

ISSN 1413-9928

***CADERNOS DE
ENGENHARIA DE ESTRUTURAS***

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia de Estruturas

**Utilização da formulação livre para desenvolvimento de
um elemento de membrana com liberdades rotacionais**

Suzana Campana Peleteiro
Marcio Antonio Ramalho

Número 15
São Carlos, 1999

UTILIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO LIVRE PARA DESENVOLVIMENTO DE UM ELEMENTO DE MEMBRANA COM LIBERDADES ROTACIONAIS

Suzana Campana Peleteiro¹ & Marcio Antonio Ramalho²

RESUMO

Neste trabalho aborda-se o desenvolvimento de um elemento finito de membrana com graus de liberdade rotacionais e sua implementação a um sistema computacional em elementos finitos. O trabalho é baseado na formulação livre de BERGAN & NYGARD (1984) que produz um elemento simples e de bom desempenho. Aspectos fundamentais da formulação livre, do desenvolvimento do elemento e sua implementação ao sistema são apresentados. Resultados obtidos em alguns exemplos comprovam a eficiência do procedimento.

Palavras-chave: Elemento finito - membrana; Formulação livre; Graus de liberdade rotacionais.

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Existe um grande número de estruturas de interesse prático para as quais se pode fazer uso das hipóteses da elasticidade bidimensional. A análise desses problemas ocupa um lugar de destaque nos primeiros desenvolvimentos do *método dos elementos finitos*. Com o decorrer do tempo, os elementos foram sendo aperfeiçoados, com o intuito de se melhorar cada vez mais a sua performance.

Muitos problemas na área da engenharia de estruturas envolvem os elementos estruturais de cascas e é notória a complexidade matemática de tais problemas nos casos reais, que quase sempre é representado por aproximações de problemas teóricos de solução matematicamente viável na mecânica do contínuo. Alguns exemplos de estruturas que envolvem este tipo de problema são: silos, tanques, túneis, vasos de pressão, cascos de embarcações, tubulações, chaminés, coberturas, reservatórios enterrados, abrigos subterrâneos, etc. Para a análise dessas estruturas pode-se fazer uso dos procedimentos do *método dos elementos finitos* implementados computacionalmente. Uma maneira bastante atraente para se analisar cascas é a utilização de dois elementos finitos planos, um de placa e um de membrana, que superpostos representem de maneira satisfatória o comportamento real da estrutura.

Da necessidade de se modelar convenientemente o problema estrutural apresentado surgiu o interesse pelo elemento de membrana que incorpora, além das duas translações por nó em seu plano, uma rotação em torno do eixo perpendicular a esse

¹ Mestre em Engenharia de Estruturas, Aluna de doutorado do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP. E-mail: scampana@sc.usp.br

² Doutor em Engenharia de Estruturas, Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP. E-mail: ramalho@sc.usp.br

plano. O elemento de membrana com liberdades rotacionais se apresenta extremamente atraente para a análise de cascas pelo *método dos elementos finitos*, acoplado à um elemento de placa. A introdução das rotações, e da rigidez correspondente, evita o problema de singularidade que surge quando se trabalha com elementos de casca coplanares e aproximadamente coplanares constituídas de um elemento de membrana que não possui os graus de liberdade relacionados.

1.2 OBJETIVO

O objetivo do presente trabalho é a viabilização da utilização prática de um novo elemento que possui graus de liberdade adicionais: rotações segundo eixos normais ao seu plano. Com esse trabalho pretende-se demonstrar que uma formulação invariante pode ser construída pelo uso da definição de rotações no meio contínuo, ao invés de se usar o conceito geométrico, mais intuitivo, para as rotações nas quinas.

1.3 HISTÓRICO

Os primeiros modelos, para estado plano de tensão/deformação, desenvolvidos para o *método dos elementos finitos*, foram os elementos com translações livres nos nós. As primeiras experiências computacionais foram com elementos bilineares, elementos em que as funções de forma são o produto de dois polinômios lineares. Esses elementos são bastante simples, mas excessivamente rígidos para problemas em que os resultados são muito influenciados pelos esforços de flexão.

Na figura 1.1a tem-se um exemplo de elemento bilinear retangular. A figura 1.1b mostra o comportamento do elemento deformado sob a ação de um momento M_1 , supondo-se apenas translações nos nós, nota-se que não existe flexão dos lados dos elementos que permanecem retos. A figura 1.1c ilustra uma deformação mais coerente do elemento quando sob a ação de um momento M_1 . Como podemos observar, no caso da figura 1.1b, o modelo não representa o comportamento de um elemento numa estrutura real. Para que os resultados obtidos por essa análise sejam mais verossímeis é preciso refinar muito a malha utilizada, até que o modelo possa representar de maneira satisfatória o comportamento da estrutura.

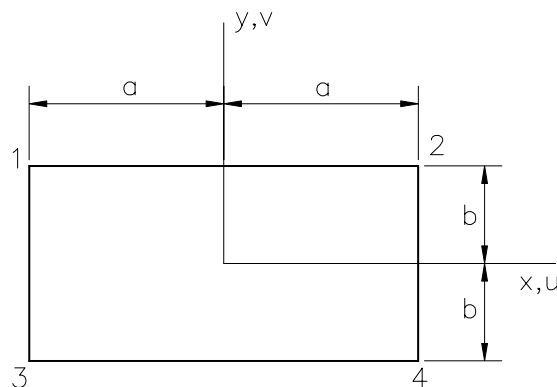
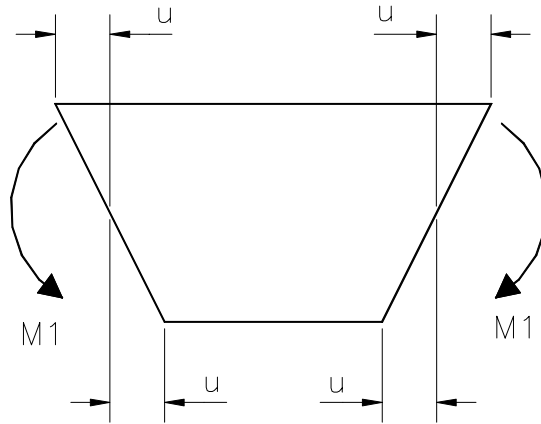
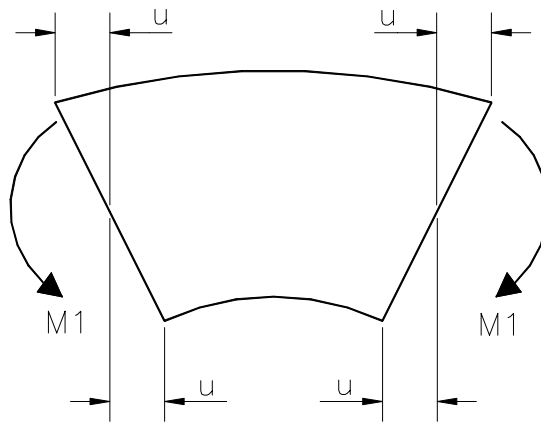


FIGURA 1.1a - Elemento Bilinear Retangular

FIGURA 1.1b - Deformação do elemento sob a ação de um momento $M1$ FIGURA 1.1c - Deformação mais verossímil do elemento devido a um momento $M1$

Entre os primeiros elementos desenvolvidos temos o triângulo linear, no qual utiliza-se uma aproximação linear para o campo de deslocamentos, e o retângulo bilinear que foram apresentados por TURNER et al (1956), e o quadrilátero geral bilinear apresentado por TAIG & KERR (1964). Todos foram extensivamente usados para modelagem de estado plano de tensão/deformação e como componente de membrana na análise de estruturas de casca.

O elemento triangular com aproximação quadrática para o campo de deslocamentos é reconhecido por produzir melhores resultados para os deslocamentos e tensões. A distribuição de tensões obtida através do seu uso é uma aproximação melhor do que a distribuição de tensões obtida com a utilização de elementos com aproximação linear para os deslocamentos. Entretanto esse melhor desempenho faz com que o número total de parâmetros se torne maior, já que estamos trabalhando com modos de deslocamento quadráticos ao invés de lineares. Com isso a implementação computacional se torna mais trabalhosa e o tempo de processamento aumenta.

Com o intuito de melhorar o desempenho desses elementos de membrana, diversos autores começaram a desenvolver formulações que pudessem modelar de maneira mais eficiente o estado plano de tensões. Uma das maneiras de se conseguir um melhor desempenho do elemento é a adição de graus de liberdade extras nos meios dos lados do elemento. Deslocamentos de alta ordem são relacionados às translações dos pontos médios dos nós. Atualmente os elementos mais populares desse tipo são os Lagrangianos com 8 e 9 pontos nodais.

Uma outra maneira de melhorar o desempenho de tais elementos é a inclusão das rotações em torno de eixos perpendiculares ao plano dos mesmos, intermediário aos elementos anteriores, tanto em número de graus de liberdade quanto em precisão. Este tipo de abordagem se apresenta bastante atraente. Muitas tentativas de se desenvolver elementos de membrana com liberdades rotacionais adicionais foram feitas, mas só obtiveram sucessos parciais. A formulação de elementos invariantes e convergentes para geometria arbitrária provou ser particularmente difícil. Esses fatos fizeram com que alguns autores desaconselhassem o desenvolvimento de tais elementos.

WILLIAM (1969) derivou dois elementos quadrilaterais de membrana com 12 e 16 graus de liberdade. Em adição às 8 translações, o elemento com 12 graus de liberdade tem 4 rotações. A formulação usa a média das rotações do elemento e recai em funções de forma de viga associadas com as rotações dos extremos. Ambos os elementos são não-conformes, a compatibilidade inter-elemental não é satisfeita ao longo de todo o contorno dos elementos, mas prevalece apenas nos nós. Essa incompatibilidade tende a zero, na medida em que a rede é refinada.

