princípio da estacionariedade, que diz que a variação da energia total de um sistema conservativo é zero em relação à qualquer variável, e ainda considerando que tal variável seja as posições nodais genéricas  $\gamma_s$ , chega-se a

$$\int_{V_0} \frac{\partial \mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij}}{\partial \gamma_s} dV_0 + \int_{V_0} f_s dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\gamma}_s dV_0 = 0 \quad (42)$$

Eq. (42) representa o equilíbrio dinâmico em qualquer instante de tempo. Porém, para obter sua solução numérica, ela precisa ser escrita para um instante específico de tempo, da seguinte maneira

$$\int_{V_0} \frac{\partial \mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij}}{\partial \mathbf{E}_{kt}} \frac{\partial \mathbf{E}_{kt}}{\partial \gamma_s} dV_0 \Big|_t + \int_{V_0} f_s^t dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\gamma}_s^t dV_0 = 0 \quad (43)$$

Apenas destacando que a regra da cadeia foi aplicada nas forças internas para desenvolvê-la, o que resulta em

$$\int_{V_0} \mathbf{P}_{kt} \frac{\partial \mathbf{E}_{kt}}{\partial \gamma_s} dV_0 \Big|_t + \int_{V_0} f_s^t dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\gamma}_s^t dV_0 = 0 \quad (44)$$

A relação linear entre tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e deformação de Green, considerando a deformação relativa à mudança de temperatura, é dada por

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkt}^e (\mathbf{E}_{kt}^e + \alpha \theta \delta_{kt}) \quad (45)$$

onde  $\mathbf{C}_{ijkt}^e$  é o tensor que define as propriedades elásticas,  $\mathbf{E}_{kt}^e$  é a parte elástica do tensor de deformação de Green,  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $\theta$  é a variação de temperatura e  $\delta_{kt}$  é o delta de Kronecker. Sem o termo de temperatura, esta relação é chamada Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff.

Voltando à Eq. (44), considerando a decomposição aditiva do tensor de deformação de Green em uma parcela elástica e outra plástica, e a lei constitutiva dada pela Eq. (45), resulta em

$$\int_{V_0} \mathbf{C}_{ijkt}^e (\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ij}^p + \alpha \theta \delta_{ij}) \frac{\partial \mathbf{E}_{ij}}{\partial \gamma_s} dV_0 \Big|_t + \int_{V_0} f_s^t dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\gamma}_s^t dV_0 = 0 \quad (46)$$

A primeira parcela da Eq. (46) representa as forças internas ( $F_{int}$ ), a segunda parcela representa as forças externas ( $F_{ext}$ ) e a última parcela representa as forças inerciais ( $F_{iner}$ ). A partir da Eq. (46) é possível definir a resposta da estrutura ante a esforços termo-mecânicos, sendo que a temperatura é conhecida e a posição  $y_s$  é a única incógnita do sistema.

Através do método de Newton-Raphson aproxima-se a posição atual e, com isso, pode-se verificar se a Eq. (46) estará em equilíbrio. Se não estiver, busca-se uma nova posição tentativa da seguinte maneira

$$y_s^{t+1} = y_s^t + \Delta y_s^t \quad (47)$$

onde  $y_s^{t+1}$  é a nova posição tentativa,  $y_s^t$  é a posição tentativa atual e  $\Delta y_s^t$  é a correção na posição atual, obtida por

$$\Delta y_s^t = H_{rs}^{-1} (F_{int} - F_{ext}) \quad (48)$$

onde  $H_{rs}^{-1}$  é a inversa da matriz hessiana, dada por

$$H_{rs} = \frac{\partial^2 (P_{ij} E_{ij})}{\partial y_r \partial y_s} + \rho_0 \frac{\partial \gamma_s^t}{\partial y_r} \quad (49)$$

Obtida a posição atual, ainda é necessário integrar a Eq. (46) no tempo. Para tanto será utilizado o método de Newmark. Como é um método utilizado com frequência para resolução de problemas mecânicos, o leitor é apenas referenciado para Marques (2006) para subseqüente dedução.

### 3.3 Elemento triangular de 10 nós

Tanto para o problema térmico quanto para o mecânico, será utilizado o elemento triangular de 10 nós, conforme apresentado na figura 2:

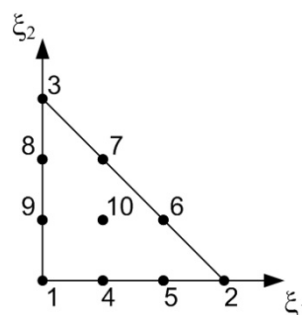


Figura 2 – Elemento triangular de 10 nós.

Sabendo-se que  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ , as funções de forma para o elemento são dadas por (Savassi, 1996):

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \quad \psi_2 = \frac{1}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2)$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= \frac{1}{2} \xi_3 (3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2) & \psi_4 &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1) \\
\psi_5 &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_2 - 1) & \psi_6 &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_2 - 1) \\
\psi_7 &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_3 - 1) & \psi_8 &= \frac{9}{2} \xi_3 \xi_1 (3\xi_3 - 1) \\
\psi_9 &= \frac{9}{2} \xi_3 \xi_1 (3\xi_1 - 1) & \psi_{10} &= 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3
\end{aligned} \tag{50}$$

As funções de forma estão escritas em função do espaço de coordenadas adimensionais  $(\xi_1, \xi_2)$ , enquanto que as equações dos problemas térmico e mecânico estão definidas no espaço de coordenadas globais  $(x_1, x_2$  ou  $y_1, y_2)$ . Assim, uma relação deve ser estabelecida através do gradiente da mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial, que é dada pela relação diferencial

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j = A_0 d\xi_j \tag{51}$$

Assim como

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} d\xi_j = A_1 d\xi_j \tag{52}$$

Eq. (51) representa o gradiente da mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial, enquanto que a Eq. (52) representa o gradiente da mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração atual. Desta forma, o diferencial para a integração fica

$$dV_0 = J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{53}$$

onde  $J = \det(A_0)$  é o determinante da matriz mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial. Assim, o mapeamento do espaço adimensional no espaço local é dado por

$$\int_{V_0} f(x_i) dV_0 = \int_{\xi_i} f(x_i) dx_i = \int_{\xi_i} f(\xi_i) J d\xi_i \tag{54}$$

onde  $f$  representa a função a ser integrada. Eq. (54) pode ser resolvida numericamente através da técnica de integração de Hammer, que consiste na substituição da soma integral por uma soma discreta em pontos determinados, da seguinte forma

$$\int_{\xi_i} f(\xi_i) J d\xi_i = f(\xi_j) J w_j \tag{55}$$

onde  $w_j$  é o peso correspondente ao ponto de integração de Hammer. No aplicativo desenvolvido foram utilizados sete pontos de Hammer, e seus valores e pesos podem ser encontrados em Savassi (1996).

## 4 RESULTADOS OBTIDOS

### 4.1 Impacto entre barra e anteparo

O primeiro exemplo consiste no impacto entre uma barra termo-elastoplástica e um anteparo rígido, conforme a figura 3:

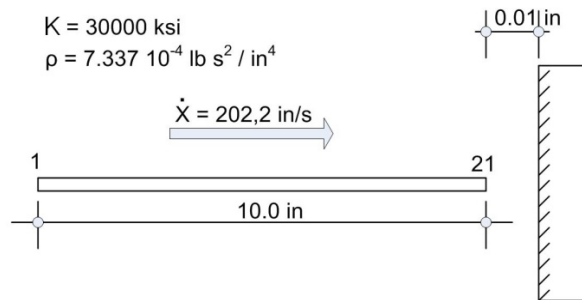


Figura 3 – Impacto entre barra e anteparo.

A barra foi discretizada por 40 elementos finitos de chapa, submetida a uma temperatura de referência de 68°F, sendo que a solução foi obtida para o intervalo de tempo de  $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-6}$  s. Foram consideradas as seguintes propriedades do material:  $\rho = 7,337 \cdot 10^{-4}$  lb.s<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>,  $c_e = 1119,81$  in/°F,  $k = 1,741$  lb/(s.°F),  $\alpha = 9,7 \cdot 10^{-6}$  in/(in.°F), e módulo de elasticidade  $E = 30\,000$  ksi.

A figura 4 apresenta a comparação dos resultados de posição de um nó impactante para a solução analítica (elástica linear), utilizando o elemento de barra (elástico linear), analisado em Carrazedo (2009) e utilizando o elemento de chapa (modelo elástico não-linear de Saint-Venant-Kirchhoff). Na figura 5 podem ser vistos os resultados de temperatura para um nó em  $x = 9.5$  in.

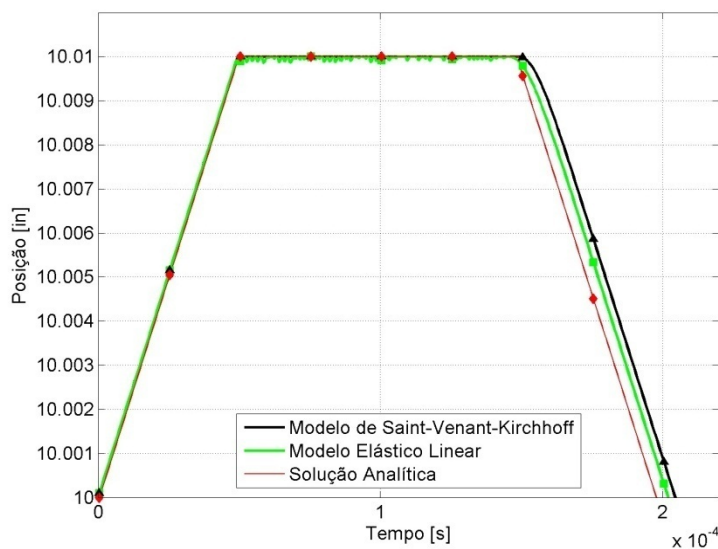


Figura 4 – Posição do nó impactante – Análise elástica.

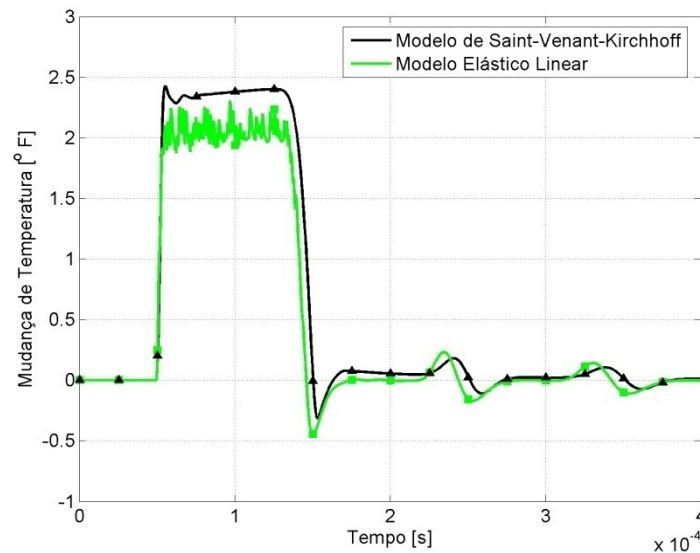


Figura 5 – Temperatura do nó em  $x = 9.5$  in – Análise elástica.

Percebe-se nas figuras 4 e 5 que, apesar dos níveis de deformação terem atingido valores que resultam em diferença entre os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e o elástico linear, os resultados foram coerentes, levando à conclusão de que o aplicativo de chapa desenvolvido está em concordância com a teoria apresentada.

Na seqüência é realizada uma análise considerando o comportamento plástico do material. Para tanto, é considerado que a tensão de escoamento é igual a 10 ksi, que a quantidade de trabalho plástico convertido em calor é de  $\beta = 1$ , e encruamento de 1000 ksi. As figuras 6 e 7 apresentam os resultados de posição do nó impactante e de temperatura do nó localizado em  $x = 9.5$  in, respectivamente.

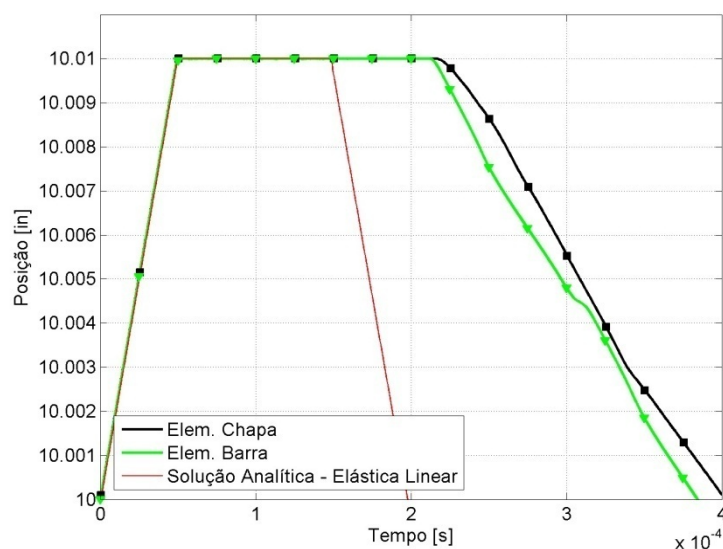


Figura 6 – Posição do nó impactante – Análise plástica.

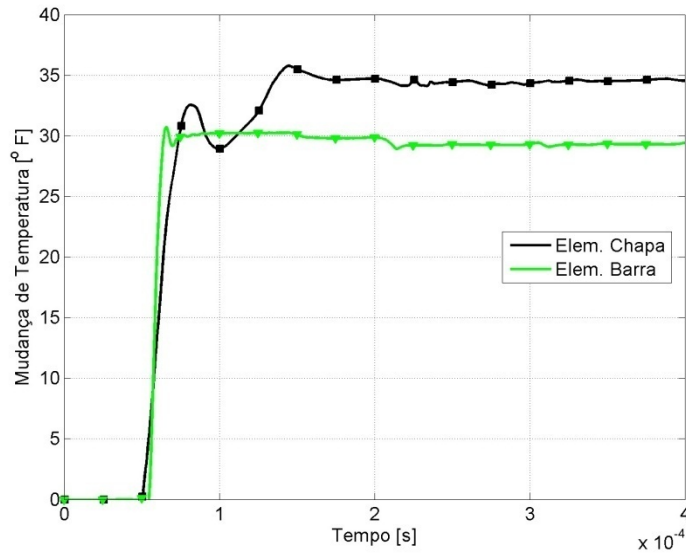


Figura 7 – Temperatura do nó em x = 9.5 in – Análise plástica.

Percebe-se que, apesar de pequenas diferenças, o comportamento termo-plástico foi devidamente representado pelo modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, em que as diferenças decorrem apenas dos diferentes modelos adotados. Isto implica que diferenças na geração de calor também são esperadas, conforme mostrado na figura 7, levando à conclusão que o aplicativo termo-plástico de chapa está gerando resultados coerentes.

### 4.2 Impacto de anel e anteparo

Este exemplo foi baseado em Greco (2004) e Marques (2006), e consiste em uma estrutura anelar, de comportamento elástico, seguindo trajetória de impacto inclinada em relação a um anteparo rígido, sob velocidade constante, conforme apresentado na figura 8, onde também pode ser vista a discretização do anel em 80 elementos finitos.

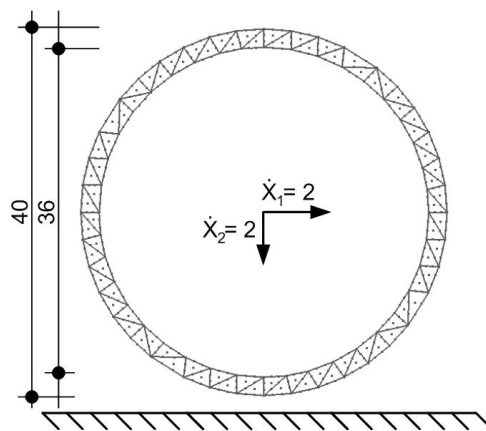


Figura 8 – Impacto de anel e anteparo.

Foram adotados 4000 passos de tempo de  $\Delta t = 0,005$ , temperatura de referência de  $1^{\circ}$  e as seguintes propriedades termo-mecânicas:  $\rho = 0,01$ ,  $c_e = 1,0$ ,  $k = 1,0$ ,  $\alpha = 0,1$ , e módulo de elasticidade  $E = 100$ . Nas figuras 9 a 13 são apresentados os deslocamentos horizontal e vertical, assim como a temperatura, para diversos instantes de tempo para o caso de impacto sem atrito. Os resultados de deslocamento são praticamente idênticos aos apresentados por Marques (2006), sendo que a diferença decorre apenas da consideração da temperatura.

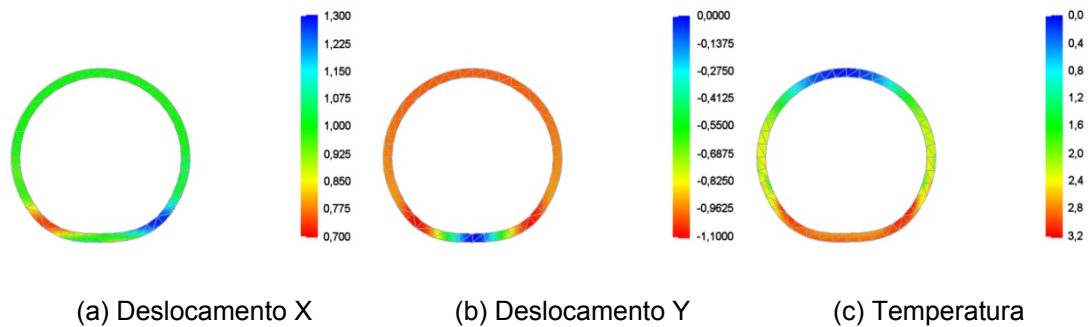


Figura 9 – Impacto de anel – 0.5 s após impacto.

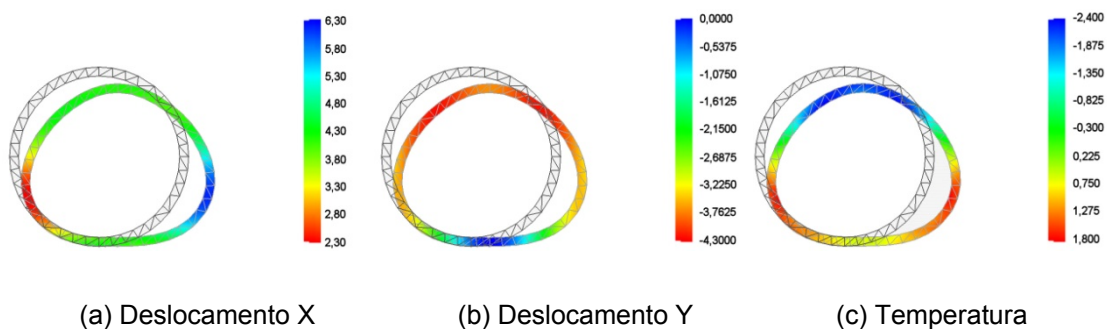


Figura 10 – Impacto de anel – 2.1 s após impacto.

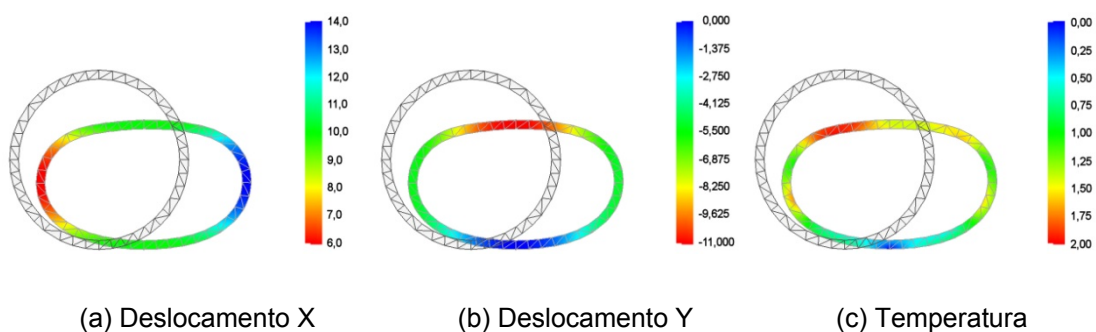


Figura 11 – Impacto de anel – 5 s após impacto.

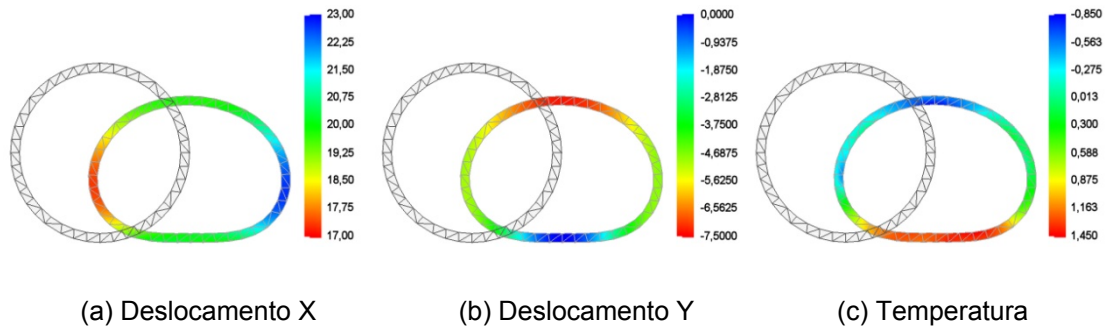


Figura 12 – Impacto de anel – 10 s após impacto.

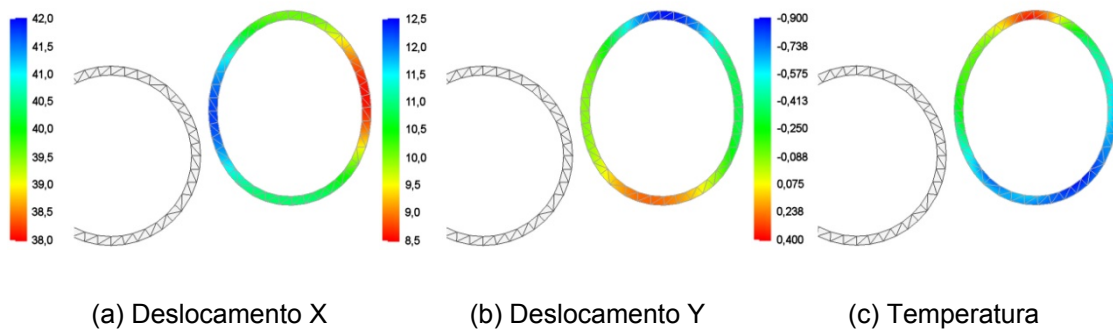


Figura 13 – Impacto de anel – 0.5 s após impacto.

## 5 CONCLUSÕES

A metodologia desenvolvida em Coda (2003), que lida com sistemas dinâmicos não lineares, baseada no teorema da mínima energia potencial escrita em relação às posições nodais, foi implementada com sucesso na resolução de problemas termo-mecânicos acoplados bidimensionais. Utilizando a metodologia proposta, que aborda tanto a formulação do método dos elementos finitos para problemas térmicos, quanto à do método dos elementos finitos posicional para problemas não-lineares mecânicos, a representação do comportamento de materiais termo-elastoplásticos é obtida com sucesso. Dois exemplos foram apresentados demonstrando a precisão e aplicabilidade da formulação, visto que os resultados numéricos apresentam boa correlação aos resultados de outros autores.

## 6 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual esta pesquisa não poderia ter sido realizada.

## 7 REFERÊNCIAS

CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. 152 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. 157 p. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. An enhanced positional finite element formulation for geometrical non-linear analysis of three-dimensional laminate frames. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL STRUCTURES TECHNOLOGY, 9, Athens, 2008. **Proceedings...** Athens, Greece, 2008. ISBN: 978-1-905088-23-2.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells – curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**. v. 40, n. 1, p. 185-200, 2007. ISSN: 0178-7675.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**. v. 5, p. 205-223, 2008. ISSN: 1679-7817.

DILLON, O. Coupled thermoplasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**. v. 11, p. 21-33, 1963. ISSN: 0022-5096.

FARREN, W. S.; TAYLOR, G. I. The heat developed during plastic extension of metals. **Proceedings of the Royal Society A**. v. 107, p. 422-451, 1925. ISSN: 1364-5021.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2009. 163 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

HAKANSSON, P.; WALLIN, M.; RISTINMAA, M. Comparison of isotropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity. **International Journal of Plasticity**. v. 21, p. 1435-1460, 2005. ISSN: 0749-6419.

HOLZAPFEL, G. **Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering**. Chichester: John Wiley & Sons, 2004. 455 p. ISBN: 978-0471823193.

KAMLAH, M.; HAUPT, P. On the macroscopic description of stored energy and self heating during plastic deformation. **International Journal of Plasticity**. v. 13, p. 893-911. ISSN: 0749-6419.

LEE, J.D.; CHEN, Y. A theory of thermo-visco-elastic-plastic materials: thermomechanical coupling in simple shear. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**. v. 35, p. 187-209, 2001. ISSN: 0167-8442.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 153 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 103 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MINSKI, R. L. **Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido**. 146 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PERZYNA, P.; SAWZCUK, A. Problems in thermoplasticity. **Nuclear Engineering and Design**. v. 24, p. 1-55, 1973. ISSN: 0029-5493.

ROSAKIS, P.; ROSAKIS, A. J.; RAVICHANDRAN, G.; HODOWANY, J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**. v. 48, p. 581-607, 2000. ISSN: 0022-5096.

SAVASSI, W. **Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas**. São Carlos: EESC-USP, 2000. 260 p. ISBN: 85-85205-07-5.

TAYLOR, G. I.; QUINNEY, H. The latent energy remaining in a metal after cold working. **Progress in Materials Science A**. v. 143, p. 307-326, 1934.

TRUESDELL, C.; TOUPIN, R. **Handbuch der Physik: The classical field theories of mechanics**. Berlin: Springer-Verlag, 1960. 602 p.

## TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL PARA ELEMENTOS LINEARES SEGUNDO A NBR 6118:2003

Fernando Fernandes Fontes<sup>1</sup> & Libânio Miranda Pinheiro<sup>2</sup>

### Resumo

*“O objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações de estados limites últimos e de serviço” (NBR 6118:2003 Projeto de estruturas de concreto). A análise estrutural consiste numa das principais etapas do projeto estrutural de um edifício, pois ela compreende a escolha dos modelos teóricos, que devem representar adequadamente a estrutura real, e do tipo de análise, com relação ao comportamento dos materiais. Este trabalho considera os principais modelos estruturais usados em edifícios, e os conceitos relativos aos diferentes tipos de análise permitidos pela Norma. Apresentam-se exemplos de elementos lineares calculados pelos diferentes tipos de análise, com ênfase na redistribuição de momentos fletores, empregando-se análise linear com redistribuição ou análise plástica. Ressalta-se a importância da consideração de seção T nas vigas e os ajustes necessários quando da consideração de uma envoltória de carregamentos. Este trabalho pretende diminuir a distância entre os engenheiros de projeto e o meio acadêmico, facilitando o entendimento da parte da NBR 6118:2003 que trata da análise estrutural.*

*Palavras-chave: Concreto armado. Análise estrutural. Redistribuição. Análise plástica.*

## TYPES OF STRUCTURAL ANALYSIS FOR LINEAR ELEMENTS ACCORDING TO BRAZILIAN CODE NBR 6118:2003

### Abstract

*“The structural analysis objective is to determine the actions effects in a structure, with the purpose of verifying the ultimate limit states and serviceability” (Brazilian Code NBR 6118:2003 - Design of concrete structures). The structural analysis is one of the main parts of a building structural design, since it involves the choice of theoretical models that represent appropriately the real structure, and the type of analysis due to the materials behavior. This work considers the most common structural models used for buildings, and the concepts concerning the different types of analysis permitted by the Brazilian Code. It presents simple examples of linear elements computed by different types of analysis, emphasizing the possibility of moment redistribution, either with the linear analysis with redistribution or the plastic analysis. The importance of considering T-beam with moment redistribution is made clear, and lines of direction to consider alternate position of live loads are given. This work intends to shorten the distance between design engineers and the academic world, providing a clearer vision of the NBR 6118:2003 structural analysis approach.*

*Keywords: Reinforced concrete. Structural analysis. Moment redistribution. Plastic analysis.*

## 1 INTRODUÇÃO

A análise de uma estrutura consiste em determinar esforços solicitantes e deslocamentos, por meio de modelos matemáticos, após a idealização de diversos fatores, como o comportamento das ações, dos materiais constituintes, das ligações entre os elementos e da resposta destes frente às ações.

<sup>1</sup> Mestre em Engenharia de Estruturas – EESC-USP, faocubo@yahoo.com.br

<sup>2</sup> Professor Doutor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, libanio@sc.usp.br

Segundo a NBR 6118:2003, o objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações de estados limites últimos e de serviço (ELU e ELS).

Essa Norma trouxe inovações significativas para o projeto de estruturas de concreto, inclusive na análise estrutural. Houve um avanço do conhecimento em redistribuição de esforços, via análise linear com redistribuição ou via análise plástica, e sobre não-linearidades do comportamento dos materiais e das estruturas, como no caso do cálculo dos deslocamentos, em que se utiliza uma rigidez equivalente no cálculo das flechas, para considerar a fissuração do concreto. A NBR 6118:2003 traz indicações acerca dessas análises mais requintadas, bem como fornece diretrizes sobre o campo de validade e as condições especiais para aplicação de cada uma delas.

Portanto, é importante conhecer os diferentes tipos de análise, com relação ao comportamento admitido para os materiais da estrutura, principalmente os que permitem o cálculo analítico, situação que corresponde à mais usual, na prática de projetos. Além disso, conceitos como o de largura colaborante das lajes junto às vigas, quando associados com análises do tipo linear, linear com redistribuição e plástica, são muito úteis na concepção de projetos.

## 2 TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

A NBR 6118:2003 permite cinco tipos de análise, quanto ao comportamento do concreto armado, e exige que o projeto apresente conformidade com pelo menos um desses modelos. Em todos eles, são admitidos pequenos deslocamentos para a estrutura.

### 2.1 Análise linear

Este tipo de análise considera os materiais elástico-lineares. A elasticidade de um material está associada à tendência de voltar à configuração inicial, após ter sofrido deformações decorrentes de ações externas, com posterior alívio de carregamento. Além disso, considera-se uma relação linear entre tensões e deformações, dada pelo módulo de elasticidade ( $E$ ), valor este que é característico de cada material. LEONHARDT & MÖNNIG (1977) afirmam que o concreto só tem um comportamento puramente elástico para tensões baixas e de curta duração, ou até aproximadamente 1/3 da resistência à compressão.

Como simplificação, pode-se utilizar, para cálculo da rigidez dos elementos estruturais lineares, o momento de inércia da seção bruta de concreto. Na análise linear, para determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites de serviço, deve-se utilizar o módulo de elasticidade secante ( $E_{cs}$ ), cujo valor é 85% do módulo de elasticidade tangente inicial ( $E_{ci}$ ), correspondente à inclinação do início da curva tensão versus deformação. Segundo a NBR 6118:2003:

$$E_{cs} = 0,85 E_{ci} = 0,85 \cdot 5600 f_{CK}^{1/2} \quad (1)$$

A análise linear é geralmente empregada na verificação dos ELS, sendo utilizada para ELU somente em situações que se possa garantir a ductilidade dos elementos estruturais. Pode-se considerar, como garantia de ductilidade, o dimensionamento nos domínios 1, 2 e 3 e a limitação da posição relativa da linha neutra,  $x/d$ , junto aos apoios e em regiões de ligação entre os elementos. Essa limitação de  $x/d$  será apresentada no item 2.2. Para o cálculo de flechas, faz-se necessária a consideração da fissuração, que pode ser feita com a inércia equivalente de Branson, e da fluência.

## 2.2 Análise linear com redistribuição

Uma vez realizada a análise linear de uma estrutura, pode-se considerar uma redistribuição dos esforços calculados, decorrente da variação de rigidez dos elementos estruturais. A fissuração, e a conseqüente entrada no estágio II, de determinadas seções transversais, provoca um remanejamento dos esforços solicitantes, para regiões de maior rigidez.

Segundo PRADO & GIONGO (1997), essa fissuração pode diminuir de 20 a 70% a rigidez à flexão da seção de concreto, dependendo da taxa de armadura.

Em suma, a análise linear com redistribuição promove a redução de momentos fletores em apoios de vigas contínuas, e o respectivo aumento dos momentos nos vãos. A redistribuição se dá pela multiplicação dos momentos nos apoios por um coeficiente de redistribuição  $\delta$ , e posterior correção dos momentos nos vãos (Figura 1).

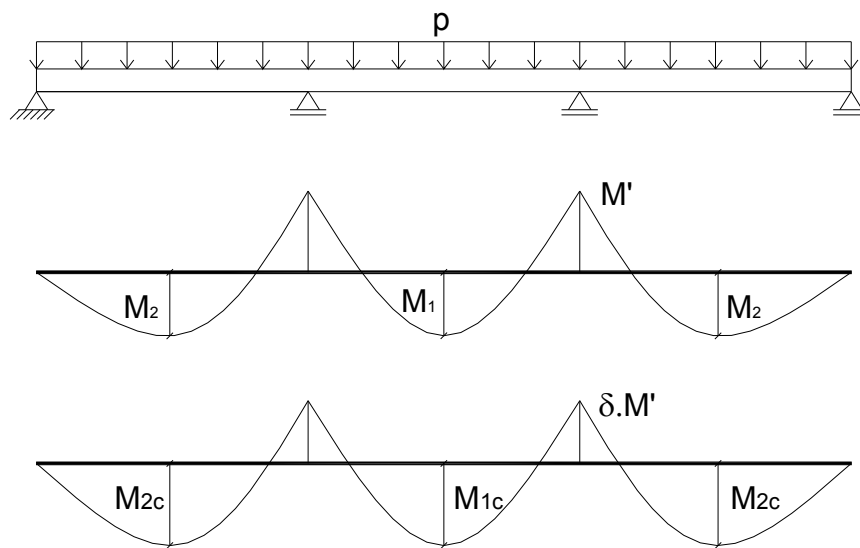


Figura 1 – Diagramas de momentos fletores sem e com redistribuição.

Para elementos lineares, a NBR 6118:2003 permite redução de até 25% ( $\delta = 0,75$ ) para estruturas de nós fixos e de até 10% ( $\delta = 0,90$ ) para estruturas de nós móveis, dependendo de  $x/d$  e de  $f_{ck}$ , como indicado nas equações 2 e 3:

$$\delta \geq 0,44 + 1,25 x/d \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \quad (2)$$

$$\delta \geq 0,56 + 1,25 x/d \text{ para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa} \quad (3)$$

Quanto menor o valor de  $x/d$  calculado no ELU, menor a área de concreto comprimido, e mais o aço, material mais dúctil que o concreto, passa a ser o limitante da resistência da seção.

A NBR 6118:2003 limita o valor de  $x/d$ , nos apoios e nas regiões de ligação entre elementos estruturais, mesmo que não sejam realizadas redistribuições de esforços solicitantes, aos seguintes valores:

$$x/d \leq 0,50 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \quad (4)$$

$$x/d \leq 0,40 \text{ para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa} \quad (5)$$

Em pilares, consolos e elementos lineares com preponderância de compressão, a redistribuição de esforços só deve ser feita se ela for consequência de redistribuições em vigas ligadas a eles, uma vez que essas peças comprimidas não apresentam grande utilidade.

A NBR 6118:2003 prescreve ainda que não é desejável que haja redistribuição de esforços em serviço, e que as verificações de ELS podem ser baseadas na análise linear.

No caso de vigas T, o efeito da redistribuição é ainda mais benéfico, já que nos vãos a área de concreto comprimido é maior, pois conta com a mesa da seção T. LEONHARDT & MÖNNIG (1979) mostram que é possível reduzir em até 50% os momentos nos apoios, em vigas com a largura da mesa em torno de três vezes a largura da alma, e com isso aumentar a capacidade de carga da viga.

### 2.3 Análise plástica

A propriedade do material de guardar deformações residuais é chamada de plasticidade. As principais teorias envolvidas em projetos, que permitem que elementos estruturais sofram certas deformações permanentes, são a teoria das rótulas plásticas, para elementos lineares, e a teoria das charneiras plásticas, para elementos de superfície que trabalhem como placas.

Ao se aumentar continuamente o carregamento de uma viga, por exemplo, um ou mais pontos críticos de momento máximo poderão entrar em escoamento, dando origem a articulações, ou rótulas plásticas.

Uma rótula plástica é caracterizada por um aumento plástico da curvatura que pode atingir valor de duas a três vezes maior que o calculado elasticamente. Esse efeito restringe-se a um comprimento de plastificação, em torno dos pontos de momento máximo, nos quais o momento fletor não aumenta mais e passa a ser chamado de *momento totalmente plástico*,  $M_p$ .

A mínima carga capaz de provocar na estrutura um escoamento sem contenção, ou responsável pela formação de um determinado número de rótulas plásticas, que torne a estrutura, ou parte dela, em um sistema hipostático, dá origem a um mecanismo de colapso, e é chamada de *carga limite*.

Em estruturas hiperestáticas, existe uma reserva de capacidade resistente, visto que, geralmente, é necessária a formação de mais de uma rótula plástica para que se forme um mecanismo de colapso.

No caso do concreto armado, o momento de plastificação pode ser considerado como aquele que provoca o aparecimento do estado limite último ( $\varepsilon_c = -0,35\%$  ou  $\varepsilon_s = 1\%$ ). Por ser um material de natureza frágil, para a ocorrência de um número de rótulas plásticas que dê origem a um mecanismo de colapso, é necessário verificar a capacidade de rotação de cada rótula. A rotação necessária pode ser quantificada pela diferença entre a rotação total no colapso e aquela que dá início à plastificação.

A NBR 6118:2003 traz a consideração de que quanto menor for o valor de  $x/d$ , referente à posição relativa da linha neutra, maior será a capacidade de rotação do elemento estrutural.

Em função de  $x/d$ , na Figura 2 é fornecido um gráfico de capacidade de rotação,  $\theta_{pl}$ . Este gráfico é válido para uma relação  $a/d$  igual a 6 ( $a$  é a distância entre pontos de momento nulo da região que contém a seção plastificada). Para outras relações  $a/d$ , devem-se multiplicar os valores extraídos do gráfico por  $\sqrt{(a/d)/6}$ . A rotação necessária deve ser menor ou igual à capacidade de rotação dada pela Norma.

A plastificação em concreto armado se dá pelo escoamento da armadura, diminuindo o valor de  $x$  referente à posição da linha neutra e aumentando o braço de alavanca obtido em regime elástico. No entanto, o momento resistente permanece praticamente constante até a ruptura, pois o aumento do braço de alavanca apenas compensa a diminuição da zona de concreto comprimido.

A partir dessas considerações, MORETTO (1970) observa que o diagrama momento curvatura do concreto armado pode, simplificada, ser aproximado para duas retas, como no aço, com o momento de plastificação igual ao momento último.

A redistribuição de esforços pode ser feita com maior intensidade que na análise linear com redistribuição, desde que as rótulas plásticas apresentem as devidas capacidades de rotação plástica.

Nota-se que o cálculo plástico tem boa aplicabilidade nas estruturas simples de elementos lineares, em que se conhece previamente a posição preferencial de formação das rótulas plásticas (essa posição pode ser imposta pela disposição da armadura).

A análise plástica de estruturas reticuladas não é permitida quando se consideram os efeitos de segunda ordem globais.

Na análise plástica, preocupa-se com o ELU e não se conhece o comportamento em serviço. A verificação de ELS deve ser efetuada com uma análise linear ou não-linear.

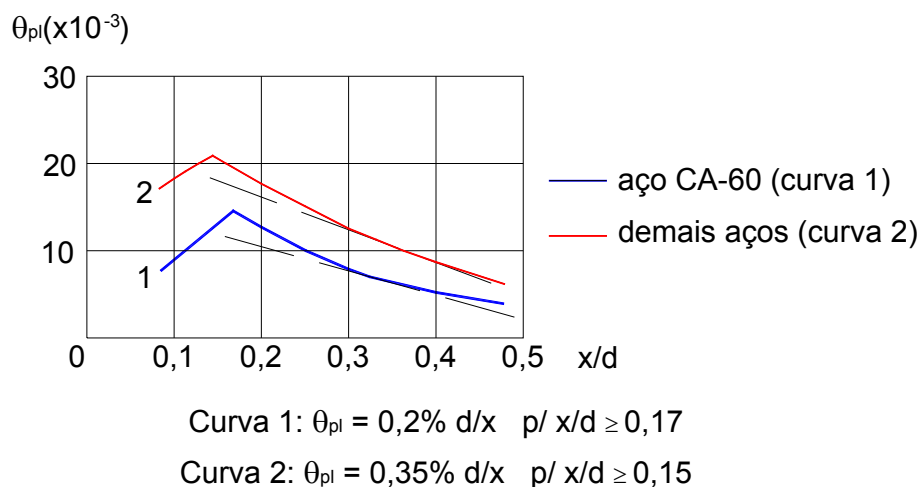


Figura 2 – Capacidade de rotação plástica (Adaptada da NBR 6118:2003).

## 2.4 Análise não-linear

Um material de comportamento não-linear é aquele que apresenta uma relação não-linear entre tensões e deformações, ou seja, essa relação não pode ser definida por uma constante.

A implementação da análise não-linear vem sendo feita no cálculo usual, de forma lenta, mas constante. Já foram desenvolvidos métodos simplificados que, acoplados à análise linear, trazem resultados mais fiéis à realidade.

Uma análise completamente não-linear ainda exige esforços computacionais muito grandes. Sua maior complexidade deve-se principalmente ao fato de que toda a geometria da estrutura bem como suas armaduras (estimadas por análise linear) devem ser previamente conhecidas, o que requer um cálculo iterativo.

Ao final de cada etapa, têm-se novos esforços, que permitem o cálculo de uma armadura diferente. Essa nova armadura passa a ser utilizada na iteração seguinte. O processo se repete até que a armadura obtida seja próxima da relativa à etapa anterior.

É usual a divisão em não-linearidade física (NLF) e não-linearidade geométrica (NLG).

A NLF refere-se ao comportamento não-linear entre tensões e deformações. Sua consideração envolve a determinação da rigidez de cada seção transversal, com variação da quantidade e da disposição de armadura, e do grau de sollicitação, a partir das relações constitutivas dos materiais.

Um modo mais simples de considerar a NLF é embutindo-a na análise linear, com uma redução na inércia bruta da seção transversal. A NBR 6118:2003 prescreve uma redução desse tipo na análise dos esforços globais de segunda ordem.

A NLG considera a relação não-linear entre deformações e deslocamentos e o equilíbrio na posição deformada das estruturas. Ela leva em conta os efeitos de segunda ordem, provenientes da análise da estrutura em sua posição deformada, e que devem ser somados aos efeitos de primeira ordem.

Normalmente as estruturas apresentam uma resposta não-linear aos efeitos de segunda ordem, ou seja, os deslocamentos extras não são diretamente proporcionais ao carregamento aplicado.

A consideração da NLG, assim como na NLF, deve ser feita por meio de análise incremental, iterativa, ou incremental-iterativa, a partir da qual se tem a atualização da geometria deformada, para cada passo de carga ou iteração.

Simplificadamente, os esforços de segunda ordem podem ser estimados com o coeficiente  $\gamma_z$  ou com o processo P-Delta.

O comportamento não-linear físico do concreto armado em serviço pode ser modelado de duas maneiras: por meio das relações entre tensões e deformações do concreto e do aço, ou via diagramas momento versus curvatura, de uma seção transversal.

Os modelos baseados em relações entre tensões e deformações podem ser chamados de modelos constitutivos, e exigem, além da discretização dos elementos estruturais em trechos de armadura constante, a estratificação das seções em camadas, ao longo das quais é realizada a integração das tensões normais. As seções são divididas nos chamados pontos de Gauss, os quais, em maior número, fornecem resultados mais precisos de esforços internos.

Já os modelos baseados em diagramas momento versus curvatura são chamados de modelos mecânicos, e trazem o problema não-linear para o âmbito mais macroscópico de seções, e não mais de pontos quaisquer da estrutura.

As peças fletidas de concreto armado são dimensionadas no Estádio III, porém, com coeficientes de segurança.

Em serviço, em geral há seções fissuradas e seções não fissuradas, apresentando comportamento intermediário entre os dos estádios I e II. Isso se deve, entre outros fatores, à contribuição do concreto intacto entre fissuras, na resistência à tração, também conhecida como “tension stiffening”.

A NBR 6118:2003, no seu item 17.3.2.1.1, recomenda o modelo empírico de Branson para determinar o valor de uma rigidez equivalente à flexão, a ser utilizada na verificação do estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF).

## 2.5 Análise através de modelos físicos

O emprego de modelos físicos não é comum, pois seu custo é elevado e sua utilização requer equipamentos sofisticados de laboratório e pessoal especializado.

A NBR 6118:2003 sugere a análise através de modelos físicos quando os modelos de cálculo forem insuficientes, ou estiverem fora do escopo da Norma.

Geralmente, esse tipo de análise é utilizado em obras de grande importância, em termos de prestígio público ou de quantidade de capital investido, servindo para aferir ou ratificar resultados baseados em cálculos analíticos.

## 2.6 Comentários

Deve-se ter em mente, ao final da apresentação dos possíveis tipos de análise estrutural, que cada estrutura merece um estudo individual, à qual se deve aplicar as teorias que mais lhe convierem, para a sua resolução.

Buscas por análises mais realistas devem estar sempre presentes nos projetos estruturais, tomando-se sempre precauções quanto à segurança.

A utilização de análise plástica, não-linear ou linear com redistribuição só deve ser realizada se amparada pelo amplo domínio do assunto.

Quanto aos estados limites, a Tabela 1 indica resumidamente a que verificação se destinam os vários tipos de análise estrutural.

Tabela 1 – Tipos de análise estrutural e suas aplicações

Análise	Verificação
Linear	ELU* e ELS
Linear com Redistribuição	ELU
Plástica	ELU
Não-Linear	ELU e ELS
Através de Modelos Físicos	ELU e ELS

\* se garantida a ductilidade dos elementos estruturais

## 3 VIGA COM SEÇÃO RETANGULAR

Será realizada a análise estrutural e o dimensionamento da viga V1, indicada na Figura 3, por meio de análise linear, análise linear com redistribuição e análise plástica.

Essa viga encontra-se com suas extremidades apoiadas em outras duas vigas (serão considerados apoios simples nas seções 1 e 3), um apoio central em um pilar (seção 2), e recebe duas forças concentradas provenientes de dois pilares que nascem nos pontos médios de seus tramos (seções 4 e 5, onde ocorrem os máximos momentos nos vãos).

Este será o único carregamento considerado, supondo-o constituído por ações permanentes.

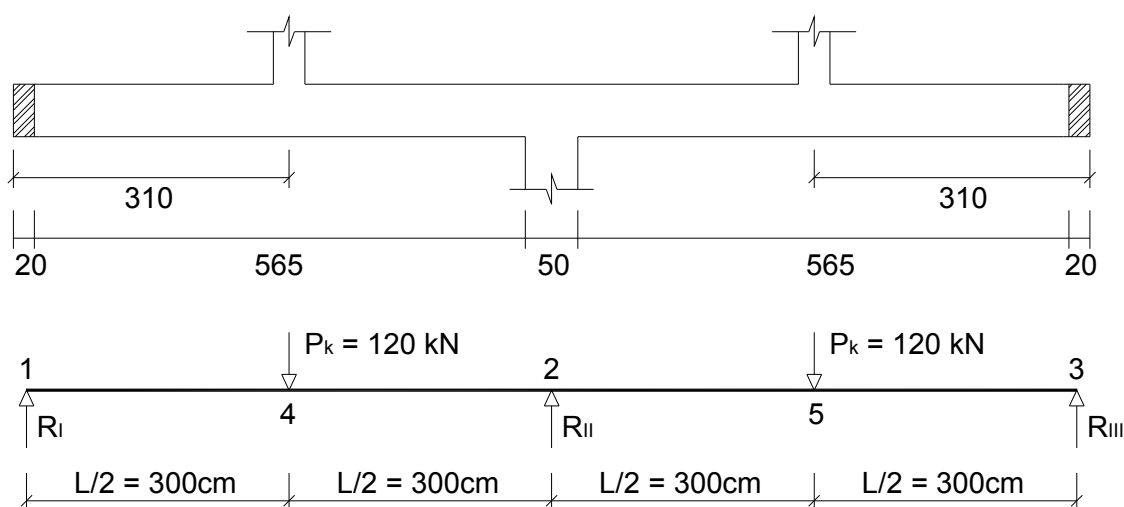


Figura 3 – Viga V1 (25 cm x 50 cm).

Considera-se que a viga V1 está localizada em ambiente interno (Classe de Agressividade Ambiental I para ambientes urbanos), participa de uma estrutura de nós fixos, com concreto C25, aço CA-50 para a armadura longitudinal e CA-60 para a armadura transversal.

O cobrimento é de 2,5 cm e a distância  $d'$ , do centro de gravidade da armadura longitudinal à borda mais próxima, foi inicialmente admitida igual a 4 cm.

Adotou-se um detalhamento padronizado para todas as análises, sempre com quatro barras de mesmo diâmetro fictício, para a armadura de flexão, e estribos também de diâmetro fictício, que proporcionassem o maior espaçamento possível (Figura 4).

O mesmo diâmetro fictício dos estribos foi utilizado para os porta-estribos.

$\phi_t$  e  $s_t$  referem-se respectivamente ao diâmetro e ao espaçamento dos estribos.

$\phi_2, \phi_4$  e  $\phi_5$  são os diâmetros fictícios calculados para as seções 2, 4 e 5, respectivamente.

### 3.1 Análise linear

Apresentam-se os esforços, obtidos em uma análise linear, e os dimensionamentos à flexão e ao cisalhamento.

#### a) Esforços

Os momentos fletores são indicados na Figura 5, e os esforços cortantes na Figura 6, ambos com valores de cálculo.

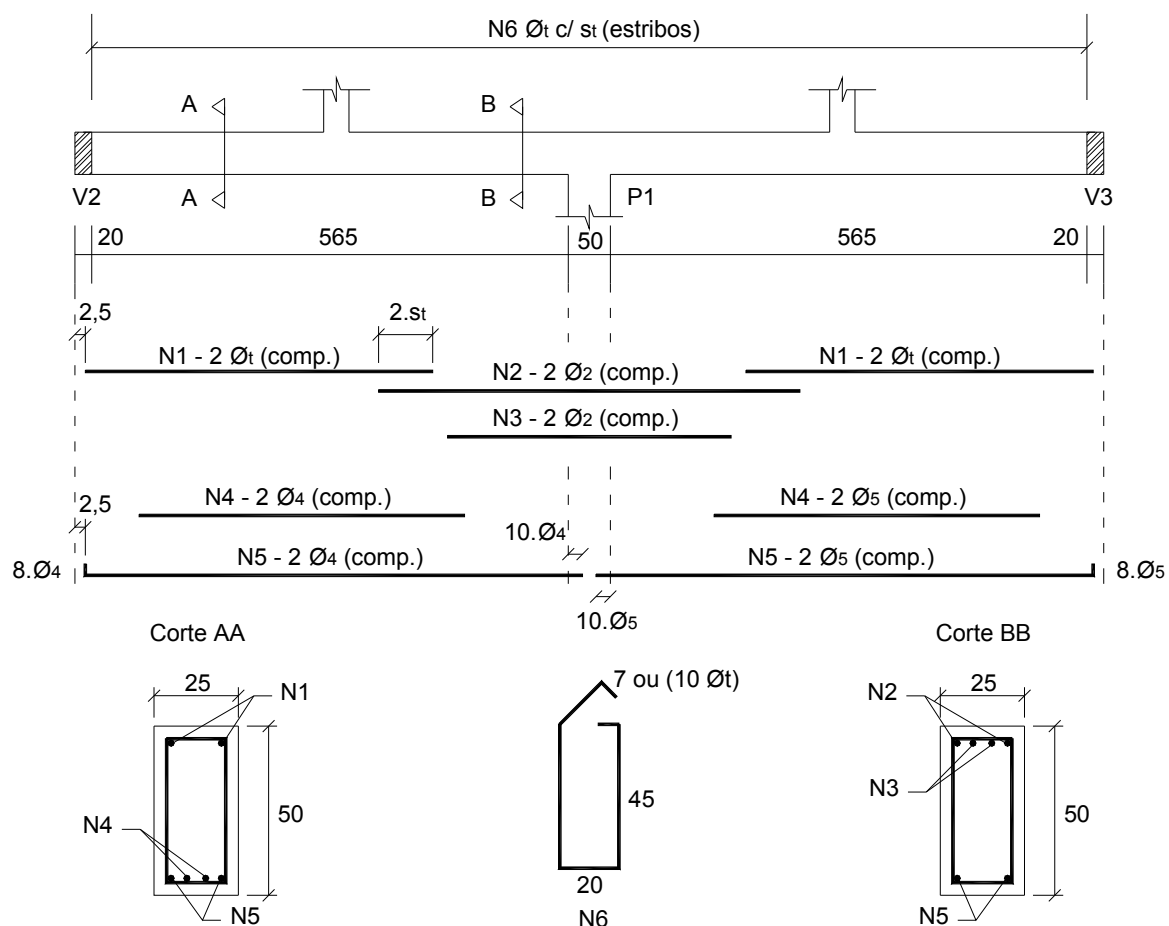


Figura 4 – Detalhamento padrão da viga V1.

