



ISSN 1809-5860

# Cadernos de **ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Estruturas



São Carlos, v.9 n. 38 2007

## **UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Reitora:  
Profa. Dra. SUELY VILELA

Vice-Reitor:  
Prof. Dr. FRANCO M. LAJOLO

## **ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Diretor:  
Profa. Dra. MARIA DO CARMO CALIJURI

Vice-Diretor:  
Prof. Dr. EDUARDO MORGADO BELO

## **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

Chefe do Departamento:  
Prof. Dr. SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA

Suplente do Chefe do Departamento:  
Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS

Coordenador de Pós-Graduação:  
Prof. Dr. MARCIO ANTONIO RAMALHO

Editor Responsável:  
Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO SILVA CORRÊA

Coordenadora de Publicações e Material Bibliográfico:  
MARIA NADIR MINATEL  
e-mail: minatel@sc.usp.br

Editoração e Diagramação:  
FRANCISCO CARLOS GUETE DE BRITO  
MARIA NADIR MINATEL  
MASAKI KAWABATA NETO  
MELINA BENATTI OSTINI  
RODRIGO RIBEIRO PACCOLA  
TATIANE MALVESTIO SILVA



# **Cadernos de ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Estruturas



Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos – USP  
Av. Trabalhador São-carlense, 400 – Centro  
CEP: 13566-590 – São Carlos – SP  
Fone: (16) 3373-9481 Fax: (16) 3373-9482  
site: <http://www.set.eesc.usp.br>

## SUMÁRIO

Análise experimental de painéis tipo sanduíche à flexão <i>Alexandre Araújo Bertini &amp; Libânio Miranda Pinheiro</i> .....	1
Análise numérica, via MEF, de ligações em treliças metálicas espaciais <i>Taís Santos Sampaio &amp; Roberto Martins Gonçalves</i> .....	29
A mixed BEM-FEM formulation for layered soil-superstructure interaction <i>Valério da Silva Almeida &amp; João Batista de Paiva</i> .....	63
Análise de edifícios altos em teoria de segunda ordem, considerando a rigidez transversal das lajes <i>Carlos Humberto Martins &amp; Helena M. C. Carmo Antunes</i> .....	83
Inércia equivalente das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado <i>Rivelli da Silva Pinto &amp; Marcio Antonio Ramalho</i> .....	107
Otimização de componentes de concreto pré-moldado protendidos mediante algoritmos genéticos <i>Vanessa Cristina de Castilho; Mounir Khalil El Debs; Maria do Carmo Nicoletti</i> .....	137



# ANÁLISE EXPERIMENTAL DE PAINÉIS TIPO SANDUÍCHE À FLEXÃO

Alexandre Araújo Bertini<sup>1</sup> & Libânio Miranda Pinheiro<sup>2</sup>

## Resumo

*Este trabalho trata do estudo experimental do comportamento à flexão de painéis tipo sanduíche, com placas de argamassa projetada. Esse tipo de elemento é utilizado em obras de edificações, sendo utilizado principalmente como painéis de fechamento, portantes ou não. Os resultados dos ensaios à flexão comprovam o bom desempenho estrutural desses elementos.*

*Palavras-chave: estruturas tipo sanduíche; argamassa projetada; flexão.*

## 1 INTRODUÇÃO

Estruturas mistas tipo sanduíche com núcleo de EPS e placas de argamassa moldadas no local da obra têm sido utilizadas como elementos na construção de edificações, conseguindo-se estruturas com bom desempenho estrutural e competitivas, com relação a outros tipos tradicionais de construção.

Painéis sanduíche com moldagem no local da obra consistem de pré-painéis formados, em geral, por placas de poliestireno ou poliuretano expandido (núcleo), nas faces nas quais são colocadas telas soldadas (reforço estrutural do painel). Essas telas são ligadas entre si por meios de fios que atravessam a placa do núcleo (fig.1).

Os pré-painéis podem ser feitos em fábricas, manualmente ou através de equipamentos sofisticados, e então são levados à obra e montados para execução de paredes exteriores, paredes interiores, forros e telhados.

Os pré-painéis são produzidos em tamanhos padronizados e saem da fábrica com as dimensões e os detalhes necessários para que possam ser executados na obra.

Em cada painel, as larguras das telas soldadas ultrapassam em 15cm a largura do EPS, proporcionando a emenda de um painel com o consecutivo. Somente quando todos os painéis são conectados e colocados na posição correta é que recebem um revestimento de argamassa, que varia de 2,5cm a 3,8cm de espessura, de cada lado do núcleo. Esse revestimento é feito por meios tradicionais de emboçamento ou por processos mais modernos, que empregam mecanismos de jateamento de argamassa sob pressão, resultando um painel rígido e uma estrutura monolítica, sem juntas.

---

<sup>1</sup> Professor da Universidade Federal do Ceará, bertini@ufc.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, libanio@sc.usp.br

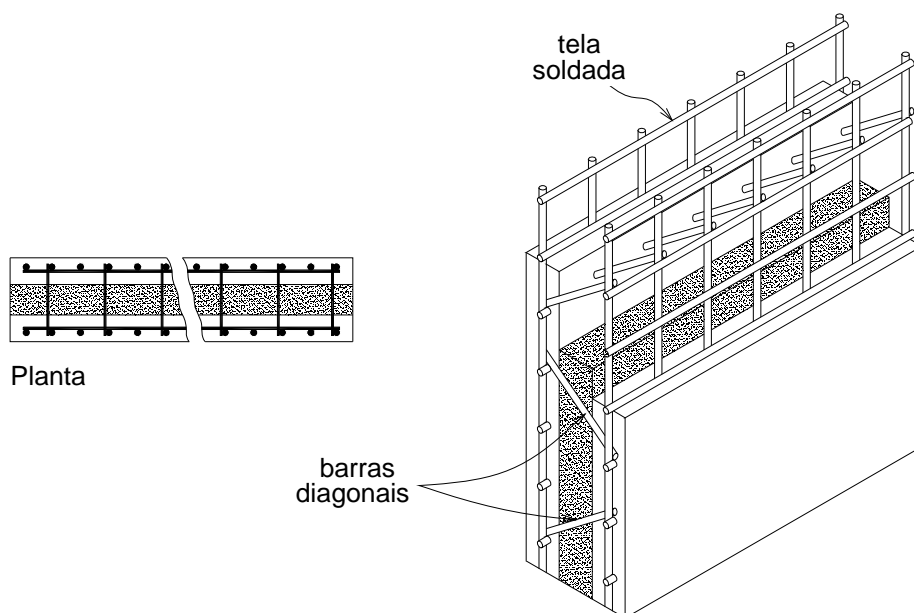


Figura 1 – Pré-painel de poliestireno com armadura

Apesar desse método (pré-painéis com posterior projeção da argamassa) ser utilizado na construção de edificações em vários países, entre os quais Estados Unidos, Itália, Austrália, Venezuela e Brasil, inclusive, ainda existem dúvidas da influência da colaboração entre as placas resistentes, em função do tipo de núcleo, no comportamento à flexão.

Na prática, tais dúvidas somente não impedem a aplicação do método por serem considerados dados obtidos da experiência dos construtores, e os esforços são relativamente pequenos, havendo até mesmo sobra de resistência em alguns casos.

A fim de possibilitar a aplicação do método construtivo obedecendo aos requisitos de funcionalidade, segurança e economia, foi realizada uma série de ensaios à flexão, variando-se a distribuição das nervuras e verificando-se sua influência no comportamento estrutural do painel, visando compreender melhor o comportamento estrutural de elementos tipo sanduíche e definir procedimentos mais adequados para o cálculo dessas estruturas.

## 2 DESCRIÇÃO DOS MODELOS EXPERIMENTAIS

Neste item apresentam-se a quantidade de modelos ensaiados, suas dimensões e os tipos dos modelos, levando-se em conta a posição das nervuras e a existência ou não de armadura de cisalhamento.

### 2.1 Quantidade dos modelos

Foram confeccionados oito modelos para esse ensaio. Os painéis foram designados por PSF, contendo os índices I, II, ..., IIa, IVa, em função do tipo de configuração da nervura.

## 2.2 Dimensões

A fig.2 mostra as configurações básicas dos painéis ensaiados, bem como suas dimensões.

Os tipos de configuração mostrados na fig.2 são: a) painel sem nervuras; b) painel com nervuras longitudinais; c) painel com nervuras transversais nas extremidades; d) painel com nervuras nas extremidades transversais e longitudinais; e) painel com nervuras nas extremidades transversais e longitudinais e uma nervura longitudinal no meio do painel.

Foi adotada uma espessura de 3cm para as placas e para as nervuras. O núcleo, descrito mais adiante, é igual para todos os modelos, sendo composto por uma placa de EPS com 7,8cm de espessura.

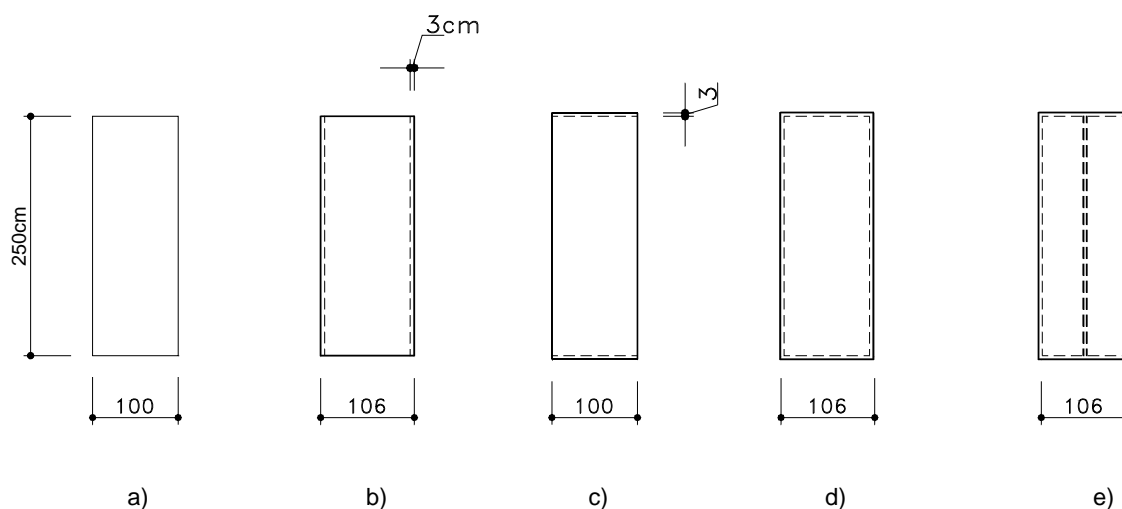


Figura 2 – Dimensões dos painéis e configurações das nervuras

## 2.3 Tipos

A tabela 1 mostra um resumo dos tipos e das quantidades dos modelos confeccionados. Os modelos ensaiados à flexão foram denominados PSF, podendo ser do tipo I, II, III, IV, V, IIa, IVa e Va. O índice a refere-se à inexistência de armadura de cisalhamento, no interior das nervuras.

## 3 MATERIAIS EMPREGADOS

Apresentam-se as características da argamassa, do EPS e da armadura.

### 3.1 Argamassa

O traço da argamassa foi o obtido experimentalmente. A proporção adotada forneceu uma argamassa projetável, tanto manualmente como através da caneca de projeção. Foi empregado cimento Portland de alta resistência inicial – CPV-ARI PLUS, marca Ciminas. Utilizaram-se superplastificante marca Reax 3000 e sílica ativa marca Silmix.

Tabela 1 – Tipos dos modelos ensaiados.

Configuração	Ensaio à Flexão	
	Tipos dos modelos	
Sem nervuras	PSF-I	—
Com nervuras longitudinais	PSF-II	PSF-IIa
Com nervuras transversais	PSF-III	—
Com nervuras em todas as extremidades	PSF-IV	PSF-IVa
Com nervuras nas extremidades e uma longitudinal no centro	PSF-V	PSF-Va
Quantidade de modelos	5	3

A relação obtida cimento/areia foi de 1:3, com adição de 2% de superplastificante (SP) e 10% de sílica ativa (SA). O fator água-cimento foi  $a/c = 0,51$ . As porcentagens são tomadas em função do peso do cimento. A utilização da sílica ativa melhorou alguma característica da argamassa, tais como: coesão, resistência e compacidade.

Como agregado miúdo utilizou-se areia natural, enquadrada como areia média, dentro dos limites granulométricos conforme a NBR 7211. Foram feitos os ensaios de caracterização da areia, obtendo-se para massa específica real um valor de  $2,62\text{g/cm}^3$  e para a massa unitária o valor de 1,51.

A argamassa tinha consistência, trabalhabilidade e fluidez para permitir sua projeção na superfície do núcleo, por meio da caneca de projeção. Foram determinados para cada etapa de projeção os Índices de Consistência (I.C.), e foram moldados corpos-de-prova cilíndricos de  $10\text{cm} \times 20\text{cm}$ , para a determinação da resistência à compressão no dia do ensaio do painel ( $f_{cj}$ ), da resistência à tração ( $f_{tj}$ ) e do módulo de elasticidade (E). Esses dados são apresentados na tabela 2.

### 3.2 Núcleo

Foram utilizadas placas de EPS como material do núcleo. As placas foram fornecidas pela empresa Código Engenharia, que produz pré-painéis (placas de EPS com telas soldadas, dispostas em ambos os lados, ligadas por fios que atravessam a placa de EPS, fig.3), para a construção de edificações através da técnica sanduíche.

As placas de EPS empregadas nos pré-painéis possuíam  $2,5\text{m}$  de comprimento por  $1,0\text{m}$  de largura, com  $7,8\text{cm}$  de espessura. Para todos os modelos, as dimensões dos pré-painéis são as mesmas.

Tabela 2 – Controle da argamassa utilizada na confecção dos modelos

Modelos	$f_{tj}$ (MPa)	$f_{cj}$ (MPa)	E (MPa)	I.C. (mm)
PSF I	2,82	65,83	22.846	240
PSF II	2,88	67,67	28.120	229
PSF IIa	2,48	57,53	28.982	225
PSF III	2,49	69,25	28.042	225
PSF IV	2,75	66,10	28.283	233
PSF IVa	2,44	55,80	29.103	234
PSF V	2,70	71,03	29.975	228
PSF Va	2,77	66,34	29.339	216



Figura 3 – Pré-painel (núcleo de EPS + tela soldada)

### 3.3 Armadura: tipo e disposição

A armadura era composta por duas telas soldadas e por barras de reforço, como parte do pré-painel (placa de EPS mais tela soldada). Foram dispostas nos dois lados da placa de EPS e ligadas entre si por fios, do mesmo diâmetro dos fios da tela, conforme a fig.4. Esses fios, ligados à tela por meio de solda, atravessavam a placa de EPS, fazendo um ângulo de aproximadamente 45° com a superfície da placa. A função principal desses fios, ou conectores, é manter as telas a uma distância de 1cm da face da placa de EPS, dos dois lados, e fazer com que o pré-painel possua rigidez suficiente para permitir a projeção da argamassa.

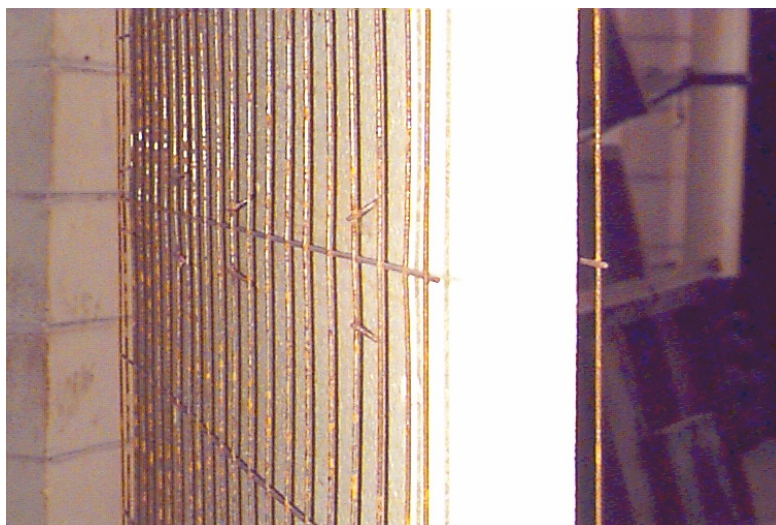


Figura 4 – Detalhe do pré-painel (EPS + tela soldada)

O aço empregado na tela e nos conectores foi o CA-60, com diâmetro igual a 2,4mm. Os fios longitudinais possuíam um espaçamento de 15cm e os transversais, de 5cm.

Os fios complementares de aço CA-50 tinham diâmetro de 4,2mm. Em cada lado do pré-painel eram colocados quatro fios distribuídos no sentido transversal.

Os modelos PSF-II, PSF-III, PSF-IV e PSF-V possuíam nervuras nas extremidades. Essas nervuras eram armadas com “estribos” em forma de U, a cada 15cm, com fios de 4,2mm.

Esses “estribos” eram amarrados nas telas soldadas com arame nº 18. Os demais modelos que continham nervuras (PSF-IIa, PSF-IIIa, PSF-IVa e PSF-Va) não possuíam estribos.

#### 4 CONFECÇÃO DOS MODELOS

Após a execução da armadura (complementar e das nervuras) e sua instrumentação, os pré-painéis foram posicionados na vertical e preparados para aplicação da argamassa projetada. Foram colocados ganchos, na parte superior dos painéis, para transporte dos elementos depois de prontos.

A argamassa foi projetada nos painéis em duas etapas, utilizando-se uma caneca de projeção, acionada por um compressor de ar, com capacidade de vazão de 710 litros/min e pressão do ar de 120 lb/in<sup>2</sup>. A primeira etapa era feita de modo a deixar a armadura aparente. O excesso era retirado por meio de uma régua, mantendo-se uma espessura média de 1cm. Nessa etapa, eram projetados os dois lados e, conforme o caso, as nervuras laterais (fig.5).

Na segunda etapa de projeção da argamassa realizou-se o cobrimento da armadura (1,5cm) e o acabamento da superfície. A espessura final das placas de cada lado era de 3,0cm. Nessa etapa eram colocados sarrafos nas laterais do painel, que serviam como guias, para garantir a espessura de 14cm ao longo de todo o painel.



Figura 5 – Primeira etapa da projeção da argamassa

O acabamento do painel era feito da mesma maneira que em reboco de alvenaria, por meio de uma desempenadeira de madeira. Após o acabamento, o painel era envolvido por um plástico para favorecer a cura da peça. Além do plástico, a peça era umedecida, jogando-se água através de uma mangueira.

O resumo dos resultados do controle tecnológico da argamassa foi apresentado na tabela 2.

## 5 ESQUEMA ESTRUTURAL E INSTRUMENTAÇÃO

Foi adotada como esquema estrutural uma viga simplesmente apoiada, submetida a um carregamento nos terços do vão. A força foi aplicada utilizando-se um atuador servo-hidráulico de marca INSTRON, com capacidade de 500kN. O ensaio foi realizado com controle de deslocamento, aplicando-se uma velocidade de 0,04mm/s. O esquema estático e o carregamento são mostrados na fig.6.

Os deslocamentos verticais foram medidos em nove pontos, conforme mostra a fig.7, através de transdutores elétricos da marca Kyowa, modelo DT 100 A, com sensibilidade de 0,05mm e curso de 100mm. Também foram medidos os deslocamentos relativos entre as duas placas dos painéis tipo sanduíche. Para isto, colocaram-se transdutores na posição horizontal, localizados nas extremidades do painel.

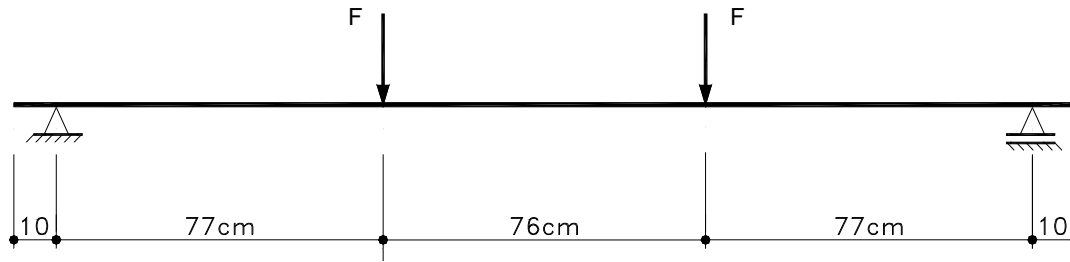


Figura 6 – Esquema estático e de carregamento

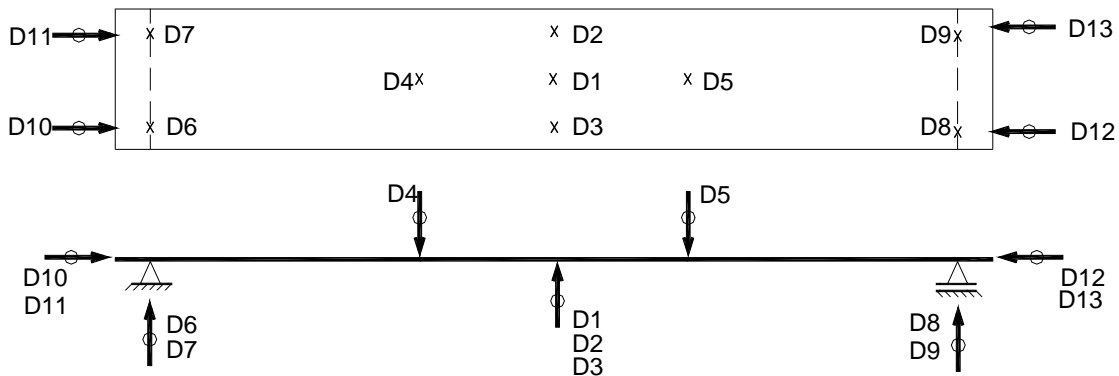


Figura 7 – Posição dos transdutores elétricos ao longo do painel

Foram medidas as deformações na parte central da placa comprimida, por meio de extensômetros colados em sua superfície.

Os extensômetros, marca Kyowa, modelo KGF-10-C1-11, tinham base de 10mm. Suas disposições estão mostradas na fig.8.

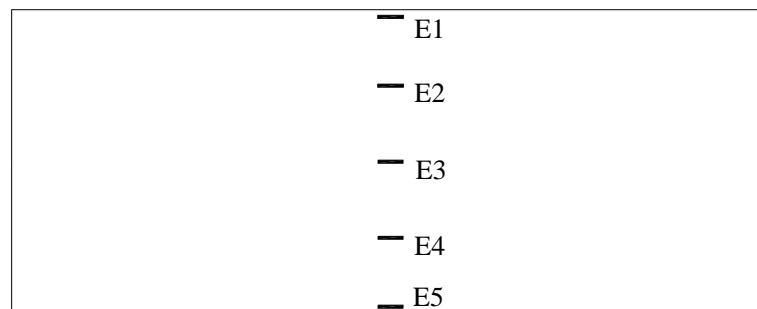
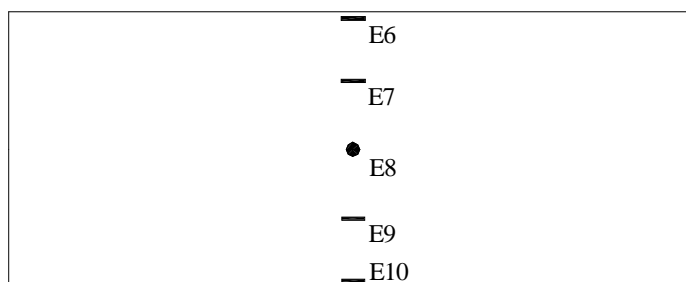


Figura 8 – Disposição dos extensômetros na placa comprimida

Na armadura da placa tracionada foram colados cinco extensômetros para medição das deformações decorrentes da tração. Eles foram colados tanto na tela soldada como na armadura complementar. A disposição desses extensômetros variou de acordo com o tipo do modelo a ser ensaiado, como é mostrado na fig.9.

PSF-I, PSF-II, PSF-IIa, PSF-III,  
PSF-IV, PSF-IVa



- extensômetro colado na tela soldada
- I extensômetro colado na armadura complementar

PSF-V, PSF-Va

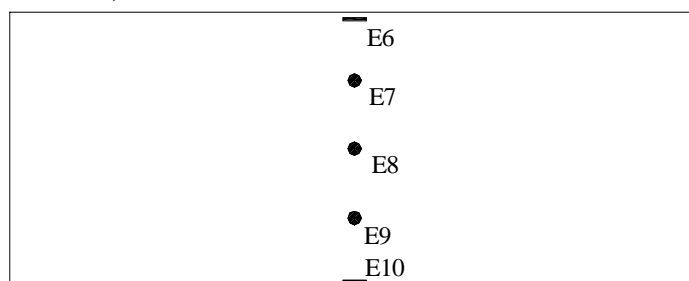


Figura 9 – Disposição dos extensômetros da armadura de tração

Para os modelos PSF II, PSF IV e PSF V foram colados extensômetros na armadura das nervuras para o acompanhamento das deformações, conforme mostram as figuras 10 (a) e 10 (b).

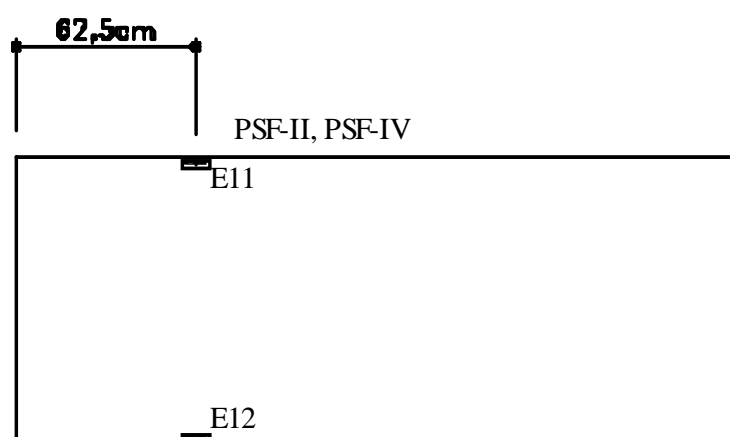


Figura 10(a) – Disposição dos extensômetros colados na armadura das nervuras

Foi utilizado um sistema de aquisição de dados, marca Measurements Group, modelo System 5000, para registrar as leituras indicadas pela célula de carga, pelos transdutores elétricos e pelos extensômetros.

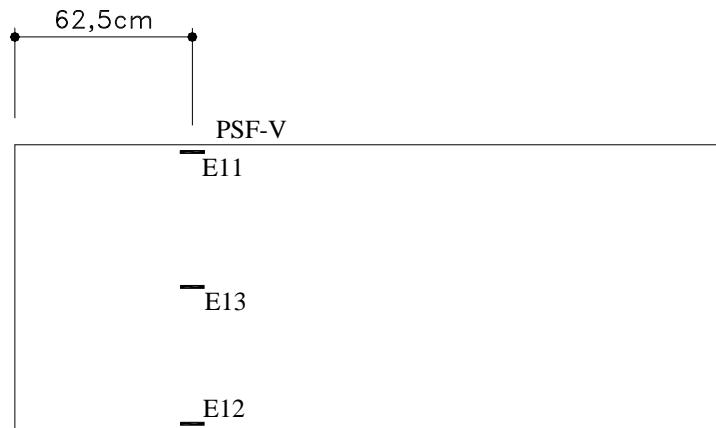


Figura 10 (b) – Disposição dos extensômetros colados na armadura das nervuras

## 6 RESULTADOS OBTIDOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os painéis foram ensaiados à flexão, aplicando-se o carregamento nos terços do vão ao longo da largura. Para cada modelo obteve-se um valor do momento de fissuração e da carga de ruptura.

Verificou-se para a maioria dos modelos ensaiados uma ruptura caracterizada por deformação excessiva do painel, observando-se também uma abertura excessiva das fissuras.

### 6.1 Momento de fissuração

O momento de fissuração ( $M_f$ ), segundo o anexo da NBR 7197 (1989), é calculado pela expressão:

$$M_f = \frac{f_{ctm} I}{h - x} \quad (1)$$

$f_{ctm}$  : resistência média do concreto à tração na flexão;

$$f_{ctm} = \begin{cases} 1,2 f_{ctk} & \text{para seção T ou duplo T} \\ 1,5 f_{ctk} & \text{para seção retangular} \end{cases}$$

$f_{ctk}$  : resistência característica do concreto à tração

Na ausência de dados experimentais, pode-se utilizar os seguintes valores para a resistência à tração:

$$f_{ctk} = \begin{cases} f_{ck} / 10 & \text{para } f_{ck} \leq 18 \text{ MPa} \\ 0,06 f_{ck} + 0,7 \text{ MPa} & \text{para } f_{ck} > 18 \text{ MPa} \end{cases}$$

$f_{ck}$  : resistência característica do concreto à compressão;

$I$ ,  $x$ : momento de inércia e posição da linha neutra da peça não-fissurada (estádio I), considerando-se seção homogeneizada e razão entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto ( $\alpha_e$ ) igual a 10 (combinação rara) ou 15 (combinação freqüente ou quase permanente);

$h$  : altura da seção.

No caso em estudo, a seção é do tipo sanduíche, e o grau de composição entre as faces é parcial. SHEPPARD & PHILLIPS (1989), sugerem uma correção do momento de inércia, para levar em conta a perda de rigidez pela movimentação relativa entre as faces. A seção sanduíche é transformada em uma seção maciça de inércia equivalente. Seguindo essas recomendações, tem-se que:

$$I_{\text{corrigido}} = C \cdot I \quad (2)$$

onde:

$I_{\text{corrigido}}$  = momento de inércia da seção equivalente;

$C$  = coeficiente de correção;

$I$  = momento de inércia da seção tipo sanduíche.

O momento de inércia  $I$  é calculado a partir da expressão 3.

$$I = \frac{b}{12} (h^3 - c^3) \quad (3)$$

onde:

$b$  = largura da seção;

$h$  = altura da seção;

$c$  = espessura do núcleo.

O momento de inércia  $I_{\text{corrigido}}$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$I_{\text{corrigido}} = \frac{bh_{\text{eq}}^3}{12} \quad (4)$$

onde  $h_{\text{eq}}$  = altura da seção de inércia equivalente.

Comparando as expressões 2, 3 e 4, determina-se  $h_{\text{eq}}$  em função de  $C$ ,  $h$  e  $c$ :

$$h_{\text{eq}} = \sqrt[3]{C(h^3 - c^3)} \quad (5)$$

Adotando-se os valores sugeridos por SHEPPARD & PHILLIPS (1989),  $C = 0,22$  para os painéis sem nervuras e  $C = 0,39$  para os painéis com nervuras, calculam-se a altura equivalente  $h_{\text{eq}}$  e os valores da posição da linha neutra ( $x$ ) e do momento de inércia ( $I$ ), considerando-se estágio I. Substituindo-se os valores de  $x$ ,  $I$  e  $h_{\text{eq}}$  na eq.1, determina-se o valor de  $M_{r,\text{teórico}}$ , para cada modelo.

A tabela 3 mostra os valores obtidos dos momentos fletores, referentes à primeira fissura ocorrida durante o ensaio de flexão, bem como os valores calculados

teoricamente. A primeira fissura do painel representa uma mudança de inclinação da curva Força x Deslocamento. Os valores utilizados da resistência da argamassa à tração foram os obtidos dos ensaios relativos a cada modelo. O momento no meio do vão, produzido pelo peso próprio do modelo, foi somado ao valor de  $M_{r,exp}$ .

Tabela 3 – Valores dos momentos de fissuração em kNm

MODELO	$M_{r,exp}$	C	$h_{eq}$ (cm)	$M_{r,teo}$	$M_{r,exp}/M_{r,teo}$
PSF I	3,17	0,22	7,93	4,56	0,69
PSF II	5,57	0,39	9,60	6,81	0,82
PSF IIa	5,23	0,39	9,60	5,85	0,89
PSF III	4,79	0,39	7,93	5,88	0,81
PSF IV	4,71	0,39	9,60	6,49	0,73
PSF IVa	3,57	0,39	9,60	5,76	0,62
PSF V	5,31	0,39	9,60	6,37	0,83
PSF Va	3,37	0,39	9,60	6,37	0,53

Os valores da segunda coluna são os momentos de fissuração obtidos do ensaio de flexão. Na terceira coluna estão os valores do fator de correção C. Na quarta encontram-se os valores das alturas equivalentes. Na quinta coluna estão os valores dos momentos de fissuração calculados teoricamente, considerando-se a seção maciça de altura  $h_{eq}$ . A última coluna apresenta a relação entre os valores dos momentos de fissuração experimentais e teóricos.

Na tabela 3 pode-se observar que todos os modelos obtiveram momentos de fissuração teóricos maiores que os obtidos nos ensaios. Essa diferença é maior para o modelo PSF Va, que apresentava fissuras iniciais.

O menor valor do momento de fissuração obtido do ensaio foi no modelo PSF I. Verifica-se para esse modelo que a interação das placas de argamassa é proporcionada, praticamente, apenas pela placa de EPS. É de se esperar uma movimentação maior entre as faces, fazendo a seção tipo sanduíche comportar-se como uma seção parcialmente composta, com um grau de composição em função da placa de EPS. Essa composição parcial faz com que as placas apresentem separadamente uma flexão adicional em torno de seu próprio eixo (ALLEN, 1969), ocasionando uma fissuração precoce do painel.

Analisando os valores da tabela 3, para os modelos PSF II, PSF III, PSF IV e PSF V, verifica-se que o número de nervuras parece não interferir significativamente no valor do momento de fissuração. Nos Modelos PSFII e PSFIIa, não se verificou redução significativa de  $M_r$ , decorrente da inexistência da armadura de cisalhamento na nervura (redução de 6%).

A mesma conclusão não vale para os modelos PSF IV e PSF IVa, pois a redução foi de 24%. O modelo PSF Va apresentava fissuras iniciais; por isso, o seu resultado foi desprezado na análise.

O cálculo do momento de fissuração, considerando a seção completamente composta, resulta em valores da ordem de 10% maiores que os determinados a partir da seção equivalente. A adoção dos valores do coeficiente de correção do momento de inércia, sugeridos por SHEPPARD & PHILLIPS (1989), para compensar a perda de rigidez pela composição parcial da seção, aproxima os resultados teóricos dos experimentais. Nos casos estudados, essa redução não é suficiente.

Os valores do coeficiente  $C$  sugeridos por SHEPPARD & PHILLIPS foram determinados a partir de ensaios de elementos tipo sanduíche com placas de concreto pré-moldadas, nas quais o concreto foi adensado por meio de equipamentos de vibração. Os modelos PSF, ensaiados no presente trabalho, foram executados fazendo-se uso de técnicas de projeção da argamassa, como foi descrito anteriormente. É evidente que a argamassa moldada dessa maneira não obtém o mesmo grau de compactação se comparada com elementos moldados, utilizando-se equipamentos de vibração. Dessa maneira, os valores de  $C$  sugeridos por SHEPPARD & PHILLIPS não são os mais adequados, em virtude principalmente do modo de execução das placas.

Dos gráficos de deformações mostrados nas figuras 13 a 20, observa-se que o valor da deformação média do aço tracionado, no momento da primeira fissura (que é aproximadamente a deformação de ruptura da argamassa tracionada), para todos os modelos, é inferior a  $0,05\%$ , enquanto o valor esperado ( $f_{tk}/E_c$ ) era de  $0,30\%$ . O valor da deformação de ruptura depende, é claro, de vários fatores, tais como: quantidade e disposição da armadura, traço da argamassa e sua resistência à tração, cura, adensamento da argamassa etc. Dentre esses fatores, o modo como foram executadas as faces, por projeção da argamassa, provavelmente teve um peso maior no valor da deformação da argamassa na primeira fissura, ocasionando momentos de fissuração menores que o esperado.

Conforme a tabela 4, onde se faz um ajuste do valor de  $C$ , observa-se que os valores médios de  $C = 0,13$ , para painéis sem nervuras, e  $C = 0,28$  para painéis com nervura, parecem mais adequados para o caso em que as faces são executadas por técnicas de projeção. Esses valores podem ser utilizados quando o núcleo não tem participação efetiva na composição da seção, como é o caso de placas de EPS (núcleo fraco). Para casos em que o núcleo ou os conectores participam efetivamente da transmissão de cisalhamento, é necessário um estudo específico para adequar o valor de  $C$ .

## 6.2 Momento de ruptura

Para todos os modelos, o ensaio foi interrompido por causa da deformação e abertura de fissura excessivas do painel. A fig.11 mostra um modelo sendo ensaiado em uma etapa próxima da ruptura, podendo-se observar o painel bastante deformado. Para os modelos PSF-II, PSF-IIa, PSF-IV, PSF-IVa, PSF-V e PSF-Va, as fissuras nas nervuras se desenvolviam durante o ensaio, passando para a placa comprimida. À medida que a carga era aplicada, essas fissuras aumentavam sua abertura e extensão, provocando um estado de fissuração inaceitável (fig.12).

Tabela 4 – Valores dos momentos de fissuração em kNm

MODELO	$M_{r,exp}$	C	$h_{eq}$ (cm)	$M_{r,teo}$	$M_{r,exp}/M_{r,teo}$
PSF I	3,17	0,130	6,66	3,21	1,0
PSF II	5,57	0,280	8,60	5,46	1,0
PSF Iia	5,23	0,280	8,60	4,70	1,1
PSF III	4,79	0,280	8,60	4,72	1,0
PSF IV	4,71	0,280	8,60	5,21	0,9
PSF Iva	3,57	0,280	8,60	4,62	0,8
PSF V	5,31	0,280 </td <td>8,60</td> <td>5,11</td> <td>1,0</td>	8,60	5,11	1,0
PSF Va	3,37	0,280	8,60	5,11	0,7

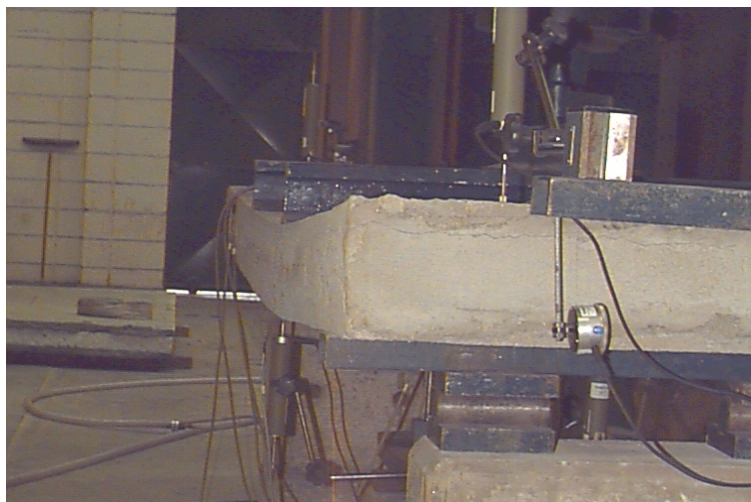


Figura 11 – Ensaio de flexão em uma etapa próxima da ruptura

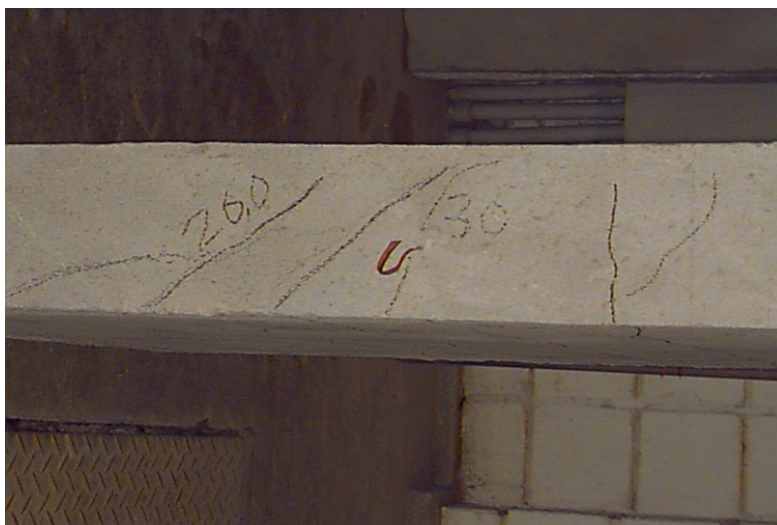


Figura 12 – Fissuras numa etapa do ensaio próxima da ruptura - PSF-IV

Todos os modelos foram dimensionados para um momento de 9,3kNm. Esse valor foi adotado a partir de esforços atuantes, supondo-se um muro de arrimo de 2,85m de altura com contrafortes distanciados de 3m.

Foram adotadas para o dimensionamento as hipóteses de cálculo do concreto armado segundo a NBR 6118, supondo o painel completamente composto, ou seja, desprezou-se o deslocamento relativo entre as faces. A comparação entre os valores teóricos e os experimentais permite avaliar se as hipóteses utilizadas são apropriadas ou não para o dimensionamento de painéis tipo sanduíche, com nervuras. Para o cálculo do momento de ruptura teórico, foram tomados os valores das propriedades dos materiais (aço e concreto) obtidos nos ensaios.

A tabela 5 mostra o resumo dos valores dos momentos de ruptura para cada modelo ensaiado, bem como uma comparação desses com os valores teóricos calculados a partir das hipóteses do concreto armado.

Tabela 5 – Valores teóricos e experimentais dos momentos de ruptura em kNm.

MODELO	$M_{\text{últ,exp}}$	$M_{\text{últ, teo}}$	$M_{\text{exp}}/M_{\text{últ,teo}}$
PSF I	7,08	9,3	0,76
PSF II	12,73	9,3	1,37
PSF IIa	9,44	9,3	1,02
PSF III	7,45	9,3	0,80
PSF IV	12,98	9,3	1,40
PSF IVa	8,63	9,3	0,93
PSF V	13,7	9,3	1,47
PSF Va	10,27	9,3	1,10

A segunda e a terceira colunas apresentam, respectivamente, os valores dos momentos últimos obtidos nos ensaios e os momentos últimos teóricos. Esses últimos foram calculados considerando-se a seção completamente composta. A última coluna contém a relação entre os valores experimentais e os valores esperados.

O valor do momento último obtido no ensaio, para o modelo sem nervura (PSF I), foi 24% menor que o valor esperado. A transferência de esforços de uma placa para outra é realizada, em grande parte, por meio da placa de EPS, que, apesar de não ter rigidez elevada, garante a composição parcial do painel. Se a seção funcionasse sem nenhuma interação (não-composto), o valor teórico do momento último seria de aproximadamente 2,60kNm, utilizando-se a mesma armadura. O ganho de resistência à flexão conseguida pelo afastamento das placas, mesmo utilizando-se uma placa de EPS como núcleo, é algo em torno de 258%.

Da mesma maneira, no modelo PSF III, com nervura apenas nas extremidades transversais, obteve-se um momento último 20% menor que o valor esperado. Verificou-se nesse painel um pequeno aumento no momento último, da ordem de 5%, em relação ao modelo PSF I.

Pode-se dizer que as nervuras do modelo PSF III tiveram pouca contribuição na ruptura do painel à flexão. Se as nervuras tivessem espessuras maiores, seria de se esperar que o grau de composição da seção aumentasse.

As figuras 13 e 14 mostram as deformações da placa comprimida e da armadura tracionada, respectivamente, para os modelos PSF I e PSF III.

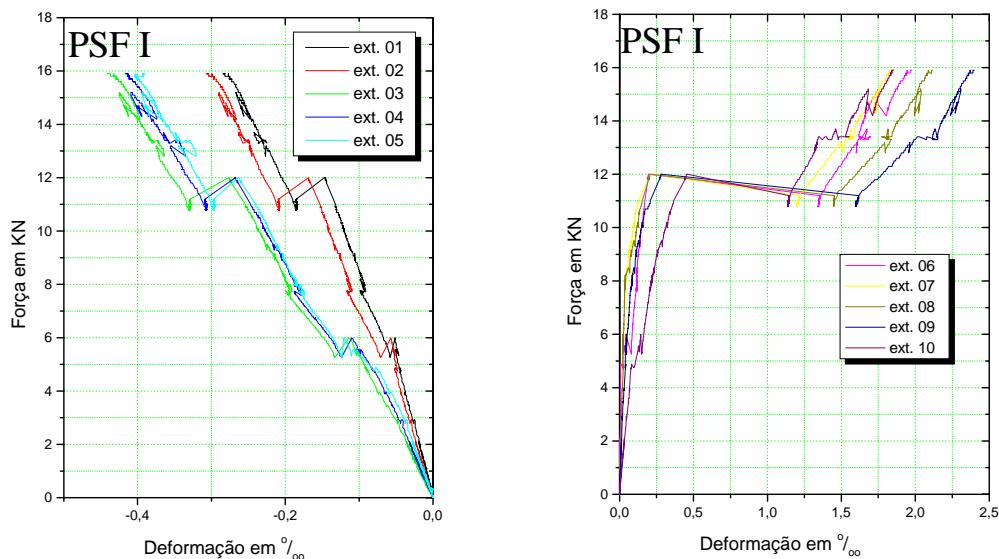


Figura 13 – Deformações no painel PSF I

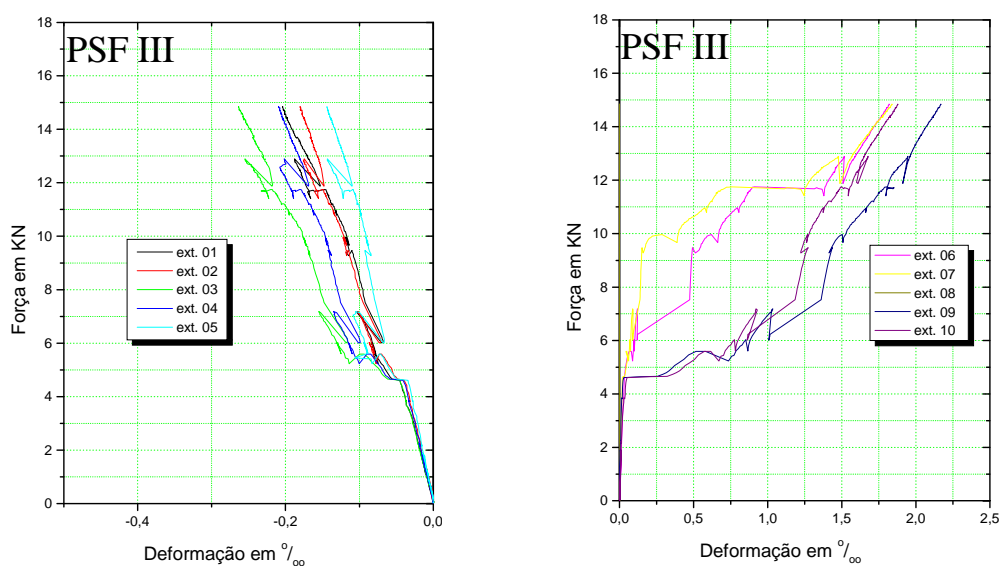


Figura 14 – Deformações no painel PSF III

A deformação média na placa comprimida no modelo PSF I foi maior que no modelo PSF III. Da mesma forma, a deformação média de tração no aço foi ligeiramente maior. A composição adicional proporcionada pelas nervuras do modelo PSF III justifica essa diferença. À medida que aumenta o grau de composição da seção, há um decréscimo nas deformações no concreto e no aço, pois a interação das placas é cada vez maior, como pode ser verificado nas figuras que mostram as deformações nos painéis com maior número de nervuras (figuras 15 a 20).

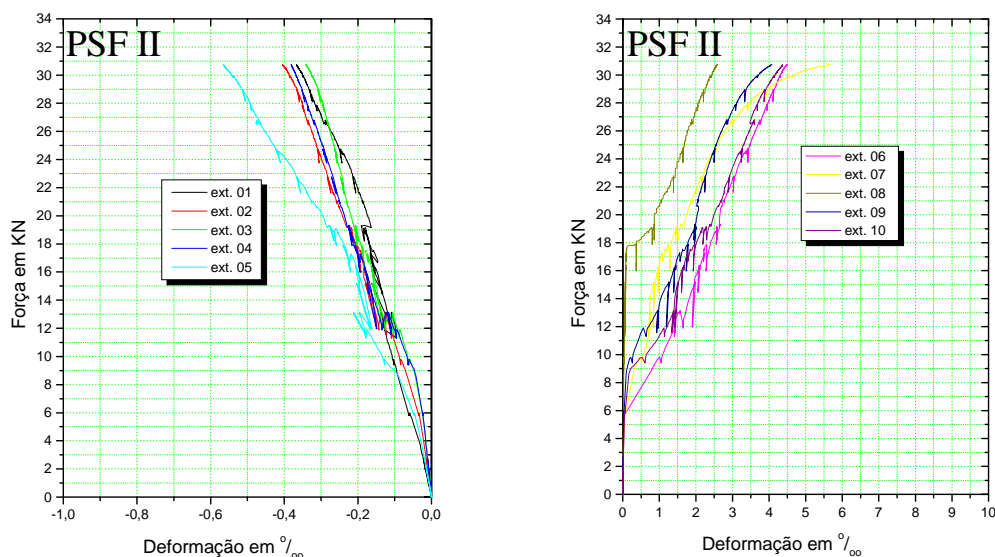


Figura 15 – Deformações no painel PSF II

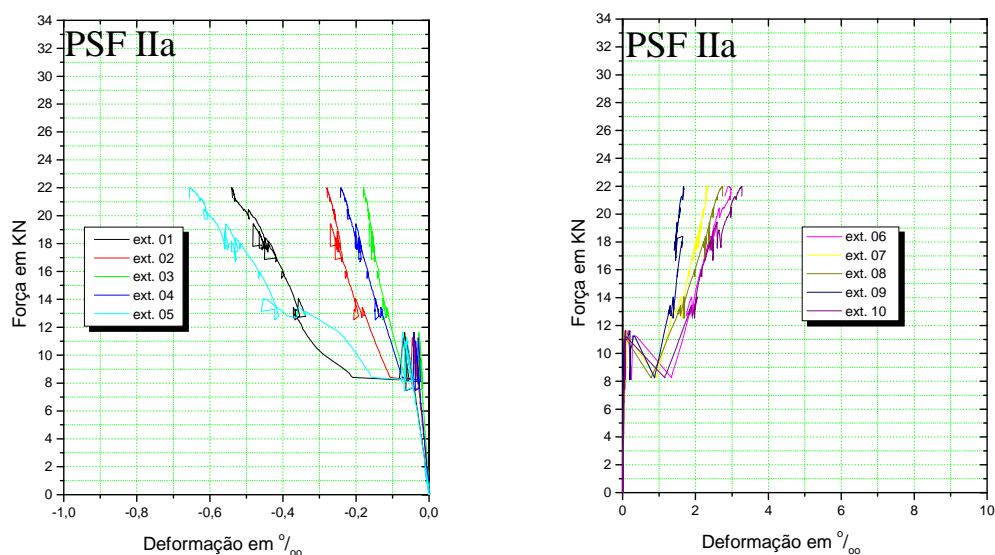


Figura 16 – Deformações no painel PSF IIa

As rupturas dos painéis PSF I e PSF III coincidem com o início do escoamento do aço, conforme os gráficos de deformação do aço das figuras 13 e 14.

Voltando à tabela 5, observa-se que, para os modelos com nervuras longitudinais (PSF II, PSF IIa, PSF IV, PSF V e PSF Va), exceto para o PSF IVa, os valores dos momentos últimos obtidos do ensaio superaram os valores esperados. É interessante notar que a armadura das nervuras melhorou de maneira significativa a resistência à flexão dos painéis PSF II, PSF IV e PSF V. Comprova-se isto comparando os valores da coluna 4 dos modelos com armadura nas nervuras e sem armadura, estas caracterizadas pela letra a.

Apesar de os modelos com nervuras longitudinais sem armadura terem atingido os valores esperados, exceto o PSF IVa, é inteiramente recomendável que na prática se utilize uma armadura mínima nas nervuras, que comprovadamente melhora o comportamento à flexão.

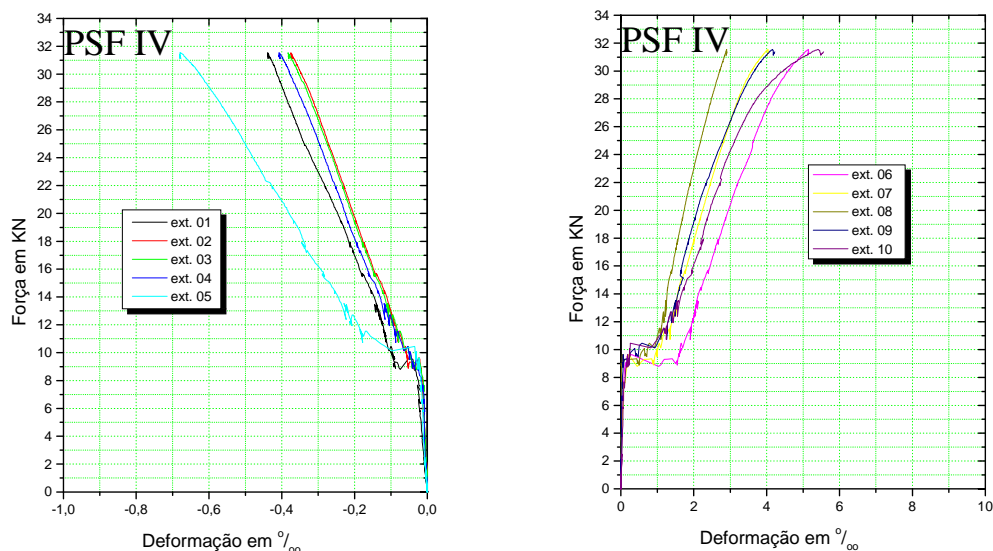


Figura 17 – Deformações no painel PSF IV

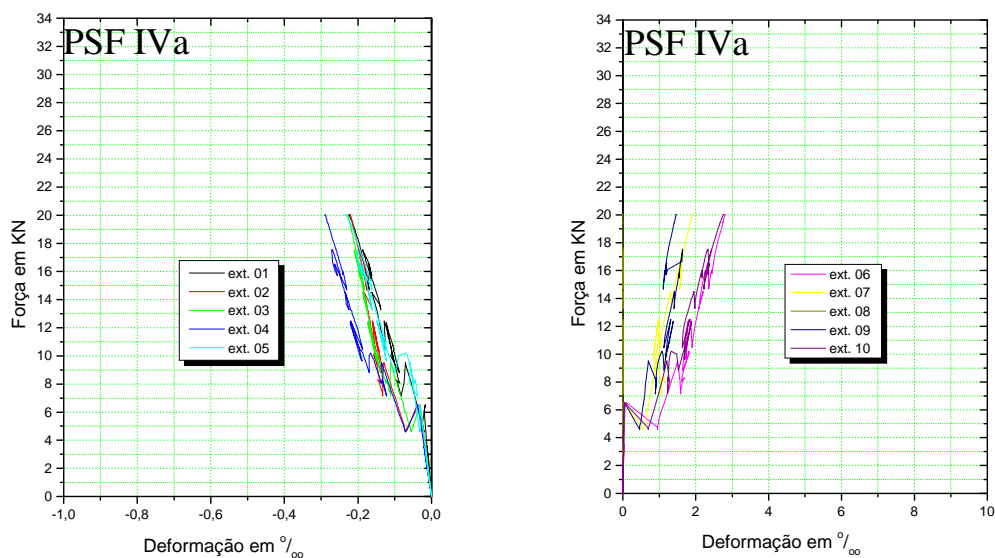


Figura 18 – Deformações no painel PSF IVa

As figuras 15 a 20 mostram os diagramas de deformações de compressão no concreto e no aço tracionado, para os modelos PSF II, PSF IIa, PSF IV, PSF IVa, PSF V, PSF Va.

No dimensionamento da seção dos modelos, obteve-se uma seção de armadura de  $1,54\text{cm}^2$ , considerando-se a peça no domínio 2. A deformação no concreto determinada teoricamente foi de  $0,4\text{‰}$ , para uma deformação do aço de  $10\text{‰}$ .

Para os modelos com nervuras armadas (PSF II, PSF IV, PSF V), o valor médio das deformações no concreto, obtido do ensaio para cada painel, está em torno de  $0,4\text{‰}$ . A armadura tracionada se encontra em escoamento para esses mesmos modelos no momento da ruptura, visto que o escoamento do aço CA 50 inicia com  $2,07\text{‰}$ . Dessa forma, confirmam-se as hipóteses utilizadas no dimensionamento.