Experiências indicam que o desempenho é variável, com bons resultados geralmente associados a malhas retangulares regulares. William, de fato, notou que a formulação do elemento não é invariante com respeito ao sistema de coordenadas de referência. Pode-se demonstrar que não existe uma relação única entre a rotação θ_z e os giros dos lados dos elementos adjacentes, descumprindo-se, portanto, os requisitos de continuidade C^0 .

Mais ou menos na mesma época, FELIPPA (1966) e CARR (1967) desenvolveram uma formulação para elemento triangular, iniciada com 20 graus de liberdade, 10 nós e expansão cúbica completa para triângulo em estado plano de tensões. Doze liberdades são colocadas nos pontos médios ao longo dos lados do elemento e expressos pelos 4 gradientes de deslocamento: $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ e $\partial v/\partial y$, de cada canto. Um desenvolvimento similar para um triângulo de alta ordem foi documentado por BERGAN (1967). TOCHER & HARTZ (1967) mostraram um hiper-conforme triângulo em estado plano de tensões com derivadas de deslocamentos baseadas em funções de forma conformes C^1 .

Esses elementos podem apresentar bons resultados na mão de especialistas, mas não são recomendados para programas de uso geral e prático. IRONS & AHMAD (1981) concluíram que a implementação de rotações livres era inviável e seria um trabalho infrutífero. De fato, o elemento foi esquecido durante os anos 70, e em publicações mais recentes voltou a ser discutido, com alguns autores apresentando soluções para o problema.

Diversos autores sugerem modelar o estado plano de tensões utilizando-se elementos especiais em que se incorpora como terceira variável nodal um giro, θ_z , no plano do elemento. O problema essencial desses elementos é que a definição de θ_z não é invariante com respeito ao sistema de coordenadas de referência, podendo-se demonstrar que não existe uma relação única entre θ_z e os giros dos lados dos elementos adjacentes, descumprindo-se, portanto, os requisitos de continuidade C^0 .

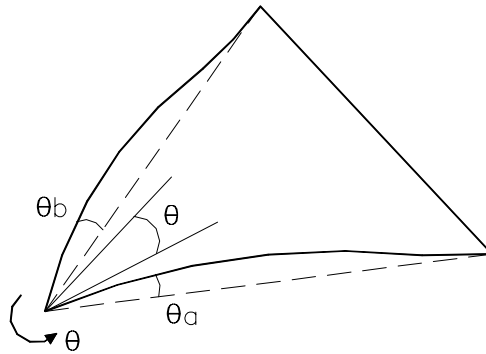


FIGURA 1.2 - Interpretação da rotação como média das rotações dos lados do elemento

Alguns pesquisadores que estudaram elementos de membrana com graus de liberdade rotacionais tradicionalmente consideraram as rotações como médias das rotações, θ_a e θ_b , dos lados concorrentes ao vértice, figura 1.2. No elemento simplificado discutido por WILLIAM (1969) e por ALMROTH & BROGAN (1981) foi assumido que tanto θ_a quanto θ_b são iguais a rotação média θ . Como essa hipótese elimina a possibilidade de distorções, uma versão alternativa foi proposta por WILLIAM (1969) na qual distorções por cisalhamento são introduzidas. Infelizmente isso destrói a invariância da formulação.

Essas dificuldades de se relacionar as rotações dos nós com as rotações dos lados do elemento foram claramente ilustradas por IRONS & AHMAD (1981). Mas essas dificuldades não impedem que se utilize a definição de rotação para meios contínuos:

$$\theta_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

que é independente com relação a adoção de x e y . A condição de invariância faz com que a condição $\theta = \theta_z$ possa ser introduzida mesmo se os elementos que se encontram em um nó forem referenciados a sistemas de coordenadas diferentes. Mas, é importante notar que θ_z não está diretamente relacionado com a rotação dos lados do elemento.

O primeiro elemento triangular com rotações livres que apresentou um bom desempenho foi desenvolvido por ALLMAN (1984). Allman apresentou uma alternativa simples para a formulação do elemento, baseada no princípio da mínima energia potencial, que combina as melhores propriedades dos elementos com aproximação linear e dos elementos com aproximação quadrática: deslocamentos quadráticos compatíveis com graus de liberdade apenas nos vértices dos triângulos. O elemento original de Allman apresentava alguns problemas, como “deficiência de posto da matriz” (rank deficiency), que foram corrigidos numa versão publicada em 1988. O elemento é não-conforme.

Em 1985 BERGAN & FELIPPA desenvolveram um novo elemento, também não-conforme, mas partindo da formulação livre, sugerida pela primeira vez por BERGAN & NYGARD (1984). O base da formulação é encontrar elementos que ao interagirem com elementos adjacentes possam representar um campo de deslocamentos arbitrário de corpo rígido ou de deformação constante.

A partir daí, o interesse por essa formulação cresceu muito e vários pesquisadores passaram a se dedicar ao estudo de novas maneiras de se desenvolver o elemento com liberdades rotacionais.

COOK (1987) desenvolveu um elemento triangular de membrana com liberdades rotacionais obtido a partir da formulação híbrida. A desvantagem desse elemento, e do elemento desenvolvido por ALLMAN (1984), é que pode-se ter um mecanismo no qual todas as rotações nodais da rede tenham o mesmo valor. Esse mecanismo pode ser evitado impondo-se uma rotação da rede igual a zero.

Em 1990, IBRAHIMBEGOVIC apresentou um elemento de membrana quadrilateral que possui, além das translações, rotações em seu plano. Uma aproximação não convencional é usada para o campo de deslocamentos combinado com uma aproximação independente das rotações. O elemento apresentou bons resultados tanto para redes de forma regular quanto para irregular. Ibrahimbegovic combinou o elemento com o elemento de placa DKQ desenvolvido por BATOZ & TAHAR (1982) e obteve um performance muito boa para análise de cascas.

SZE et al (1992) apresentaram um elemento quadrilateral de membrana com liberdades rotacionais utilizando modos de tensão ortogonais. O elemento foi desenvolvido baseado na aproximação de ALLMAN (1984) e apresentou bons resultados quando comparado com outros elementos quadrilaterais já desenvolvidos.

CHEN (1992) publicou um trabalho no qual fez uma análise crítica da performance do elemento desenvolvido por Allman, quando combinado com um elemento de placa para análise de cascas. Chen utilizou uma integração reduzida uniforme no elemento para melhorar o seu desempenho e a comparou com o uso da integração convencional.

HUGHES et al (1995) desenvolveram outros elementos de membrana com liberdades rotacionais, triangular e quadrilateral, introduzindo uma formulação variacional modificada para incorporar os campos de rotações independentes. Modos incompatíveis são incorporados na formulação para a obtenção de elementos finitos quadrilaterais com quatro nós bastante eficientes. Eles afirmam que um elemento de membrana padrão qualquer pode ser implementado com as liberdades rotacionais, utilizando-se a metodologia por eles apresentada. Para demonstrar são formulados uma família de elementos triangulares e quadrilaterais com modos incompatíveis.

Nesse trabalho optou-se pela utilização do elemento de membrana desenvolvido por BERGAN & FELIPPA (1985), que por se basear na formulação livre se apresenta relativamente simples e produz resultados muito bons.

2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

2.1 DESENVOLVIMENTO DO ELEMENTO

Neste item apresenta-se a formulação da matriz de rigidez do elemento finito de membrana com liberdades rotacionais baseada na formulação livre. Todo o desenvolvimento das matrizes e vetores relativos ao elemento será feito para o elemento triangular, o elemento quadrilateral será obtido pela união de quatro elementos triangulares utilizando-se a técnica da condensação estática. Ressalta-se que toda a formulação apresentada foi baseada no trabalho de BERGAN & FELIPPA (1985).

2.1.1 Características do elemento

As liberdades rotacionais são admitidas de acordo com a definição da mecânica do contínuo para rotações, dada pela equação:

$$\theta_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.1)$$

onde x e y são referidos aos eixos cartesianos no plano do elemento, e u e v são as componentes de deslocamento correspondentes. A rotação θ_z é invariante com respeito à escolha dos eixos de referência x e y .