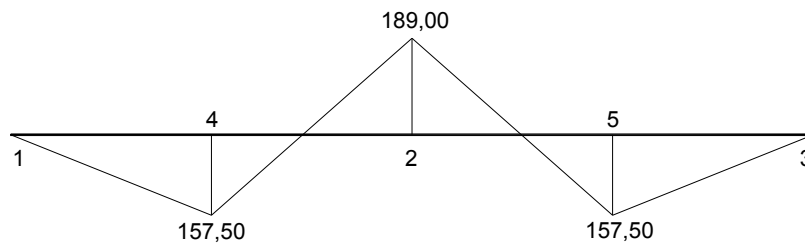


Figura 5 – Momentos fletores de cálculo para a análise linear (kN.m).

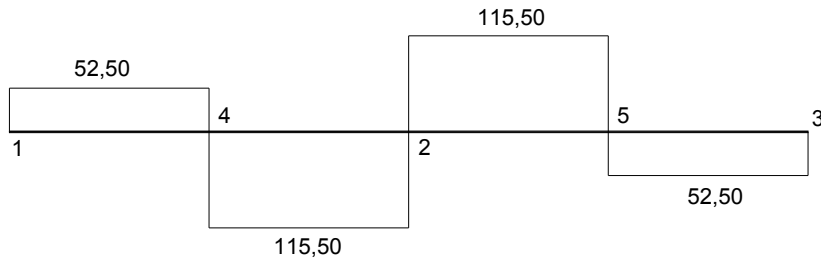


Figura 6 – Esforços cortantes de cálculo para a análise linear (kN).

#### b) Flexão

Seção 4 = Seção 5

$$M_d = 157,5 \text{ kN.m}; x/d = 0,276; A_s = 8,85 \text{ cm}^2 (\phi_4 = \phi_5 = 16,8)$$

Seção 2

$$M_d = 189 \text{ kN.m}; x/d = 0,341; A_s = 10,94 \text{ cm}^2 (\phi_2 = 18,7)$$

#### c) Cisalhamento

$$V_{Sd} = 115,5 \text{ kN} \quad (6)$$

$$V_{Sd, \min} = V_c + V_{sw, \min} = 88,49 + 46,17 = 134,66 \text{ kN} > V_{Sd} \quad (7)$$

Será utilizada armadura mínima ao longo de toda a viga.

$$a_{sw, \min} = (100 \cdot \rho_{sw, \min} \cdot b) / 2 = 1,28 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (8)$$

$$s_{tmax} = 0,6 \cdot 46 \cong 27 \text{ cm} (\phi_t \text{ de } 6,6 \text{ mm}) \quad (9)$$

#### d) Estado limite de formação de fissuras (ELS-F)

Os esforços em serviço são menores, o que exige combinações de serviço para as diferentes verificações de ELS. Para a combinação rara tem-se  $M_4 = M_5 = 112,50 \text{ kN.m}$  e  $M_2 = 135 \text{ kN.m}$ .

Seção 2:  $13500 \text{ kN.cm} > M_r = 2805 \text{ kN.cm} \rightarrow$  há a formação de fissuras.

#### e) Estado limite de deformação excessiva (ELS – DEF)

O momento em serviço para o ELS-DEF é calculado com a combinação quase-permanente, que, neste caso específico, é igual à combinação rara.

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} = 261677301 \text{ kN.cm}^2 \quad (10)$$

$$a_t = a_i (1 + \alpha_f) = 0,90 (1 + 1,32) = 2,09 \text{ cm} \left( < \frac{L}{250} = 2,40 \text{ cm} \right) \quad (11)$$

f) Estado limite de abertura de fissuras (ELS-W)

O momento em serviço é calculado com a combinação freqüente, que, neste caso específico, é igual à combinação rara.

$$w = 0,20 \text{ mm} < w_{lim} (0,40 \text{ mm, para classe de agressividade ambiental I}).$$

### 3.2 Análise linear com redistribuição

Ao se redistribuir os momentos em uma viga, uma boa opção consiste em equilibrar as áreas de armadura dos vãos e dos apoios. Para tal, calcula-se primeiramente o coeficiente de redistribuição  $\delta$  que iguala os momentos das seções 2, 4 e 5. Neste caso, tem-se  $\delta = 8/9$ . Verifica-se a possibilidade de uso deste valor de  $\delta$  somente após o cálculo da armadura de flexão da seção 2, quando se conhece o valor de  $x/d$  nessa seção. O momento reduzido na seção 2 é calculado pelo produto entre  $\delta$  e  $M_{2d}$ , e o momento máximo nos vãos é corrigido pela análise do tramo isolado, como na Figura 7.

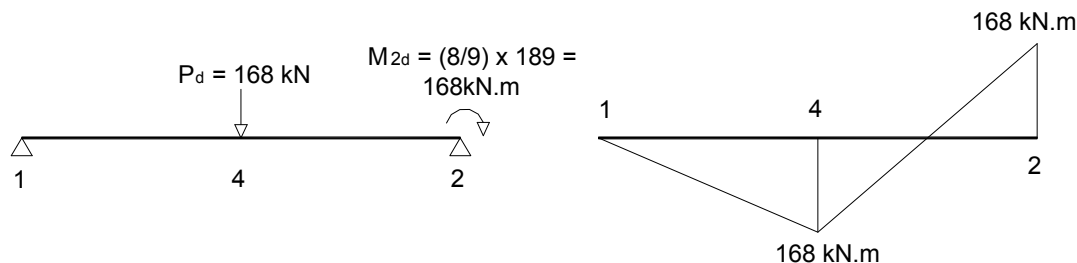


Figura 7 – Correção do momento positivo.

a) Flexão

Seção 2 = Seção 4 = Seção 5

$M_d = 168 \text{ kN.m}$ ;  $x/d = 0,297$ ;  $A_s = 9,53 \text{ cm}^2$  ( $\phi_2 = \phi_4 = \phi_5 = 17,4$ )

Verificação do valor de  $\delta$  para  $f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$ :

$$\delta \geq 0,44 + 1,25.(x/d) = 0,44 + (1,25 \times 0,297) \rightarrow \delta \geq 0,81 \quad (12)$$

O coeficiente utilizado,  $\delta = 8/9$ , está acima do limite estabelecido pela Equação 12, e encontra-se adequado quanto ao limite estabelecido para estruturas de nós fixos ( $\delta \geq 0,75$ ).

b) Cisalhamento

$V_{sd} = 112 \text{ kN}$ , portanto, tem-se:  $a_{sw,min} = 1,28 \text{ cm}^2/\text{m}$  (estribos de 2 ramos);  $\phi 6,6 \text{ c/ } 27$ .

## c) Estados limites de serviço

A verificação dos ELS para análise linear com redistribuição é feita da mesma forma que para a análise linear, pois os esforços advêm das combinações de serviço. A diferença encontra-se somente na armadura que foi dimensionada para os momentos redistribuídos. Desta forma, há a formação de fissuras, a flecha foi reduzida para 2 cm, e a abertura de fissuras na seção aumentou para 0,23 mm.

### 3.3 Análise plástica

Deseja-se, com a análise plástica, chegar à mesma disposição de armaduras que se mostrou possível por meio da análise linear com redistribuição ( $M_{2d} = M_{4d} = M_{5d}$ ). Portanto, as armaduras e o detalhamento são os mesmos. Necessita-se, no entanto, verificar a capacidade de rotação plástica da viga no apoio central e, apesar de não ser vantajoso para seções retangulares (desequilíbrio entre armaduras negativas e positivas), testar-se-á a máxima redistribuição permitida com armadura simples, e seu fator limitante.

Para melhor entendimento da análise plástica, imagina-se que as cargas  $P$  aumentem gradualmente. Dada uma viga sem problemas de concretagem, com suas seções críticas (2, 4 e 5) igualmente armadas (momentos plásticos iguais), a primeira a plastificar é a seção 2, do apoio central. Se ela tiver capacidade de acomodação plástica, origina-se um novo esquema estático, formado por dois tramos simplesmente apoiados. O momento nesse apoio passa a ser constante e igual a  $M_{2p}$ .

A força necessária para formar a primeira rótula plástica,  $P_{1r}$ , é dada na Equação 13, em função do momento fletor  $M_{2p}$  que plastifica a seção 2 (Figura 8):

$$P_{1r} = \frac{16 M_{2p}}{3L} = \frac{16 \cdot 16800}{3 \cdot 600} = 149,33 \text{ kN} \quad (13)$$

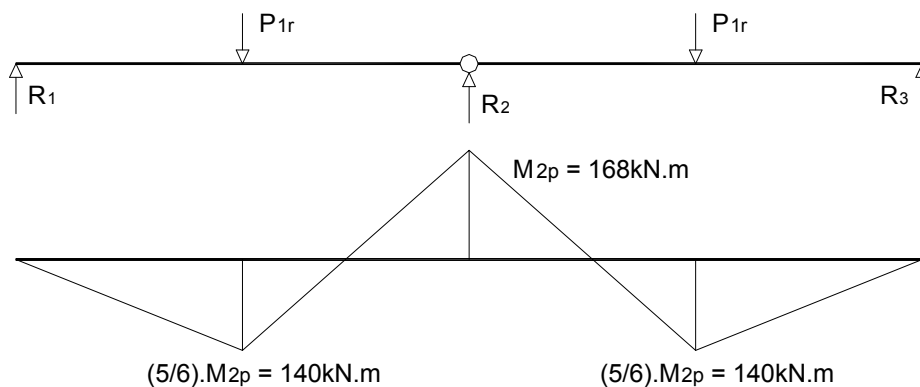


Figura 8 – Formação da primeira rótula plástica.

Mantendo-se o aumento gradual das forças  $P$  e o valor constante do momento na seção 2,  $M_{2p}$ , duas rótulas se formarão simultaneamente nas seções 4 e 5. Para tal, é necessário dar um acréscimo de força  $\Delta P_{2r}$ , à força  $P_{1r}$ , responsável, isoladamente, pelo diagrama da Figura 9.

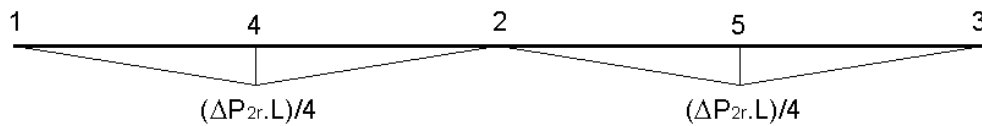


Figura 9 – Momentos fletores gerados pelo acréscimo de carga  $\Delta P_{2r}$ .

O momento de plastificação das seções 4 e 5 é, portanto, igual à soma do momento que existia, ao se formar a primeira rótula, com o causado unicamente pelo acréscimo  $\Delta P_{2r}$  (ver Equação 14). O mecanismo de colapso e o respectivo diagrama de momentos encontram-se na Figura 10.

$$M_{4p} = \frac{5 M_{2p}}{6} + \frac{\Delta P_{2r} L}{4} \quad (14)$$

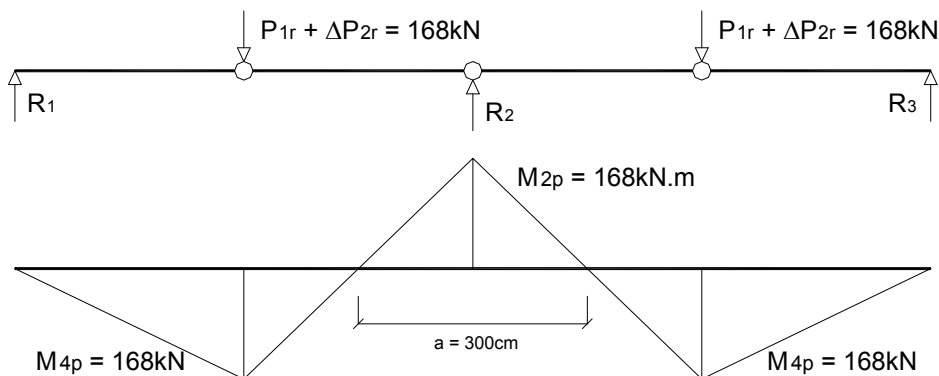


Figura 10 – Formação do mecanismo de colapso.

#### a) Rotação necessária

A soma das rotações decorrentes do acréscimo  $\Delta P_{2r}$ , à esquerda ( $\theta_{p2e}$ ) e à direita ( $\theta_{p2d}$ ) do apoio da seção 2, fornece o valor da rotação necessária  $\theta_{p2}$  nesse apoio, para a formação do mecanismo de colapso. A rotação da seção 2 é calculada elasticamente, com a consideração de uma força  $\Delta P_{2r}$  atuando no centro de uma viga biapoiada de vão  $L$ . Uma vez que o concreto já se encontra fissurado, na formação de uma rótula plástica, utiliza-se o produto de inércia  $EI$  referente ao estágio II:

$$\theta_{p2} = \theta_{p2e} + \theta_{p2d} = \frac{\Delta P_{2r} L^2}{16 EI} + \frac{\Delta P_{2r} L^2}{16 EI} = \frac{2 \cdot 18,67 \cdot 600^2}{16 \cdot 2380 \cdot 108841} = 3,24 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (15)$$

#### b) Capacidade de rotação plástica

A capacidade de rotação plástica ( $\theta_{pl}$ ) da seção 2 é calculada a partir da Figura 2, adaptada da NBR 6118:2003, que permite o uso da Equação 17, para o aço CA-50.

$$a / d = 300 / 46 = 6,52 \quad (16)$$

$$1000 \theta_{pl} = 3,5 \frac{d}{x} \sqrt{\frac{(a/d)}{6}} = 3,5 \frac{1}{0,297} \sqrt{\frac{6,52}{6}} \quad (17)$$

$$\theta_{pl} = 12,29 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (18)$$

Como  $\theta_{p2} < \theta_{pl}$ , a capacidade de rotação atende à rotação necessária à redistribuição.

### c) Máxima redistribuição

Nota-se uma folga significativa da rotação necessária, em relação à capacidade de rotação da seção 2. Com o intuito de analisar a máxima redistribuição permitida pela análise plástica, diminui-se gradativamente o coeficiente de redistribuição  $\delta$  a intervalos de 0,05 (ver Tabela 2). O valor limite encontrado foi inferior a  $\delta = 0,65$ , bem abaixo, portanto, daquele permitido por uma análise linear com redistribuição.

Tabela 2 – Maior redistribuição possível com a análise plástica

$\delta$	0,80	0,75	0,70	0,65	<b>0,60</b>
<b><math>P_{1r}</math> (kN)</b>	134,40	126,00	117,60	109,20	<b>100,80</b>
<b><math>\Delta P_{2r}</math> (kN)</b>	33,60	42,00	50,40	58,80	<b>67,20</b>
<b><math>M_{2p}</math> (kN.m)</b>	151,20	141,75	132,30	122,85	<b>113,40</b>
<b><math>A_s</math> (cm<sup>2</sup>) - Seção 2</b>	8,45	7,86	7,27	6,70	<b>6,14</b>
<b>x/d - Seção 2</b>	0,263	0,245	0,226	0,209	<b>0,191</b>
<b><math>M_{4p}</math> (kN.m)</b>	176,40	181,13	185,85	190,58	<b>195,30</b>
<b><math>A_s</math> (cm<sup>2</sup>) - Seção 4</b>	10,09	10,40	10,73	11,05	<b>11,38</b>
<b>a (m)</b>	2,77	2,63	2,50	2,35	<b>2,20</b>
<b><math>\theta_{2p}</math> (<math>\times 10^{-3}</math> rad)</b>	6,40	8,47	10,80	13,45	<b>16,50</b>
<b><math>\theta_{pl}</math> (<math>\times 10^{-3}</math> rad)</b>	13,33	13,98	14,69	15,48	<b>16,36</b>

Para  $\delta$  igual a 0,60, a rotação necessária da seção 2 é maior que a sua capacidade de rotação, e este fato impede a redistribuição de momentos até esse ponto, excetuando-se a possibilidade de utilizar armadura dupla (ver próximo exemplo). Outro fator a limitar maior redistribuição seria o ELS-W da seção 2, pois, à medida que o momento no apoio é reduzido, sua armadura de flexão também diminui. No entanto, o ELS-W continua sendo verificado com a combinação frequente de serviço. Para  $\delta = 0,60$ , obteve-se uma abertura de 0,35 mm, ainda menor que a abertura limite de 0,40 mm.

### 3.4 Consumo de aço

Com análise linear, a viga V1 apresentou um consumo de aço de 127,1 kg. Já para análise linear com redistribuição ( $\delta = 8/9$ ) e para análise plástica ( $\delta = 8/9$ ), o consumo foi de 126,5 kg, ou seja, praticamente o mesmo da análise linear.

## 4 VIGA COM SEÇÃO T

Será analisada a viga V2 do pavimento indicado na Figura 11, para as condições: análise linear e seção retangular, análise linear e seção T, análise linear com redistribuição e seção T, e análise plástica e seção T.

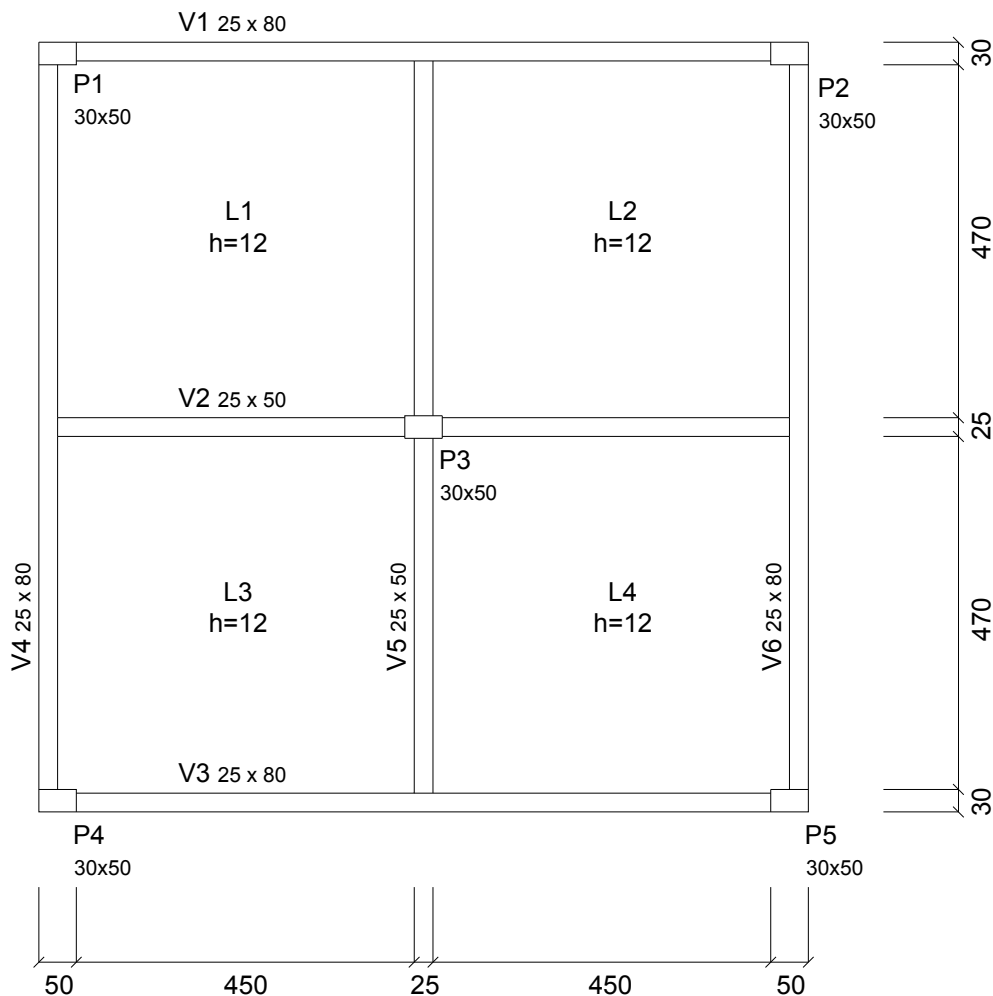


Figura 11 – Forma do pavimento.

Além dos vãos e dos carregamentos, a viga V2 tem as mesmas características descritas para a viga do exemplo anterior, inclusive com o mesmo tipo de detalhamento para as armaduras.

O revestimento da laje pesa  $1,0 \text{ kN/m}^2$ , a sobrecarga é de  $2,0 \text{ kN/m}^2$ , o pé-direito é de  $2,80 \text{ m}$  e a alvenaria sobre as vigas contribui com  $2,5 \text{ kN/m}^2$  de parede pronta.

Será analisada somente a combinação última de carregamentos  $1,4(g+q)$ . As seções 4 e 5 são as do primeiro e do segundo vão, respectivamente, em que o momento positivo é máximo.

Neste exemplo, adota-se uma estratégia de resolução diferente quanto à aplicação da redistribuição.

No exemplo anterior escolheu-se um  $\delta$  que igualasse os momentos nos vãos e nos apoios, para em seguida verificar se, dimensionando com armadura simples, a posição relativa da linha neutra  $x/d$  atendia às prescrições normativas.

Agora será imposta a redistribuição desejada e, caso a armadura simples não seja suficiente para se ter o valor necessário de  $x/d$ , será utilizada armadura dupla, a fim de diminuir a distância da linha neutra até a face comprimida.

#### 4.1 Análise linear – Seção retangular

Tem-se, para análise linear, o diagrama de momentos fletores tracejado da Figura 13. As verificações de ELU e ELS são feitas da mesma maneira que na análise linear, do exemplo anterior.

Ressalta-se apenas a importância de, no cálculo da armadura de flexão da seção 2, limitar o valor de  $x/d$  a no máximo 0,500:

$$M_{2d} = 454,93 \text{ kN.m}; x/d = 0,500; A_s = 26,90 \text{ cm}^2 (4 \phi 29,3); A'_s = 10,84 \text{ cm}^2 (4 \phi 18,6)$$

## 4.2 Análise linear – Seção T

Os esforços são os mesmos da análise linear para seção retangular. Portanto, a distância “a”, entre os pontos de momento nulo, é igual a 3,75 m. A largura colaborante  $b_f$  é dada pela Equação 19, de acordo com o item 14.6.2.2 da NBR 6118:2003.

$$b_f = b_w + 2(0,10 a) = 25 + 2(0,10 \cdot 3,75) = 100 \text{ cm} \quad (19)$$

Com a largura colaborante da viga V1, podem ser realizadas as demais verificações exigidas pela Norma, para a viga V2, na Figura 12 e nas equações 20 e 21.

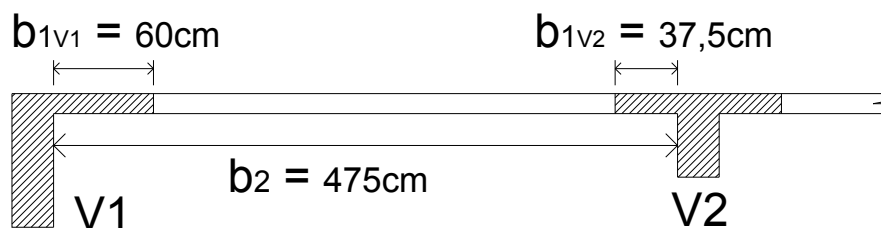


Figura 12 – Verificações exigidas pela NBR 6118:2003.

$$(b_{1v1} = 0,60 \text{ m}) < (b_2 / 2 = 2,375 \text{ m}) \rightarrow \text{ok} \quad (20)$$

$$(b_{1v2} = 0,375 \text{ m}) < (b_2 / 2 = 2,375 \text{ m}) \rightarrow \text{ok} \quad (21)$$

Nas seções 4 e 5, a linha neutra passa pela mesa da seção. Portanto, pode-se considerar, no cálculo, uma seção retangular de 100 cm x 50 cm. Já no cálculo da armadura de flexão da seção 2 e da armadura transversal, tem-se a seção retangular de 25 cm x 50 cm. Portanto, os resultados são os mesmos da análise linear com seção retangular.

$$M_{4d} = M_{5d} = 255,88 \text{ kN.m}; x/d = 0,104; A_s = 13,35 \text{ cm}^2 (4 \phi 20,6)$$

## 4.3 Análise linear com redistribuição – Seção T

O momento da seção 2 é acentuadamente maior que os momentos máximos nos vãos. Por isso, para maior aproveitamento da seção T, será utilizada a máxima redistribuição permitida pela análise linear com redistribuição, para estruturas de nós fixos, ou seja,  $\delta = 0,75$ . O valor necessário de  $x/d$  é dado pelas equações 22 e 23.

$$\delta \geq 0,44 + 1,25 (x / d) \quad (22)$$

$$x/d = (0,75 - 0,44) / 1,25 = 0,250 \quad (23)$$

Na Figura 13 tem-se o diagrama de momentos redistribuídos (linhas cheias). Os esforços cortantes também são modificados com a redistribuição de momentos.

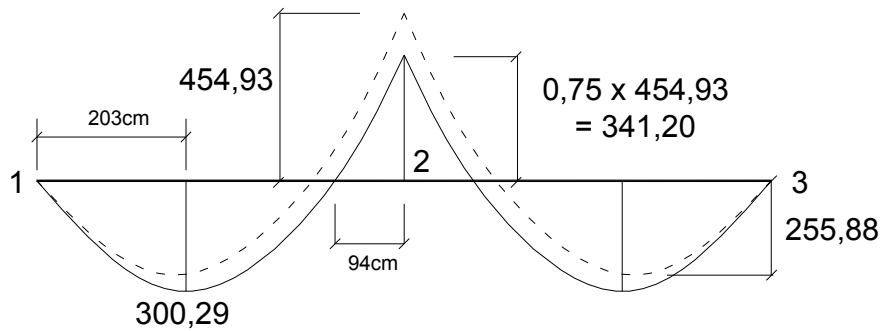


Figura 13 – Momentos fletores de cálculo para a análise linear sem e com redistribuição (kN.m).

Manteve-se o valor previamente calculado de  $b_f = 100$  cm (a favor da segurança). A seguir tem-se o dimensionamento à flexão das seções 2, 4 e 5:

$$M_{2d} = 341,20 \text{ kN.m}; x/d = 0,250; A_s = 18,80 \text{ cm}^2 (4 \phi 24,5); A'_s = 10,77 \text{ cm}^2 (4 \phi 18,5)$$

$$M_{4d} = M_{5d} = 300,29 \text{ kN.m}; x/d = 0,123 \text{ (linha neutra na mesa)}; A_s = 15,79 \text{ cm}^2 (4 \phi 22,4)$$

Os ELS foram verificados com as devidas combinações, sem redistribuição.