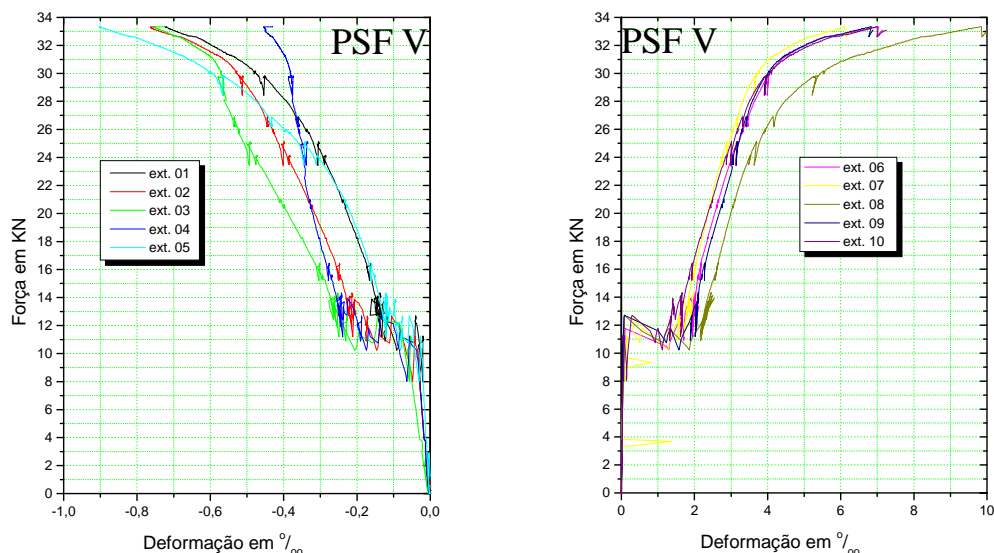


Figura 19 – Deformações no painel PSF V

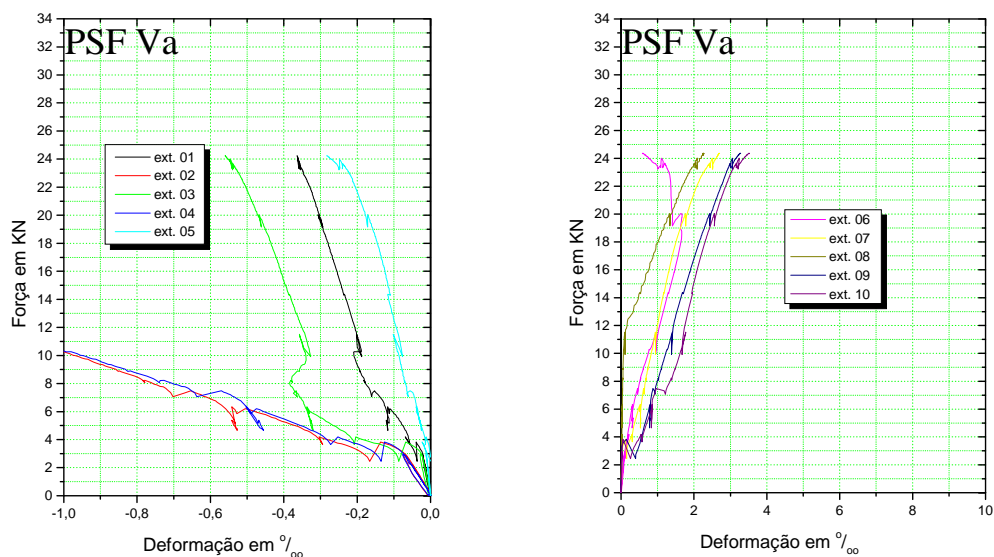


Figura 20 – Deformações no painel PSF Va

Observa-se nos diagramas de deformações no concreto e no aço que os modelos com nervuras sem armadura (PSF IIa, PSF IVa e PSF Va) obtiveram deformações menores na ruptura, se comparados aos respectivos modelos com nervuras armadas (PSF II, PSF IV, PSF V). Comprova-se com isto que as nervuras armadas desempenharam um papel importante, melhorando sobremaneira o comportamento dos painéis à flexão, aumentando o grau de composição entre as faces, fazendo com que se chegue a valores maiores de carga de ruptura.

Conforme a tabela 5, o momento último para PSF II foi de 12,73kNm, e para PSF IV e PSF V foram, respectivamente, de 12,98kNm e 13,70kNm. O PSF II foi executado com nervuras nas bordas longitudinais. O PSF IV tinha nervuras nas bordas longitudinais e transversais, e o PSF V incluía ainda uma nervura longitudinal pelo meio. Mesmo o PSF V possuindo maior número de nervuras que os outros modelos, isto não implicou em um valor da carga última muito maior que nos demais. Aconteceu o mesmo para os modelos com nervuras sem armadura (PSF IIa, PSF IVa e PSF Va).

Pode-se concluir que um menor espaçamento entre as nervuras não representa um ganho significativo no comportamento do painel tipo sanduíche à flexão, no estado limite último. Pensando-se em termos de execução do elemento, não compensa dobrar o número de nervuras, visto que o ganho de resistência à flexão não é proporcional ao aumento do número de nervuras.

### 6.3 Deslocamentos

O ensaio foi conduzido com controle de deformação, a uma velocidade de 0,03mm/s, e a cada dois segundos os dados de força e deslocamentos eram registrados pelo sistema de aquisição de dados. A aplicação da carga era momentaneamente paralisada, a cada 2kN, para verificação das fissuras. Na fig.21, apresenta-se, no mesmo diagrama, a relação Força x Deslocamento para todos os modelos ensaiados.

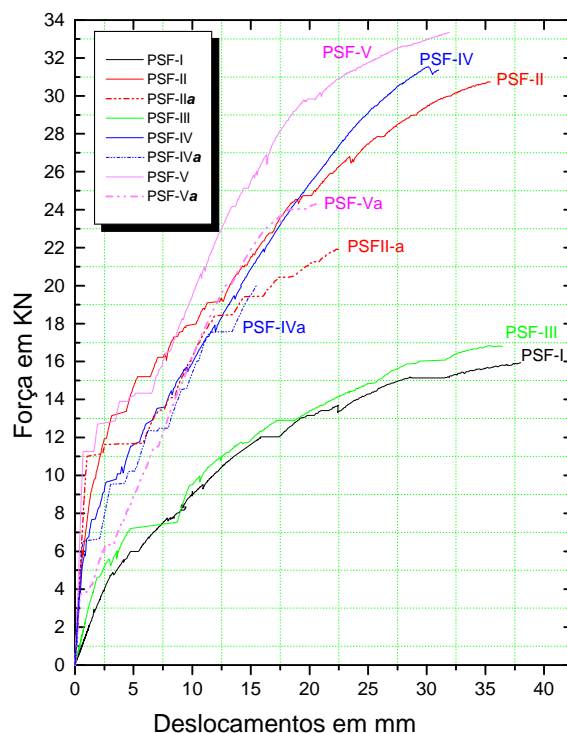


Figura 21 – Gráfico Força x Deslocamentos para os modelos

A partir desta figura, pode-se fazer as seguintes observações:

Nos modelos sem nervuras (PSF-I e PSF-III), os deslocamentos foram bem maiores que nos modelos com nervuras;

A presença de nervuras transversais nas extremidades do modelo PSF-III não contribuíram de forma significativa na resistência à flexão, quando comparadas ao modelo PSF-I;

A armadura nas nervuras dos modelos PSF-II, PSF-IV e PSF-V melhoraram de maneira significativa a resistência à flexão. Para esses modelos, o momento último foi quase o dobro do valor relativo ao PSF-I;

As curvas Força x Deslocamentos para os modelos com nervuras longitudinais tiveram comportamento parecido (com exceção do PSF-Va, pela presença de fissuras iniciais decorrentes da retração da argamassa) até por volta da carga referente à primeira fissura;

Os modelos PSF-II e PSF-IIa, PSF-IV e PSF-IVa, PSF-V e PSF-Va, correspondentes aos painéis com nervuras e, respectivamente, com e sem armadura de cisalhamento, apesar de os comportamentos terem sido muito parecidos, os modelos com nervuras e sem armadura romperam com momentos últimos da ordem de 30% menores que os modelos com nervuras e com armadura. Isto comprova a importância da armadura nas nervuras, melhorando o comportamento à flexão;

O maior número de nervuras longitudinais no PSF-V (três) não correspondeu a um ganho significativo de resistência à flexão, quando comparado ao PSF-IV e PSFII, que possuíam duas nervuras longitudinais. Observa-se, entretanto, uma melhora na rigidez do painel, apresentando menores deslocamentos.

Para comparação com os resultados experimentais, foram calculados os deslocamentos considerando-se o modelo como uma viga biapoiada.

O módulo de elasticidade médio foi de 28.000MPa, obtido através dos ensaios de controle da argamassa. Esse ensaio foi realizado em corpos-de-prova cilíndricos de 10cm x 20cm, para cada etapa de projeção da argamassa, para cada modelo.

No cálculo dos deslocamentos teóricos, foi considerada a perda de rigidez devida à: fissuração da argamassa; movimentação relativa entre as faces (seção parcialmente composta).

Inicialmente considerou-se o momento de inércia para a peça no estágio I (momento atuante menor que o momento de fissuração). Para o momento atuante maior que o momento de fissuração, o cálculo dos deslocamentos foi feito utilizando-se o momento de inércia efetivo ( $I_e$ ), situado entre o momento de inércia do estágio I e o do estágio II, pois a peça apresenta regiões fissuradas intercaladas por regiões não fissuradas, configurando assim uma situação intermediária entre os dois estágios. O momento de inércia  $I_e$  foi obtido através Fórmula de Branson, fornecida pelo ACI.

Para cada valor da força aplicada superior ao correspondente ao momento de fissuração, o momento de inércia  $I_e$  varia, construindo-se assim a curva teórica Força x Deslocamento, considerando-se a perda de rigidez da peça ao longo do ensaio, após a abertura da primeira fissura.

A perda de rigidez pelo movimento relativo entre as faces foi calculada corrigindo-se o valor do momento de inércia por meio do coeficiente de correção, segundo SHEPPARD & PHILLIPS (1989), da mesma maneira como foi feito para o momento de fissuração. Para a construção dos gráficos das figuras 22 e 23, adotou-se  $C = 0,22$  para o modelo PSF I e  $C = 0,39$  para os demais modelos.

Os diagramas das figuras 24 e 25 foram feitos adotando-se  $C = 0,13$  para painéis sem nervuras e  $C = 0,28$  para painéis com nervuras, que consideram o modo como as faces são executadas (por projeção da argamassa).

Foi construída, também, para todos os gráficos, a curva Força x Deslocamento considerando-se o painel sem nenhuma interação das placas de argamassa (não-composto). O deslocamento para o caso não-composto é aquele verificado em apenas uma das placas do painel, submetida à metade da carga. O cálculo foi feito considerando-se uma viga biapoiada, com forças aplicadas nos terços.

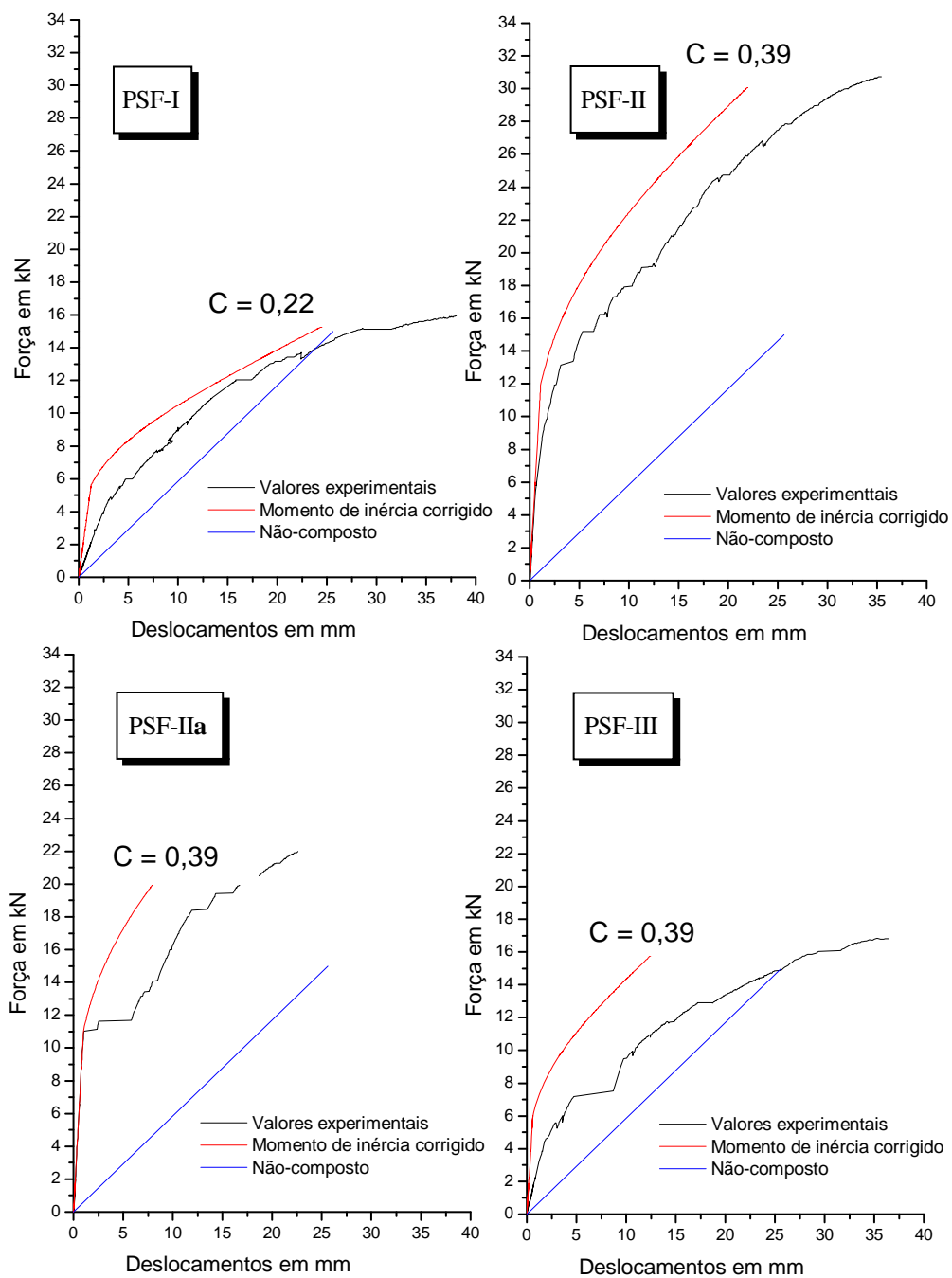


Figura 22 – Comparação Teórica x experimental do gráfico Força x Deslocamentos dos modelos PSF-I, PSF-II, PSF-IIa e PSF-III

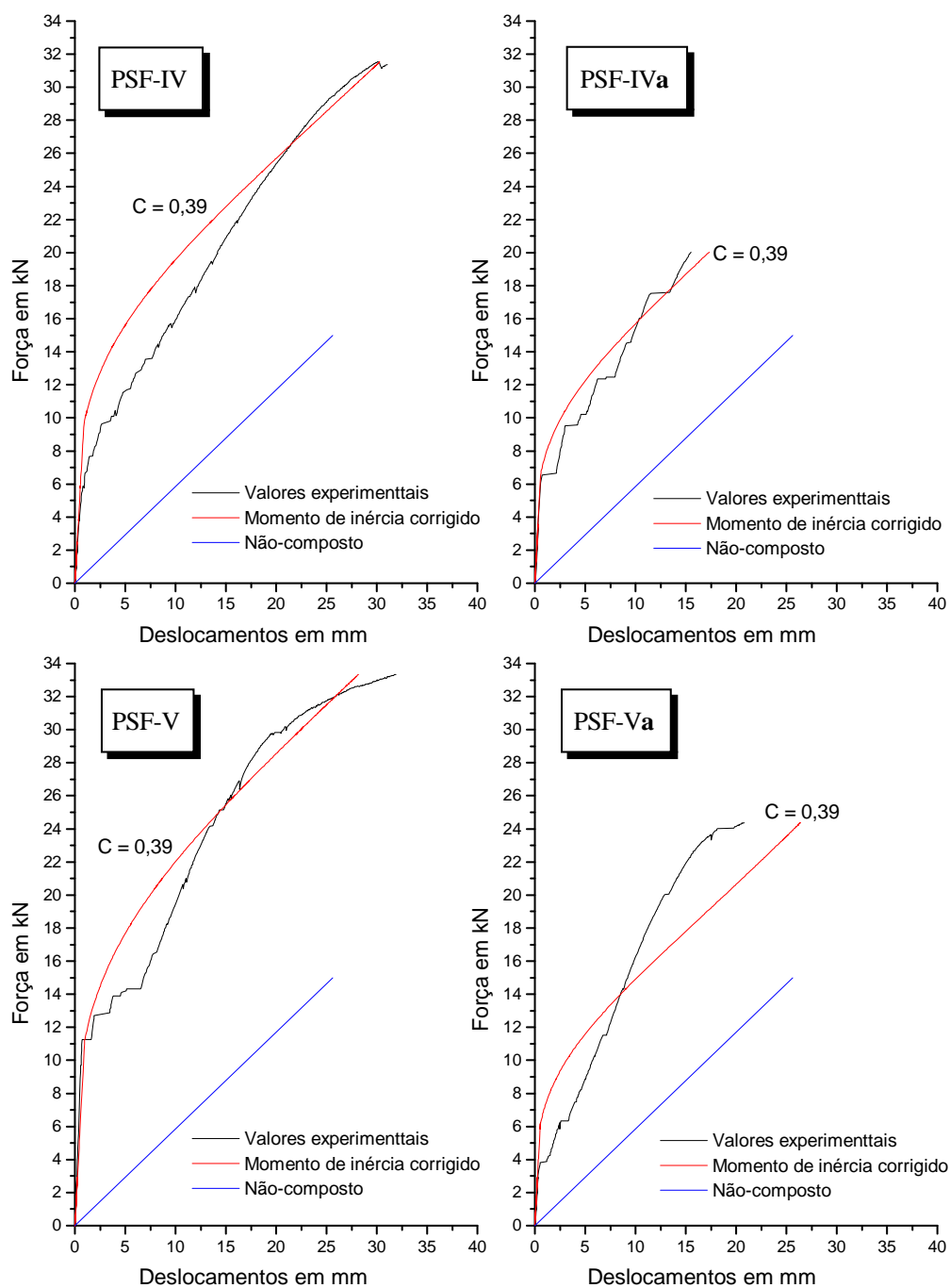


Figura 23 – Comparação Teórica x experimental do gráfico Força x Deslocamentos dos modelos PSF-IV, PSF-IVa, PSF-V e PSF-Va

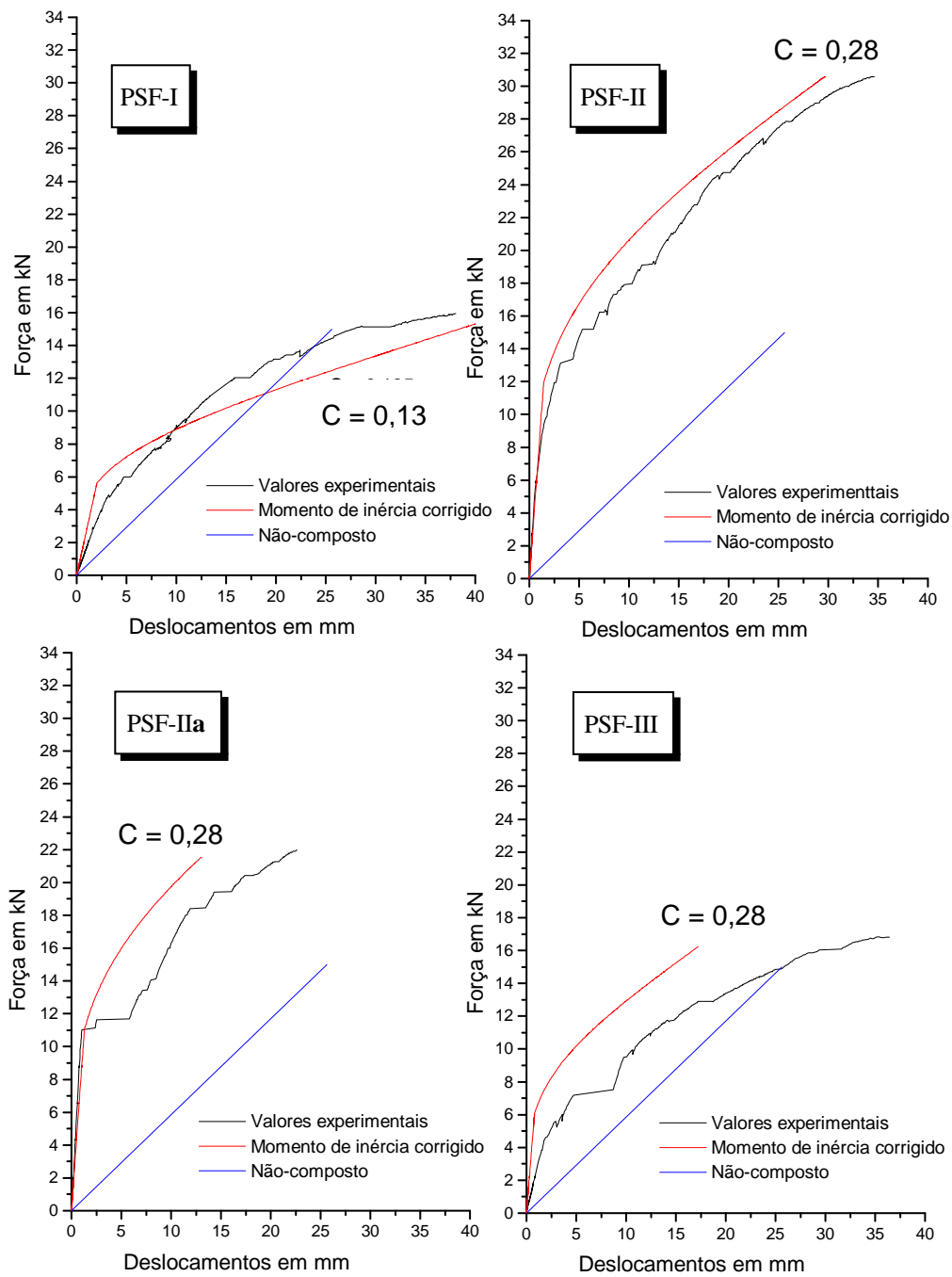


Figura 24 – Comparação Teórica x experimental do gráfico Força x Deslocamentos dos modelos PSF-I, PSF-II, PSF-IIa e PSF-III

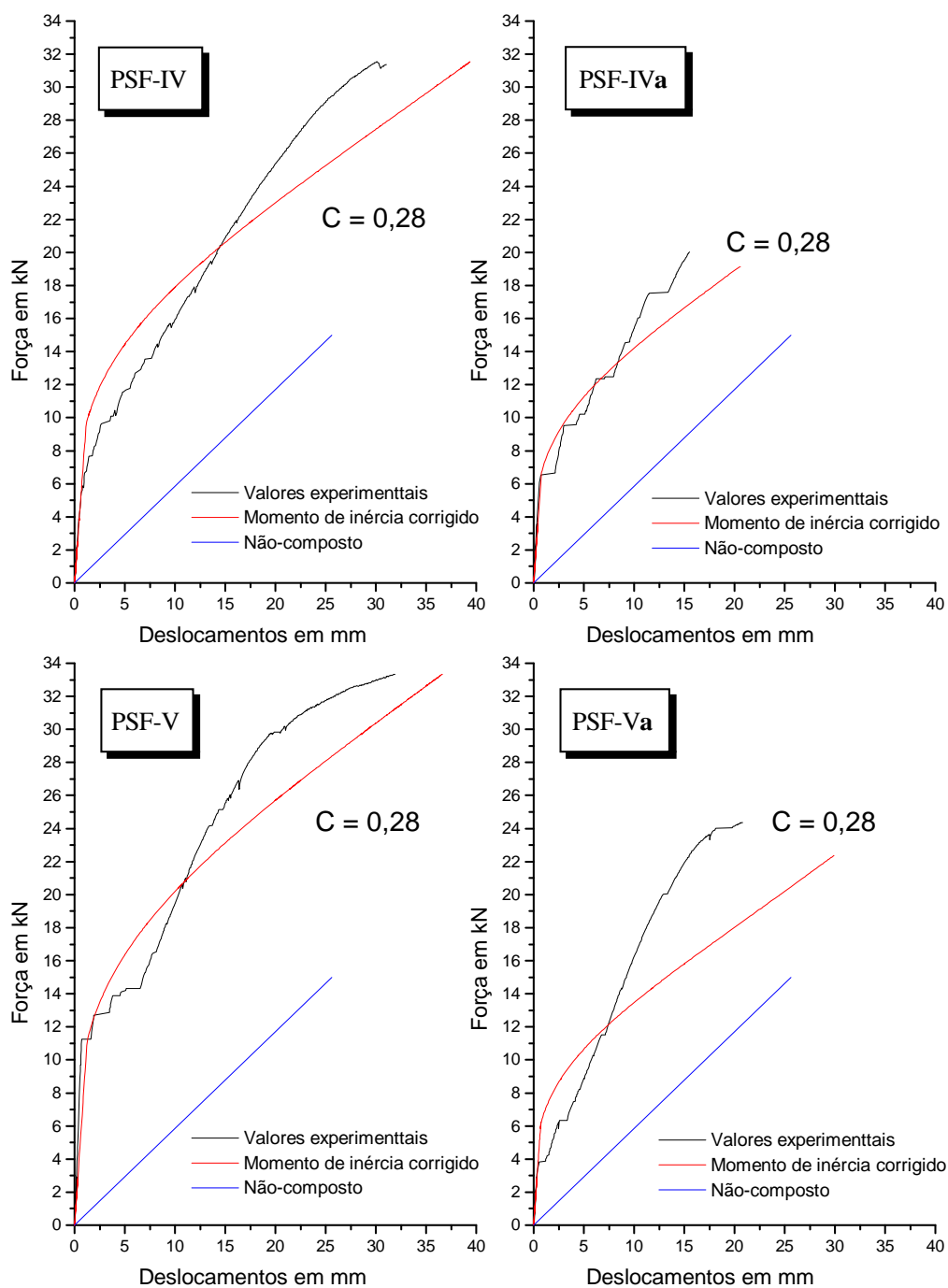


Figura 25 – Comparação Teórica x experimental do gráfico Força x Deslocamentos dos modelos PSF-IV, PSF-IVa, PSF-V e PSF-Va

Em termos de deslocamentos, o modelo PSF I teve um comportamento muito próximo ao do relativo a uma seção tipo sanduíche não-composta. Comparando-se os gráficos, para esse modelo (figuras 22 e 24), nota-se que os deslocamentos teóricos calculados, considerando-se o valor de  $C = 0,13$ , fornecem melhores resultados.

O modelo PSF III, apesar de possuir nervuras apenas nas extremidades de apoio, teve um comportamento muito próximo ao do PSF I. Conclui-se, então, que essas nervuras pouco contribuíram no comportamento do elemento, em termos de deslocamentos. Pelo observado na curva experimental do modelo PSF III, a curva teórica dos deslocamentos, para os dois valores adotados de  $C$ , não corresponde a bons resultados. Adotando  $C = 0,13$  para este modelo, obtêm-se melhores resultados para os deslocamentos, comparados com os valores obtidos experimentalmente, conforme pode ser visto no gráfico da fig.26.

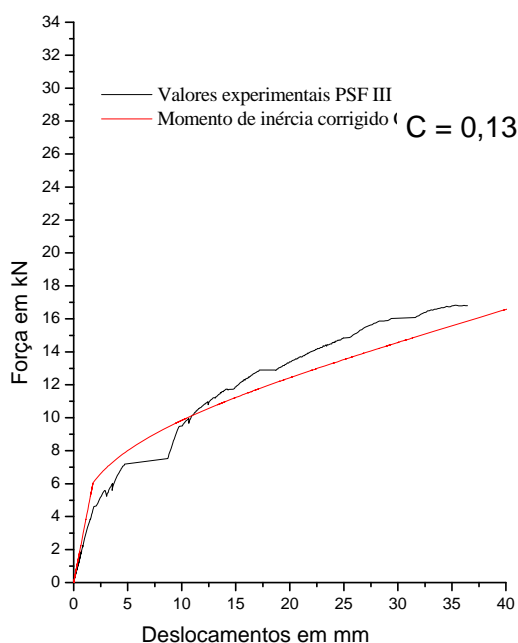


Figura 26 – Comparação teórica x experimental PSF III.  $C = 0,13$

Observa-se nas figuras 22 e 23 que os gráficos dos deslocamentos teóricos, considerando-se os valores de SHEPPARD & PHILLIPS, se aproximam bastante das curvas experimentais, apenas para os modelos com nervuras em toda a borda (PSF IV, PSF IVa, PSF V e PSF Va). Para os demais modelos (PSF II e PSF IIa), as curvas teóricas resultaram em valores menores dos deslocamentos que os obtidos nos ensaios. Em relação a esses dois últimos modelos, a utilização de  $C = 0,28$  (fig.24) fornece resultados melhores, comparados com os valores obtidos para  $C = 0,39$  (fig.23).

De maneira geral, os valores de  $C = 0,13$  –modelos sem nervuras longitudinais– e  $C = 0,28$  –modelos com nervuras longitudinais– apresentam resultados melhores que os outros valores adotados de  $C$ .

## 7 CONCLUSÕES

Analisando-se os resultados dos ensaios e as comparações teóricas, podem-se tirar as seguintes conclusões:

O momento de fissuração de um elemento fletido, com seção tipo sanduíche, para faces de argamassa projetada e núcleo fraco, pode ser calculado com boa aproximação utilizando-se as hipóteses de cálculo do concreto armado, segundo a norma NBR 6118;

A seção considerada no cálculo corresponde a uma seção maciça equivalente, determinada a partir da redução do momento de inércia da seção tipo sanduíche por um coeficiente  $C$ , que leva em conta a perda de rigidez pela movimentação relativa entre as faces;

Adotando-se  $C = 0,13$  para painéis sem nervuras e  $C = 0,28$  para painéis com nervuras longitudinais, os valores obtidos são muito próximos dos momentos de fissuração obtidos experimentalmente;

O dimensionamento à flexão de painéis tipo sanduíche com nervuras pode ser feito utilizando-se as mesmas hipóteses de cálculo do concreto armado, segundo a NBR 6118;

No caso dos elementos tipo sanduíche sem nervuras, submetidos à flexão, quando dimensionados pelas mesmas hipóteses do concreto, deve-se aplicar um fator de majoração no momento de cálculo. O valor desse fator é dado em função da interação proporcionada pelo núcleo ou pelos elementos de ligação das placas resistentes;

Para o caso de núcleo de espuma rígida, como é o caso do EPS, o momento de cálculo pode ser aumentado em torno de 24%, conforme a análise dos resultados dos ensaios, para que o momento de ruptura atinja o valor esperado;

A utilização de armadura nas nervuras aumenta significativamente (cerca de 30%) os valores dos momentos últimos, em relação aos modelos com nervuras e sem armadura;

O número de três nervuras longitudinais no modelo PSF-V não proporcionou ganho significativo de resistência à flexão, em relação aos modelos PSF-II e PSF-IV, que tinham apenas duas nervuras;

Foram obtidos bons resultados no cálculo dos deslocamentos de elementos fletidos com seção tipo sanduíche, com faces de argamassa moldadas por meio de técnicas de projeção, considerando-se uma seção equivalente, da mesma maneira como foi feito no cálculo do momento de fissuração, e utilizando-se os mesmos valores dos coeficientes de correção do momento de inércia, para cada caso (sem nervuras ou com nervuras).

## 8 AGRADECIMENTOS

À FAPESP, pelo auxílio à pesquisa, e à CAPES e ao CNPq, pelas bolsas de doutorado e de pesquisador.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN, H. G. (1969). **Analysis and design of structural sandwich panels**. Oxford: Pergamon.

BANSULBUL, A. I.; SALEEM, M.; AL-SULAIMANI, G. J. (1991). Flexural behavior of ferrocement sandwich panels. **Cement & Concrete Composites**, v.13, p.21-28.

BERTINI, A. A. (1995). **Análise do comportamento à flexão de painéis sanduíches com faces de argamassa armada e núcleo de espuma rígida de poliuretano derivado de óleo de mamona**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

BERTINI, A. A. (2002). **Estruturas tipo sanduíche com placas de argamassa projetada**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

BUSH, T. D.; STINE, G. L. (1994). Flexural behavior of composite precast concrete sandwich panels with continuous truss connectors. **PCI Journal**, v.39, n.2, p.112-121, Mar./Apr.

PCI COMMITTEE REPORT (1997). State-of-the-art of precast/prestressed sandwich wall panels. **PCI Journal**, p.92-134, Mar./Apr.

PCI COMMITTEE REPORT (1997). State-of-the-art of precast/prestressed sandwich wall panels. **PCI Journal**, p.32-49, May/June.

PFEIFER D. W.; HANSON, J. A. (1965). Precast concrete wall panel: flexural stiffness of sandwich panels. **PCA Bulletin D99**, Skokie: Portland Cement Association, p.67-68.

SHEPPARD, D. A.; PHILLIPS, W. R. (1989). **Plant cast precast and prestressed concrete**. California: McGraw-Hill. 789p.

# ANÁLISE NUMÉRICA, VIA MEF, DE LIGAÇÕES EM TRELIÇAS METÁLICAS ESPACIAIS

Taís Santos Sampaio<sup>1</sup> & Roberto Martins Gonçalves<sup>2</sup>

## Resumo

*As treliças espaciais vêm sendo freqüentemente utilizadas, de forma bastante diversificada, mas seu principal uso é como cobertura de grandes vãos. Recentemente, vários acidentes com este tipo de estrutura têm acontecido, principalmente devido a uma série de considerações adotadas para dimensionamento, as quais não condizem com a realidade. Neste contexto, foi feito um estudo do comportamento seguido por estas estruturas. Este trabalho apresenta uma análise teórica, via método dos elementos finitos, de modelos de treliça espacial de seção tubular circular. Tem como objetivo verificar o comportamento de cada sistema de ligação, modelado tridimensionalmente com elementos de casca, associado à treliça espacial, modelada em elementos lineares. Foram estudadas as tipologias usuais de ligação deste tipo de estrutura abordando os problemas causados pelas peculiaridades de cada sistema.*

*Palavras-chave: treliça espacial; sistemas de ligação; variação de inércia; análise numérica; método dos elementos finitos.*

## 1 INTRODUÇÃO

As treliças espaciais são formadas por duas ou mais camadas de banzos, em geral paralelas, conectadas por meio de diagonais e ou montantes e os carregamentos são aplicados aos nós, perpendicularmente ao plano da treliça.

Estes sistemas estruturais vêm sendo utilizados de forma bastante diversificada. Há registros destas estruturas em domus, em conjunto com lajes de concreto, em pontes, em torres de transmissão, mas seu principal uso é como estrutura de cobertura para grandes áreas, com poucos apoios no meio dos vãos.

As treliças espaciais apresentam vantagens em relação a outros sistemas como baixo peso, grande rigidez, entre outros fatores. No entanto, o sistema de ligação entre barras ainda é uma das grandes dificuldades para o desenvolvimento e utilização das treliças espaciais.

Hoje existe uma infinidade de sistemas de ligação que são utilizados em estruturas espaciais, diversos tipos avaliados e patenteados em vários países. Foram criados, também, outros detalhes de ligações empíricos ou baseados em hipóteses

---

<sup>1</sup>Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP

<sup>2</sup>Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, goncalve@sc.usp.br

bastante simplistas, os quais serão detalhados posteriormente. No Brasil os elementos tubulares circulares são os mais utilizados nas treliças espaciais, mas o emprego de sistemas patenteados é restrito, principalmente devido ao alto custo em comparação a outros sistemas aqui desenvolvidos. Assim é freqüente o uso de sistemas simples como o nó constituído de um único parafuso conectando as extremidades amassadas de elementos tubulares (aqui chamado nó típico).

Estas soluções para o nó apresentam como problema, a súbita variação de inércia das barras na região nodal, seja devido à estampagem seja pelo uso de chapas não enrijecidas. Este fato concorre para a flexão da extremidade da barra com plastificação da região do amassamento sob carregamentos inferiores à capacidade da barra. De maneira geral, este fato não tem sido considerado para o projeto destas estruturas. As hipóteses freqüentemente adotadas nos modelos matemáticos utilizados para o cálculo dos esforços internos em estruturas espaciais não condizem com a realidade da estrutura, o que pode comprometer a segurança na determinação da capacidade resistente dos seus elementos.

Tem-se registrado, nos últimos anos, diversos acidentes com estruturas espaciais, a maior parte ocorrida de forma repentina. Na sua grande maioria, estes problemas ocorrem devido à incoerência entre modelos de cálculo admitidos e o comportamento real da estrutura. Em alguns casos pode-se afirmar que são decorrentes dos sistemas de ligações adotados.

Neste trabalho foi feita uma análise numérica do comportamento dos nós de treliças espaciais compostas por sistemas de ligação com parafusos onde há variação de inércia dos elementos (tubos de aço com extremidades estampadas ou com chapas de ponteira). Também foi feita a análise, através de comparação, as principais discrepâncias entre os resultados dos modelos teóricos, obtidos por simulação numérica via método dos elementos finitos, e o comportamento real destas estruturas, obtido por meio experimental. Os dados experimentais para comparação foram obtidos pelo Eng. Alex Sander Souza como parte do programa de doutoramento (SOUZA, 2003). Foram analisados os três tipos de nó mais utilizados no Brasil:

- Nó típico - constituído de um parafuso conectando as extremidades amassadas e dobradas de elementos tubulares circulares.

- Nó de aço - os elementos com extremidades amassadas são ligados a um nó constituído de chapas de aço soldadas.

- Nó com chapas de ponteira - duas chapas paralelas são soldadas em abertura na extremidade do tubo, sem amassamento, conectadas aos nós com chapas de aço.

## **2 ANÁLISE NUMÉRICA – METODOLOGIA**

Este trabalho consiste de uma análise numérica via MEF de treliças espaciais planas compostas de elementos tubulares de aço que utilizam sistemas de ligação onde há variação de inércia na extremidade da barra. Os modelos foram analisados através do programa ANSYS considerando as características específicas de cada tipologia de nó.

Esta forma de análise já foi iniciada na dissertação de mestrado do Eng. Adriano Márcio Vendrame, que concluiu que o modo de ruína de estruturas que

utilizam o sistema de ligação nó típico está diretamente relacionado com problemas localizados nestes nós, porém, sem que a modelagem proposta conseguisse representar razoavelmente o modelo (VENDRAME, 1999). Dando continuidade a esta linha de pesquisa, o Eng. Alex Sander Souza concluiu sua tese de doutoramento onde estudou experimentalmente 5 tipologias de treliça espacial realizando um total de 10 ensaios. SOUZA (2003) também realizou um estudo teórico, modelando via MEF o nó típico. Esta modelagem representou satisfatoriamente o comportamento experimental com relação ao modo de colapso e configuração final o modelo numérico.

Neste trabalho foi realizada a modelagem de nós típicos, nós de aço e nós com chapa de ponteira inseridos na treliça espacial com vãos de 7,5m x 15,0m modelada com elementos de barra. Os nós foram inseridos na estrutura em quatro posições. A análise numérica foi voltada para o comportamento do sistema de ligação, considerando:

- Variação de inércia nas barras devido à estampagem
- Excentricidades das ligações
- Não linearidade física
- Não linearidade geométrica
- Efeitos de contato entre as superfícies envolvidas

A simulação numérica visa avaliar a distribuição de tensões na região da ligação e o conseqüente comportamento do sistema. Deste modo será possível identificar os fatores de maior importância no comportamento de cada tipologia de nó.

## 2.1 As estruturas analisadas

Foram analisadas treliças espaciais do tipo quadrado sobre quadrado com módulos piramidais de 2,5m de comprimento e altura de 1,5m apoiadas nos quatros vértices. As diferenças entre os protótipos analisados por SOUZA (2003) são o tipo de ligação entre barras, a seção das diagonais de apoio e a existência ou não de reforço do nó típico. Para todos os protótipos foram utilizados tubos de seção circular  $\phi$  76x2,0 nos banzos,  $\phi$  60x2,0 nas diagonais e  $\phi$  60x2,0 ou  $\phi$  88x2,65 nas diagonais de apoio. A tabela 1 algumas características das treliças analisadas.

Tabela 1 – Características das treliças analisadas

Modelo	Ligação	Diag. Apoio	Observação
TE 1	Nó típico	$\phi$ 60x2,0	---
TE 1 R	Nó típico reforçado	$\phi$ 60x2,0	Reforço:U 80x50x6,3
TE 2	Nó típico	$\phi$ 88x2,65	---
TE 2 R	Nó típico reforçado	$\phi$ 88x2,65	Reforço: U 80x50x6,3
TE 4	Nó de aço	$\phi$ 88x2,65	---
TE 5	Nó com ponteira	$\phi$ 88x2,65	---

Fonte: SOUZA, 2003

## 2.2 Modelagem das extremidades das barras

A fim de que os modelos numéricos de treliças espaciais com nós com extremidades estampadas possam mostrar um comportamento próximo do real, a variação de inércia nas barras deve ser levantada cuidadosamente. Para todas as tipologias de nó, o comprimento inicial da barra foi modelado com elementos de casca e o trecho restante, assim como as barras de treliça ideal, com elemento de barra.

### Elementos finitos utilizados

Para a modelagem dos nós foram utilizados quatro elementos finitos da biblioteca do programa ANSYS. Para modelagem das extremidades das barras foi utilizado o elemento de casca SHELL43. Este elemento é adequado para análise não-linear de estruturas planas ou curvas, com espessura moderada permitindo grandes descolamentos e grandes deformações.

Para os elementos lineares foi escolhido o elemento finito de barra PIPE20. Este elemento tem seção transversal circular e seis graus de liberdade. O elemento é definido por dois nós, diâmetro externo e a espessura da parede.

Para formar o par de contato, foi utilizado o elemento CONTAC173 e TARGE170. São usados para representar contato e deslizamento entre "superfícies alvo" 3-D e uma superfície deformável. Os elementos de contato revestem os elementos sólidos que descrevem o limite de um corpo deformável e entram potencialmente em contato com uma superfície designada

### Nó típico e nó de aço

Em nós típicos e em nós de aço as barras apresentam variação de seção devido ao processo de estampagem ou amassamento das extremidades. A geometria da região amassada varia a depender do tipo de ferramenta utilizada e das dimensões do tubo, o que dificulta a determinação das propriedades geométricas destas seções.

Assim, para levantar a geometria da extremidade dos elementos, o tubo foi seccionado segundo a figura 1 e as seções transversais foram desenhadas em papel milimetrado, a partir de onde se puderam levantar pontos na seção e ajustar uma forma regular para a seção como um todo. É importante ressaltar que este procedimento levanta seções aproximadas, em função do alívio de tensões após o corte.

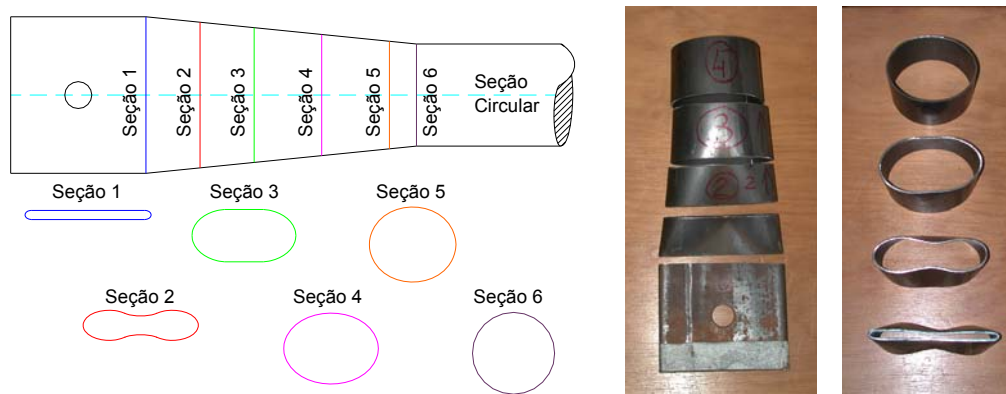


Figura 1 - Seccionamento das extremidades das barras estampadas

A partir das coordenadas dos pontos de cada seção transversal, lançados no programa ANSYS, é possível criar o contorno da respectiva seção. Uma vez tendo os contornos de suas seções consecutivas, são construídas áreas, as quais foram discretizadas com elementos de casca conforma ilustra a figura 2. O comprimento de extremidade da barra do nó típico, modelada com elementos de casca é de 300 mm, e da extremidade da barra do nó de aço é de 1500 mm.

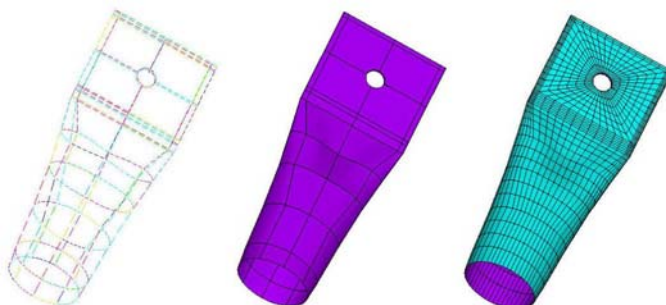


Figura 2 - Modelagem da extremidade do banzo de um nó típico

### Nó com chapa de ponteira

Em nós com chapa de ponteira a variação de seção se dá devido ao uso de uma chapa de ponteira soldada na extremidade das barras. Assim, a geometria da região da extremidade do tubo é facilmente determinada. A partir das dimensões da chapa e do tubo foram criadas superfícies, com uso do programa ANSYS. Então foram discretizados os elementos de casca. A figura 3 ilustra a seqüência destes procedimentos.

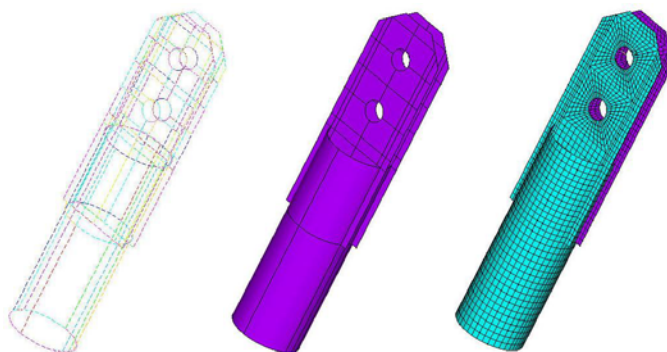


Figura 3 - Modelagem da extremidade do banzo com chapa de ponteira

## 2.3 Modelagem dos nós

### Nó típico

De posse das extremidades das barras modeladas com elemento de casca, é possível modelar o nó como um todo, ou seja, várias extremidades de barras sobrepostas formando o nó típico como ilustra a figura 4.

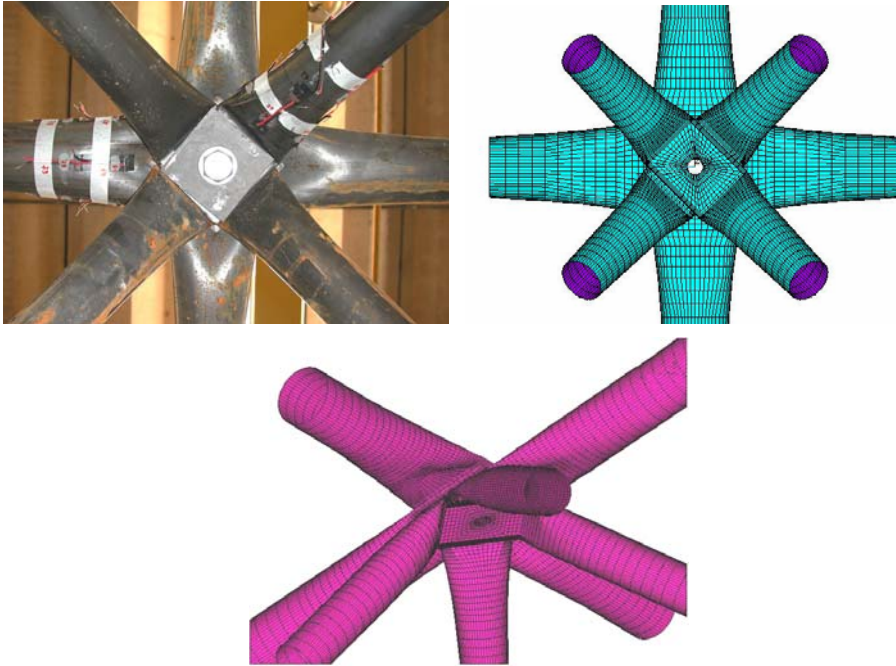


Figura 4 - Nó típico central

### Nó de aço

Depois de modeladas as extremidades das barras estampadas e o nó de aço, é possível modelar a ligação. A figura 5 mostra a modelagem da ligação.

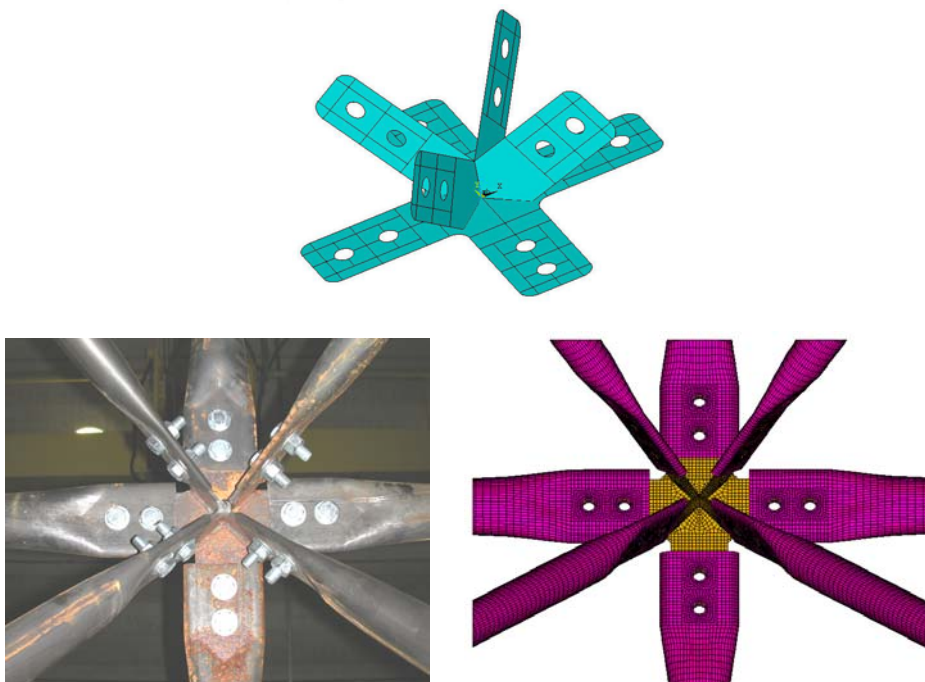


Figura 5 - Modelagem do nó de aço

### Nó com chapa de ponteira

O nó com chapa de ponteira é semelhante ao nó de aço, porém as barras têm duas chapas paralelas soldadas em um rasgo na extremidade e conectadas a chapas de apoio por meio de parafusos. A figura 6 mostra a ligação modelada.

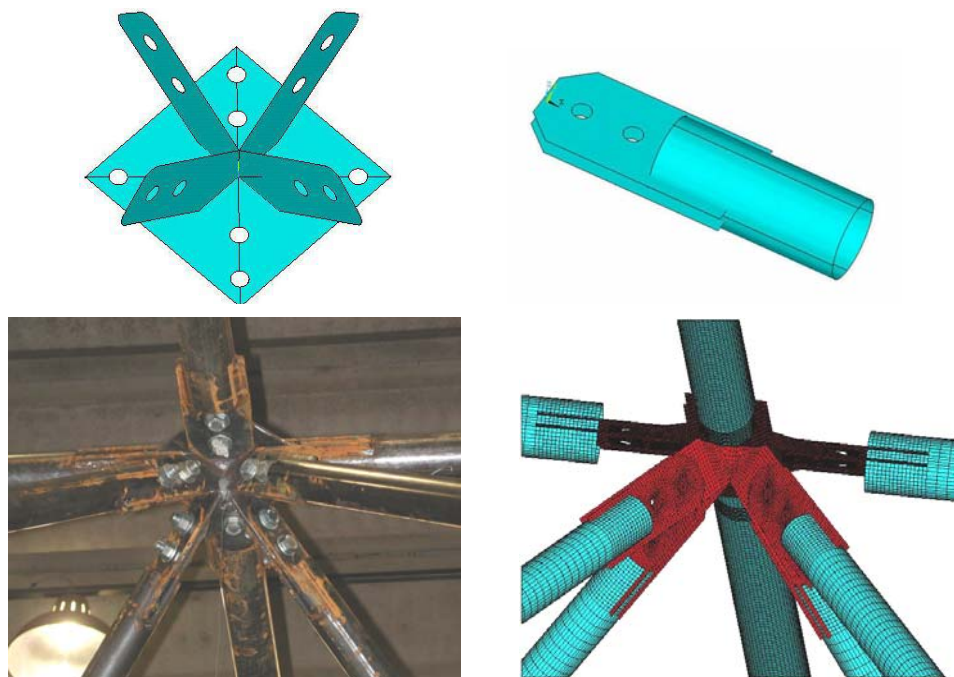


Figura 6 - Modelagem do nó com chapa de ponteira

## 2.4 Vinculação entre elementos do nó - Efeito dos parafusos

Para as análises deste trabalho não foram simulados os parafusos conectando os elementos que compõem o nó. Os parafusos são responsáveis por solidarizar os elementos do nó após seu aperto, fazendo com que trabalhem em conjunto. No entanto, uma vez que o aperto do parafuso geralmente não é controlado, a espessura da chapa das barras varia, a quantidade de barras no nó típico e a espessura da chapa sobrejunta variam assim como a espessura das chapas do nó de aço, só é possível considerar que regiões muito próximas ao furo trabalham de forma solidária. Assim, para os 3 sistemas de ligação, o efeito do parafuso foi simulado com o acoplamento dos graus de liberdade dos nós referentes à primeira linha de elementos finitos circundando furo. Na figura 7 as regiões em verde ilustram estes acoplamentos.

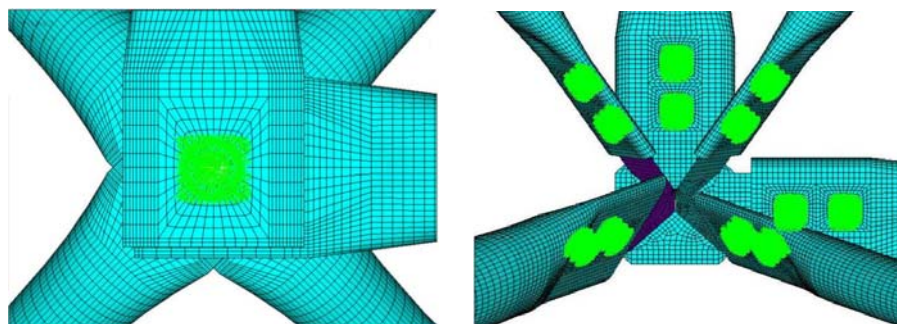


Figura 7 - Acoplamento dos nós – simulação dos parafusos

## 2.5 Problema de contato

No caso do nó típico, as extremidades estampadas das barras que formam o nó têm a tendência a se separarem, o que é uma das causas do colapso deste tipo de ligação. No momento do colapso ocorre uma grande deformação das barras. Assim foi necessária a utilização de elementos de contato entre as barras na região

estampada, que envolve a determinação de diversos parâmetros como rigidez da superfície de contato, penetração entre os elementos, atrito entre as barras, entre outros.

A utilização dos elementos de contato na modelagem do nó típico foi proposta por SOUZA (2003) que modelou duas superfícies de contato, uma entre a diagonal de apoio e o banzo imediatamente acima e outra entre os dois banzos, conforme ilustra a Figura 8.