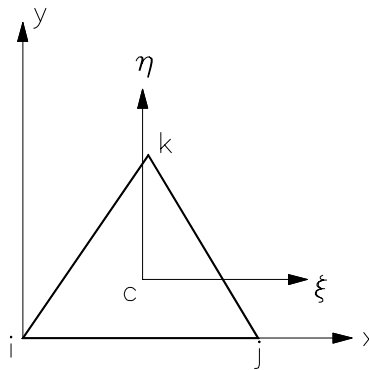


FIGURA 2.1 - Coordenadas locais do elemento triangular

A geometria de um elemento individual está ilustrada na figura 2.1. O triângulo é referido ao sistema cartesiano local (x,y) . Coordenadas adimensionais (ξ,η) são definidas por:

$$\xi = \frac{x - x_c}{\sqrt{A}} = \lambda \cdot (x - x_c) \quad (2.2)$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{\sqrt{A}} = \lambda \cdot (y - y_c)$$

onde, x_c e y_c são as coordenadas do centróide, A é a área do triângulo, dada pela equação:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (x_j y_k) \quad (2.3)$$

Dessa forma, $\lambda = 1/\sqrt{A}$ é um fator de escala com dimensões iguais ao inverso do comprimento. O uso de ξ e η elimina dependências dimensionais. Observa-se que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lambda, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda, \quad (2.4)$$

e que:

$$\xi_i + \xi_j + \xi_k = 0, \quad \eta_i + \eta_j + \eta_k = 0 \quad (2.5)$$

2.1.2 Modos básicos de deslocamento

O campo de deslocamentos \mathbf{U} do elemento é definido pelas duas componentes \mathbf{u} e \mathbf{v} , ao longo dos eixos x e y , respectivamente. O campo adotado é expresso como uma combinação linear de nove modos de deslocamento \mathbf{N}_i com amplitudes \mathbf{q}_i , que podem ser expressos da forma:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{q}_i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \quad (2.6)$$

Em concordância com a formulação livre, o campo \mathbf{U} deve ser decomposto em dois conjuntos \mathbf{U}_b e \mathbf{U}_s , que são associados com os modos básicos e de alta ordem, respectivamente. Os modos básicos, para um elemento de membrana, são simplesmente três modos de corpo rígido e três modos de deformação constante. Utilizando-se as coordenadas ξ e η os modos básicos podem ser escritos da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{N}_r \cdot \mathbf{q}_r + \mathbf{N}_c \cdot \mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_r + \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \xi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_c \quad (2.7)$$

Esses modos representam translações rígidas ao longo das direções x e y , uma rotação rígida em torno do eixo z , as deformações uniformes $\epsilon_x = \partial u / \partial x = \text{constante}$, $\epsilon_y = \partial v / \partial y = \text{constante}$ e a deformação cisalhante uniforme $\gamma_{xy} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y = \text{constante}$.

2.1.3 Modos de alta ordem (ou modos superiores)

Para um elemento com nove graus de liberdade, três modos de alta ordem são necessários. Considerando-se que as funções de forma para os modos básicos são lineares, a função mais apropriada para os modos de alta ordem são os polinômios quadráticos em termos de x e y , que produzem variação linear de tensões. Existem um total de seis funções para u e v e uma relação cuidadosa dos três modos precisa ser feita. BERGAN & FELIPPA (1985) estudaram a seleção dos modos e sugerem os modos de flexão pura, como uma maneira efetiva de se conseguir uma boa performance do elemento.

O uso de coordenadas invariantes para modos de flexão pura requer um cuidadoso estudo da geometria do triângulo. Assumindo-se que os modos são escolhidos num sistema de coordenadas auxiliares rotacionados \bar{x} e \bar{y} (cujas versões adimensionais são $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$) com origem no centróide do triângulo, figura 2.2, um modo de flexão pura no sistema \bar{x} , \bar{y} pode ser definido de acordo com as seguintes equações:

$$\bar{u} = \bar{\xi} \cdot \bar{\eta}, \quad \bar{v} = -\frac{1}{2} \cdot \bar{\xi}^2 \quad (2.8)$$

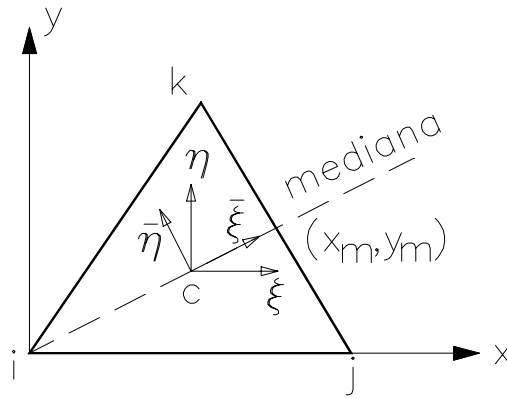


FIGURA 2.2 - Sistema de coordenadas auxiliares

Ressalta-se que a deformação cisalhante no sistema auxiliar é nula:

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (2.9)$$

Sendo φ o ângulo entre os eixos ξ e $\bar{\xi}$, o sistema pode ser rotacionado através da equação:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

A relação entre os modos de flexão pura no sistema auxiliar, equação 2.8, e as coordenadas locais adimensionais, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \text{sen}^2 \varphi & \text{sen } \varphi \cos \varphi \\ -\frac{1}{2} \cos^2 \varphi & -\text{sen } \varphi \cos \varphi & -\frac{1}{2} \text{sen}^2 \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

A transformação entre componentes de deslocamentos locais e os deslocamentos referentes aos eixos auxiliares pode ser obtida pela seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Substituindo-se a equação 2.12 na equação 2.11 temos os modos da equação 2.8, expressos diretamente no sistema local, que podem ser definidos da forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi & \cos^3 \varphi & \frac{1}{2} \operatorname{sen}^3 \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi \\ -\operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos^3 \varphi & -\operatorname{sen}^3 \varphi & \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Para que se tenha três modos de alta ordem do tipo da equação 2.8, é necessário que sejam selecionados três valores de φ : φ_1 , φ_2 e φ_3 , que devem ser intrinsecamente relacionados com a geometria do triângulo, figura 2.2. As direções dos três lados do elemento fornecem a escolha mais óbvia, mas nos leva a uma matriz \mathbf{G} singular. Uma outra opção seria adotar as direções das três medianas do triângulo como eixo local auxiliar \bar{x} , essa escolha fornece um conjunto de modos independentes.

Os três modos de alta ordem podem ser expressos, de forma expandida como:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{N}_s \cdot \mathbf{q}_s = \mathbf{N}_{s1} \cdot \mathbf{q}_7 + \mathbf{N}_{s2} \cdot \mathbf{q}_8 + \mathbf{N}_{s3} \cdot \mathbf{q}_9 \quad (2.14)$$

Em concordância com a equação 2.13, um modo típico pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\mathbf{N}_{si} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{si} \\ \mathbf{v}_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1i} & \mathbf{a}_{2i} & \mathbf{a}_{3i} \\ \mathbf{b}_{1i} & \mathbf{b}_{2i} & \mathbf{b}_{3i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

onde:

$$\mathbf{a}_{1i} = -\frac{1}{2} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{c}_i^2), \quad \mathbf{a}_{2i} = \mathbf{c}_i^3, \quad \mathbf{a}_{3i} = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_i^3) + \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{c}_i^2, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{b}_{1i} = -\mathbf{s}_i^2 \cdot \mathbf{c}_i - \frac{1}{2} (\mathbf{c}_i^3), \quad \mathbf{b}_{2i} = -\mathbf{s}_i^3, \quad \mathbf{b}_{3i} = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_i^2 \cdot \mathbf{c}_i),$$

$$\mathbf{s}_i = \operatorname{sen} \varphi_i = \frac{(\eta_m - \eta_i)}{\mu_i} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\eta_i}{\mu_i}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{c}_i = \cos \varphi_i = \frac{(\xi_m - \xi_i)}{\mu_i} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\xi_i}{\mu_i}$$

onde o índice m indica o ponto médio entre j e k. Aqui ξ_m , η_m e μ_i são as coordenadas adimensionais desse ponto, definidas pelas seguintes equações:

$$\xi_m = \frac{1}{2} \cdot (\xi_j + \xi_k), \quad \eta_m = \frac{1}{2} \cdot (\eta_j + \eta_k), \quad (2.18)$$

$$\mu_i = \sqrt{(\xi_m - \xi_i)^2 + (\eta_m - \eta_i)^2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$$

onde i, j e k denotam a permutação cíclica entre 1, 2 e 3; por exemplo i = 2, j = 3, k = 1.

2.1.4 Equações de membrana

Os graus de liberdade do elemento de membrana triangular escritos de forma vetorial são:

$$\mathbf{V}^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_1 \quad \boldsymbol{\theta}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{v}_2 \quad \boldsymbol{\theta}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{v}_3 \quad \boldsymbol{\theta}_3] \quad (2.19)$$

A relação entre os deslocamentos nodais, equação 2.19, e os parâmetros generalizados \mathbf{q} são obtidos através da matriz \mathbf{G} fazendo-se a apropriada substituição das coordenadas nodais nas funções de forma. \mathbf{G}_{rc} é uma sub-matriz (9X6) correspondente aos modos básicos e de deformação constante e \mathbf{G}_s é uma sub-matriz (9X3) correspondente aos modos de alta ordem.

$$\mathbf{G}_{rc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta_i & \xi_i & 0 & \eta_i \\ 0 & 1 & \xi_i & 0 & \eta_i & \xi_i \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\eta_j & \xi_j & 0 & \eta_j \\ 0 & 1 & \xi_j & 0 & \eta_j & \xi_j \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\eta_k & \xi_k & 0 & \eta_k \\ 0 & 1 & \xi_k & 0 & \eta_k & \xi_k \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Particionando-se a sub-matriz \mathbf{G}_s , obtém-se:

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{s11} & \mathbf{G}_{s12} & \mathbf{G}_{s13} \\ \mathbf{G}_{s21} & \mathbf{G}_{s22} & \mathbf{G}_{s23} \\ \mathbf{G}_{s31} & \mathbf{G}_{s32} & \mathbf{G}_{s33} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde:

$$\mathbf{G}_{sij} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1j} \cdot \xi_i^2 + \mathbf{a}_{2j} \cdot \xi_i \cdot \eta_i + \mathbf{a}_{3j} \cdot \eta_i^2 \\ \mathbf{b}_{1j} \cdot \xi_i^2 + \mathbf{b}_{2j} \cdot \xi_i \cdot \eta_i + \mathbf{b}_{3j} \cdot \eta_i^2 \\ -\lambda \cdot (\mathbf{c}_j \cdot \xi_i + \mathbf{s}_j \cdot \eta_i) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

As deformações de membrana são encontradas pela apropriada diferenciação dos modos de deslocamento assumidos, assim tem-se :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} = \Delta \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B}_{rc} \cdot \mathbf{q}_{rc} + \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{q}_s \quad (2.23)$$

onde Δ é o operador diferencial para deformações de membrana. Aplicando o operador na equação 2.7, obtém-se:

$$\mathbf{B}_{rc} = \Delta \mathbf{N}_{rc} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Fazendo-se o mesmo para os modos de alta ordem, obtém-se:

$$\mathbf{B}_s = \Delta \mathbf{N}_s = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2a_{11}\xi + a_{21}\eta & 2a_{12}\xi + a_{22}\eta & 2a_{13}\xi + a_{23}\eta \\ b_{21}\xi + 2b_{31}\eta & b_{22}\xi + 2b_{32}\eta & b_{23}\xi + 2b_{33}\eta \\ -4b_{31}\xi - 4a_{11}\eta & -4b_{32}\xi - 4a_{12}\eta & -4b_{33}\xi - 4a_{13}\eta \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

As forças de membrana por unidade de comprimento, \mathbf{p} , são relacionadas com as deformações através da matriz \mathbf{D}_m :

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_{xx} \\ p_{yy} \\ p_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \\ \mathbf{D}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_m \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.26)$$

onde \mathbf{D}_m é a matriz que relaciona as forças de membrana por unidade de comprimento com as deformações. É essencialmente a matriz constitutiva da elasticidade, \mathbf{C} , integrada ao longo da espessura do elemento. Esta integração reduz o volume V_1 para A , a área do elemento.

