

ISSN 1413-9928

***CADERNOS DE
ENGENHARIA DE ESTRUTURAS***

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia de Estruturas

**Otimização de seções transversais de concreto armado
sujeitas à flexão: aplicação a pavimentos**

Rodrigo de Carvalho Soares
Ana Lúcia H. de Cresce El Debs

Número 11
São Carlos, 1999

OTIMIZAÇÃO DE SEÇÕES TRANSVERSAIS DE CONCRETO ARMADO SUJEITAS À FLEXÃO: APLICAÇÃO A PAVIMENTOS

Rodrigo de Carvalho Soares¹ & Ana Lúcia H. de Cresce El Debs²

RESUMO

Nos tempos atuais, já existe um forte desenvolvimento computacional no que diz respeito a análise de estruturas com características geométricas, de cargas e vinculações previamente definidas. Assim como os processadores, tem-se investido bastante em pré e pós-processadores, os quais são responsáveis pela maior parte do tempo dedicado a um projeto. No entanto, pode-se dizer que a definição automática das características geométricas dos elementos estruturais deixa a desejar. Hoje, esta etapa ainda é feita pelo engenheiro, apenas com uma ajuda indireta da máquina. Este trabalho apresenta uma maneira ótima de fazer o pré-dimensionamento das vigas de um pavimento de concreto armado. Para isso, desenvolveu-se uma formulação de minimização do custo de uma seção transversal com a qual, através de um método de aproximações combinadas, obtém-se o mínimo custo do vigamento de um pavimento. As variáveis envolvidas na função que representa o custo são: a altura da viga e as áreas de aço. E as restrições do problema são: a taxa geométrica da armadura, a taxa de armadura de compressão em relação a de tração e a flecha máxima pré-estabelecida pelo usuário.

Palavras-chave: Otimização estrutural; Concreto armado; Grelhas.

1 INTRODUÇÃO

Definido o projeto arquitetônico, o engenheiro de estruturas tem a incumbência de lançar e dimensionar a estrutura da forma mais econômica possível, permanecendo dentro das especificações definidas por Normas e das limitações práticas que causam impossibilidade ou dificuldade de execução da obra.

Então, o primeiro passo de um projeto estrutural é o lançamento da estrutura. Para isso, o engenheiro deve determinar o posicionamento dos elementos estruturais e suas respectivas dimensões. Esta etapa do cálculo pode induzir a um melhor comportamento estrutural e conseqüentemente resultar numa estrutura mais econômica, que é um dos objetivos principais dos engenheiros.

Existe um número razoável de variáveis na determinação do posicionamento dos elementos estruturais, principalmente no que diz respeito aos pilares, dificultando ou inviabilizando a prática da programação matemática neste assunto. Além das características dos materiais, geométricas e das ações externas, a localização ideal dos pilares numa estrutura varia com o tipo de solo, processo construtivo, forma de

¹ Mestre em Engenharia de Estruturas, Aluno de doutorado do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP. E-mail: soares@sc.usp.br

² Doutora em Engenharia de Estruturas, Professora do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP. E-mail: analucia@sc.usp.br

execução, preço da mão-de-obra, preço das estruturas pré-moldadas, tempo disponível de construção, etc. Foram citadas algumas das variáveis decisivas na localização ótima dos pilares, valendo ressaltar que um fator relevante é a arquitetura. Além de todas as variáveis do projeto estrutural, o engenheiro se restringe ao projeto arquitetônico, sendo muito difícil a coincidência de idealização destes projetos. Devido a toda essa dificuldade, hoje em dia um dos poucos passos que é feito exclusivamente pelo homem, sem o auxílio do computador, é a determinação do posicionamento dos elementos estruturais, sendo esta distribuição dos elementos mais próxima da ótima quanto maior a experiência do engenheiro. Vale salientar que tudo que está sendo dito no presente trabalho refere-se a pavimentos estruturais de concreto armado.

Uma vez definida a localização dos pilares, vigas e lajes, parte-se para o predimensionamento dos elementos estruturais. Nesta etapa, o engenheiro de estruturas precisa ter um certo conhecimento do comportamento estrutural para determinar as dimensões dos elementos de maneira a obter um menor custo para a obra e respeitar prescrições feitas pela Norma. As dimensões dos elementos variam com as cargas, vãos, materiais, tipo estrutural, etc. O principal objetivo deste trabalho é propor uma maneira automática de determinar as dimensões das vigas que fazem parte de uma grelha; de uma forma prática, buscar-se-á um menor custo para o vigaento de um pavimento de concreto armado.

Conhecidos o posicionamento e as dimensões dos elementos estruturais (lajes, vigas e pilares), inicia-se uma nova fase: o processamento dos deslocamentos e esforços. Nesta etapa, cabe ao engenheiro decidir qual modelo de cálculo será utilizado (grelha, elementos finitos, etc.), sendo determinado o que melhor se ajusta à situação em função do grau de precisão desejado dos resultados. Para uma maior economia, nesta fase do projeto, pode-se levar em consideração a plastificação do material, que faz com que ocorra uma redistribuição dos esforços, resultando num melhor aproveitamento dos elementos estruturais. Esta fase de projeto já é bastante automatizada; é necessário que o projetista apenas confira os resultados e verifique se a concepção de cálculo adotada está ou não coerente.