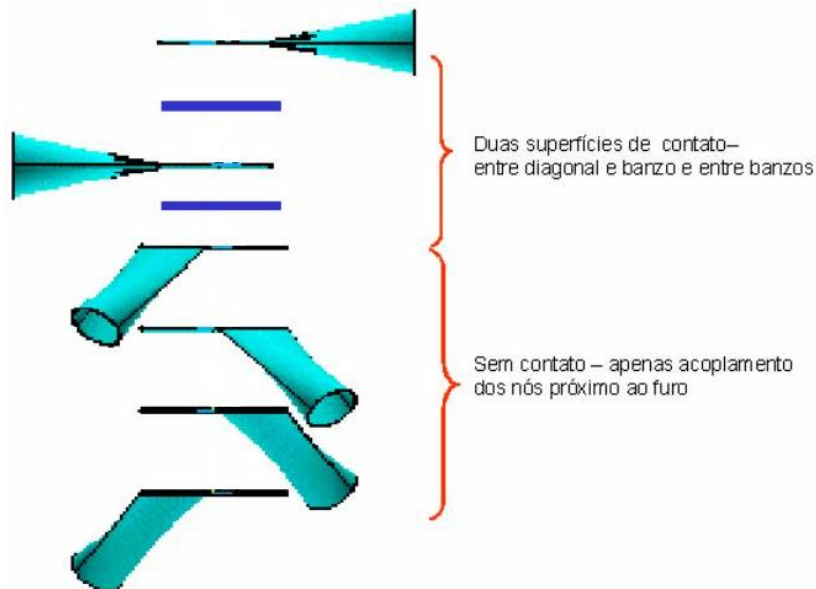


Figura 8 - Superfícies de contato adotadas na modelagem

Os elementos de contato usam uma "superfície alvo" (modelada com elemento TARGE170) e uma "superfície contato" (modelada com elemento CONTA173), para formar um par de contato. Os elementos de contato trabalham em conjunto com o elemento de casca SHELL43.

Para cada par de contato é necessário determinar o valor de uma variável denominada FKN (rigidez de contato). Esta variável é responsável pela penetração entre os corpos em contato. O valor padrão adotado pelo Ansys é 1. A variável FKN é função da rigidez e da geometria dos corpos em contato.

No caso da análise do nó de aço e do nó com chapa de ponteira, os elementos que compõem o nó não têm a tendência a se separarem e assim não existe penetração entre as superfícies modeladas. Desde modo, para estes nós não foi simulado o problema de contato.

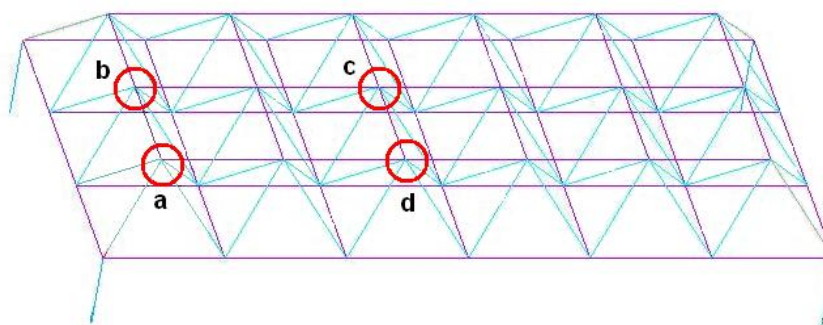
## 2.6 Posição de inserção dos nós

Dependendo da localização dentro da estrutura, o nó pode ter diferentes formas devido à quantidade de barras que concorrem para o mesmo. O nó foi estudado inserido na estrutura em quatro posições:

- Nó central - formado por oito barras, 4 banzos e quatro diagonais.
- Nó lateral - formado por sete barras, sendo três banzos e quatro diagonais. Na treliça de vãos 15m x 7,5m, existem dois nós laterais a serem analisados, o de maior vão e o de menor vão.

- Nó de vértice superior - formado por seis barras, sendo dois banzos e quatro diagonais.

A figura 9 ilustra as quatro posições.



a) Nó de vértice superior  
b) Nó lateral – menor vão

c) Nó central  
d) Nó lateral – maior vão

Figura 9 – Posições de inserção do nó modelado

## 2.7 Solidarização do nó modelado à treliça modelada com elementos lineares

Nesta análise, o nó a ser analisado é modelado com elementos de casca enquanto o restante da estrutura é modelado com elementos de barra. Assim é necessário fazer uma solidarização das duas modelagens. Para que os esforços sejam transmitidos do elemento de barra para porção final do tubo discretizada com elementos de casca, é preciso criar uma seção rígida onde o comportamento de um ponto é igual ao comportamento dos outros. Assim, como foi feito para os nós da região dos furos dos parafusos, a seção final do tubo e o nó inicial do elemento de barra têm seus graus de liberdade acoplados. A figura 10 ilustra o acoplamento de um tubo modelado com elementos de casco e um elemento de barra. Este tipo de acoplamento de elementos foi feito inicialmente por VENDRAME (1999), analisou a extremidade do tubo com e sem acoplamento com um elemento de barra. Os resultados indicaram bons resultados para as tensões axiais entre os dois modelos analisados permitindo assim, a utilização do acoplamento.

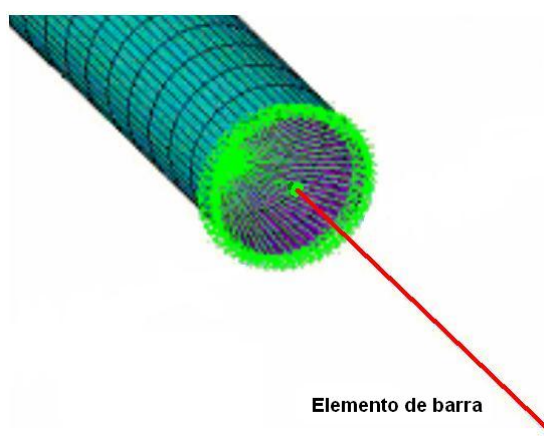


Figura 10 - Acoplamento dos elementos de casca com elementos de barra

## 2.8 Critérios para análise não linear

Nesta análise de treliças espaciais foram consideradas as não-linearidades física e geométrica.

### Não-linearidade física

O modelo constitutivo adotado nas análises está apresentado na figura 11, tendo sido o valor de  $f_y = 39,64 \text{ kN/cm}^2$ , obtido experimentalmente por SOUZA (2003).

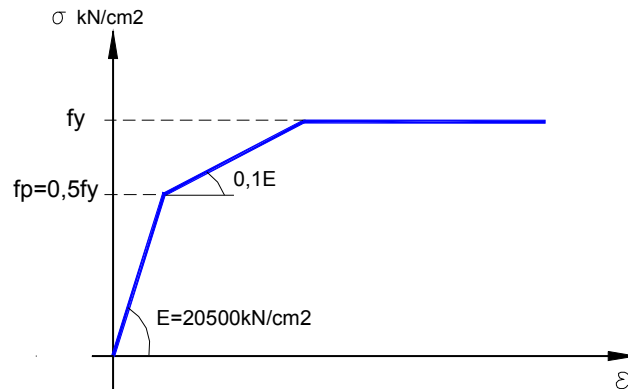


Figura 11 - Diagrama tensão x deformação utilizados nas análises

### Não linearidade geométrica

Os modelos analisados através do programa ANSYS incluem os efeitos de não-linearidade geométrica. O programa adota a formulação Lagrangeana Total e o processo iterativo que o programa utiliza para a solução do sistema de equações de equilíbrio é o Newton-Raphson.

## 3 ANÁLISE DO NÓ TÍPICO

As treliças com nó típico analisadas experimentalmente por SOUZA (2003) foram nomeadas TE1 e TE2. Os mesmos protótipos também foram analisados usando o reforço mostrado na figura 12, cuja idéia era aumentar a rigidez da ligação, impedindo ou retardando a plastificação das extremidades estampadas e a separação entre barras na região do nó. As treliças com reforço foram nomeadas TE1-R e TE2-R.



Figura 12 - Detalhe do reforço das treliças com nós típicos

## Alguns resultados das treliças TE1

A seguir são apresentados os modelos numéricos referentes à treliça TE1. É importante salientar que, a partir deste ponto, todos os gráficos expressam forças em kN, tensões em  $\text{kN/cm}^2$  e deslocamentos em cm.

Numa análise simplista do comportamento global da estrutura, pode-se observar que a inserção do nó modelado em elementos de casca em qualquer das quatro posições na estrutura não afeta significativamente os deslocamentos verticais ao longo da treliça mas onde foi inserido o nó os valores obtidos são ligeiramente maiores.

### Nó lateral – Lado de menor comprimento

O gráfico da figura 13 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó localizado na malha superior da treliça na região lateral da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó lateral modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

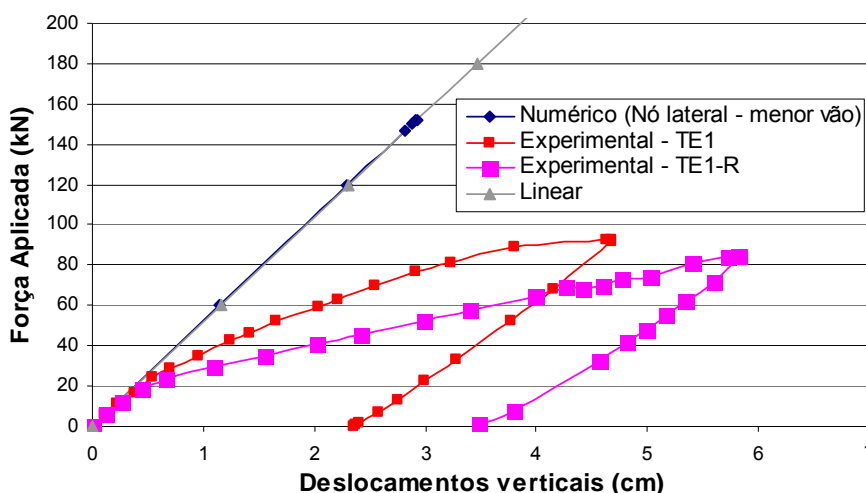


Figura 13 - Deslocamentos verticais no nó mais central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição lateral

Através do gráfico pode ser observado que o comportamento do nó central da treliça, obtido pelo modelo numérico com um nó modelado em elementos de casca, apresenta comportamento linear. É importante ressaltar que o reforço para o nó típico, proposto por SOUZA (2003), induz as treliças a obter deslocamentos verticais superiores quando comparados à treliça sem reforço nos nós, indicando que o reforço não melhora a capacidade dos nós. A figura 14 ilustra os deslocamentos verticais no nó modelado.

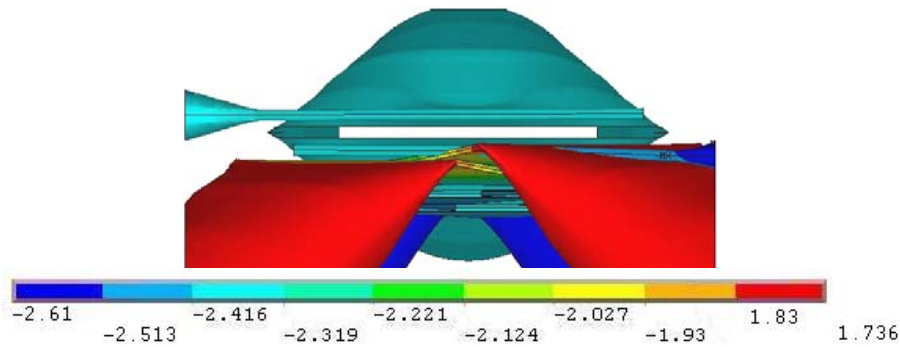


Figura 14 - Deslocamento verticais – nó modelado

Da figura pode ser notado que as diagonais laterais apresentam deformações significativas na região estampada, causando a degeneração do nó. A região final da estampagem das diagonais tende a se elevar e causam rotação da ligação. As figuras 15 e 16 mostram as tensões correspondentes ao último passo de carga no nó modelado.

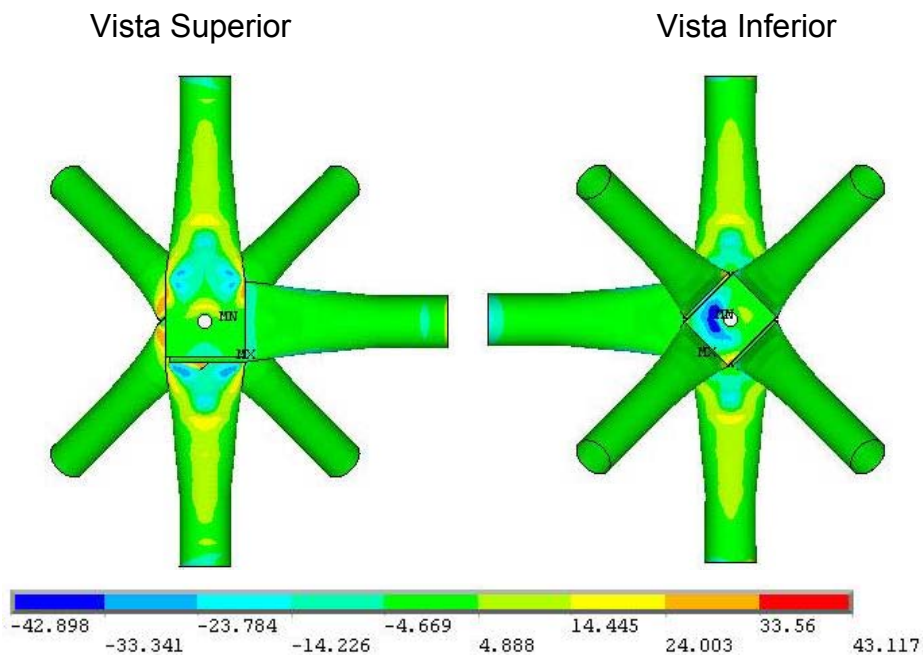


Figura 15 - Tensões no nó modelado

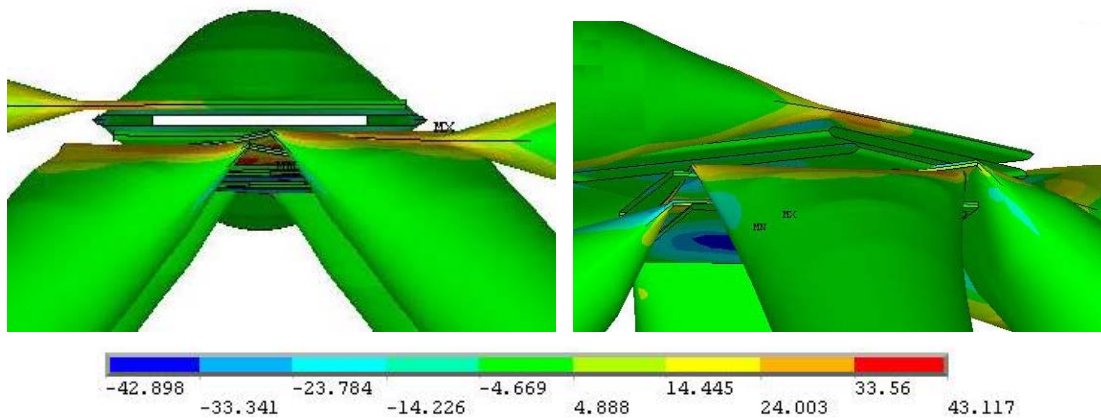


Figura 16 - Tensões no nó modelado

Das figuras, pode ser notado que o nó na posição lateral de menor comprimento apresenta deformações significativas nas diagonais, que tendem a rotacionar o nó. Devido a este comportamento, as estampagens das diagonais são as regiões mais solicitadas, apresentando tensões superiores à tensão de escoamento para o carregamento último teórico. Há concentração de tensões na região do furo. A figura 17 mostra a configuração deformada e a distribuição de tensões na diagonal superior.

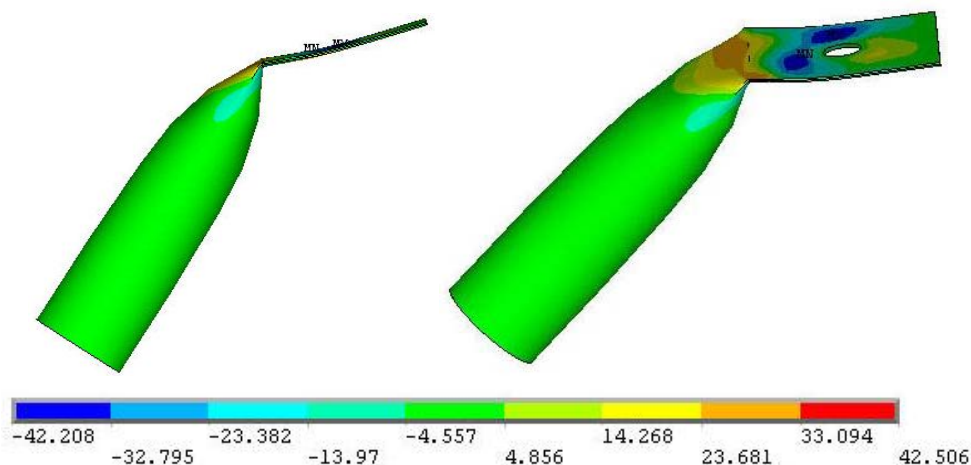


Figura 17 Configuração deformada da diagonal superior

### Nó de vértice superior - canto

O gráfico da figura 18 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó localizado na malha superior da treliça na região central da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó lateral modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

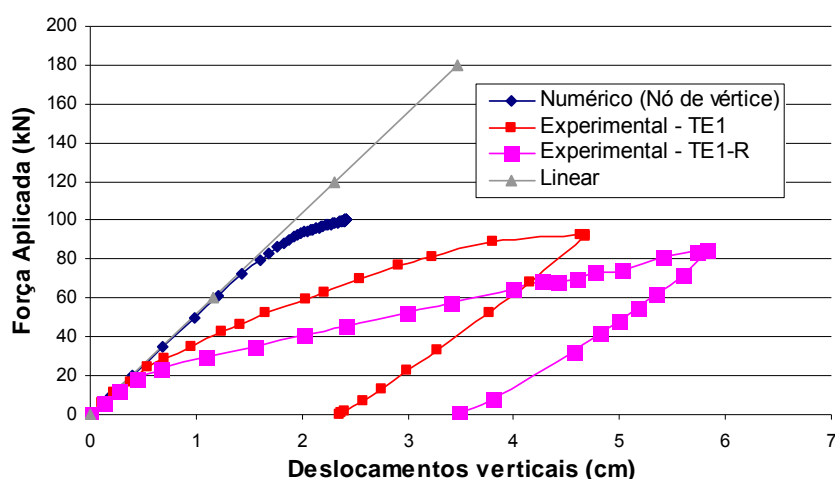


Figura 18 - Deslocamentos verticais no nó mais central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição de vértice

Através do gráfico pode ser observado que o comportamento do nó central da treliça do modelo analisado tem a mesma tendência do experimental. Nota-se que, apesar do carregamento último semelhante, os deslocamentos no modelo numérico são bem inferiores que os experimentais. Isto se deve ao fato de o modelo numérico

não permitir o escorregamento relativo entre as barras e conseqüente acomodação da estrutura, aumentando os deslocamentos verticais.

A figura 19 ilustra os deslocamentos verticais no nó modelado.

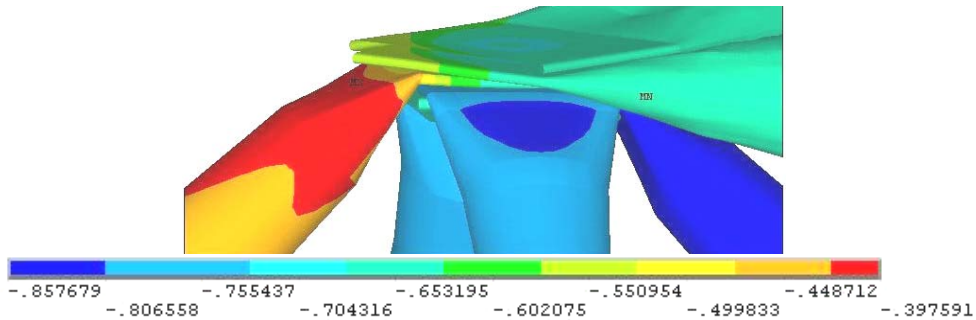


Figura 19 - Deslocamento verticais – nó modelado

Da figura pode ser notado que a diagonal de apoio apresenta deformações significativas na região estampada, causando a degeneração do nó. A região final da estampagem da diagonal se eleva e causando rotação da ligação. As figuras 20 e 21 mostram as tensões no nó modelado.

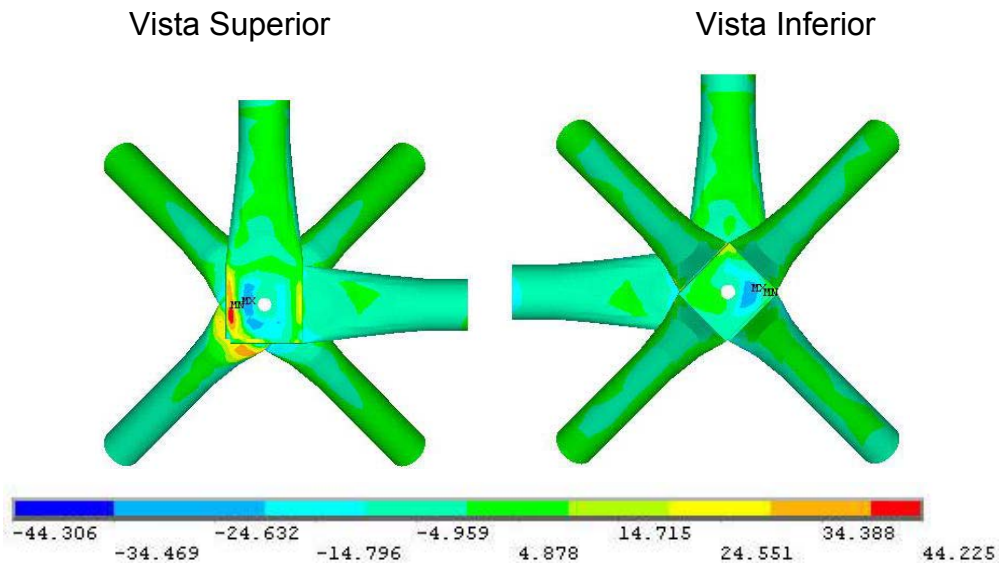


Figura 20 - Tensões no nó modelado

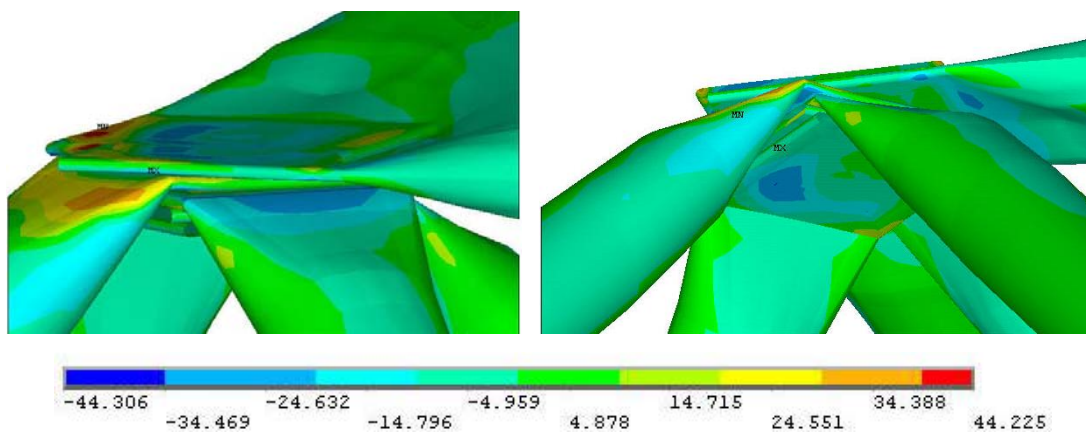


Figura 21 - Tensões no nó modelado

Das figuras, pode ser notado todas as barras que compõem o nó na posição de vértice apresentam elevados valores de tensão. Estas tensões se devem às deformações na diagonal de apoio, que tendem a rotacionar o nó. Devido a este comportamento, as estampagens das barras, em volta do furo, são as regiões mais solicitadas, apresentando tensões superiores à tensão de escoamento para o carregamento último teórico. A figura 22 mostra a configuração deformada da diagonal superior.

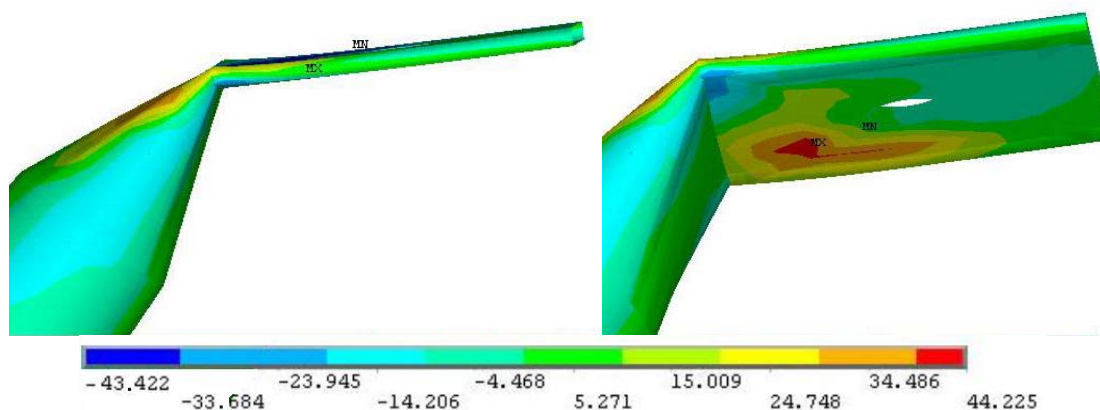


Figura 22 - Configuração deformada da diagonal de apoio

Pode-se observar que a diagonal de apoio sofre grande deformação. Na região em volta do furo há a formação de uma charneira plástica, fazendo a estrutura colapsar.

Com relação a configuração deformada final do nó, o modelo numérico representa bem o comportamento da estrutura observado experimentalmente. A figura 23 mostra a configuração de ruína do nó de vértice.

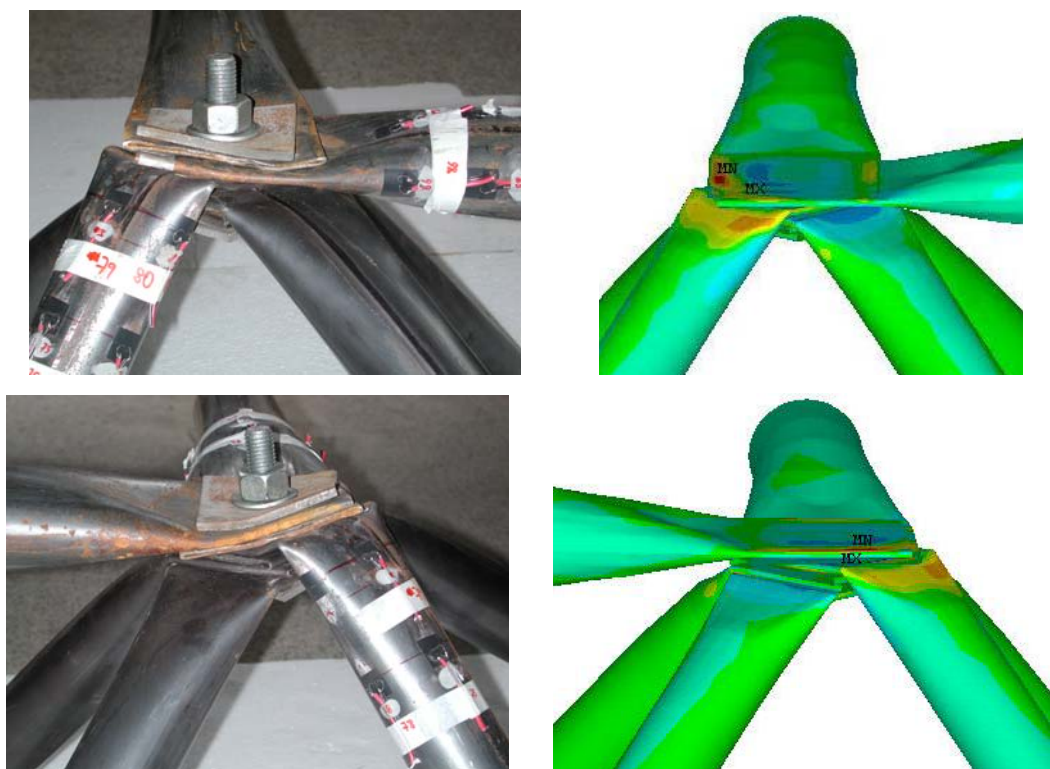


Figura 23 - Configuração de ruína nó

## Alguns resultados das treliças TE2

### Nó lateral – Lado de menor comprimento

O gráfico da figura 24 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó localizado na malha superior da treliça na região central da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó lateral modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

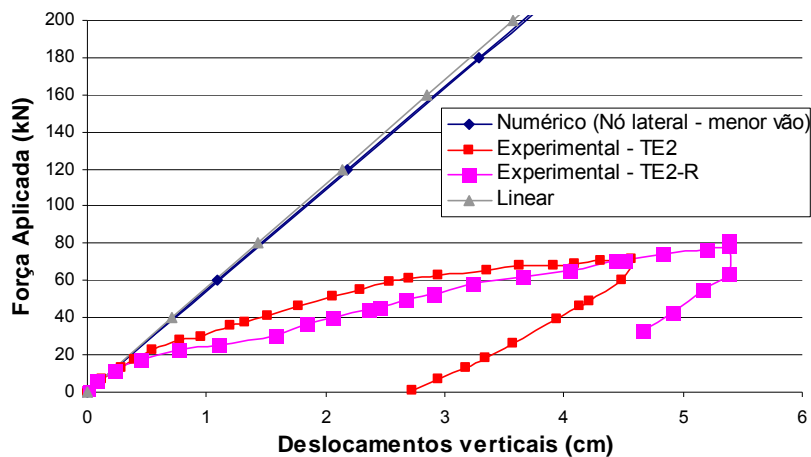


Figura 24 - Deslocamentos verticais no nó mais central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição lateral

Através do gráfico pode ser observado que o comportamento do nó central da treliça, obtido pelo modelo numérico com um nó modelado em elementos de casca, apresenta comportamento linear.

As figuras 25 e 26 mostram as tensões no nó modelado.

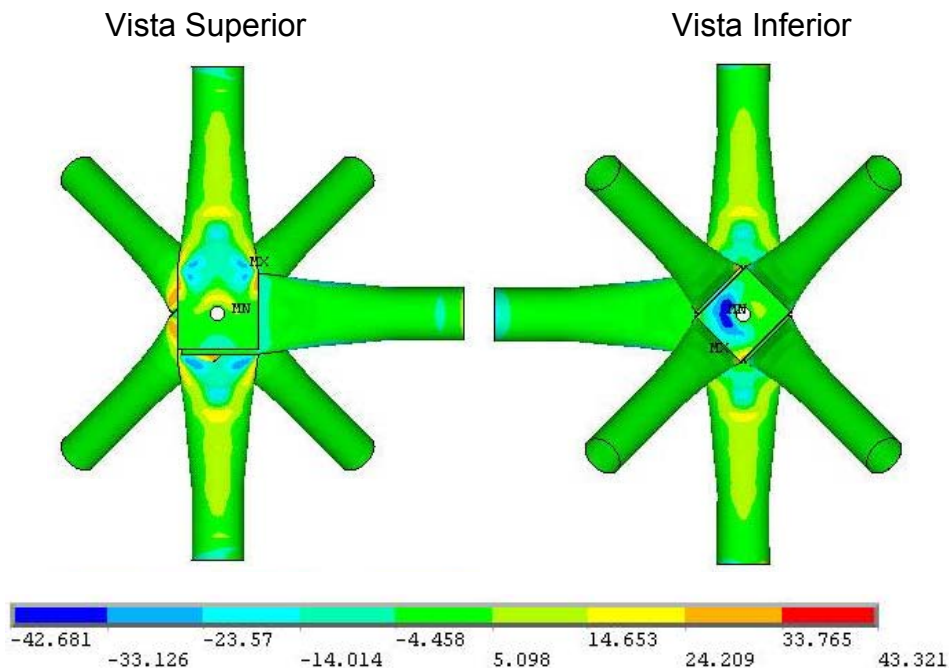


Figura 25 - Tensões no nó modelado

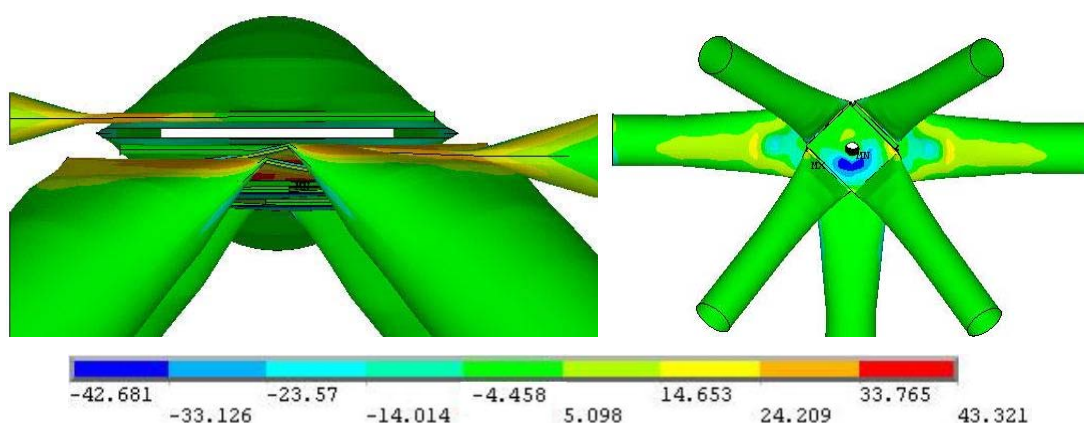


Figura 26 - Tensões no nó modelado

Das figuras pode ser notado que as diagonais laterais apresentam deformações significativas na região estampada, causando a degeneração do nó. A região final da estampagem das diagonais tende a se elevar e causam rotação da ligação. Devido a este comportamento, as estampagens das diagonais são as regiões mais solicitadas, apresentando tensões superiores à tensão de escoamento para o carregamento último teórico. Há concentração de tensões na região do furo. A figura 27 mostra a configuração deformada da diagonal superior.

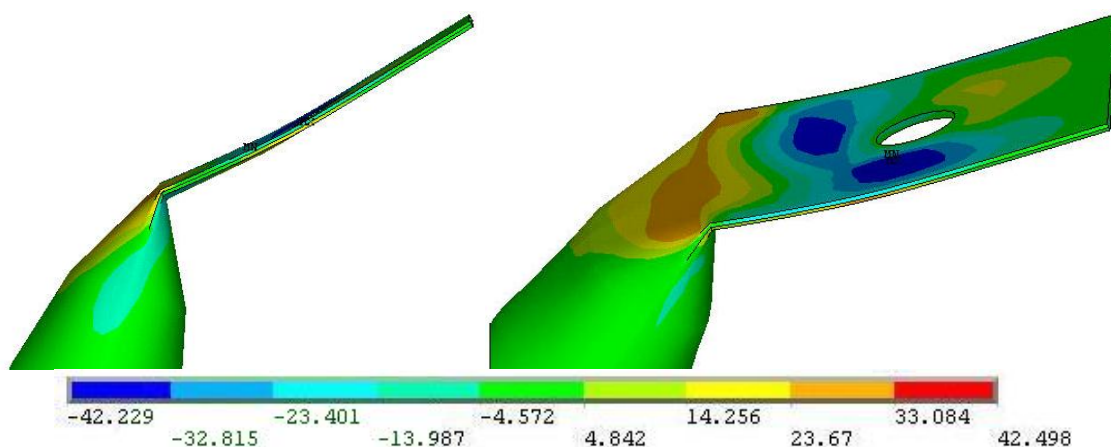


Figura 27 - Configuração deformada da diagonal superior

O comportamento das barras que constituem o nó analisado é idêntico ao da treliça com nó típico com nó modelado em elementos de casca inserido na posição lateral de menor comprimento com diagonais de apoio de seção  $\Phi 60 \times 2,0$ . Os valores de tensão alcançados neste modelo são ligeiramente diferentes do modelo anterior.

### Nó de vértice superior - canto

O gráfico da figura 28 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó localizado na malha superior da treliça no nó mais central da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó lateral modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

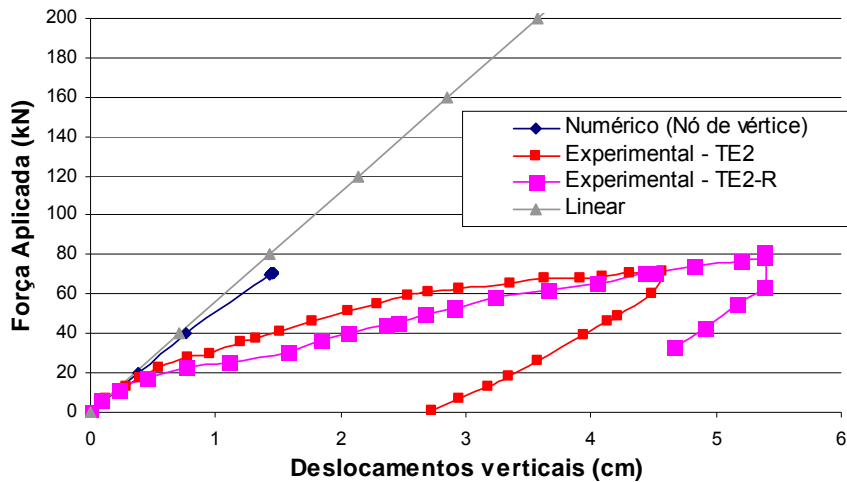


Figura 28 - Deslocamentos verticais no nó mais central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição de vértice

Através do gráfico pode ser observado que o comportamento do nó central da treliça do modelo analisado tem a mesma tendência do experimental. Nota-se que, apesar do carregamento último próximo, os deslocamentos no modelo numérico são bem inferiores aos experimentais. Isto se deve ao fato de o modelo numérico não permitir o escorregamento relativo entre as barras e conseqüente acomodação da estrutura, aumentando os deslocamentos verticais.

Da figura pode ser notado que a diagonal de apoio apresenta deformações significativas na região estampada, causando a degeneração do nó. A região final da estampagem da diagonal se eleva e causando rotação da ligação. A figura 29 mostra as tensões no nó modelado.

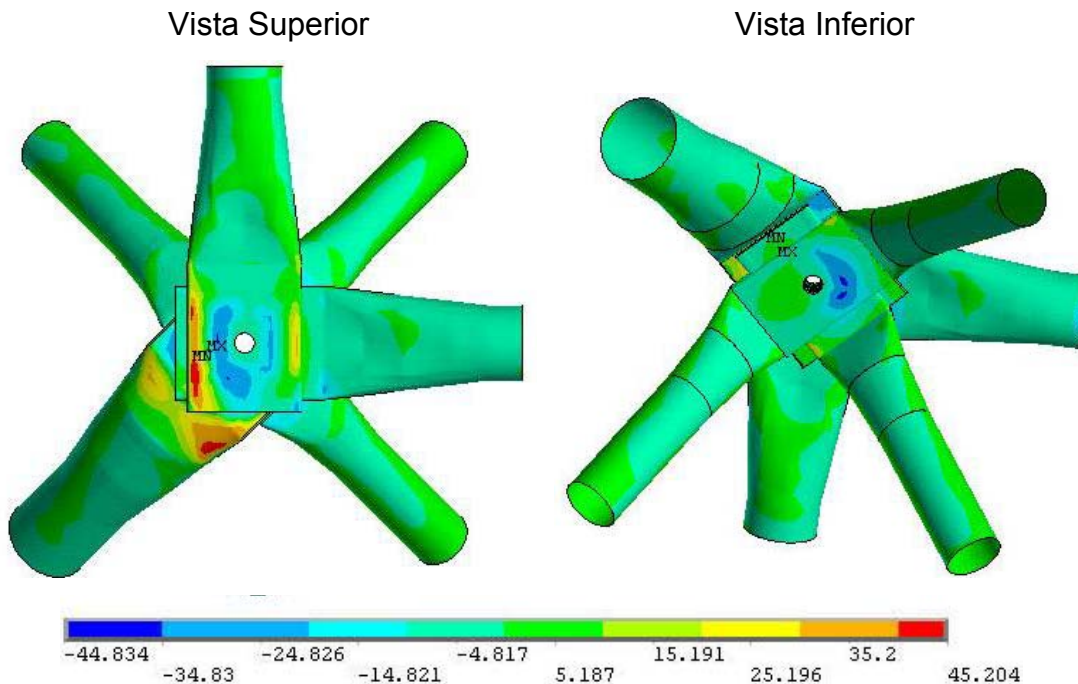


Figura 29 - Tensões no nó modelado

Das figuras, pode ser notado todas as barras que compõem o nó na posição de vértice apresentam elevados valores de tensão. Estas tensões se devem às deformações na diagonal de apoio, que tendem a rotacionar o nó. Devido a este comportamento, as estampagens das barras, em volta do furo, são as regiões mais solicitadas, apresentando tensões superiores à tensão de escoamento para o carregamento último teórico. Pelo detalhe das tensões nas barras nota-se que existem seções nas extremidades já totalmente plastificadas, formando rótulas plásticas e transformando a barra em mecanismo, conduzindo a estrutura ao colapso. A figura 30 mostra a configuração deformada da diagonal superior.

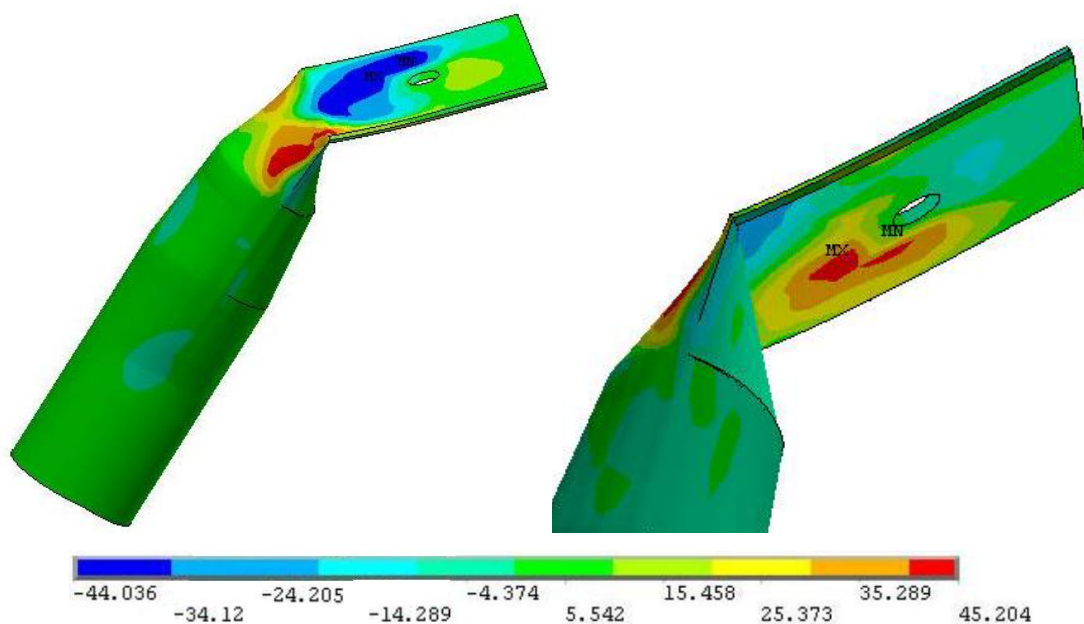


Figura 30 - Configuração deformada da diagonal de apoio

A diagonal de apoio sofre grande deformação. Na região em volta do furo há a formação de uma charneira plástica, fazendo a estrutura colapsar. Com relação a configuração deformada final do nó, o modelo numérico representa bem o comportamento da estrutura observado experimentalmente. A figura 31 mostra a configuração de ruína do nó de vértice.

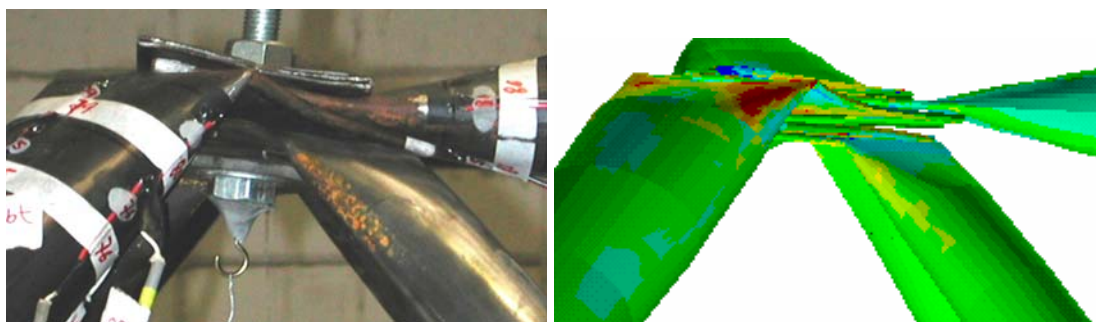


Figura 31 - Configuração de ruína nó

## 4 ANÁLISE DO NÓ DE AÇO

A treliça TE4 tem como sistema de ligação o nó de aço.

### Alguns resultados das treliças TE4

#### Nó lateral - Lado de menor comprimento

No nó modelado não são notadas grandes deformações. O nó apresenta deslocamentos verticais uniformes.

O gráfico da figura 32 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó da região central da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó lateral modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

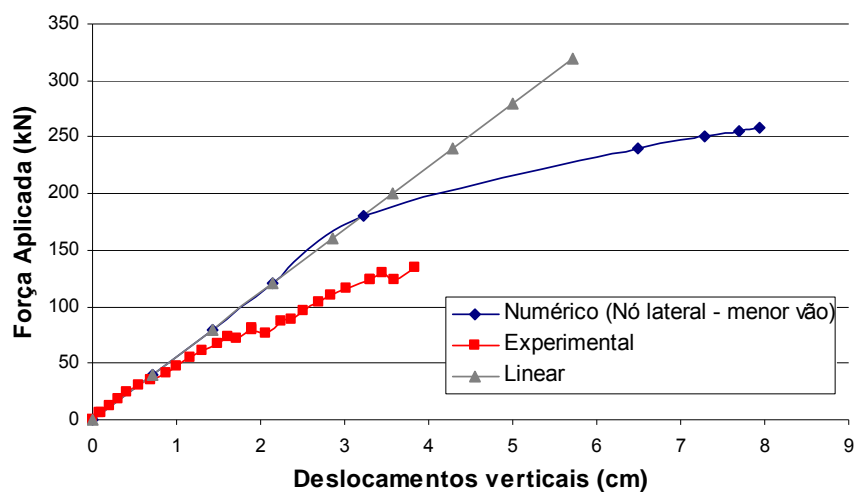


Figura 32 - Deslocamentos verticais na região central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição lateral

Através do gráfico pode ser observado que o comportamento do nó central da treliça, obtido pelo modelo numérico com um nó modelado em elementos de casca, apresenta comportamento linear até o carregamento de aproximadamente 180 kN. A partir de então, o modelo experimental começa a apresentar não-linearidades, se distanciando do linear. Os deslocamentos verticais do nó central da treliça obtido por este modelo numérico são diferentes dos valores obtidos experimentalmente. Isto pode ser explicado pelo fato de o modelo ensaiado ter colapsado devido a plastificação da chapa horizontal do nó de aço, não por flambagem dos banzos mais centrais. Além disto, o acoplamento feito nos furos como simulação do efeito dos parafusos não permite o escorregamento relativo entre barras, que causam acomodações na estrutura aumentando os deslocamentos e influenciando grandemente o comportamento da estrutura.

As tensões se distribuem de forma uniforme ao longo da estrutura modelada em elementos lineares. No entanto, o nó modelado em elementos de casca apresenta maiores valores de tensão, principalmente na região de acoplamento do nó modelado em elementos de casca a estrutura modelada em elementos lineares e na região estampada das barras. A figura 33 ilustra as tensões no nó modelado.

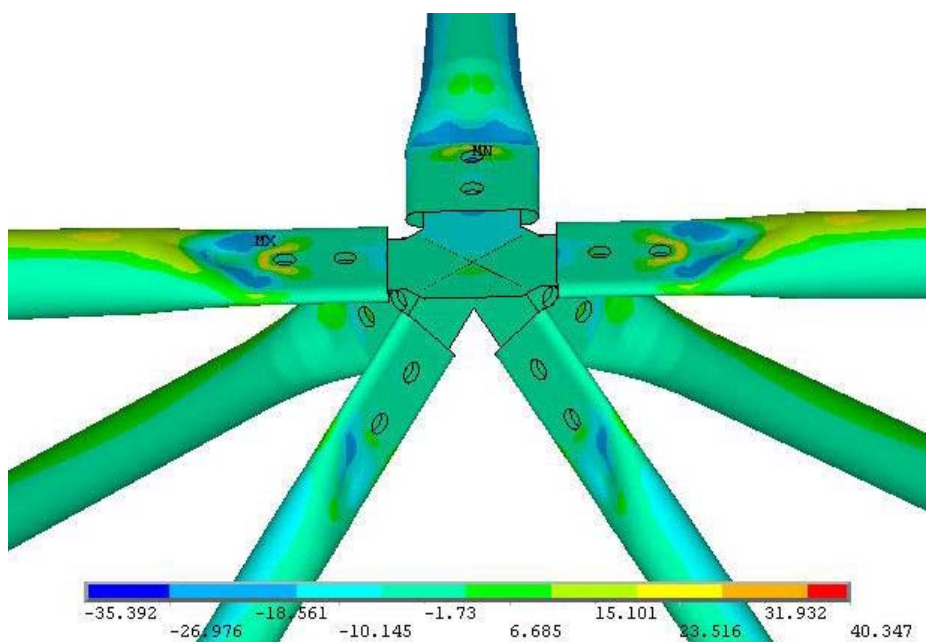


Figura 33 - Tensões no nó modelado

As maiores tensões ocorrem na chapa horizontal do nó, na região de ligação do banzo da direção do maior vão. Pôde ser notada concentração de tensões na região final da estampagem, próximo ao segundo furo. Pode ser visto que os banzo na direção do maior vão é a barra mais solicitada.

Nas barras as tensões se concentram na região amassada, na região lateral da barra e na região dos furos. Pôde ser notado também que a região do acoplamento da barra com a estrutura modelada em elementos lineares apresenta valores elevados de tensão. Nas diagonais ocorrem valores elevados de tensão na região superior da barra.

### Nó lateral - Lado de maior comprimento

No gráfico da figura 34 são apresentados os resultados dos deslocamentos verticais do nó da região central da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó lateral modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

Através do gráfico pode ser observado que o comportamento do nó central da treliça, obtido pelo modelo numérico com um nó modelado em elementos de casca, apresenta comportamento linear. Isto indica que a inserção do nó modelado em elementos de casca na posição lateral no maior comprimento não influencia significativamente o comportamento da estrutura.

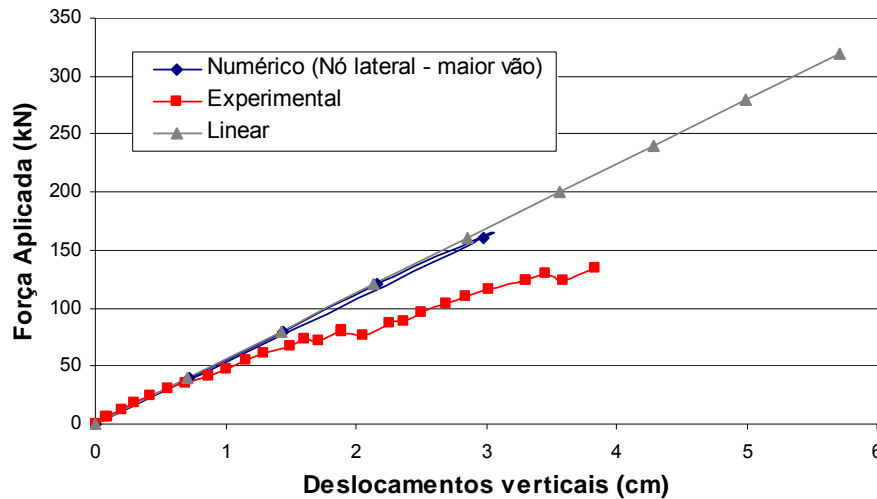


Figura 34 - Deslocamentos verticais na região central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição lateral

Através da figura pode ser observado que as tensões se distribuem de forma uniforme ao longo da estrutura modelada em elementos lineares. No entanto, o nó modelado em elementos de casca alcança maiores valores de tensão, principalmente os banzos na direção do maior vão da treliça. A figura 35 ilustra as tensões no nó modelado.

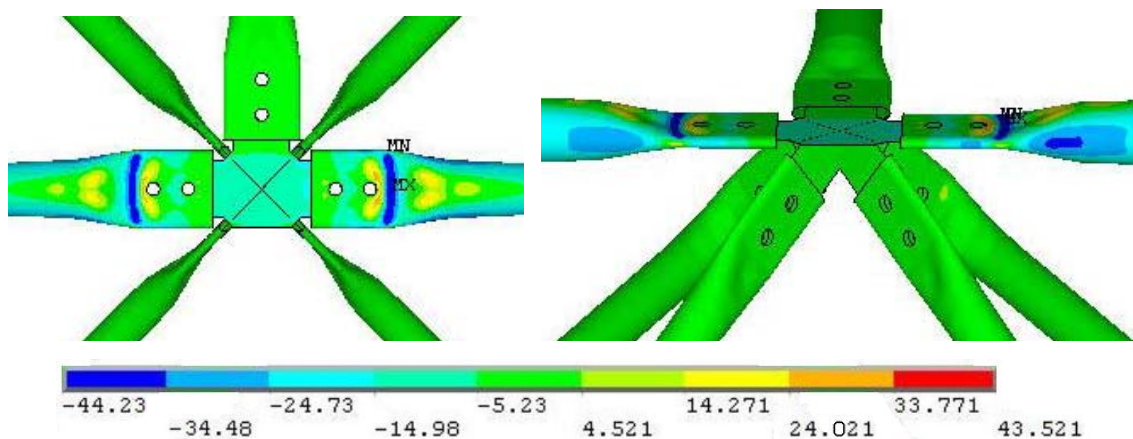


Figura 35 - Tensões no nó modelado

Pôde-se notar que os banzos na direção do maior vão apresentam os maiores valores de tensão. Ocorre alta concentração de tensões na região final da estampagem, próximo ao segundo furo, no local de ligação com as barras de banzo na direção do maior vão. No nó de aço, as maiores tensões ocorrem na chapa horizontal do nó, na região de ligação do banzo da direção do maior vão.

Os banzos na direção do meio do vão apresentam regiões com tensões bastante elevadas, com valores superiores a tensão de escoamento. As tensões se concentram na região estampada, na região lateral da barra e na região dos furos.

### Nó de vértice superior - canto

O gráfico da figura 36 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó de canto da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó de vértice superior modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

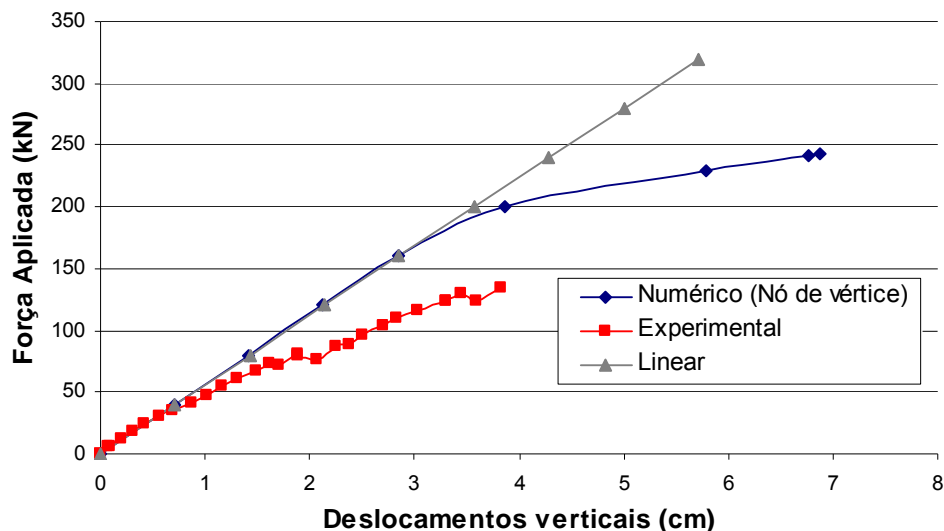


Figura 36 - Deslocamentos verticais na região central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição lateral

Através do gráfico pode ser observado que os deslocamentos verticais do nó central da treliça obtido por este modelo numérico são próximos dos valores obtidos experimentalmente. A diferença entre os valores teóricos e experimentais pode ser explicada pelo fato de o modelo ensaiado ter colapsado devido a plastificação da chapa horizontal do nó de aço. Na treliça ensaiada isto ocorreu devido às imperfeições do nó, causando excentricidade dos esforços no nó. Além disto, o acoplamento feito nos furos como simulação do efeito dos parafusos não permite o deslocamento relativo entre as barras, que influencia o comportamento da estrutura. Não havendo acomodação da estrutura modelada, e já que o nó com chapa de ponteira não apresenta excentricidades, a mudança de posição do nó modelado não altera o comportamento da treliça.