#### 4.4 Análise plástica – Seção T

A análise plástica pode ser feita de modo análogo à análise linear com redistribuição, apenas com uma modificação no tipo de verificação a ser feita com o valor de  $x/d$ . Uma vez reduzido o valor de  $M_2$ , tem-se o valor de  $M_{2p}$ , que será atingido com a formação da primeira rótula e permanecerá constante até a formação da segunda rótula.

$$M_{2p} = \delta M_2 \quad (24)$$

Para a viga V2, em que  $L = 5$  m e  $p_d$  é o valor de cálculo do carregamento (145,57 kN/m), a ação distribuída responsável pela formação da primeira rótula e o seu acréscimo que provoca a segunda rótula, são dados pelas equações 25 e 26, respectivamente.

$$p_{1r} = \frac{8 M_{2p}}{L^2} \quad (25)$$

$$\Delta p_{2r} = p - p_{1r} \quad (26)$$

Com a análise dos tramos isolados, tem-se os seguintes momentos para as seções 4 e 5, quando se formam as novas rótulas plásticas:

$$M_{4p} = M_{5p} = \frac{pL^2}{8} - \frac{M_{2p}}{2} + \frac{M_{2p}^2}{2pL^2} \quad (27)$$

Como no exemplo anterior, a rotação necessária na seção 2 para a formação do mecanismo de colapso é calculada com o acréscimo de carregamento  $\Delta p_{2r}$ . Devido à primeira rótula, consideram-se os dois tramos biapoiados e calculam-se as rotações à esquerda e à direita da seção 2. Para ações uniformemente distribuídas, tem-se:

$$\theta_{p2} = \theta_{p2e} + \theta_{p2d} = 2 \left( \frac{\Delta p_{2r} L^3}{24 EI} \right) \quad (28)$$

O produto de inércia  $EI$  refere-se ao estágio II. Portanto, depende da armadura calculada para a seção 2, que é decorrente do valor fixado de  $x/d$  e do valor de  $M_{2p}$ . A capacidade de rotação,  $\theta_{pl}$ , depende também do valor de  $x/d$  e da distância “a” entre pontos de momento nulo, da região que contém a seção 2. A largura  $b_f$  da seção T será mantida igual a 100 cm e a altura útil igual a 46 cm.

$$a = \frac{4 M_{2p}}{\rho L} \quad (29)$$

$$\theta_{pl} = 0,0035 \frac{d}{x} \sqrt{\frac{a/d}{6}} \quad (30)$$

A Tabela 3 traz combinações de resultados para valores pré-fixados de  $x/d$ , a partir dos quais se procura o mínimo valor possível de  $\delta$  (maior redistribuição possível), sem que  $\theta_{2p}$  ultrapasse  $\theta_{pl}$ .

Tabela 3 – Combinações de valores de  $x/d$  e  $\delta$ 

$x/d$ - Seção 2	0,150	0,170	0,190	0,210	0,230	<b>0,250</b>	0,270	0,290	0,310	0,330	<b>0,350</b>
$\delta$	0,56	0,60	0,63	0,65	0,67	<b>0,69</b>	0,71	0,72	0,73	0,74	<b>0,75</b>
$p_{1r}$ (kN/m)	81,52	87,34	91,71	94,62	97,53	<b>100,44</b>	103,35	104,81	106,27	107,72	<b>109,18</b>
$\Delta p_{2r}$ (kN/m)	64,05	58,23	53,86	50,95	48,04	<b>45,13</b>	42,22	40,76	39,30	37,85	<b>36,39</b>
$M_{2p}$ (kN.m)	-254,75	-272,94	-286,59	-295,69	-304,79	<b>-313,89</b>	-322,98	-327,53	-332,08	-336,63	<b>-341,18</b>
$A_s$ (cm <sup>2</sup> ) - Seção 2	13,81	14,83	15,62	16,17	16,73	<b>17,30</b>	17,89	18,23	18,59	18,96	<b>19,34</b>
$A'_s$ (cm <sup>2</sup> ) - Seção 2	25,10	19,40	15,49	12,53	10,41	<b>9,27</b>	9,22	8,92	8,63	8,36	<b>8,10</b>
$M_{4p}$ (kN.m)	336,45	328,67	322,90	319,07	315,28	<b>311,50</b>	307,75	305,88	304,02	302,16	<b>300,31</b>
$A_s$ (cm <sup>2</sup> ) - Seção 4	17,81	17,37	17,05	16,84	16,62	<b>16,41</b>	16,21	16,10	16,00	15,89	<b>15,79</b>
Soma das áreas de armaduras (cm <sup>2</sup> )	56,72	51,60	48,16	45,54	43,76	<b>42,98</b>	43,32	43,25	43,22	43,21	<b>43,22</b>
a (m)	1,40	1,50	1,58	1,63	1,68	<b>1,73</b>	1,78	1,80	1,83	1,85	<b>1,88</b>
$\theta_{2p}$ ( $\times 10^{-3}$ rad)	16,60	14,65	13,31	12,50	11,67	<b>10,79</b>	9,86	9,41	8,97	8,54	<b>8,12</b>
$\theta_{pl}$ ( $\times 10^{-3}$ rad)	16,62	15,18	13,92	12,79	11,85	<b>11,07</b>	10,40	9,75	9,18	8,68	<b>8,24</b>

#### 4.5 Consumo de aço

O consumo de aço é indicado na Tabela 4.

Tabela 4 – Consumo de aço

Tipo de análise	Seção transversal	Consumo (kg)	Diferença em relação à análise linear com seção retangular (%)
Análise linear	Retangular	278,2	0,0
Análise linear	T	259,7	-6,7
Análise linear com redistribuição ( $\delta = 0,75$ )	T	241,5	-13,2
Análise plástica ( $\delta = 0,69$ )	T	242,9	-12,7
Análise plástica ( $\delta = 0,75$ )	T	237,0	-14,8

## 5 REDISTRIBUIÇÃO EM PILARES E ENVOLTÓRIA DE ESFORÇOS

Será analisada, neste item, a mesma viga V2 do item anterior. Porém, agora ela será admitida apoiada em pilares nas extremidades (ver Figura 14). Os dados permanecem os mesmos, com pequenas mudanças apenas nos vãos efetivos das vigas. Além disso, considera-se que as lajes L1 e L3 estão submetidas a ações variáveis simultaneamente, ou não, bem como as lajes L2 e L4, criando três situações a serem abrangidas pela envoltória de carregamentos.

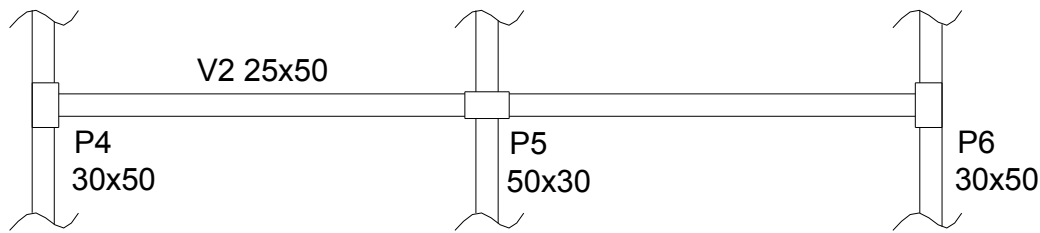


Figura 14 – Viga V2 apoiada em pilares.

Admite-se que o pavimento analisado é o último pavimento tipo. Portanto, os tramos calculados dos pilares recebem as ações provenientes da cobertura (considerada com 60% do peso de um pavimento tipo) e do próprio pavimento.

O detalhamento dos pilares foi padronizado em seis barras de diâmetro fictício, com três delas localizadas em cada uma das faces de maior dimensão da seção.

O detalhamento da viga V2 segue a padronização dos exemplos anteriores.

Foram realizadas as análises: linear e seção retangular e linear com redistribuição e seção T. Em ambos os casos, os esforços na viga V2 e nos pilares P4, P5 e P6 foram encontrados por meio do modelo de viga contínua (ver item 14.6.7.1 da NBR 6118:2003).

## 5.1 Análise linear – Seção retangular

Apresentam-se os esforços na viga V2, as respectivas armaduras, as verificações de ELS na V2, os esforços nos pilares e suas armaduras.

### a) Esforços

Tem-se na Figura 15 os esquemas estáticos para a viga V2 para os diferentes casos de carregamento, admitindo combinação última e modelo clássico de viga contínua (sem as correções).

Ao se traçar a envoltória dos momentos fletores e dos esforços cortantes, provenientes do modelo clássico, da correção de momentos negativos junto aos pilares de extremidade e da correção de momentos positivos para que não sejam menores que os obtidos com o engastamento perfeito do apoio interno, sempre para os três casos de carregamento (A, B e C), têm-se os diagramas indicados na Figura 16 e na Figura 17.

### b) Flexão

$$M_{1d} = M_{3d} = 204,90 \text{ kN.m}; x/d = 0,375; A_s = 12,05 \text{ cm}^2 (4 \phi 19,6)$$

$$M_{4d} = M_{5d} = 279,73 \text{ kN.m}; x/d = 0,562; A_s = 18,04 \text{ cm}^2 (4 \phi 24,0)$$

$$M_{2d} = 450,37 \text{ kN.m}; x/d = 0,500; A_s = 26,65 \text{ cm}^2 (4 \phi 29,1); A'_s = 10,59 \text{ cm}^2 (4 \phi 18,4)$$

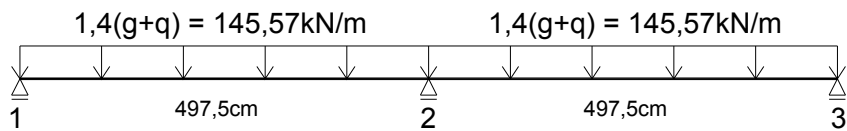
### c) Cisalhamento

Cálculo de estribos com diâmetro fictício e espaçamento máximo:

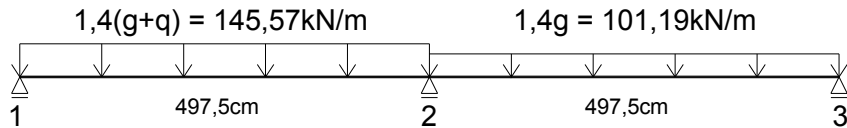
$$\text{Trechos de 147 cm: } V_{Sd, \min} = 134,66 \text{ kN} \rightarrow a_{sw}/s = 1,28 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,7 \text{ c/ } 27$$

$$\text{Trechos de 132 cm: } V_{Sd} = 271,24 \text{ kN} \rightarrow a_{sw}/s = 5,08 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 12 \text{ c/ } 22$$

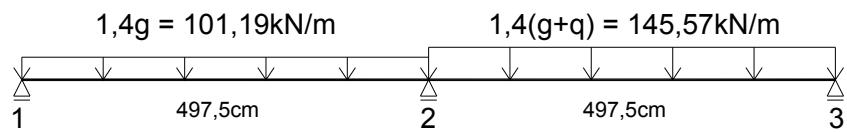
$$\text{Trecho de 437 cm: } V_{Sd} = 382,76 \text{ kN} \rightarrow a_{sw}/s = 8,17 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 12 \text{ c/ } 13$$



(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C

Figura 15 – Casos de carregamento (valores de cálculo).

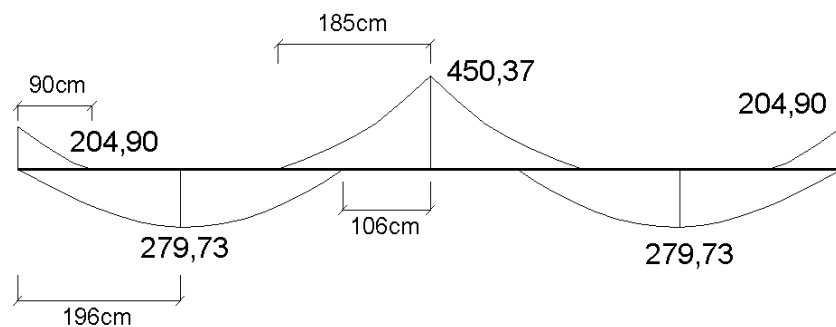


Figura 16 – Envolvória de momentos fletores (kN.m).

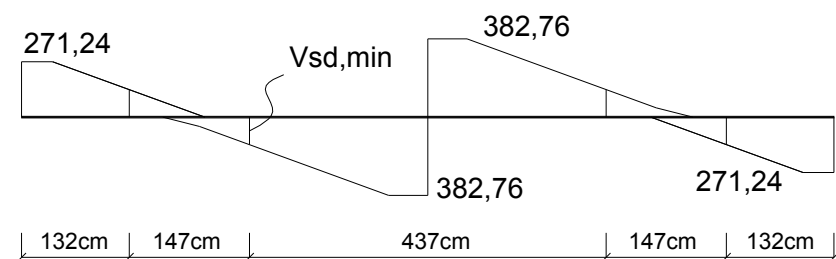


Figura 17 – Envolvória de esforços cortantes (kN).

## d) Verificações de ELS

Os esforços necessários à verificação de ELS são calculados com as mesmas considerações feitas para o ELU, porém utilizando as devidas combinações de carregamento para os casos A, B e C.

Para ELS-F (combinação rara), alternam-se, nos tramos, os carregamentos  $g+q = 103,98 \text{ kN/m}$  e  $g = 72,28 \text{ kN/m}$ : há formação de fissuras.

Para ELS-DEF (combinação quase permanente) alternam-se, nos tramos, os carregamentos  $g+0,3q = 81,79 \text{ kN/m}$  e  $g = 72,28 \text{ kN/m}$ : resulta flecha total  $a_t = 1,62 \text{ cm}$ .

Para ELS-W (combinação frequente), alternam-se os carregamentos  $g+0,4q = 84,96 \text{ kN/m}$  e  $g = 72,28 \text{ kN/m}$ : resulta  $w = 0,16 \text{ mm}$ , na seção 2.

#### e) Esforços nos pilares P4 e P6 e suas armaduras

Estes dois pilares estão submetidos à flexão normal composta, pois absorvem momento advindo da flexão da viga V2. No tramo analisado, ou seja, o do último pavimento tipo, tem-se um momento de topo transmitido pela V2 do último pavimento tipo e um momento de base transmitido pela V2 do penúltimo pavimento tipo, cujos valores são iguais.

$$M_{\text{topo}} = M_{\text{base}} = M_{\text{eng}} \cdot \frac{3r_{\text{inf}} (\text{ou } 3r_{\text{sup}})}{3r_{\text{sup}} + 3r_{\text{inf}} + 4r_{\text{vig}}} = 102,45 \text{ kN.m} \quad (31)$$

O esforço normal (reação de apoio) vem das envoltórias de carregamento das vigas V2 e V4, no caso do P4, e das vigas V2 e V6, no caso do P6, além de seus pesos próprios. A seguir, indicam-se os esforços considerados e as respectivas armaduras, em que  $x$  é a direção da menor dimensão da seção:

$$N_d = 1060 \text{ kN}; M_{dx} = 102,45 \text{ kN.m}; A_s = 6 \text{ cm}^2 (\phi_\ell = 11,3 \rightarrow \text{armadura mínima})$$

$$\text{Estribos} \rightarrow \phi_t = 5,0 \text{ c/ } 13$$

#### f) Esforços no pilar P5 e suas armaduras

O esforço normal (reação de apoio) no P5 vem das envoltórias de carregamento das vigas V2 e V5 e de seu peso próprio. Os esforços considerados e as respectivas armaduras são:

$$N_d = 2928 \text{ kN}; M_{dx} = 70,27 \text{ kN.m} (\text{excentricidade mínima}); A_s = 30,19 \text{ cm}^2 (\phi_\ell = 25,3)$$

$$\text{Estribos} \rightarrow \phi_t = 6,3 \text{ c/ } 20$$

## 5.2 Análise linear com redistribuição – Seção T

O intuito deste exemplo, além de mostrar a redistribuição de momentos nos pilares, é mostrar particularidades da redistribuição realizada com a consideração de uma envoltória de carregamentos. A NBR 6118:2003 alerta: “Cuidados especiais devem ser tomados com relação a carregamentos de grande variabilidade”, porém não fornece diretrizes acerca do assunto.

#### a) Esforços

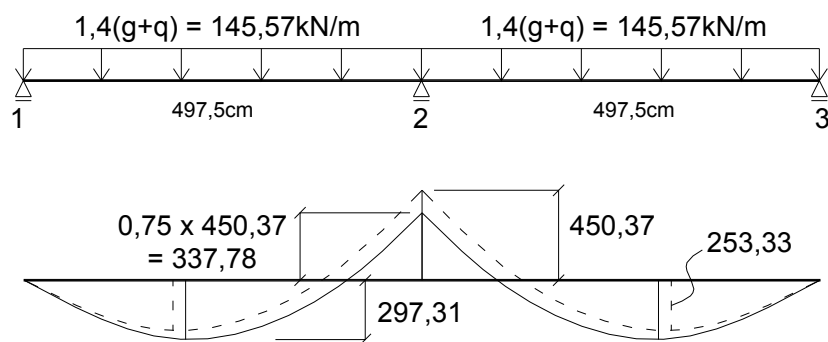
Park & Paulay (1975) indicam como realizar alguns ajustes, que serão explicados ao mesmo tempo em que forem aplicados neste exemplo. O procedimento consiste em fazer descer a curva de momentos fletores do caso A, que apresenta o máximo momento nos apoios, e fazer subir a curva de momentos fletores dos casos B ou C, que apresentam o máximo momento nos vãos. A mesma porcentagem é aplicada aos picos de momentos negativos, para ambas operações, sempre mantendo o equilíbrio estático.

A redução dos momentos nos apoios do caso A será de 25% ( $\delta = 0,75$  – máxima redistribuição para melhor aproveitar a seção T), o que define o pico do novo momento. O aumento dos momentos

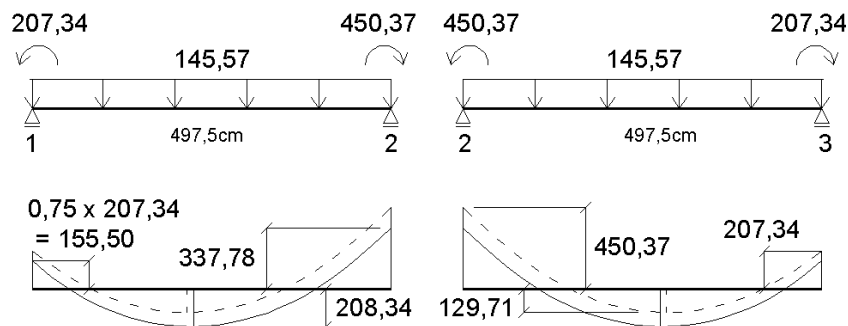
nos apoios, do caso B ou C, deve ser também de 25%, ou até o novo pico definido com a redução da curva do caso A, o que for menor. Esse acréscimo define os momentos negativos fora das seções onde ocorrem os picos. A seção T foi calculada, na equação 32, com a distância "a" entre pontos de momentos nulos advinda da análise linear (ver Figura 16). Após a redistribuição, notar-se-á a possibilidade de ter um  $b_f$  maior. No entanto, essa diferença é pequena e não prejudica a segurança.

$$b_f = b_w + 2(0,10 a) = 25 + (2 \cdot 0,10 \cdot 392) = 103 \text{ cm} \quad (32)$$

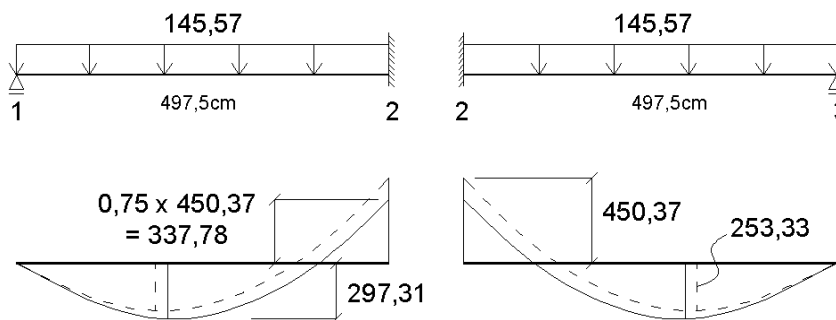
Com a mudança de inércia, da seção retangular para a T, mudaram também os momentos corrigidos nos apoios, junto aos pilares extremos solidários à viga V2. Na análise com as combinações de serviço, essa mudança de inércia não altera, neste caso, os momentos máximos nos apoios e nos vãos, que são utilizados para a verificação dos ELS. A Figura 18 mostra a redução de 25% dos picos de momento nos apoios para o caso A, e a conseqüente correção dos momentos nos vãos.



(a) Modelo clássico de vigas contínuas



(b) Correção do momento negativo devido à solidariedade com os pilares de extremidade



(c) Correção do momento positivo devido ao engastamento perfeito do apoio interno

Figura 18 – Redução de 25% nos picos de momentos nos apoios do caso A.

Para os casos B e C, nota-se não ser possível aumentar os momentos nos apoios em 25%, uma vez que há a limitação do pico do momento de projeto encontrado com a redução do caso A. Devido a essa limitação, os momentos chegam até mesmo a ser reduzidos, em algumas seções.

Quanto aos momentos nos vãos, têm-se as seguintes prescrições:

- Caso A: o máximo momento nos vãos, calculado antes da redução dos picos de momento nos apoios, deve sofrer um aumento de no mínimo o acréscimo encontrado com a correção dos momentos positivos, após essa redução dos picos, definindo assim o chamado momento de projeto;

- Casos B e C: o máximo momento nos vãos, calculado antes da elevação dos picos de momento nos apoios, deve sofrer uma redução de no máximo o decréscimo encontrado com a correção dos momentos positivos, após esta elevação dos picos, ou até chegar ao momento de projeto, o que for menor.

Os diagramas de momentos fletores e de esforços cortantes a serem utilizados no dimensionamento, com a redistribuição, são apresentados na Figura 19 e na Figura 20, respectivamente.

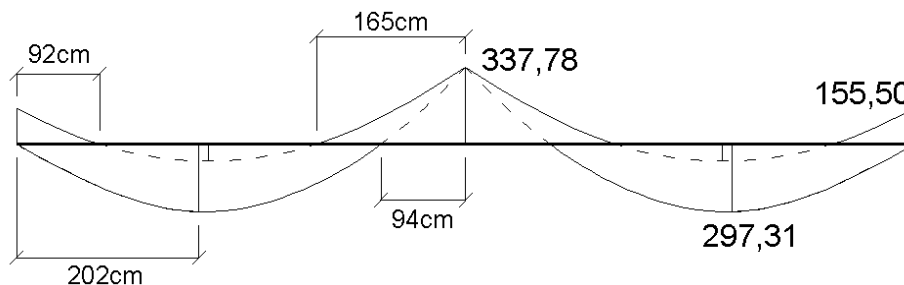


Figura 19 – Envoltória de momentos fletores (kN.m).

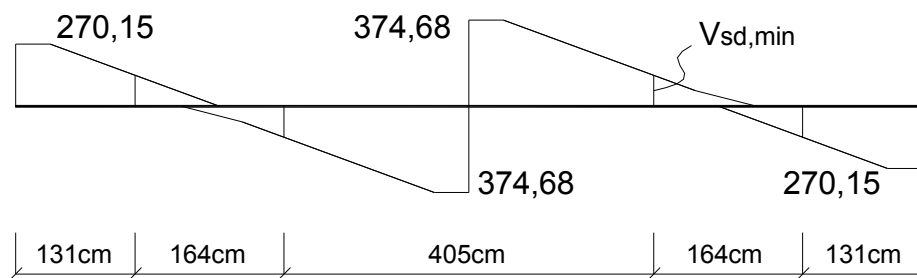


Figura 20 – Envoltória de esforços cortantes (kN).

#### b) Flexão

Nas seções 1, 2 e 3, foi utilizado o valor de  $x/d$  que permite a redistribuição com  $\delta = 0,75$ :

$$M_{1d} = M_{3d} = 155,50 \text{ kN.m}; x/d = 0,250; A_s = 8,63 \text{ cm}^2 (4 \phi 16,6); A'_s = 0,60 \text{ cm}^2 (4 \phi 4,4)$$

$$M_{2d} = 337,78 \text{ kN.m}; x/d = 0,250; A_s = 18,61 \text{ cm}^2 (4 \phi 24,3); A'_s = 10,58 \text{ cm}^2 (4 \phi 18,4)$$

Nas seções 4 e 5, pode-se considerar uma seção retangular de 103 cm x 50 cm, já que com essa hipótese a linha neutra encontra-se na mesa da seção T:

$$M_{4d} = M_{5d} = 297,31 \text{ kN.m}; x/d = 0,118; A_s = 15,60 \text{ cm}^2 (4 \phi 22,3)$$

## c) Cisalhamento

Cálculo dos estribos com diâmetro fictício e espaçamento máximo:

Trechos de 164 cm:  $V_{Sd,min} = 134,66 \text{ kN} \rightarrow a_{sw}/s = 1,28 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi \text{ 6,7 c/ 27}$

Trechos de 131 cm:  $V_{Sd} = 270,15 \text{ kN} \rightarrow a_{sw}/s = 5,05 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi \text{ 12 c/ 22}$

Trecho de 405 cm:  $V_{Sd} = 374,68 \text{ kN} \rightarrow a_{sw}/s = 7,95 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi \text{ 12 c/ 14}$

## d) Verificações de ELS

O momento de fissuração é um pouco modificado devido à maior inércia da seção T. Porém, continua a haver fissuras. Houve uma redução de 18,5% na flecha, que passou a ser  $a_t = 1,32 \text{ cm}$ . A abertura de fissura, na seção 2, passou a ser  $w = 0,22 \text{ mm}$ .

## e) Esforços nos pilares P4 e P6 e suas armaduras

No nó pertencente à interseção da extremidade da viga com o pilar extremo (ver Figura 21), há a necessidade de haver o equilíbrio dos momentos que nele atuam.