Os coeficientes da matriz \mathbf{D}_m , da equação 2.26, são admitidos como constantes ao longo de todo o elemento. Para um elemento de espessura t , material com módulo de elasticidade transversal E e coeficiente de Poisson ν , a matriz \mathbf{D}_m pode ser expressa como:

$$\mathbf{D}_m = \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

2.1.5 Matriz “amontoadora”

A matriz “amontoadora” \mathbf{L} expressa a relação entre as forças nodais \mathbf{t}_c e um estado de deformação constante $\boldsymbol{\sigma}_c$. Para o presente caso:

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{L} \cdot \mathbf{p}_c \quad (2.28)$$

onde \mathbf{t}_c são as forças nodais consistentes com as liberdades nodais, equação 2.19, e \mathbf{p}_c são as forças de membrana por unidade de comprimento, constantes ao longo do

elemento. As forças de membrana, referidas ao sistema local de coordenadas, em um ponto que pertence a um lado do elemento podem ser determinadas utilizando-se as relações de transformação de coordenadas. Dessa forma, obtém-se as equações:

$$\bar{p}_{xx} = p_{xx} \cdot \cos^2 \psi + p_{yy} \cdot \sin^2 \psi + 2 \cdot p_{xy} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \tag{2.29}$$

$$\bar{p}_{xy} = -p_{xx} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + p_{yy} \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi + p_{xy} \cdot (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)$$

Nas quais ψ define a orientação do lado do elemento, conforme figura 2.3.

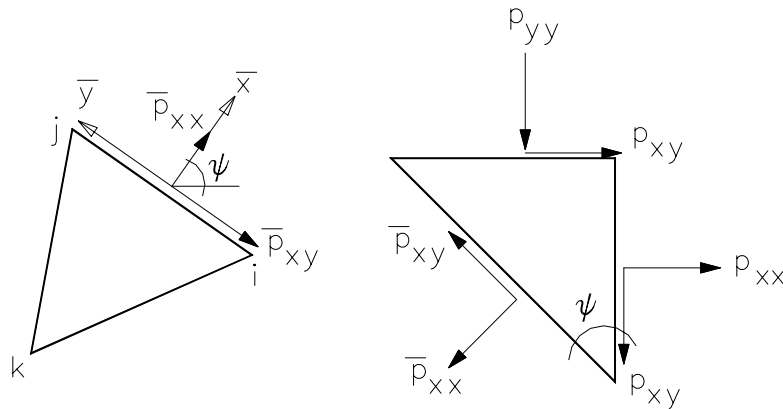


FIGURA 2.3 - Forças de membrana no lado do elemento

Em um estado arbitrário de deformação constante, quando a matriz constitutiva C não se altera no domínio do elemento, as forças calculadas em todos os pontos desse domínio, incluindo os seus lados, se mantém inalterados.

Os deslocamentos ao longo do lado i - j , considerando-se o sistema de coordenadas locais (\bar{x}, \bar{y}) , são dados pela transformação:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{ui} & 0 & \alpha \bar{N}_{\theta i} & \bar{N}_{uj} & 0 & \alpha \bar{N}_{\theta j} \\ 0 & \bar{N}_{vi} & 0 & 0 & \bar{N}_{vj} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} - \\ \bar{u}_i \\ - \\ \bar{v}_i \\ \theta_i \\ - \\ \bar{u}_j \\ - \\ \bar{v}_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{2.30}$$

\bar{N}_{ui} , \bar{N}_{uj} , $\bar{N}_{\theta i}$ e $\bar{N}_{\theta j}$ são funções de interpolação típicas de viga que definem o deslocamento \bar{u} em termos dos deslocamentos nodais nos nós i e j . Similarmente, \bar{N}_{vi} e \bar{N}_{vj} são funções de interpolação lineares para a componente tangencial \bar{v} .

Pode-se observar que um fator de escala α foi introduzido nas funções de forma, com o intuito de relacionar os deslocamentos normais do contorno do elemento com as rotações. Não existe uma relação única entre as rotações dos lados do elemento e as

rotações definidas pela mecânica do contínuo, equação 2.1. O fator α funciona como um parâmetro de ligação entre os dois conceitos de rotação. A determinação das forças concentradas nos nós pode ser feita mediante aplicação do PTV e obtém-se:

$$\begin{aligned} t_{uj} &= \frac{l_{ij}}{2} \cdot (\mathbf{p}_{xx} \cdot \cos \psi + \mathbf{p}_{xy} \cdot \sen \psi) = \frac{1}{2} (y_{ji} \cdot \mathbf{p}_{xx} + x_{ij} \cdot \mathbf{p}_{xy}) \\ t_{vj} &= \frac{l_{ij}}{2} \cdot (\mathbf{p}_{yy} \cdot \sen \psi + \mathbf{p}_{xy} \cdot \cos \psi) = \frac{1}{2} (x_{ij} \cdot \mathbf{p}_{yy} + y_{ji} \cdot \mathbf{p}_{xy}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} t_{\theta j} &= \alpha \frac{l_{ij}^2}{12} \cdot (\mathbf{p}_{xx} \cdot \cos^2 \psi + \mathbf{p}_{yy} \cdot \sen^2 \psi + 2 \cdot \mathbf{p}_{xy} \cdot \sen \psi \cdot \cos \psi) \\ &= \frac{\alpha}{12} \cdot (y_{ji}^2 \cdot \mathbf{p}_{xx} + x_{ij}^2 \cdot \mathbf{p}_{yy} + 2 \cdot x_{ij} \cdot y_{ji} \cdot \mathbf{p}_{xy}) \end{aligned}$$

onde $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ji} = y_j - y_i$, l_{ij} é o comprimento do lado do elemento.

A contribuição do lado j-k para o nó j é obtida seguindo-se um procedimento similar, e a soma das duas contribuições fornece a força total no nó j. As forças transferidas aos dois outros nós são obtidas pela simples permutação de índices. A matriz “amontoadora”, \mathbf{L} , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} \mathbf{L}_i \\ \mathbf{L}_j \\ \mathbf{L}_k \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

onde:

$$\mathbf{L}_j = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} y_{ki} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ki} \\ \frac{\alpha}{6} (y_{ji}^2 - y_{kj}^2) & \frac{\alpha}{6} (x_{ij}^2 - x_{jk}^2) & \frac{\alpha}{3} (x_{ij} \cdot y_{ji} - x_{jk} \cdot y_{kj}) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Se $\alpha = 0$, tem-se a matriz “amontoadora” para o triângulo com deformação constante (CST). Para esse elemento as forças nodais são relacionadas apenas com translações.

2.1.6 Matriz generalizada de alta ordem

Para um elemento bidimensional, a matriz generalizada de alta ordem é:

$$\mathbf{K}_{qs} = \int_A \mathbf{B}_s^T \cdot \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{B}_s \cdot dA \quad (2.34)$$

A matriz \mathbf{B}_s contém apenas funções lineares e é dada pela equação 2.25. Pode-se denominar a i -ésima coluna de \mathbf{B}_s de:

$$\mathbf{B}_{si} = \xi \cdot \mathbf{B}_{\xi i} + \eta \cdot \mathbf{B}_{\eta i} \quad (2.35)$$

onde \mathbf{B}_ξ e \mathbf{B}_η são os coeficientes de \mathbf{B}_s associados com ξ e η , respectivamente.