Se os resultados obtidos até esta etapa estão coerentes com os desejados pelo engenheiro de estruturas, passa-se ao dimensionamento dos elementos estruturais. Caso estes não sejam satisfatórios, redefinem-se as dimensões dos elementos e realiza-se um novo processamento. O dimensionamento dos elementos estruturais consiste na determinação das áreas de aço das seções submetidas aos esforços solicitantes. O dimensionamento das vigas deve ser feito nos domínios 2 e 3, uma vez que no domínio 4 ocorre ruptura brusca da peça estrutural. De acordo com os esforços solicitantes e as dimensões preestabelecidas, entre outros fatores, a seção de aço é dimensionada, não sendo necessariamente a que torna a estrutura mais econômica. Enfim, encerra-se o procedimento de cálculo de um pavimento de concreto armado com a plotagem das pranchas de forma e de armação.

Através do breve relato descrito acima, tentou-se mostrar o procedimento de cálculo de um projeto estrutural, e, entre as várias fases de cálculo, tentar-se-á inserir o presente trabalho.

Com o passar dos tempos, os engenheiros de estruturas buscam cada vez mais minimizar o tempo utilizado num projeto, visando a maiores condições de competitividade. Para reduzir este tempo, busca-se a automatização dos passos de desenvolvimento dos projetos. A respeito do cálculo dos esforços, dimensionamento e detalhamento das estruturas, a automatização já está bastante desenvolvida. Com relação a pré e pós-processadores, o desenvolvimento tem crescido bastante, e continuará por mais algum tempo, pois são responsáveis por boa parte do tempo

empregado num projeto. Além disso, o forte estudo nesta área também se dá devido aos recursos que a computação gráfica agora está oferecendo. Entretanto, apesar de todo o desenvolvimento, há uma certa deficiência na automatização da determinação das características geométricas dos elementos estruturais, que é onde se insere este trabalho.

2 PROPOSTA DO TRABALHO

Foi feito um “software” que determina, automaticamente, e de maneira “ótima”, as alturas das vigas de um pavimento de concreto armado, e faz o processamento da estrutura definitiva, considerando um comportamento elástico não-linear do concreto armado³. Baseado numa formulação matemática desenvolvida pelo autor, o “software” determina alturas para as vigas de forma a terem custo mínimo dentro de um campo prático da engenharia de estruturas. O equacionamento matemático do problema está sujeito a algumas restrições, tais como: equilíbrio dos esforços, taxa geométrica de armadura e percentagem da armadura de compressão em relação à armadura de tração. A respeito da restrição relacionada ao máximo deslocamento admissível, esta foi imposta fora da formulação matemática. Com uma altura ótima da viga já definida pelo equacionamento matemático, é verificado se a flecha relativa a esta rigidez é admissível. Caso não seja, são dados incrementos positivos na altura da viga até que a inércia desta seja coerente para uma flecha admissível.

O custo a ser minimizado é colocado em função do volume de concreto, da área de formas e do peso do aço, sendo a função objetivo aplicada a cada viga do pavimento independentemente. A interação entre as vigas da estrutura é feita através de um processo iterativo, obtendo-se assim uma minimização do custo das vigas. Vale ressaltar que a formulação matemática foi feita para uma viga, e não para uma grelha. Sendo assim, é desconhecido se os resultados apresentados são os mesmos que aqueles para a minimização de uma grelha como uma estrutura única. Neste trabalho, parte-se do princípio de que a minimização de um conjunto de vigas (grelha) é equivalente à minimização da grelha, sendo a interação entre as vigas feita pelas iterações internas do programa. Acredita-se que os resultados não sejam teoricamente os mesmos mas, para uma utilização prática, parece uma aproximação bastante razoável.

A estrutura será calculada pelo método dos elementos finitos, podendo ser discretizada por elementos de barra e de placa, com a compatibilidade entre eles feita pelos deslocamentos dos nós em comum. Os elementos finitos de placa têm três graus de liberdade por nó, podendo este elemento ser triangular (DKT) ou quadrangular (DKQ), este último formado por quatro elementos finitos triangulares através de uma condensação estática. Os elementos finitos de barra são formados por dois nós com três graus de liberdade em cada um.

3 HISTÓRIA DA OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

A teoria da otimização estrutural tem alcançado avanço considerável nas últimas três décadas conforme ilustrado pelo grande número de livros e artigos publicados sobre o assunto. Por outro lado, a utilização prática da otimização é comparavelmente modesta, e reservada a problemas específicos, resolvidos por especialistas em otimização. Baseado no estudo de um amplo catálogo, feito em 1992 por M. Z. Cohn,

³ Modelo não-linear baseado em inércias equivalentes de Branson

Fellow, Grierson, e A. S. Dinovitzer publicado no “Journal of Structural Engineering” em fevereiro de 1994, com cerca de 500 exemplos de otimização publicados, que abrange a história da otimização estrutural até 1992, e nas publicações a partir de 1992 até a atualidade, tentar-se-á mostrar uma breve história da otimização estrutural.

Livros e artigos compõem a maior parte das fontes bibliográficas. Mas as publicações em concreto armado e concreto protendido são, na maioria das vezes, encontradas em artigos isolados: não há muitos exemplos de otimização em concreto armado devido à sua heterogeneidade e anisotropia.

Na aplicação prática da otimização estrutural, estão citadas estruturas do tipo:

- treliças planas;
- vigas, colunas e cabos;
- “frames⁴” e arcos;
- treliças espaciais;
- placas, cascas e chapas.

No estudo de teoria e prática da otimização estrutural, COHN (1994) estima-se que os registros publicados em otimização estrutural podem ser encontrados em cerca de 150 livros e 2.500 artigos. A maioria das publicações aborda aspectos matemáticos da otimização. Através dos anos, esforços para aplicar técnicas de otimização a problemas de engenharia estrutural têm sido refletidos por numerosas publicações de revistas internacionais. Para maior compreensão do desenvolvimento da otimização estrutural, apresentam-se na tabela 1, em ordem cronológica, algumas dessas publicações.