Com a redistribuição dos momentos e a utilização da seção T, o  $M_{vig}$  passou de 204,90 kN.m para 155,50 kN.m. O  $M_{sup}$  e o  $M_{inf}$  assumem proporções do valor de  $M_{vig}$ , de acordo com a rigidez dos tramos superior e inferior do pilar ( $r_i = I_i/\ell_i$ ):

$$M_{sup} = M_{inf} = M_{vig} \frac{r_{sup}}{r_{sup} + r_{inf}} = 155,50 \cdot 0,5 = 77,75 \text{ kN.m} \quad (33)$$

Os esforços considerados e as armaduras obtidas são:

$N_d = 1058 \text{ kN}$ ;  $M_{dx} = 77,75 \text{ kN.m}$ ;  $A_s = 6 \text{ cm}^2$  ( $\phi_\ell = 11,3 \rightarrow$  armadura mínima)

Estribos  $\rightarrow \phi_t = 5,0 \text{ c/ 13}$

## f) Esforços no pilar P5 e suas armaduras

$N_d = 2856 \text{ kN}$ ;  $M_{dx} = 68,54 \text{ kN.m}$  (excentricidade mínima);  $A_s = 27,72 \text{ cm}^2$  ( $\phi_\ell = 24,3$ )

Estribos  $\rightarrow \phi_t = 6,3 \text{ c/ 20}$

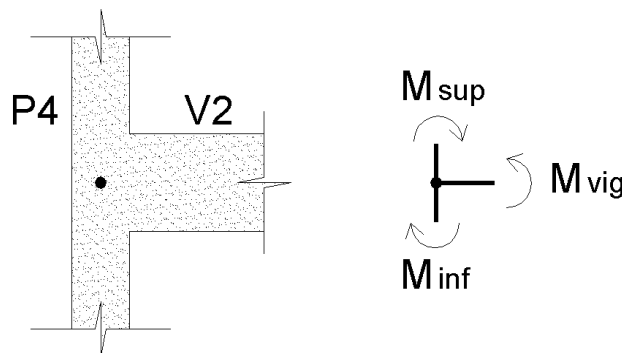


Figura 21 – Equilíbrio do nó de extremidade da V2 com o P4.

### 5.3 Consumo de aço

Somando-se os consumos de aço, obtidos nos itens anteriores, com o detalhamento dos pilares e da viga, têm-se os valores indicados na Tabela 5.

Tabela 5 – Consumo de aço (kg)

	Análise Linear + Seção Retangular	Análise Linear c/ Redistribuição + Seção T	Diferença (%)
<b>Pilares (P4 + P5 + P6)</b>	158,8	149,7	5,7
<b>Viga (V2)</b>	343,9	275,7	19,8
<b>Pilares + Viga</b>	502,7	425,4	15,4

## 6 CONCLUSÕES

No exemplo do item 3, a análise linear com redistribuição e a análise plástica se mostraram simples de utilizar, dado que a estrutura também era simples. Nos casos de pórticos planos ou de estruturas mais complexas, ambas as análises passam a exigir programas computacionais, que sejam capazes de mostrar como se redistribuem os esforços, uma vez reduzidos os picos de momentos.

No exemplo com a seção retangular, a economia de armadura, que foi de apenas 0,46%, não constitui atrativo para a utilização de outro tipo de análise que não a linear. No entanto, há que se ponderar outras vantagens, entre as quais se destaca a possibilidade de distribuir melhor as armaduras ao longo da viga, evitando assim o acúmulo de barras em uma mesma seção.

Com a redistribuição, as flechas passam a ser menores, já que a transferência de momentos provoca o aumento da armadura nos vãos. Por outro lado, a importância da verificação da abertura de fissuras nos apoios passa a ser maior, já que nesses pontos a armadura diminui. A análise plástica mostrou ser grande a capacidade de reduzir os momentos nos apoios, com o valor de  $\delta$  chegando até quase 0,60, nesse exemplo.

No exemplo do item 4, a seção T permitiu maior economia de armadura, ao ser combinada com o aumento de momentos fletores nos vãos, proveniente de redistribuição, tanto para análise linear com redistribuição como para análise plástica, com as quais a economia de armadura ficou entre 12 e 15%. Somente com análise linear e seção T, a economia já foi próxima de 7%, em relação à análise linear com seção retangular. A análise plástica, para um mesmo valor de  $x/d$  (0,250), permitiu maior redistribuição que a análise linear com redistribuição. Em termos de economia de armadura, a diferença entre a análise plástica e a análise linear com redistribuição foi inferior a 2%.

Na Tabela 3, vê-se que, para menores valores de  $x/d$ , maior é a capacidade de redistribuição, ou seja, menor é o valor de  $\delta$ . A menor área de armadura é dada para  $x/d = 0,25$  e  $\delta = 0,69$ . No entanto, apesar da pequena diferença, a análise plástica com  $\delta = 0,75$  apresentou um menor consumo de armadura, pois exige uma menor área de armadura nos vãos, que, devido à sua necessidade de ancoragem nos apoios, acaba por ter maior comprimento e influencia o consumo total de aço, de maneira mais incisiva. Alerta-se, portanto, para a necessidade de estudar, caso a caso, qual par de valores de  $x/d$  e de  $\delta$  fornece o menor consumo de armadura. A análise linear com redistribuição permite menores redistribuições do que a plástica, porém a utilização da análise linear é mais simples.

No exemplo do item 5 mostrou-se que, apesar da força normal nos pilares permanecer praticamente a mesma com a redistribuição, há uma redução nos momentos fletores desses elementos, propiciando uma pequena economia de armadura. No pórtico e no pavimento analisados,

obteve-se uma economia de armadura de 5,7% para os pilares, 19,8% para a viga e 15,4% para o conjunto de ambos.

Na consideração da envoltória, se a relação entre o carregamento variável e o permanente fosse maior, no exemplo realizado, os valores máximos dos momentos positivos também seriam maiores. Isso propiciaria a redução desses momentos, com os ajustes propostos para a análise da envoltória de carregamentos, e maior economia em relação a uma análise linear com essa mesma relação.

## 7 AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de mestrado.

## 8 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2003** – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro.

FONTES, F. F. **Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

LEONHARDT, F.; MONNIG, E. **Construções de concreto**: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro: Interciência. 1977, v. 1.

LEONHARDT, F.; MONNIG, E. **Construções de concreto**: verificação da capacidade de utilização. Rio de Janeiro: Interciência, 1979. v. 4.

MORETTO, O. **Curso de hormigón armado**. 2.ed. Buenos Aires: Libreria “EL ATENEO”, 1970.

PARK, R.; PAULAY, T. **Reinforced concrete structures**. New York: John Wiley & Sons, 1975.

PRADO, J. F. M. A.; GIONGO, J. S. Redistribuição de momentos fletores em vigas de edifícios. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 28., São Carlos, set., 1977. **Anais...** p.1555-1564.



## ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE VIGAS DE CONCRETO ARMADAS COM BARRAS NÃO METÁLICAS DE GFRP

Danusa Haick Tavares<sup>1</sup> & José Samuel Giongo<sup>2</sup>

### Resumo

*Com a substituição de barras de aço por barras não metálica se procura aumentar a durabilidade de estruturas sujeitas à corrosão e a campos eletromagnéticos. Mas, a inserção de um novo material na construção civil demanda especificação de sua composição, comportamento e procedimentos para sua utilização. Este trabalho analisa o comportamento à flexão de vigas de concreto armadas com barras não metálicas. Para esta finalidade foi realizada revisão bibliográfica considerando os trabalhos publicados desde o início das pesquisas até os mais recentes e ensaios dos materiais e de vigas de concreto armado. Os ensaios para a determinação das propriedades das barras da armadura não metálica de GFRP (glass fiber polymer – polímero reforçado com fibra de vidro) englobam a determinação do diagrama tensão-deformação e da capacidade resistente. As vigas armadas com barras de GFRP foram ensaiadas à flexão em quatro pontos e os resultados foram comparados com o de uma viga armada com barras de aço CA-50 também ensaiada a flexão. Nos modelos pôde-se perceber a influência das propriedades das barras de GFRP no comportamento geral da estrutura. Por exemplo, as grandes deformações nas barras longitudinais e os deslocamentos dos modelos foram determinados pelo pequeno módulo de elasticidade das barras de GFRP. É evidente a necessidade de continuação dos estudos envolvendo barras de GFRP. Estas pesquisas poderão desenvolver meios de se utilizar as propriedades do material em favor do melhor funcionamento da estrutura.*

*Palavras-chave: FRP. GFRP. Armadura não metálica. Vigas de concreto armadas com FRP. Flexão de vigas de GFRP.*

## THEORETICAL AND ANALYTICAL ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH GFRP REBARS

### Abstract

*The use of non-metallic re-bars is due to their improvement in the durability in structures exposed to corrosion and electro-magnetic fields. However, a new material in the civil engineering industry demands specifications related to its composition, behavior and design procedures. This paper is an analysis of non-metallics reinforced concrete beams flexural behavior. A summarized state-of-art is presented with results from the material and beams experimental program. The re-bars material GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer) definition tests enabled the determination of the stress-strain behavior and the strength capacity. A four points flexion test was applied to the GFRP re-bars reinforced concrete beams and their response was compared to a beam reinforced with CA-50 steel re-bars also submitted to the test. The testes show the GFRP re-bars influence in the general behavior of the beams. For example, it can be seen that the high strain in the re-bars and the high displacements of the beams are caused by the low elastic modulus of the GFRP. This study is pioneer in the department. The need to continue the research to enable the use of these unique properties in favor of a better structural behavior is evident.*

*Keywords: FRP. GFRP. Non-metallic re-bars. FRP reinforced concrete beams. GFRP reinforced concrete beams in flexion.*

<sup>1</sup> Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, danusaht@sc.usp.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, jsgiongo@sc.usp.br

## 1 INTRODUÇÃO

Em estruturas de concreto armado existem muitos problemas relativos ao custo de manutenção e vida útil em virtude de problemas relacionados à durabilidade. A utilização de barras não metálicas pode amenizar esse problema para algumas estruturas como as de construções litorâneas, pontes, metrô e muros de contenção de taludes.

Muitas cidades e capitais são localizadas no litoral brasileiro. Uma das principais razões de manutenção de algumas estruturas é a corrosão da armadura metálica. Essa é uma das possíveis aplicações das barras de FRP. Além disso, existem problemas relatados de corrosão da armadura metálica causada por ondas eletromagnéticas nos metrô, outra possível aplicação das barras de FRP.

Essas armaduras consistem de um compósito formado por fibras impregnadas com resina, as FRP (fiber reinforced polymer). As barras possuem propriedades que favorecem a sua utilização como armadura de estruturas expostas a intempéries capazes de prejudicar o desempenho da armadura metálica em estruturas de concreto armado.

Participar do início das pesquisas desta nova tecnologia é um privilégio. Desenvolver uma dissertação, cujo tema é inédito no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos pode proporcionar o desenvolvimento de trabalhos futuros, aprofundando e ampliando estudos nessa área. Para este estudo específico, foram utilizadas as barras de GFRP (glass fiber reinforced polymer) em vigas de concreto armadas. E as análises foram voltadas para as tensões normais em vigas.

## 2 OBJETIVO

Os objetivos deste trabalho foram:

- estudar barras de armaduras não metálicas, especificamente, barras de fibra de vidro polimerizadas, as GFRP, centrando este estudo no seu comportamento quando submetida a tensões normais;

- analisar o comportamento de vigas simplesmente apoiadas armadas com armadura de GFRP comparando com uma viga de referência armada com barras de aço com as mesmas propriedades geométricas;

E, como objetivo secundário esta pesquisa abre precedentes para outros trabalhos, com o fim maior de viabilizar a utilização das barras de GFRP como alternativa para soluções estruturais em concreto armado.

## 3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 3.1 Compósito de FRP

Segundo o ACI 440R-96, a barra de fibra de vidro polimerizada em particular é um compósito formado por uma matriz de polímero com a fibra de vidro com uma alta razão entre raio e comprimento. No caso das armaduras contínuas de GFRP, as fibras devem ser contínuas e mais rígidas e resistentes que a matriz. Portanto se trata de um tipo de compósito, no sentido macroestrutural da palavra.

### 3.1.1 Matriz polimérica

O polímero no compósito de GFRP permite a transferência de tensões entre as fibras e para a estrutura ao redor e protege as fibras de danos mecânicos e causados pelo ambiente. A Figura 1 esquematiza a distribuição de um compósito de FRP, sendo o agente de aderência na interface normalmente uma proteção extra às fibras.

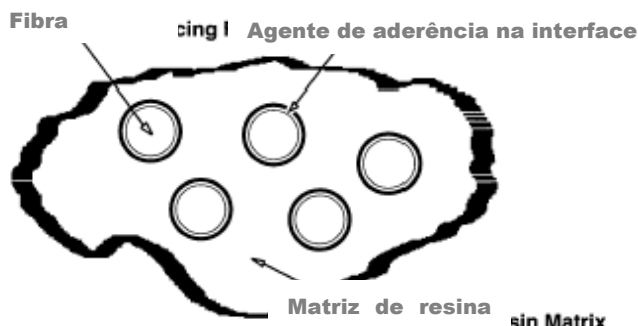


Figura 1 – Compósito de GFRP. Fonte ACI 440.1R-03.

As matrizes utilizadas na produção das barras não metálicas são, na sua maioria, as termoestáticas pela maior facilidade de manuseio dessas resinas, pois ao contrário das termoplásticas, essas resinas são manuseadas em estado líquido viscoso. Nesse estado é possível obter boa impregnação das fibras. Dentre as resinas termoestáticas as resinas mais utilizadas, cujas propriedades estão descritas na Tabela 1, são as de poliéster, vinil éster e as de epóxi (UOMOTO *et al.* 2002).

Tabela 1 – Propriedades das matrizes poliméricas do compósito de FRP. FIB 9.3 TG (2003)

Propriedades	Matriz		
	poliéster	epóxi	vinil éster
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	1200-1400	1200-1400	1150-1350
Resistência a tração (MPa)	34,5-104	55-130	73-81
Módulo longitudinal (GPa)	2,1-3,45	2,75-4,10	3,0-3,5
Coefficiente de Poisson	0,35-0,39	0,38-0,40	0,36-0,39
Coefficiente de expansão térmica (10 <sup>-6</sup> /°C)	55-100	45-65	50-75
Conteúdo da mistura (%)	0,15-0,60	0,08-0,15	0,24-0,30

### 3.1.2 Fibra de vidro

O comportamento estrutural da fibra submetida a uma força de tração é elástico linear, sem apresentar fadiga em ambientes secos. As fibras reagem com a água e sua superfície é extremamente reigente. Desse modo, as fibras de vidro podem facilmente ser danificadas durante o manuseio, por isso um filme protetor é aplicado e esse filme também aumenta o poder de adesividade da fibra. Essa susceptibilidade ao meio ambiente deve ser levada em consideração mesmo depois das fibras estarem envolvidas com o polímero, pois qualquer falha no processo de produção pode acarretar danos nos produtos (ACI 440R-96). A Figura 2 mostra a maneira como a fibra de vidro utilizada na fabricação das barras de GFRP é fornecida.

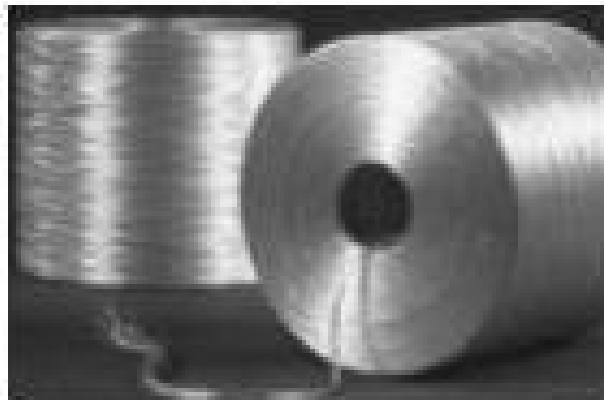


Figura 2 – Fibra de vidro em forma de fio. ACI 440R-96.

Levando em consideração o custo em relação ao benefício da utilização da fibra de vidro, esta tem sido a mais utilizada pela indústria da construção civil. As fibras comercialmente disponíveis mais utilizadas para formação das GFRP são as fibras de vidro-S, vidro-E e vidro álcali resistente (FIB TG 9.3, 2003), cujas propriedades estão descritas na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades das diversas fibras de vidro utilizadas nas barras de GFRP. Adaptado da FIB TG 9.3 - 2003

Tipo de fibra	Densidade	Resistência à tração	Módulo de Young	Deformação última	Coefficiente de expansão térmica	Coefficiente de Poisson
	kg/m <sup>3</sup>	MPa	GPa	%	10 <sup>-6</sup> /°C	
Vidro-E	2500	3450	72,4	2,4	5	0,22
Vidro-S	2500	4580	85,5	3,3	2,9	0,22
Vidro álcali resistente	2270	1800-3500	70-76	2,0-3,0	-	-

### 3.2 Barras de FRP

A utilização de todo material estrutural é intimamente relacionada com as suas propriedades físicas e mecânicas. Para as barras de FRP as variáveis envolvidas incluem a escolha dos constituintes, o volume da fração de fibra e matriz, a orientação das fibras e o processo de produção. Efeitos dimensionais e o controle de qualidade na produção também representam importantes fatores na determinação das propriedades das barras. Estas propriedades são sujeitas também às condições de carregamento, temperatura e umidade da estrutura em questão.

A Tabela 3 resume as principais propriedades de um tipo de barra de GFRP, lembrando que a mudança da fibra ou da resina constituinte pode modificar as propriedades. Essa variabilidade sugere a necessidade de padronização dos processos produtivos e dos materiais utilizados.

Tabela 3 – Propriedades das barras de GFRP formadas de fibra de vidro–E. FIB TG 9.3 (2003)

Propriedade	Vidro – E/ Epóxi
Fração do volume de fibras	0,55
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	2100
Módulo longitudinal (GPa)	39
Módulo transversal (GPa)	8,6
Módulo de cisalhamento no plano (GPa)	3,8
Coefficiente de Poisson maior	0,28
Coefficiente de Poisson menor	0,06
Resistência à tração longitudinal (MPa)	1080
Resistência à tração transversal (MPa)	39
Resistência ao cisalhamento no plano (MPa)	89
Deformação última à tração longitudinal (%)	2,8
Deformação última à tração transversal (%)	0,5
Resistência à compressão longitudinal (MPa)	620
Resistência à compressão transversal (MPa)	128

### 3.3 Aplicações

A aplicação das barras de FRP é na substituição das armaduras de aço em estruturas de concreto armado, tornando-se uma alternativa com propriedades semelhantes, e algumas vantagens: maior durabilidade, menor massa, e a não existência de campo eletromagnético. Dependendo da região do mundo, os estudos de FRP foram iniciados por diversos motivos. A Figura 3 exemplifica os motivos do estudo desta alternativa de armadura nos vários países nos quais foi implementada.



Figura 3 – Motivação do início dos estudos das armaduras de FRP. Adaptado da apresentação de Pilakoutas (2000).

Entre as principais aplicações podem ser citadas:

- viga de pontes;
- reforço de taludes;
- armadura de túneis;
- armadura em ambientes marinhos;
- talude de Pontes;
- reforço de estruturas de concreto armado;
- estruturas magneticamente inertes.

### 3.4 Dimensionamento de vigas armadas com barras de FRP

#### 3.4.1 Estado Limite Último

As hipóteses do Estado Limite Último trata das condições estruturais para evitar a ruína da estrutura. Para atender às condições impostas, os esforços solicitantes, são majorados e a capacidade resistente dos materiais que compõem o elemento estrutural é minorada, e a Equação (1) entre resistência e solicitação de cálculo precisa ser satisfeita.

$$R_d \geq S_d \quad (1)$$

As solicitações de cálculo  $S_d$  são obtidas, majorando as ações com um fator de segurança denominado  $\gamma_f$  e a partir delas calculados os esforços solicitantes de cálculo. Já a resistência de cálculo é obtida pela minoração da capacidade resistente de cada material dependendo das propriedades individuais de cada componente, do ambiente em que a estrutura será inserida e a função para a qual está sendo projetada. O concreto, assim como na ABNT NBR 6118:2003, é minorado pelo mesmo coeficiente  $\gamma_c$ . Já o coeficiente  $\gamma_s$  do aço é substituído por outro calculado a partir das propriedades da barra de FRP.

##### 3.4.1.1 Coeficiente de segurança da barra de FRP ( $\gamma_{FRP}$ )

A durabilidade de estruturas de concreto armadas com FRP depende de fatores diferentes, ou de tratamento diferenciado aos mesmos fatores das estruturas armadas com armadura metálica. Fatores como a corrosão da armadura não são mais relevantes, mas outros como a durabilidade e a proteção da fibra têm papel importante na manutenção das propriedades das barras de FRP e, portanto, na vida útil da estrutura como um todo. É importante salientar que sendo uma tecnologia ainda nova, os fatores de segurança são ainda muito altos, o que remonta à necessidade de pesquisas na área. A Equação (2) mostra a forma de cálculo da capacidade resistente das barras de FRP, sendo que  $f_{fid}$  é a resistência de dimensionamento da armadura,  $f_{fic}$  é a resistência nominal da armadura,  $\gamma_{FRP}$  é o coeficiente de segurança da armadura de FRP. A ação do ambiente nas fibras da barra ( $\Delta f_{f,amb}$ ,  $\eta_{vu}$ ), a umidade relativa do ambiente ( $\eta_U$ ) e temperatura média anual da região onde a estrutura é inserida ( $\eta_T$ ) são os fatores considerados no cálculo do coeficiente de segurança.

$$\begin{aligned} f_{fid} &= f_{fic} \cdot \gamma_{FRP} \\ \gamma_{FRP,t} &= (1 - \Delta f_{f,amb} \cdot \eta_U \cdot \eta_T \cdot \eta_{vu}) \end{aligned} \quad (2)$$

### 3.4.1.2 Dimensionamento

As estruturas convencionais de concreto armado com barras de aço são dimensionadas segundo a ABNT NBR 6118:2003 para que a barra de aço entre em escoamento. As barras de FRP não apresentam escoamento.

Em estruturas armadas com FRP são dois os tipos de ruína possíveis: ruptura da barra de FRP e ruptura do concreto.

A ruína balanceada, que inclui os dois tipos é a mais econômica, mas garantir a sua ocorrência é difícil, pois trabalhar com concreto armado é saber diferenciar a teoria e a prática no que se refere ao seu comportamento. Portanto, a melhor situação de dimensionamento é aquela em que a ruína ocorre por ruptura do concreto na fibra mais comprimida, pois a ruína em virtude da ruptura da barra de FRP é extremamente frágil, brusca e repentina.

O dimensionamento proposto pela FIB TG 9.3-2003 é baseado no Eurocode 2 (1990), que, de modo geral é semelhante ao dimensionamento proposto pela ABNT NBR 6118:2003. Para barras de GFRP, o dimensionamento é baseado no controle das suas deformações. A Figura 4 mostra o comportamento de uma seção transversal submetida a tensões normais de uma viga armada com barras de GFRP.

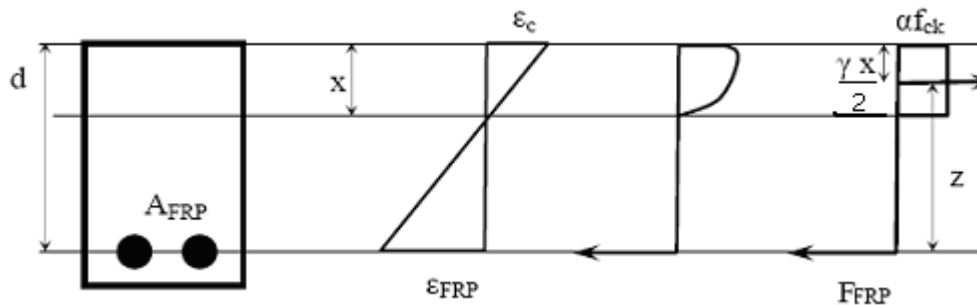


Figura 4 – Diagrama de tensão do concreto armado com FRP. Adaptado da FIB 9.3 TG (2003).

### 3.4.1.3 Estado Limite de Serviço

A verificação dos estados limites de serviço não pode ser a mesma que a seguida para elementos armados em aço. A diferença de rigidez entre esses materiais torna o comportamento em serviço diferente. Para elementos de concreto iguais armados com a mesma área de armadura de aço e FRP, após o carregamento o elemento armado com barras de FRP apresentará uma maior deformação e maior abertura de fissuras (Thériault *et al.*, 1998 e Masmoudi *et al.*, 1998).

## 4 INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL

Posteriormente a análise teórica do comportamento de seções transversais armadas com barras de FRP, a pesquisa se estendeu para a fase experimental com os ensaios de seis vigas de concreto. O programa experimental contemplou a realização das seguintes etapas:

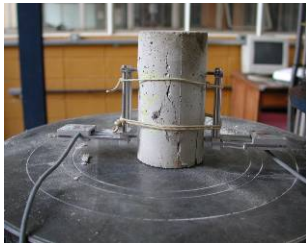
- ensaios para determinar as propriedades dos materiais: cimento, agregados, barras de aço e de GFRP. A Figura 5 mostra um dos corpos-de-prova de barra de GFRP ensaiados a tração direta;



Figura 5 – Ensaio de tração direta das GFRP.

- ensaios preliminares para dosagem do concreto: resistência à compressão e a tração, módulo de deformação longitudinal e consistência;

- ensaios de seis corpos-de-prova cilíndricos de 100 mm de diâmetro e 200 mm de altura, por série de concretagem, para controle da resistência e determinação do módulo de elasticidade dos concretos dos modelos. A Figura 6 mostra os ensaios de compressão direta e de tração por compressão diametral realizados nos corpos-de-prova de concreto;



(a) Ensaio de compressão direta e módulo de elasticidade



(b) Ensaio de compressão diametral

Figura 6 – Ensaio de compressão direta e tração diametral do concreto.

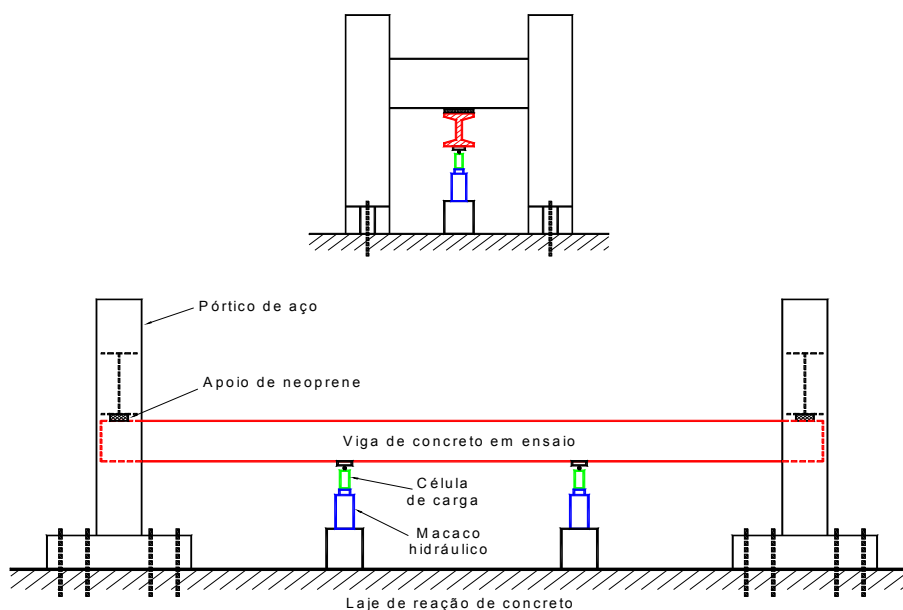


Figura 7 – Esquema do modelo experimental de viga de concreto armado.