As tensões se distribuem de forma uniforme ao longo da estrutura modelada em elementos lineares. No entanto, na região do nó modelado as tensões apresentam valores elevados. As tensões mais elevadas ocorrem na região do nó de aço, no banzo na direção do maior vão e na diagonal de apoio. As figuras 37 e 38 ilustram, respectivamente, as tensões no nó modelado e as tensões no nó de aço.

Da análise, pode ser observado que as maiores tensões ocorrem na região de solda da chapa de ligação da diagonal de apoio à chapa horizontal do nó de aço, especialmente na chapa que liga a diagonal de apoio. As tensões também alcançam valores elevados na chapa horizontal, na região de ligação do banzo na direção do maior vão. Também pode ser visto que a diagonal de apoio é a mais solicitada.

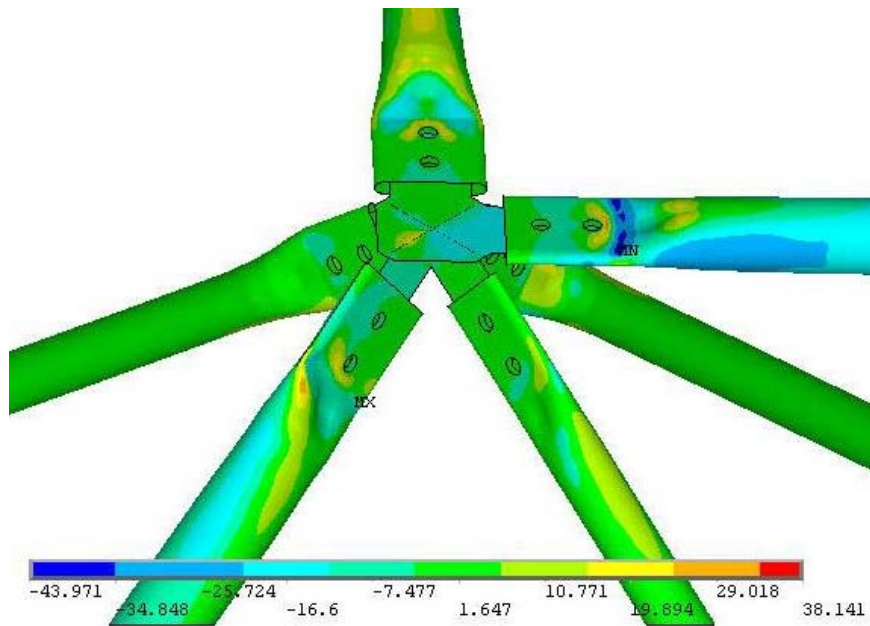


Figura 37 - Tensões no nó modelado – nó modelado em elementos de casca

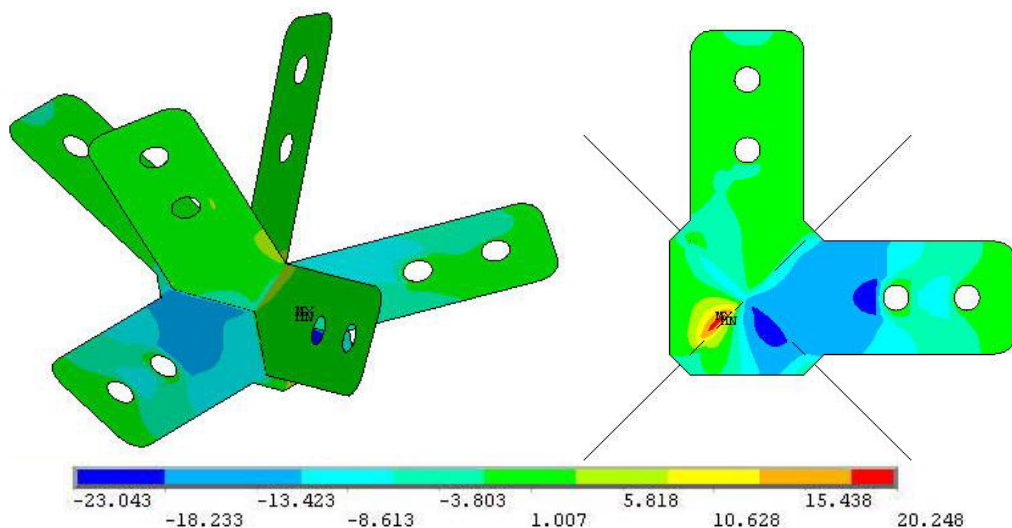


Figura 38 - Tensões no nó de aço

Na região da estampagem das barras ocorrem os valores mais elevados de tensão, com valores maiores que a tensão de escoamento. As tensões se concentram na região amassada e na região dos furos, principalmente na região superior da barra posicionada na treliça. Pode ser notado também que a região superior apresenta tensões de tração e a região inferior compressão, fazendo a barra tender a se deformar diminuindo a depressão causada pela estampagem na região mais inferior. Também ocorre plastificação da seção anterior ao primeiro furo. Isto também acontece na barra de banzo. Pode ser notado que, assim como na diagonal de apoio, a região anterior ao primeiro furo apresenta valores de tensão elevados, superiores a tensão de escoamento, indicando plastificação desta região. Também ocorrem tensões de compressão na região lateral da barra. Pode ser observado também que na região de acoplamento da barra modelada em elementos de casca com a estrutura modelada em elementos lineares ocorrem tensões elevadas.

## 5 ANÁLISE DO NÓ COM CHAPA DE PONTEIRA

A treliça TE5 tem como sistema de ligação o nó de aço com chapa de ponteira.

### Alguns resultados das treliças TE5

#### Nó lateral - Lado de menor comprimento

O gráfico da figura 39 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó localizado na malha superior da treliça na região central da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó lateral modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

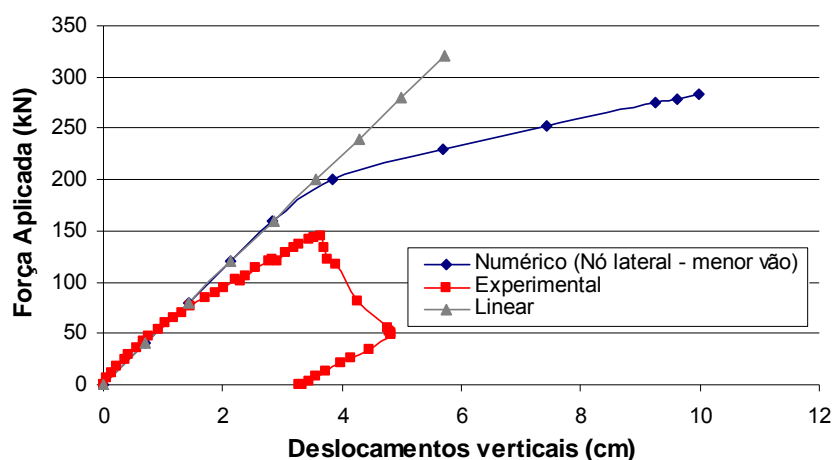


Figura 39 - Deslocamentos verticais na região central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição lateral

Através do gráfico pode ser observado que o comportamento do nó central da treliça, obtido pelo modelo numérico com um nó modelado em elementos de casca, apresenta valores bem semelhantes aos obtidos pela análise linear até um carregamento de cerca de 80 kN. Neste trecho o modelo apresenta comportamento linear. A partir de então, o modelo experimental começa a apresentar fortes não-linearidades, se distanciando do numérico. O modelo numérico apresenta comportamento linear até um carregamento de cerca de 160 kN, só a partir daí começam a ser notadas não-linearidades. Isto pode ser explicado pelo fato de o modelo numérico não simular o efeito dos parafusos, e, portanto, não consideram o efeito do escorregamento relativo entre barras, que causam acomodações na estrutura aumentando os deslocamentos e influenciando grandemente o comportamento da estrutura.

A figura 40 ilustra as tensões no nó modelado.

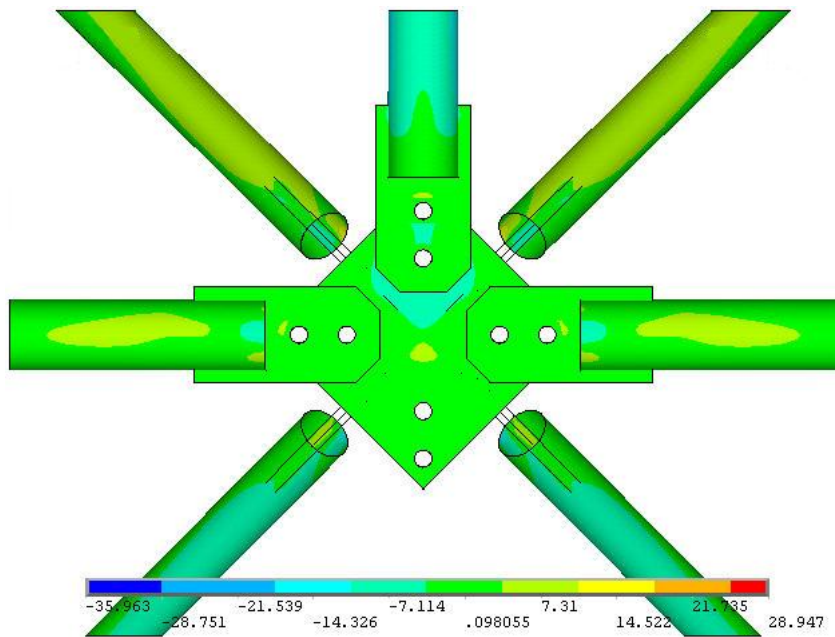


Figura 40 - Tensões no nó modelado – vista do nó de aço

Pode ser observado que as tensões se concentram na região de ligação das chapas que ligam as diagonais. Uma vez que o nó modelado se localiza no meio do vão na posição lateral, este apresenta comportamento de tensões simétrico em relação a direção de maior comprimento da estrutura. Também pode ser vista a concentração de tensões nos furos. As figuras mostram que não há grande concentração de tensões no nó com chapa de ponteira.

Através da figura pode ser notado que não existem pontos de pico de tensões. Como era esperado, as tensões se concentram na região de solda da barra com a chapa de ponteira e na região dos furos.

### Nó de vértice superior - canto

O gráfico da figura 41 ilustra os resultados dos deslocamentos verticais do nó localizado na malha superior da treliça na região central da estrutura. Neste gráfico são comparados os valores obtidos experimentalmente, numericamente com o nó de vértice superior modelado em elementos de casca e numericamente com modelo de treliça ideal.

Através do gráfico pode ser observado que os deslocamentos verticais do nó central da treliça obtido por este modelo numérico é bem semelhante aos obtidos pelos modelos com nós em outras posições. A mudança de posição altera somente o carregamento final do modelo. Isto pode ser explicado pelo acoplamento feito nos furos como simulação do efeito dos parafusos. O acoplamento não permite o deslocamento relativo entre as barras, que influencia o comportamento da estrutura. Não havendo acomodação da estrutura modelada, e já que o nó com chapa de ponteira não apresenta excentricidades, a mudança de posição do nó modelado não altera o comportamento da treliça.

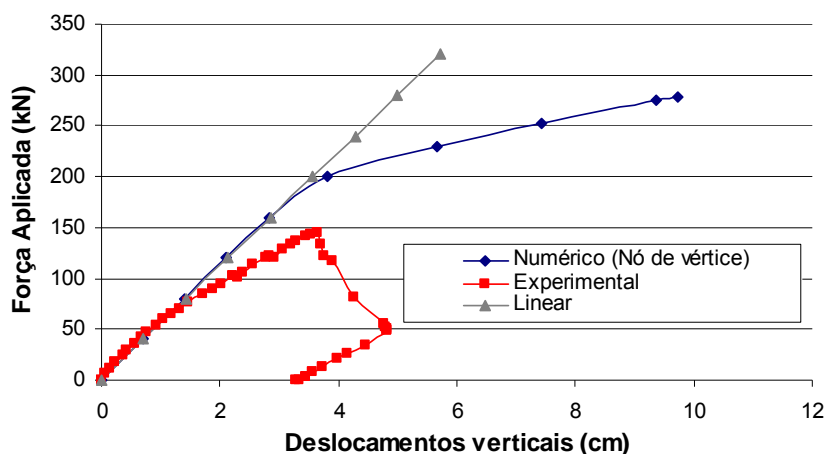


Figura 41 - Deslocamentos verticais na região central da treliça – resultados teóricos x experimentais – nó modelado na posição lateral

Através da figura pode ser observado que as tensões se distribuem de forma uniforme ao longo da estrutura modelada em elementos lineares. No entanto, no nó de aço e nas extremidades das barras há pontos de concentração de tensões. As figuras 42, 43 e 44 ilustram, respectivamente, as tensões no nó modelado, no nó de aço e na diagonal de apoio.

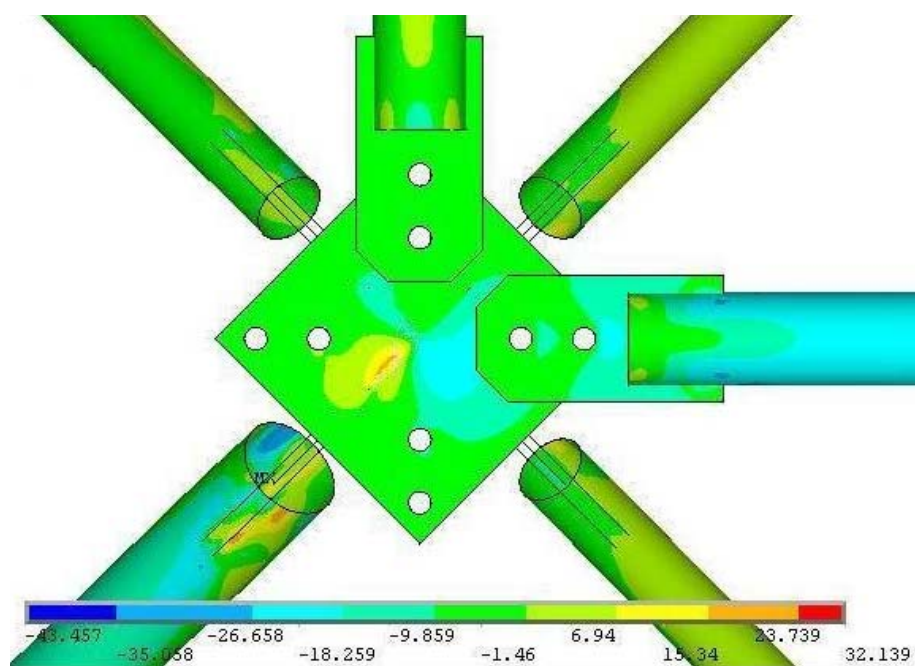


Figura 42 - Tensões no nó modelado – vista do nó de aço

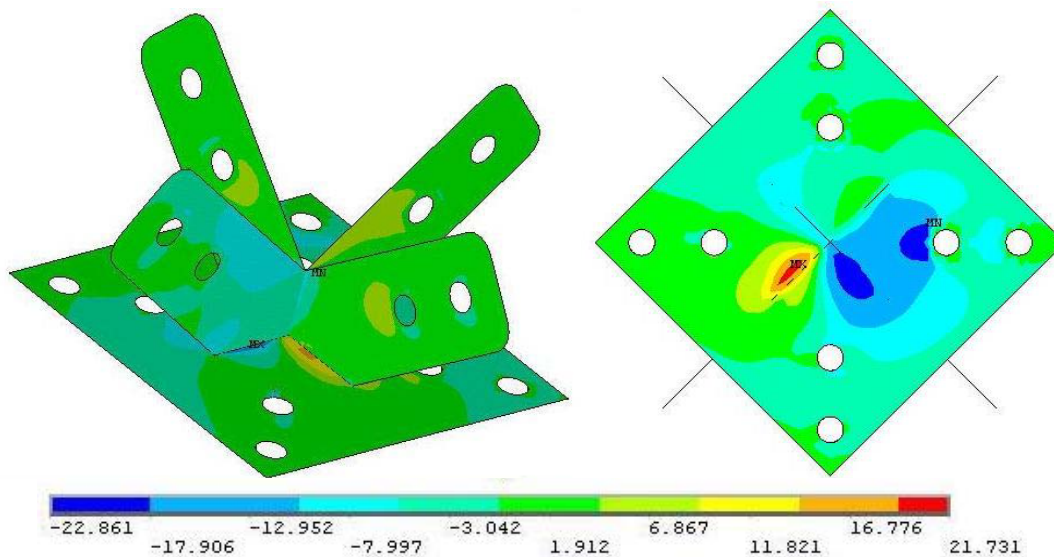


Figura 43 - Tensões no nó de aço – vista de cima

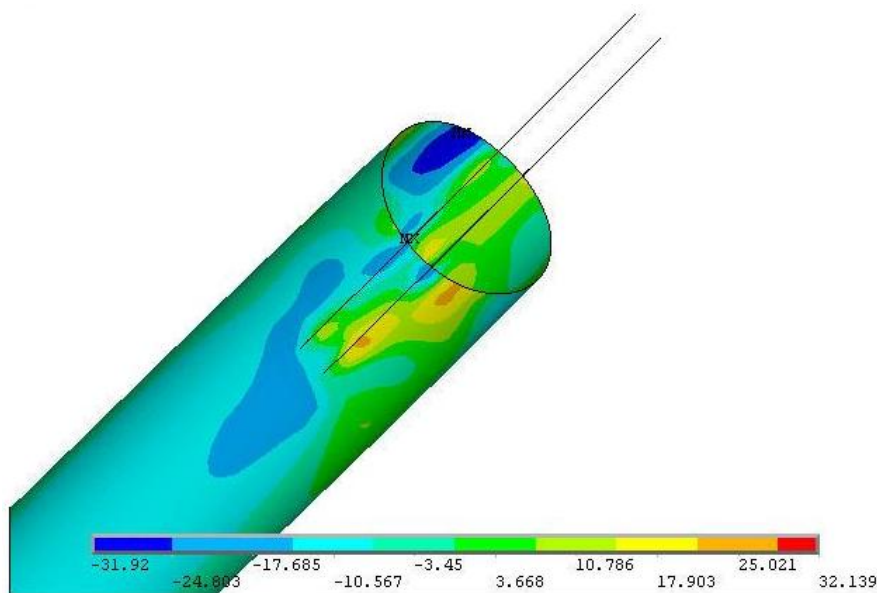


Figura 44 - Tensões na diagonal de apoio – vista da região da ponteira

Da análise pôde ser observado que há concentração de tensões na região de solda da chapa de ligação de diagonal de apoio à chapa de base do nó de aço. As tensões também alcançam valores elevados na chapa de base na região de ligação do banzo na direção do maior vão. Também pôde ser visto que a diagonal de apoio é a mais solicitada.

Pode ser notado que os maiores valores de tensões ocorrem na diagonal de apoio. Como esperado, as tensões se concentram na região de solda da barra com a chapa de ponteira e na região dos furos, principalmente na região superior da barra.

## 6 CONCLUSÕES

As treliças metálicas espaciais têm sido cada vez mais empregadas nas coberturas de grandes áreas, apresentando características que fazem desta opção uma solução viável economicamente e esteticamente satisfatória. No entanto, aliados ao crescimento da utilização deste sistema, graves problemas vêm ocorrendo, causando colapso parcial ou mesmo total de algumas estruturas. Na sua grande maioria, estes problemas ocorrem devido à incoerência entre modelos de cálculo admitidos e o comportamento real da estrutura, principalmente devido ao emprego de sistemas de ligação para os quais não existem estudos conclusivos que determinem seu comportamento e validem as hipóteses de cálculo normalmente adotadas pelos projetistas.

As soluções mais comumente utilizadas no Brasil são nós constituídos da união das extremidades amassadas das barras, unidas por um ou mais parafusos, com ou sem utilização de chapas de ligação. Como já discutido, estas soluções apresentam comportamento fortemente não linear. Assim há uma necessidade de avaliar numericamente os “modos de falha” nesses sistemas de ligação

Treliças espaciais com nós típicos são bastante sensíveis a variação de seção nas barras e excentricidades na ligação com resultados experimentais muito discrepantes dos obtidos teoricamente. Mesmo os modelos teóricos que consideram variação de seção excentricidades e não linearidades ainda se mostram incapazes de prever o comportamento destas estruturas, muito influenciado pelo escorregamento relativo e separação entre barras na região nodal.

Já os nós de aço e com chapa de ponteira, apesar da variação brusca de inércia nas extremidades das barras, por estampagem ou pela chapa de ponteira, tem comportamento melhor. Estas tipologias de nó não apresentam excentricidades.

Neste trabalho foram apresentadas modelagens numéricas utilizando elementos finitos para analisar o comportamento de ligações com variação de inércia nas extremidades das barras, utilizadas em treliças espaciais.

O objetivo principal desta modelagem numérica é simular o comportamento local da ligação com o intuito de levantar o caminhamento das tensões nos elementos e futuramente propor modificação na geometria do nó para aumentar sua capacidade de carga.

Através das análises feitas do nó típico pode-se notar que a inserção de um nó modelado em elementos de casca no vértice superior da estrutura influencia o comportamento global da estrutura. Nesta posição o nó sofre degeneração devido a própria tipologia do sistema de ligação. Nas outras posições a inserção do nó não altera o comportamento global da estrutura, aumentando muito pouco o valor dos deslocamentos verticais na região de inserção.

Quanto aos deslocamentos verticais do nó central da treliça, as diferenças entre os valores experimentais e teóricos se devem ao acoplamento feito nos furos como simulação do efeito dos parafusos não permite o deslocamento relativo entre as barras, que influencia o comportamento da estrutura, não havendo acomodação da estrutura modelada. Além disto, o modelo teórico considera apenas um nó modelado, sendo insuficiente para análise do comportamento global da treliça.

As tensões se distribuem de forma uniforme ao longo da estrutura modelada em elementos lineares, qualquer que seja a posição de inserção do nó modelado. No

entanto, o nó modelado apresenta maiores valores de tensão, principalmente as diagonais localizadas mais acima na montagem do nó. As diagonais apresentam deformações significativas na região estampada, causando a degeneração do nó. A região final da estampagem das diagonais tende a se elevar causando a rotação da ligação. Também ocorre concentração de tensões devido ao parafuso, causando efeito um localizado. Devido a este comportamento, as estampagens das barras, em volta do furo, são as regiões mais solicitadas, apresentando tensões superiores à tensão de escoamento para o carregamento último teórico. Pelo detalhe das tensões nas barras nota-se que existem seções nas extremidades já totalmente plastificadas, formando rótulas plásticas e transformando a barra em mecanismo, conduzindo a estrutura ao colapso. Este efeito é mais pronunciado nas diagonais de apoio da estrutura.

A mudança de posição do nó modelado altera somente o carregamento final do modelo. Isto pode ser explicado pelo acoplamento feito nos furos como simulação do efeito dos parafusos. O acoplamento não permite o deslocamento relativo entre as barras, e conseqüente acomodação da estrutura. Assim, qualquer que seja a posição de inserção do nó modelado, o comportamento global será semelhante.

O modo de ruína de estruturas que utilizam o sistema de ligação típico está diretamente relacionado com problemas localizados nestes nós. Isto se comprova uma vez que, valores diferentes para carga crítica da estrutura foram obtidos em função da posição em que o nó foi inserido em relação ao encontrado experimentalmente.

Através das análises feitas do nó de aço e do nó com chapa de ponteira pode-se notar que a inserção de um nó modelado em elementos de casca na treliça espacial modelada em elementos lineares em qualquer das quatro posições estudadas não influencia significativamente o comportamento global da estrutura, aumentando muito pouco o valor dos deslocamentos verticais na região de inserção. O nó modelado não apresenta grandes deformações.

As tensões se distribuem de forma uniforme ao longo da estrutura modelada em elementos lineares, qualquer que seja a posição de inserção do nó modelado. No entanto, o nó modelado apresenta maiores valores de tensão, principalmente os banzos na direção do maior vão da treliça.

Nas barras do nó de aço, as tensões se concentram na região estampada, na região lateral da barra e na região dos furos. A região do acoplamento da barra com a estrutura modelada em elementos lineares apresenta valores elevados de tensão. Nas diagonais ocorrem valores elevados de tensão na região superior da barra. As maiores tensões são maiores que a tensão de escoamento. Nas barras do nó com chapa de ponteira, as tensões se concentram na região de solda da barra com a chapa de ponteira e na região dos furos. Há pontos de concentração de tensões na região de ligação (solda) com a chapa de ponteira.

No nó de vértice, as maiores tensões ocorrem no nó de aço, na região de solda da chapa de ligação da diagonal de apoio à chapa horizontal do nó de aço, especialmente na chapa que liga a diagonal de apoio. As tensões também alcançam valores elevados na chapa horizontal, na região de ligação do banzo na direção do maior vão. Também pôde ser visto que a diagonal de apoio é a barra mais solicitada.

O comportamento do nó central da treliça obtido pelo todos os modelos numéricos apresenta valores bem semelhantes aos obtidos experimentalmente até um carregamento de cerca de 80 kN. Neste trecho o modelo apresenta

comportamento linear. A partir de então, o modelo experimental começa a apresentar fortes não-linearidades, se distanciando dos numéricos. Isto pode ser explicado pelo fato de o modelo numérico não simular o efeito dos parafusos, e, portanto, não consideram o efeito do escorregamento relativo entre barras, que causam acomodações na estrutura aumentando os deslocamentos e influenciando grandemente o comportamento da estrutura. Neste tipo de nó também não há plastificações excessivas como no caso do nó típico.

Os modelos de nó de aço e nó de aço com chapa de ponteira apresentaram elevados valores de tensão das extremidades das barras, na região de acoplamento à estrutura modelada em elementos lineares. Nestas treliças o colapso se dá devido à flambagem dos banzos superiores na região central. Como a treliça ideal não simula a flambagem dos elementos, os altos valores de tensão na região do acoplamento indicam que as barras colapsam antes do nó.

Os modelos de nós discretizados com elementos de casca possibilitam avançar na pesquisas sobre o comportamento de ligações reduzindo a necessidade de ensaios em modelos físicos.

Salienta-se que o modelo utilizado para simular o nó típico do protótipo ensaiado no Laboratório de Estruturas da EESC-USP, apresenta limitações que não podem ser negligenciadas: não consideração da protensão do parafuso, atrito, deslizamento e o modelo reológico simplificado para o aço ( $\sigma \times \epsilon$  tri-linear).

Mesmo com as simplificações, como a desconsideração das folgas, escorregamento relativo e separação entre barras na região nodal, o modelo numérico reproduziu qualitativamente o comportamento do nó de forma satisfatória.

Em vista do exposto, conclui-se que o comportamento momento-rotação do nó tem influência fundamental da distribuição dos esforços nos elementos e que os modelos teóricos convencionais não são capazes de reproduzir o modo de colapso observado.

Como sugestão para continuidade deste trabalho propõe-se aprimorar a modelagem dos nós incluindo a modelagem dos parafusos e considerando os efeitos de deslizamento relativo entre barras, atrito e protensão causada pelo parafuso.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGERSKOV, H. (1986). Optimum geometry design of double-layer space structure. **Journal of Structural Engineering**, v.112, n.6, p.1454-1463, June.

ANSYS (1997). **Structural nonlinearities: user's guide for revision 5.5**. Houston. v.1.

BLANDFORD, G. E. (1996). Progressive failure analysis of inelastic space truss structures. **Computers & Structures**, v. 58, n. 5, p. 981-990, Mar.

CHANDRA, R.; TRIKHA, D. N.; KRISHNA, P. (1990). Nonlinear Analysis of Steel Space Structures. **Journal of Structural Engineering**, v.116, n.4, p.898-955, Apr.

CODD, E.T.; ARCH, B.; FRAIA; AIDA. (1984). Low technology space frames. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, 3., Guildford, U.K., 1984. **Proceedings...** London/New York: Elsevier Applied Science. p.955-960.

- COLLINS, I. M. (1984). An investigation into the collapse behaviour of double-layer grids. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, 3., Guildford, UK, Sept. 1984, **Proceedings...** London/New York: Elsevier Applied Science. p.400-405.
- D'ESTE, A. V. (1998). **Comportamento de estruturas espaciais tubulares padronizadas**. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- EL-SHEIKH, A. (1999). Failure mode and strength of space truss compression chord members. **Engineering Structures**. v.21, p.395-405, Nov.
- GONÇALVES, R. M.; RIBEIRO, L. F. R. (1995). Analysis of the behaviour and numerical simulation of nodes that are characteristic of spatial tubular structures. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 27., Tucumán, Argentina, Sep., 1995. **Memórias...** Tucumán: ASAIE/ Laboratorio de Estructuras - FCET - UNT. v.4, p.507-518.
- GONÇALVES, R. M.; RIBEIRO, L.F.R. (1996). Behaviour of steel tubular elements submitted to compression: analysis by finite element method, In: JOINT CONFERENCE OF ITALIAN GROUP OF COMPUTACIONAL MECHANICS AND IBERO-LATIN AMERICAN ASSOCIATION OF COMPUTACIONAL METHODS IN ENGINEERING, Padova, Italy, Sep., 1996, **Proceedings...** p.106-115.
- HANAOR, A.; MARSH, C. (1989). Modification of behaviour of double-layer grids: overview. **Journal of Structural Engineering**, v.115, n.5, p.1021-1570, May.
- HANAOR, A. (1999). Joint instability in lattice structures - Lesson from a recent collapse. **International Journal of Space Structures**, v.14, n.4. p.205-213.
- LIEW, J. Y. R.; PUNNIYAKOTTY, N. M.; SHANMUGAM, N. E. (1997). Advanced Analysis and Design of Spatial Structures. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 42, n. 1, p. 21-48, Apr.
- MAGALHÃES, J. R. M. (1996 a). **Sobre o projeto e a construção de estruturas metálicas espaciais**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- MAIOLA, C. H. (1999). **Análise teórica e experimental de treliças espaciais constituídas por barras com extremidades estampadas**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- MAKOWSKI, Z. S. (1968). **Estructuras espaciales de acero**. Barcelona: Gustavo Gili.
- MAKOWSKI, Z. S. (1981). Review of development of various types of double-layer grids. In: MAKOWSKI, Z. S. (Ed.). **Analysis, design and construction of double-layer grids**. London: Applied Science Publishers. p.1-55.
- MAKOWSKI, Z. S. (1984). Space structures of today and tomorrow, In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, 3., Guildford, UK, Sep. 1984, **Proceedings...** London/New York: Elsevier Applied Science. p.1-8.

- MALLA, R. B.; SERRETTE, R. L. (1996a). Double-layer grids: review of static and thermal analysis methods. **Journal of Structural Engineering**, v.122, n.8, p.873-881, Aug.
- MARSH, C. (2000). Some observations on designing double layer grids. **International Journal of Space Structures**, v.13, n. 3/4. p. 225 -231.
- MURTHA-SMITH, E. (1986). Alternate path analysis of space trusses for progressive collapse. **Journal of Structural Engineering**, v.114, Mar.
- MURTHA-SMITH, E.; LEARY, S. F. (1993). Space truss structural integrity, In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, 4, Guildford, UK, Sept. 1993, **Proceedings...** London: Thomas Telford. v.1, p.640-648.
- PAPADRAKAKIS, M. (1983). Inelastic post-buckling analysis of trusses. **Journal of Structural Engineering**, v.109, n.9, p.2129-2145, Sep.
- SAKA, T.; HEKI, K. (1984). The effect of joints on the strength of space trusses. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, 3., Guildford, U.K., 1984. **Proceedings...** London/New York: Elsevier applied Science. p.417-422.
- SAMPAIO, T. S. (2004). **Análise numérica, via MEF, de ligações em treliças metálicas espaciais**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- SCHMIDT, L. C.; MORGAN, P. R. (1982). Ultimate load of testing of space trusses. **Journal of the Structural Division**, v.118, n.6, p.1324-1335, June.
- SMITH, E. A. (1984). Space truss nonlinear analysis. **Journal of Structural Engineering**, v.110, n.4, p.688-705, Apr.
- SOUZA, A. S. C. (2003). **Análise teórica e experimental de treliças espaciais**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- SOUZA, A. S. C. (1998). **Contribuição ao estudo das estruturas metálicas espaciais**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- VENDRAME. M. A. (1999). **Contribuição ao estudo das cúpulas treliçadas utilizando elementos tubulares em aço**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- WALKER, H. B. (1981). The design and construction of double-layer space frame grids. In: MAKOWSKI, Z.S. (Ed.). **Analysis, design and construction of double-layer grids**, Applied Science, p.331-354.



# A MIXED BEM-FEM FORMULATION FOR LAYERED SOIL-SUPERSTRUCTURE INTERACTION

Valério da Silva Almeida<sup>1</sup> & João Batista de Paiva<sup>2</sup>

## Abstract

*We present a numerical approach for the elastostatic analysis of the interaction between a superstructure with a raft foundation and nonhomogeneous soil. The superstructure and raft foundation are modelled by the finite element method, using shell elements obtained from the coupling of the DKT element under bending and a Free Formulation membrane element and for the superstructure a three-dimensional beam element. The nonhomogeneous soil is modelled by first using the boundary element method with the 3D Kelvin solution for each soil layer and then applying equilibrium and compatibility conditions to adjacent interfacial layers.*

*Keywords: boundary element method; mixed BEM-FEM formulation; nonhomogeneous soil; flexible superstructure; solution of sparse linear equations.*

## 1 INTRODUCTION

The analysis of soil mass is a vast field of interest in the area of civil engineering. Realistically representing its behaviour is a complex task due to its extremely variable mechanical behaviour. For the sake of simplicity it is therefore common practice to model soil as an infinite half-space, a homogeneous isotropic linear continuum, ignoring its highly heterogeneous and noncontinuous nature.

Within the context of the aforementioned modelling strategy, much research effort has been dedicated over many decades to the modelling of soil mass, considering it as a nonhomogeneous continuum. The pioneering work of BURMISTER (1945a, b) discusses the technique of transforming integrals into partial differential equations (PDE), from which stress results are obtained for a given force applied on the surface of a two or three-strata nonhomogeneous medium. In POULOS (1967), the solutions of Burmister are integrated for any type of loading, while GIBSON (1967) analyses the state of stress in the elastic nonhomogeneous half-space, considering a linear increment of stiffness with depth for a given concentrated force on the surface. In addition, CHAN *et al.* (1974) generalise the solutions of Burmister for vertical and horizontal forces applied on the interior of two elastic strata of the nonhomogeneous half-space. Their solutions result from the use of the Fourier expansion of the Navier-Cauchy equations. Hence, as in Burmister's work, the solutions are approximated to a series of exponential functions. DAVIES & BANERJEE (1978) repeated the approach

---

<sup>1</sup>Professor da Universidade Federal de Ouro Preto, valerio@em.ufop.br

<sup>2</sup>Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, paiva@sc.usp.br

used in [5], considering only forces applied to the boundary between strata, and BANERJEE (1976) presents a BEM-based model for the analysis of two and three-dimensional solids using the sub-region approach.

LEE *et al.* (1986) analysed the behaviour of axially loaded piles submerged in stratified soil. Their analysis was made in terms of effective stresses, invoking the theory of elasticity of load transfer.

MAIER & NOVATI (1987) applied the technique known as “the method of successive stiffness” by BEM via Kelvin solutions for 2D problems. In this case, each layer of soil is treated as a homogeneous, isotropic and elastic region. Applying the equilibrium and compatibility conditions for adjacent layers, it is possible to transfer the rigidity of the bottom layer to its adjacent top. MYLONAKIS & GAZETAS (1988) present a simplified approach for calculating the settlement and stresses of a single pile or group of piles submerged in a nonhomogeneous medium. The soil that surrounds the pile is represented by Winkler’s generalised model, in which the rigidity at each level of the nonhomogeneous medium is estimated empirically.

SADECKA (2000) presents a model for flexible plates on stratified soil. In the model, the displacements along the depth of the soil strata are defined by non-linear weight functions, which are allowed to extend throughout the soil’s thickness. The final system of equations admits the influence of the thin plate supported on the free surface of the soil, using the finite element method to avoid discretisation of the region remote from the plate.

The primary objective of the present paper is to expand the approach presented by MAIER & NOVATI (1987) for the analysis of a three-dimensional stratified half-space, considering the influence of the flexible superstructure and using shell finite elements and three-dimensional beam elements.

## 2 THE BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLIED TO PROBLEMS OF ELASTOSTATICS

In the absence of volume forces, the Navier-Cauchy equations are given by:

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2\nu} \cdot u_{j,ji}(s) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

where  $u_i(s)$  is the displacement in the orthogonal direction  $i$  from the point  $s$  inside the solid and satisfies certain boundary conditions, and  $\nu$  is Poisson’s ratio. These equations of domain can further be expressed as surface equations, which are represented by the Somigliana’s Identity:

$$u_i(p) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(p, S) \cdot u_j(S) \partial\Gamma(S) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, S) \cdot p_j(S) \partial\Gamma(S) \quad (2)$$

where  $p$  and  $S$  are, respectively, the source point where a unit force is applied and a boundary point of the surface,  $u_i$  and  $p_i$  are, respectively, the real displacement field and surface forces on the boundary  $S$  in the  $j$ -th direction, while  $u_{ij}^*$  and  $p_{ij}^*$  represent weighted field coefficients which indicate the response obtained in the direction  $j$  in  $S$ , of a force applied on the direction  $i$  of the point  $p$ . This identity is based on the Betti's reciprocal theorem and weighted or fundamental solutions given by  $u_{ij}^*$  and  $p_{ij}^*$  represent particular solutions of the partial differential equations of (1) for a given boundary condition.

The strategy to obtain the boundary integral equations involves transporting the  $p$ , which is inside the body, to the boundary. Thus, expression (2) can be written as follows:

$$C_{ij}(P) \cdot u_j(P) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(P, S) \cdot u_j(S) \cdot \partial\Gamma(S) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(P, S) \cdot p_j(S) \cdot \partial\Gamma(S) \quad (3)$$

where the integral in (3) is defined in the sense of the Cauchy principal value, PARÍS & CAÑAS (1997), and  $C_{ij}$  are coefficients that depend on the problem's geometry HARTMANN (1980). The fundamental solutions used herein are the known Kelvin solutions presented in LOVE (1944) for the three-dimensional case.

Since the analytical solutions of expression (3) are not given in closed form, they have to be estimated numerically. Hence, the Boundary Element Method (BEM) is based on the assembly of a system of algebraic equations resulting from boundary integral equations, equation (3), written in terms of nodal parameters that are approximated to the boundary values using shape functions. Hence, the integral equations of (3) are written without considering the domain forces as:

$$C_{ij}(P) \cdot u_j(P) + \sum_{k=1}^{NE} |J| \cdot \int_{\Gamma} p_{ij}^*(P, S) \cdot \Psi(S) \partial\xi(S) \cdot (U_i)^k = \sum_{k=1}^{NE} |J| \cdot \int_{\Gamma} u_{ij}^*(P, S) \cdot \Psi(S) \partial\xi(S) \cdot (I) \quad (4)$$

where  $NE$ ,  $\psi$ ,  $J$  are, respectively, the number of boundary elements, the shape function and the Jacobian transformation. In this paper, we will adopt linear shape functions of the form  $\Psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_i$ , where  $\xi_i$  are homogeneous coordinates defined for the triangular element BREBBIA & DOMINGUEZ (1989).

The integrals proposed in (4) cannot, however, be solved analytically for any generic surface; hence the use of numerical techniques such as those given in ALIABADI *et al.* (1985) and TELLES (1987) can be used. In the present paper, the integral equations are calculated numerically by using a three-dimensional triangular quadrature integral BREBBIA & DOMINGUEZ (1989).

It is therefore possible to assemble the shape matrix of expression (4), which takes on the following form:

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} \quad (5)$$

where the boundary conditions for each problem must take into consideration, for each nodal point, the Dirichlet or Neumann-type boundaries.

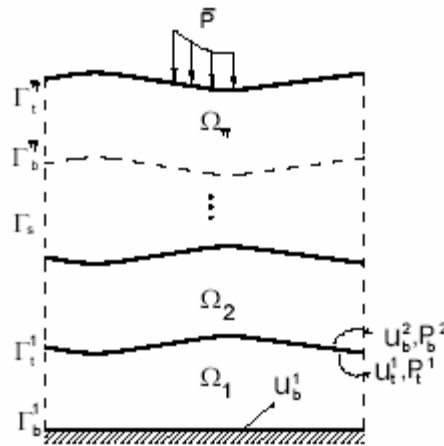


Figure 1 - Layered soil subjected to forces on the surface, base of boundary, top and side

### 3 ANALYSIS OF LAYERED SOIL BY THE SUCCESSIVE STIFFNESS METHOD

Expression (5) is here extended to a homogeneous, isotropic and linear solid. In the case of nonhomogeneous problems, the analysis can be solved by considering a combination of problems of homogeneous domains while applying the necessary equilibrium and compatibility conditions at the interface of the domains PARÍS & CAÑAS (1997) and BREBBIA & DOMINGUEZ (1989).

Based on the aforementioned discussion, consider a layered soil with  $n$  layers (figure1). For any given layer  $i$ , it is possible to write the correlation between the influence matrixes of Eq. (5) as:

$$[[H_t^i] \quad [H_b^i] \quad [H_s^i]] \cdot \begin{bmatrix} U_t^i \\ U_b^i \\ U_s^i \end{bmatrix} = [[G_t^i] \quad [G_b^i] \quad [G_s^i]] \cdot \begin{bmatrix} P_t^i \\ P_b^i \\ P_s^i \end{bmatrix} \quad (6)$$

where the subscripts  $t$ ,  $b$  and  $s$  represent quantities pertaining to the upper (top), lower (bottom) and side boundaries and  $U$  and  $P$  are, respectively, nodal displacements and tractions of the top, bottom or side boundaries.

By expanding Eq. (6), one obtains:

$$\begin{bmatrix} [H_{tt}^i] & [H_{tb}^i] & [H_{ts}^i] \\ [H_{bt}^i] & [H_{bb}^i] & [H_{bs}^i] \\ [H_{st}^i] & [H_{sb}^i] & [H_{ss}^i] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_t^i \\ U_b^i \\ U_s^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{tt}^i] & [G_{tb}^i] & [G_{ts}^i] \\ [G_{bt}^i] & [G_{bb}^i] & [G_{bs}^i] \\ [G_{st}^i] & [G_{sb}^i] & [G_{ss}^i] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_t^i \\ P_b^i \\ P_s^i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Equilibrium and compatibility conditions can then be imposed on displacement and stresses along the boundary between the  $i$ th and  $(i+1)$  layers. For cases in which there are no relative movements between contact nodes, i.e., the case of ideal friction without the existence of prescribed forces in the interface and admitting that the side boundary is not disturbed, the relations can be expressed, respectively, as:

$$\{u_t^i\} = \{u_b^{i+1}\} \quad (8.1)$$

$$\{p_t^i\} = -\{p_b^{i+1}\} \quad (8.2)$$

$$\{u_s^i\} = \{0\} \quad (8.3)$$

$$\{p_s^i\} = \{0\} \quad (8.4)$$

with  $i$  varying from 1 to  $\eta-1$ .

Assuming that the lateral surface is sufficiently remote, it is possible to consider equations (8.3) and (8.4) in (7) to obtain the influence of each layer, which is given by:

$$\begin{Bmatrix} P_t^i \\ P_b^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{tt}^i] & [K_{tb}^i] \\ [K_{bt}^i] & [K_{bb}^i] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_t^i \\ U_b^i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

In this way, applying Eq. (9) to each layer  $i$ , and invoking equations (8.1) and (8.2), the given layer can easily be associated to the neighbouring layers.

Assuming the first layer is  $i=1$ , the displacement at the base is null, describing a fixed medium and hence allowing expression (9) to be re-written as:

$$\{P_t^1\} = [K_{tt}^1] \cdot \{U_t^1\} \quad (10)$$

$$\{P_b^1\} = [K_{bt}^1] \cdot \{U_t^1\} \quad (11)$$

for  $i=2$ , one has, from expression (9):

$$\{P_t^2\} = [K_{tt}^2] \cdot \{U_t^2\} + [K_{tb}^2] \cdot \{U_b^2\} \quad (12)$$

$$\{P_b^2\} = [K_{bt}^2] \cdot \{U_t^2\} + [K_{bb}^2] \cdot \{U_b^2\} \quad (13)$$

After considering the conditions (8.1), (8.2) and (10) in Eq. (13), one has:

$$\{U_b^2\} = -[(K_{tt}^1 + K_{bb}^2)^{-1} \cdot K_{bt}^2] \cdot \{U_t^2\} \quad (14)$$

and, by substituting (14) in (12), one obtains:

$$\{P_t^2\} = \left[ [K_{tt}^2] - [K_{tb}^2] \cdot ([K_{tt}^1] + [K_{bb}^2])^{-1} \cdot [K_{bt}^2] \right] \cdot \{U_t^2\} \quad (15)$$

Or

$$\{P_t^2\} = [\hat{K}^2] \cdot \{U_t^2\} \quad (16)$$

The above equation considers the influence of regions 1 and 2. Hence, applying equation (9) and considering expressions (8.1) and (8.2) on the layers  $i$  and  $i+1$ , one has:

$$\{P_t^i\} = \left[ [K_{tt}^i] - [K_{tb}^i] \cdot ([\hat{K}^{i-1}] + [K_{bb}^i])^{-1} \cdot [K_{bt}^i] \right] \cdot \{U_t^i\} \quad (17)$$

Thus, for the last  $i = \eta$  layer, one has:

$$\{P_t^\eta\} = [\hat{K}^\eta] \cdot \{U_t^\eta\} \quad (18)$$

where  $P_t^\eta$  and  $U_t^\eta$  are the nodal parameters of the soil's surface.

At this point, the influence of the nonhomogeneous soil is entirely expressed by Eq. (18), which can be solved directly by applying the given loading conditions on the surface or by coupling the superstructure using FEM or BEM.

#### 4 SUPERSTRUCTURE COMPOSED OF LAMINAR ELEMENTS

To simulate the raft via the Finite Element Method (FEM), we superposed two independent formulations, one to represent the membrane effect and the other the plate effect. The finite element adopted is a combination of the triangular membrane element with a rotational degree of freedom called Free Formulation, according to

Bergan & Felippa (1985) and the triangular plate element called DKT (Discrete Kirchhoff Theory) described by Batoz (1980). This flat shell element is formulated by generating a stiffness matrix for a plane triangle in a three-dimensional space. The resulting system for the plate-membrane combination is represented by:

$$K_{(FF+DKT)} \cdot u_{(FF+DKT)}^{nodal} = F_{(FF+DKT)} \quad (19)$$

where the displacement parameters of element "e" are expressed for nodes  $i, j$  and  $k$  of the vertices by:

$$\{u_e\}^T = \left\{ (u \ v \ \theta_{x_3} \ w \ \theta_{x_1} \ \theta_{x_2})_i \quad ( \cdot \cdot )_j \quad ( \cdot \cdot )_k \right\} \quad (20)$$

where  $u, v$  e  $w$  are the displacements and  $\theta_{x_1}, \theta_{x_2}$  e  $\theta_{x_3}$  are the rotations obtained in the directions 1, 2 and 3, respectively, for each vertex node.

## 5 SUPERSTRUCTURE COMPOSED OF 3D BUILDINGS SUBJECTED TO VERTICAL AND HORIZONTAL FORCES

The buildings are modeled using three-dimensional finite bar elements to represent the linear elements of beams and columns, without considering the torsion effect on them. The building's slabs are considered as diaphragms with infinitely stiff horizontal planes, for which reason the horizontal displacements on each floor ( $u, v$  and  $\theta_{x_3}$ ) are the same. Therefore, all the influences of the columns and beams on each floor are transferred to a single master node, which is the floor-type torsion centre. This building model considerably reduces the degrees of freedom of the final system.

The vertical forces are applied to the beams, and can be pointwise or distributed, and the horizontal forces caused by the effect of wind, horizontal and torsional forces, should be prescribed pointwise at the center of torsion for each floor.

Thus, the columns of the building's ground floor are coupled with the raft's shell elements, forming a stiffness matrix that contains the influence of the raft-building set. The influence of the soil must then be coupled to this system so that the soil-raft-building mechanism can be considered.

## 6 BEM-FEM COUPLING

The BEM and FEM are coupled by representing the surface forces of the soil given in Eq. (18) as reactions between the contact elements of the superstructure-soil interface. Ideal friction conditions will also be admitted, without allowing for any relative displacement between the two media. Provided the reactions of the FEM are expressed by forces already integrated into the domain and transformed into equivalent nodal forces in each element, the surface forces of the soil can be expressed by nodal parameters distributed in the element. Hence, coupling requires transforming the surface forces into equivalent concentrated forces or vice-versa.

In the present paper, the former transformation is given priority. This approach is presented accordingly.

The approach developed up to this stage will be applied to the case of transverse loading, although it can be extended to the other two directions. Figure 2 shows the transverse surface forces and the equivalent nodal forces.

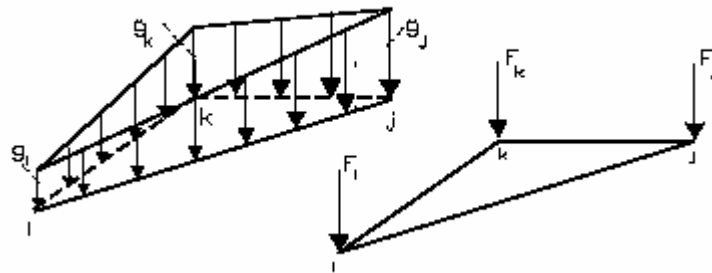


Figure 2 - Equivalent surface and nodal forces

In Fig. 2,  $g_i, g_j$  and  $g_k$  represent the surface forces at vertices  $i, j$  and  $k$  of a generic element, while  $F_i, F_j$  and  $F_k$  represent the equivalent nodal forces at the respective nodes.

The work due to the external load in the element's transverse direction can be expressed as:

$$T_e = \int_A g(x_1, x_2) \cdot w(x_1, x_2) dA \quad (21)$$

where  $w(x_1, x_2)$  and  $A$  are, respectively, the transversal displacement field in the element domain and the area of the element. When the variation of the displacement field is assumed to be linear, one has:

$$w = w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3 \quad (22)$$

Similarly, the surface forces can be expressed as:

$$g = g_i \xi_1 + g_j \xi_2 + g_k \xi_3 \quad (23)$$

After transforming the Cartesian coordinates into homogeneous coordinates - REDDY (1984) - and substituting equations (22) and (23) for Eq. (21), one has:

$$T_e = \int_A (g_i \xi_1 + g_j \xi_2 + g_k \xi_3) \cdot (w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3) dA \quad (24)$$

Moreover, minimising the portion of potential energy due to external loading and keeping in mind that the integral  $\int_A f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA$  can be determined by:

$$\int_A \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2} \xi_3^{\eta_3} dA = 2A \frac{\eta_1! \eta_2! \eta_3!}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 2)!} \quad (25)$$

the transverse nodal force vector is then given by:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix} = \frac{A}{12} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} g_i \\ g_j \\ g_k \end{Bmatrix} \quad (26)$$

By following the same procedure in the other directions, the relation between the nodal and surface forces for the case of the Free Formulation and DKT element can be written as:

$$\begin{Bmatrix} F_i^\ell \\ F_j^\ell \\ F_k^\ell \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \cdot \begin{Bmatrix} g_i^\ell \\ g_j^\ell \\ g_k^\ell \end{Bmatrix} \quad (27)$$

where  $\ell = 1, 2, 3$  represent the three orthogonal directions of the element and the matrix  $\bar{Q}$  given by:

$$[\bar{Q}] = \frac{A}{12} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

By adding the contribution of all the finite elements and then minimising the energy functional, one has:

$$[K_{fem}] \cdot \{U_{fem}\} = \{F_{fem}\} - [\bar{Q}] \cdot \{P_r\} \quad (29)$$

where  $U_{fem}$ ,  $F_{fem}$ ,  $P_r$ ,  $K_{fem}$  and  $\bar{Q}$  are, respectively, the vector of superstructure displacements, the vector of equivalent nodal forces due to external loading, the expanded vector of surface force due to soil reaction, the global stiffness matrix of the shell structure and the expanded transformation matrix resulting from the contribution of all the boundary elements.

Hence, by substituting Eq. (20) for Eq. (18) considering equilibrium and compatibility conditions between the contact surfaces, one has:

$$[K_{fem}] \cdot \{U_{fem}\} = \{F_{fem}\} - [\bar{Q}] \cdot [\hat{K}^\eta] \cdot \{U_t^\eta\} \quad (30)$$

Equation (30) can be simplified here, resulting in:

$$[K_{bem/fem}] \cdot \{U_{bem/fem}\} = \{F_{bem/fem}\} \quad (31)$$

with:

$$[K_{bem/fem}] = [K_{fem}] + [\bar{Q}] \cdot [\hat{K}^\eta] \quad (32)$$

## 7 NUMERICAL EXAMPLES

The algorithm developed herein allows for the independent analysis of both the nonhomogeneous soil and pile and the analysis of the soil-superstructure as a set.

### 7.1 Finite layer with linear variation of modulus

This example presents an analysis of the soil considering it as a nonhomogeneous, linear isotropic medium. For the specific case of a uniformly

distributed load applied to a circular region on the soil's surface, the governing law for the stiffness modulus is considered to follow a linearly increasing variation (see Fig. 3). The results given in table 1 demonstrate the formulation's consistence, even when the relation  $h/a$  is varied, and the consideration of additional layers as this index ( $h/a$ ) increases is necessary in order to better represent the linear variation of the soil's rigidity. The relative differences of the central surface displacement are obtained by comparing the values found by this formulation with those calculated by the semi-analytical expression of Burmister (1945a,b).

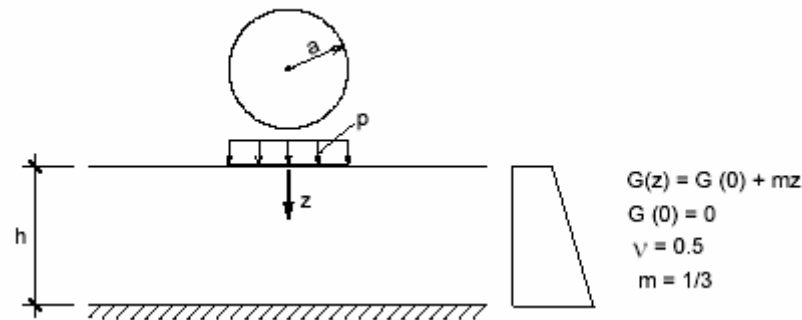


Figure 3 - Finite stratum under uniform circular loading

Table 1

Percentage error of the central surface displacement

Thickness factor $h/a$	Layers	Error (%)
1.0	2	0.42
2.5	5	1.54
$\infty$	20	0.70

## 7.2 Thick plate on a non-deformable base

This problem estimates the displacement and bending moment response occurring in a thin square plate in contact with soil in which the base of the rigid plane is located at 10 m from the surface. Figure 4 illustrates the discretisation, the physical and geometric characteristics of the soil.

The results of this formulation are compared with other studies, showing a strong congruence with the values found by FRASER & WARDLE (1974), and Sadecka (2000). FRASER & WARDLE (1974) model the semi-infinite, using surface elements (WARDLE & FRASER (1974b)), in which the matrix is obtained using integral transform techniques, and Sadecka (2000) calculates the displacements along the depth of the soil strata defined by non-linear weight functions, admitting the influence of the thin plate supported on the free surface of the soil and using the finite element method.