ANO	AUTOR	DESCRIÇÃO DO TRABALHO
1963	Schmit e Mallett	5
1970	Rozvany e Cohn	2
1971	Lapay e Goble	2
1971	Reinschmidt	2
1972	Mau e Sexmith	2
1972	Pedersen	2
1972	Vanderplaats e Moses	2
1975	Kirsch	2
1975	Moses e Goble	2
1976	Rosenblueth	2
1979	Kirsch e Moses	2
1981	Lev	2
1982	Ashley	2
1982	Vanderplaats	2
1983	Templeman	2
1984	Cohn e Mackal	2
1987	Levy e Lev	2
3/1989	Amir e Hasegawa	Estrutura discreta mista não-linear
5/1989	Frangopol e Klisinski	Projeto ótimo de sistemas estruturais
6/1989	Hasegawa, Sakamoto e Sato	Projeto elástico e plástico para carga máxima
8/1990	Wei Z. e Ye S.	Seção ótima para “frame” usando programação geométrica

⁴ Estrutura aporticada, pórtico ou grelha

⁵ Dados adquiridos em COHN et alii (1994)

ANO	AUTOR	DESCRIÇÃO DO TRABALHO
3/1991	Pezeshk e Hjelmstad	Projeto ótimo de estruturas aperticadas planas baseado no critério de estabilidade
1992	Rajeev e Krishnamoorthy	2
7/1992	Kirsch e Topping	Projeto de peso mínimo de topologia estrutural
11/1992	Jenkins	Em torno do projeto ótimo de estrutura plana aperticada baseado no algoritmo genético
11/1992	Chakrabarty	Um modelo para projeto ótimo para viga de concreto armado
3/1993	Lassen	Projeto ótimo de estruturas tridimensionais
7/1993	Horowitz	Esforços em colunas esbeltas de concreto sujeitas a flexão biaxial
7/1993	Ramos, Stange e Ing	Um sistema para projeto ótimo de estrutura de concreto armado
7/1993	Moharrami e Grierson	Projeto automático de estruturas de concreto armado
2/1994	Grierson, Cohn, Fellow e Dinovitzer	Aplicações da otimização estrutural
12/1994	Salloum e Siddiqi	Projeto de custo ótimo de viga de concreto armado
2/1995	Thanedar e Vanderplaats	Inspeção de otimização de variável discreta para projeto estrutural
5/1995	Chun-Man, Grierson e Sherbourne	Projeto ótimo automático para construção de estruturas aperticadas altas de aço
5/1995	Tseng, Wang e Ling	Acrescentando o Método BRANCH-BOUND para otimização estrutural

TABELA 1 - Trabalhos sobre otimização estrutural

Através de publicações do “Journal of Structural Engineering”, de Congressos Internacionais e de publicações do Departamento de Estruturas da EESC - USP, foi feita uma pesquisa da prática da otimização estrutural entre 1992 e 1995, pois as publicações feitas antes de 1992 foram bastante exploradas por COHN et alii (1994). Algumas das referências bibliográficas utilizadas neste estudo foram organizadas em forma de tabela, que contém as características mais importantes para conhecimento do problema de otimização. Cada item descrito abaixo corresponde a uma coluna da tabela 2.

1. Descrição - treliça, viga, pórtico, grelha, etc.;
2. Data de publicação;
3. Tamanho da estrutura: define o número de elementos da estrutura;
4. Incerteza: problema determinístico (D) ou problema probabilístico (P);
5. Nível de otimização: seção (SEC), membros (MEM), sistema estrutural especificado (SYS), ou topológicos (TOP) para sistemas estruturais não especificados;
6. Carregamento: estático (E) ou dinâmico (D);
7. Materiais: aço (S), concreto (C), ou composto (O);
8. Estado limite: estado limite último (U), estado limite de serviço (S) ou ambos (B);
9. Restrições: (9.1) tensão, (9.2) flecha ou rotação, (9.3) fadiga, (9.4) construtivo e (9.5) colapso global. Frequência relevante ou modo de vibração são listados como flecha ou restrições de estabilidade para problemas de carregamento dinâmico. Restrições em fissuração, instabilidade e dano local não foram verificadas nos trabalhos pesquisados. As restrições usadas em qualquer exemplo são identificadas por (C);
10. Função objetivo: única (U) ou múltipla (M);

11. Métodos computacionais: algoritmo e/ou ‘software’ conhecidos no campo da otimização estrutural. A seguir será listada a classificação dos métodos computacionais descritos na tabela abaixo:

- GP - programação geométrica (critério ótimo);
- SQP - programação quadrática sequencial (critério ótimo);
- OT - “optimal topologies” (critérios ótimos);
- MP - programação matemática;
- NLP - programação não-linear (programação matemática).

1	2	3	4	5	6	7	8	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	10	11
placa	89	1	D	SYS	E	O	S	C	C	-	-	-	U	AD (all discrete) nlp
viga	89	1	D	SYS	E	C	S	C	-	C	-	-	U	AD
pórtico plano	89	15	D	SYS	E	S	S	C	C	-	-	-	U	AD, MD (mixed discrete), AC (all continuous) nlp
treliça	89	10	D	SYS	E	S	U	C	C	-	-	-	U	-
treliça	89	10	D	SYS	E	O	U	C	-	-	-	-	U	-
pórtico plano	89	3	D	SYS	E	S	S	C	C	C	C	C	U	-
viga	89	2	D	SYS	E	S	S	C	C	-	-	-	U	-
pórtico	90	3	D	SYS	E	S	S	C	C	-	-	-	U	GP
pórtico plano	91	3	D	TOP	D	S	U	C	-	C	-	--	U	NLP
treliça	92	10	D	SYS	E	S	S	C	C	-	-	-	U	OT - nlp
treliça	92	11	D	SYS	E	S	S	C	C	-	-	-	U	OT
treliça	92	11	D	SYS	E	S	S	C	C	-	-	-	U	OT
treliça	92	21	D	SYS	E	S	S	C	C	-	-	-	U	OT
viga	92	1	D	SYS	E	C	S	C	-	-	-	-	U	GNLP, SNLP -nlp
pórtico tridimensional	93	70	D	SYS	E	S	S	C	-	-	-	C	U	NLP baseado em SQP
treliça espacial	93	31	D	SYS	E	S	S	C	-	C	-	-	U	NLP baseado em SQP
pórtico	93	2	D	SYS	E	C	S	C	-	C	-	-	U	MP processo iterativo
pórtico plano	93	15	D	SYS	E	C	S	C	-	C	-	-	U	MP processo iterativo