Assumindo-se que a matriz \mathbf{D}_m é constante ao longo de todo o elemento, os (i,j) -ésimos termos da matriz \mathbf{K}_{qs} podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{qs}(i, j) = & J_{\xi\xi} \mathbf{B}_{\xi i}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{\xi j} + J_{\xi\eta} (\mathbf{B}_{\xi i}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{\eta j} + \mathbf{B}_{\eta i}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{\xi j}) \\ & + J_{\eta\eta} \mathbf{B}_{\eta i}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{\eta j} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Onde $J_{\xi\xi}$, $J_{\xi\eta}$ e $J_{\eta\eta}$ são os momentos de inércia de área, dados pelas integrais:

$$\begin{aligned} J_{\xi\xi} &= \int_A \xi^2 \cdot dA = -\frac{A}{6} \cdot (\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_k + \xi_k \xi_i) \\ J_{\xi\eta} &= \int_A \xi \eta \cdot dA = \frac{A}{12} \cdot (\xi_i \eta_i + \xi_j \eta_j + \xi_k \eta_k) \\ J_{\eta\eta} &= \int_A \eta^2 \cdot dA = -\frac{A}{6} \cdot (\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_k + \eta_k \eta_i) \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.1.7 A matriz de rigidez

Em concordância com a formulação livre, a matriz de rigidez do elemento é formada pela superposição da matriz referente aos modos básicos com a matriz referente aos modos de alta ordem:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (2.38)$$

A matriz dos modos básicos, para o caso bidimensional, fica:

$$\mathbf{K}_b = \frac{1}{A} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{L}^T \quad (2.39)$$

A matriz dos modos de alta ordem, para o presente caso fica:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{H}_s^T \cdot \mathbf{K}_{qs} \cdot \mathbf{H}_s \quad (2.40)$$

Como já foi mencionado, a matriz de alta ordem pode ser multiplicada por um valor escalar positivo qualquer β , logo a matriz de rigidez total do elemento é dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \beta \cdot \mathbf{K}_s \quad (2.41)$$

que satisfaz ao *patch-test* e ao requisito de ser positiva definida para convergência.

2.1.8 Os parâmetros livres

No item 2.1.5 um parâmetro $\alpha \geq 0$ foi introduzido na formulação da matriz “amontoadora”, \mathbf{L} . Esse parâmetro aparece como um fator de escala nas funções de forma, multiplicando os termos relacionados com os graus de liberdade rotacionais. O valor de α afeta a matriz dos modos básicos e o cálculo das deformações.

Um segundo parâmetro, $\beta \geq 0$, pode ser introduzido multiplicando-se a matriz dos modos de alta ordem. Logo a matriz de rigidez da estrutura pode ser expressa da forma:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \beta \cdot \mathbf{K}_s \quad (2.42)$$

Justifica-se a utilização desses parâmetros porque a matriz de rigidez produzida pela formulação livre satisfaz o teste do elemento individual para qualquer matriz de rigidez que possua o “rank” (posto da matriz) apropriado. Conseqüentemente, a matriz \mathbf{K}_s pode ser multiplicada por um coeficiente positivo qualquer, sem que seja destruída a propriedade fundamental de convergência.

Os valores de α e β foram estudados por BERGAN & FELIPPA (1985) com o intuito de se aperfeiçoar as propriedades da rigidez do elemento. Chegou-se a conclusão de que um valor ótimo de α estaria entre 1 e 2. Recomenda-se utilizar um valor médio de $\alpha = 1.5$ para casos gerais.

O parâmetro β para a matriz de alta ordem pode ser utilizado para ajustar a matriz de rigidez total, \mathbf{K} , e com isso otimizar a convergência. A determinação de um valor ótimo para β por técnicas de equilíbrio de energia é discutida por BERGAN & FELIPPA (1985). Como resultado das pesquisas, esses autores recomendam o valor $\beta = 0.5$ combinado com o fator de rotação $\alpha = 1.5$, para uso geral e prático.

2.1.9 Determinação das deformações e tensões

Desde que os deslocamentos são conhecidos, as deformações podem ser obtidas através da equação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_{rc} \cdot \mathbf{q}_{rc} + \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{q}_s = \left(\mathbf{B}_{rc} \cdot \mathbf{H}_{rc} + \sqrt{\beta} \cdot \mathbf{B}_s \cdot \mathbf{H}_s \right) \cdot \mathbf{V} \quad (2.43)$$

Nota-se que a parte de corpo rígido de \mathbf{B}_{rc} é nula, e que $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ desaparece no centróide de elemento ($\xi=\eta=0$). Alternativamente, $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ pode ser obtida através da matriz “amontoadora”, \mathbf{L} :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \frac{1}{A} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{V} \quad (2.44)$$

O uso de $\sqrt{\beta}$ na equação 2.43 torna consistente em energia a relação deformação/deslocamento com a matriz de alta ordem.

As deformações ϵ_s , que são associadas aos modos de alta ordem, variam linearmente ao longo do elemento. Seus valores nos vértices do elemento podem ser obtidos através da substituição apropriada das coordenadas nodais em \mathbf{B}_s .

Uma vez obtidas as deformações, as correspondentes tensões são facilmente obtidas através da equação:

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot \epsilon \quad (2.45)$$

3 EXEMPLO 1

Esse primeiro exemplo trata de uma viga em balanço com uma carga parabolicamente distribuída ao longo da extremidade livre, figura 3.1. O problema foi proposto por BERGAN & FELIPPA (1985) com a intenção de se verificar o desempenho do elemento quando sujeito a um carregamento predominante de flexão.

A viga, mostrada na figura 3.1, está sob a ação de uma carga total P , possui módulo de elasticidade longitudinal $E=30.000$ e coeficiente de Poisson $\nu=1/4$. A rede típica utilizada nas discretizações da estrutura está ilustrada na figura 3.2. As redes são constituídas de dois triângulos retângulos, para o caso do elemento triangular, ou de um quadrado, para o caso do elemento quadrilateral. As redes são definidas na tabela 3.1 por $(N_x \times N_y)$, onde N_x é o número de subdivisões na direção x e N_y é o número de subdivisões na direção y . As condições de contorno são representadas pelo impedimento das duas translações, nas direções x e y , nos nós localizados na seção $x=0$. As rotações nodais são livres.

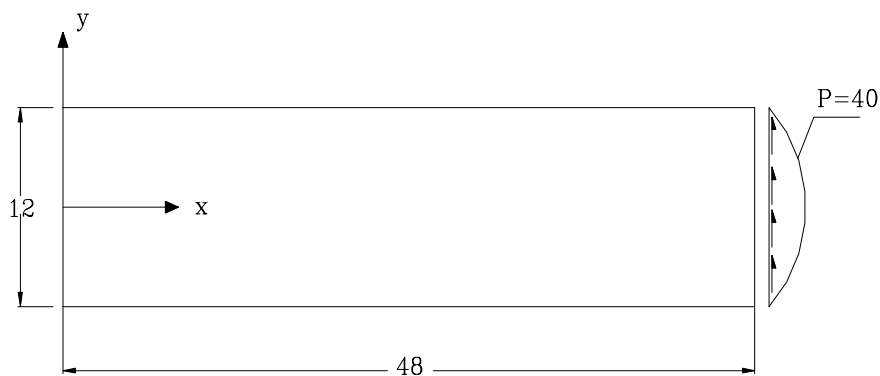


FIGURA 3.1 - Viga em balanço

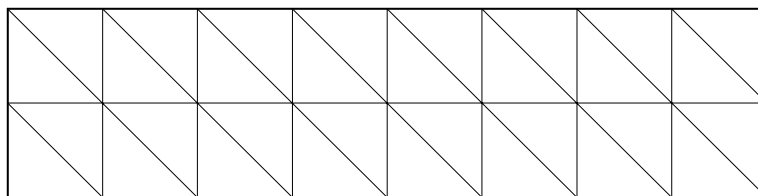


FIGURA 3.2 - Rede típica para elemento triangular (8x2)

Na tabela 3.1 apresentam-se os resultados obtidos para 4 discretizações diferentes da viga. Para efeito de comparação apresentam-se os resultados obtidos com os elementos: CST, PE (elemento desenvolvido pela formulação tradicional via energia potencial utilizando-se as mesmas funções de forma adotadas no presente trabalho), o

elemento isoparamétrico implementado por RAMALHO (1990) no sistema LASER e o elemento desenvolvido no presente trabalho, variando-se os valores dos parâmetros livres.

TABELA 3.1 - Deslocamento da viga utilizando-se elementos triangulares.

DESLOCAMENTO NO PONTO C (Direção y)				
ELEMENTO	1 (4x1)	2 (8x2)	3 (16x4)	4 (32x8)
CST	0.09095	0.19657	0.29411	0.33778
PE	0.21421	0.31893	0.36284	0.37654
FF-1 ($\alpha=1.5, \beta=0.5$)	0.34498	0.35435	0.35529	0.35567
FF-2 ($\alpha=1.5, \beta=1.0$)	0.26776	0.32779	0.34745	0.35313
FF-3 ($\alpha=1.0, \beta=1.0$)	0.18812	0.28282	0.32249	0.34899
ISOPARAMÉTRICO	0.14024	0.28467	0.39360	0.43995
VALOR TEÓRICO	0.35583			

Utilizando-se a rede discretizada em triângulos chega-se a conclusão que o elemento desenvolvido apresenta uma boa performance. Quando comparado com o CST nota-se que apesar desse também convergir, exige uma rede mais refinada para apresentar resultados satisfatórios. O elemento PE não converge, os resultados são razoáveis para redes pouco refinadas, mas à medida em a rede vai sendo refinada o elemento diverge. De acordo com BERGAN & FELIPPA (1985) esse efeito acontece devido a perda de energia dos elementos não-conformes que não satisfazem ao *patch-test*. Comparando-se os resultados obtidos com as três opções da formulação livre percebe-se que o ajuste dos parâmetros livres acelera a convergência dos resultados.

Na figura 3.3 apresenta-se o gráfico de convergência dos elementos CST, PE e da formulação livre utilizando-se os valores recomendados dos parâmetros livres. O gráfico ilustra com maior clareza a convergência dos resultados obtidos. Na figura 3.4 compara-se os resultados obtidos com a variação dos parâmetros livres.