- ensaio de flexão (quatro pontos) de seis vigas, como mostra a Figura 7: uma armada com aço para controle V1 e as outras armadas com GFRP, a V2 e a V3 armadas com barras de GFRP para que haja equivalência da capacidade resistente, na V4 a equivalência será na deformação da viga. A V5 e a V6 serão reproduções da V2 e V3, mas armadas somente com barras retas sem ganchos nas extremidades.

## 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 5.1 Deformação na armadura de tração

A diferença da deformação entre as barras de aço e as barras de GFRP é significativa e pode ser explicada em virtude do pequeno módulo de elasticidade das barras de GFRP. Como não existe escoamento das barras submetidas à tração, conforme mostrou o ensaio de determinação das propriedades, o limite de deformação foi fixado em 10mm/m. Na Figura 8 pode-se observar os diagramas força x deformação de todos os modelos de viga ensaiados nesta pesquisa, na primeira linha estão a viga de referência de aço, e as vigas armadas para equivalência de deformação e na segunda linha as vigas armadas para equivalência da capacidade resistente.

Na viga armada com aço, logo após os 20kN, pôde-se observar a diferença de comportamento da viga fissurada e em torno dos 80kN pôde-se observar a mudança de inclinação no diagrama definindo a passagem para o estágio III de deformação.

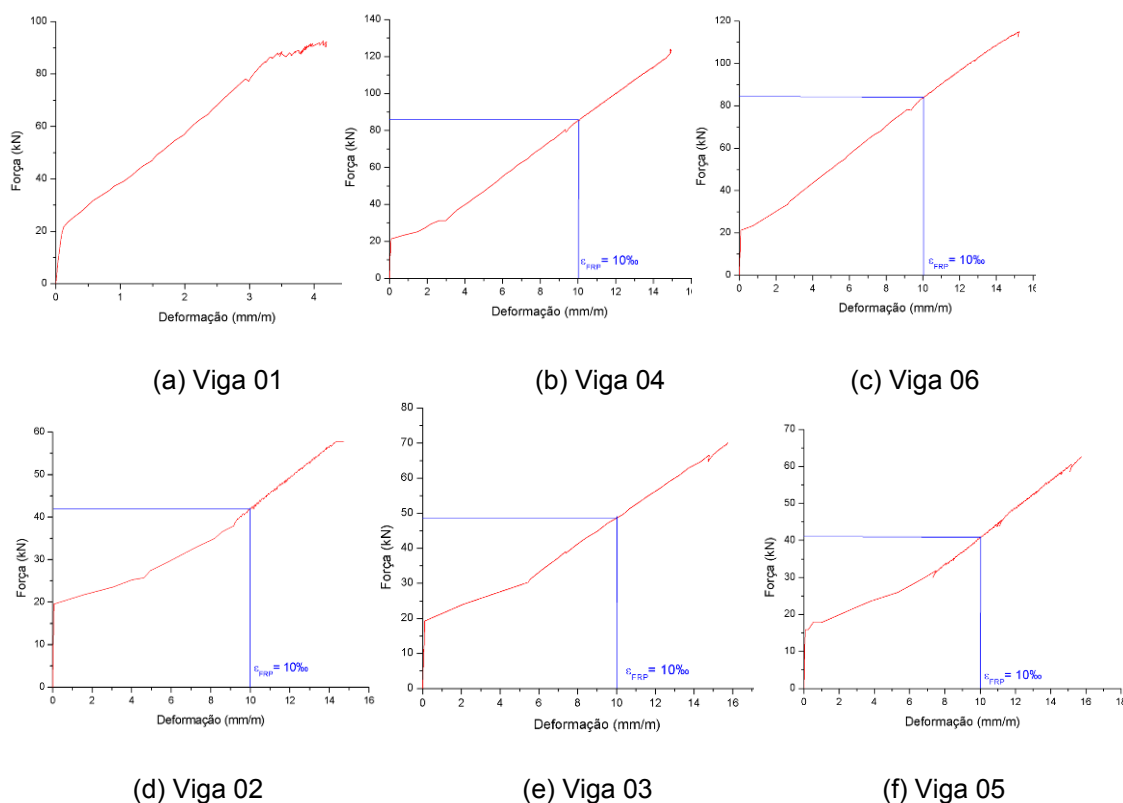


Figura 8 – Diagramas Força X Deformação das barras dos modelos.

Conforme os modelos foram dimensionados, a deformação limite de 10mm/m foi atingida para a força de 80kN de carregamento, exatamente na situação em que a viga armada com aço muda do

estádio II para o estágio III de deformação. Por causa da diferença de módulo de elasticidade dos materiais, foi necessária uma área de armadura de GFRP muito maior para atingir a mesma deformação limite.

Em todas as vigas armadas com o critério de capacidade resistente logo após a força de 40kN, as barras de GFRP apresentaram deformação de 10 mm/m, para uma força menor que 80kN que determinaram a mudança do estágio de deformação da viga com barras de aço. Na viga 03 pode-se perceber que a barra da segunda camada representada pelo segundo diagrama atingiu a deformação limite aos 50kN de carregamento, isto se deve ao fato de seu centro de inércia estar mais próximo da linha neutra da viga.

Por essa análise dos diagramas Força X Deformação, fica claro que o pequeno módulo de elasticidade das barras de GFRP, leva as vigas armadas sob o critério de mesma resistência a atingirem a deformação limite com a metade do carregamento. Portanto a deformação da armadura é uma variável muito mais significativa para o dimensionamento de elementos com GFRP que para elementos usuais de concreto armados com aço. Esta diferença de comportamento acena para a possibilidade de aplicação da protensão como um fator de minimização das consequências das altas deformações apresentadas em barras de GFRP em vigas submetidas a forças de tração. A Figura 9 apresenta uma comparação entre os modelos, mostrando o carregamento atingido para a deformação de 10 mm/m.

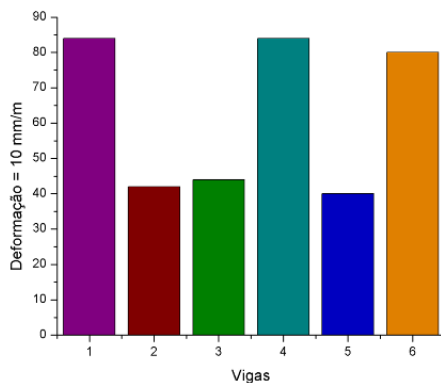


Figura 9 – Diagrama de comparação dos modelos.

## 5.2 Deslocamentos observados nos modelos

As diretrizes de dimensionamento de elementos de concreto armado com GFRP colocam como principal fator de limitação, os deslocamentos e aberturas de fissuras. Nos ensaios isso ficou muito claro, os modelos de GFRP apresentam deslocamentos extremamente superiores aos da viga armada com barras de aço. Na Figura 10 é possível observar os diagramas força x deslocamento dos modelos, na primeira linha os diagramas do modelo de referência e os armados para equivalência de deformação e na segunda linha os modelos armados para equivalência da capacidade resistente.

Adotou-se como limite de deslocamento, aquele proposto na ABNT NBR 6118:2003, com valor limite obtido dividindo-se o vão efetivo por 350. Pode-se observar que no modelo armado com barras de aço o deslocamento máximo adotado foi atingido para uma força superior a 60 kN.

Mesmo as vigas de GFRP armadas para equivalência de deformação atingiram o deslocamento imposto como limite, submetidas a um carregamento inferior ao alcançado pela viga de referência. Ambos os modelos atingiram o limite de deslocamento com carregamento próximo de 30 kN, metade daquele observado na viga armada com aço.

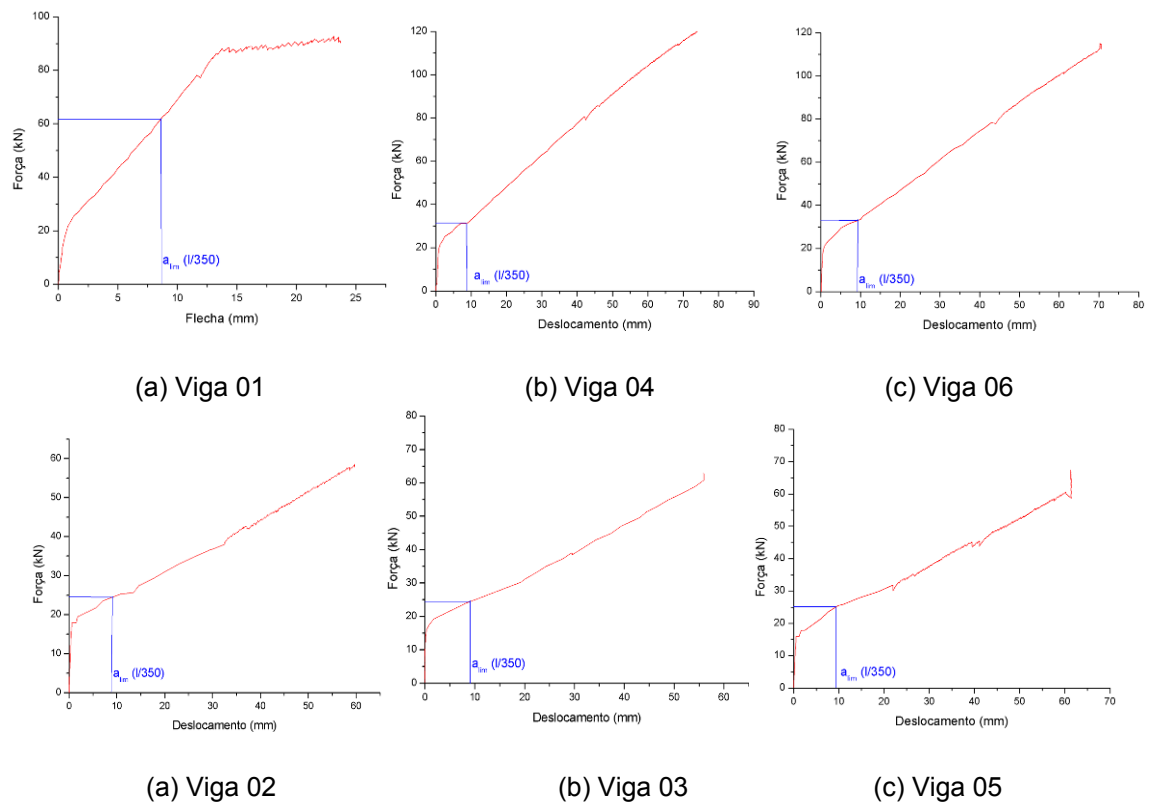


Figura 10 – Diagramas Força X Deslocamento para os modelos.

Como se pode observar na Figura 10, as vigas armadas com barras de GFRP para a equivalência de resistência apresentam o deslocamento limite a um carregamento próximo de 24 kN. A força obtida para o mesmo deslocamento não atinge nem a metade do valor do carregamento da viga com barras de aço. As variações entre as armaduras das vigas não se mostraram variáveis significativas para o deslocamento, sendo que todos os modelos de equivalência de resistência comportaram-se da mesma forma.

Observando o deslocamento dos seis modelos, conclui-se claramente que, mesmo dimensionando os elementos pelo critério de ruína – ELU no caso de elementos armados com GFRP, o deslocamento é uma variável muito significativa para determinação dos elementos. Além disso, conforme observado no critério de deformação da armadura, houve uma equivalência entre a viga de referência e as dimensionadas pelo critério de deformação, mas quando a comparação é feita em termos de deslocamento dos modelos essa semelhança de comportamento não é observada.

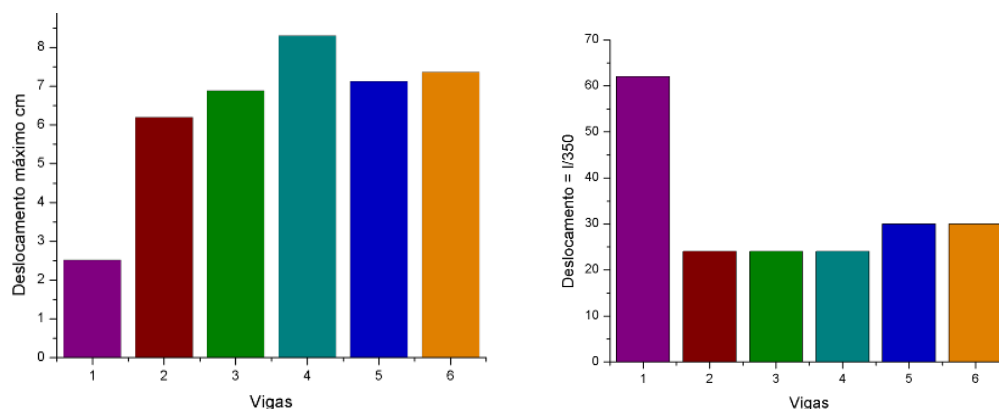


Figura 11 – Diagramas de comparação dos deslocamentos entre os modelos.

A Figura 11 traz uma comparação entre os deslocamentos máximos apresentados nas vigas durante o ensaio e do carregamento alcançado para o deslocamento  $\ell/350$ .

### 5.3 Comparação entre $M_R$ e $M_S$

Para avaliar o comportamento de um elemento estrutural é de fundamental importância a avaliação da sua capacidade resistente. Neste estudo as vigas foram avaliadas por meio da determinação do seu momento resistente ( $M_R$ ) diante de um momento fletor solicitante ( $M_S$ ).

Para realizar esta avaliação, foram primeiramente determinadas as deformações na armadura da viga e no concreto. As deformações das barras foram medidas experimentalmente e as deformações no concreto foram obtidas utilizando um procedimento teórico baseado na curvatura do modelo apresentado por Park e Paulay (1974) e Fusco (1995).

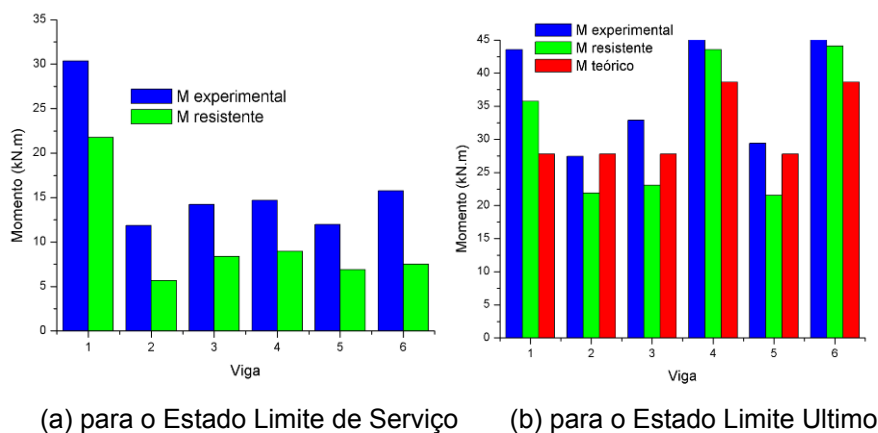


Figura 12 – Comparação entre momentos teórico e experimental.

A Figura 12-a mostra as comparações entre os momentos obtidos para o deslocamento limite para cada modelo e o momento fletor experimental. A Figura 12-b mostra uma comparação entre o valor analítico do momento último teórico e o momento resistente experimental, por meio de cálculos seguindo as diretrizes dos autores citados no parágrafo anterior.

A diferença entre os dois resultados obtidos para o Estado Limite de Serviço pode ser explicada, pela aproximação das deformações do concreto calculadas pelo procedimento descrito e não medidas durante o ensaio. A diferença em alguns casos chega a ser superior a 50%. Além desta variável, há também o problema das hipóteses de dimensionamento utilizadas para se encontrar o valor do momento resistente. O pequeno módulo de elasticidade das barras de GFRP foi uma variável de extrema importância na determinação dos momentos. Para este deslocamento os modelos armados com barras de GFRP atingiram momentos muito inferiores àqueles atingidos pelo armado com barras de aço CA-50. Mesmo os modelos armados com equivalência de deformação última, apresentaram uma capacidade resistente muito inferior à do modelo armado com barras de aço.

Na comparação feita para o Estado Limite Último, a viga 01 apresenta uma diferença entre o valor dos momentos. Isto se explica tanto pela resistência do concreto que apresentou valor superior ao previsto, no caso da diferença entre o teórico e o experimental, quanto pela deformação do concreto que foi uma variável obtida analiticamente. Os modelos 02, 03 e 05, apresentaram pouca diferença entre o teórico e o experimentalmente obtido. Porém, a diferença da capacidade resistente entre esses modelos e o modelo armado com barras de aço é preocupante. Mesmo com as diferenças no concreto, comparando-se os valores, se existiu um aumento de resistência do concreto não

previsto, este aumento não foi verificado para estes modelos. Portanto, pode-se afirmar que esses modelos dimensionados para equivalência de capacidade resistente foram dimensionados de tal modo a não atingir a resistência do modelo armado com barras de aço conforme era previsto. Claro que esta afirmação não poderia ser feita analisando-se apenas os resultados obtidos para os modelos 02 e 05, pois eles não foram rompidos, mas o comportamento do modelo 03 admite esta afirmação como verdadeira. Já os modelos dimensionados para equivalência de deformações, modelos 04 e 06 apresentaram resistências iguais ou superiores àquelas da viga armada com barras de aço. Não foi com este objetivo que elas foram dimensionadas, mas como o rompimento da viga 06 se deu pelo esmagamento do concreto comprimido, pode-se explicar essa semelhança, em função do limite da capacidade resistente do concreto.

Dessa análise é possível concluir que o dimensionamento de elementos de viga armados com GFRP deve ser feito para se utilizar a totalidade da capacidade resistente do concreto e tentar utilizar o máximo da capacidade resistente das armaduras de GFRP, sem que este seja o tipo de ruína governante no comportamento da estrutura.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O pequeno módulo de elasticidade faz com que os deslocamentos da viga tenham intensidades maiores para uma mesma força, como foi claramente explicitado pelos diagramas força x deslocamentos de cada viga, demonstrando que este normalmente é o fator limitante no dimensionamento de vigas simplesmente armadas. Este pequeno módulo de elasticidade aumenta muito a taxa de armadura de GFRP necessária para que uma viga simplesmente armada obedeça aos Estados Limites Último e de Serviço definidos nas normas de dimensionamento nacionais e internacionais.

Esta mesma conclusão por hora prevista abre precedentes de novas pesquisas para constatar outras aplicações desta barra que possam se favorecer do fato da barra ter módulo de elasticidade pequeno e o comportamento elástico.

Isto é, esta pesquisa é o início de um estudo maior que num futuro próximo pode englobar outros assuntos envolvidos. Poder-se-ia sugerir para trabalhos que levem em conta tensões tangenciais, protensão das barras (potencializando as suas propriedades) e a sua ancoragem (fator limitante de fabricação pelo processo de pultrusão).

## 7 REFERÊNCIAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI COMMITTEE 440R** – Status-of-Report on Fiber Reinforced Plastic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures, 1996

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI COMMITTEE 440.1R** – Guide for the Design and Construction of Concrete Reinforced with FRP Bars, 2003

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2003** – Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2003.

CEB-FIP. **Eurocode 2** – Model Code 1990 for Concrete Structures. CEB-FIP International Recommendations, Comité Euro-Internacional du Béton, Lausanne Switzerland, 1993.

FÉDÉRATION INTERNACIONAL DU BÉTON - FIB 9.3 Task Group. **FRP (Fiber Reinforced Polymer) Reinforcement for Concrete Structures**, 2003. (draft).

FUSCO, P. B. **Técnicas de armar estruturas de concreto**. São Paulo: Editora Pini Ltda., 1994.

PARK, R.; PAULAY, T. **Reinforced Concrete Structures**. John Wiley and Sons, 1974.

MASMOUDI, R. *et al.* Flexural behaviour of concrete beams reinforced with deformed FRP C-BAR reinforcing rods. **ACI Structural Journal**, v. 95, n. 6, p. 665-676, 1998.

TAVARES, D. H. **Análise teórica e experimental de vigas de concreto armadas com barras não metálicas de GFRP**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2006.

THÉRIAULT, M.; BENMOKRANE, B. Effects of FRP Reinforcement Ratio and Concrete Strength on Flexural Behavior of Concrete Beams. **Journal of Composites for Construction**, Feb., 1998.

UOMOTO, T. *et al.* Use of Fiber Reinforced Polymer Composites as reinforcing Material for Concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 14, n. 3. May/June, 2002.

# **AVALIAÇÃO DE INCERTEZAS EM MODELO NUMÉRICO PARA ANÁLISE DE PRISMAS DE ALVENARIA SOB COMPRESSÃO**

Luiz Aquino Gonçalves Júnior<sup>1</sup>, Marcio Antonio Ramalho<sup>2</sup> & André Teófilo Beck<sup>3</sup>

## **Resumo**

*Para medir a confiabilidade de uma estrutura, as incertezas envolvidas no problema devem ser conhecidas. O presente trabalho propõe um procedimento de cálculo da incerteza de um modelo numérico para análise de prismas de três blocos de concreto sujeitos à compressão. O estudo numérico é feito através do método dos elementos finitos com análise não-linear física baseada em um critério de dano. A incerteza é avaliada através das variáveis de projeto: tensão de ruptura à compressão, deformação associada à tensão de ruptura e módulo de elasticidade. São aplicados métodos probabilísticos para comparar resultados numéricos e experimentais. Conclui-se que a incerteza de modelo é importante para quantificar a medida de segurança.*

*Palavras-chave: Alvenaria estrutural. Dano. Confiabilidade estrutural. Incerteza de modelo. Método probabilístico.*

## **EVALUATION OF UNCERTAINTIES FOR NUMERICAL MODEL APPLIED TO MASONRY PRISMS UNDER COMPRESSION**

### **Abstract**

*It is necessary to know the uncertainties of a numerical analysis procedure in order to measure structural safety. The present work suggests a procedure for evaluate the uncertainty of a numerical model used to analyze three concrete block prisms under compression. The numerical model is based on finite element method with nonlinear analysis based on damage mechanics. The uncertainty is evaluated by means of design variables: failure stress, deformation associated with the failure stress and elasticity modulus. A probabilistic method is used to compare numerical and experimental results. The conclusion is that the numerical model uncertainty is important to quantify safety.*

*Keywords: Structural masonry. Damage, structural reliability. Model uncertainty. Probabilistic method.*

## **1 INTRODUÇÃO**

A alvenaria estrutural é um dos sistemas mais antigos de construção de edificações. Sua característica mais importante é a simplicidade: a colocação de blocos uns sobre os outros unidos entre si por argamassa é um processo simples, eficaz e tradicional [1]. O sucesso desse sistema entre os engenheiros resulta das inúmeras funcionalidades que a parede pode exercer, aliado a possíveis vantagens econômicas. A alvenaria estrutural é um importante setor da construção civil e seu constante desenvolvimento é importante para torná-lo competitivo, confiável e econômico.

A confiabilidade estrutural é um ramo da engenharia que mede segurança das estruturas, sendo muitas vezes empregada para calibrar fatores de segurança. Para medir a confiabilidade, além

---

<sup>1</sup> Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, luizaquino@gmail.com

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, ramalho@sc.usp.br

<sup>3</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, atbeck@sc.usp.br

de considerar a variabilidade dos materiais e das solicitações, é importante embutir a incerteza de modelo relacionada a um estado limite [2].

Para medir a segurança numa estrutura em alvenaria é importante saber qual a incerteza incorporada ao modelo que determina a resistência à compressão da parede. Historicamente a determinação da resistência da alvenaria é difícil e muito incerta, mas com a evolução dos métodos numéricos e dos computadores têm-se obtidos respostas mais acuradas.

O presente trabalho propõe um método de cálculo da incerteza de um modelo numérico de um prisma de concreto de três unidades sujeito à compressão. O estudo numérico é feito em elementos finitos com análise não-linear física baseada em dano. A incerteza é avaliada através de variáveis de projeto: tensão máxima, deformação na tensão máxima e módulo de elasticidade do prisma.

Outro ponto destacado é a determinação dos parâmetros não-lineares do material do modelo constitutivo de dano. Com o emprego de métodos otimização para encontrar a curva numérica que melhor represente a curva experimental, foi possível determinar os parâmetros do modelo de maneira mais rápida e objetiva.

## 2 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

### 2.1 Medidas de violação de estados limites

O estudo da probabilidade de falha diz respeito ao cálculo e previsão da probabilidade de violação do estado limite de um sistema estrutural em qualquer estágio de sua vida útil [8]. A probabilidade de falha é o complemento da confiabilidade, que representa o grau de confiança de que o sistema atenda às especificações de projeto [9].

#### Método das tensões admissíveis

É um método de dimensionamento das normas estruturais mais antigas, usualmente associado com uma análise linear [8]. Nesse método a solicitação deve ser menor ou igual à resistência dividida por um fator de segurança.

A norma brasileira de alvenaria<sup>4</sup> e a norma americana<sup>5</sup> adotam o método das tensões admissíveis no dimensionamento de alvenaria à compressão. Enquanto que a inglesa<sup>6</sup> e o Eurocode<sup>7</sup> são baseadas em estados limites, com coeficientes de segurança parciais.

#### Método dos estados limites

Um estado limite é o divisor entre o desempenho desejado e a indesejado de uma estrutura. O método de estados limites é considerado um método semi-probabilístico de verificação da segurança, como transição entre o método de tensões admissíveis e os métodos probabilísticos. Na prática, definidos os valores característicos de resistência  $R_k$  e solicitação  $S_k$ , aplicam-se coeficientes de cálculo para minoração da resistência e majoração da solicitação (Figura 1, em que  $X_m$  é o valor médio,  $X_k$  é o valor característico e  $X_d$  o valor de cálculo); de maneira que a resistência de cálculo  $R_d$  seja maior ou igual à solicitação de cálculo  $S_d$ .