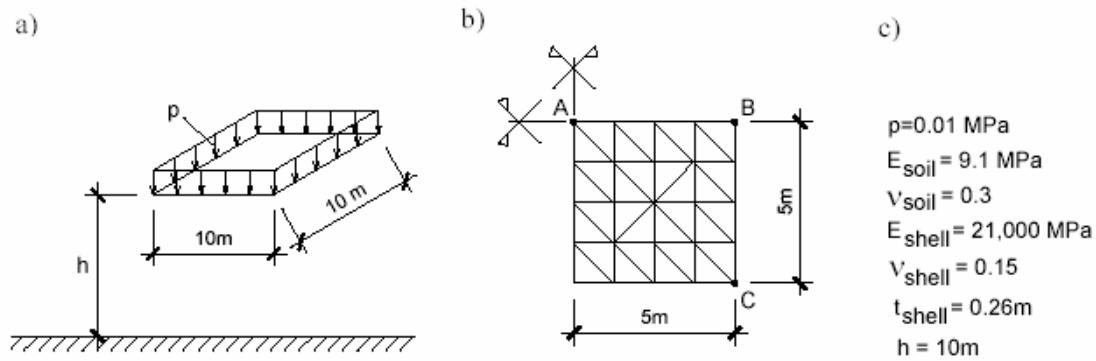


Figure 4 - a) Thick plate on a non-deformable base; b) discretization of a quarter of the plate; c) Physical and geometrical parameters of soil and shell

Table 2

Results for some points on the thick plate

<i>Point of plate</i>	<i>Fraser &amp; Wardle (1974)</i>	<i>KOLAR &amp; NEMEC (1983)</i>	<i>SADEC &amp; KA (2000)</i>	<i>Present work</i>
A [Deflections $w \cdot 10^{-3}$ (m)]	7.30	5.36	6.18	6.47
B [Deflections $w \cdot 10^{-3}$ (m)]	4.50	4.73	3.97	4.62
C [Deflections $w \cdot 10^{-3}$ (m)]	2.80	3.76	2.25	2.95
A [Moments $M_{11}$ (kN/m <sup>2</sup> )]	6.20	3.09	6.58	6.22

### 7.3 Loading on a square area with a rough rigid base

In this example, the stratum's surface is subjected to an external load distributed over a square area (see Fig. 5). The resulting displacements for this method, the approximate Steinbrenner method and the Burmister (1945a,b) model for the elastic medium are listed in table 3 for several depths of the rigid base. For the region of the discretized surface we used a mesh with 748 nodes, of which 441 nodes (800 elements) were allocated to the central area of the loaded square and 307 nodes (518 elements) to the load-free area. The modulus of elasticity adopted for the soil was 100 MPa and its Poisson's ratio was 0.3.

Table 3 shows the good agreement between the values obtained through this formulation and the semi-analytical model of Burmister (1945a,b). As POULOS (1967) indicates, Steinbrenner's simple approximate method underestimates the displacement values and, as the undeformable layer approaches the soil's surface, these values are 10% to 15% lower. On the other hand, the formulation presented

herein demonstrates that this variation does not influence the results, which show an error of less than 1%.

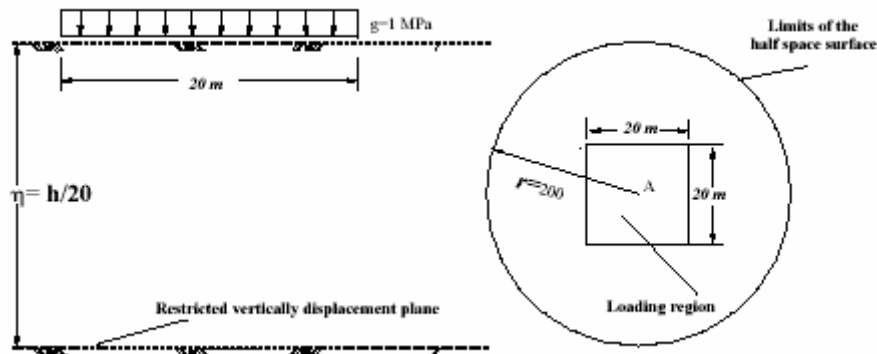


Figure 5 - Finite stratum under uniform loading

Table 3

Vertical Displacement (m) of point A

$\eta = h/L$	Burmister (1945a, b)	Present work (% error)	Steinbrenner (% error)
1	0.1290	0.1299 (0.7)	0.1171 (9.2)
2	0.1639	0.1650 (0.7)	0.1564 (4.6)
5	0.1876	0.1883 (0.4)	0.1845 (1.7)
50	0.2026	0.2037 (0.5)	0.2022 (0.2)

#### 7.4 Multi-storey building on raft foundation supported on a nonhomogeneous soil mass

The purpose of this example is to check the effect of both the variation of the soil's properties throughout the depth and the position of the undeformable layer on a multi-storey building supported on a raft foundation.

The strains and forces acting on the beams, columns and raft foundation, as well as the soil's reaction forces, are based on a 12-storey residential building plan whose permanent forces are given by the Brazilian NBR 6118, ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2000), specification and variable wind forces considered according to the Brazilian code NBR-6123, ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1987). The same mesh of elements as those of the previous example is used – example 7.3, the difference being that, in the area where loading was applied, the shell structure is now coupled and the building loaded onto it.

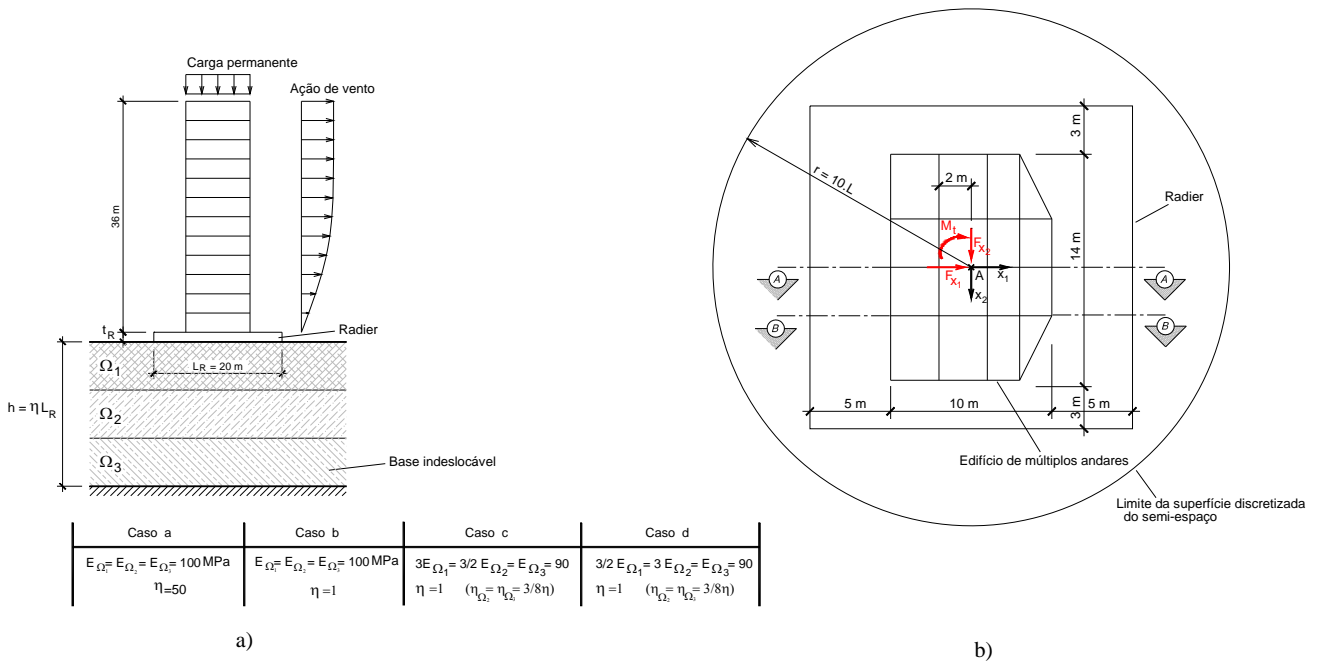
Figure 6 illustrates the plans of the analysed structure, the tables of the geometry and the forces considered to act on each structural element of the storey type building. Figure 7 shows the results of transversal displacements ( $w$ ) along the raft's AA cut, considering the soil-raft-building interaction for the four types of cases (see Fig. 6a).

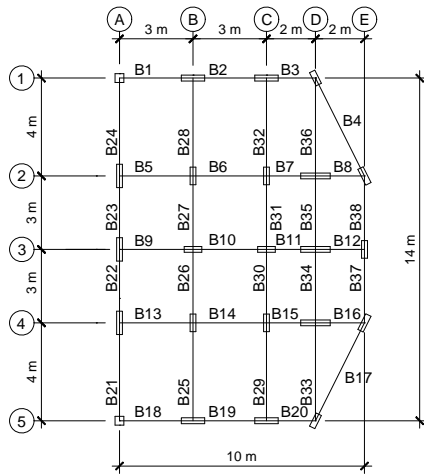
Note that taking into account the soil's rigidity throughout its depth represents a significant alteration in the displacement values of the soil-raft-building system, since the relative differences between cases *b* and *c* are about 50% (see Fig. 7). This influence proves more relevant than the consideration of the position of the indeformable layer, since the relative difference of displacements between cases *a* and *b* is in the order of 20%.

Figure 8 shows the diagrams of bending moments of  $M_{x_2}$  along the raft's BB cut. The variations of these bending moments for the different cases also proved similar to those presented by the fields of displacement. For these moments, the average differences between cases *b* and *c* and between *a* and *b* are, respectively, 52% and 13%.

Figure 9 shows the values of the stresses ( $\sigma_{33}$ ) that are mobilized in the area of contact between soil and raft in the AA cut. The contact stresses also show similar results in the various cases, the most significant variation occurring between cases *b* and *c*, with a mean value of 33%.

From table 4 it can be noted that, when the soil's deformability is taken into account, the columns' normal values are more closely distributed around the average, i.e., there is a more uniform redistribution of forces because the mobilisation of the soil-raft-building system occurs jointly.





TIPO	PILARES (m <sup>2</sup> )	VIGAS (m <sup>2</sup> )
1	0,4x0,4	0,2x0,4
2	0,2x0,6	0,2x0,3
3	0,2x0,8	-
4	0,2x1,2	-
5	0,2x0,4	-

PILARES	VIGAS	TIPO
A1,A5	Todas as demais	1
B1,C1,E3,B5,C5	B1→B4 ; B17→B20	2
A2,B2,C2,A3,B3,C3,A4,B4,C4	-	3
D2,D3,D4	-	4
D1,E2,E4,D5	-	5

c)

Carga permanente (kN/m)		
Andar tipo	Cobertura	Vigas
4,5	3,0	B1,B18,B22,B23
3,75	2,5	B2,B19
3,0	2,0	B3,B20
0,67	0,45	B4,B17
9,0	6,0	B5,B7,B9,B13,B15 B26,B27,B30,B31
9,75	6,5	B6,B14,B29,B32
8,5	5,67	B34,B35
6,0	4,0	B8,B12,B16
12,0	8,0	B10,B11
5,63	3,75	B21,B24
10,78	7,12	B25,B28
8,25	5,5	B33,B36
4,0	2,67	B37,B38

Ação de vento			
Andar	F <sub>x1</sub> (kN)	F <sub>x2</sub> (kN)	M <sub>r</sub> (kN m)
1	43,92	32,80	13,89
2	50,43	37,64	15,95
3	53,86	40,20	17,04
4	55,82	41,67	17,66
5	56,89	42,46	18,00
6	57,35	42,81	18,14
7	57,36	42,82	18,15
8	57,04	42,58	18,04
9	56,45	42,14	17,86
10	55,65	41,54	17,61
11	54,68	40,82	17,30
12	53,57	39,98	16,95

d)

Figure 6 - a) Configuration of the structural scheme and the cases considered. b) Schematic plan of the raft-building model. c) Floor plan of the building. d) Tables of the forces and geometries of the building's linear elements

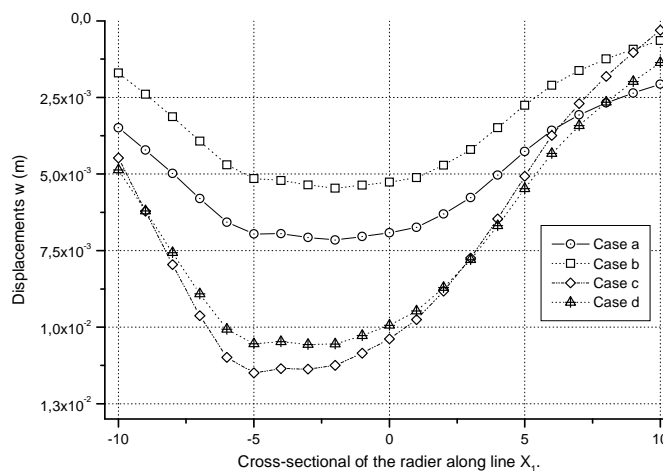


Figure 7 - Vertical displacements along section AA

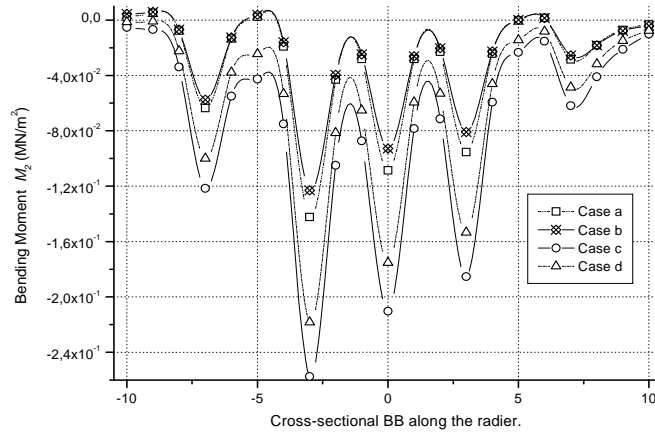
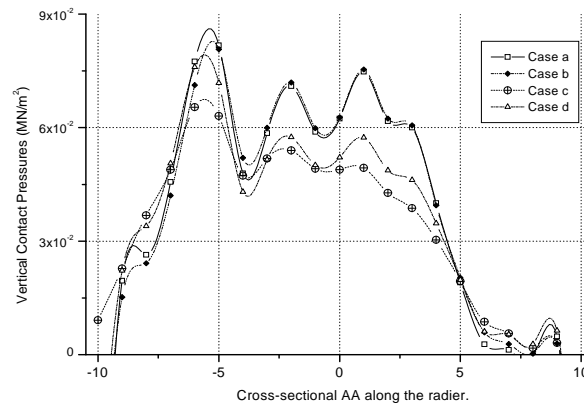
Figure 8 - Bending moments  $M_2$  along section BB

Figure 9 - Contact forces between soil and raft along section AA

Table 4

Nominal forces (MN) in the columns of the building's ground floor for the several cases of soil rigidity

Column	Case a	Case b	Case c	Case d	Indeformable soil
A1	0.3627	0.3620	0.4849	0.4092	0.0220
A2	0.6247	0.0890	0.1183	0.1022	0.3188
A3	0.6643	0.6649	0.6593	0.6662	0.1509
D4	0.5139	0.5104	0.5211	0.5110	0.9588

## 8 CONCLUSION

An analysis was made of nonhomogeneous soil-structure interaction by a BEM-FEM combination. The method of successive stiffness proposed by MAIER & NOVATI (1987) was extended to 3D problems, including the influence of the

structure's flexibility based on the shell finite element composed of DKT, BATOZ (1980), and Free Formulation elements, BERGAN & FELIPPA (1985).

The method of successive stiffness offers two computational advantages over the standard boundary element method by zones (subregions), namely: (1) fewer computational operations, and (2) lower storage memory requirements for equations of the final soil system. It should also be pointed out that the influences of each stratum can be computed independently, then this technique can be used for distributed memory computers with the advantage of achieving high efficiency and loading balance naturally.

The results obtained show good agreement with those found in literature, and the robustness of the responses remained unaltered even when very thin soil layers were considered. The implemented model provides an efficient numerical tool for solving real problems such as the soil-structure system.

### 8.1 Application of sparse techniques in the linear systems

In the solution of the linear system generated by coupling the soil-shell-multi-storey building – example 7.4 - the resulting matrix is neither symmetrical nor positively defined, but sparse with 26% of nonzero elements (see figure 10). Thus, it is imperative to use sparse techniques for the solution of the problem. In the present research three different types of methods for solving the final linear equations were used: *i*) the Fortran 90 code that uses IMSL routines AIRD *et al.* (1977); *ii*) the iterative method GMRES, SAAD & SCHULTZ (1986), optimized with a diagonal preconditioning (Jacobi); and *iii*) the Harwell sparse matrix package MA28, DUFF (1977).

The first, which is based on the direct method does not take into account the sparsity pattern property of the final matrix, so it is not adequate for this problem, as can be verified from execution time in table 5.

The second is the most conventional iterative method applied in solution of sparse unsymmetric linear systems. The computational cost of the method is the matrix-vector product carried out along each iteration, and the sparsity pattern generated in the final matrix is not a relevant factor for the convergence in the method. But the strong dependence of the GMRES, SAAD & SCHULTZ (1986), is due to the condition number of the matrix, and the application of BEM in elastostatic problems, in general, does not generate a well-conditioned matrix property, principally, in the zone and BEM-FEM coupling methods.

In the Harwell sparse matrix package MA28, DUFF (1977), based on Gauss elimination, the data structures of the matrix is a determinant factor for a rapid execution of code, due essentially to the fill-in effect. However, the sparsity pattern generator software was not used for reducing the number of operations. Despite this, the execution time obtained by MA28, DUFF (1977), showed a good efficiency in solving problems based on the mixed BEM-FEM formulation.

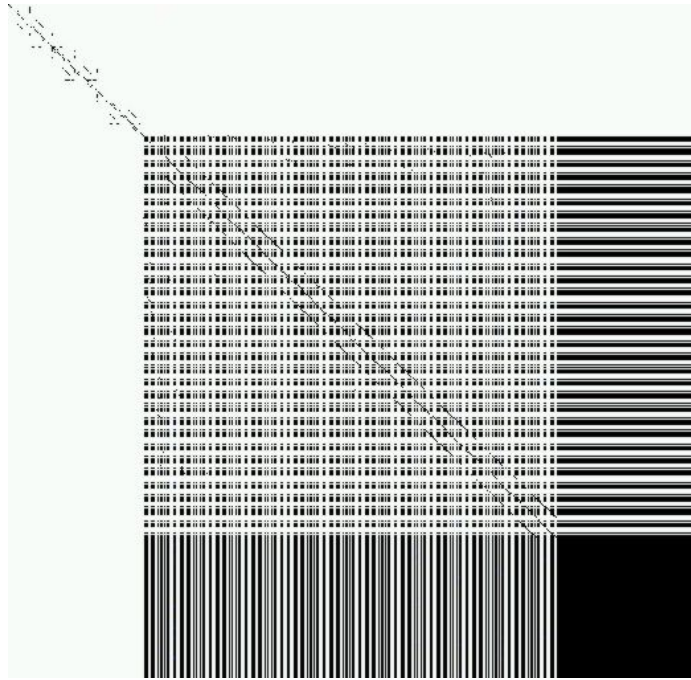


Figure 10 - Sparsity pattern for the coupling multi-storey building/raft foundation/nonhomogeneous soil

Table 5

Time (*minutes*) for solution of linear equations with 4431 degrees of freedom with 26% of nonzero elements.

<i>Methods for solution of linear equations</i>	<i>Pentium III, 1 GHz processor, 1GB PC133 Ram memory</i>	<i>Pentium IV Dual, 1.7GHz, 2 GB RDRAM</i>
IMSL routines [26]	220	164.1
GMRES [27] ( $\epsilon=1e-9$ )	46.6	25.4
GMRES [27] ( $\epsilon=1e-6$ )	22.4	15.2
MA28 [28]	19.0	11.9

## 9 ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully acknowledge the financial support of FAPESP (São Paulo State Research Support Foundation, Brazil) for this work.

## 10 REFERENCES

- AIRD, T.J.; BATTISTE, E.L.; WALTON, C.G. (1977). Portability of mathematical software coded in Fortran. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v.3, n. 2, p.113-27, June.
- ALIABADI, M.H.; HALL, W.S.; PHEMISTER, T.G. (1985). Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, v.21, p.2221-2236.
- ALMEIDA, V.S. (2003). **Análise da interação solo não homogêneo/ estrutura via acoplamento MEC/MEF**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1987). **NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações**. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2000). **NBR 6118: Projeto e execução de obras de concreto armado**. Rio de Janeiro.
- BANERJEE, P.K. (1976). Integral equation methods for analysis of piece-wise nonhomogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. **Int. J. Mechanical Science**, v.18, p. 293-303.
- BATOZ, J.L. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, v. 15, p. 1771-1812.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. **Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.**, v.50, p.25-69.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. (1989). **Boundary elements. an introductory course**. London: Computational Mechanics Publications.
- BURMISTER, D. M. (1945). The general theory of stresses and displacements in layered systems III. **Journal of Applied Physics**, v.16, p.296-302.
- BURMISTER, D.M. (1945). The general theory of stresses and displacements in layered systems I. **Journal of Applied Physics**, v.16, p.89-96.
- CHAN, K.S.; KARASUDHI, P.; LEE, S.L. (1974). Force at a point in the interior of a layered elastic half-space. **Int. J. Solids Struct.**, v. 10, p. 1179- 1199.
- DAVIES, T.G.; BANERJEE, P.K. (1978). The displacement field due to a point load at the interface of a two layer elastic half-space. **Géotechnique**, v. 28, n.1, p. 43-56.
- DUFF, I.S. (1977). **MA28 - A set of FORTRAN subroutines for sparse unsymmetric linear equations**. London: AERE Report R.8730, HMSO.
- FRASER, R.A.; WARDLE, L.J. (1974). Numerical analysis of rectangular rafts on layered foundations. **Géotechnique**, v. 26, p. 613-630.
- GIBSON, R.E. (1967). Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space. **Géotechnique**, v. 17, p. 587-567.

- HARTMANN, F. (1980). Computing the C- matrix in non-smooth boundary points. In: BREBBIA, C.A., ed. **New developments in boundary elements methods**. Southampton: CMP Publ.
- KOLAR, V.; NEMEC, I. (1983). Complex automatization of calculations of technical structure interaction problems. In: CONF. SVTS, Kosice. **Proc.**
- LEE, S.L.; KOG, Y.C.; KARUNARATNE, G.P. (1986). Axially loaded piles in layered soil. **Journal of Geotechnical Engineering**, v.113,n. 4, April.
- LOVE, A.E.H. (1944). **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. 4. ed. New York: Dover.
- MAIER, G.; NOVATI, G. (1987). Boundary element elastic analysis by a successive stiffness method. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v.11, p. 435-447.
- MYLONAKIS, G.; GAZETAS, G. (1988). Settlement and additional internal forces of grouped piles in layered soil. **Géotechnique**, v. 48,n.1, p. 55-72.
- PARÍS, F.; CAÑAS, J. (1997). **Boundary element method: fundamental and applications**. New York: Oxford University Press.
- POULOS, H.G. (1967). Stresses and displacements in an elastic layer underlain by rough rigid base. **Géotechnique**, v.17,p. 378-410.
- REDDY, J.N. (1984). **Energy and variational methods in applied mechanics**. New York, Wiley Interscience.
- SAAD, Y.; SCHULTZ, M.H. (1986). GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. **SIAM J. Sci. Stat. Comput.**, v.7, n.7, p. 856-869.
- SADECKA, L. (2000). A finite/infinite element analysis of thick plate on a layered foundation. **Computers & Structures**, v. 76, p. 603-610.
- TELLES, J.C.F. (1987). A self-adaptative co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, v.24, p. 959-973.
- WARDLE, L.J.; FRASER, R.A. (1974). Finite element analysis of a plate on a layered cross-anisotropic foundation. In: INT. CONF. FINITE ELEMENT METHODS ENGG., 1<sup>st</sup>, University of NSW. **Proc.**

# ANÁLISE DE EDIFÍCIOS ALTOS EM TEORIA DE SEGUNDA ORDEM, CONSIDERANDO A RIGIDEZ TRANSVERSAL DAS LAJES

Carlos Humberto Martins<sup>1</sup> & Helena M.C. Carmo Antunes<sup>2</sup>

## Resumo

*A análise de estruturas de edifícios altos está desenvolvendo-se rapidamente, assim como as pesquisas em outras áreas do conhecimento, devido a crescente evolução dos computadores. Sendo assim, inúmeros trabalhos foram realizados, cada um com suas peculiaridades e considerações, com o intuito de se aprimorar cada vez mais esse tipo de cálculo, e assim obter estruturas cada vez mais econômicas e eficientes, tentando representar de uma forma mais precisa o comportamento físico real de uma estrutura tridimensional de edifícios altos. É dentro deste contexto que insere-se este trabalho no qual estuda-se o comportamento das estruturas tridimensionais de edifícios altos, sujeitos às ações verticais e laterais, considerando-se a rigidez transversal à flexão das lajes. BEZERRA (1995) já realizou trabalho semelhante, porém em teoria de primeira ordem para os pilares. O elemento finito de placa adotado na discretização do pavimento, responsável pela consideração da rigidez transversal das lajes na análise do edifício é o DKT (Discrete Kirchoff Theory). Para o cálculo dos esforços e deslocamentos na estrutura são aplicadas as técnicas de subestruturação em série e paralelo na matriz de rigidez global da estrutura. Elaborou-se um programa de computador que automatiza o processo de cálculo empregado, onde o processador foi realizado em linguagem computacional Fortran Power Station 90 e os pré e pós-processadores em Visual Basic 4.0 para ambiente Windows.*

*Palavras-chave: edifícios altos; rigidez transversal da laje; teoria de segunda ordem.*

## 1 INTRODUÇÃO

O crescente aumento da densidade populacional associado a uma necessidade contínua de uma maior urbanização, fez com que ocorresse um intenso processo de verticalização das edificações. Com isso torna-se cada vez mais necessário o aprimoramento dos sistemas estruturais e das técnicas de análise das estruturas, de forma a proporcionarem maior economia e adequada segurança.

---

<sup>1</sup> Professor da Universidade Estadual de Maringá, chmartins@uem.br

<sup>2</sup> Professora aposentada do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP

Atualmente, as frentes de investigação estão voltadas para o aprimoramento de modelagens dentro de considerações do método plástico, introdução de novos procedimentos aos problemas de análise em teoria de 2ª ordem, abordagem de novos sistemas estruturais e a criação de pré e pós-processadores em ambiente *Windows* para facilitar a utilização dos sistemas computacionais gerados.

Neste trabalho as lajes contribuem com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura, pois devido ao seu comportamento de placa, essa rigidez à flexão influenciará no comportamento estrutural. Para isto, são utilizadas técnicas do Método dos Elementos Finitos.

Sabe-se que os deslocamentos horizontais, causados pelas ações do vento, produzem esforços adicionais, quando são aplicadas simultaneamente as ações de origem gravitacional. Sendo assim, é formulada para os pilares a verificação do equilíbrio de forças na sua posição deformada, ou como é conhecida da literatura técnica, análise em teoria de 2ª ordem, considerando a não linearidade geométrica.

## **2 SISTEMA ESTRUTURAL**

A seguir descrevem-se todos os elementos considerados no sistema estrutural do edifício. Definem-se ainda o sistema de referência local e global (subestrutura), de cada nó e suas coordenadas deslocamentos correspondentes.

Os elementos horizontais (vigas e lajes) são analisados em teoria de 1ª ordem e nos elementos verticais (pilares) é considerado a não-linearidade geométrica. Admite-se que as deformações são suficientemente pequenas para que se tenha uma relação linear entre tensões e deformações, permitindo então o comportamento elástico-linear dos materiais.

### **2.1 Descrição dos elementos estruturais**

#### **2.1.1 Vigas**

As vigas são compostas por elementos lineares contidas no plano horizontal, ao nível das lajes. Suas extremidades podem estar conectadas tanto nos pilares como em outras vigas. Pode-se também considerar as excentricidades das vigas em relação ao centro de gravidade dos pilares, para incluir os trechos rígidos.

#### **2.1.2 Lajes**

Admite-se que a laje comporta-se como corpo rígido em seu plano horizontal, onde é responsável pela compatibilização dos deslocamentos correspondentes ao seu movimento de diafragma rígido, para todos os pontos pertencentes pavimento. As lajes também contribuem com sua rigidez transversal à flexão na análise de cada subestrutura, comportando-se como placas. Nesta etapa utilizam-se as técnicas do Método dos Elementos Finitos, onde as lajes são discretizadas em vários elementos de placas, triangulares ou quadrangulares.

#### **2.1.3 Pilares**

Os pilares que se interpõem a dois pavimentos consecutivos devem apresentar trechos lineares verticais, e ter a mesma seção transversal. Como hipótese utilizada na formulação da matriz de rigidez em teoria de 2ª ordem, as seções transversais devem ser

bi-simétricas. Como na análise do sistema estrutural, o edifício é dividido em várias subestruturas independentes, não é preciso que um mesmo pilar esteja presente em todos os andares. Não são considerados os pilares que sofrem o efeito do empenamento de suas seções transversais na torção.

## 2.2 Subestruturas

Cada andar do sistema estrutural é representado pela subestrutura. Por sua vez, cada subestrutura engloba os elementos horizontais (vigas e lajes), contidos no pavimento superior, e os elementos verticais (pilares), que se ligam ao pavimento inferior.

Os pavimentos correspondentes a cada subestrutura podem ser diferentes entre si, ocasionados por alguma variação de seus elementos constituintes, tais como: interrupção dos pilares, nova disposição das vigas, alteração nas seções transversais, mudanças de carregamentos, etc.

## 2.3 Sistemas de referência

### 2.3.1 Sistema de referência global do edifício

Para a estrutura é adotado um sistema de eixos cartesianos  $X, Y, Z$  com origem  $O_G$  contida em um ponto arbitrário no plano horizontal ao nível da fundação. O eixo  $X$  tem direção vertical e seu sentido positivo será considerado da base para o topo enquanto os eixos horizontais  $Y$  e  $Z$  tem seu sentido definido na figura 1. As diversas subestruturas existentes serão orientadas também por este mesmo sistema.

A partir do sistema de eixos globais, definem-se todos os nós das subestruturas, os nós dos elementos lineares, e os nós dos elementos finitos de placa discretizadores das lajes.

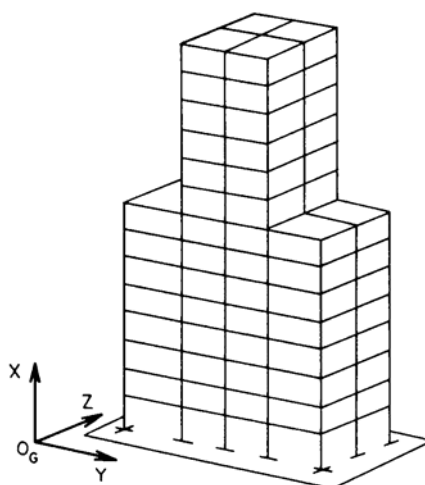


Figura 1 - Sistema de referência global do edifício

### 2.3.2 Sistema de referência das vigas

Para as vigas adota-se um sistema de referência local  $x_v, y_v$  e  $z_v$ , com origem  $O_v$  no centro de gravidade da seção transversal, em uma de suas extremidades. O eixo  $y_v$  é o eixo longitudinal da peça e deve coincidir com a superfície média da laje, o eixo  $x_v$  é paralelo ao eixo  $X$  do sistema global.

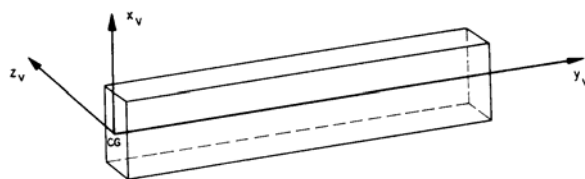


Figura 2 - Sistema de referência local das vigas

### 2.3.3 Sistema de referência para as lajes

É semelhante ao adotado para o edifício, mas com sua origem  $O_L$  pertencente ao seu plano horizontal, também em um ponto arbitrário.

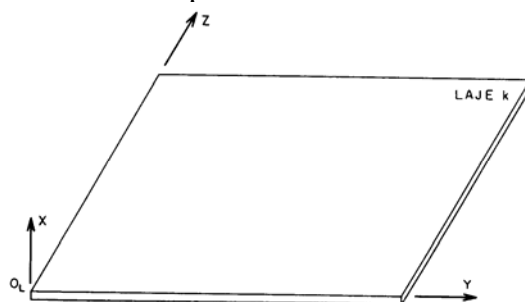


Figura 3 - Sistema de referência das lajes

### 2.3.4 Sistema de referência para os pilares

Cada trecho de pilar tem seu sistema de referência local cartesiano  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$ , com origem  $O_p$  no centro de gravidade da seção transversal na base inferior, sendo  $y_p$  e  $z_p$  eixos horizontais coincidentes com os eixos principais de inércia da seção, e o eixo  $x_p$  seu eixo longitudinal.

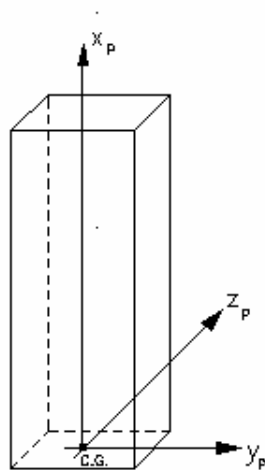


Figura 4 - Sistema de referência local dos pilares

### 2.3.5 Sistema de referência da subestrutura

O sistema de referência da subestrutura é o mesmo das lajes, com origem  $O_s$  no plano do pavimento correspondente.

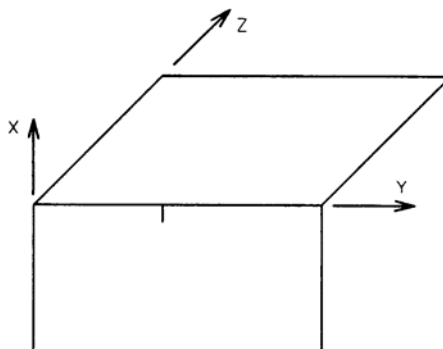


Figura 5 - Sistema de referência da subestrutura

## 2.4 Coordenadas deslocamentos

As coordenadas deslocamentos são orientações na direção dos possíveis deslocamentos independentes, associados aos nós ou extremidades de cada elemento estrutural. Os deslocamentos são convencionados de acordo com o sistema de referência adotados para os elementos.

### 2.4.1 Coordenadas deslocamentos das vigas

Os deslocamentos independentes nas extremidades das vigas são:

- rotação em torno dos eixos  $y_v$  e  $z_v$  do sistema local.
- translação segundo o eixo  $x_v$  do mesmo sistema.

Não se consideraram as deformações axiais, devido à hipótese das lajes trabalharem como diafragmas rígidos.

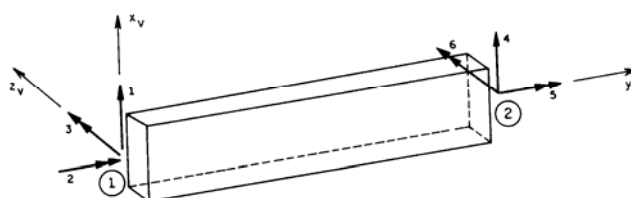


Figura 6 - Coordenadas deslocamentos locais de um trecho de viga

Dessa forma, a transposta do vetor de deslocamentos da viga,  $\{u_v\}^T$ , em coordenadas locais, fica :

$$\{u_v\}^T = \left\{ \delta_{x1} \quad \phi_{y1} \quad \phi_{z1} \quad \delta_{x2} \quad \phi_{y2} \quad \phi_{z2} \right\}$$

### 2.4.2 Coordenadas deslocamentos das lajes

Comportando-se como diafragma rígido em seu plano, cada pavimento apresenta três coordenadas deslocamentos associados às lajes:

- translação segundo os eixos Y e Z do sistema de referência global ou da subestrutura.
- rotação em torno do eixo X do mesmo sistema.

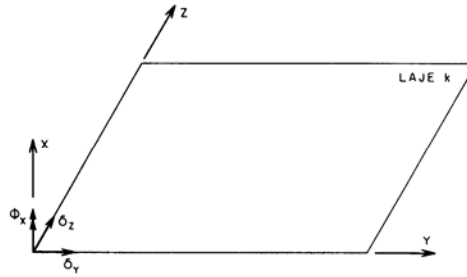


Figura 7 - Coordenadas deslocamentos de corpo rígido da laje

Então, a transposta do vetor de deslocamentos referente ao movimento de corpo rígido das lajes  $\{u_l\}^T$ , fica :

$$\{u_l\} = \left\{ \delta_y \quad \delta_z \quad \phi_x \right\}$$

Como se está considerando também a rigidez transversal à flexão da laje, têm-se ainda três coordenadas deslocamentos por nó, pertencente a cada elemento de placa DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*), que compõem a laje, que são:

- translação segundo o eixo X do sistema global.
- rotação em torno dos eixos Y e Z do mesmo sistema.

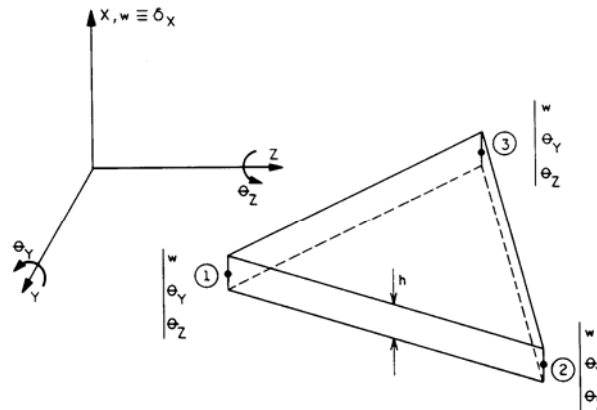


Figura 8 - Coordenadas deslocamentos do elemento de placa DKT

A transposta do vetor de deslocamentos de cada elemento finito de placa  $\{u_{dkt}\}^T$  fica:

$$\{u_{DKT}\}^T = \left\{ \delta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad \delta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \quad \delta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad \theta_{z3} \right\}$$

### 2.4.3 Coordenadas deslocamentos dos pilares

Em cada extremidade do pilar, tem-se seis graus de liberdade que são:

- translação segundo os eixos  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$  do sistema local.
- rotação em torno dos eixos  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$  do sistema local.

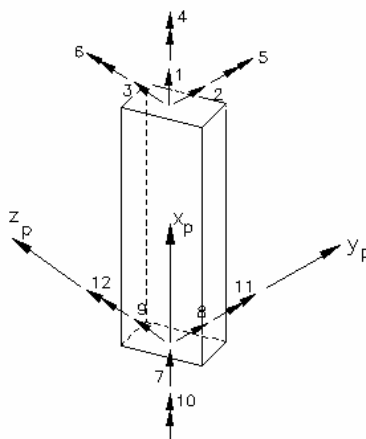


Figura 9 - Coordenadas deslocamentos de um trecho de pilar

Portanto, a transposta do seu vetor de deslocamentos  $\{u_p\}^T$ , em coordenadas locais, fica:

$$\{u_p\}^T = \left\{ \delta_{xs} \quad \delta_{ys} \quad \delta_{zs} \quad \phi_{ys} \quad \phi_{zs} \quad \phi_{xs} \quad \delta_{xi} \quad \delta_{yi} \quad \delta_{zi} \quad \phi_{yi} \quad \phi_{zi} \quad \phi_{xi} \right\}$$

#### 2.4.4 Coordenadas deslocamentos da subestrutura

Como cada subestrutura é composta de diferentes elementos, suas coordenadas são estabelecidas em função de cada elemento constituinte. As coordenadas locais de todos os elementos horizontais (laje e vigas), são colocadas em função das coordenadas independentes dos elementos verticais. Em seguida, compatibilizam-se as três coordenadas que determinam o movimento do corpo rígido das lajes, para os pilares. Então :

- para cada nó de pilar, têm-se os deslocamentos independentes que são: rotações em torno dos eixos Y e Z, e a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura.

- para cada conjunto de lajes que formam o pavimento, suas coordenadas deslocamentos referente ao movimento do corpo rígido, constituirá também as coordenadas da subestrutura, que é único em cada pavimento.

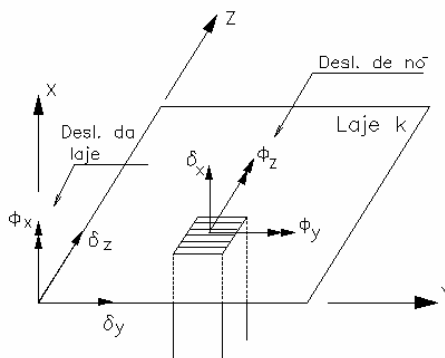


Figura 10 - Coordenadas deslocamentos da subestrutura

Observa-se, portanto, que as coordenadas dos elementos DKT que compõem as lajes, devem ser condensadas para as coordenadas independentes dos pilares através da subestruturação em paralelo.

### 3 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

#### 3.1 Matriz de rigidez das vigas

Em cada elemento de viga, considera-se a rigidez à torção, força cortante e flexão segundo o plano vertical, mas desprezam-se à força axial e também à flexão no seu plano transversal na elaboração da matriz.

A matriz de rigidez da viga associada ao seu sistema de coordenadas locais,  $[K_v]$ , é dada por:

$$[K_v] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & -\frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{2EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

Sendo  $E$  - módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  - módulo de elasticidade transversal,  $I_z$ -momento de inércia em relação ao seu eixo  $z_v$ ,  $l$  - comprimento flexível do trecho e  $J_t$  - momento de inércia à torção.

Realizando-se a transformação de coordenadas através de uma matriz de incidência cinemática  $\{\beta_v\}$  correspondente, é possível obter a matriz de rigidez das vigas, em função das coordenadas da subestrutura  $[K_{vg}]$ , através da seguinte expressão:

$$[K_{vg}] = [\beta_v]^T \cdot [K_v] \cdot [\beta_v]$$

#### 3.2 Matriz de rigidez dos pilares em teoria de 2ª ordem

A matriz de rigidez dos pilares em teoria de 2ª ordem é obtida pela resolução do sistema de equações diferenciais, onde é levada em conta a influência do esforço axial.

Para seções com dupla simetria, temos que os sistemas de equações são de três equações independentes, sendo as duas primeiras relacionadas à flexão nos seus planos principais de inércia e a última à torção.

$$EI_z v^{IV}_c + P \cdot v''_c = 0$$

$$EI_y w^{IV}_c + P \cdot w''_c = 0$$

$$-(GI_x - P \cdot i^2_c) \cdot \phi'' = 0$$

A solução dessas três equações diferenciais fornecem os esforços de extremidade para todas as coordenadas deslocamentos impostas. ANTUNES (1972), obteve os esforços de extremidade e assim a matriz de rigidez de cada tramo de pilar nas coordenadas locais, mostrada a seguir:

$$[K_p]_l = \begin{bmatrix} [K_{pl}]_1 & [K_{pl}]_2 \\ [K_{pl}]_2^T & [K_{pl}]_3 \end{bmatrix}$$

com :

$$[K_p]_1 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 2s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{m_y L^3} & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x - Pi_c^2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{L^2} & 0 & s_y\frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_p]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -2s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{m_y L^3} & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x - Pi_c^2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{L^2} & 0 & s_y c_y \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z c_z \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_p]_3 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 2s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{m_y L^3} & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x - Pi_c^2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_y}{L^2} & 0 & s_y\frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

onde :

L - altura do pilar

S - área da seção transversal

I<sub>y</sub> - momento de inércia em relação ao eixo principal y

I<sub>z</sub> - momento de inércia em relação ao eixo principal z

I<sub>x</sub> - momento de inércia à torção

i<sub>c</sub> - raio de giração

P - esforço axial no pilar

Temos que s<sub>y</sub>, c<sub>y</sub>, m<sub>y</sub> e s<sub>z</sub>, c<sub>z</sub>, m<sub>z</sub> são as funções de instabilidade. Essas funções são válidas tanto para P de compressão (P > 0) ou de tração (P < 0). Se ainda P for nulo (P = 0) as funções de instabilidade continuam válidas, com valores que serão s<sub>y</sub> = s<sub>x</sub> = 4, c<sub>y</sub> = c<sub>x</sub> = 0.5 e m<sub>y</sub> = m<sub>x</sub> = 1, e a matriz de rigidez obtida será a da teoria clássica da estática de 1ª ordem.

Novamente, através de uma matriz de incidência cinemática [β<sub>p</sub>], que relaciona os deslocamentos globais (subestrutura) do pilar com seus deslocamentos locais, a matriz de rigidez do pilar, em teoria de 2ª ordem, em função das coordenadas da subestrutura, é obtida por:

$$[K_{p_g}] = [\beta_p]^T \cdot [K_p] [\beta_p]$$

### 3.3 Matriz de rigidez do elemento dkt

O Elemento finito triangular DKT pertence à classe dos elementos triangulares com 9 graus de liberdade (deslocamento vertical w e rotações θ<sub>x</sub> e θ<sub>y</sub> nos vértices, como pode ser visto na figura 8).

Desta classe de elementos, nota-se que na análise de placas delgadas que o DKT tem-se mostrado seguro e numericamente preciso em variadas análises estáticas e dinâmicas, como pode ser observado em BATOZ.

A formulação do elemento DKT baseia-se em BATOZ e JEYACHANDRABOSE (1985). Porém detalhes da formulação da matriz de rigidez desse elemento finito envolvem complexas expressões. Portanto, apresenta-se aqui uma formulação sucinta.

A teoria de placas com consideração de deformação por esforço cortante é o ponto de partida para a formulação. A hipótese clássica de Kirchhoff para placas delgadas (“pontos da placa originalmente normais à superfície média indeformada, permanecem normais à superfície média deformada”), é imposta discretamente ao longo dos lados do elemento. A parcela da energia de deformação relativa ao esforço cortante é finalmente desprezada, havendo a convergência para o modelo clássico de Kirchhoff para placas delgadas.

Sendo assim, ao se considerar somente a energia de deformação referente à flexão, teremos a expressão da energia de deformação para um elemento dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{k\}^T [D]_f \{k\} dYdZ \quad (1)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento DKT, admitem-se inicialmente as seguintes hipóteses :

- a) As rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  variam quadraticamente no elemento.  
b) A hipótese de Kirchhoff é imposta nos pontos nodais dos vértices e nos pontos médios dos lados.

- Nós dos vértices (Nós 1,2 e 3 )

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \beta_Y + w_{,Y} \\ \beta_Z + w_{,Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Nós do meio de lado (Nós 4,5 e 6 )

$$\beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad (3)$$

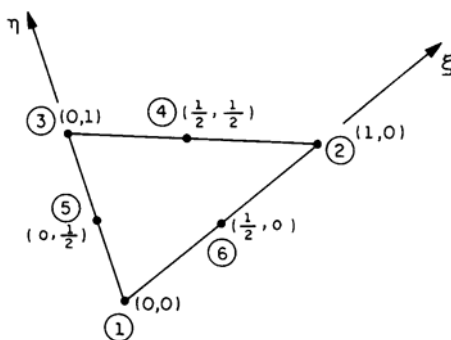


Figura 11 - Disposição dos nós e coordenadas adimensionais  $\xi$  e  $\eta$  do elemento triangular DKT

- c) A variação de  $w$  é cúbica ao longo dos lados do elemento.

Em coordenadas genéricas, a função  $w$  num lado  $ij$  qualquer fica:

$$w'_{sk} = -\frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w'_{si} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w'_{sj} \quad (4)$$

- d) Impõem-se uma variação linear  $\beta_n$  (rotação na direção normal), ao longo dos lados.

Como o valor de  $\beta_n$  varia linearmente, de acordo com a hipótese, o valor da função no ponto nodal médio dos lados, escreve-se como média aritmética dos  $\beta_n$  dos vértices do referido lado.

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2}(\beta_{ni} + \beta_{nj}) \quad (5)$$

Baseando-se nas quatro hipóteses anteriores e nas particularidades geométricas do triângulo, pode-se escrever  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  em cada ponto do triângulo em função dos parâmetros nodais.

$$\beta_x = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2][G][u_{DKT}] \quad (6)$$

$$\beta_y = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2][H][u_{DKT}] \quad (7)$$

onde as matrizes  $[G]$ ,  $[H]$  são ambas de dimensão  $6 \times 9$ ,  $\xi$  e  $\eta$  são coordenadas homogêneas adimensionais e estão explicitadas em BATOZ (1982).

Pode-se então agora escrever o vetor curvatura  $\{k\}$ , em função dos graus liberdade do elemento finito da seguinte maneira:

$$\{k\} = [B]\{u_{DKT}\} \quad (8)$$

onde  $[B]$  é a matriz de ordem  $3 \times 9$  que relaciona o vetor curvatura com o vetor deslocamento do elemento.

Substituindo-se a equação, na equação da energia de deformação acima obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} dYdZ \quad (9)$$

Mudando as variáveis e os limites de integração, encontramos:

$$U = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \{u_{DKT}\} \quad (10)$$

Sabe-se que a energia de deformação, em função da matriz de rigidez  $[K]$  do elemento, pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T [K] \{u_{DKT}\} \quad (11)$$

Então :

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \quad (12)$$

Efetuada-se as integrações da equação anterior, determina-se explicitamente a matriz de rigidez  $[K]$  do elemento, já em relação ao sistema de referência das lajes ou da subestrutura, sendo  $[D]_f$  é a matriz de elasticidade, para o caso de placas de material elástico, homogêneo e isotrópico.

### 3.3.1 Elemento finito quadrangular

Geralmente as lajes que compõem os pavimentos de edifícios apresentam geometria retangular. Nesse caso uma discretização automática por malhas compostas de elementos quadrangulares, principalmente os retangulares, torna-se mais simples do que a por elementos triangulares. Entretanto o elemento quadrangular pode também ser utilizado em lajes de contorno poligonal qualquer, da mesma forma que são utilizados os elementos triangulares.

O elemento quadrangular pode ser obtido facilmente pela composição de quatro elementos triangulares DKT, quando colocam-se os parâmetros internos, comuns aos elementos, em função dos seus parâmetros externos, através da condensação estática.

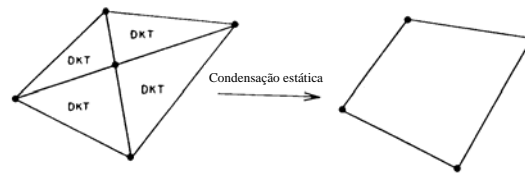


Figura 12 - Elemento quadrangular formado a partir de 4 elementos DKT

A relação entre forças nodais  $\{f\}$  e deslocamentos  $\{\delta\}$ , do quadrilátero, pode ser escrito da seguinte forma :

$$[K]\{\delta\} = \{f\} \quad (13)$$

Esta expressão pode ser reescrita, distinguindo-se os parâmetros externos localizados nos vértices do quadrilátero  $\{\delta_e\}$ , dos parâmetros internos do ponto médio  $\{\delta_i\}$  e, fazendo-se o mesmo para o vetor de cargas. Desta forma:

$$\begin{bmatrix} [K_{ee}]_{12 \times 12} & [K_{ei}]_{12 \times 3} \\ [K_{ie}]_{3 \times 12} & [K_{ii}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_e\}_{12 \times 1} \\ \{\delta_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_e\}_{12 \times 1} \\ \{f_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Efetuando-se os produtos matriciais da equação anterior, obtém-se:

$$\{f_e\} = [K_{ee}]\{\delta_e\} + [K_{ei}]\{\delta_i\} \quad (15)$$

$$\{f_i\} = [K_{ie}]\{\delta_e\} + [K_{ii}]\{\delta_i\} \quad (16)$$

Da equação ( 16 ) pode-se obter  $\{\delta_i\}$  da seguinte maneira :

$$\{\delta_i\} = [K_{ii}]^{-1} \{ \{f_i\} - [K_{ie}]\{\delta_e\} \} \quad (17)$$

Substituindo-se agora a equação ( 17 ) em ( 15 ), obtém-se :

$$\{f_e\} - [K_{ie}][K_{ii}]^{-1}\{f_i\} = \{ [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ie}] \} \{\delta_e\} \quad (18)$$

Definindo:

$$\{f\}_c = \{f_e\} - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}\{f_i\} \quad (19)$$

$$[K]_c = [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ie}] \quad (20)$$

a equação ( 18 ) fica :

$$\{f\}_c = [K]_c \{\delta_e\} \quad (21)$$

onde  $[K]_c$  representa a matriz de rigidez condensada do quadrilátero de ordem 12x12, função apenas dos parâmetros externos. Deve-se observar que as forças nodais também foram modificadas, pois se eliminou os parâmetros internos.

#### 4 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA

A matriz de rigidez global do edifício é obtida através da contribuição das rigidezes de todos os seus elementos estruturais componentes (elementos de placas e barras).

Seria, portanto, trabalhosa a análise global da estrutura, considerando-a de uma só vez todas as coordenadas deslocamentos envolvidas, devido ao enorme número de incógnitas presentes no sistema de equações correspondente.

Para que se tenha um sistema computacional eficaz na resolução de estruturas de grande porte, como edifícios, utilizam-se as técnicas de subestruturação, que analisam a rigidez de cada andar independentemente, ao invés da estrutura global como um todo.

Dessa forma, com a divisão do edifício em várias subestruturas, teoricamente é possível analisar edifícios com qualquer número de andares. As técnicas de subestruturação utilizadas são feitas em série e paralelo.

#### 4.1 Subestruturação em paralelo

A partir do sistema de referência de cada subestrutura, definem-se todos os nós que compõem o pavimento. Os pontos nodais dos elementos finitos que se conectam aos pilares são definidos como nós externos, e aqueles que não apresentam conectividade com os elementos verticais, são os nós internos.

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento devem ser condensados para as coordenadas das subestruturas propriamente dita. Nessa primeira etapa de montagem da matriz de rigidez global do edifício, é utilizada a técnica de subestruturação em paralelo.

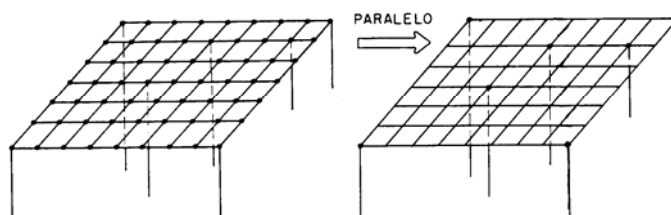


Figura 13 - Subestruturação em paralelo

Para se obter a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento em função apenas dos nós externos, podem ser utilizados dois métodos de condensação estática, o método tradicional ou o método de “*Choleski Decomposition*” ROSEN (1970).

O método tradicional utiliza a liberação total das coordenadas dos nós internos para se chegar à matriz de rigidez na forma condensada, com se fez, por exemplo, no item 3.3.1 na composição do elemento quadrangular, enquanto que o segundo método envolve apenas a liberação parcial das coordenadas internas.

##### 4.1.1 Método “Choleski decomposition”

Seja a equação matricial de equilíbrio do pavimento :

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

sendo :

I - índice que indica os parâmetros internos do pavimento

E - índice que indica os parâmetros externos do pavimento

Este método pode ser formulado a partir da decomposição da matriz de rigidez num triplo produto matricial.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (23)$$

sendo :

[L] - matriz triangular inferior com termos unitários na diagonal principal

[RT] - matriz retangular

[0] - matriz nula

[I] - matriz identidade

[D] - matriz diagonal

[R\*] - matriz simétrica condensada.

Da equação (23), obtém-se as seguintes expressões :

$$[R_{II}] = [L][D][L]^T \quad (24)$$

$$[R_{EI}] = [R_{IE}]^T = [RT][D][L]^T \quad (25)$$

$$[R_{EE}] = [R^*] + [RT][D][RT]^T \quad (26)$$

Relacionando-se a equação (23) em (22), encontram-se os seguintes sistemas desacoplados :

$$\begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

onde :

$$\begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

A equação (23) representa a decomposição de *Choleski* da submatriz  $[R_{II}]$ . Da equação (25), encontra-se a expressão da submatriz [RT], como sendo :

$$[RT] = [R_{EI}][[D][L]^T]^{-1} \quad (30)$$

Da equação (26), tira-se :

$$[R^*] = [R_{EE}] - [RT][D][RT]^T \quad (31)$$

Das equações (30) e (31), determinam-se as expressões genéricas dos termos da matriz [RT] e  $[R^*]$ , respectivamente.

$$RT_{i,j} = \frac{1}{D_{j,j}} R_{i+NI,j} - \sum_{k=1}^{j-1} RT_{i,k} L_{j,k} D_{k,k} \quad (30)$$

e

$$R^*_{i,j} = R_{i+NI,j+NI} - \sum_{k=1}^{NI} L^2_{i,k} D_{k,k} \quad (31)$$

sendo :

$R_{i,j}$  - termo da matriz de rigidez original

NI - número de coordenadas internas.