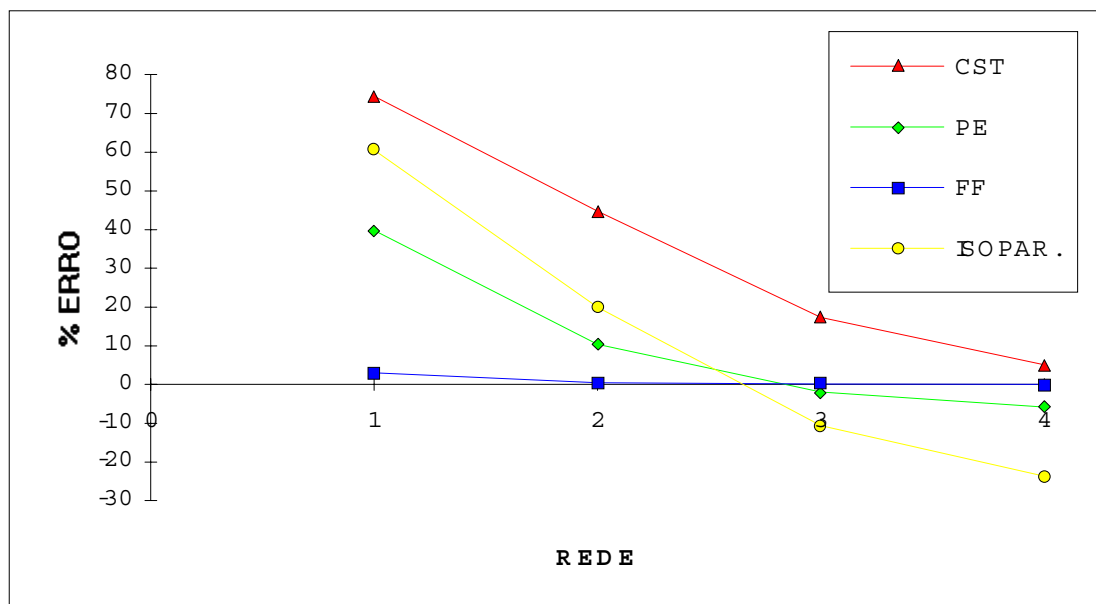


FIGURA 3.3 - Gráfico de convergência dos deslocamentos

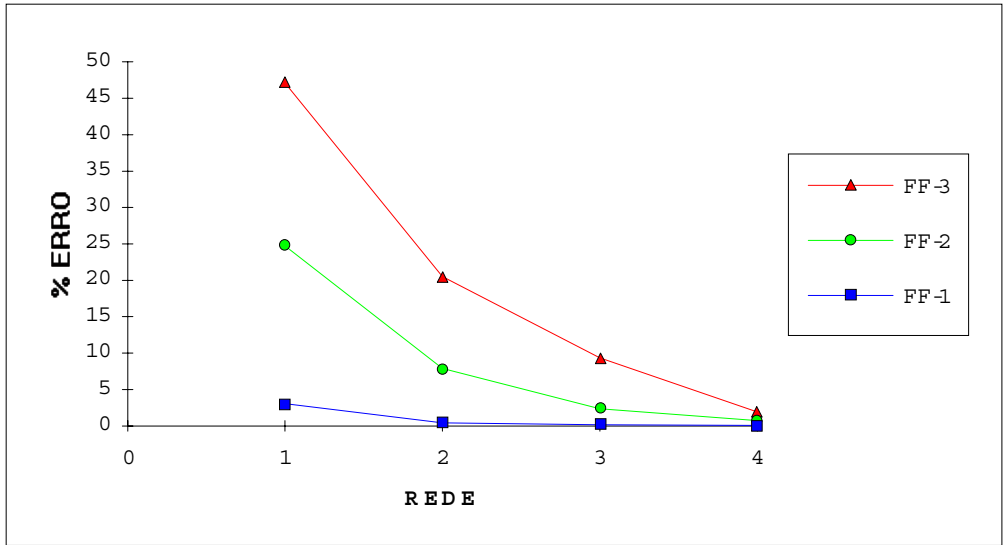


FIGURA 3.4 - Gráfico de convergência dos deslocamentos

TABELA 3.2 - Deslocamento da viga utilizando-se elementos quadrilaterais.

DESLOCAMENTO NO PONTO C				
ELEMENTO	1 (4x1)	2 (8x2)	3 (16x4)	4 (32x8)
CST	0.20583	0.29842	0.33875	0.35112
FF-1 ($\alpha=1.5, \beta=0.5$)	0.29874	0.35292	0.35657	0.35536
FF-2 ($\alpha=1.5, \beta=1.0$)	0.25229	0.33192	0.35027	0.35502
FF-3 ($\alpha=1.0, \beta=1.0$)	0.24516	0.32476	0.34750	0.35422
ISOPARAMÉTRICO	0.34933	0.35181	0.35438	0.35618
VALOR TEÓRICO	0.35583			

Utilizando-se o elemento quadrilateral nota-se que a convergência do elemento CST e do elemento isoparamétrico melhora se comparado com o triangular. Já a performance do elemento desenvolvido pela formulação livre apresenta melhores resultados para o elemento triangular.

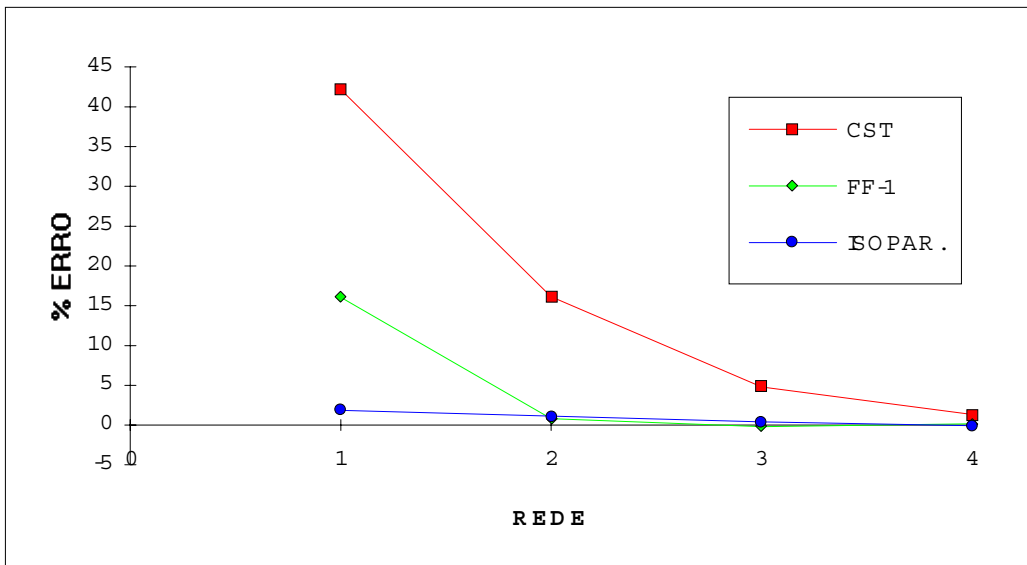


FIGURA 3.5 - Gráfico de convergência dos deslocamentos

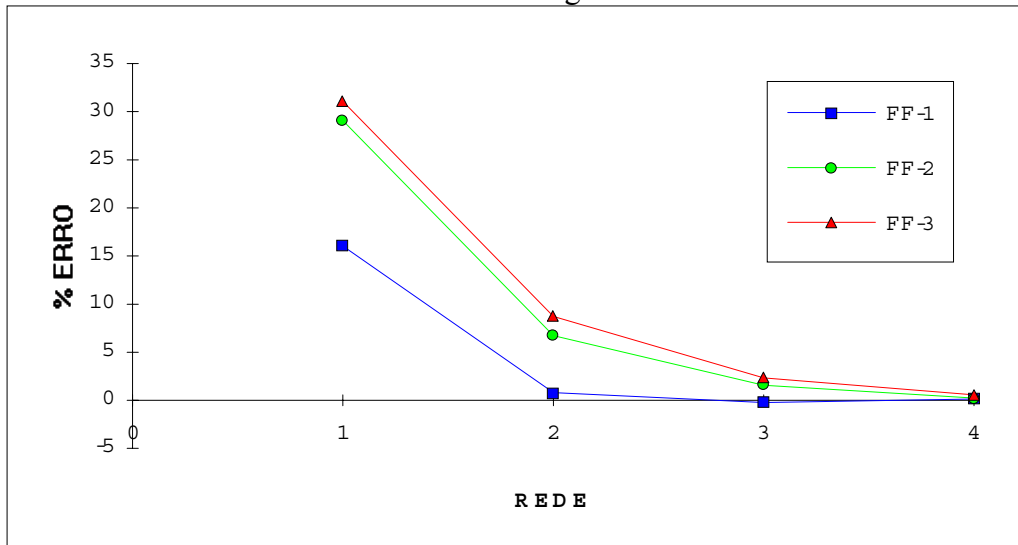


FIGURA 3.6 - Gráfico de convergência dos deslocamentos

Na tabela 3.3 mostra-se os valores das componentes de tensão obtidos para a discretização de (4x16) na seção da viga referente a $x=12.0$.

TABELA 3.3 - Tensões na viga considerando-se a rede de (4x16).