TABELA 2 - Características principais da prática da otimização estrutural

Num total de 501 exemplos citados no catálogo COHN et alii (1994) e mais 18 na tabela 2, 460 (89%) são determinísticos e 59 (11%) são probabilísticos, caracterizando assim os exemplos determinísticos como sendo dominantes no campo da otimização estrutural. Entre os exemplos de otimização apresentados como pórticos, grelhas e arcos, 71 (15% dos exemplos determinísticos) são determinísticos e 27 (46% dos exemplos probabilísticos) são probabilísticos. Além disso, entre as estruturas de aço há 415 (90% dos exemplos determinísticos) exemplos de otimização determinística e 57 (97% dos exemplos probabilísticos) de otimização probabilística.

A primeira decisão num projeto estrutural é considerar a escolha entre uma aproximação probabilística ou determinística. Entre os exemplos probabilísticos, há aproximadamente 27 “frames” (46% do total), dos quais metade são pórticos planos. Na otimização probabilística dos pórticos, o colapso plástico é geralmente o estado limite último que governa o problema, isto porque as falhas são facilmente identificadas e expressas como restrições lineares. Treliças planas estão em segundo no ‘ranking’ da frequência de otimização probabilística com aproximadamente 16 (27% do total) exemplos, com a maior parte projetada para restrições no estado em serviço (tensão).

Exemplos de otimização de chapas, estruturas de concreto ou com cargas dinâmicas, são escassos.

É interessante notar que exemplos de otimização para estados limite múltiplos (SLS ou ULS) são muito mais frequentes em projetos probabilísticos do que em projetos determinísticos (41% versus 4%). Isto é de fácil entendimento, já que a natureza da análise probabilística baseia-se em causas implícitas, as quais são utilizadas para todas as combinações do estado limite.

Algumas dificuldades objetivas da otimização relacionam-se à questão de modelagem de carga, variações de materiais dependentes do tempo, e outras fontes de incerteza. É difícil, na prática, determinar uma estrutura ótima, uma vez que existem varias incertezas na modelagem das mesmas.

- **Tipo Estrutural:** A maior parte dos exemplos de otimização publicados refere-se a treliças planas, vigas, pórticos, grelhas, treliças espaciais e chapas. Dos 501 exemplos do catálogo COHN et alii (1994), existem 200 tipos de estruturas diferentes; isto significa uma média de 2,5 vezes a repetição de uma mesma estrutura. Além disso, apenas seis tipos de estruturas particulares representam cerca de 25% de todo o catálogo: treliça de 3 barras ocorre 23 vezes; treliça de 10 barras ocorre 23 vezes; pórtico plano com 3 tramos ocorre 25 vezes; viga simplesmente apoiada ocorre 26 vezes; viga em balanço ocorre 15 vezes; e treliça espacial de 25 barras ocorre 12 vezes. Entre os exemplos citados na tabela 2.2, três tipos de estruturas particulares representam 44% dos 18 exemplos tabelados: treliça com 10 barras ocorre 3 vezes; pórtico plano com três tramos ocorre 3 vezes; e viga simplesmente apoiada ocorre 2 vezes. A frequência do uso desses modelos é explicada pelo fato de a solução já ser conhecida, o que é necessário para testar e comparar novos algoritmos;
- **Nível de otimização:** A maioria dos exemplos de otimização é de estruturas dadas (52% determinístico e 80% probabilístico). Projetos de seção e membros são de menor interesse para os engenheiros, e otimização de chapas ou sistemas são de complexidade excessiva na prática;
- **Carregamento:** A grande maioria de exemplos refere-se a um ou dois carregamentos estáticos (89%). São poucos os casos de arranjo de carregamentos ou situações de carregamento mais complexas que encontraram seu caminho na otimização estrutural. O carregamento dinâmico, ilustrado em aproximadamente 11% dos exemplos pesquisados, está em crescimento no campo de estudos.
- **Materiais:** Com aproximadamente 92% dos exemplos pesquisados, o aço é de longe o material mais usado em exemplos de otimização, isto devido à facilidade de modelagem de suas propriedades, material elástico/plástico e homogêneo. Concreto e materiais compostos são menos ilustrados na literatura, e representam apenas 5% dos exemplos pesquisados.
- **Função Objetivo:** O número de exemplos de otimização com função objetivo única é bem maior do que o com função objetivo múltipla. Lembramos que, nos projetos probabilísticos o número com função objetivo múltipla é maior do que nos projetos determinísticos (25% versus 6%).
- **Métodos Computacionais:** Um maior número de exemplos utiliza ‘softwares’ comerciais de otimização, evitando o desperdício da duplicação de pacotes já existentes. Segundo COHN et alii (1994), ‘softwares’ feitos em elementos finitos e elementos de contorno são fundidos como pacotes de otimização de ótima eficiência. A programação matemática é largamente usada em estruturas de tamanho moderado quando as restrições podem ser linearizadas ou se podem usar técnicas aproximadas BORKOWSKI e JENDO (1990). Para problemas grandes ou complexos, são preferidos métodos de critério ótimo SAVE e PRAGER (1985), os quais se encontram dentro do campo da programação matemática. Os métodos de critério ótimo dividem o problema de otimização em subproblemas, garantindo a convergência dos resultados. Finalmente, algoritmos genéticos mostram um bom potencial, mas estão apenas começando a ser aplicados em otimização estrutural.