Observa-se que a matriz  $[R^*]$ , pode ser determinada a partir da triangularização de Gauss até a coluna referente à última coordenada interna.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Triangularizacao}} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \quad (34)$$

Da equação ( 27 ) obtém-se :

$$[R^*]\{D_E^*\} = \{F_E^*\} \quad (35)$$

Lembrando-se que  $[R^*]$  e  $\{F_E^*\}$  representam a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais, em função das coordenadas externas, respectivamente.

Da equação ( 28 ), conclui-se que :

$$\{D_E^*\} = \{D_E\} \quad (36)$$

e da equação ( 29 ), encontra-se :

$$\{F_I\} = [L]\{F_I^*\} \quad (37)$$

e

$$\{F_E^*\} = [RT]\{F_I^*\} + \{F_E\} \quad (38)$$

então :

$$\{F_E^*\} = \{F_E\} - [RT]\{F_I^*\} \quad (39)$$

Uma vez calculado  $\{F_I^*\}$  da equação ( 37 ), pode-se obter  $\{D_I^*\}$ , de acordo com a equação ( 27 ) :

$$[D]\{D_I^*\} = \{F_I^*\} \quad (40)$$

A partir da equação ( 28 ), encontra-se a expressão do vetor deslocamento das coordenadas internas  $\{D_I\}$ , como sendo :

$$\{D_I\} = [[L]^T]^{-1} (\{D_I^*\} - [RT]^T \{D_E\}) \quad (41)$$

Analisando-se as equações ( 35 ) e ( 39 ), observa-se que não é necessário inversões de matrizes para se obter  $[R^*]$  e  $\{F_E^*\}$ , resultando assim, num método de menor número de operações numéricas e menor esforço computacional que o método tradicional. Portanto, o método utilizado neste trabalho é o método “*Choleski Decomposition*” para obtenção da matriz de rigidez condensada do pavimento.

## 4.2 Subestruturação em série

Devido à presença dos pilares, a matriz de rigidez de cada subestrutura relaciona-se com o pavimento superior e inferior. A contribuição da rigidez dos elementos horizontais à subestrutura fica restrita ao próprio pavimento em que estão contidos, assim, para um pavimento  $k$ , a matriz de rigidez dos elementos horizontais, já nas coordenadas da subestrutura, são espalhadas apenas na matriz  $[R]_{K,K}$

Entretanto, os termos da matriz de rigidez dos pilares, são espalhadas nas matrizes  $[R]_{K,K}$ ,  $[R]_{K,K-1}$  e  $[R]_{K-1,K-1}$ , onde o índice  $k-1$  representa o pavimento inferior ao  $k$ . O endereçamento dos termos da matriz de rigidez condensada de cada elemento contido no pavimento, à matriz de rigidez  $[R]_{K,K}$  da subestrutura, depende de suas conectividades com os nós dos pilares.

Como o sistema estrutural é dividido em várias subestruturas em série, a matriz de rigidez global será formada pela contribuição das matrizes de rigidez de todos os andares já na forma condensada, observando obviamente sua seqüência de numeração. Assim, o sistema de equilíbrio global fica expresso por :



equações anteriores, onde através do processo de retro-substituições, calculam-se os deslocamentos de todos os elementos em cada subestrutura até o topo do edifício.

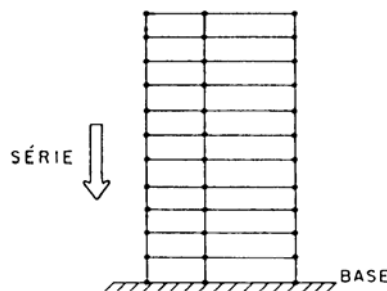


Figura 14 - Subestruturação em série

### 4.3 Forças nodais

O vetor de forças nodais do sistema estrutural é obtido pela contribuição direta das forças concentradas nos nós, mais as possíveis forças nodais equivalentes, devido ao carregamento distribuído ao longo dos elementos.

$$\{f\} = \{f\}_{NO} + \{f\}_{EQV}$$

onde :

$\{f\}$  : vetor de forças nodais, em coordenadas locais

$\{f\}_{NO}$  : vetor de forças concentradas diretamente aplicadas nos nós, em coordenadas locais

$\{f\}_{EQV}$  : representa o vetor de forças nodais equivalentes, em coordenadas locais.

#### 4.3.1 Forças nodais equivalentes das vigas

O vetor de forças nodais equivalentes  $\{f_v\}_{EQV}$  das vigas, segundo as coordenadas locais, corresponde à forças segundo estas coordenadas, sem que existam deslocamentos correspondentes. Por isso, a determinação das forças nodais equivalentes se resume nos esforços de engastamento perfeito em cada extremidade. E no caso de cargas uniformemente distribuídas no seu comprimento, tem-se :

$$\{f_v\}_{EQV}^T = \left\{ \frac{-ql}{2} \quad 0 \quad \frac{ql^2}{12} \quad \frac{-ql}{2} \quad 0 \quad \frac{-ql^2}{12} \right\}$$

sendo :  $l$  - comprimento de cada trecho e  $q$  - carga uniformemente distribuída.

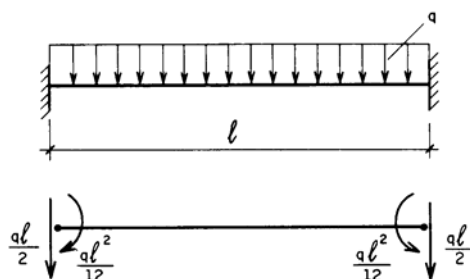


Figura 15 - Carga uniformemente distribuída

O vetor de forças nodais equivalentes da viga  $\{f_v\}_{EQV}$ , agora nas coordenadas da subestrutura, pode ser determinado através da seguinte expressão :

$$\{F_v\}_{EQV} = [\beta_v]^T \{f_v\}_{EQV}$$

onde  $[\beta_v]^T$  é a transposta da matriz de incidência  $[\beta_v]$ .

### 4.3.2 Forças nodais equivalentes do elemento DKT

As forças nodais equivalentes no elemento triangular DKT para um carregamento uniformemente distribuído  $q$ , segundo BATOZ (1982), são dados por :

$$\{f_{DKT}\}^T = \frac{qA}{3} \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}$$

onde  $A$  - área do elemento triangular.

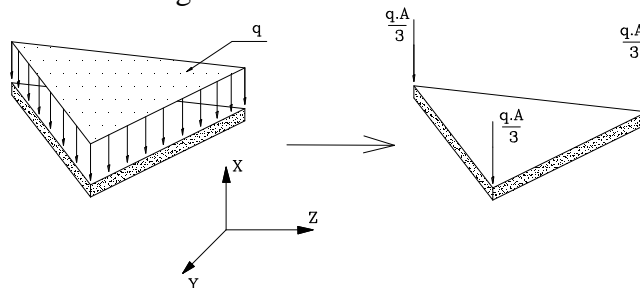


Figura 16 - Forças Nodais equivalentes no elemento DKT

Portanto, admite-se que as cargas uniformemente distribuídas  $q$ , ficam representadas apenas por cargas concentradas em cada nó do elemento.

### 4.3.3 Lajes

As forças laterais do vento são aplicadas no plano médio das lajes ao nível de cada pavimento, e têm a sua resultante decomposta nas direções  $Z$ ,  $Y$  e momento nas coordenadas da subestrutura.

Sendo assim, a contribuição das forças laterais do vento já é feita diretamente no vetor de forças nodais da subestrutura.

## 5 PROGRAMA COMPUTACIONAL

O principal objetivo deste trabalho é a determinação de esforços e deslocamentos na estrutura, de acordo com o modelo estrutural adotado na análise. Para cumprir este fim, elaborou-se um programa em linguagem computacional *Fortran Power Station 90*.

Foi também elaborado em linguagem de programação *Visual Basic 4.0*, o pré e pós-processador, o qual realiza a entrada e saída de dados através de menus e janelas de extração. Com isso a entrada de dados é facilitada para o usuário, fornecendo um maior profissionalismo ao trabalho.

Com algumas simples alterações no programa computacional e/ou entrada de dados, é possível encontrar resultados através dos seguintes modelos de análises :

#### a) Análise tridimensional considerando ou não a rigidez transversal das lajes.

É possível desprezar a influência da rigidez transversal das lajes na estrutura, anulando-se os termos da matriz de rigidez dos elementos de placa ( elemento DKT ).

### b) Análise tridimensional em teoria de primeira ordem ou segunda ordem para os pilares.

Para a análise estrutural em teoria de segunda ordem, deve-se alterar a matriz de rigidez dos pilares com os esforços axiais, que foram previamente obtidos em teoria de primeira ordem. Dessa forma, com os esforços e com a mudança da matriz de rigidez local dos pilares, a análise da estrutura em teoria de segunda ordem, é então realizada iterativamente.

Temos, portanto, que a análise estrutural pode ser feita considerando até 4 modelos estruturais diferentes, como é mostrado na tabela a seguir.

Tabela 01 - Tipos de modelos possíveis para análise

Modelo	Considera ou não da rigidez transversal da laje	Teoria de primeira ou segunda ordem para os pilares
1	NÃO	1ª Ordem
2	SIM	1ª Ordem
3	NÃO	2ª Ordem
4	SIM	2ª Ordem

## 6 EXEMPLO NUMÉRICO

Neste exemplo analisa-se um edifício com 12 pavimentos iguais, conforme a Figura 17, onde se aplicam as cargas laterais  $F_1$  e  $F_2$  devida à ação do vento.

As características do edifício são as seguintes :

- pé-direito : 2.90 m
- módulo de elasticidade longitudinal :  $E= 2.000 \text{ kN/m}^2$
- coeficiente de Poisson :  $\nu = 0.25$
- dimensões das vigas e pilares : ver figura 17
- carga uniformemente distribuída nas lajes :  $6\text{kN/m}^2$
- carga distribuída nas vigas :  $10\text{kN/m}$

A estrutura está totalmente engastada na sua base e foi analisada através dos quatro modelos diferentes mostrados na tabela 01.

Com o intuito de permitir uma melhor aferição dos resultados encontrados pelo programa, parte deles são apresentados em gráficos.

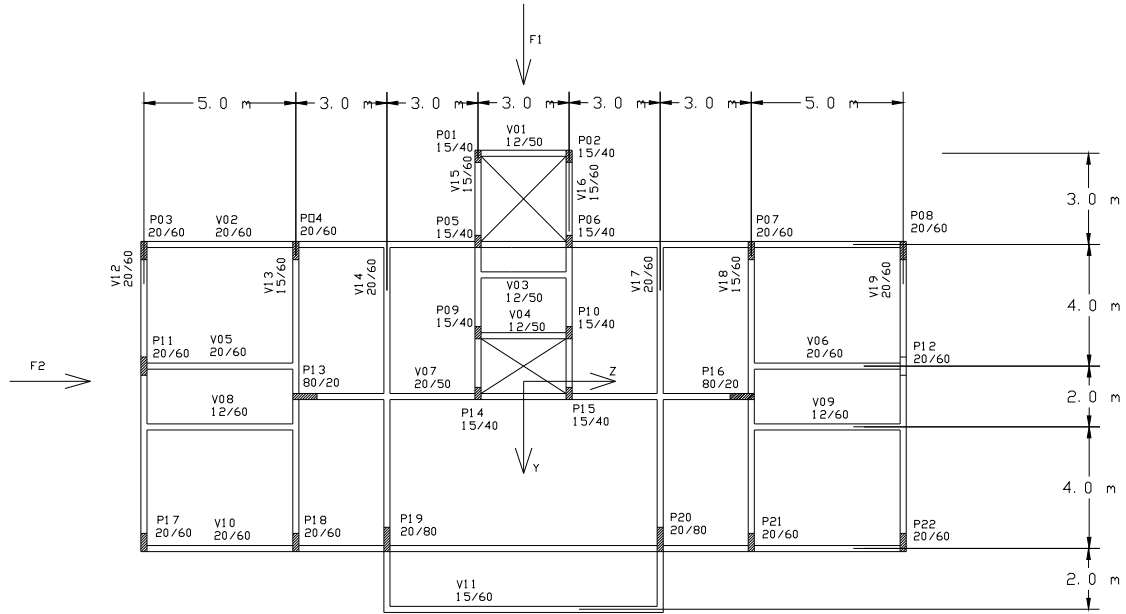


Figura 17 - Planta baixa dos pavimentos

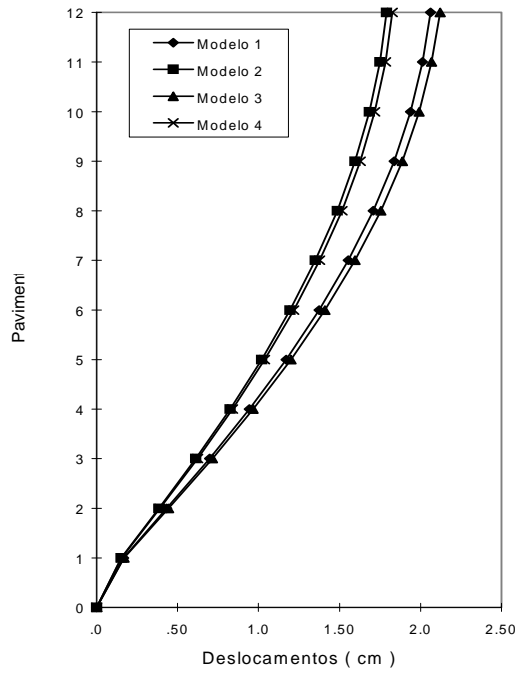


Figura 18 - Translação em Z

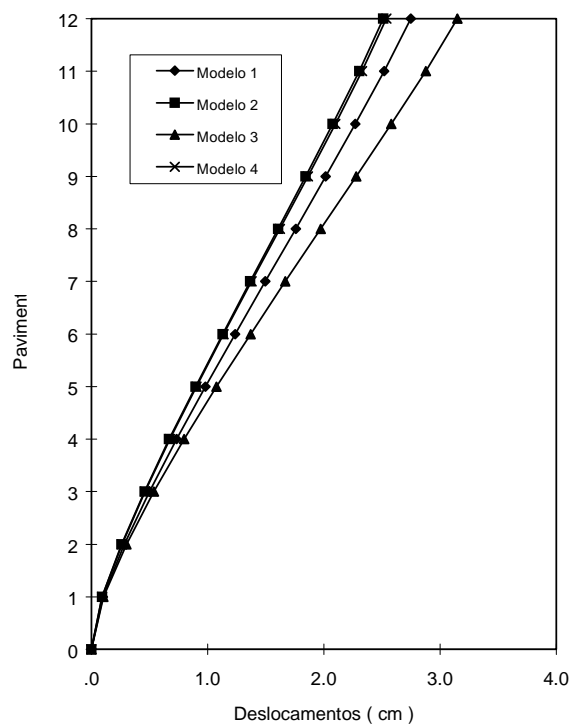


Figura 19 - Transação em Y

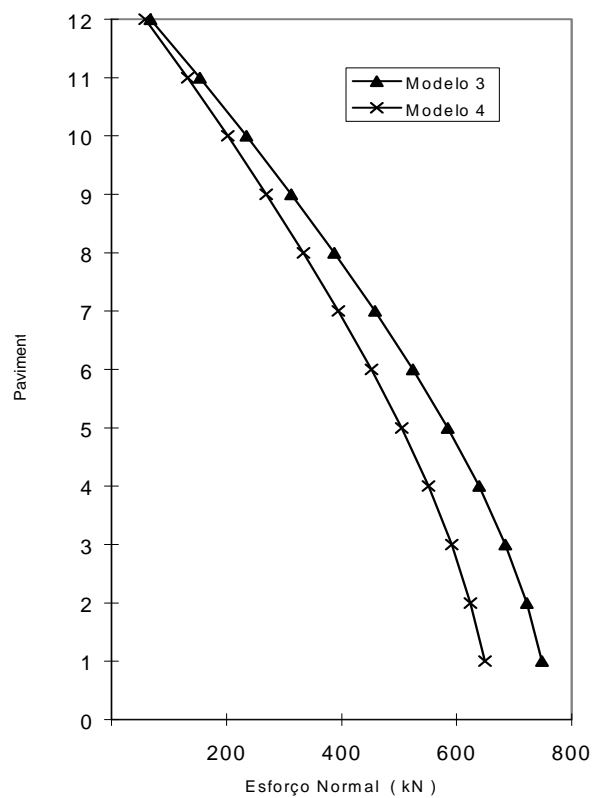


Figura 20 - Esforço normal no pilar 01

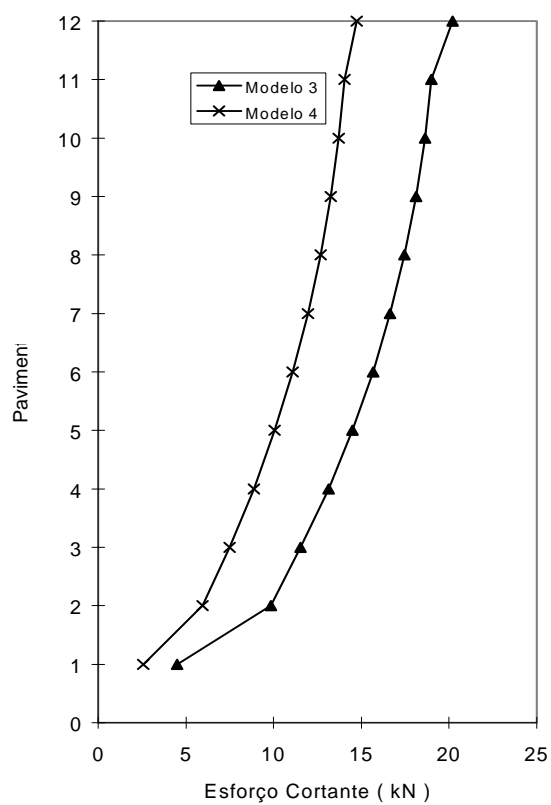


Figura 21 - Esforço cortante VY no pilar 04

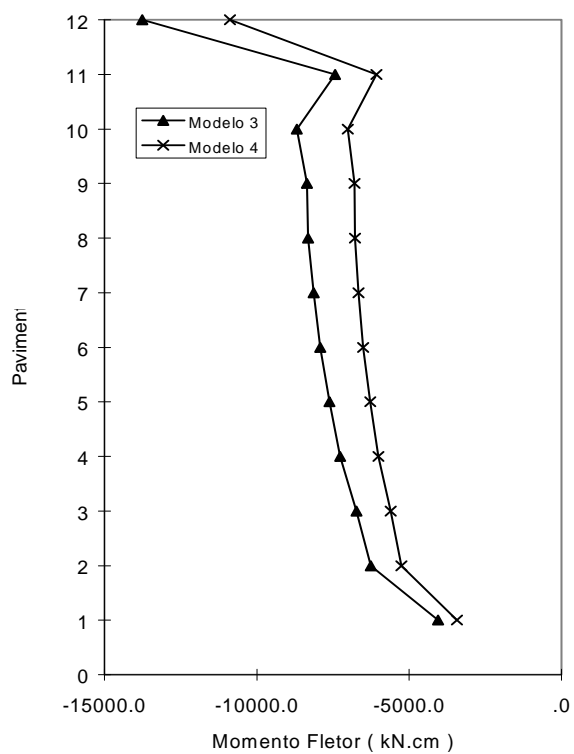


Figura 22 - Momento fletor MY superior no pilar 22

## 7 CONCLUSÕES

Analisando as figuras 18 e 19 deste exemplo, observa-se que ao computar a rigidez transversal à flexão das lajes na estrutura, os deslocamentos horizontais dos pavimentos são menores que os obtidos pelos modelos que as consideram apenas como diafragmas rígidos. Porém em teoria de 2ª ordem o efeito consideração da rigidez transversal à flexão das lajes teve uma participação mais significativa que na análise em teoria de 1ª ordem.

Com os deslocamentos reduzidos, verificou-se de uma forma geral uma redução dos esforços de flexão nos elementos estruturais, como pode ser verificado nos pilares das figuras 20 a 22.

Através dos gráficos 18 e 19 apresentados, notam-se diferenças significativas nos deslocamentos laterais quanto se comparam os modelos analisados. Verifica-se que a influência da rigidez transversal da laje chegou a ser tão significativa, que em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje, os deslocamentos foram menores do que no modelo em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes.

Com os resultados obtidos, observa-se que a rigidez transversal das lajes influencia sensivelmente no comportamento estrutural do edifício. Isto ocorre, pois com o modelo estrutural adotado, as lajes têm uma participação mais efetiva na interação dos esforços e deslocamentos com os demais elementos (vigas e pilares), em comparação a outros modelos que as consideram apenas como diafragmas rígidos. Há, portanto, uma análise conjunta mais realista da estrutura, proveniente da simulação relativa entre os elementos estruturais.

Com a utilização do Método dos Elementos Finitos, é possível obter informações sobre os deslocamentos independentes em diversos pontos do pavimento, tornando-se uma grande vantagem em relação aos modelos que tradicionalmente admitem as lajes sem qualquer rigidez transversal, onde tais deslocamentos não podem ser avaliados.

## 8 AGRADECIMENTO

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo apoio concedido.

## 9 REFERÊNCIAS

ANTUNES, H. M. C. C. (1972). **Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos**. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Paulo.

BATOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p.1771-1812.

BATOZ, J. L. (1982). An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, p.1077-1089.

BEZERRA, D. P. (1995). **Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez transversal à flexão das lajes**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

JEYACHANDRABOSE, C.; KIKHOPE, J. (1985). An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. **International Journal for Numerical Method in Engineering**, v.21, p.1289-1293.

MARTINS, C. H. (1998). **Contribuição da rigidez à flexão das lajes, na distribuição dos esforços em estruturas de edifícios de andares múltiplos, em teoria de segunda ordem**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ROSEN, R.; RUBINSTEIN, M. F. (1970). Substructure analysis by matrix decomposition, **Journal of Structural Division**, ASCE, v.96, p.663-70.

# INÉRCIA EQUIVALENTE DAS ESTRUTURAS DE CONTRAVENTAMENTO DE EDIFÍCIOS EM CONCRETO ARMADO

Rivelli da Silva Pinto<sup>1</sup> & Marcio Antonio Ramalho<sup>2</sup>

## Resumo

*Neste trabalho são discutidos os aspectos inerentes à análise não-linear física (NLF) e geométrica (NLG) das estruturas de contraventamento em concreto armado. O estudo proposto tem como base a análise estrutural de pórticos planos de concreto armado, desenvolvendo-se uma ferramenta rigorosa capaz de analisar essas estruturas de forma elaborada e consistente. Com essa ferramenta serão avaliadas as reduções de inércia que ocorrem em pórticos planos de concreto armado, submetidos a diferentes condições de carregamento e a diferentes taxas de armadura, contribuindo para o estabelecimento de estimativas confiáveis dos efeitos da NLF nessas estruturas.*

*Palavras-chave: edifícios altos; não-linearidade física; não-linearidade geométrica; concreto armado; plasticidade.*

## 1 INTRODUÇÃO

A resposta das estruturas de concreto armado, submetidas a carregamentos diversos, tem sido objeto de estudos desde que o concreto começou a ser amplamente utilizado como material na engenharia. No projeto estrutural dos edifícios altos é extremamente importante uma correta avaliação da resposta estrutural, considerando-se os efeitos não-lineares da geometria da estrutura e da reologia do material na análise estrutural. De fato, os deslocamentos e esforços da estrutura são determinados pelo carregamento, pelos os efeitos decorrentes da mudança de posição da estrutura no espaço, não-linearidade geométrica, e pelo comportamento não-linear do concreto armado, não-linearidade física.

No projeto de edifícios altos a rigidez lateral das estruturas exerce, de modo especial, grande importância estrutural e normativa. Desta dependem a determinação dos estados limites de utilização, a avaliação da estabilidade global das estruturas e ainda a determinação dos parâmetros para o projeto de estruturas submetidas à ações sísmicas e de vento.

---

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia de Estruturas – EESC - USP

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, ramalho@sc.usp.br

Observa-se que a correta avaliação do comportamento estrutural implica na utilização de ferramentas de análise capazes de descrever os efeitos decorrentes da não-linearidade geométrica (NLG) e da não-linearidade física (NLF).

Nos últimos anos, com o avanço dos computadores pessoais, os conceitos não-lineares começam a ser introduzidos no meio técnico de forma gradativa. No entanto, o emprego da análise não-linear não requer apenas o desenvolvimento de ferramentas, mas, principalmente, a formação de profissionais capazes de empregar com segurança esse tipo de análise. Esta não é a realidade atual do meio técnico de modo geral, pois a maior parte das Escolas de Engenharia não apresenta os conceitos não-lineares durante os cursos de graduação.

Por isso, ainda nos dias de hoje, a forma mais freqüente de se analisar uma estrutura é através da análise elástica e linear, baseada na lei de Hooke e no equilíbrio da estrutura indeformada, estimando-se os efeitos não-lineares da estrutura através de procedimentos simplificados. Isso acontece porque os modelos lineares são de mais fácil compreensão, é válida a superposição de efeitos, além do fato de que os procedimentos para tratamento dos resultados, dimensionamento e verificação são amplamente conhecidos.

Nesse contexto, o presente trabalho apresenta como objetivos básicos o de contribuir para a análise não-linear rigorosa das estruturas de edifícios em concreto armado, considerando-se a não-linearidade física do material e a não-linearidade geométrica da estrutura, através da implementação de uma formulação para análise não-linear de pórticos planos capaz de descrever o comportamento estrutural de forma eficiente e precisa.

Pretende-se, ainda, contribuir para o estabelecimento de procedimentos simplificados seguros para a avaliação dos efeitos não-lineares nas estruturas de concreto armado. De modo específico, contribuir para o estabelecimento dos valores do produto de inércia (EI) que devem ser empregados na análise das estruturas de contraventamento para simular a perda de rigidez devida à NLF.

Para atingir os objetivos propostos será realizado um estudo baseado na análise estrutural de pórticos planos, desenvolvendo-se uma ferramenta rigorosa capaz de analisar as estruturas planas de concreto armado de forma elaborada e consistente. Com essa ferramenta serão obtidas informações acerca da rigidez lateral dos pórticos de concreto armado, o que possibilitará a aferição das reduções de inércia a serem utilizadas nos projetos usuais de edifícios.

Esse estudo das reduções de inércia é uma continuação do trabalho de mestrado do autor, PINTO 1997, onde foram observados muitos aspectos a serem esclarecidos neste assunto, que é de interesse tanto para os projetistas de concreto armado, quanto para o meio científico empenhado na normalização dos processos simplificados para análise não-linear.

## **2 ANÁLISE NÃO-LINEAR SIMPLIFICADA**

A busca de se estabelecer ferramentas destinadas a realização de uma análise não-linear simplificada das estruturas de contraventamento em concreto armado tem sido objeto de estudo no mundo inteiro. Pode-se, conceitualmente, dividir estes estudos em dois ramos que se complementam: O estudo de parâmetros para

estimativa dos efeitos devidos ao deslocamento horizontal da estrutura (NLG) e estudo para estimativa das inércias efetivas dos elementos estruturais (NLF).

No tocante às considerações simplificadas para a consideração da NLG, tem-se pesquisado critérios seguros e de fácil implementação prática que permitam classificá-las quando ao grau de mobilidade: estruturas de nós móveis ou de nós fixos. BECK & KÖNIG (1966) propõem o parâmetro  $\alpha$ , como uma grandeza capaz de avaliar a sensibilidade da estrutura em relação aos efeitos da NLG. O modelo proposto considera um pilar engastado na base, com uma carga vertical distribuída ao longo de toda a sua altura, supondo-se para o mesmo um comportamento elástico-linear. O parâmetro fica, então, definido do seguinte modo:

$$\alpha = H \cdot \sqrt{\frac{F_v}{EI}} \quad (2.1)$$

onde:

H = altura total do pilar  
 $F_v$  = carga vertical característica no pilar  
 EI = produto de rigidez

Segundo a teoria desenvolvida por BECK, para  $\alpha$  superior a 0,60 torna-se necessária a consideração dos efeitos devidos à NLG no pilar.

Posteriormente, este conceito foi estendido por FRANCO (1985a) para o caso de edifícios altos, uma vez que se pode associar um edifício alto a uma coluna engastada na base, com os pavimentos tipo conferindo às cargas verticais o caráter de carregamento uniformemente distribuído.

Para que se possa efetuar esta analogia, no entanto, deve-se estender às estruturas dos edifícios altos os conceitos de produto de rigidez equivalente ( $EI_{eq}$ ) e parâmetro de forma da linha elástica ( $\psi$ ).

Considere-se uma estrutura submetida a uma ação horizontal uniformemente distribuída  $q_d$  e seja  $a_d$  o deslocamento horizontal do topo (figura 2.1). O produto de rigidez  $EI_{eq}$  é aquele equivalente a uma estrutura prismática engastada na base, de módulo de rigidez E constante ao longo de sua altura H, que sob a ação de  $q_d$  apresenta o mesmo deslocamento  $a_d$  no topo.

Recorrendo-se então à expressão da linha elástica correspondente a um pilar engastado na base com uma ação lateral uniformemente distribuída, tem-se:

$$EI_{eq} = \frac{q_d \times H^4}{8 \times a_d} \quad (2.2)$$

Na estimativa do  $EI_{eq}$  devem ser computados todos os elementos que contribuem para a estabilidade da estrutura. Portanto, além da consideração de elementos isolados, principalmente núcleos e pilares paredes, deve-se também considerar os pórticos planos constituintes da estrutura, pois estes contribuem para um contraventamento eficiente.

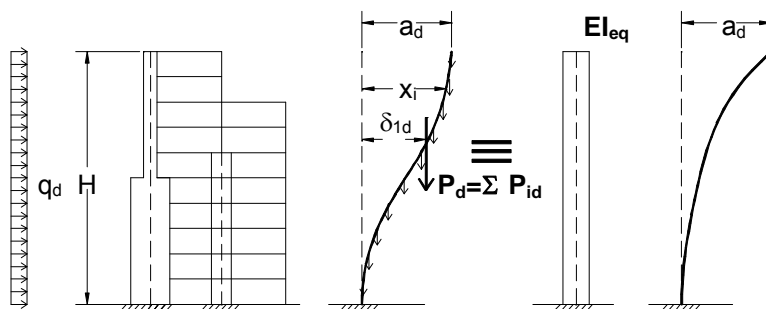


Figura 2.1 - Produto de rigidez equivalente - adaptada de FRANCO (1985a)

Seja  $\delta_{1d}$  o deslocamento horizontal, referente à análise elástico-linear, do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais de intensidade  $P_d$ . Define-se o parâmetro de forma da linha elástica como sendo:

$$\psi = \frac{\delta_{1d}}{a_d} = \frac{\delta_{1k}}{a_k} \quad (2.3)$$

Esse parâmetro pode ser facilmente calculado para estruturas regulares em casos particulares importantes.

FRANCO (1985a) apresenta os seguintes resultados na avaliação do  $\psi$ : estruturas com contraventamento em pilar parede  $\psi = 0,4$ , estruturas com contraventamento misto  $\psi=0,5$  e estruturas com contraventamento em pórtico  $\psi = 0,67$ . O parâmetro de forma permite que se possa conhecer melhor o comportamento global da estrutura, indicando o modo como se desloca horizontalmente segundo o tipo de contraventamento predominante na mesma.

Alguns valores de  $\alpha_{lim}$ , para edifícios de vários pavimentos, foram propostos por alguns pesquisadores de forma a viabilizar a sua utilização.

De acordo com o CEB (1977), para edifícios de vários pavimentos, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{lim} &\leq 0,2 + 0,1n; & \text{para } n \leq 3 \\ \alpha_{lim} &\leq 0,6 & \text{para } n \geq 4 \end{aligned}$$

onde  $n$  é o número de pavimentos do edifício.

Esta definição de  $\alpha_{lim}$  pressupõe que o contraventamento seja constituído exclusivamente por pilares-parede, visto que se despreza a influência das vigas, além disso, o valor  $\alpha_{lim} = 0,60$  foi obtido considerando-se  $\gamma_f = 1,5$ . FRANCO (1985a) demonstra que para  $\gamma_f = 1,4$  tem-se  $\alpha_{lim} = 0,70$ , considerando-se a seguinte redução de inércia para a estrutura:

$$(EI_{eq})_d = 0,7(EI_{eq})_k \quad (2.4)$$

na qual:

$$\begin{aligned} (EI_{eq})_d &= \text{produto de rigidez equivalente no estado limite último,} \\ (EI_{eq})_k &= \text{produto de rigidez equivalente característico.} \end{aligned}$$

Ainda no mesmo trabalho, apresenta valores limites do parâmetro  $\alpha$  dependentes do tipo de contraventamento predominante na estrutura. Esses valores limites são obtidos através da condição generalizada de imobilidade dos nós, definida por FRANCO (1985a) como:

$$\alpha_{lim} \leq \sqrt{\frac{2}{11\psi}} \quad (2.5)$$

Partindo-se do parâmetro de forma da linha elástica pode-se estabelecer valores limites de  $\alpha$  em função do tipo de contraventamento predominante na estrutura. Os resultados obtidos para estruturas regulares, são:

$$\begin{aligned} \alpha_{lim} &\leq 0,7; \text{ contraventamento em pilares-parede;} \\ \alpha_{lim} &\leq 0,6; \text{ contraventamento misto (pilares-parede, pórticos ou associações).} \\ \alpha_{lim} &\leq 0,5; \text{ contraventamento em pórtico;} \end{aligned}$$

Deve-se ressaltar que todos esses valores limites de  $\alpha$  foram obtidos considerando-se, para simular o efeito da perda de rigidez da estrutura devida à NLF, como válida a relação (2.4).

VASCONCELOS (1987) sugere uma variação de  $\alpha_{lim}$  em função do número de pavimentos  $n$ , dada por (para  $n \geq 1$ ):

$$\alpha_{lim} = \frac{1}{\sqrt{1,2}} (0,88 - 0,44 \times 10^{-0,144n}) \quad (2.6)$$

Na análise de edifícios altos, o parâmetro  $\alpha$  serve como um indicador da necessidade ou não de se levar em conta o efeito da NLG para o projeto da estrutura. Assim, pode-se desprezar o efeito da NLG quando o valor calculado de  $\alpha$  for menor que  $\alpha_{lim}$ . Isso equivale a dizer que os esforços totais não-lineares não ultrapassam em 10% aqueles referentes à análise elástico-linear (condição de imobilidade dos nós).

FRANCO & VASCONCELOS (1991) propõem, em substituição ao parâmetro  $\alpha$ , o parâmetro  $\gamma_z$  como um coeficiente majorador dos esforços obtidos em uma análise elástico-linear para a obtenção dos esforços finais na estrutura. O parâmetro  $\gamma_z$  é definido como se segue:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_d}{M_{1d}}} \quad (2.7)$$

na qual:

$$\begin{aligned} \Delta M_d &= \text{acréscimos de momentos devido ao deslocamento horizontal} \\ M_{1d} &= \text{momento atuante na estrutura indeslocada} \end{aligned}$$

CARMO (1995) estabeleceu a seguinte relação empírica entre os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma_z$ , após a análise de 30 estruturas correntes:

$$\gamma_z = 0,90 + 0,52\alpha - 0,62\alpha^2 + 0,46\alpha^3 \quad (2.8)$$

GRAZIANO (1998) encontrou uma expressão analítica relacionando  $\alpha$  e  $\gamma_z$ :

$$\alpha^2 = \frac{\gamma_z - 1}{\gamma_z \cdot \gamma_{fv}} \quad \text{ou} \quad \gamma_z = \frac{1}{1 - \gamma_{fv} \cdot \alpha^2} \quad (2.9)$$

na qual  $\gamma_{fv}$  é o coeficiente de segurança aplicado ao carregamento vertical da estrutura, devidamente analisado por FRANCO & VASCONCELOS (1991) e PINTO (1997).

CARMO (1995) estudou, ainda, uma amostra contendo sete prédios, nos quais se comparou os resultados de análises com a consideração da NLG, com os obtidos pelo processo P- $\Delta$  e pelo método simplificado (utilizando-se o coeficiente  $\gamma_z$ ). Essa comparação envolveu, principalmente, o deslocamento no topo do edifício e os esforços ao longo da estrutura. Como conclusão de seu trabalho, CARMO (1995) considera a utilização do coeficiente  $\gamma_z$  satisfatória dentro de certos limites, conforme indicam FRANCO & VASCONCELOS (1991). No entanto, para o universo das estruturas analisadas em seu trabalho, percebe-se uma tendência a se avançar na utilização desse processo para além do limite 1,2, proposto por FRANCO & VASCONCELOS (1991). Além disso, verificou-se que o valor do coeficiente  $\gamma_z$  pode, para os níveis superiores do edifício, indicar acréscimos de esforços superiores aos obtidos pelo processo rigoroso e pelo processo P- $\Delta$ .

PINTO (1997) analisou 25 edifícios de concreto armado através do processo simplificado, onde os esforços da análise elástico-linear são majorados pelo  $\gamma_z$ , e um processo mais rigoroso, no qual a NLG é considerada através de alterações incrementais na matriz de rigidez. Em ambos os procedimentos, a NLF foi considerada através de reduções na inércia dos elementos estruturais. Os esforços obtidos através desses dois procedimentos de análise não-linear geométrica foram comparados para a estrutura como um todo e para 5 faixas ao longo da altura, aferindo-se, assim, a acuidade do processo simplificado.

Os resultados obtidos indicam que:

1) Para os esforços normais, considerando-se a estrutura global, os acréscimos devidos aos efeitos não-lineares mostram-se próximos ao  $\gamma_z$ , mesmo para valores elevados desses acréscimos.

2) Considerando-se a estrutura como um todo, os acréscimos de momentos fletores nos pilares se resultam próximos ao  $\gamma_z$  até para valores elevados do parâmetro. Para valores de  $\gamma_z$  entre 1,15 e 1,20 começam a aparecer diferenças da ordem de 3% contra a segurança. Acima de 1,20, as diferenças tendem aumentar para valores acima de 5%, sendo que a maioria destas se mostra contra a segurança.

3) Considerando-se o comportamento ao longo da altura, os acréscimos de momentos fletores se apresentam menores que o  $\gamma_z$  para trechos de pilares próximos à base. Para os trechos intermediários, os acréscimos são maiores que os previstos pelo  $\gamma_z$ , voltando a ser menores nos trechos próximos ao topo.

4) Os esforços nas vigas, esforços cortantes e momentos fletores, apresentam comportamentos semelhantes entre si. Analisando-se a estrutura globalmente, as diferenças são da ordem de apenas 3% contra a segurança, mesmo para valores de  $\gamma_z$  acima de 1,25.

5) Considerando-se o comportamento ao longo da altura, esses esforços apresentam-se ora a favor ora contra a segurança para as peças próximas à base. Sendo que somente para  $\gamma_z$  acima de 1,3 aparecem diferenças contra a segurança da ordem de 7% nessa região. Para as peças situadas nas regiões intermediárias, a estimativa do  $\gamma_z$  mostra-se contra a segurança, com diferenças acima de 5% para  $\gamma_z$  maior que 1,3. Finalmente, para peças próximas ao topo a estimativa através do  $\gamma_z$  volta a estar a favor da segurança.

De todos os resultados obtidos, pode-se concluir que a utilização do parâmetro  $\gamma_z$  é satisfatória dentro de certos limites, sendo que o valor de 1,2, estabelecido por FRANCO & VASCONCELOS (1991), parece ser realmente o mais adequado. O estabelecimento de um limite superior a 1,2 deve ser evitado, levando-se em conta o fato de que nas faixas intermediárias, onde os valores dos esforços devidos à ação horizontal são maiores, a estimativa se mostra contra a segurança. Nessas faixas, deve-se considerar ainda que os acréscimos de esforços apresentam maior dispersão em torno da média, o que concorre para a diminuição da segurança.

Deve-se ressaltar que a utilização dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma_z$  requer a aplicação de coeficientes que simulem a perda de rigidez da estrutura devida ao comportamento não-linear dos materiais (NLF).

As pesquisas referentes à consideração simplificada da NLF têm buscado encontrar valores mais realistas para o produto de inércia ( $EI$ ) dos elementos constituintes da estrutura, no lugar de se considerar a seção bruta ou a seção fissurada para os elementos estruturais. MACGREGOR (1993) propõe a existência de dois conjuntos de valores para o produto de inércia efetivo ( $EI_{ef}$ ): um para a realização de uma análise global da estrutura e outro para a análise de membros isolados. Isso é razoável, considerando-se que as deflexões laterais na análise de uma estrutura são afetadas pela rigidez de todos os seus membros, os valores de  $EI_{ef}$  devem se aproximar do valor médio representativo desses elementos estruturais. Por outro lado, quando se lida com a estabilidade de um membro individual, o valor de  $EI_{ef}$  utilizado deve ser um limite inferior seguro para o elemento.

Na tentativa de se estabelecer valores de  $EI_{ef}$  para a análise global da estrutura, KORDINA<sup>3</sup> e HAGE<sup>4</sup> apud MACGREGOR (1993) estudaram a variação de rigidez para vários membros de pórticos sujeitos a momentos devidos a carregamentos gravitacionais, carregamentos laterais e uma combinação dessas duas ações. Os resultados mostram que o valor de  $EI_{ef}$  para vigas T e vigas com seções retangulares se aproxima de  $0,4 E_c I_g$ .

Uma vez estabelecido o valor do  $EI_{ef}$  para vigas, HAGE<sup>4</sup> obteve o valor do  $EI_{ef}$  para colunas, recalculando pórticos de concreto armado cujas deflexões laterais

<sup>3</sup> KORDINA, Karl (1972). Cracking and crack control. Planning and Design of Tall Buildings, Proceedings of 1972 ASCE-IABSE International Conference. v. 3, p. 721-722.

<sup>4</sup> HAGE, Sven E.; MCGREGOR, James G. *Second order analysis of reinforced concrete frames*. Edmonton, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Oct. 1974. 331 p. Structural Engineering Report N° 9.

havam sido determinadas em ensaios de laboratório. Obteve como resultado um valor de  $EI_{ef}$  próximo de  $0,8 E_c I_g$ .

Baseados nesses estudos MACGREGOR & HAGE<sup>5</sup> apud MACGREGOR (1993) propõem que se considere para as vigas  $EI_{ef} = 0,4 E_c I_g$  e para os pilares  $EI_{ef} = 0,8 E_c I_g$ .

FURLONG<sup>6</sup> apud MACGREGOR (1993) propôs que o  $EI_{ef}$  de vigas T seja tomado como o EI total da alma, mas não menos que metade da inércia correspondente à da seção T. Para colunas localizadas nos níveis inferiores, ele sugeriu  $EI_{ef} = 0,6 E_c I_g$ , enquanto que para colunas dos níveis superiores propôs  $EI_{ef} = 0,3 E_c I_g$ .

DIXON<sup>7</sup> apud MACGREGOR (1993) recalculou 13 pórticos que haviam sido testados experimentalmente, utilizando um programa que permitia uma análise não linear. Baseado nos resultados de HAGE<sup>2</sup> assumiu  $EI_{ef} = 0,5 E_c I_g$  para as vigas. Utilizando essa rigidez para as vigas, a rigidez das colunas que conduziu à melhor estimativa dos deslocamentos laterais medidos, de modo conservativo, foi  $EI_{ef} = 0,5 E_c I_g$ .

MCDONALD<sup>8</sup> apud MACGREGOR (1993) produziu relações momento nas extremidades por rotação para vigas T, lajes armadas em uma direção e colunas. Para vigas T, com 1,2 % de armadura, o coeficiente de redução do  $E_c I_g$  variou de 0,37 a 0,44. Para lajes armadas em uma única direção, com 0,5 % de armadura, esse coeficiente variou de 0,16 a 0,22. Para colunas, o coeficiente de redução variou de 0,66 a 0,89. Baseado nesses resultados, MCDONALD propôs valores de coeficientes de redução iguais a 0,42, 0,2 e 0,7 para vigas T, lajes armadas em uma única direção e pilares, respectivamente.

Observa-se certo grau de variabilidade nos valores de  $EI_{ef}$  indicados para projeto pelos autores anteriormente citados.

MACGREGOR (1993) propõe ainda a adoção de um fator de redução para os valores de  $EI_{ef}$  dado por  $\phi = 0,875$ . Essa redução permite levar em conta a variabilidade nas deflexões laterais, resultante de simplificações na modelagem das estruturas e da incerteza quanto aos valores reais de  $E_c$  e da inércia efetiva ( $I_{ef}$ ).

FRANCO (1995) considera que essa redução só faz sentido para a formulação geral do ACI 318/89 e indica os valores de  $I_{ef}$  considerados para a Norma Brasileira (NBR 6118). O texto da NBR 6118 prescreve que para as vigas com armadura nas duas faces da seção transversal, deve-se adotar  $I_{ef} = 0,5 I_g$ ; para vigas armadas em apenas uma face  $I_{ef} = 0,4 I_g$ ; para os pilares  $I_{ef} = 0,8 I_g$ ; e para as lajes  $I_{ef} = 0,3 I_g$ . FRANCO & VASCONCELOS (1991) propõem ainda, como alternativa, a adoção de um valor único de  $I_{ef} = 0,7 I_g$  para vigas e pilares.

<sup>5</sup> MCGREGOR, James G.; HAGE, Seven E. (1977). Stability and design of concrete frames. *Journal of Structural Division*, ASCE, v. 103, n. ST10, p.1953-1970, Oct.

<sup>6</sup> FURLONG, Richard W. (1980). Frames with slender columns-lateral loads analysis. *CRSI Professional Members Structural Bulletin*, n. 6, Mar. 10p.

<sup>7</sup> DIXON, D. G. (1985). *Second-order analysis of reinforced concrete sway frames*. M.A.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Ontario. 230p.

<sup>8</sup> MCDONALD, Brian E. (1986). *Second order effects in reinforced concrete frames*. M.A.Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Ontario. 257p.

PINTO (1997) estudou vigas com diferentes taxas de armadura, processadas no LUSAS<sup>9</sup> através de modelos planos. Para as vigas obteve-se uma variação nos valores de  $EI_{ef}$  entre  $0,4 E_c I_g$  e  $0,64 E_c I_g$ , sendo que os valores mais baixos correspondem a vigas com armaduras em uma única face, e os maiores às vigas com armadura nas duas faces, em conformidade, portanto, com a indicação da NBR 6118. Foram estudados também, alguns pilares curtos, para os quais se pudessem desprezar os efeitos devidos à NLG. Para estes, obteve-se uma variação nos valores de  $EI_{ef}$  de  $0,72 E_c I_g$  a  $1,26 E_c I_g$ , conforme sejam maiores ou menores os valores momentos fletoras a que estão submetidos.

Por fim, analisou-se um pórtico plano com o mesmo modelo plano utilizado na análise dos pilares e das vigas. O resultado indica que dentre os valores propostos na literatura, os que mais se aproximam dos resultados obtidos no modelo plano processado no LUSAS, são aqueles propostos pela NBR 6118. Entretanto, trata-se de um único exemplo analisado considerando-se somente a NLF, devendo esse resultado ser avaliado com cautela.

SHURAIN (1997) avaliou a rigidez lateral de 9 pórticos compostos por três membros: dois pilares e uma viga. Neste trabalho é apresentada a grande variação que ocorre no  $EI_{ef}$  dos membros constituintes da estrutura. De fato, quando um pórtico atinge a ruptura, somente as seções críticas atingem o colapso. A maioria delas permanecem pouco fissuradas apresentando  $EI_{ef}$  maior que o  $E_c I_g$ .

Duas indicações para redução de inércia são analisadas:

$EI_{ef} = 0,5 E_c I_g$  para as vigas e  $EI_{ef} = E_c I_g$  para os pilares;

$EI_{ef} = E_c I_{cr}$  para as vigas e  $EI_{ef} = 0,4 E_c I_g$  para os pilares; sendo  $I_{cr}$  a inércia da seção fissurada.

SHURAIN (1997) indica que a utilização de  $EI_{ef} = 0,5 E_c I_g$  para as vigas e  $EI_{ef} = E_c I_g$  para os pilares, resulta em bons resultados em serviço. A utilização de  $EI_{ef} = E_c I_{cr}$  para as vigas e  $EI_{ef} = 0,4 E_c I_g$  apresenta bons resultados somente para o colapso de pórticos com baixas taxas de armadura.

No tocante à inércia efetiva para a análise de membros isolados, têm-se pesquisado expressões que permitam uma estimativa simples e segura do  $EI_{ef}$  desses elementos. Esses valores são utilizados, em geral, em métodos aproximados para o dimensionamento dos elementos. É o caso, por exemplo, da aproximação adotada pelo ACI Building Code para o dimensionamento de pilares esbeltos. Este método utiliza o carregamento axial obtido de uma análise elástico-linear e um momento majorado, que inclui os efeitos referentes à NLG devidos ao deslocamento horizontal da coluna. A eficácia do processo está diretamente ligada a uma correta previsão do  $EI_{ef}$  para o elemento.

### 3 ANÁLISE NÃO-LINEAR RIGOROSA

Neste item, será desenvolvida uma teoria que descreva o comportamento não-linear das estruturas de barras de material elástico de forma exata, ou seja, sem restrições quanto à grandeza dos deslocamentos e das deformações. A formulação

<sup>9</sup> Software produzido na Inglaterra pela FEA (Finite Element Analysis Ltd), capaz de realizar análises não-lineares através do método dos elementos finitos.

escolhida para implementação computacional, apresentada por PIMENTA (1996), refere-se à uma Teoria Geometricamente Exata baseada na hipótese de Bernoulli-Euler para pórticos planos. Esta teoria, conforme PIMENTA (1996), pode ser estendida para a materiais elasto-plásticos, visco-elásticos e visco-plásticos, uma vez que estes se deixam integrar no tempo como os materiais elásticos.

Desse modo, foram introduzidos modelos constitutivos capazes de descrever o comportamento não-linear do concreto, o “tension stiffening” e a influência dos estribos. Também para o aço foram considerados modelos constitutivos que descrevessem o seu comportamento não-linear através de uma curva tensão por deformação bi-linear.

A integração para obtenção dos esforços na seção transversal foi realizada pelo método das “fatias”, no qual seção transversal dos elementos é dividida em fatias de concreto e de aço. A integração ao longo do elemento para a obtenção das respectivas forças internas foi realizada numericamente, utilizando-se o Método de Gauss para integração numérica.

O algoritmo anterior foi implementado em um programa computacional, na linguagem FORTRAN Power-Station, denominado PPNL (Pórtico Plano Não-Linear).

Pode-se avaliar a eficiência do programa na descrição do comportamento das estruturas de concreto armado analisando-se os resultados obtidos para o pórtico da figura 3.1. Trata-se de um pórtico engastado ensaiado por WILBY & PANDIT (1967) e apresentado por RASHEED & DINNO (1994).

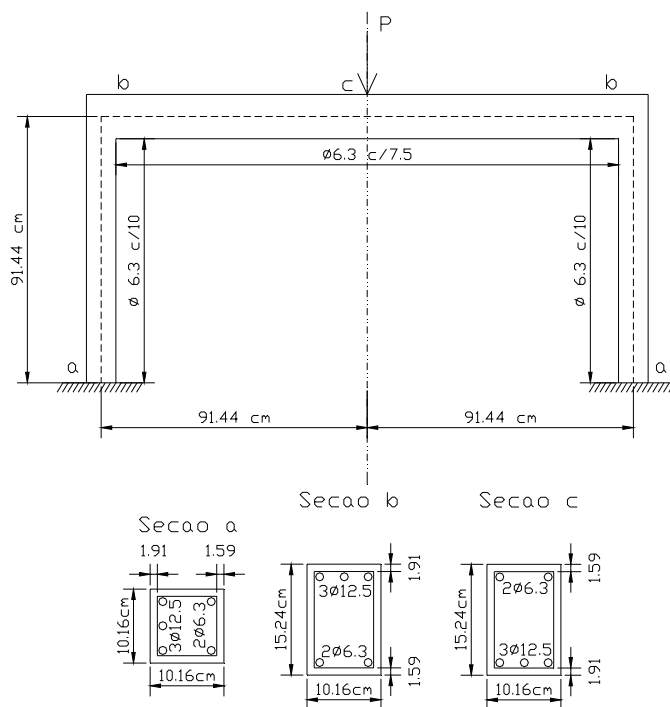


Figura 3.1 – Pórtico ensaiado por Wilby e Pandit

Devido à simetria do problema analisou-se somente metade da estrutura, sendo adotadas duas malhas distintas com 12 elementos e com 15 elementos,

conforme apresentado na figura 3.2. A seção transversal foi dividida em 10 fatias, conforme indica SILVA (1996).

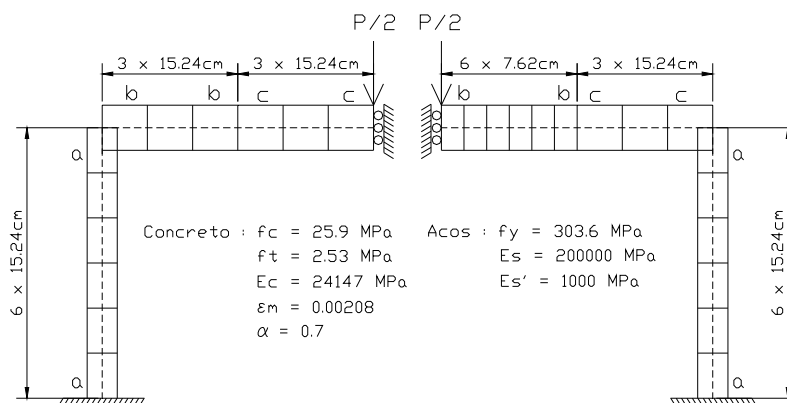


Figura 3.2 – Malha em elementos finitos adotadas: 12 e 15 elementos

São apresentadas, na figura 3.3, a curva deslocamento x carregamento experimental, a curva teórica apresentada por RASHEED E DINO (1994), e aquelas obtidas pelo PPNL com 12 e 15 elementos.

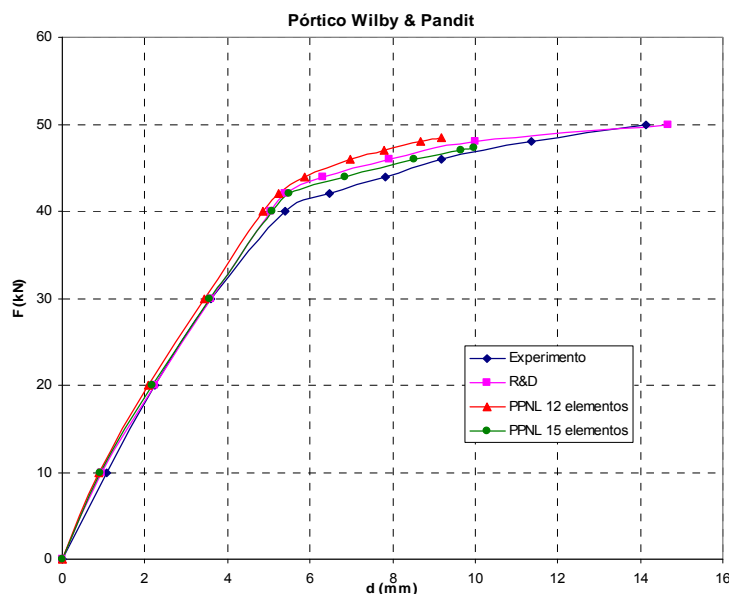


Figura 3.3 – Curvas deslocamento x carregamento

Observa-se que, mesmo utilizando-se uma malha pobre com 12 elementos, os resultados obtidos descrevem de modo satisfatório o comportamento da estrutura. Apenas o último trecho da curva deslocamento x carregamento não pôde ser descrito em função de problemas numéricos.

## 4 ANÁLISE NÃO-LINEAR PARAMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS

Neste item são analisados alguns pórticos planos, nos quais se variou a taxa de armadura e o nível de carregamento de forma a se avaliar a influência dessas variáveis na perda de rigidez lateral da estrutura.

Foram estudados pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares, cada qual submetido a três níveis de carregamento diferentes: N1, N2 e N3. Para cada nível de carregamento correspondem três dimensionamentos, de forma a se obter três taxas de armadura diferentes: A, B e C - sendo A próxima à taxa mínima de norma, C próxima à taxa máxima de norma e B um valor intermediário. Assim foram obtidos nove pórticos com um lance e nove com seis lances de pilares, num total de dezoito exemplos.