TENSÃO	Coord. X	Coord. Y	Teoria	CST	FF
σ_x	12.0	6.0	-60.00	-41.10	-54.56
σ_x	12.0	3.0	-30.00	-25.08	-30.09
σ_x	12.0	0.0	0.00	-0.41	-0.15
σ_x	12.0	-3.0	30.00	24.38	29.75
σ_x	12.0	-6.0	60.00	41.87	55.56
τ_{xy}	12.0	6.0	0.00	0.47	3.04
τ_{xy}	12.0	3.0	3.75	3.20	3.55
τ_{xy}	12.0	0.0	5.00	4.31	4.91
τ_{xy}	12.0	-3.0	3.75	3.34	3.61
τ_{xy}	12.0	-6.0	0.00	3.91	0.15

Nota-se que para as tensões normais, σ_x , os resultados obtidos com a formulação livre são melhores que os resultados obtidos com o elemento CST, apesar de se apresentarem subestimados em relação aos valores teóricos. Observa-se que para as tensões de cisalhamento, τ_{xy} , os valores obtidos nos nós extremos apresentam resíduos. Isto se deve à rede adotada. Como esta não apresenta simetria, os resultados obtidos para as tensões não são simétricos. Esta rede foi escolhida para manter a coerência nas comparações feitas com o trabalho de BERGAN & FELIPPA (1985). Se adotarmos uma rede simétrica, figura 3.7, os resultados melhoram significativamente como pode ser visto na tabela 3.4.

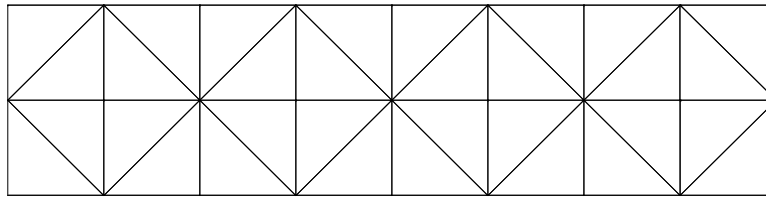


FIGURA 3.7 - Rede simétrica para elemento triangular (8x2)

TABELA 3.4 - Tensões na viga considerando-se a rede simétrica de (4x16).

TENSÃO	Coord. X	Coord. Y	Teoria	FF
σ_x	12.0	6.0	-60.00	-60.38
σ_x	12.0	3.0	-30.00	-29.88
σ_x	12.0	0.0	0.00	0.00
σ_x	12.0	-3.0	30.00	29.88
σ_x	12.0	-6.0	60.00	60.38
τ_{xy}	12.0	6.0	0.00	1.84
τ_{xy}	12.0	3.0	3.75	3.62
τ_{xy}	12.0	0.0	5.00	4.92
τ_{xy}	12.0	-3.0	3.75	3.62
τ_{xy}	12.0	-6.0	0.00	1.84

4 EXEMPLO 2

A figura 4.1 mostra a planta de um núcleo de elevador de seção transversal delgada aberta. A estrutura é de concreto armado, com paredes de espessura constante de 25 cm. O edifício possui 15 andares de 4,00 m de pé-direito cada um. O módulo de elasticidade longitudinal E , é de 14.486.600 kN/m² e o módulo de elasticidade transversal G , é de 6.036.700 kN/m².

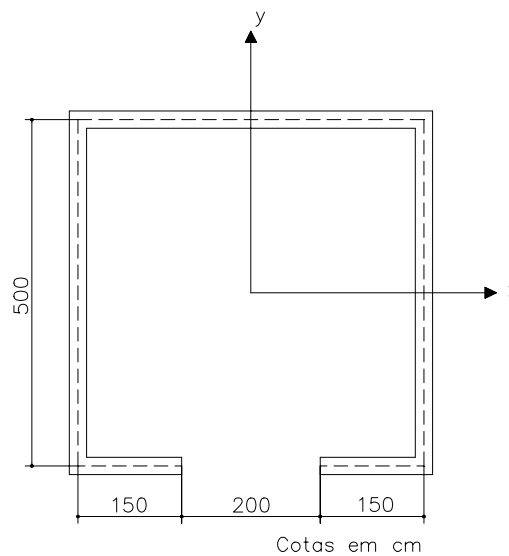


FIGURA 4.1 - Planta do núcleo do elevador

O carregamento aplicado, conforme figura 4.2, consiste de duas cargas concentradas aplicadas no topo da estrutura, as cargas são aplicadas distribuídas nos nós. No primeiro caso aplica-se uma ação horizontal $H = 600$ kN no sentido do eixo y , no segundo caso aplica-se a mesma ação no sentido do eixo x . Em ambos os casos aplica-se uma carga vertical $V = 30.000$ kN. O núcleo é suposto rigidamente engastado na sua base.

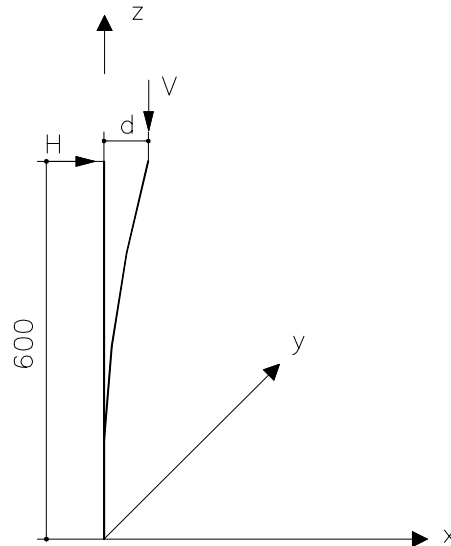


FIGURA 4.2- Carregamentos aplicados ao núcleo

Este exemplo, apresentado por MORI (1992), possui solução analítica. A finalidade da sua apresentação é demonstrar o bom funcionamento do elemento em planos diferentes no espaço.

O deslocamento teórico do topo do núcleo, a flecha calculada na extremidade livre, pode ser obtido através da equação:

$$d = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (4.1)$$

onde,

d = deslocamento na direção da ação aplicada

P = ação horizontal

L = comprimento (altura)

E = módulo de elasticidade transversal

I = momento de inércia da seção

Na figura 4.3 ilustra-se a discretização utilizada. Os resultados analíticos e os obtidos com o elemento desenvolvido são apresentados na tabela 4.1.

TABELA 4.1- Deslocamento no topo da estrutura

Deslocamento no topo da estrutura (d) em metros			
CASO 1 (H – Direção do eixo y)		CASO 2 (H - Direção do eixo x)	
ANALÍTICO	FF	ANALÍTICO	FF
0.171767	0.171499	0.144293	0.148309

Através da análise dos resultados nota-se que os valores obtidos com o programa estão bem próximos dos resultados analíticos. Este exemplo não só confirma os bons resultados obtidos com o uso do elemento, mas também comprova que a sua implementação ao sistema LASER foi bem sucedida. Fica claro que a obtenção da matriz de rigidez no sistema local e a sua posterior rotação para o sistema de referência global funciona perfeitamente. Com este exemplo garante-se que o programa tem condições de analisar uma estrutura independentemente da posição em que ela se encontra no espaço.

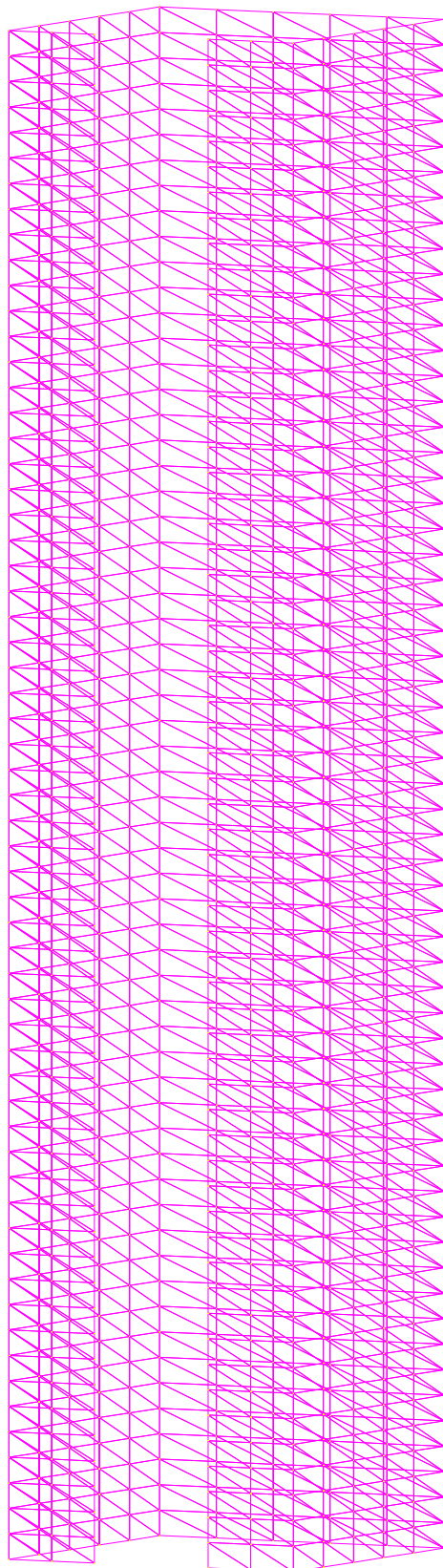


FIGURA 4.3 - Discretização do núcleo

5 CONCLUSÕES

A finalidade principal deste trabalho foi apresentar o desenvolvimento e a implementação, em um sistema computacional existente, de um novo elemento finito de membrana. Esse elemento possui, além das duas translações por nó em seu próprio plano, rotações em torno do eixo normal a esse plano.

Uma das vantagens do elemento desenvolvido é a aplicação na análise de cascas pelo método dos elementos finitos. É notória a complexidade da análise dessas estruturas, que em geral são analisadas utilizando-se métodos aproximados. Uma das maneiras de se fazer essa análise é a utilização de dois elementos planos, um de placa e um de membrana, que se complementam e acabam funcionando como um verdadeiro elemento de casca.