Podem-se diferenciar algoritmos genéticos dos outros algoritmos e procedimentos de pesquisa de quatro maneiras GOLDBERG (1989):

1. Algoritmos genéticos trabalham com um código de parâmetros fixos, não com parâmetros deles mesmos.
2. Algoritmos genéticos pesquisam uma população de pontos, não pontos isolados.
3. Algoritmos genéticos usam informações de funções objetivo, não de derivadas ou outros conhecimentos auxiliares.
4. Algoritmos genéticos usam regras de transição probabilísticas, não regras determinísticas.

A otimização de estruturas determinadas é mais largamente ilustrada do que otimização de seção, membros ou sistemas genéricos. A pequena parcela da vasta pesquisa produzida na otimização que é utilizada na prática de projetos estruturais ainda não satisfaz as necessidades específicas do usuário. O número de publicações de exemplos de otimização estrutural durante os últimos trinta anos é muito pequeno quando comparado ao número de artigos e livros de otimização matemática. Os exemplos de otimização publicados nesta pesquisa ilustram ainda uma região limitada de problemas, na maior parte, de interesse na engenharia acadêmica. Atualmente, como ilustrações mais aceitáveis na prática, os projetistas podem encontrar exemplos de treliças e pórticos, com objetivo único e otimização determinística.

Para a otimização se tornar mais atraente, os projetistas podem tomar como exemplo estruturas reais, com condições de carregamento nos estados limites. Quanto mais perto da estrutura real, menor fica o campo de soluções possíveis, aumenta o número de restrições, e a solução global converge mais rápido. Simplificando o trabalho do engenheiro e automatizando a maior parte das fases do projeto, a otimização torna-se uma eficiente ferramenta de projeto.

Ainda existe distância razoável entre o progresso da teoria de otimização e suas aplicações na prática da engenharia civil, como ASHLEY (1982), LEV (1981), e VANDERPLAATS (1982) têm notado. Este espaço não foi reduzido durante a última década, embora ocasionalmente sua existência, causas, e extensão tenham sido discutidas em vários encontros internacionais por GELLATLY e DUPRÉE (1976), HORNLEIN (1987), SOBIESKI et alii (1987), COHN (1993), entre outros. Sugere-se que a maior razão para o espaço entre a teoria e a prática da otimização estrutural é que a matemática é usada sem levar em conta o aspecto estrutural da otimização. Para diminuir este espaço, seria necessário utilizar as técnicas matemáticas junto com o problema explicitado fisicamente. A maioria dos trabalhos feitos é confinada a exemplos triviais, pretendendo apenas mostrar o sucesso de aplicação de um algoritmo particular. No uso acadêmico, a otimização pode ser utilizada para checar um algoritmo, mas não é apenas isso que os engenheiros precisam. Então, a distância entre aspectos teóricos e problemas práticos da otimização estrutural pode ser diminuída por limitações de variáveis, podendo trazer benefícios para a prática da engenharia estrutural.

4 TIPOS DE PROBLEMAS NA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Pensando em projetos estruturais, é necessário que se respondam algumas das questões seguintes:

- Quais são as variáveis conhecidas numa estrutura real ?
- Quais são os objetivos práticos da otimização estrutural ?

- Quais exemplos publicados podem ser usados em projetos práticos ?
- Quais são os artigos ou livros de onde vêm exemplos de otimização estrutural ?

Baseando-se em publicações recentes e na avaliação de um real estado-da-prática, ou seja, na prática de projetos estruturais, tentar-se-á responder às questões explicitadas acima. A chave característica do estudo é a seguinte: seguindo a prática da engenharia, problemas são identificados primeiro por sua estrutura e depois pelas características matemáticas, com prioridade para a seleção de variáveis e para a modelagem da estrutura, e depois para sua solução algorítmica.

A otimização do projeto é proposta para considerar uma melhor estrutura do ponto de vista físico e econômico, visando a uma ou mais particularidades do problema.

Com relação ao projeto ótimo, problemas estruturais podem facilmente ser identificados por:

- considerações de projeto (determinística ou probabilística);
- parâmetros e variáveis de projeto (geometria, carregamento, materiais);
- formulação do problema (objetivo, estado limite, restrições).

Para uma formulação ser concluída com êxito, a solução precisa ser encontrada por um algoritmo conveniente, via programação matemática, critério de otimalidade, ou algoritmos genéticos. Vários fatores de identificação do problema estrutural são detalhados na tabela 3.

Um problema estrutural particular é definido quando entradas apropriadas em cada coluna da tabela 3 são selecionadas.

Nível de Incerteza	Parâmetros e		Variáveis	Formulação			Código Algoritmo
	Geométrico	Carga	Material	Objetivo	Estado Limite	Restrições	
Determinístico	Seção Membros	Estática	Aço	Único	Único	SLS - tensão	MP
			RC/PC/PP C Composto	Múltiplo	Múltiplo	- deformação - fissuração - fadiga - rotação - perturbações locais	
Probabilístico	Estruturas Sist. Complexos	Dinâmica	Elástico Elástico/ Plástico	Desempenho Economia • peso • custo • Vida útil	SLS ULS Outros	ULS - colapso - ductilidade - instabilidade	GA

TABELA 3. Identificação de fatores nos problemas estruturais COHN et alii (1994).