<sup>4</sup> NBR 10837 – Cálculo de Alvenaria Estrutural de Blocos Vazados de Concreto [13]

<sup>5</sup> ACI 530 – Building Code Requirements for Masonry Structures [12]

<sup>6</sup> BS 5628 – Code of Practice for Use of Masonry [11]

<sup>7</sup> Eurocode 6 – Design of Masonry Structures [10]

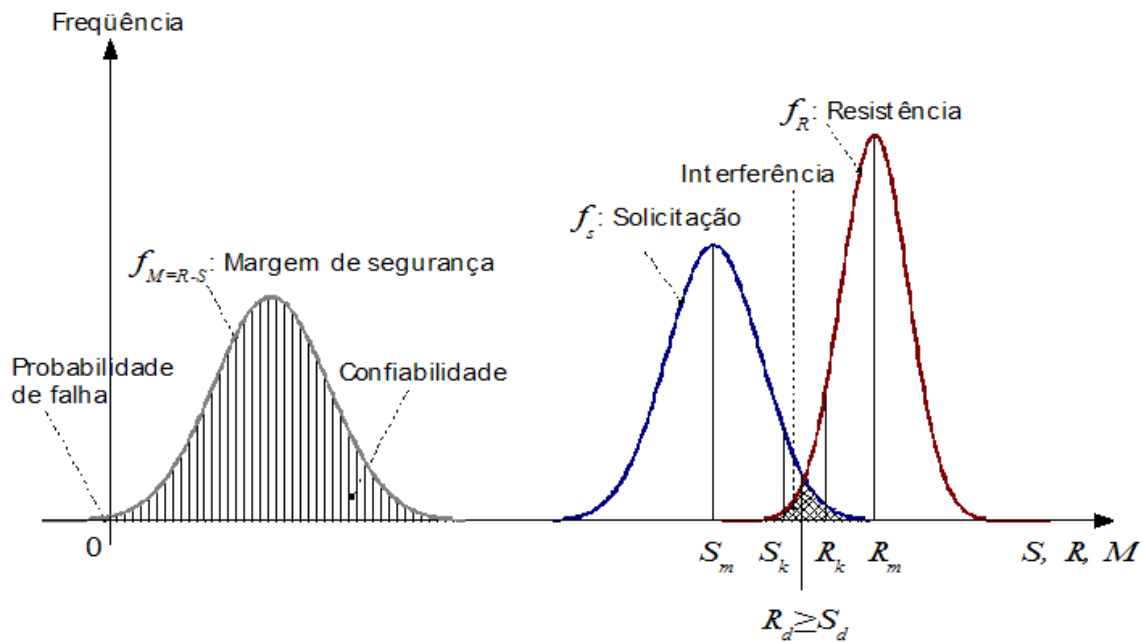


Figura 1 – Problema  $M=R-S$  básico: funções de densidade de probabilidade da resistência, da solicitação e da margem de segurança.

### Métodos probabilísticos

Sejam duas variáveis aleatórias (VA)  $R$  e  $S$ . É desejável que a resistência seja maior que a solicitação para a estrutura não falhar. A diferença entre essas variáveis resulta na variável margem de segurança:

$$M = R - S \quad (1)$$

A probabilidade da variável margem de segurança ser menor ou igual a zero representa a probabilidade de falha do sistema. A região de interferência, indicada na Figura 1, é proporcional a probabilidade de falha e de grande interesse para medir o nível de segurança [9].

A probabilidade de falha, pode ser definida como:

$$P_f = P[R \leq S] = P[R - S \leq 0] = P[M \leq 0] \quad (2)$$

Para muitos problemas a eq. (2) não é inteiramente adequada, pois geralmente não é possível reduzir o problema a formulação simples de  $R$  versus  $S$ . Para generalizar o problema opta-se por trabalhar com a função de estado limite. Seja  $X$  um vetor de VA básicas  $X_i$  e  $G(X)$  a equação de estado limite (ou uma função de performance), a probabilidade de falha é definida de forma geral como [8]

$$P_f = P[G(X) \leq 0] \quad (3)$$

## 2.2 O problema fundamental da confiabilidade estrutural

Seja  $f_{RS}(r,s)$  a função conjunta de densidade de probabilidade das VA  $R$  e  $S$  independentes, então:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) f_S(s) dr ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (4)$$

generalizando para um número qualquer de VA

$$P_f = P[G(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} \dots \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5)$$

Para resolver essa integral multidimensional, Melchers [8] indica três possíveis métodos:

- integração direta, de rara aplicação;
- integração numérica, utilizando simulação de Monte Carlo;
- método de transformação: realizar a integração através da aproximação do integrando em uma função de densidade de probabilidade multinormal no limite de integração  $G(\mathbf{X})=0$ , que possui resultado direto.

Nesse trabalho foi utilizado o método de transformação.

### Métodos de transformação

Os métodos de transformação constroem aproximações de  $G(\mathbf{X})$  no ponto de projeto (que tenha maior probabilidade de falha). O FORM<sup>8</sup> (confiabilidade de primeira ordem) utiliza toda informação das VA, incluindo distribuições não-normais, correlação entre variáveis. Aproxima  $G(\mathbf{X})$  de forma linear.

Esse algoritmo foi aplicado através do programa STRAND[14] para calcular a probabilidade de falha do exemplo. A transformação de variáveis não-normais em variáveis normais independentes é feito pelo modelo de Nataf.

Para mais detalhes sobre esses e outros métodos, favor consultar [9][8][15][2].

### 2.3 Incertezas na engenharia

O processo de criação de uma estrutura envolve planejamento, projeto, construção, operação/uso e demolição. Cada uma dessas etapas envolve incertezas. Elas podem ser classificadas como [16] [8]:

- variabilidade inerente (ou intrínseca);
- incerteza devido a conhecimento inadequado (ou epistêmica);
- incerteza estatística.

Este trabalho concentra-se na variabilidade inerente dos materiais e a incerteza de previsão do modelo, no estudo de prisma de alvenaria sujeito à compressão.

#### Incerteza relacionada ao modelo

Segundo Ang e Tang [17], a incerteza de modelo é considerada epistêmica e tem origem nas simplificações adotadas, na negligência de variáveis e/ou de efeitos conhecidos. Possivelmente esse erro pode diminuir com uma formulação mais detalhada. Na prática, por limite de tempo e razões operacionais, contentamo-nos com um nível não tão sofisticado de detalhamento [2].

<sup>8</sup> do inglês *First Order Reliability Method*

A abordagem feita pela maioria dos autores<sup>9</sup> trata essa incerteza como parâmetro para calibração da resposta de modelos idealizados. Seja  $y_{\text{exp}}$ , por exemplo, a resistência do prisma a compressão medida;  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  os parâmetros dos materiais descritos por variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ ; e a resistência prevista no modelo  $Y_{\text{mod}} = f(\mathbf{X})$ . A correção é feita por um fator  $M$  que somado ao valor previsto  $Y_{\text{mod}}$  faz com que a resposta se aproxime do valor experimental  $Y_{\text{exp}}$ :

$$Y_{\text{exp}} = M + Y_{\text{mod}} \quad (6)$$

Se  $M$  for uma constante igual a 0 o modelo é perfeito. Em geral  $M$  pode apresentar variabilidade. Se a variável  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  puder ser controlada para fornecer os valores  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ , a incerteza pode ser obtida através da amostragem

$$m = y_{\text{exp}} - y_{\text{mod}} \quad (7)$$

Os parâmetros dos materiais nunca poderão ser totalmente conhecidos, assim, na incerteza de modelo são incorporadas incertezas dos materiais.

A Figura 2 ilustra a correção de uma PDF de resistência idealizada para a PDF de resistência que se aproxime do resultado experimental.

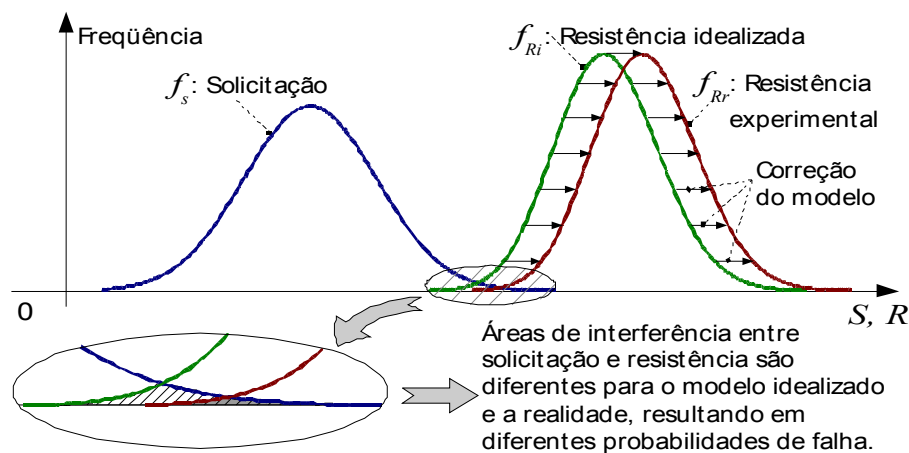


Figura 2 – PDF de resistência idealizada é corrigida com a VA incerteza de modelo; a adoção ou não da correção do modelo reflete em diferentes probabilidades de falha.

### 3 ANÁLISE NUMÉRICA DE PRISMAS

Com o advento dos métodos numéricos e o avanço computacional, tornou-se possível utilizar modelos constitutivos mais robustos e acurados. A comunidade acadêmica da alvenaria vem se interessando gradativamente pelos métodos numéricos sofisticados para resolver problemas de difícil solução [19].

<sup>9</sup> como Faber [16]; Ang e Tang [17]; Melchers [8]; Val, Bljugerb e Yankelecsky [18].

### 3.1 Técnicas de modelagem

A análise numérica da alvenaria é geralmente executada pelo método dos elementos finitos, e segue duas abordagens: a micro-modelagem e a macro-modelagem.

A micro-modelagem se divide em (Figura 3): (a) micro-modelagem altamente detalhada; (b) micro-modelagem detalhada; e (c) micro-modelagem simplificada.

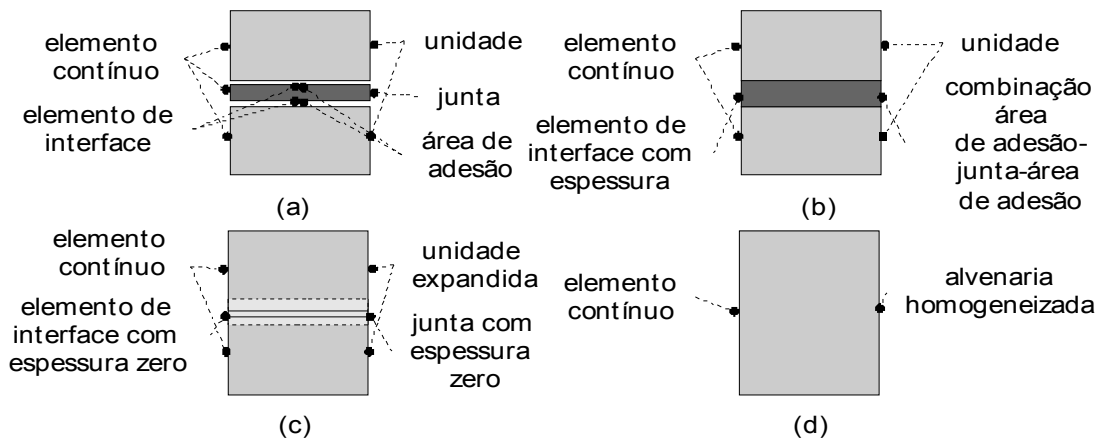


Figura 3 – Modelagem da alvenaria: (a) micro-modelagem altamente detalhada; (b) micro-modelagem detalhada; (c) micro-modelagem simplificada; e (d) macro-modelagem.

A macro-modelagem parte da idéia de que as unidades e juntas estão naturalmente organizadas de forma periódica, em que estudando a célula básica da alvenaria representa-se o comportamento global da estrutura.

O estudo do prisma caracteriza uma abordagem de micro-modelo, adotado o do tipo detalhado (Figura 3.b). Utilizou-se o programa FEAP (Finite Element Analysis Program), que foi desenvolvido sob a coordenação do Prof. Robert Taylor na Universidade da Califórnia em Berkeley.

### 3.2 Análise não linear física (NLF) com modelo constitutivo de dano

Na análise NLF a rigidez do material depende do histórico de deslocamentos do material, que obedece a leis constitutivas não-lineares dos materiais.

A mecânica do dano é o estudo, através de variáveis mecânicas, dos mecanismos envolvidos na deterioração do material sujeitos ao carregamento [20]. A micro-escala e a meso-escala são objetos de estudo da mecânica do dano. Entende-se que propriedades na meso-escala podem ser explicadas por poucos mecanismos de energia de maneira similar para todos os materiais [21].

Seja uma superfície  $\partial S$  com orientação  $\vec{n}$  que apresenta micro-defeitos. O dano ( $D_{\vec{n}}$ ) será dado pela razão da área danificada ( $\partial S_D$ ) sobre a área total, ou seja,

$$D_{\vec{n}} = \frac{\partial S_D}{\partial S} \quad (8)$$

O dano é uma medida adimensional ente 0 e 1, em que se 0 o volume representativo não possui danificação e se 1 o volume representativo está totalmente danificado. A aplicação numérica é feita de forma a penalizar o módulo de elasticidade, como por exemplo,

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{\tilde{E}} = \frac{\sigma}{E(1-D)} \quad (9)$$

em que:

- $\varepsilon_e$       deformação elástica;
- $\sigma$         tensão;
- $\tilde{E}$         módulo de elasticidade equivalente;
- $D$         variável de dano.

### Modelo constitutivo de dano

O modelo adotado foi o proposto por Papa e Taliércio [4][22] com extensão para danificação não-local implementada por Ramalho et al. [7].

O material virgem é suposto isotrópico e elástico-linear que quando danificado geralmente torna-se ortotrópico. O dano ocorre macroscopicamente levando em conta a simetria do tensor de segunda ordem  $D$ . Seja a relação não-linear de tensão-deformação:

$$\varepsilon = C(D)\sigma \quad (10)$$

em que:  $C(D)$  é o tensor flexibilidade de quarta ordem do material danificado.

A danificação é diferenciada para as direções ortogonais  $\alpha = I, II, III$ . Uma vez que a danificação é ativada, são fixados os eixos de dano  $\alpha$  e a ortotropia é induzida pelo dano associado ao plano de microfissuras no sólido. O modelo é assim qualificado como de fissuração distribuída com direção fixa.

A variável de controle do progresso da danificação é a deformação equivalente na forma:

$$y = 1/2(\varepsilon^{el})^2 \quad (11)$$

A danificação para a compressão é obedece a equação

$$D_\alpha = 1 - \frac{1}{1 + A_C \langle y_{\alpha\alpha} - y_{0C} \rangle^{B_C}} \quad (12)$$

em que:

- $\alpha = I, II, III$       direções principais do dano;
- $\langle \# \rangle$                 colchetes de Macauley;
- $y_{\alpha\alpha}$                 componente de deformação descrita na eq. (11);
- $y_{0C}$                 deformação crítica;
- $A_C$  e  $B_C$             parâmetros do material.

Apesar do modelo de dano local representar bem o comportamento do material, as simulações indicaram um resposta extremamente frágil no desenvolvimento do pós-pico. Para contornar esse problema considera-se que a danificação é distribuída em certa região e não mais concentrada em cada elemento; de modo que a perda de rigidez de cada elemento contribui para a

danificação de uma dada vizinhança [7]. Dessa forma introduz-se outro parâmetro do material, o raio não-local ( $R_{nl}$ ), que fisicamente representa o raio da esfera que delimita a vizinhança do elemento.

Para mais detalhes do modelo de dado, tanto quanto o tensor de flexibilidade e a mecânica do dano, favor consultar [20][21][7][4][6][23].

### 3.3 Simulações numéricas

#### Apresentação dos modelos

Dois modelos mecânicos são avaliados. Um prisma de três unidades de concreto foi discretizado em rede de elementos sólidos (Figura 4), e outro modelo formado apenas por um elemento sólido. Todos os elementos são do tipo brick de oito nós, com três graus de liberdade (deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) por nó.

O modelo numérico do prisma foi estudado para se comparar com resultados experimentais de Freitas [22]. O outro modelo composto por um único elemento serve para calcular os parâmetros do modelo de dano para cada material da alvenaria.

A unidade de concreto tem dimensões usuais de 14x19x39 cm com espessura dos septos variável na altura. A junta é de 1 cm. Na modelagem bons resultados foram encontrados com 1496 elementos e tolerância por critério energético de 1.0E-6.

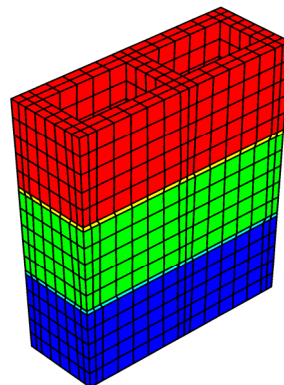


Figura 4 – Rede de elementos finitos tridimensionais de prisma de concreto de três blocos.

#### Comportamento do raio não-local

A diretriz para definir o comprimento do raio não-local é encontrar o menor valor do raio que não produza um comportamento extremamente frágil do material ou divergências numéricas (informação verbal)<sup>10</sup>. Referências bibliográficas que tratam do raio não-local para a alvenaria são escassas, a escolha do raio é geralmente feita de forma subjetiva [7].

Optou-se pelos raios: para argamassa  $R_{arg} = 30$  mm e para a unidade de concreto  $R_{uni} = 150$  mm. A definição do raio da unidade deve-se a experiência na aplicação deste valor por Freitas [22] e para proporcionar um menor custo computacional com estabilidade numérica. Mesmo que em algumas situações o material apresente comportamento frágil, as respostas de interesse (módulo de elasticidade, tensão e deformação de pico) são bem estimadas.

<sup>10</sup> Informação fornecida por Freitas em São Carlo, em 2007

## 4 ESTUDO ESTATÍSTICO DOS PARÂMETROS DOS MATERIAIS

Foram utilizados os resultados experimentais de Freitas [22], que capturou o comportamento pós-pico de ensaios de compressão axial dos materiais, prismas e paredinhas de alvenaria. Ele utilizou unidades de concreto, cerâmico e de sílico-calcário; e argamassas de classe ii e iii (segundo a classificação da BS 5628 [11]).

O modelo estudado é o prisma de concreto com argamassas tipo ii ou iii. Os números de ensaios estudados nesse trabalho são descritos na Tabela 1.

Tabela 1 – Números de ensaios efetuados por de Freitas, para os materiais de interesse

	<b>Descrição</b>	<b>Número amostras</b>
Unidades	Concreto 4,5 MPa	12
Argamassa	Tipo ii	29
	Tipo iii	35
Primas de três blocos de concreto	com argamassa tipo ii	3
	com argamassa tipo iii	3

O número de amostras de unidades e principalmente de prisma é pequeno. Por exemplo, número de amostras para determinar a resistência à compressão, com confiança de 95%,  $\sigma = 1,0$  MPa e  $e = 0,7$  MPa resultaria em 8 amostras. Tornando difícil a validação dos resultados. O mérito do artigo está no procedimento proposto para avaliar a incerteza de modelo.

Os ensaios foram realizados com transdutores de deslocamentos posicionados nos pratos da máquina [22]. Essa condição não é a ideal, pois as condições de contorno impostas e a formas de obtenção de dados difere das condições de contorno aplicadas nas unidades e na argamassa que compõe o prisma [24]. Essa negligência é conhecida e adotada para acompanhar o ensaio até a ruptura, essa incerteza é incorporada no cálculo da incerteza de modelo.

### 4.1 Definição dos parâmetros

Foi desenvolvido um programa computacional, chamado de módulo CUBO, que procure os parâmetros lineares e não-lineares do material de forma otimizada. Para isso, aplicou-se o método de otimização Fibonacci Generalizado [25].

#### Resistência à compressão e deformação crítica

A resistência à compressão é a tensão máxima alcançada e a deformação crítica a deformação correspondente.

#### Parâmetros do modelo de dano

Os parâmetros  $A_C$  e  $B_C$  do modelo não-linear da eq. (12) são escolhidos de forma que a curva numérica (tensão versus deformação) se aproxime ao máximo à curva experimental [4][3]. Na prática, a curva numérica é originada de uma avaliação da aplicação de deslocamento em apenas um elemento finito cúbico. Restringem-se os graus de liberdade dos nós da base do elemento e aplicam-se o deslocamento no topo.

A otimização de Fibonacci Generalizado consiste em encontrar o mínimo a partir da diminuição do intervalo de análise. A Figura 5 ilustra um caso unidimensional, em que conhecidos os pontos  $A_4$ ,  $B_4$  e  $D_4$  de um incremento anterior; avalia-se o ponto  $C_4$ .  $B_4$  é menor que  $C_4$ , o novo intervalo é então definido entre  $A_4$  e  $C_4$ .

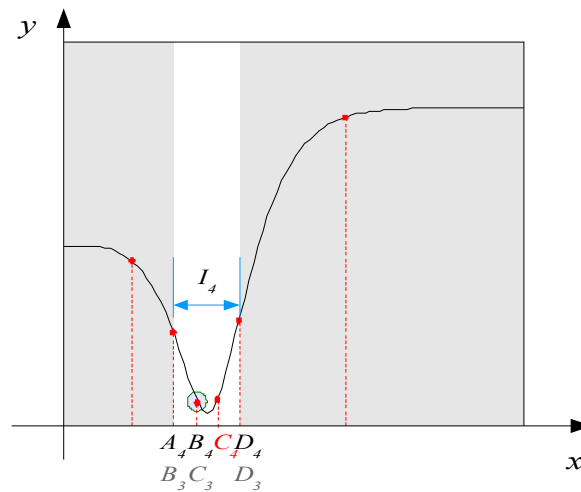


Figura 5 – Estágio método de Fibonacci.

A função objetivo do problema é definida por diferenças entre pontos da curva numérica e experimental:

$$f(A_C, B_C) = \sqrt{\sum_{i=1}^n [y_{exp}(i) - f_{num}(i, A_C, B_C)]^2} \quad (13)$$

em que:

$y_{exp}(i)$  tensão da curva experimental;

$f_{num}(i, A_C, B_C)$  tensão da curva numérica para parâmetros de tentativa  $A_C$  e  $B_C$ .

Estudando o modelo, verificou-se a avaliação de intervalos de  $A_C$  é mais eficaz se for feito de forma logarítmica, alterando a resposta numérica satisfatoriamente. Assim a equação de dano é simbolizada por:

$$D_\alpha = 1 - \frac{1}{1 + 10^{L A_C} \langle y_{\alpha\alpha} - y_{0C} \rangle^{B_C}} \quad (14)$$

Dessa forma é possível avaliar os parâmetros de dano que melhor se ajustam ao ensaio. Foram obtidas boas respostas como a da Figura 6.

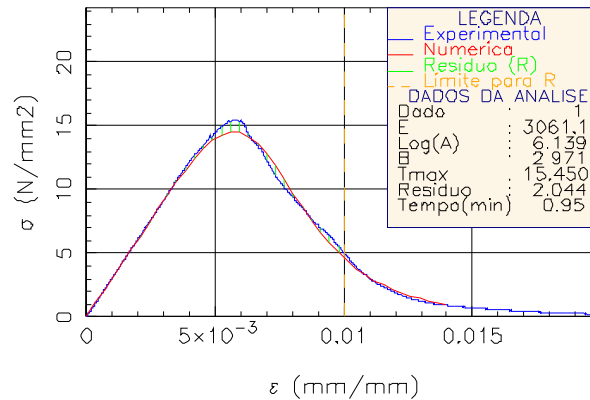


Figura 6 – Convergência do algoritmo de otimização para uma unidade de concreto.

### Módulo de elasticidade

Para melhor ajuste das curvas numéricas e experimentais, como na Figura 6, optou-se por calcular o módulo de elasticidade entre 20 % e 50 % da tensão de pico.

### Parâmetros adotados

O coeficiente de Poisson foi admitido como sendo igual a 0,20. Barbosa [26] fez ensaios com corpos de prova cilíndricos com o material que compõe as unidades de concreto de seu trabalho, o coeficiente de Poisson medido nessa situação foi de 0,19.

O valor de  $y_{0c}$  na eq.(14), que determina o início da danificação, foi adotado igual a  $5.0E-20$ . Os raios não-locais para a argamassa e para a unidade de concreto são respectivamente  $R_{arg} = 30$  mm e  $R_{uni} = 150$  mm (como discutido em 3.3).

## 4.2 Estudo estatístico dos parâmetros

Concluída a primeira fase de aquisição dos dados passou-se a estudar o comportamento estatístico destes. Um bom modelo deve ser suficientemente simples e acurado. Faber [16] descreve o processo de construção do modelo em cinco partes:

- Avaliação e quantificação dos dados disponíveis;
- Selecionar uma função de distribuição;
- Estimar os parâmetros da distribuição;
- Verificar modelo;

Se o modelo probabilístico é disponível, pode-se atualizá-lo com novos dados.

A análise estatística foi feita com auxílio do programa computacional EasyFit<sup>11</sup>. Seu objetivo é ajustar curvas probabilísticas a dados estatísticos. A estimação dos parâmetros se dá pelo método da máxima verossimilhança e os três testes usuais de ajuste de distribuição são efetuados.

<sup>11</sup> versão demonstração disponível em <http://www.mathwave.com/>

### Unidades de concreto

O bloco de concreto possui resistência nominal de  $f_{bk,nominal} = 4,5$  MPa. A resistência característica do bloco na área bruta, calculada de acordo com a NBR 6136 é de  $f_{bk,amostra} = 6,5$  MPa. Os resumos são expostos nas Tabelas 2 e 3 (com tensões em relação à área líquida).

Destaques para o alto coeficiente de variação (c.v.) do módulo de elasticidade, causado possivelmente pela variabilidade do material e dificuldades nos ensaios.

Tabela 2 – Informação estatística dos parâmetros do bloco de concreto

Informação estatística	$E$ (MPa)	$LA_C$	$B_C$	$f_b$ (MPa)	$\varepsilon_{crit}$ (mm/mm)
Média	5379,9	6,112	2,828	17,46	0,00415
Desvio padrão	2613,0	0,917	0,428	2,83	0,00106
Coeficiente de variação	48,57%	15,00%	15,12%	16,20%	25,61%

Tabela 3 – Correlações entre os parâmetros da unidade de concreto

Correlações	$E$	$LA_C$	$B_C$	$f_b$	$\varepsilon_{crit}$
$E$	1,000				
$LA_C$	-0,863	1,000		<i>sim.</i>	
$B_C$	-0,898	<b>0,984</b>	1,000		
$f_b$	0,886	-0,759	-0,799	1,000	
$\varepsilon_{crit}$	-0,781	0,560	0,679	-0,863	1,000

A correlação entre  $LA_C$  e  $B_C$  em destaque na Tabela 3 revela forte dependência entre as variáveis. Nesse estágio, estabeleceu-se a dependência linear entre as variáveis:

$$LA_C = 2,1096B_C + 0,1454 \quad (15)$$

As distribuições ajustadas são destacadas na Tabela 8 adiante.

### Argamassa tipo ii

Essa argamassa é mais forte que a seguinte. O resumo dos resultados constam nas Tabelas 4 e 5.