Convencionou-se chamar este estudo de análise paramétrica uma vez que foram abrangidos desde níveis de carregamento muito abaixo, até níveis muito acima dos usuais, o mesmo acontecendo com as taxas de armadura. Desse modo, pôde-se avaliar qualitativa e quantitativamente a perda de rigidez lateral dos pórticos planos.

### 4.1 Pórticos com 1 lance de pilares

Na tentativa de se avaliar de modo sistemático o comportamento de pórticos planos submetidos a diferentes condições de carregamento, geometria e taxas de armadura, foram estudados alguns pórticos com 1 lance de pilares segundo a seguinte metodologia:

- 1) Foram analisados pórticos planos constituídos por dois pilares e uma viga, conforme a figura 4.1.
- 2) Adotou-se o concreto com resistência  $f_{ck}=25$  MPa e aço CA-50A com  $f_{ys}=500$  MPa. Os parâmetros que caracterizam os materiais para a análise não-linear são:  $E_{ctg} = 35234$  MPa,  $f'_c = 28,5$  MPa,  $\epsilon_0 = 0,002$ ,  $f_t = 2,85$  MPa,  $\alpha = 0,70$ ,  $\epsilon_m = 20 \epsilon_t$ ,  $E_s = 210000$  MPa,  $E'_s = 1000$  MPa,  $\epsilon_{s\ máx} = 0,010$ .
- 3) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente, embora na maior parte dos casos práticos o carregamento vertical seja aplicado primeiro. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
- 4) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
- 5) As vigas foram dimensionadas segundo a NBR 6118 para momentos positivo e negativo. A mesma armadura negativa foi utilizada em ambos os lados da viga.
- 6) Os pilares foram dimensionados como peças submetidas à flexão composta *sem levar em consideração os efeitos devidos às excentricidades acidentais e esbeltez*. Os dois pilares possuem a mesma armadura.
- 7) As seções críticas foram dimensionadas para três taxas de armadura:
  - Tipo A: Taxas de armadura baixas, muito próximas da mínima permitida pela norma;
  - Tipo B: Taxas de armaduras médias, próximas da metade do máximo permitido pela norma;
  - Tipo C: Taxas de armadura altas, próximas ao máximo permitido pela norma;

- 8) Os carregamentos também foram distribuídos em três níveis N1, N2 e N3, onde 1 indica valores baixos para o carregamento, 2 valores médios e 3 valores altos, conforme a tabela 4.1. H, W e P estão indicados na figura 4.1, enquanto G corresponde ao carregamento vertical total aplicado.
- 9) Cada pórtico foi modelado com 15 elementos: cinco para cada pilar e cinco para a viga. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da viga e do pilar foram discretizadas em 20 “fatias” de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).

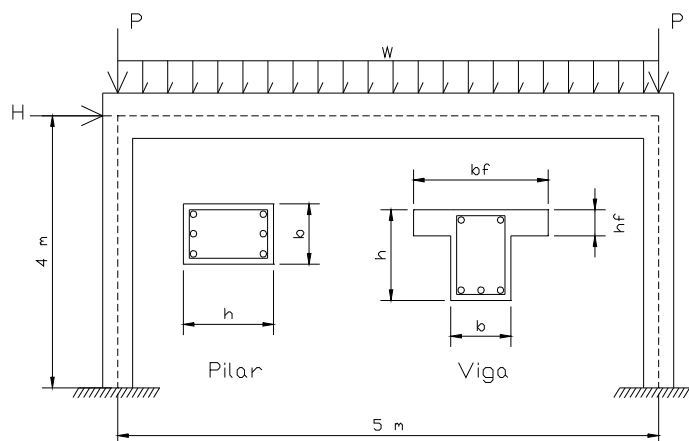


Figura 4.1 – Geometria dos pórticos analisados

Tabela 4.1 – Níveis de carregamentos considerados

Nível de Carregamento	H (kN)	P (kN)	W (kN/m)	H/G
N1	50	0	45	0,222
N2	180	300	45	0,218
N3	540	900	45	0,267

Na tabela 4.2 são apresentadas as características geométricas referentes aos exemplos analisados:

Analisando-se os deslocamentos laterais, pode-se aferir a rigidez lateral equivalente de cada pórtico analisado:

$$RL_i = \frac{H_i}{\delta_i} \tag{4.1}$$

na qual  $H_i$  é o carregamento lateral no estágio  $i$ ;  $RL_i$  é a rigidez lateral no estágio  $i$  de carregamento e  $\delta_i$  é o deslocamento lateral correspondente.

Adotando-se os índices ‘NL’ para os resultados da análise não-linear e ‘EL’ para aqueles correspondentes à análise elástico-linear, tem-se:

$$RL_{iNL} \cdot \delta_{iNL} = RL_{iEL} \cdot \delta_{iEL} \tag{4.2}$$

Logo, pode-se definir  $EI_{EQ}$  como a razão entre a rigidez lateral obtida da análise não-linear e aquela obtida da análise elástico-linear:

$$EI_{EQ} = \frac{RL_{iNL}}{RL_{iEL}} = \frac{\delta_{iEL}}{\delta_{iNL}} \quad (4.3)$$

Tabela 4.2 – Geometria dos pórticos com 1 lance de pilares

	Nível 1 de Carregamento			Nível 2 de Carregamento			Nível 3 de Carregamento		
	PN1A	PN1B	PN1C	PN2A	PN2B	PN2C	PN3A	PN3B	PN3C
<b>PILAR</b>									
b(cm)	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	40,00	40,00	40,00
h(cm)	52,00	34,00	24,00	65,50	45,00	37,00	95,00	67,00	55,00
d'	5,20	3,40	2,40	6,55	4,50	3,70	9,50	6,70	5,50
$\omega$	0,12	0,36	0,74	0,12	0,38	0,75	0,12	0,36	0,75
As	7,69	15,08	21,88	9,68	21,06	34,18	18,72	39,61	67,74
$\rho\%$	0,49	1,48	3,04	0,49	1,56	3,08	0,49	1,48	3,08
<b>VIGA POS</b>									
b(cm)	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	40,00	40,00
h(cm)	67,00	49,00	33,00	95,00	65,00	50,00	125,00	85,00	70,00
d'	5,36	3,92	2,64	7,60	5,20	4,00	10,00	6,80	5,60
As inf	5,36	8,00	11,94	5,94	9,00	12,00	13,00	19,50	24,00
$\rho\%$	0,29	0,59	1,31	0,23	0,50	0,87	0,38	0,62	0,93
<b>VIGA NEG</b>									
b(cm)	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	30,00	40,00	40,00
h(cm)	67,00	49,00	33,00	95,00	65,00	50,00	125,00	85,00	70,00
d'	5,36	3,92	2,64	7,60	5,20	4,00	10,00	6,80	5,60
As sup	4,70	6,10	10,47	7,81	13,90	19,50	16,00	24,90	32,90
$\rho\%$	0,25	0,45	1,15	0,30	0,77	1,41	0,46	0,80	1,28

O carregamento nas fases definidas como: Serviço, Estado limite último e Ruptura foi dividido pelo valor do carregamento de último da estrutura ( $P_U$ ). Desse modo, obteve-se um gráfico adimensional relacionando rigidez lateral equivalente e carregamento, traçando-se assim os gráficos das figuras 4.3a, 4.3b e 4.3c.

A figura 4.3a apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo A, com taxas de armadura próximas à mínima. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 73% e 75% da rigidez linear, correspondente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 43% e 58% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 19% e 28% da rigidez elástica.

A figura 4.3b apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo B, com taxas de armadura médias. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 54% e 64% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 44% e 54% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 34% e 42% da rigidez elástica. O pórtico PN3B possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo B e o PN1B a menor rigidez. Isso porque a presença de tensões de compressão nesse caso é benéfica para o comportamento da estrutura, pois tende a suprimir a fissuração pelo fato da força normal ser bem inferior ao valor correspondente à máxima compressão centrada que pode ser aplicada no pilar.

A figura 4.3c apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo C, com altas taxas de armadura. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 67% e 81% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 60% e 72% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 50% e 63% da rigidez elástica. Em virtude da presença de tensões de compressão, que tendem a

suprimir a fissuração, o pórtico PN3C possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo C e o PN1C a menor rigidez.

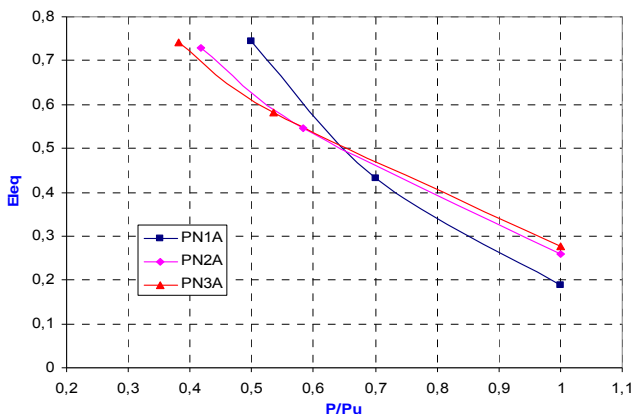


Figura 4.3a – Rigidez lateral x carregamento para pórticos tipo A

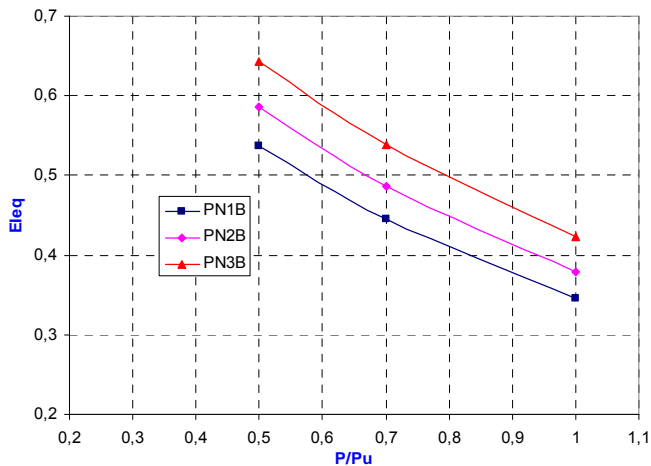


Figura 4.3b – Rigidez lateral x carregamento para pórticos tipo B

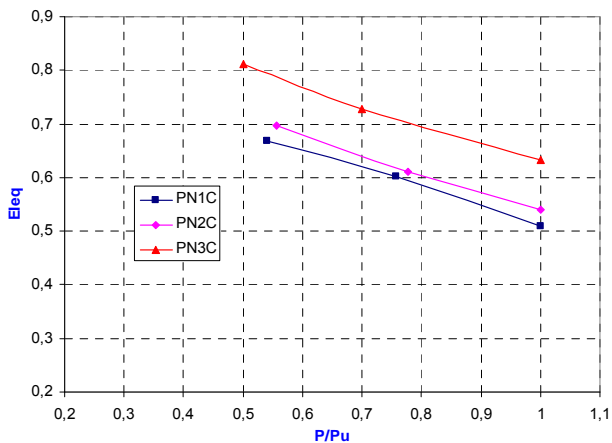


Figura 4.3c – Rigidez lateral x carregamento para pórticos tipo C

## 4.2 Pórticos com 6 lances de pilares

Prosseguiu-se com o estudo analisando-se pórticos com 6 lances de pilares, submetidos a diferentes taxas de armadura e diferentes níveis de carregamento. A metodologia empregada é basicamente a mesma dos exemplos anteriores, apresentando diferenças apenas no procedimento para dimensionamento dos pilares. De fato, nos exemplos de pórticos com 1 lance, os pilares foram dimensionados como peças submetidas à flexão composta sem levar em consideração os efeitos devidos às excentricidades acidentais e esbeltez. Nos exemplos com 6 lances, os pilares foram dimensionados segundo a NBR 6118, considerando-se as excentricidades acidentais ( $e_a$ ) e de segunda ordem ( $e_2$ ), além da excentricidade inicial ( $e_i$ ) devida ao carregamento. Nestes exemplos, considerou-se uma  $e_a$  mínima de 1 cm e uma  $e_a$  máxima de 2 cm, conforme procedimento usualmente adotado pelos escritórios de projeto. De forma sistemática, adotou-se a seguinte metodologia:

- 1) Foram analisados pórticos planos cujas características dos materiais empregados são concreto com resistência  $f_{ck}=20$  MPa e aço CA-50A ( $f_{ys}=500$  MPa). Os parâmetros que caracterizam os materiais para a análise não-linear são:  $E_{ctg} = 32000$  MPa,  $f'_c = 23,5$  MPa,  $\varepsilon_0 = 0,002$ ,  $f_t = 2,20$  MPa,  $\alpha = 0,70$ ,  $\varepsilon_m = 20 \varepsilon_t$ ,  $E_s = 210000$  MPa,  $E'_s = 1000$  MPa,  $\varepsilon_{s\text{ máx}} = 0,010$ .
- 2) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
- 3) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
- 4) As vigas foram dimensionadas segundo a NBR 6118 para momentos positivo e negativo, considerando-se a envoltória dos esforços devidos ao carregamento vertical e horizontal. Considerou-se a atuação dos esforços horizontais nas duas direções do plano.
- 5) Os pilares foram dimensionados segundo a NBR 6118, considerando-se as excentricidades  $e_a$ ,  $e_2$  e  $e_i$ .
- 6) Os pórticos foram dimensionados para três taxas de armadura:
  - Tipo A: Taxas de armadura baixas, muito próximas da mínima permitida pela norma;
  - Tipo B: Taxas de armaduras médias, próximas da metade do máximo permitido pela norma;
  - Tipo C: Taxas de armadura altas, próximas ao máximo permitido pela norma;
- 7) Cada pórtico foi modelado com 108 elementos: cinco para cada pilar e oito para a viga, conforme figura 4.4. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da viga e do pilar foram discretizadas em 10 fatias de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).
- 8) Os carregamentos também foram distribuídos em três níveis N1, N2 e N3, onde 1 indica valores baixos para o carregamento, 2 valores médios e 3 valores altos, conforme tabela 4.3.

Foram analisados, inicialmente, nove pórticos com 6 lances, correspondentes aos três níveis de carregamento propostos, cada qual com três taxas de armadura diferentes. O detalhamento completo dos pórticos é apresentado por PINTO (2002).

Tabela 4.3 – Níveis de carregamento para pórticos com 6 lances

Nível de Carregamento	H (kN)	Hc (kN)	P (kN)	Pc (kN)	W (kN/m)	Wc (kN/m)	H/G
N 1	6	3	0	0	45	32	0.026
N 2	16	8	100	70	45	32	0.036
N 3	32	16	200	140	45	32	0.049

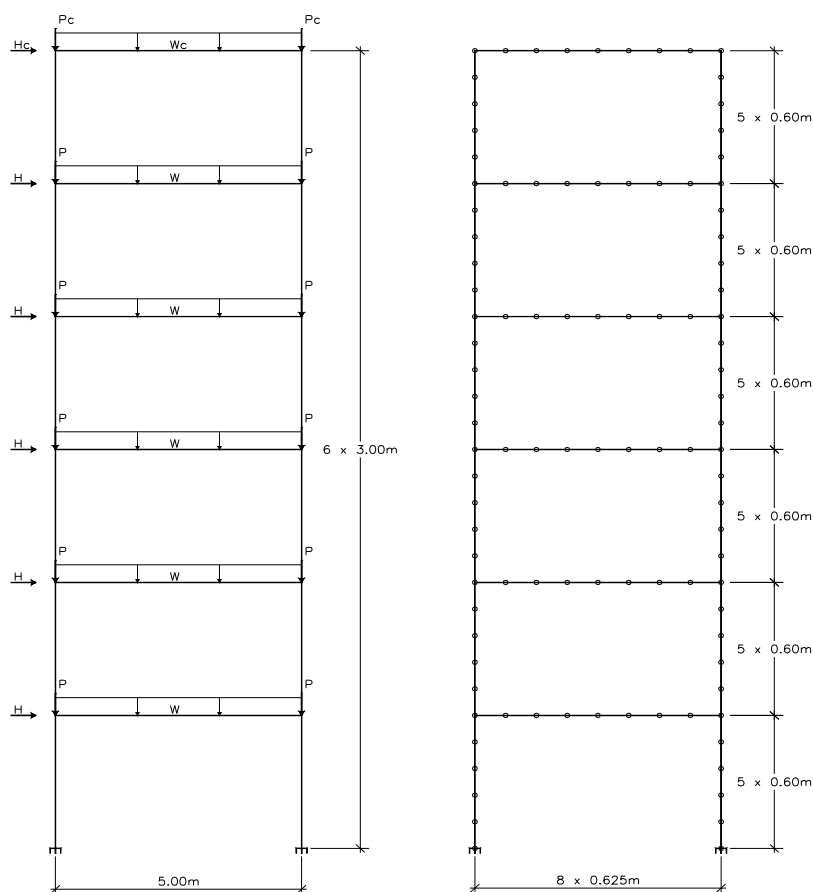


Figura 4.4 – Geometria dos pórticos com 6 lances

Com o objetivo de aferir a rigidez lateral equivalente de cada pórtico analisado, utilizou-se a equação 4.1, adotando-se no lugar de  $\delta_j$  o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais ( $\delta_G$ ) dado, conforme figura 4.5, por:

$$\delta_G = \frac{\sum G_j \delta_j}{G} \tag{4.4}$$

na qual  $G_j$  é o carregamento vertical no pavimento  $j$ ;  $\delta_j$  é o deslocamento lateral do pavimento  $j$ ,  $G$  é a resultante do carregamento vertical da estrutura e  $\delta_P$  é o deslocamento lateral do ponto de aplicação da resultante  $G$ .

Desse modo, pode-se definir uma rigidez lateral para o pórtico dada por:

$$RL_i = \frac{H_i}{\delta_{Gi}} \quad (4.5)$$

na qual  $H_i$  é o carregamento lateral no estágio  $i$ ;  $RL_i$  é a rigidez lateral no estágio  $i$  de carregamento e  $\delta_{Gi}$  é o deslocamento lateral correspondente do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais.

Adotando-se os índices  $NL$  para os resultados da análise não-linear e  $EL$  para aqueles correspondentes à análise elástico-linear, vem:

$$RL_{iNL} \cdot \delta_{GiNL} = RL_{iEL} \cdot \delta_{GiEL} \quad (4.6)$$

Logo, pode-se definir  $EI_{EQ}$  como a razão entre a rigidez lateral obtida da análise não-linear e aquela obtida da análise elástico-linear:

$$EI_{EQ} = \frac{RL_{iNL}}{RL_{iEL}} = \frac{\delta_{GiEL}}{\delta_{GiNL}} \quad (4.7)$$

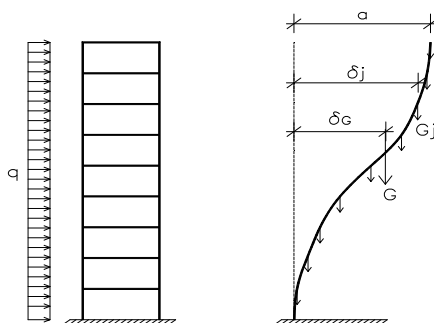


Figura 4.5 – Definição de  $\delta_p$

O carregamento nas fases definidas como: Serviço, Estado limite último e Ruptura foi dividido pelo valor do carregamento de último da estrutura ( $P_U$ ). Desse modo, obteve-se um gráfico adimensional relacionando rigidez lateral equivalente e carregamento, traçando-se assim os gráficos das figuras 4.6a, 4.6b e 4.6c.

A figura 4.8a apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo A, com taxas de armadura próximas à mínima. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 101% e 89% da rigidez linear, correspondente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 86% e 65% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma grande redução, variando entre 25% e 28% da rigidez elástica.

A figura 4.6b apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo B, com taxas de armadura médias. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 68% e 78% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 52% e 58% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 32% e 38% da rigidez elástica. O pórtico P6N3B possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo B e o P6N1B a menor rigidez, em virtude dos efeitos benéficos da força de compressão nos pilares.

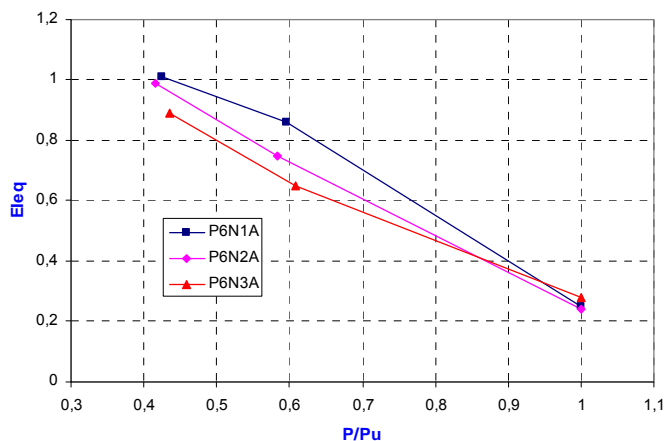


Figura 4.6a – Rigidez lateral x carregamento para pórticos com 6 lances tipo A

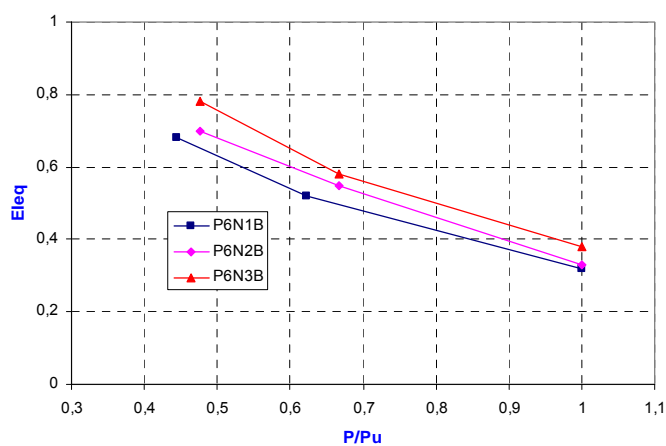


Figura 4.6b – Rigidez lateral x carregamento para pórticos com 6 lances tipo B

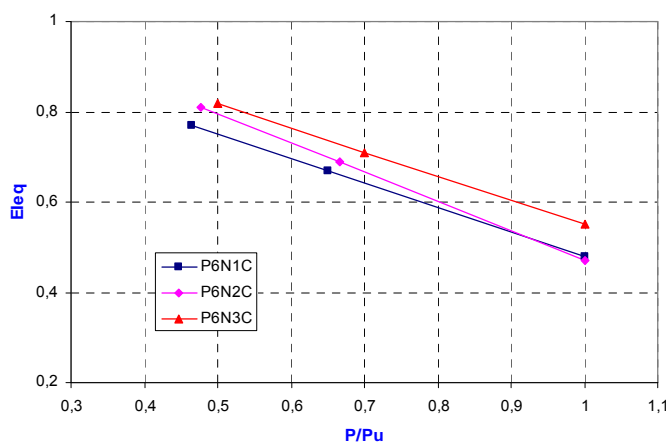


Figura 4.6c – Rigidez lateral x carregamento para pórticos com 6 lances tipo C

A figura 4.6c apresenta os resultados referentes aos pórticos tipo C, com altas taxas de armadura. Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 77% e 82% da rigidez linear. Para o carregamento último teórico a rigidez varia entre 67% e 71% da rigidez linear. No colapso, a rigidez varia entre 47% e 55% da rigidez elástica. Em virtude da presença de tensões de compressão, que tendem a suprimir a fissuração, o pórtico P6N3C possui a maior rigidez entre os três pórticos tipo C e o P6N1C a menor rigidez, de modo semelhante ao que acontece nos pórticos tipo B.

Observa-se, nos exemplos paramétricos analisados, que o comportamento dos pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares é, qualitativamente, bastante semelhante para níveis de carregamento e taxas de armadura equivalentes.

A tabela 4.4 apresenta a rigidez lateral equivalente, referente aos exemplos paramétricos analisados, nas diversas condições de carregamento e taxa de armadura. A análise destes resultados é particularmente útil para a determinação dos valores de *Elef* da estrutura correspondentes a um único coeficiente de redução na inércia das vigas e dos pilares, como proposto por FRANCO & VASCONCELOS (1991). De fato, a idéia de se adotar um coeficiente único de redução de inércia para a estrutura como um todo facilita a implementação do processo simplificado, uma vez que dispensa realização de um modelo estrutural, com as inércias reduzidas, exclusivamente para avaliação dos efeitos não-lineares da estrutura. Desse modo, pode-se analisar a estrutura e sua estabilidade global com um único modelo estrutural, tornando mais ágil o processo de análise estrutural.

Tabela 4.4 – Rigidez lateral equivalente para os exemplos paramétricos de pórticos

Pórtico	Eleg		
	Serviço	E.L.U.	Colapso
PN1A	0,74	0,43	0,19
PN2A	0,73	0,55	0,26
PN3A	0,74	0,58	0,28
PN1B	0,54	0,45	0,34
PN2B	0,57	0,49	0,38
PN3B	0,64	0,54	0,42
PN1C	0,66	0,60	0,51
PN2C	0,70	0,61	0,54
PN3C	0,81	0,73	0,63
<b>MEDIA</b>	<b>0,68</b>	<b>0,55</b>	<b>0,39</b>
P6N1A	1,01	0,86	0,25
P6N2A	0,99	0,75	0,24
P6N3A	0,89	0,65	0,28
P6N1B	0,68	0,52	0,32
P6N2B	0,70	0,55	0,33
P6N3B	0,78	0,58	0,38
P6N1C	0,77	0,67	0,48
P6N2C	0,81	0,69	0,47
P6N3C	0,82	0,71	0,55
<b>MEDIA</b>	<b>0,83</b>	<b>0,66</b>	<b>0,37</b>

Em termos quantitativos os pórticos com 6 lances apresentam resultados mais favoráveis que aqueles referentes aos pórticos com 1 lance de pilares. Isso decorre do fato das estruturas com 6 lances serem mais hiperestáticas que aquelas com 1 lance de pilares, beneficiando-se de uma maior redistribuição dos esforços na estrutura. Além disso, para que se pudesse obter momentos fletores relevantes nos pilares dos pórticos com 1 lance de pilares, o carregamento lateral aplicado é bem maior que aqueles normalmente aplicados ao nível dos pavimentos nos edifícios usuais. Desse modo, quantitativamente serão abandonados os resultados referentes aos pórticos com 1 lance, concentrando-se naqueles referentes aos pórticos com 6 lances de pilares.

Através da tabela 4.5, pode-se observar de modo mais detalhado os valores de  $EI_{ef}$  correspondentes aos diversos níveis de carregamento e armadura para os pórticos com 6 lances.

Tabela 4.5 – Rigidez lateral equivalente para pórticos com 6 lances de pilares

Pórtico	Taxa de As (%)			Eleq		
	Pilar	Viga		Serviço	E.L.U.	Colapso
		sup	inf			
P6N1A	0,53	0,16	0,22	1,01	0,86	0,25
P6N2A	0,51	0,23	0,15	0,99	0,75	0,24
P6N3A	0,63	0,28	0,17	0,89	0,65	0,28
<i>MEDIA</i>	<i>0,56</i>	<i>0,22</i>	<i>0,18</i>	<i>0,96</i>	<i>0,75</i>	<i>0,26</i>
P6N1B	1,40	0,57	0,57	0,68	0,52	0,32
P6N2B	1,67	0,77	0,39	0,70	0,55	0,33
P6N3B	1,50	0,52	0,26	0,78	0,58	0,38
<i>MEDIA</i>	<i>1,52</i>	<i>0,62</i>	<i>0,41</i>	<i>0,72</i>	<i>0,55</i>	<i>0,34</i>
P6N1C	3,20	1,68	1,04	0,77	0,67	0,48
P6N2C	3,32	1,51	0,64	0,81	0,69	0,47
P6N3C	3,39	1,57	0,71	0,82	0,71	0,55
<i>MEDIA</i>	<i>3,30</i>	<i>1,59</i>	<i>0,80</i>	<i>0,80</i>	<i>0,69</i>	<i>0,50</i>

## 5 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS DE ESTRUTURAS USUAIS

Neste item serão analisados pórticos pertencentes a estruturas usuais, com níveis de carregamento e geometria mais próximas das que normalmente seriam utilizadas em projeto. As diferentes taxas de armadura serão obtidas com mudanças menos expressivas nas seções transversais dos elementos, de forma que não será abrangido um espectro amplo de taxas de armadura quanto no item anterior, mas que se aproxime dos valores normalmente adotados em projeto. Desse modo, pretende-se avaliar quais valores de redução de inércia devem ser esperados para estruturas usuais de edifícios.

Nesses exemplos, os pilares foram dimensionados segundo a NBR 6118, considerando-se as excentricidades acidentais ( $e_a$ ) e de segunda ordem ( $e_2$ ), além da excentricidade inicial ( $e_i$ ) devida ao carregamento. Considerou-se, ainda, uma  $e_a$  mínima de 2 cm e uma  $e_a$  máxima de  $h/30$ , conforme prescreve a NBR 6118. De forma sistemática, adotou-se a seguinte metodologia:

- 1) Foram analisados pórticos planos cujas características dos materiais empregados são concreto com resistência  $f_{ck} = 20$  MPa e aço CA-50A ( $f_{ys} = 500$  MPa). Os parâmetros que caracterizam os materiais para a análise não-linear são:  $E_{ct} = 32000$  MPa,  $f_c = 23,5$  MPa,  $\epsilon_0 = 0,002$ ,  $f_t = 2,20$  MPa,  $\alpha = 0,70$ ,  $\epsilon_m = 20 \epsilon_t$ ,  $E_s = 210000$  MPa,  $E'_s = 1000$  MPa,  $\epsilon_{s \text{ máx}} = 0,010$ .
- 2) Os carregamentos horizontal e vertical foram aplicados simultaneamente. O valor último teórico para o carregamento foi assumido quando um único fator igual a 1,4 é aplicado sobre todo o carregamento.
- 3) As armaduras dos pórticos foram determinadas para os esforços obtidos segundo uma análise elástico-linear usual.
- 4) As vigas foram dimensionadas segundo a NBR 6118 para momentos positivo e negativo, considerando-se a envoltória dos esforços devidos ao carregamento vertical e horizontal. Considerou-se a atuação dos esforços horizontais nas duas direções do plano.

- 5) Os pilares foram dimensionados segundo a NBR 6118, considerando-se as excentricidades  $e_a$ ,  $e_2$  e  $e_i$ .
- 6) As dimensões das vigas foram determinadas considerando-se a altura das vigas de cerca de 1/10 do vão, variando-se a largura para se obter vigas com maiores e menores taxas de armadura;
- 7) As dimensões dos pilares foram determinadas de modo a se ter seção quadrada com taxas de armadura próximas à mínima, à média e à máxima de norma;
- 8) As taxas de armadura A, B e C ficam definidas do seguinte modo:
  - Tipo A: Pilares com taxas de armaduras muito próximas da mínima permitida pela norma e vigas com as taxas correspondentes à largura de 30 cm e altura de 50 cm;
  - Tipo B: Pilares com taxas de armaduras médias e vigas com as taxas correspondentes à largura de 20 cm e altura de 50 cm;
  - Tipo C: Pilares com taxas de armaduras próximas da máxima permitida pela norma e vigas com as taxas correspondentes à largura de 15 cm e altura de 50 cm;
- 9) Cada pórtico foi modelado em elementos finitos. Para cada elemento foi estabelecida a geometria e as armaduras longitudinais e transversais. As seções transversais da viga e do pilar foram discretizadas em 10 fatias de concreto e duas camadas de aço (armaduras positiva e negativa).
- 10) O carregamento aplicado corresponde ao previamente determinado para o edifício, estabelecendo-se a parcela referente ao pórtico analisado, sem a consideração de níveis diferentes de carregamento.

Empregando-se essa metodologia não são obtidas armaduras de vigas tão próximas à mínima de 0,15% visto que, para conseguir tais taxas, são necessárias vigas com dimensões muito maiores que as usuais. Portanto, em função da metodologia empregada, os exemplos analisados neste item não apresentam grandes variações nas seções transversais e nas taxas de armaduras das vigas, como ocorre nos exemplos paramétricos. O detalhamento completo dos pórticos analisados é apresentado por PINTO (2002).

### 5.1 Edifício com 6 pavimentos

Foram analisados três pórticos com 6 lances de pilares (figura 5.1), correspondentes ao nível de carregamento proposto com três taxas de armadura diferentes.

Estudou-se, então, a rigidez lateral equivalente da estrutura comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear e o obtido da análise não-linear. O carregamento nas fases denominadas como: Serviço, Estado limite último e Ruptura foi dividido pelo carregamento de último da estrutura ( $P_U$ ). Assim, obteve-se o gráfico adimensional da figura 5.2, que relaciona a rigidez lateral com o carregamento da estrutura.

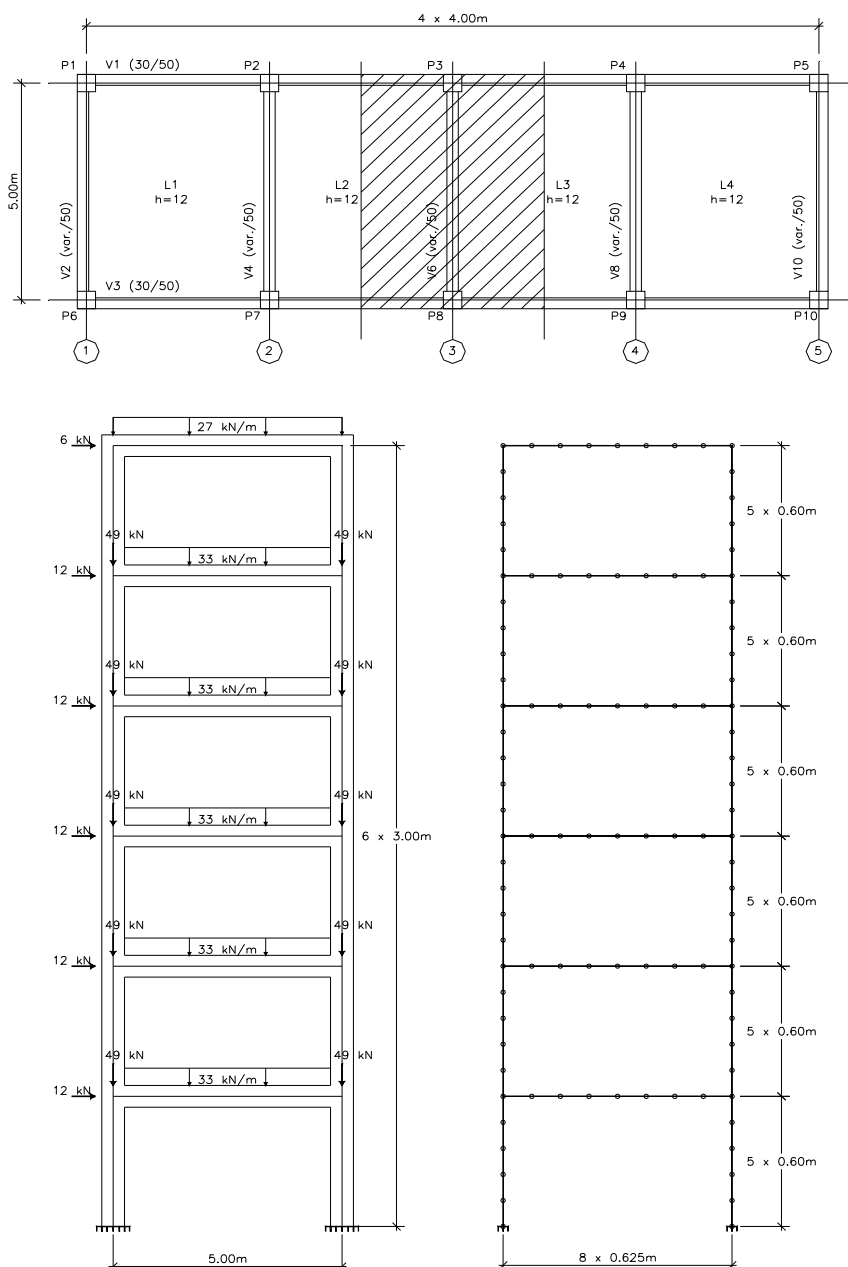


Figura 5.1 – Geometria do edifício de 6 pavimentos

Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 90% e 72% da rigidez linear, referente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 78% e 57% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 60% e 25% da rigidez elástica.

Observa-se que o exemplo mais rígido é o pórtico P6C, seguido pelos pórticos P6B e P6A, respectivamente. Este resultado indica que, para pórticos com seções transversais semelhantes, aqueles com maiores taxas de armadura são mais rígidos em relação àqueles com menores taxas de armadura. Isso é razoável, pois as maiores taxas de armadura contribuem para a redução da fissuração, que influencia de forma significativa a rigidez das estruturas de concreto armado.

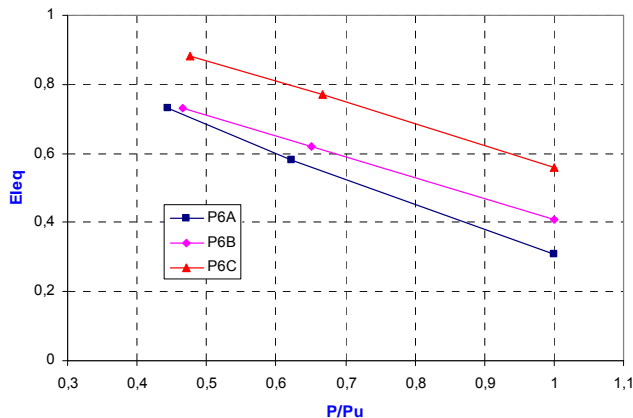


Figura 5.2 – Rigidez lateral x carregamento edifício de 6 pavimentos

**5.2 Edifício com 8 pavimentos**

Dando continuidade ao estudo de estruturas mais próximas daquelas usualmente projetadas, analisou-se um edifício com 8 pavimentos apresentado por CAUVIN (1979) e também analisado por outros autores como CILONI (1993) e SILVA (1996). As dimensões dos elementos foram determinadas de forma que não fossem obtidas seções muito maiores que as usualmente empregadas em projeto, do mesmo modo que nos pórticos P6A, P6B e P6C.

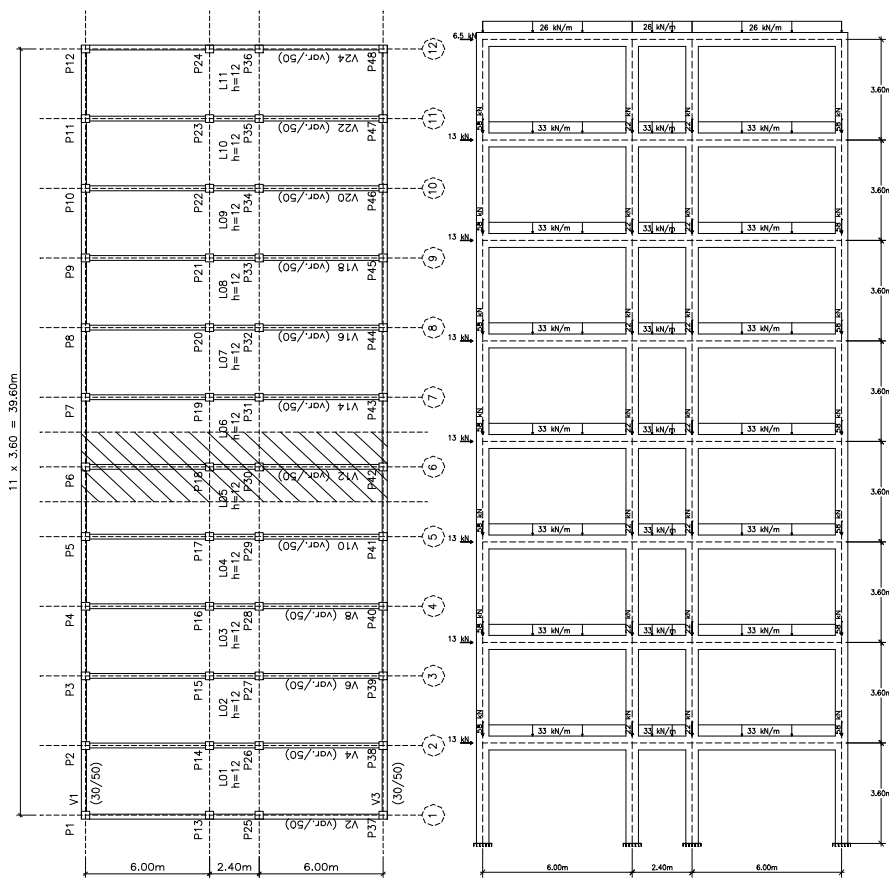


Figura 5.3 – Geometria do edifício de 8 pavimentos e do pórtico analisado

Foram analisados três pórticos com 8 lances de pilares (figura 5.3), correspondentes ao nível de carregamento apresentado com três taxas de armadura diferentes.

Estudou-se, então, a rigidez lateral equivalente da estrutura comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear e o obtido da análise não-linear.

Na figura 5.4 apresenta-se o gráfico adimensional que relaciona rigidez lateral e carregamento referente aos pórticos P8A, P8B e P8C. Este foi obtido comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear, com o obtido da análise não-linear. Do mesmo modo que para os pórticos de 6 pavimentos, o carregamento nas fases de serviço, estado limite último e ruptura foi dividido pelo carregamento de último da estrutura ( $P_U$ ).

Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 84% e 67% da rigidez linear, referente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 72% e 54% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 53% e 24% da rigidez elástica.

Observa-se que o exemplo mais rígido é o pórtico P8C, seguido pelos pórticos P8B e P8A, respectivamente. Este resultado confirma as indicações obtidas nos exemplos de seis pavimentos, onde se observa que os pórticos com seções transversais semelhantes têm sua rigidez diminuída na ordem inversa da taxa de armadura, ou seja, aqueles com maiores taxas de armadura são mais rígidos em relação àqueles com menores taxas de armadura.

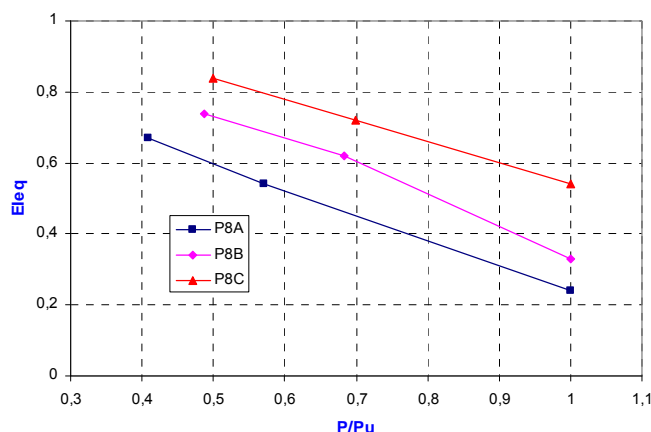


Figura 5.4 – Rigidez lateral x carregamento para pórticos de 8 pavimentos

### 5.3 Edifício com 13 pavimentos

Considere-se o edifício de 13 pavimentos apresentado por FRANÇA (1985). As dimensões e o carregamento foram redefinidos de forma a se poder adequar o exemplo à metodologia empregada neste trabalho. De modo análogo aos exemplos

de 8 pavimentos, as dimensões dos elementos foram determinadas de forma que não fossem obtidas seções muito maiores que as usualmente empregadas em projeto.

Foram analisados três pórticos com 13 pavimentos (figura 5.5), correspondentes ao nível de carregamento apresentado com três taxas de armadura diferentes.

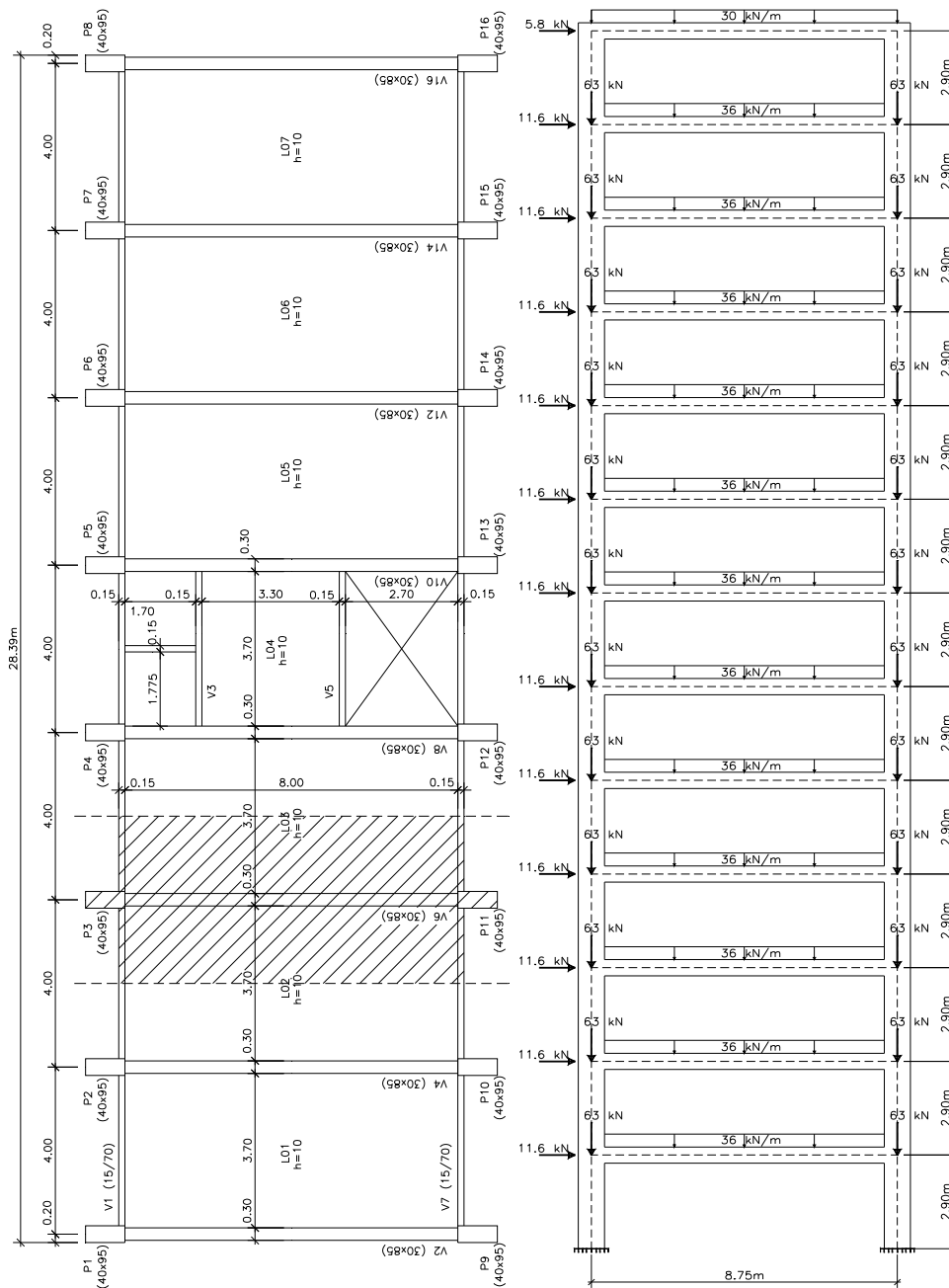


Figura 5.5 – Geometria do edifício 13 pavimentos e do pórtico analisado

Na figura 5.6 apresenta-se o gráfico adimensional que relaciona rigidez lateral e carregamento referente aos pórticos P13A, P13B e P13C, obtido comparando-se o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais, obtido segundo a análise elástico-linear, e aquele obtido da análise não-linear. Como

nos exemplos anteriores, o carregamento nas fases de serviço, estado limite último e ruptura foi dividido pelo carregamento de último da estrutura ( $P_U$ ).

Para o carregamento de serviço observa-se uma rigidez variando entre 64% e 51% da rigidez linear, referente à uma análise elástico-linear na qual os elementos possuem a seção transversal íntegra. Para o carregamento último teórico (multiplicado por 1,40) a rigidez varia entre 60% e 40% da rigidez linear. No colapso, a rigidez apresenta uma redução drástica, variando entre 33% e 15% da rigidez elástica.

Observa-se que o exemplo mais rígido é o pórtico P13C, seguido pelos pórticos P13B e P13A, respectivamente. Este resultado está em conformidade com aqueles obtidos nos exemplos anteriores, de seis e de oito pavimentos, confirmando que os pórticos com seções transversais semelhantes, submetidos ao mesmo carregamento, têm sua rigidez diminuída na ordem inversa da taxa de armadura dos seus elementos.

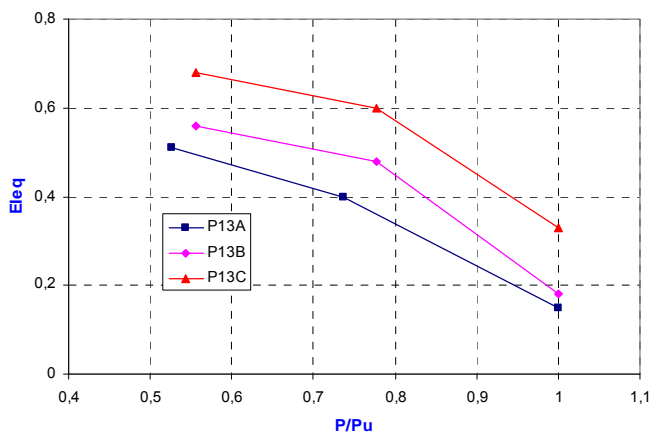


Figura 5.6 – Rigidez lateral x carregamento para pórticos de 13 pavimentos

Os resultados de  $E_{eq}$  obtidos para os exemplos analisados são apresentados na tabela 5.1:

Tabela 5.1 – Rigidez lateral equivalente para pórticos com dimensões usuais

Pórtico	E <sub>eq</sub>		
	Serviço	E.L.U.	Colapso
P6A	0,73	0,58	0,31
P6B	0,73	0,62	0,41
P6C	0,88	0,77	0,56
P8A	0,67	0,54	0,24
P8B	0,74	0,62	0,33
P8C	0,84	0,72	0,54
P13A	0,51	0,40	0,15
P13B	0,56	0,48	0,18
P13C	0,68	0,60	0,33
MEDIA	0,70	0,59	0,34

Pode-se observar, pelos resultados obtidos, que no caso de pórticos com seções transversais semelhantes, submetidos ao mesmo carregamento, a rigidez lateral é proporcional à taxa de armadura utilizada no detalhamento.

Na tabela 5.2, são apresentados modo mais detalhado os valores de  $EI_{ef}$  correspondentes aos diversos níveis de carregamento e armadura para os pórticos analisados neste item:

Tabela 5.2 – Rigidez lateral equivalente para pórticos pertencentes a estruturas usuais

Pórtico	Taxa de As (%)			Eleq		
	Pilar	Viga		Serviço	E.L.U.	Colapso
		sup	inf			
P6A	0,75	0,28	0,17	0,73	0,58	0,31
P8A	0,48	0,71	0,42	0,67	0,54	0,24
P13A	0,50	0,57	0,33	0,51	0,40	0,15
MEDIA	0,58	0,52	0,31	0,64	0,51	0,23
P6B	1,54	1,03	0,53	0,73	0,62	0,41
P8B	1,46	1,06	0,63	0,74	0,62	0,33
P13B	1,68	0,98	0,49	0,56	0,48	0,18
MEDIA	1,56	1,02	0,55	0,68	0,57	0,31
P6C	3,33	1,76	0,85	0,88	0,77	0,56
P8C	2,89	1,45	1,16	0,84	0,72	0,54
P13C	3,02	1,60	0,83	0,68	0,60	0,33
MEDIA	3,08	1,60	0,95	0,80	0,70	0,48

## 6 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos ao longo do trabalho indicam que a rigidez lateral dos pórticos planos está intimamente ligada às taxas de armaduras empregadas no detalhamento e à magnitude do carregamento a que estão submetidos. De fato, observa-se que os pórticos com taxas de armadura semelhantes apresentam comportamentos muito parecidos, sendo a rigidez lateral determinada conforme sejam maiores ou menores os efeitos benéficos da compressão nos pilares proveniente do carregamento aplicado.

Para os exemplos paramétricos, considerando-se a média dos valores obtidos para os pórticos com 1 lance e com 6 lances de pilares, conforme a tabela 4.4, obtém-se:

### a) Pórticos com 1 lance de pilares

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,68 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,55 E_c I_g$  para as vigas e pilares.  $(EI_{ef})_d / (EI_{ef})_k = 0,55 / 0,68 = 0,81$ .

### b) Pórticos com 6 lances de pilares

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,83 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,66 E_c I_g$  para as vigas e pilares.  $(EI_{ef})_d / (EI_{ef})_k = 0,66 / 0,83 = 0,80$ .

Ainda para os exemplos paramétricos, os valores obtidos para os pórticos com 6 lances de pilares, conforme as diferentes taxas de armadura, indicam (tabela 4.5):

### a) Pórticos com 6 lances de pilares tipo A

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,96 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,75 E_c I_g$  para as vigas e pilares.

### b) Pórticos com 6 lances de pilares tipo B

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,72 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,55 E_c I_g$  para as vigas e pilares;

## c) Pórticos com 6 lances de pilares tipo C

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,80 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,69 E_c I_g$  para as vigas e pilares;

Considerando-se a média dos valores de rigidez lateral equivalente, para todos os pórticos analisados neste capítulo, obtém-se (tabela 5.1):

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,70 E_c I_g$  para as vigas e pilares;

No estado limite último  $EI_{ef} = 0,59 E_c I_g$  para as vigas e pilares;

Para os exemplos usuais os valores obtidos para os pórticos analisados, segundo as diferentes taxas de armadura, indicam (tabela 5.2):

## a) Pórticos tipo A

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,64 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,51 E_c I_g$  para as vigas e pilares;

## b) Pórticos tipo B

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,68 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,57 E_c I_g$  para as vigas e pilares.

## c) Pórticos tipo C

Em serviço um  $EI_{ef} = 0,80 E_c I_g$  para as vigas e pilares. No estado limite último  $EI_{ef} = 0,70 E_c I_g$  para as vigas e pilares.

## 7 REFERÊNCIAS

BECK, H.; KÖNIG, G. (1966). Restraining forces in the analysis of tall Buildings. In: SYMPOSIUM ON TALL BUILDINGS. **Proceedings...** Pergamon Press, Oxford, 1966.

CARMO, R. M. S. (1995). **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

CAUVIN, A. (1979). Non linear analysis of a multistorey sway frame according to CEB model code. **CEB Bulletin D'Information**, n.134, p. 83-107.

CILONI, A. D. (1993). **Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado**. São Carlos. Tese (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1977). Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton. **CEB Bulletin D'Information**, n. 124/125.

FRANÇA, R. L. S. (1985). Exemplo de cálculo do esforço de segunda ordem em um edifício de concreto armado. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. **Anais...**

FRANCO, M. (1985a). O parâmetro de instabilidade dos edifícios de altos. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**, Lisboa, n. 23, p. 69-72.

FRANCO, M; VASCONCELOS, A. C. (1991). Pratical assessment of second order effects in tall buildings. In: COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro. **Proceedings...** p. 307-324.

FRANCO, M. (1995). Global and local instability of concret tall buildings. In: SYMPOSIUM ON SPACE STRUCTURES, Milan, May. **Proceedings...**

GRAZIANO, F. (1998). Estudo comparativo entre os coeficientes  $\alpha$  e  $\delta_z$ . **Revista Abece**, 1998.

MACGREGOR, J. G. (1993). Design of slender concrete columns: revisited. **ACI Structural Journal**, v. 90, n. 3, p. 302-309, May-Jun.

PIMENTA, P. M. (1996). **Análise não-linear de pórticos planos : teoria exata vs. teoria de segunda ordem**. São Paulo, EPUSP. (Boletim técnico do departamento de engenharia de estruturas e Fundações, 9618).

PINTO, R. S. (1997). **Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

PINTO, R. S. (2002). **Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. (1994). An improved nonlinear analisys of reinforced concrete frames. **Computers and Structures**, v. 53, n. 3, p. 625-636.

SHURAIM, A. B. (1997). Lateral Stifness of plane reinforced concrete frames. **Computers and Structures**, v. 64, n. 1/4, p. 771-782.

SILVA, R. M. (1996). **Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado : modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

VASCONCELOS, A. C. (1987). Como especificar a segurança quando há efeitos de segunda ordem a considerar. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Seminário Sobre os Aspectos Conflitantes em Normas Brasileiras, São Paulo, jul. **Anais...**

WILBY, C. B.; PANDIT, T. (1967). Inelastic behavior of reinforced concrete sigle-bay portal frames. **Civil Engineering Pub. Works Rev.**, n. 62, p. 331-336.