5 SITUAÇÃO FÍSICA DO PROBLEMA

Como a programação não-linear apresenta várias soluções para o sistema de equações formulado pelo problema, torna-se complexa qualquer análise de resultados. Mas, quando as variáveis possuem características físicas, o objetivo do problema pode ser alcançado bem mais facilmente. No cálculo estrutural, pode-se dizer que todas as variáveis de projeto possuem este tipo de característica, o que, no ponto de vista do autor, é um caminho que deve ser explorado pelo pesquisador de otimização de estruturas. Acredita-se que as variáveis não devem ser analisadas isoladamente, e que a solução ótima faz parte de todo o conjunto de elementos que compõe a estrutura. Sendo assim, com técnicas matemáticas e uma boa concepção física das variáveis, a otimização de estruturas torna-se muito mais fácil e prazerosa.

Dentre os vários tipos estruturais, optou-se pela otimização do vigamento de um pavimento de concreto armado. Esta escolha foi feita devido à não existência de um

programa com tais características, e à necessidade de se conhecerem as dimensões dos elementos de viga, o que, até a atualidade, é determinado pela prática do engenheiro. A noção das alturas das vigas a serem utilizadas em escritórios de cálculo foi adquirida no decorrer dos anos, com experiências anteriores, permanecendo ainda a necessidade de determiná-las matematicamente, que é o objetivo deste estudo.

6 VARIÁVEIS A SEREM OTIMIZADAS

As variáveis a serem otimizadas serão as alturas das vigas e as áreas de aço das seções transversais obtidas pelo dimensionamento a flexão da maior solicitação de cada viga.

Uma restrição física de grande importância para a formulação é que todas as variáveis de projeto pertencem, ao menos teoricamente, ao conjunto dos números reais, e nenhuma delas pode ser negativa.

A respeito do tratamento dado à variável altura da viga, o valor ótimo será um qualquer dentro do campo real positivo. Na prática, a altura da viga é variável no conjunto dos inteiros, com um incremento pré-definido pelo engenheiro de estruturas. Na formulação, será calculada a altura ótima para uma função contínua, e depois de já conhecido o valor ótimo, este será apresentado ao engenheiro, que determinará um valor inteiro quão próximo ele queira do valor ótimo. A altura da viga deve ser maior ou igual à apresentada pelo programa para evitar dimensionamento no domínio 4 ou flecha maior que a admissível por Norma.

As outras variáveis que serão otimizadas são as áreas de aço de tração e de compressão devidas ao esforço de flexão, que é consequência direta da altura da viga. Embora na prática estas variáveis não constituam uma função contínua, na maioria dos programas existentes, inclusive este, elas serão consideradas contínuas, pois a diferença no custo devido a esta descontinuidade não é de grande significado quando comparado ao trabalho que seria tratar as variáveis com otimização discreta.

7 RESTRIÇÕES

Para maior facilidade de execução da obra, impôs-se uma restrição que limita em 50% a área de aço de compressão relativa à área de aço de tração. Esta percentagem foi atribuída devido à técnica construtiva usual, já que, quando existe muita armadura trabalhando a compressão, torna-se difícil passar o vibrador, impossibilitando assim uma boa execução do concreto.

A máxima taxa geométrica deve ser definida pelo engenheiro de estruturas. Esta restrição foi estabelecida com o intuito de se evitar que existam seções transversais com área de aço exagerada, de tal forma que não seja possível posicionar a armadura coerentemente.

A seção transversal de concreto armado a ser otimizada será de forma retangular, que é usual e bastante genérica para pavimentos convencionais. Embora não seja objetivo do presente trabalho, em pavimentos constituídos de lajes maciças e vigas é bastante comum considerar a seção T, ficando esta consideração como sugestão para uma pesquisa futura.

A limitação de flecha é imposta pelo engenheiro de estruturas, devendo estar de acordo com as prescrições da Norma. As flechas das vigas apresentadas pelo programa

são calculadas considerando a rigidez do pavimento, uma vez que isto é feito pela diferença relativa dos deslocamentos nodais.

8 VARIÁVEIS ESPECÍFICAS DO PROBLEMA

O projeto arquitetônico é fator decisivo na determinação das dimensões da estrutura. Em geral, as larguras das vigas são limitadas pelas espessuras das alvenarias de vedação e por isso não serão consideradas como uma variável a ser otimizada. Já as alturas máximas das vigas são limitadas por portas, janelas, descontinuidade das alvenarias de vedação, etc., sendo assim bastante flexíveis suas variações.

A escolha dos materiais utilizados na estrutura implica nas tensões admissíveis das seções de aço e de concreto, que têm influência em todas as variáveis do problema bem como nas restrições em equilíbrio, compatibilidade e deformação excessiva.

Uma variável de grande importância são as inércias dos elementos, diretamente responsáveis pela distribuição de cargas nas vigas, e suas flechas. Esta influência nos módulos das flechas altera sensivelmente os resultados obtidos pela otimização.

De acordo com a função objetivo, os dados de extrema importância nos resultados finais são os relacionados aos custos dos materiais. Outros dados importantes, responsáveis pela precisão dos resultados, são os erros admissíveis, o número de divisões internas da malha e o número máximo de iterações.

9 SOLICITAÇÕES

O principal determinante da altura da viga é o esforço de flexão, já que para o dimensionamento da seção a flexão, é decisivo o valor do braço de alavanca para formar o binário resistente ao momento fletor. Já o dimensionamento ao esforço cortante depende da área da seção transversal, não existindo prioridade da altura sobre a largura para o dimensionamento. Em geral, a armadura resistente a torção é grande com relação às demais, e por isso é usual se conceber a estrutura de tal forma que o momento de torção não seja necessário ao equilíbrio, ou seja, deixa-se a estrutura trabalhar e verifica-se se os deslocamentos continuam admissíveis. Por isso, foi considerado apenas o momento fletor na formulação matemática para se determinar a altura ótima da seção transversal das vigas.