Tabela 4 – Informação estatística dos parâmetros do bloco de concreto

Informação estatística	$E$ (MPa)	$LA_C$	$B_C$	$f_b$ (MPa)	$\varepsilon_{crit}$ (mm/mm)
Média	4503,3	2,870	1,084	7,11	0,00277
Desvio padrão	993,2	0,275	0,115	1,13	0,00060
Coeficiente de variação	22,06%	9,57%	10,58%	15,95%	21,80%

Tabela 5 – Correlações entre os parâmetros da unidade de concreto

Correlações	$E$	$LA_C$	$B_C$	$f_b$	$\varepsilon_{crit}$
$E$	1,000				
$LA_C$	-0,704	1,000			
$LA_C$	-0,718	0,865	1,000		
$f_b$	0,359	-0,342	0,112	1,000	
$\varepsilon_{crit}$	-0,074	-0,141	0,116	0,360	1,000

As variáveis  $LA_C$  e  $B_C$  apresentam alta correlação, mas não o suficiente para criar dependência direta entre as variáveis.

### Argamassa tipo iii

Essa argamassa é mais fraca que a anterior. Resumos estatísticos e a correlação são expostos nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6 – Informação estatística dos parâmetros do bloco de concreto

Informação estatística	$E$ (MPa)	$LA_C$	$B_C$	$f_b$ (MPa)	$\varepsilon_{crit}$ (mm/mm)
Média	3355,4	2,759	0,968	4,69	0,00277
Desvio padrão	971,7	0,180	0,105	0,73	0,00080
Coefficiente de variação	28,96%	6,52%	10,85%	15,66%	28,88%

Tabela 7 – Correlações entre os parâmetros da unidade de concreto

Correlações	$E$	$LA_C$	$B_C$	$f_b$	$\varepsilon_{crit}$
$E$	1,000				
$LA_C$	-0,574	1,000			
$LA_C$	-0,609	0,904	1,000		
$f_b$	0,495	-0,066	0,203	1,000	
$\varepsilon_{crit}$	-0,304	-0,002	0,322	0,318	1,000

O c.v. e a correlação das variáveis para as argamassas tipo ii e iii foram bem semelhantes. A variável  $LA_C$  foi mantida no problema.

### 4.3 Resumo das distribuições

A Tabela 8 resume as distribuições ajustadas.

Tabela 8 – Distribuições escolhidas, média e desvio padrão para dos componentes

	<b>Componentes</b>	<b>Distribuição</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>
Argamassa tipo ii	$E$ (MPa)	Normal	4503,3	993,23
	$LA_C$	Gumbel Max	2,62	0,27
	$B_C$	Lognormal	1,08	0,11
	$f_a$ (MPa)	Normal	7,11	1,13
	$\varepsilon_{crit}$ (mm/mm)	Normal	0,00277	0,00060
Argamassa tipo iii	$E$ (MPa)	Normal	3355,4	971,66
	$LA_C$	Gumbel Max	2,6	0,18
	$B_C$	Gumbel Max	0,87	0,11
	$f_a$ (MPa)	Lognormal	1,36	0,43
	$\varepsilon_{crit}$ (mm/mm)	Normal	0,00277	0,00080
Unidades de concreto 4,5 MPa	$E$ (MPa)	Lognormal	5366,15	2435,72
	$B_C$	Gumbel Min	2,83	0,42
	$f_b$ (MPa)	Normal	17,46	2,83
	$\varepsilon_{crit}$ (mm/mm)	Uniforme a: 0,00231 b: 0,00599	0,00415	0,00106

## 5 DETERMINAÇÃO DA INCERTEZA DE MODELO

### 5.1 Detalhamento do modelo

Pretende-se obter o comportamento probabilístico e a incerteza de previsão dos parâmetros:

- $E_p$  módulo de elasticidade do prisma;
- $f_p$  resistência à compressão do prisma ;
- $\varepsilon_{crit}$  deformação correspondente à tensão máxima.

As variáveis aleatórias do prisma de concreto são: os parâmetros  $E$  e  $B_C$  para cada uma das três unidades; e os mesmos parâmetros  $E$ ,  $LA_C$  e  $B_C$  para as duas juntas de argamassas, num total de nove variáveis aleatórias. Essas variáveis são descritas por distribuições probabilísticas descritas na Tabela 8. Estudou-se dois modelos: prismas de três unidades de concreto unidas com argamassas do tipo ii e outro prismas com unidades de concreto e argamassa do tipo iii.

### 5.2 Geração das amostras

O termo *amostra* refere-se às realizações aleatórias das distribuições probabilísticas definidas. Sua geração é feita pelo método de Monte Carlo através do programa computacional STRAND [14]. Os dados de entrada para o STRAND foram as seis VA das unidades de concreto, as três VA de um tipo de argamassa (Tabela 8), e a matriz de correlação conjunta dos parâmetros das unidades (Tabela 3) e de um tipo de argamassa (por exemplo Tabela 7). Optou-se por gerar 200 amostras (que correspondem a 200 realizações das VA) do prisma de concreto com argamassa tipo ii, e outras 200 amostras do prisma de concreto com argamassa tipo iii.

Foi desenvolvido um programa, módulo CENP, para calcular o modelo numérico do prisma com os parâmetros adotados, e informar as variáveis citadas [28].

### 5.3 Resolução dos modelos numéricos

Com o conjunto de amostras avaliadas numericamente, passa-se a comparação entre respostas numéricas e experimentais.

#### Prisma de concreto e argamassa tipo ii

Como a argamassa é mais forte, o comportamento desse prisma é mais frágil que o com argamassa tipo iii; tanto para a resposta numérica quanto para a experimental.

Na Figura 7 (com tensões na área bruta), as linhas mais finas representam todas as amostras numéricas, as azuis são os resultados experimentais de Freitas [22], e a vermelha uma resolução numérica utilizando os valores médios dos parâmetros. As curva espessas representam a média de tensões de todas as curvas para cada valor de deformação.

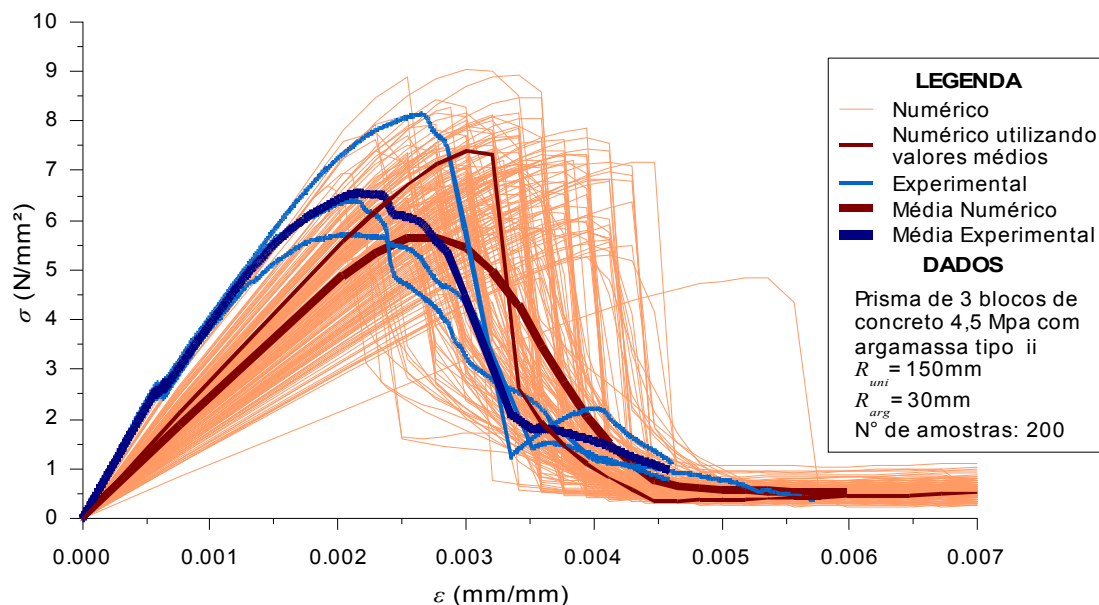


Figura 7 – Comparação das curvas tensão versus deformação das amostras numéricas com as curvas numéricas. Prisma com unidades de concreto e argamassa tipo ii.

O modelo numérico apresentou grande variação no módulo de elasticidade se comparado com o resultado experimental. Essa resposta se deve a variação das unidades de concreto, que tem um c.v. de 48%, e aos poucos resultados experimentais.

É possível afirmar com 95% de confiança que o a média numérica da resistência à compressão é igual à experimental.

Tabela 9 – Comparação estatística dos resultados numéricos e os experimentais de prisma de concreto com argamassa tipo ii

Estatística		$\varepsilon_{crit}$	$f_p$ (MPa)	$E_p$ (MPa)
EXPERIMENTAL	Média	0,00229	6,764	3716,82
	Coeficiente de variação	13,59%	18,44%	7,21%
NUMÉRICO	Média	0,00317	6,673	2474,50
	Coeficiente de variação	17,14%	13,87%	23,24%
DIFERENÇA RELATIVA ENTRE MÉDIAS		<b>38,37%</b>	<b>-1,35%</b>	<b>-33,42%</b>

### Prisma de concreto e argamassa tipo iii

Por essa argamassa ser mais fraca, observa-se o comportamento pós-pico mais suave que o modelo anterior (ver Figuras 7 e 8).

Dessa vez, o modelo numérico representou melhor o comportamento experimental, mas a tensão de ruptura não foi tão acurada quanto o modelo anterior.

Ressalta-se o pequeno número de ensaios e que o enfoque do artigo é o procedimento para comparar resultados e calcular a incerteza de modelo.

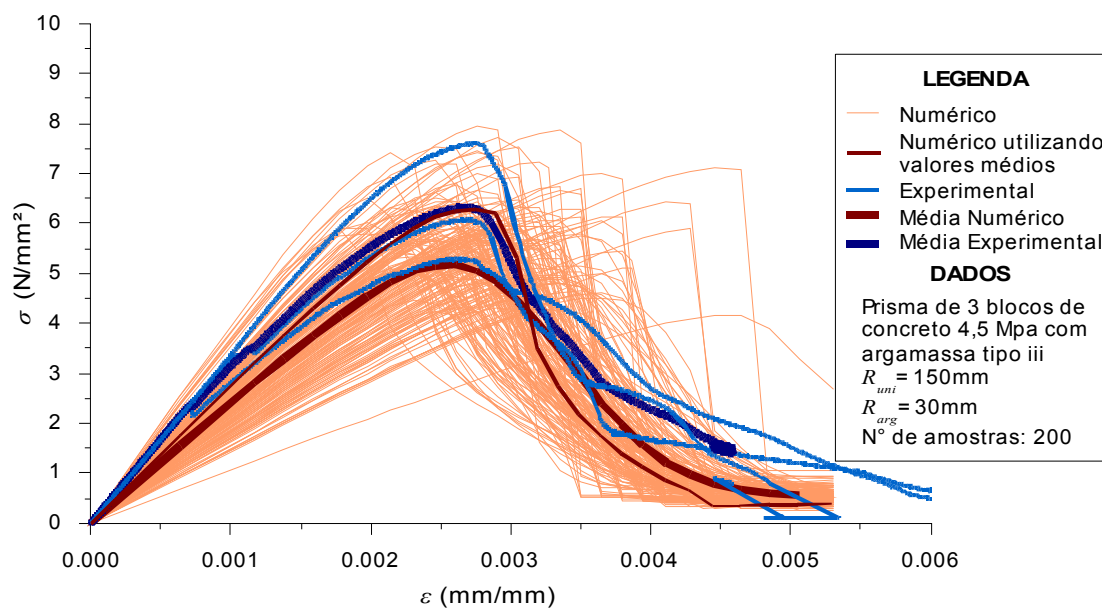


Figura 8 – Comparação das curvas tensão versus deformação das amostras numéricas com as curvas numéricas. Prisma com unidades de concreto e argamassa tipo iii.

Pode-se afirmar com 95% de confiança que a média numérica da resistência à compressão é igual à média experimental.

Tabela 10 – Comparação estatística dos resultados numéricos e os experimentais de prisma de concreto com argamassa tipo iii

	<b>Estatística</b>	$\varepsilon_{\text{crit}}$	$f_p$ (MPa)	$E_p$ (MPa)
EXPERIMENTAL	Média	0,00268	6,327	3118,06
	Coeficiente de variação	3,95%	18,42%	15,56%
NUMÉRICO	Média	0,00283	5,727	2421,90
	Coeficiente de variação	16,46%	13,56%	23,14%
<b>DIFERENÇA RELATIVA ENTRE MÉDIAS</b>		<b>5,70%</b>	<b>-9,48%</b>	<b>-22,33%</b>

#### 5.4 Incerteza de modelo

As respostas numéricas ficaram bem ajustadas para distribuições do tipo lognormal.

A formulação da incerteza de empregada é a descrita na eq. (6). Seja  $Y_{\text{exp}}$  uma variável aleatória representada por uma distribuição de probabilidade resultante do ajuste da resposta  $g_{\text{exp}}(X)$ , e  $Y_{\text{mod}}$  a VA ajustada a partir de  $g_{\text{mod}}(X)$ ; determina-se  $M$  por

$$M = Y_{\text{exp}} - Y_{\text{mod}} \quad (16)$$

$$\mu_M = \mu_{\text{exp}} - \mu_{\text{mod}} \quad (17)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_{\text{exp}}^2 + \sigma_{\text{mod}}^2} \quad (18)$$

$$\sigma_{\mu_M} = \frac{\sigma_M}{\sqrt{n}} \quad (19)$$

em que :

$n$  número de amostras.

A utilização de  $M$  representada pela média e o desvio padrão pode aumentar demasiadamente a incerteza do problema corrigido. Pois no desvio  $\sigma_M$  foram incorporadas incertezas referentes não só ao modelo numérico, mas também aos materiais.

Para contornar essa dificuldade, sugere-se as alternativas de correções do modelo:

- **CorrMD**: variável aleatória  $M$  representada por  $\mu_M$  e  $\sigma_M$  ;
- **CorrM**:  $M$  representada por apenas  $\mu_M$  ;
- **CorrMI**:  $M$  representada pela média  $\mu_M$  e a incerteza associada  $\sigma_{\mu_M}$

A variável  $n$  representa o tamanho da amostra, isto é,  $n = 3$ .

Supôs-se que as variáveis aleatórias  $Y$  e  $M$  apresentam distribuições probabilísticas semelhantes a  $Y_{\text{mod}}$ .

As Tabelas 11 e 12 resumem as respostas  $Y$  para cada tipo de avaliação estudada.

Tabela 11 – Parâmetros das distribuições da variável deformação crítica de prisma com argamassa tipo ii

Tipo	$\varepsilon_{crit}$ (mm\mm)		$f_p$ (MPa)		$E_p$ (MPa)	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
Experimental	2,29E-3	3,11E-4	6,673	0,925	3716,8	268,0
Numérico	3,17E-3	5,51E-4	6,764	1,247	2475,6	588,0
CorrM	2,29E-3	5,51E-4	6,673	1,247	3716,8	588,0
CorrMI	2,29E-3	6,61E-4	6,673	1,536	3716,8	696,3
CorrMD	2,29E-3	8,38E-4	6,673	1,993	3716,8	873,6

Tabela 12 – Parâmetros das distribuições da variável deformação crítica de prisma com argamassa tipo iii

Tipo	$\varepsilon_{crit}$ (mm\mm)		$f_p$ (MPa)		$E_p$ (MPa)	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
Experimental	2,68E-3	1,06E-4	6,327	1,165	3118,1	485,2
Numérico	2,83E-3	4,61E-4	5,727	0,776	2422,9	573,0
CorrM	2,68E-3	4,61E-4	6,327	0,776	3118,1	573,0
CorrMI	2,68E-3	5,36E-4	6,327	1,121	3118,1	718,5
CorrMD	2,68E-3	6,61E-4	6,327	1,601	3118,1	944,5

## 5.5 Exemplos

As avaliações referem-se à probabilidade da solicitação ultrapassar a resistência à compressão. Seja a probabilidade de falha alvo  $P_f = 7,2 \cdot 10^{-5}$  (segundo o Eurocode 0 [27]) como condição de segurança aceitável e econômica.

Seja determinar a probabilidade de falha de um prisma utilizando o modelo numérico estudado. Inicialmente dimensiona-se a parede à compressão simples de acordo com a norma NBR 10837:

$$f_{alv,c} \leq 0,20f_p R \quad (20)$$

em que:

$f_{alv,c}$  tensão atuante na parede devido à compressão simples;

$f_p$  resistência à compressão média do prisma;

$R$  fator de redução da resistência associado à esbeltez 0,20 fator de segurança global.

Seja uma parede com altura  $h = 270$  cm e espessura  $t = 14$  cm, o fator redução devido à esbeltez é 0,88792.

A tensão aplicada sob a parede é genericamente a soma da ação permanente nominal  $G_n$  e da ação variável nominal  $Q_n$ , ou seja:

$$f_{alv,c} = G_n + Q_n \quad (21)$$

Dada uma relação entre  $Q_n / G_n$ , a parcela do peso próprio é determinada em função da resistência:

$$G_n = \frac{0,178f_p}{(1 + Q_n / G_n)} \quad (22)$$

Para a análise da probabilidade de falha, deve-se conhecer o comportamento probabilísticos das resistências e das solicitações. As distribuições das resistências são conhecidas. As ações, de acordo com a bibliografia consultada, obedecem a distribuições e relações com valores nominais de acordo com a Tabela 13. A ação variável é definida para ação máxima total em 50 anos. Para mais detalhes consultar [28][29][30].

Tabela 13 – Distribuições das ações e suas relações com valores normativos

Ação	Distribuição	Razão entre média e normativo [31]	Ref. Bibli.	c.v.	Ref. Bibli.
Permanente	Normal	1,05	[29]	10%	[29]
Variável (escritório)	Tipo I - Gumbel	1,317	[30]	25%	[29]

A probabilidade de falha foi avaliada via FORM com o pacote computacional STRAND [14], variando a razão  $Q_n / G_n$  para ocupações do escritório.

Seja a relação  $Q_n / G_n = 0,80$  usual em edifícios. As probabilidades de falha dos modelos numérico e corrigidos possuem probabilidade aceitável, ou seja,  $P_f < 7,2 \cdot 10^{-5}$ .

A Figura 9 mostra que se obtêm diferentes níveis de segurança para cada de modelo de resistência adotado. A consideração ou não da incerteza, e a forma como ela é incorporada ao modelo de resistência interfere na probabilidade de falha de maneira significativa.

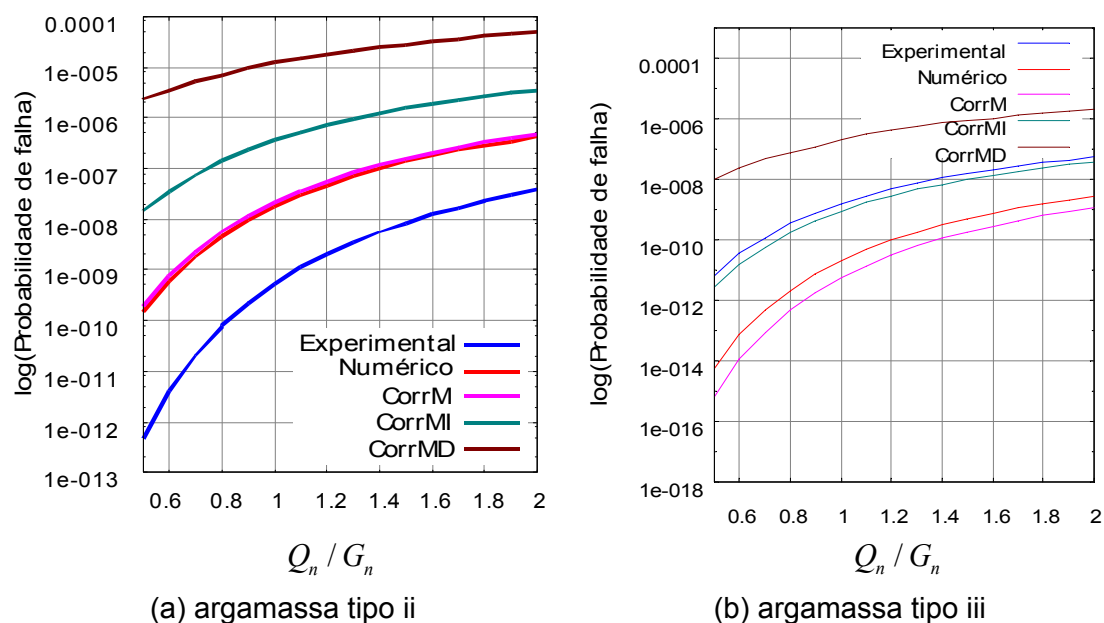


Figura 9 – Comportamento da  $P_f$  variando a relação  $Q_n / G_n$  para prisma de concreto.

Percebe-se que a CorrM posiciona-se acima ou abaixo da curva numérica dependendo de como o modelo estima o resultado experimental. Se o modelo é a favor da segurança a CorrM irá aumentar a probabilidade de falha, e se o modelo for contra a segurança a CorrM irá diminuir a probabilidade de falha. Já nas correções CorrMD e CorrMI são acrescentadas incertezas, que sempre aumentam a probabilidade de falha.

Salienta-se que as incertezas do problema são apenas referentes ao modelo numérico e aos materiais, de forma que não foram incluídas outras incertezas como: imperfeições geométricas, de mão-de-obra, de cálculo, de geometria, erro humano, etc.

## 6 CONCLUSÕES

Este artigo avaliou um procedimento para obtenção da incerteza de um modelo numérico em elementos finitos com análise não-linear baseada em dano, para representar o comportamento de prisma de concreto sujeito à compressão.

Julga-se razoável, de maneira geral, utilizar a incerteza que corrige a média e acrescente incerteza a esta (CorrMI), a fim de calcular uma probabilidade de falha mais realista sem acrescentar incerteza demasiada ao problema. Comprovou-se a importância da identificação e consideração da incerteza de modelo numa análise de confiabilidade estrutural.

## 7 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual esta pesquisa não poderia ter sido realizada.

## 8 REFERÊNCIAS

- ANG, A. H.S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering**: Emphasis on applications in civil & environmental engineering. 2. ed. New York: Wiley. 2007. 406p. [17]
- ANZANI, A.; BINDA, L.; RAMALHO, M. A.; TALIERCIO, A. Historic multi-leaf masonry walls: experimental and numerical research. **Masonry International**, v. 18, n. 3, p. 101-114, Winter, 2005. [6]
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980. [31]
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10837**: Cálculo de alvenaria estrutural de blocos vazados de concreto. Rio de Janeiro, 1989. [13]
- BARBOSA, C. S. **Resistência e deformabilidade de blocos vazados de concreto e suas correlações com as propriedades mecânicas do material constituinte**. 2004. 162 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004. [26]
- BECK, A. T. **Confiabilidade estrutural**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006. 212 p. (Notas de aula). [9]

- BECK, A. T. **STRAND: Structural risk analysis and design**. 2007. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007. (Programa computacional). [14]
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION. **BS 5628**: Code of practice for use of masonry - Part 1: Unreinforced masonry. London, 1992. [11]
- CENTRE EUROPÉEN DE NORMALISATION (CEN). **Eurocode 0**: Basis of structural design. Bruxelles, 2001. [27]
- CENTRE EUROPÉEN DE NORMALISATION (CEN). **Eurocode 6**: Design of masonry structures - Part 1-1: Common rules for reinforced and unreinforced. Bruxelles, 2001. [10]
- CHALK, P. L.; COROTIS, R. B. Probability model for design live loads. **Journal of the Structural Division**, v. 106, n. 10, p. 2017-2033, Oct, 1980. [30]
- DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. O. **Structural reliability methods**. Chichester: John Wiley & Sons. 1996. [2]
- ELLINGWOOD, B.; MACGREGOR, J. G.; GALAMBOS, T. V.; CORNELL, C. A. **Development of a probability based load criterion for american national standard A58**. Washington, DC: National Bureau of Standards Special Publication, n. 577, 1980. [29]
- FABER, M. H. **Risk and safety in civil: surveying and environmental engineering**. Swiss Federal Institute of Technology, ETHZ, Switzerland, 2006. (Notas de Aula). [16]
- FREITAS, A. A. **Análise numérica e experimental do comportamento de prismas e miniparedes submetidos à compressão**. 2008. 315 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. [22]
- GONÇALVES JÚNIOR, L. A. **Avaliação de incertezas em modelo de dano com aplicação a prismas de alvenaria sob compressão**. 2008. 195 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. [28]
- LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. Berlin: Springer. 1996. 228p. [20]
- LOURENÇO, P. B. **Computational strategies for masonry structures**. 1996. 220 p. Tese (Doutorado) - Civil Engineering Department, Delft University of Technology, Países Baixos, 1996. [19]
- LOURENÇO, P. B. Um micro-modelo para a análise de estruturas de alvenaria. **Engenharia Civil, Universidade do Minho**, v. 3, p. 15-28, 1996. [1]
- MELCHERS, R. E. **Structural reliability analysis and prediction**. 2. ed. Australia: John Wiley & Sons. 1999. 400p. [8]

MOHAAD, G. **Mecanismo de ruptura da alvenaria de blocos à compressão**. 2007. 312 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia, Universidade do Minho, Guimarães, 2007. [24]

MSJC. **ACI 530/ASCE 5/TMS 402**: Building code requirements for masonry structures. Boulder Co., 1999. [12]

NOVAES, A. G. **Métodos de otimização**: aplicações aos transportes. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1978. [25]

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of structures**. London: McGraw-Hill. 2000. p. 91-120. [15]

PAPA, E.; TALIERCIO, A. Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 55, n. 2, p. 163-179, Sep., 1996. [3]

PAPA, E.; TALIERCIO, A. A visco-damage model for brittle materials under monotonic and sustained stresses. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 29, n. 3, p. 287-310, Jan., 2005. [4]

PAPA, E.; TALIERCIO, A. A non-rotating anisotropic damage model for brittle materials. In: International center for numerical methods in engineering, 8., 2005, Barcelona. **Anais...** Barcelona. [5]

PROENÇA, S. P. B. **Fundamento de mecânica dos materiais**. 50 p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001. (Notas de aula). [21]

RAMALHO, M. A.; PAPA, E.; TALIERCIO, A.; BINDA, L. A numerical model for multi-leaf stone masonry. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON FRACTURE , 11., 2005, Torino. **Anais...** CD-ROM. [23]

RAMALHO, M. A.; TALIERCIO, A.; ANZANI, A.; BINDA, L.; PAPA, E. A numerical model for the description of the nonlinear behaviour of multi-leaf masonry walls. **Advances in Engineering Software**, v. 39, n. 4, p. 149-257, Apr., 2008. [7]

VAL, D.; BLJUGERB, F.; YANKELECSKY, D. Reliability evaluation in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. **Structural Safety**, v. 19, n. 2, p. 203-217, 1997. [18]