A dificuldade que surge em tais casos é exatamente a falta do grau de liberdade rotacional no elemento de membrana. A sua ausência dificulta a modelagem de maneira adequada do comportamento da estrutura e faz com que a matriz de rigidez global apresente singularidades no caso de elementos coplanares ou aproximadamente coplanares. A solução para esses casos é impedir o deslocamento ou eliminar esse grau de liberdade global. Entretanto, nem sempre essa é uma tarefa fácil, sobretudo nas cascas abatidas ou estruturas que não se desenvolvam segundo os planos formados pelos eixos do sistema de referência global. Para esses casos será necessário a colocação de coeficientes de molas, convenientemente adotados, de forma a eliminar a singularidade e não interferir nos resultados obtidos, o que nem sempre pode ser conseguido.

Entretanto, o elemento desenvolvido não apresenta esse inconveniente, já que ao ser acoplado a um elemento de placa têm-se rigidezes que contribuem para os seis graus de liberdade por nó de um sistema de análise de estruturas tridimensionais. Dessa forma, não existe a necessidade da colocação das referidas molas, sendo que a análise da casca pode ser realizada sem essas imperfeições de modelagem.

Outro ponto importante a respeito dos graus de liberdade rotacionais é que eles possibilitam a ligação com outros elementos de forma simples e respeitando-se condições mais verossímeis de vinculação. É o caso de se ligar elementos de barra aos elementos de membrana, obtendo-se uma estrutura plana que se encontra frequentemente quando se trata da modelagem de painéis de contraventamento de uma edificação, no caso, paredes ligadas por lintéis.

Caso se utilize para essa modelagem elementos de membrana sem graus de liberdade rotacionais a ligação com a barra somente pode representar a transmissão de momentos fletores se forem adotados procedimentos de eficácia duvidosa. Entretanto, com a utilização do elemento aqui desenvolvido, pode-se realizar esse tipo de modelagem sem qualquer cuidado especial e os resultados serão obtidos com a representação mais coerente da vinculação mencionada.

O elemento foi desenvolvido utilizando-se a formulação livre, uma alternativa proposta por BERGAN & NYGARD (1984). Uma vantagem dessa formulação é que através do uso de funções não-conforme de deslocamento se permite o desenvolvimento de elementos com convergência garantida e implementação simples e eficiente. Uma outra vantagem apresentada pela formulação é o fato de se garantir que o *patch-test* será satisfeito durante o próprio desenvolvimento do elemento, não sendo necessários testes posteriores para se verificar essa propriedade. O elemento possibilita atingir resultados suficientemente precisos, sob o ponto de vista prático, com discretizações relativamente pobres.

Os resultados numéricos apresentados comprovam o bom desempenho do elemento e mostram que a implementação ao sistema foi corretamente realizada. Com isso, obteve-se uma valiosa ferramenta que pode ser utilizada com segurança para a análise de estruturas submetidas a estado plano de tensão e para análise de cascas, desde que se acople o referido elemento a um elemento de placa também comprovadamente eficiente.

Analisando-se o exemplo 1 observa-se que tanto o elemento triangular quanto o elemento quadrilateral apresentam um bom desempenho quando submetidos a um carregamento predominante de flexão. Os valores ótimos dos parâmetros livres sugeridos por BERGAN & FELIPPA (1985) realmente forneceram os melhores resultados, mesmo para redes pouco refinadas. O desempenho do elemento é notadamente superior ao elemento CST (Constant Strain Triangle), pois sua convergência é muito mais rápida e a precisão dos valores obtidos com redes pouco refinadas é muito superior.

Já o exemplo 2, além de confirmar os bons resultados obtidos anteriormente para estados de flexão predominante, assegura que a implementação ao sistema foi feita corretamente. Fica clara a possibilidade do elemento estar em qualquer posição do espaço.

Dessa forma, pode-se dizer que os objetivos principais deste trabalho foram plenamente atingidos, obtendo-se com esse desenvolvimento uma ferramenta adequada à solução dos problemas propostos.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBIGES, M.; GOULET, J. Contreventement des batiments. *Annales I.T.B.T.P.* n.149, p.473-500, 1960.
- ALLMAN, D.J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Comput. Structures.* v.19, n.1-2, p.1-8,1984.
- ALLMAN, D.J. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *Int. j. numer. methods eng.* v. 26, p.2645-2655, 1988.
- ALMROTH, B.O.; BROGAN, F.A. Numerical procedures for analysis of structural shells. *Thecnical rept.* AFWAL-TR-80-3129, Lockheed Palo Alto Research Laboratory, Palo alto, CA, 1981
- BATOZ, J.L.; TAHAR, M.B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *Int. j. numer. methods eng.* v. 18, p.1655-1677, 1982.
- BERGAN, P.G. Triangular element with 6 parameters at each node. In: *Plane stress analysis using the finite element method.* Division of structural mechanics. The Norwegian institute of technology, Trondheim, Norway, 1967.
- BERGAN, P.G. Finite elements based on energy orthogonal functions. *Int. j. numer. methods eng.* v. 15, p.1541-1555, 1980.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, v.50, p.25-69,1985.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. Efficient implementation of a triangular membrane element ith drilling freedoms. In: HUGHES, T.J.R.; HINTON, E. *Finite element methods for plate and shell structures.* 1.ed. Swansea,U.K.,1986. Cap.5, p.128-152.
- BERGAN, P.G.; HANSSSEN, L. A new approach for deriving 'good' element stiffness matrices. In: WHITEMAN J.R. *The mathematics of finite elements and applications II.* London, Academic Press, 1978. p.83-96.

- BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K. Finite elements with increased freedom in choosing shape functions. *Int. j. numer. methods eng.* v.20, p.643-663, 1984.
- CARR, A.J. *Refined finite element analysis of thin shell structures including dynamic loadings*. Berkeley, 1967. Tese (Doutorado) - University of California.
- CHEN, H.C. Evaluation of Allman triangular membrane element used in general shell analyses. *Comput. Structures.* v.43, n.5, p.881-887, 1992.
- COOK, R.D. Improved two-dimensional finite element. *J. Structural Div. ASCE.* v.9, p.1851-1863, 1974.
- COOK, R.D. Ways to improve the bending response of finite elements. *Int. j. numer. methods eng.* v. 11, p.1029-1039, 1977.
- COOK, R.D. A plane hybrid element with rotational D.O.F. and adjustable stiffness. *Int. j. numer. methods eng.* v. 24, p.1499-1508, 1987.
- COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. *Concepts and applications of finite element analysis*. 3.ed. Madison, John Wiley & Sons, 1989.
- CORRÊA, M.R.S. *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. São Carlos, 1991. 331p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FELIPPA, C.A. *Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures*. Berkeley, 1966. Tese (Doutorado) - University of California.
- FELIPPA, C.A.; MILITELLO, C. Variational formulation of high-performance finite elements: parametrized variational principles. *Comput. Structures.* v.36, n.1, p.1-11, 1990.
- HUGHES, T.J.R.; MASUD, A.; HARARI, I. Numerical assessment of some membrane elements with drilling degrees of freedom. *Comput. Structures.* v.55, n.2, p.297-314, 1995.
- IBRAHIMBEGOVIC, A. A novel membrane finite element with an enhanced displacement interpolation. *Finite elements analysis and design.* v.7, p.167-179, 1990.
- IRONS, B.; AHMAD, S. *Techniques of finite elements*. 2.ed. Chichester, John Wiley & Sons, 1981.
- IRONS, B. et al. Triangular elements in plate bending - conforming and non-conforming solutions. *Proc. conf. on matrix methods in structural mechanics.* p.547-576, 1965.
- MORI, D.D. *Os núcleos estruturais e a não-linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos, 1992. 195p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- NAVARRA, E.O.I. *Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos*. 1.ed. Barcelona, Artes Gráficas Torres, 1992.
- RAMALHO, M.A. *Sistema para análise de estruturas considerando interação com meio elástico*. São Carlos, 1990. 389p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RAZZAQUE, A. The patch test for elements. *Int. j. numer. methods eng.* v. 22, p.63-71, 1986.
- ROCKEY, K.C. et al. *The finite element method*. 2.ed. New york, Halsted Press, 1985.
- SZE, K.Y.; WANJI, C.; CHEUNG, Y.K. An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress model. *Comput. Structures.* v.42, n.5, p.695-705, 1992.
- TAIG I.C.; KERR R.I. Some problems in the discrete element representation of aircraft structures. In: FRAEIJIS DE VEUBEKE, B.M. *Matrix methods of structural analysis*. London, Pergamon Press, 1964.

- TAYLOR, R.L.; BERESFORD, P.J.; WILSON, E.L. A non-conforming element for stress analysis. *Int. j. numer. methods eng.* v. 10, p.1211-1219, 1976.
- TAYLOR, R.L.; SIMO, J.C. The patch test - a condition for assessing FEM convergence. *Int. j. numer. methods eng.* v. 22, p.39-62, 1986.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. *Teoria da elasticidade*. 3.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1990.
- TOCHER, J.L.; HARTZ, B. Higher order finite element for plane stress. *Proc. ASCE, J. Engrg. Mech. Div.*, v.93, p.149-174,1967.
- TURNER, M.J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.*, v.23, n.9, p.805-823, 1956.
- VALLIAPAN, S. *Continuum mechanics*. 1.ed. Rotterdam, A. A. Balkema, 1981.
- VILLAÇA, S.F.; GARCIA, L.F.T. *Introdução à teoria da elasticidade*. 1.ed. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1996.
- WILLIAM, K.J. *Finite element analysis of cellular structures*. Berkeley, 1969. Tese (Doutorado) - University of California.
- ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. London, Mcgraw-Hill Book Company, 1985.