Devido à simplificação descrita no parágrafo acima, deve-se verificar se as seções transversais ótimas são coerentes com os esforços cortantes e momentos de torção considerados.

10 FUNDAMENTOS DA OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

O conceito de otimização matemática está bem fixado como um dos princípios básicos da análise de muitos problemas complexos. Ao utilizar a filosofia de otimização, enfoca-se um problema de decisão, que inclui uma seleção de valores para certo número de variáveis inter-relacionadas, centralizando a atenção em um só objetivo designado para quantificar o rendimento e medir a qualidade da decisão. Este único objetivo se maximiza (ou minimiza, dependendo da formulação) segundo as restrições que podem limitar a seleção dos valores das variáveis de decisão.

A habilidade da otimização está relacionada à formulação do problema e à interpretação dos resultados, a qual aumenta com a experiência prática do usuário e com a compreensão de uma teoria adequada para o problema.

Dentre os vários tipos de problemas, podem ser citados os de programação linear e não-linear, com e sem restrições.

A programação linear é o mecanismo mais natural para formular uma grande quantidade de problemas com o mínimo esforço. Um problema de programação linear se caracteriza, como seu nome indica, por funções lineares das incógnitas; a função objetivo é linear nas incógnitas e as restrições são igualdades ou desigualdades lineares nas incógnitas. Pode-se citar o método SIMPLEX como um método importante para a resolução deste tipo de problema.

Caso não exista linearidade na função objetivo e/ou nas restrições, tem-se a programação não-linear.

Em muitos problemas importantes é possível considerá-los sem restrições, e, às vezes é fácil converter problemas com restrição em problemas sem restrição. Muitos aspectos da teoria e dos algoritmos desenvolvem-se e verificam-se de forma mais natural para os casos sem restrições, antes de passar para os casos com restrições.

Na engenharia, como em todo problema físico, a maior parte dos problemas é com restrição, facilitando, muitas vezes, conhecer a solução do problema proposto.

11 JUSTIFICATIVA DO MÉTODO UTILIZADO

O objetivo principal do presente trabalho é minimizar o custo do vigamento de um pavimento de concreto armado. Com o intuito de se obter um resultado aplicável à prática, a idéia do procedimento de otimização parte do princípio de que a minimização do somatório das seções transversais das vigas de um pavimento é a soma do mínimo da seção transversal de cada viga interagido com as demais vigas. A interação entre as vigas do pavimento é feita através de iterações de cálculo do pavimento, até convergir a valores aceitáveis na prática. Vale ressaltar que o resultado obtido com uma formulação feita nestas condições provavelmente não será o mesmo se fosse feita a minimização da grelha como um único elemento estrutural, mas acredita-se que para resultados práticos é bem razoável o uso desse procedimento. Sendo assim, foi desenvolvida uma formulação matemática para minimizar uma seção transversal de cada viga. Desta forma, o resultado do somatório da minimização de cada viga isoladamente fornecerá um mínimo global (de ordem prática) para a grelha.

Devido à interação entre as vigas, após ser otimizada cada seção desejada, as inércias de cada viga equacionada mudarão e, conseqüentemente, os esforços nela aplicados, perdendo-se a otimalidade da grelha. Sendo assim, é necessário fazer um “loop” com a otimização das seções transversais e o processamento da estrutura, até não haver redistribuição significativa dos esforços, e conseqüentemente variação significativa das inércias.

Devido à necessidade de se otimizar cada seção transversal desejada, e de se fazer um “loop” com a otimização das seções transversais e do cálculo dos esforços, pensou-se em algum processo de otimização de fácil implementação no programa de resolução de pavimentos e que este necessitasse do menor tempo possível para a sua convergência. Os pacotes computacionais que tratam do assunto, quando a função objetivo ou as restrições são funções não-lineares, apresentam em geral “softwares” que encontram soluções para estas funções através de processos iterativos. Como pode

existir um grande número de seções a serem otimizadas, isto tornaria o processo mais lento que outro não iterativo.

Devido às inconveniências oferecidas pelas rotinas de otimização encontradas na literatura, partiu-se para o desenvolvimento de um “software” particular para este trabalho. Neste “software”, o equacionamento matemático é feito levando-se em consideração condições particulares do problema. A resolução deste equacionamento oferece resultados exatos, dentro das restrições previamente estabelecidas, encontrados através da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para a extremização de funções não-lineares sujeitas às condições de Kuhn - Tucker. O sistema de equações não-lineares é resolvido analiticamente, evitando-se assim o processo iterativo, e eliminando-se o problema oferecido pelas entradas e saídas de dados dos pacotes computacionais existentes no mercado.

12 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA MINIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA.

12.1 Localização do Problema no Campo da Otimização

A definição do problema estrutural particular foi auxiliada pela tabela 3.

- **Nível de incerteza:** problema determinístico;
- **Nível de otimização:** a formulação matemática foi feita para uma seção retangular sujeita a um esforço de flexão simples predeterminado;
- **Carregamento:** foi considerado apenas carregamento estático;
- **Materiais:** concreto, aço e madeira;
- **Estado limite:** o equacionamento foi feito para o estado limite último, quando a restrição for em tensão, e estado limite de utilização, quando a restrição for em deslocamento;
- **Restrições:** na formulação, foram incluídas restrições de tensão, flecha, colapso global e restrições decorrentes da prática da execução da obra;
- **Função objetivo:** a função objetivo é única, e constitui-se em determinar o custo mínimo;
- **Método computacional:** foi resolvido analiticamente o sistema de equações obtido através do Método dos Multiplicadores de Lagrange. Este método pode ser incluído na programação matemática.