# OTIMIZAÇÃO DE COMPONENTES DE CONCRETO PRÉ-MOLDADO PROTENDIDOS MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS

Vanessa Cristina de Castilho<sup>1</sup>; Mounir Khalil El Debs<sup>2</sup>; Maria do Carmo Nicoletti<sup>3</sup>

## Resumo

*Este trabalho trata da otimização de painéis alveolares e vigotas protendidas utilizando Algoritmos Genéticos (AGs). A proposta de tal algoritmo foi inspirada no princípio da seleção natural de indivíduos, onde o mais 'apto' tende a permanecer na população e se reproduzir, passando seu código genético para a próxima geração. Em muitas situações esse método pode ser considerado uma abordagem alternativa aos métodos tradicionais de otimização. O principal objetivo do trabalho é investigar o uso de AG como uma técnica para a minimização da função custo da aplicação de painéis alveolares e de vigotas protendidas. Na abordagem do problema estão incluídas as verificações dos elementos nas etapas transitórias referentes à produção, transporte e montagem. A função custo é avaliada considerando valores da realidade brasileira. O trabalho de pesquisa compara os resultados obtidos utilizando AGs com aqueles obtidos utilizando o método de otimização convencional conhecido como método do Lagrangiano Aumentado. Foram propostas e analisadas três famílias do AG simples, buscando identificar, dentre seus elementos, quais variantes mais adequados na busca da solução dos problemas.*

*Palavras-chave: painel alveolar, vigota protendida, lajes, algoritmos genéticos, otimização estrutural, minimização de custos, método Lagrangiano Aumentado*

## 1 INTRODUÇÃO

Projetos com soluções otimizadas têm sempre atraído pesquisadores da área de Engenharia Estrutural. Poucos tópicos da análise estrutural têm chamado tanta atenção quanto o da otimização. Atualmente existem inúmeros estudos nesta área, quase sempre com o objetivo de desenvolver melhores métodos para representar de maneira eficiente o problema analisado e buscar sua rápida solução (ótima, quando possível).

Em geral, em um problema de otimização há a necessidade de identificar as variáveis envolvidas e seus limites de variação, bem como as constantes relevantes

---

<sup>1</sup> Professora da Faculdade de Engenharia Civil da Univ. Federal de Uberlândia, castilho@feciv.ufu.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, mkdebs@sc.usp.br

<sup>3</sup> Professora do Departamento de Computação da UFSCar, carmo@dc.ufscar.br

ao problema, de maneira a poder equacioná-las em relações matemáticas, com o objetivo de representar formalmente o problema e suas restrições para então buscar a sua solução. A solução do problema consiste, basicamente, em encontrar uma solução (a ótima) que identifica um ponto de máximo ou de mínimo de uma função objetivo, sujeita a algumas restrições.

Vários estudos e experimentos têm sido realizados na área de Engenharia Estrutural utilizando, principalmente, métodos convencionais de otimização (o método Lagrangiano, por exemplo). As pesquisas nesta área, no âmbito mundial, focalizam quase sempre, a minimização do custo das estruturas em geral.

No âmbito mundial, há vários estudos na área de otimização estrutural que utilizam tais métodos como, por exemplo, o trabalho de LOUNIS & CONH (1993) que minimizam o custo de produção e montagem de lajes e vigas de concreto protendido para pontes usando o método Lagrangiano e o trabalho de KOSKITO & ELLINGWOOD (1997), que usa o método de confiabilidade para resolver a minimização do custo de produção de um painel alveolar.

No Brasil a utilização dos métodos convencionais de otimização é bastante difundida na análise estrutural, focalizando principalmente a minimização de custos. Destacam-se, nesta área, vários trabalhos tal como o de SOARES (1997) que desenvolve uma formulação para a minimização do custo de uma seção transversal de uma viga e o de KRIPKA (1998) que investiga o uso de técnicas de programação matemática para reduzir e uniformizar os esforços em grelhas, em função do posicionamento dos apoios.

Apesar do relativo sucesso na utilização dos métodos convencionais de otimização na área de análise estrutural, tais métodos têm algumas limitações. Entre elas, conforme apontado em GOLDBERG (1989) e GEN & CHENG (1997): dificuldades na identificação de soluções ótimas globais, em geral; dificuldades quando o problema envolve variáveis contínuas e discretas; não são aplicáveis à otimização multiobjetivos; não são indicados para programação em paralelo; têm domínio de aplicação restrito; não podem ser aplicados a alguns problemas de otimização estrutural, onde as funções objetivo não são diferenciáveis. Nesses casos é preciso lançar mão de estratégias que não consideram derivadas ao longo do processo de otimização.

Devido principalmente a essas limitações, pesquisas nesta área têm se voltado para a identificação de métodos alternativos mais flexíveis, que possam alcançar os mesmos resultados obtidos pelos métodos convencionais. Os métodos heurísticos, como são denominados, utilizam estratégias mais simples e, geralmente, encontram uma boa solução para diversos problemas de otimização de um modo razoavelmente rápido e eficiente.

Os métodos heurísticos apresentam estratégias adicionais que buscam superar algumas limitações dos métodos convencionais. Dentre os métodos heurísticos mais utilizados estão: Redes Neurais Artificiais (RNA), *Simulated Annealing (SA)*, *Tabu Search (TS)*, *GRASP* e Computação Evolutiva incluindo Algoritmos Genéticos (AGs), *Scatter Search* e Programação Genética.

Dentre os inúmeros métodos existentes na literatura, o que se destaca pela eficiência, é aquele baseado em Algoritmo Genético. A proposta de tal algoritmo foi

inspirada no princípio da seleção natural de indivíduos, onde o mais 'apto' tende a sobreviver e se reproduzir, passando seu código genético para a próxima geração.

Vários trabalhos na área de otimização estrutural, principalmente os que envolvem estruturas de aço, vêm sendo desenvolvidos utilizando a técnica de AGs [JENKIS (1997)]. No caso do concreto, geralmente, os problemas de otimização são tratados via técnicas convencionais de programação matemática. Quando comparado ao problema do projeto ótimo de estruturas de aço, o problema do projeto ótimo de estruturas de concreto é mais complexo uma vez que envolve um número maior de variáveis. Quando do projeto ótimo de estruturas de aço, geralmente apenas um material (aço) é considerado e o custo da estrutura é proporcional a seu peso.

A otimização de estruturas de concreto pré-moldadas, bem como a de seus elementos, é de grande interesse principalmente devido à forma como tais elementos são produzidos. No caso do elemento pré-moldado, também fazem parte da descrição do problema as etapas transitórias correspondentes à execução, transporte, e montagem, que podem apresentar solicitações mais desfavoráveis que as de estruturas moldadas no local. Essas etapas, de acordo com EL DEBS (2000) podem ser definidas como: produção – execução de elementos pré-moldados; transporte – traslado da área de execução até o local de montagem e montagem – colocação dos elementos no local definitivo e efetuação das ligações.

Para representar o problema de minimização de custos de estruturas de concreto pré-moldado com vistas a obter uma solução mais robusta, os custos de todas essas etapas deverão fazer parte da representação do problema. Tendo em vista tanto a facilidade de implementação quanto alguns resultados promissores encontrados na literatura, o uso de AG no domínio da Engenharia Estrutural parece ser uma alternativa viável para a solução de problemas de otimização.

O principal objetivo deste trabalho foi investigar AGs como técnica de otimização no domínio de Engenharia Estrutural, mais especificamente, concreto pré-moldado, focalizando principalmente a facilidade de representação do problema, a adequabilidade para a busca de solução, as vantagens e desvantagens, as limitações e o impacto da escolha da representação de dados e dos parâmetros genéticos na solução do problema. O trabalho investiga o uso de AG na otimização da aplicação de elementos pré-moldados em lajes, focalizando dois elementos: painel alveolar e vigota protendida. Um objetivo subjacente ao objetivo principal do trabalho foi o de abordar os problemas via um método convencional – o método do Lagrangiano Aumentado [MARTÍNEZ (1997)]. Buscou-se com isso obter resultados que permitissem subsidiar uma análise empírica comparativa entre AGs e um método convencional de otimização.

## **2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROJETO E APLICAÇÃO DE ELEMENTOS PRÉ-MOLDADOS PROTENDIDOS EM LAJES**

### **2.1 Painel Alveolar**

Painéis alveolares são os elementos pré-moldados mais empregados no mundo, em especial na América do Norte e Europa Ocidental. A aplicação mais

comum desse tipo de elemento é em lajes, mas podem também ser empregado em sistemas de fechamentos. No caso de lajes podem ou não ser compostos de uma capa de concreto moldado no local, formando seção composta.

Geralmente os painéis alveolares são também chamados de laje vazada ou oca. Os vazamentos desses elementos podem assumir forma circular, oval, “pseudo” elipse, retangular, etc. Normalmente esses elementos são de concreto protendido e são projetados para funcionar simplesmente apoiados.

Painéis alveolares podem ser produzidos utilizando fôrmas fixas ou, mais comumente, usando uma extrusora ou fôrma deslizante, em uma pista de concretagem. Neste caso, os painéis são produzidos utilizando todo o comprimento da pista e, posteriormente, são serrados no comprimento desejado. Na análise estrutural das lajes executadas com painéis alveolares admite-se que o comportamento do elemento corresponda ao de laje armada em uma direção. A faixa de vãos em que esse tipo de elemento é empregado está entre 5m e 15m e a largura entre 1,00m a 1,20m, podendo chegar a 2,50m. As alturas variam de 15cm até 30cm, podendo excepcionalmente atingir 50cm.

Segundo EL DEBS (2000), o dimensionamento de painéis alveolares, feitos em pistas de protensão, apresenta as seguintes particularidades.

- a armadura dos painéis é constituída apenas de armadura ativa, na parte inferior e, muitas vezes, também na mesa superior;
- não existe armadura especial para resistir à força cortante e nem para solicitações na direção transversal, o que obriga a contar com a resistência à tração do concreto para resistir a essas solicitações;
- a colocação de armaduras adicionais é praticamente inviável devido ao processo de execução e a colocação de conectores metálicos é usada em situações particulares.

## 2.2 Vigotas Protendidas

Um sistema de laje comumente utilizado no Brasil com faixas de vãos relativamente pequenos é aquele conhecido por laje com vigotas pré-moldadas. As lajes formadas por vigotas pré-moldadas são constituídas por elementos pré-moldados (as nervuras), elementos de enchimento tais como blocos vazados ou de poliestireno expandido (EPS), que são colocados sobre os pré-moldados e o concreto moldado no local.

As nervuras utilizadas no Brasil são de seção T invertido, em concreto armado ou concreto protendido ou com uma armadura em forma de treliça que projeta para fora da seção (a chamada laje com armação treliçada). As vigotas de concreto protendido, objeto de estudo deste trabalho, são produzidas em grandes pistas de protensão em fôrmas fixas ou fôrmas deslizantes, de maneira semelhante aos painéis alveolares. Geralmente esse tipo de laje permite vãos da ordem de 10m.

O comportamento estrutural das lajes formadas por vigotas pré-moldadas corresponde aos das lajes armadas em uma direção (lajes unidirecionais), com seção resistente composta pela parte pré-moldada e pelo concreto moldado no local. O

manuseio desses elementos é feito sem o auxílio de equipamentos. O transporte é realizado por caminhões e a montagem realizada manualmente. Utiliza-se ainda cimbramento para receber as nervuras, que permanece até o concreto moldado no local endurecer. Recomenda-se utilizar uma armadura na capa de concreto disposta nas duas direções que é denominada armadura de distribuição.

No projeto estrutural desse tipo de laje, o cálculo das solicitações é normalmente feito considerando a laje como viga, simplesmente apoiada ou contínua, conforme o caso. A seção resistente das nervuras pode ser considerada como a da parte pré-moldada somada à parte moldada no local. Algumas diretrizes devem ser seguidas para o dimensionamento de lajes com vigotas protendidas. São elas:

- Verificação da vigota isolada – verificação do elemento após a transferência da força de protensão;
- Verificação da vigota na fase de construção – deve ser verificada a necessidade ou não de escoramento;
- Estado limite de fissuração – deve ser projetada de tal forma que previna os efeitos da fissuração;
- Estado limite de deformação – deve ser projetado levando em consideração os efeitos instantâneos e de retração e fluência;
- Estado limite último para solicitações tangenciais – verificação de resistência à força cortante de elementos sem armadura transversal e verificação do cisalhamento da interface entre os dois concretos;
- Estado limite último para solicitações normais – verificação da resistência para as solicitações normais.

### **3 ALGORITMOS GENÉTICOS**

#### **3.1 Preliminares**

Algoritmos Genéticos (AGs) são algoritmos de busca que fazem uso de conceitos da Genética e se baseiam nos mecanismos de evolução de populações de seres vivos. A proposta do AG foi inspirada no princípio da seleção natural e sobrevivência do mais apto estabelecido por Charles Darwin. De acordo com esse princípio, em uma população de indivíduos aqueles com 'boas' características genéticas apresentam maiores chances de sobrevivência e reprodução, enquanto indivíduos menos 'aptos' tendem a desaparecer durante o processo evolutivo (GOLDBERG (1989) e MICHALEWICZ (1996)). De maneira simplificada um AG típico pode ser definido com o pseudocódigo mostrado na Figura 1. Um AG é inicializado com uma população de soluções potenciais. Essas soluções são geradas randomicamente e representam pontos espalhados do espaço de busca que representam soluções potenciais do problema.

---

```

procedure AG
begin
  t ← 0
  inicializa(p(t))
  avalia(p(t))
  while (not termination-condition) do
    begin
      t ← t + 1
      seleciona p(t) de p(t-1)
      cruzamento(p(t))
      mutação(p(t))
      avalia(p(t))
    end
end

```

---

Figura 1 - Algoritmo genético típico

### 3.2 Função Aptidão

A aptidão é um valor que expressa quão boa é a solução codificada por um cromossomo. Os cromossomos que têm melhores valores de aptidão terão maiores chances de passarem à geração seguinte (via cruzamento ou elitismo). Cada cromossomo tem um valor de aptidão a ele associado que, para um problema de otimização estrutural com restrição é dado pela equação (1).

$$F(x) = f(x) + \text{pen}(x) \quad (1)$$

Não existe uma orientação geral quando da definição da função penalidade para problemas de otimização com restrição. Neste trabalho é adotada a função penalidade definida pela seguinte equação linear  $\text{pen}(x) = 1000 \sum_{i=1}^m c_i$ , onde:

m- número de restrições;  $c_i$ - valor associado à restrição  $g_i(x)$ , calculado como:

$$\begin{array}{ll} \text{se } g_i(x) \leq 0 & \text{se } g_i(x) \geq 0 \\ \text{então } c_i = 0 & \text{então } c_i = 0 \\ \text{senão } c_i = 1 & \text{senão } c_i = 1 \end{array}$$

### 3.3 Seleção

Inspirado no processo de seleção natural de seres vivos, o algoritmo genético via operador de seleção, escolhe os melhores cromossomos da população para determinar quais indivíduos podem participar da fase de reprodução e contribuir na formação da geração seguinte. O processo de reprodução se dá através de um operador genético denominado cruzamento. As formas de selecionar indivíduos da população para a reprodução, utilizadas neste trabalho, são: seleção *rank*, seleção MGA, seleção da roleta e seleção torneio.

- seleção *rank*: os cromossomos são classificados por valor de aptidão. Os melhores cromossomos possuem as melhores posições e, conseqüentemente, maiores chances de reprodução;
- seleção MGA: a seleção MGA foi proposta deste trabalho (CASTILHO (2003) e CASTILHO et al (2002b)) e é baseada na seleção *rank*. A estratégia

implementada pelo MGA se caracteriza por classificar a população usando o valor da função de avaliação de cada indivíduo. Se a taxa de cruzamento for de  $x\%$ , os  $x\%$  primeiros indivíduos serão selecionados para o cruzamento. Via de regra a seleção MGA implementa também um processo de restauração da população ao seu tamanho original de  $N_{pop}$  indivíduos;

- seleção da roleta: nesta abordagem a probabilidade de seleção é proporcional à aptidão do indivíduo. A analogia com uma roleta é lembrada porque pode se imaginar os indivíduos da população dispostos como uma roleta, onde a cada indivíduo é alocado uma seção da roleta que é proporcional à sua aptidão. A partir de  $p_i$ , calcula-se a probabilidade acumulada ( $q_i$ ) de cada cromossomo. Durante o processo de seleção a roleta é girada  $N_{pop}$  vezes, elegendo indivíduos para a reprodução. Indivíduos com maiores valores de probabilidade de seleção possuem maiores chances de serem escolhidos. Girar a roleta é equivalente a gerar aleatoriamente um número  $r \in [0,1]$ . Se  $r \leq q_i$  então o primeiro cromossomo é selecionado, caso contrário é selecionado o  $i$ -ésimo cromossomo  $s_i$  tal que  $q_{i-1} < r < q_i$ ;
- seleção por torneio: São escolhidos aleatoriamente (com probabilidades iguais)  $n$  cromossomos da população (geralmente 2) e dentre eles o cromossomo com melhor aptidão é selecionado. O processo se repete até que a nova população tenha  $N_{pop}$  elementos.

### 3.4 Operadores Genéticos

Os operadores genéticos aplicados à cromossomos da população têm o intuito de reproduzir novos indivíduos a partir de indivíduos já existentes; são necessários para que a população mantenha sua diversidade, ie, permitir que o algoritmo explore outras regiões do espaço de busca. Os principais operadores são cruzamento (*crossover*) e mutação.

#### 3.4.1 Cruzamento

O cruzamento é o operador responsável pela recombinação de características de dois indivíduos (os pais), permitindo que os filhos herdem essas características. É considerado o operador genético predominante e ocorre com uma probabilidade definida pela taxa de cruzamento  $p_c$  ( $0,6 \leq p_c \leq 1,0$ ). A seguir são apresentados os principais tipos de cruzamento usados pela representação binária e real.

*a) Representação real:* considerando que os cromossomos pai, mãe e filhos sejam notados respectivamente por:

$$\begin{array}{l} \text{pai} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \\ \text{mãe} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{filho1} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \text{filho2} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{array}$$

Os dois filhos de  $p_i$  e  $m_i$ , são calculados como:

$$\begin{array}{l} a_i = \lambda m_i + (\lambda - 1) p_i \\ b_i = (\lambda - 1) p_i + \lambda m_i \end{array} \Rightarrow \text{onde } \lambda \text{ pode assumir os seguintes valores: } 1/3; 2/3; 1/5$$

Pode-se também utilizar um operador de cruzamento mais simples denominado de crossover uniforme. Esse cruzamento produz apenas um filho cujas componentes  $a_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são escolhidas aleatórias (uniforme) no intervalo  $(p_i, m_i]$ . Outro cruzamento referenciado na literatura é o cruzamento simples, que pode ser considerado como o crossover de um ponto da representação real, realizando a troca de informação entre cromossomos (pai e mãe) a partir de um ponto escolhido.

*b) Representação binária:*

- um-ponto: um ponto de cruzamento é escolhido e a partir deste ponto as informações genéticas dos pais são trocadas (Figura 2).

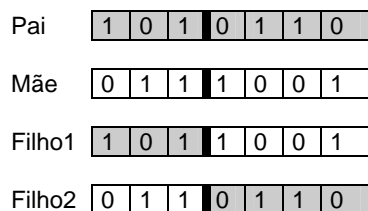


Figura 2 - Cruzamento um-ponto

- multipontos: troca de material genético usando mais de um ponto, como ilustra a Figura 3.

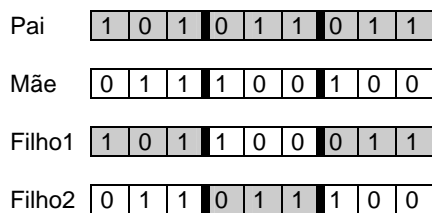


Figura 3 - Cruzamento dois pontos

- uniforme: não utiliza pontos de cruzamento mas determina, através de uma máscara de bits aleatórios, quais genes de cada pai serão herdados por cada um dos filhos. Se o primeiro bit da máscara for 1, o primeiro bit do pai é copiado para o primeiro bit do filho1; caso contrário, o primeiro bit da mãe é copiado para o primeiro bit do filho1. O processo se repete para todos os bits. Na geração do segundo filho o papel dos pais é invertido; se o bit da máscara for 1, então será copiado o bit da mãe; se o bit for 0 será copiado o bit do pai. O cruzamento uniforme está ilustrado na Figura 4.

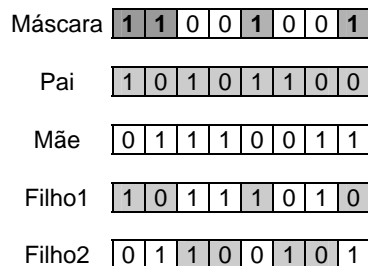


Figura 4 - Cruzamento uniforme

- variável a variável (Var\_Var): uma técnica de cruzamento proposta em HASANCEBI & ERBATUR (1998). Neste tipo de cruzamento os pares de indivíduos que serão cruzados, são decompostos nas *substrings* que representam cada uma das variáveis que equacionam o problema e estão representadas no cromossomo. Posteriormente define-se aleatoriamente um ponto de cruzamento próprio de cada substring e executa-se o cruzamento de um-ponto para cada variável (*substring*), como mostra a Figura 5. O fato da representação binária de cada variável envolvida ter seu próprio ponto de cruzamento confina a troca de informação dentro do escopo de cada uma das variáveis.

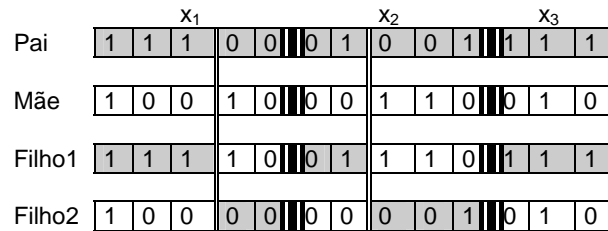


Figura 5 - Técnica de cruzamento variável a variável

### 3.4.2 Mutação

A utilização do operador de mutação tem como objetivo a introdução e manutenção da diversidade genética da população. Desta forma, a mutação assegura que a probabilidade de examinar qualquer ponto do espaço de busca nunca será zero; contorna também o problema de mínimos locais. O operador de mutação é aplicado aos indivíduos com uma probabilidade dada pela taxa  $p_m$  ( $0,0001 \leq p_m \leq 0,1$ ).

a) *Representação real*: assim como para operadores de cruzamento, existem vários operadores de mutação na codificação real. A mutação utilizada foi a randômica ou também chamada de mutação aleatória, que é a simples substituição de um gene por um número escolhido aleatoriamente no intervalo permitido pelo problema.

b) *Representação binária*: na representação binária, altera-se arbitrariamente um ou mais genes de um indivíduo.

## 4 DESCRIÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE PAINÉIS ALVEOLARES

Nesta Seção é investigado o uso de AG na busca da solução para o problema de minimização do custo de produção e aplicação de um painel alveolar (CASTILHO et al (2002a)). São apresentados e discutidos também os resultados obtidos para a solução do mesmo problema, usando o Método do Lagrangiano Aumentado implementado via o software EASY ([www.ime.unicamp/~martinez](http://www.ime.unicamp/~martinez)). Para a obtenção dos resultados usando AGs foram feitas implementações em C++, sob ambiente operacional Windows NT.

No equacionamento da função são inseridos os custos de execução, transporte externo e aplicação, usando os valores cedidos pela empresa Marka

situada em Franca, SP e alguns obtidos na Revista Construção<sup>4</sup>. Os custos envolvidos na execução englobam: custos de matéria-prima, custos adicionais, custos indiretos administrativos e custos tributários. O custo de transporte externo envolve os custos de transporte da fábrica ao local da obra. Os custos envolvidos na aplicação englobam os custos de: custos de montagem, custos do concreto da capa, custos da armadura complementar e custos indiretos administrativos (CASTILHO (2003)). Assim sendo, as próximas subseções vão tratar da busca da solução via dos problemas: minimização da função custo relativa à produção de painel alveolar sem capa estrutural para uma determinada aplicação, via AG e via o método convencional EASY e minimização da função custo relativa à produção de painel alveolar com capa estrutural para uma determinada aplicação, via AG e via o método convencional EASY.

#### 4.1 Otimização de Painel Alveolar sem Capa Estrutural

Nesta seção é investigado o uso de algoritmo genético na busca da solução para o problema de minimização do custo de um painel alveolar considerando apenas uma capa de concreto moldado no local, para regularização, de 4cm, para uma determinada situação. Foram consideradas protensão limitada e armadura localizada em um nível apenas. As variáveis do problema são a altura do painel ( $x_1$ ), a armadura ( $x_2$ ) e a resistência do concreto ( $x_3$ ).

A seção transversal do painel é mostrada na Figura 6 com largura de 120cm. O dimensionamento segue as recomendações das normas NBR 7197 da ABNT (1986) e NBR 6118 da ABNT (2001).

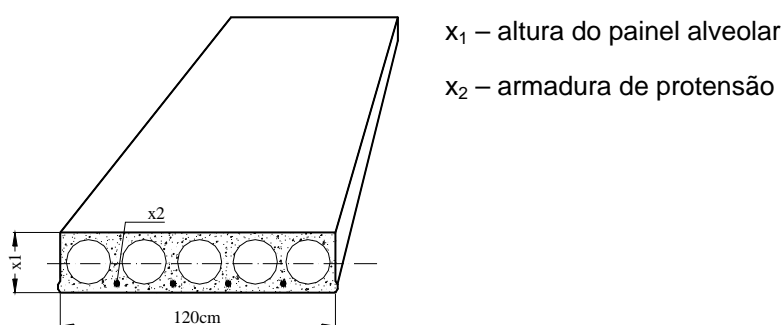


Figura 6 - Laje alveolar sem capa estrutural

##### 4.1.1 Função Custo Total

O problema de minimização do custo de tal laje se resume ao problema de minimização de  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ). O problema em questão se configura como um problema de minimização sujeito à restrições, conforme detalhado em CASTILHO (2003), e pode ser equacionado da seguinte forma:

<sup>4</sup> Construção, São Paulo, n. 2782, 4/6/2001

**Minimizar:**

$$f(\mathbf{x}) = 11,578 \log(x_1) + 12,663 + 0,0528x_1 + 1,1(24,75x_3 + 74,25)(0,063 \log(x_1) - 0,0721) + (0,0633 \log(x_1) - 0,0721) + 2,4075x_2$$

**Sujeita às seguintes restrições:**Verificação do estado em vazioVerificação do estado em serviço:Verificação do estado limite de utilização de controle da deformação:Verificação do estado limite último – solicitações normais:Verificação do estado limite último – solicitações tangenciais

Além dessas restrições, as variáveis que definem a função devem satisfazer às seguintes desigualdades:  $10 \leq x_1 \leq 45$ ;  $2,2 \leq x_2 \leq 12$ ;  $30 \leq x_3 \leq 50$ .

**4.1.2 A Busca da Solução do Problema via AG**

Como um dos objetivos deste trabalho foi o de investigar as diferentes características e os diferentes valores que parâmetros genéticos podem assumir, buscando identificar a customização do AG mais conveniente para o problema em questão, o algoritmo AG típico mostrado na Figura 1 serviu de base para a proposta de vinte e dois AGs variantes. As definições de AGs variantes foram determinadas pelas diferentes combinações da estratégia de seleção, esquema de reprodução e restauração da população ao tamanho original ( $N_{pop}$ ). Para facilitar e sistematizar as referências a eles, os AGs variantes foram agrupados em três famílias diferentes, usando como critério a estratégia de seleção utilizada por eles. Essas famílias são a MGA, ROLETA e TORNEIO. Na Tabela 1 estão discriminados os valores de várias características relativas a AGs, adotadas na implementação.

Para os experimentos foram considerados dois possíveis esquemas de reprodução: substituição, avaliador. O esquema de substituição substitui os pais, pelos filhos, a cada geração e o avaliador considera os valores da função de avaliação dos pais e dos filhos e, então, são escolhidos os melhores.

Tabela 1 - Principais características da implementação do AG

Características	Possíveis Valores
Elitismo	1 indivíduo
População	100
Representação de dados	real
Estratégia de seleção	MGA, roleta e torneio
Cruzamento	Operadores aritméticos com $\lambda = 2/3$
Probabilidade de cruzamento	0,85
Probabilidade de mutação	0,01
Critério de parada	1000 gerações

**4.1.3 Descrição dos Experimentos e Análise dos Resultados**

Uma vez que AGs são bastante sensíveis à população inicial, o valor relativo a cada um dos experimentos descrito nas próximas tabelas é a média dos valores obtidos em dez execuções (*run*), cada uma delas tendo uma população inicial gerada

randomicamente. A Tabela 2 nomeia e descreve os elementos dos AGs variantes, identificando o esquema de reprodução adotado em cada um deles, bem como a estratégia usada para restaurar a população.

Tabela 2 - Elementos da família MGA

AGs Variante	Esquema	Como população é restaurada a $N_{pop}$ elementos
MGA1, Roleta1, Torneio1	substituição	indivíduos aleatórios da população corrente
MGA2, Roleta2, Torneio2	substituição	indivíduos que não participaram do cruzamento
MGA3, Roleta3, Torneio3	avaliador	indivíduos aleatórios da população corrente
MGA4, Roleta4, Torneio4	avaliador	indivíduos que não participaram do cruzamento

A seguir são apresentados os resultados obtidos para cada família.

### Família MGA

Na Tabela 3 são apresentados o valor da função custo, o desvio padrão, o melhor e o pior absoluto, bem como os valores das três variáveis que definem a função custo para todas os AGs variantes da família MGA.

Pode ser evidenciado na Tabela 3 que os dados relativos aos AGs variantes estão bastante próximos e que o melhor resultado foi o obtido com o MGA1. O único valor de função que destoa ligeiramente dos demais é o obtido pelo MGA2. Pode se conjecturar duas razões que justifiquem os resultados obtidos. A primeira se deve ao fato do MGA2 restaurar a população a seu tamanho original, usando indivíduos que não participaram do cruzamento (indivíduos que, provavelmente, não tiveram bons valores de função de aptidão). A segunda (que não exclui a primeira), seria o esquema de reprodução de substituição, que não leva em consideração valor de aptidão quando substitui pais por filhos. Por outro lado, esse esquema é também utilizado pelo variante MGA1, que obteve os melhores resultados dentre os algoritmos da família. Isso nos leva a pensar que é o mecanismo de restauração que influencia negativamente o desempenho do MGA2. Como mostra a Tabela 6, o EASY obteve o melhor desempenho que todos os outros variantes.

Analisando os resultados obtidos pelos variantes MGA2 e MGA4 e pelos variantes MGA1 e MGA3 pode-se inferir que, com o uso da estratégia avaliador o desempenho piora. Com relação aos resultados obtidos pelos variantes MGA1 e MGA2 (que compartilham o mesmo esquema substituição) e pelos variantes MGA3 e MGA4 (que compartilham o mesmo esquema avaliador) pode-se concluir que o mecanismo de restauração que adota indivíduos que não participaram do cruzamento não é bom. O MGA2 foi o que teve o pior resultado da família.

Tabela 3 - Valores da função custo e das variáveis que a definem para a família MGA:  
 $x_1$  – altura do painel,  $x_2$  – área de armadura e  $x_3$  – resistência do concreto

FUNÇÃO CUSTO – vão=6m (R\$/m <sup>2</sup> )					VARIÁVEIS		
AG variante	Valor da função	Desvio padrão	Melhor absoluto	Pior absoluto	$x_1$ (cm)	$x_2$ (cm <sup>2</sup> )	$x_3$ (kN/cm <sup>2</sup> )
MGA1	75,91	0,1613	75,80	76,34	21,47	2,67	3,07
MGA2	78,36	0,7857	76,96	79,11	21,27	2,84	3,76
MGA3	76,04	0,3601	75,75	76,85	21,56	2,62	3,12
MGA4	76,42	0,5942	75,76	77,53	21,49	2,54	3,32
EASY	75,75				21,49	2,69	3,00

### Família ROLETA

A Tabela 4 apresenta os valores da função custo, do desvio padrão, do melhor e do pior absoluto e das três variáveis que definem a função custo para todos os AGs variantes da família ROLETA. É também apresentado o valor da função custo obtido via o método do Lagrangiano Aumentado (EASY).

Tabela 4 - Valores da função custo e das variáveis que a definem para a família ROLETA:  
 $x_1$  – altura do painel,  $x_2$  – área de armadura e  $x_3$  – resistência do concreto

FUNÇÃO CUSTO – vão=6m (R\$/m <sup>2</sup> )					VARIÁVEIS		
AG variante	Valor da função	Desvio padrão	Melhor absoluto	Pior absoluto	$x_1$ (cm)	$x_2$ (cm <sup>2</sup> )	$x_3$ (kN/cm <sup>2</sup> )
Roleta1	78,62	1,4449	76,89	81,09	22,19	2,83	3,56
Roleta2	78,86	1,3562	76,83	80,73	22,90	2,74	3,46
Roleta3	76,27	0,4576	75,80	77,23	21,66	2,54	3,22
Roleta4	76,28	0,6006	75,75	77,66	22,02	2,59	3,06
EASY	75,75				21,49	2,69	3,00

Considerando os valores mostrados na Tabela 4, referentes à Família ROLETA, pode ser evidenciado que o melhor valor da função custo foi obtido pelo variante Roleta3 e o pior pelo Roleta2. Embora os valores encontrados por Roleta1 e Roleta2 estejam relativamente próximos e o variante implementado por Roleta1 tenha obtido um melhor resultado, não se pode afirmar que, para o problema em questão, usando a estratégia da roleta, o procedimento de restauração mais indicado é aquele que considera indivíduos aleatórios, dado que para os valores obtidos por Roleta3 e Roleta4, que também diferem apenas com relação ao esquema de restauração, verificou-se tendência oposta. Também, fica difícil fazer qualquer afirmação categórica neste caso dado que os esquemas implementados por Roleta1 e Roleta2 diferem do implementado por Roleta3 e Roleta4. Os resultados fornecidos pelo EASY foram melhores que os resultados obtidos pela família ROLETA.

### Família TORNEIO

A Tabela 5 apresenta os valores da função custo, desvio padrão, melhor e pior absoluto e das três variáveis que definem a função custo para todos os AGs variantes da família TORNEIO. É também apresentado o valor da função custo obtido via o método do Lagrangiano Aumentado (EASY).

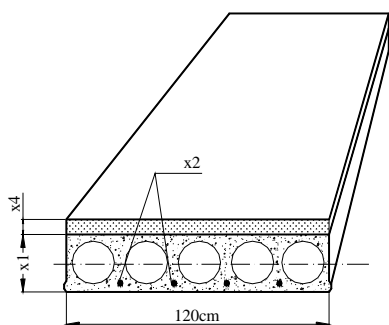
Tabela 5 - Valores da função custo e das variáveis que a definem para a família TORNEIO:  
 $x_1$  – altura do painel,  $x_2$  – área de armadura e  $x_3$  – resistência do concreto

FUNÇÃO CUSTO – vão=6m (R\$/m <sup>2</sup> )					VARIÁVEIS		
AG variante	Valor da função	Desvio padrão	Melhor absoluto	Pior absoluto	$x_1$ (cm)	$x_2$ (cm <sup>2</sup> )	$x_3$ (kN/cm <sup>2</sup> )
Torneio1	75,94	0,2552	75,76	76,48	21,60	2,64	3,06
Torneio2	75,85	0,1026	75,77	76,12	21,54	2,68	3,02
Torneio3	76,17	0,2714	75,81	76,53	21,33	2,62	3,23
Torneio4	76,56	0,6829	75,77	77,71	21,69	2,61	3,24
EASY	75,75				21,49	2,69	3,00

Como pode ser verificado na Tabela 5, os resultados encontrados por todos os variantes desta família estão bastante próximos, o que impossibilita a identificação e recomendação do melhor variante, quando a estratégia de seleção usada é o torneio. Embora os resultados estejam muito próximos, os piores resultados são obtidos pelo esquema de restauração que adota indivíduos que não participaram do cruzamento. Da forma como o torneio foi implementado, os esquemas de reprodução e de restauração da população a  $N_{pop}$  indivíduos e eventual uso de população intermediária pouco influenciam o resultado final. De qualquer forma, qualquer dos variantes não teve um melhor desempenho que o EASY.

## 4.2 Otimização de Painel Alveolar com Capa Estrutural

Nesta seção é investigado o uso de algoritmo genético na busca da solução para o problema de minimização do custo de um painel alveolar com capa de concreto estrutural, moldada no local. Foram considerados os mesmos critérios definidos no experimento descrito na seção anterior: protensão limitada e armadura localizada em um nível apenas. As variáveis do problema são a altura do painel ( $x_1$ ), a armadura ( $x_2$ ), a resistência do concreto ( $x_3$ ), a altura da capa de concreto ( $x_4$ ) e a resistência do concreto moldada no local ( $x_5$ ). A seção transversal é mostrada na Figura 7.



$x_1$  – altura do painel alveolar

$x_2$  – armadura de protensão

$x_4$  – altura da capa de concreto

Figura 7 - Painel alveolar com capa estrutural

### 4.2.1 Função Custo Total

O problema de minimização do custo de tal laje se resume ao problema de minimização de  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ). O problema em questão se configura como um problema de minimização sujeito à restrições e conforme detalhado em CASTILHO (2003), pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar: } f(\mathbf{x}) = 11,578 \ln(x_1) - 13,178 + 0,048(24,75x_5 + 74,25)x_4 + 0,0528x_1 + 1,27x_4 + \\ + 1,1(24,75x_3 + 74,25)(0,0633 \ln(x_1) - 0,0721) + 2,407x_2$$

**Sujeita às seguintes restrições:**

Verificação do estado em vazio

Verificação do estado limite último – solicitações normais

Verificação do estado limite último – solicitações tangenciais

Além dessas restrições, as variáveis que definem a função devem satisfazer às desigualdades:  $10 \leq x_1 \leq 45$ ;  $2,2 \leq x_2 \leq 12$ ;  $30 \leq x_3 \leq 50$ ;  $4 \leq x_4 \leq 10$ ;  $15 \leq x_5 \leq 30$ .

**4.2.2 A Busca da Solução do Problema via AG**

Nessa seção é investigada a busca da solução para o problema de otimização de custos via AG usando o melhor AG variante de cada uma das famílias, identificados na seção anterior, ie, MGA1, Roleta3 e Torneio2. Para cada um desses AGs variantes, esta seção investiga o impacto de diferentes tipos de cruzamento (aritmético, uniforme e simples). Este trabalho propõe uma variante do cruzamento uniforme, referenciado como uniforme1 que, ao invés de apenas um filho, gera dois filhos aleatórios a partir de dois pais. Na Tabela 6 estão discriminados os valores de várias características relativas a AGs, adotadas na implementação.

Tabela 6 - Principais Características da Implementação do AG

Características	Possíveis Valores
Elitismo	1 indivíduo
População	100
Representação de dados	real
Estratégia de seleção	MGA1
Cruzamento	Aritmético, uniforme, uniforme1, simples
Probabilidade de cruzamento	0,85
Probabilidade de mutação	0,01
Critério de parada	1000 gerações

**4.2.3 Descrição dos Experimentos e Análise dos Resultados**

Na Tabela 7 são apresentados os resultados obtidos pelo MGA1 usando os quatro tipos de cruzamento, onde o cruzamento aritmético foi implementado para o valor de  $\lambda=2/3$ . O melhor resultado foi obtido com o uso do cruzamento uniforme1 e difere em 6,8% quando comparado com o valor obtido pelo EASY, que teve o pior desempenho dentre todos, a menos do operador de cruzamento uniforme.

Tabela 7 - Valores da função custo e das variáveis que a definem para o MGA1:

$x_1$  – altura do painel,  $x_2$  – área de armadura,  $x_3$  – resistência do concreto,  
 $x_4$  – altura da capa e  $x_5$  – resistência do concreto moldado no local

MGA1						
Cruzamento	$x_1$ (cm)	$x_2$ (cm <sup>2</sup> )	$x_3$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$x_4$ (cm)	$x_5$ (kN/cm <sup>2</sup> )	Função custo R\$/m <sup>2</sup>
Aritmético	20,99	2,70	3,03	4,02	1,52	74,99
Uniforme	25,40	3,34	4,06	4,51	2,05	90,47
Uniforme1	20,86	2,72	3,02	4,02	1,51	74,78
Simple	22,39	2,50	3,00	4,00	1,50	75,65
EASY	27,41	2,36	3,10	4,00	1,50	80,23

Dentre os quatro cruzamentos, o uniforme foi o que obteve o pior desempenho. O cruzamento uniforme é o que gera um indivíduo aleatório a partir de dois pais dentre dos limites de cada variável. O que pode se conjecturar neste caso

específico, dado que os valores das variáveis se mantiveram razoavelmente próximos durante o processo evolutivo é que esse tipo de cruzamento não introduziu muita diversidade e, daí, o baixo desempenho.

## 5 DESCRIÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO DE LAJES COM VIGOTA PROTENDIDA

O trabalho também investigou o uso de AG na busca da solução para o problema de minimização do custo de produção e aplicação de uma vigota protendida. Neste domínio de problemas são analisados os variantes MGA1 e Roleta1A. Esse último adota as mesmas características apresentadas no Roleta1. A diferença é que na restauração a  $N_{pop}$  indivíduos, o variante Roleta1A adota ainda uma população intermediária (CASTILHO (2003)). Assim sendo, as próximas três seções tratam, respectivamente, da busca da solução via AG dos três seguintes problemas:

- otimização do elemento para uma determinada aplicação;
- otimização da aplicação para uma determinada seção transversal de vigota;
- otimização do elemento e da aplicação para uma determinada seção transversal de vigota.

### 5.1 Otimização do Elemento Para Uma Determinada Aplicação

O problema de otimização a ser tratado é o da minimização da função custo total de uma laje com vigota protendida com a utilização de escoras intermediárias para o vão de 4 metros. As variáveis que definem a função custo são:  $x_1, x_2, x_3$  – armaduras dos três níveis de protensão ( $\text{cm}^2$ ),  $x_4$  – altura do segundo nível de armadura (cm),  $x_5$  – altura do terceiro nível de armadura (cm). A seção transversal da laje é mostrada na Figura 8.a) e as dimensões da vigota são apresentadas na Figura 8.b). Foram adotados os seguintes valores: a resistência do concreto pré-moldado igual a 39 MPa e a de concreto moldado no local igual a 20 MPa e a medida do inter-eixo igual a 30cm.

O processo de dimensionamento de uma laje com vigotas protendidas foi o mesmo adotado em MERLIN (2002). Os critérios de dimensionamento atendem os estados limites de utilização e estados limite último.

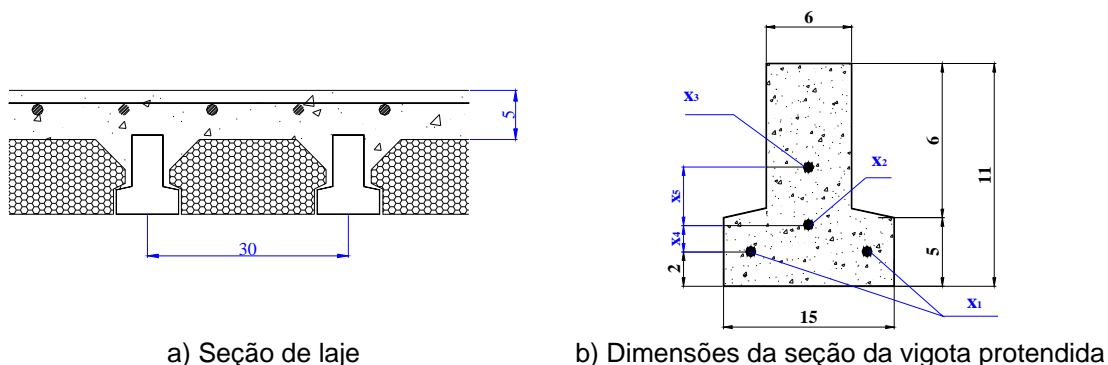


Figura 8 - Dimensões da laje e da vigota protendida (medidas em cm)

### 5.1.1 Função Custo Total

O problema de minimização do custo de produção de tal laje se resume ao problema de minimização de  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ). O problema em questão se configura como um problema de minimização sujeito a restrições e conforme detalhado em CASTILHO (2003) pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = 31,550 + 11,193(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{0,143}{(2x_1 + x_2(2 + x_4) + x_3(2 + x_4 + x_5))}$$

**Sujeita às seguintes restrições:**

Verificação do estado em vazio

Verificação de tensões na seção mais solicitada:

Verificação do estado limite de fissuração:

Verificação do estado limite de utilização de controle da deformação:

Verificação do estado limite último – solicitações normais:

Verificação do estado limite último – solicitações tangenciais

Além dessas restrições as variáveis devem satisfazer as desigualdades:  $0,1 \leq x_1 \leq 3,0$ ;  $0,1 \leq x_2 \leq 2,7$ ;  $0 \leq x_3 \leq 1$ ;  $0,5 \leq x_4 \leq 6$ ;  $0,5 \leq x_5 \leq 8$ .

### 5.1.2 A Busca da Solução do Problema via AG

Os AGs descritos na Seção 3 foram implementados com as características listadas na Tabela 8. Para o problema em questão foi analisado o impacto de diferentes tipos de cruzamentos para a representação binária.

Tabela 8 - Características principais do AG

características	valores
Elitismo	1 individuo
Tamanho da população	100
Representação	Binária – 56 bits (10–10–10–13–13)
Cruzamento	Um-ponto (1X), dois pontos (2X) multiponto (3X, 4X e 5X), uniforme, variável-a-variável
Probabilidade de cruzamento	0,85
Probabilidade de mutação	0,1
Critério de parada	1000 gerações

### 5.1.3 Descrição dos Experimentos e Análises dos Resultados

Os resultados das variáveis e da função custo obtidos na minimização da função custo, para uma laje de comprimento de 4m, são apresentados na Tabela 9. O MGA1 foi o variante que obteve os melhores resultados. O variante MGA1 obteve resultados bem próximos um dos outros independentemente do operador de cruzamento utilizado.

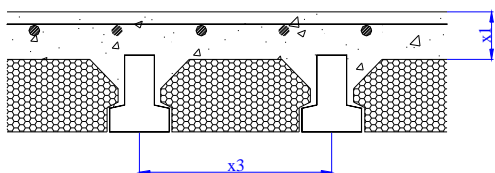
Como pode ser verificado na tabela, os resultados obtidos pelo EASY foram os melhores e com uma grande margem sobre os demais. Deve-se salientar que os valores de armadura  $x_2$  e  $x_3$  obtidos pelo EASY para o comprimento de laje de 4m são valores mínimos, não tendo muito significado prático.

Tabela 9 - Valores da função custo e das variáveis que a definem:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  – armaduras de protensão,  $x_4$ ,  $x_5$  – distâncias dos níveis de armadura

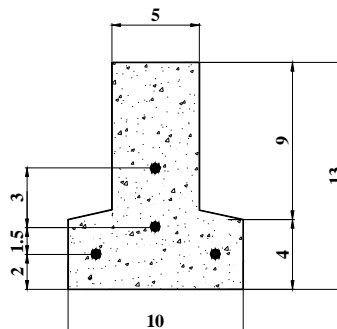
		Variáveis					Função custo (R\$/m <sup>2</sup> )
Cruzamento		$x_1$ (cm <sup>2</sup> )	$x_2$ (cm <sup>2</sup> )	$x_3$ (cm <sup>2</sup> )	$x_4$ (cm)	$x_5$ (cm)	
MGA1	Uniforme	0,53	0,29	0,13	3,05	1,98	42,33
	1X	0,56	0,24	0,14	2,85	2,78	42,33
	2X	0,53	0,26	0,15	2,65	2,85	42,32
	3X	0,55	0,28	0,12	3,50	1,91	42,32
	4X	0,53	0,26	0,15	2,65	3,13	42,33
	5X	0,56	0,26	0,10	3,93	2,01	42,33
	Var Var	0,56	0,27	0,11	3,31	2,88	42,34
EASY		0,40	0,10	0,01	4,00	4,00	34,40

## 5.2 Otimização do Elemento Para Uma Determinada Aplicação

Esta subseção trata a minimização da função custo total de uma laje com vigota protendida para uma dada vigota sem escoras intermediárias para vão de 4 metros. Parte dos resultados estão descritos em CASTILHO et al (2001). As variáveis envolvidas na definição da função custo são: a altura do capeamento ( $x_1$ ), a resistência do concreto moldado no local ( $x_2$ ) e a distância do inteneixo ( $x_3$ ). A seção transversal da laje é mostrada na Figura 9.a) e as dimensões da vigota consideradas no dimensionamento da laje são apresentadas na Figura 9.b). A resistência do concreto foi considerada de 45 MPa.



a) Seção de laje com vigota de concreto protendido



b) Dimensões da seção da vigota protendida

Figura 9 - Dimensões da laje e da vigota protendida (medidas em cm)

### 5.2.1 Função Custo Total

O problema de minimização do custo de produção de tal laje se resume ao problema de minimização de  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ). O problema em questão se configura como um problema de minimização sujeito a restrições e conforme detalhado em CASTILHO (2003), pode ser equacionado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar: } f(\mathbf{x}) = \frac{669,376}{x_3} + 1,552 x_1 + 0,012 x_1 (24,75 x_2 + 74,25) + 0,0592 x_3$$

**Sujeita às mesmas restrições da seção anterior**

Além dessas restrições as variáveis devem satisfazer as desigualdades:  $4 \leq x_1 \leq 10$ ;  $15 \leq x_2 \leq 30$ ;  $30 \leq x_3 \leq 50$ .

### 5.2.2 A Busca da Solução do Problema via AG

Os AGs descritos na Figura 1 foram implementados com as características listadas na Tabela 10. Vale lembrar que o operador variável-a-variável foi proposto e recomendado em HASANCEBI & ERBATUR (1998), quando da solução de problemas em estruturas de aço.

Tabela 10 - Características principais do AG

características	valores
Elitismo	1 individuo
Tamanho da população	100
Representação	Binária – 32 bits (11-11-10)
Cruzamento	Um-ponto (1X), dois pontos (2X) multiponto (3X, 4X e 5X), uniforme, variável-a-variável
Probabilidade de cruzamento	0,85
Probabilidade de mutação	0,1
Critério de parada	1000 gerações

### 5.2.3 Descrição dos Experimentos e Análises dos Resultados

Na Tabela 11 são apresentados os valores da função custo e de suas variáveis para o comprimento de laje 4m. O melhor resultado do MGA1 foi obtido usando cruzamento de um ponto e 5X e o pior usando o operador variável-a-variável.

Apesar das diferenças serem pequenas quando comparados com os resultados obtidos pelo MGA1, o EASY obteve o melhor resultados de todos. Pode ser verificado que o uso de qualquer dos operadores de cruzamento uniforme e n-X não provocou uma variação grande no resultado final.

Tabela 11. Valores da função custo e das variáveis que a definem:  $x_1$  – altura da capa de concreto moldado no local,  $x_2$  – resistência do concreto moldado no local e  $x_3$  – distância do inteiroixo

		FUNÇÃO CUSTO (R\$/m <sup>2</sup> )				VARIÁVEIS			
		Valor da função	Desvio padrão	Melhor absoluto	Pior absoluto	$x_1$ (cm)	$x_2$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$x_3$ (cm)	escoras
MGA1	Cruzamento								
	Uniforme	42,40	0,6594	41,97	43,64	6,28	2,92	34,16	0
	1X	41,90	0,0657	41,82	41,97	6,18	2,98	34,74	0
	2X	41,96	0,1513	41,82	42,32	6,17	2,97	34,49	0
	3X	42,39	0,8196	41,82	44,01	6,26	2,98	35,28	0
	4X	42,24	0,7157	41,97	44,27	6,22	2,97	34,81	0
	5X	42,42	0,8134	41,82	44,24	6,31	2,94	35,00	0
	Var_Var	43,25	0,6768	41,88	44,11	6,53	2,93	35,24	0
EASY		41,78	-	-	-	6,28	3,00	35,73	0

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Este trabalho investiga o uso de algoritmo genético na busca da solução para o problema de minimização do custo de produção e aplicação de painéis alveolares e de vigotas protendidas. São analisadas várias estratégias de seleção combinadas com diferentes propostas para a restauração da população, bem como avaliados diversos tipos de cruzamentos utilizando a representação binária e a real. As principais conclusões do trabalho são descritas a seguir:

- Nota-se que os resultados para as diferentes estratégias de seleção foram discrepantes. O melhor desempenho foi atribuído à família MGA e TORNEIO e o pior foi obtido pela família ROLETA;
- Dentre os quatro tipos de cruzamento utilizados na representação real (análise dos três variantes) os melhores resultados foram obtidos com o simples e com o uniforme1. O pior desempenho foi obtido com o cruzamento uniforme;
- O operador de cruzamento variável-a-variável obteve os piores resultados quando associado com o variante MGA1 e os melhores quando associado com o variante Roleta1A;
- Com base nos resultados obtidos nos vários experimentos descritos pode-se dizer que o AG é uma técnica perfeitamente viável em problemas de Engenharia Estrutural. Sua flexibilidade, robustez e facilidade de implementação são características positivas quanto da solução de problemas práticos.

## 7 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro e ao Engenheiro Noé Marcos Neto da empresa Marka - Sistemas Construtivos em concreto estrutural da região de Franca, SP pela valiosa ajuda.

## 8 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT (1986). **NBR 7197 - Projeto de estruturas de concreto protendido**. Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT (2001). **Texto conclusivo do projeto de revisão da NBR 6118 - Projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro.

CASTILHO, V. C. (2003). **Otimização de componentes de concreto pré-moldado protendidos mediante algoritmos genéticos**. São Carlos. 283p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CASTILHO, V. C.; EL DEBS, M. K. ; NICOLETTI, M. C. (2001). Application of genetic algorithm for optimization slabs of prestressed concrete joists. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 22<sup>th</sup>, Campinas. **Anais** [CD-ROM]. Campinas.

CASTILHO, V. C.; EL DEBS, M. K.; NICOLETTI, M. C. (2002a). Investigação do impacto da estratégia de seleção na solução de problemas de otimização do custo de painéis alveolares usando algoritmos genéticos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE COMPUTAÇÃO - CBCComp, 2., Itajaí. **Anais** [CD-ROM]. Itajaí.

CASTILHO, V.C.; NICOLETTI, M.C.; EL DEBS, M.C. (2002b). Using genetic algorithms for minimizing the production costs of hollow core slabs. In: ABRAHAM, A. et al. (Ed). **Soft computing systems: design, management and applications** (International Conference on Hybrid Intelligent Systems, 2<sup>nd</sup>, Santiago de Chile, Dec. 1-4, 2002). Amsterdam, IOS Press, 2002. p.796-805 .

EL DEBS, M. K. (2000). **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações**. São Carlos: Projeto Reenge EESC-USP.

GEN, M. ; CHENG, R. (1997). **Genetic algorithms and engineering design**. New York: John Wiley.

GOLDBERG, D. E. (1989). **Genetic algorithms in search, optimization and machine learning**. Reading, USA: Addison-Wesley Publishing.

HASANCEBI, O.; ERBATUR, F. (1998). Evaluation of crossover techniques based optimum structural design. In: TOPPING, B.H.V. (ed.) **Advances in engineering computational technology**. Edinburgh: Civil-Comp Press. p.111-113.

JENKIS, W. M. (1997). On the application of natural algorithms to structural design optimization. **Engineering Structures**, v.19, n.4, p.302-308, April.

KOSKISTO, O. J.; ELLINGWOOD, B. R. (1997). Reliability-based optimization of plant precast concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, v.123, n.3, p.298-304, March.

KRIPKA, M. (1998). **Determinação do posicionamento ótimo em edificações analisadas pelo modelo de grelha**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LOUNIS, Z. ; COHN, M. Z. (1993). Optimization of precast prestressed concrete bridge girder systems. **PCI Journal**, v.123, n.3, p.60-77, July-August.

MARTÍNEZ, J.M. (1997). **Augmented Lagrangians and the resolution of packing problems**. Campinas: Institute of Mathematics, University of Campinas. (Technical report 08/97)

MERLIN, A. J. (2002). **Momentos fletores negativos nos apoios de lajes formadas por vigotas de concreto protendido**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MICHALEWICZ, Z. (1996). **Genetic algorithms + data structures = evolution programs**. Berlin: Springer-Verlag.

SOARES, R. C. (1997). **Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão - aplicação a pavimentos**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.