12.2 Formulação da Função Objetivo e Restrições

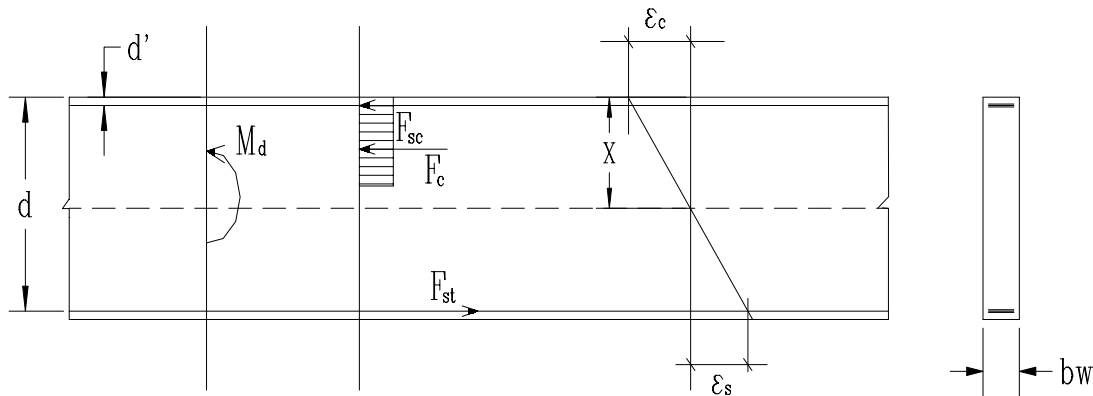


FIGURA. 1 - Seção sujeita a esforços de flexão, equilíbrio

Equações de equilíbrio e compatibilidade

$$F_c = 0,8 \cdot X \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \quad (1)$$

$$F_c + F_{sc} = F_{st} \quad (2)$$

$$F_{sc} \cdot (d - d') + F_c \cdot \left(d - 0,8 \cdot \frac{X}{2} \right) = M_d \quad (3)$$

$$\frac{\varepsilon_c}{X} = \frac{\varepsilon_s}{(d - X)} \quad (4)$$

Desenvolvendo a equação (4), encontra-se:

$$X = \frac{\varepsilon_c \cdot d}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \quad (5)$$

Uma vez que a altura da viga é variável, para determiná-la, fixa-se a posição da linha neutra da seção transversal a ser otimizada. Esta posição é um dado de entrada do programa.

Em função de expressões constantes serem muito grandes, estas são substituídas por K_i , e as expressões que dependem exclusivamente da variável altura da seção transversal são substituídas por F_i .

$$\text{Fazendo: } K_1 = 0,8 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot 0,85 \cdot \frac{f_{ck}}{1,4} \cdot b_w$$

$$K_2 = 1 - 0,4 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c}$$

Substituindo-se as constantes nas equações de equilíbrio, tem-se:

$$F_c = K_1 \cdot d$$

$$K_1 \cdot d + \sigma'_s \cdot A'_s - \sigma_s \cdot A_s = 0$$

$$\sigma'_s \cdot A'_s \cdot (d - d') + K_1 \cdot K_2 \cdot d^2 - M_d = 0$$

Para maior facilidade de visualização matemática, as variáveis do problema são denominadas de:

$$d = x_1$$

$$A_s = x_2$$

$$A'_s = x_3$$

12.3 Função objetivo:

$$F = b_w \cdot (d + d') \cdot C_c + (A_s + A_s') \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2 \cdot d) \cdot C_F$$

ou, escrevendo-se em função de x:

$$F_{(x)} = b_w \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + (x_2 + x_3) \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2 \cdot x_1) \cdot C_F$$

12.4 Restrições:

Restrições em equilíbrio e compatibilidade escritas em função de x:

$$K_1 \cdot x_1 + \sigma_s' \cdot x_3 - \sigma_s \cdot x_2 = 0$$

$$\sigma_s' \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') + k_1 \cdot k_2 \cdot x_1^2 - M_d = 0$$

Restrição que limita o excesso de armadura, a qual poderá causar fissuração exagerada no concreto:

$$x_3 + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot x_1 \leq 0$$

Restrição que limita a percentagem de armadura trabalhando a compressão em 50% da armadura de tração:

$$x_3 - 0,5 \cdot x_2 \leq 0$$

Para a imposição da restrição que limita o deslocamento máximo da viga, foram elaborados dois modelos neste trabalho. Eles diferenciam entre si basicamente pela concepção de cálculo da inércia. Em um modelo, a inércia é considerada constante e calculada no estágio I. Nesta situação, pode-se dizer que, para o cálculo do deslocamento da seção otimizada, foi estabelecida uma relação entre o quociente do deslocamento e a inércia da viga antes e depois de determinada a altura ótima da viga. Pode-se exprimir esta relação com o seguinte equacionamento:

$$\delta_f = \delta_i \cdot \frac{I_i}{I_f} \leq \delta_{lim} ,$$

onde:

$$I_i = \frac{b_w \cdot h_i^3}{12} , \text{ inércia da seção antes de ser otimizada;}$$

$$I_f = \frac{b_w \cdot h_f^3}{12} , \text{ inércia da seção otimizada;}$$

δ_i = flecha fornecida pelo programa de cálculo de pavimento por elementos finitos;

δ_f = flecha na viga com a seção otimizada.

No outro modelo desenvolvido, foi considerada uma inércia diferente para cada elemento finito. Para o cálculo desta inércia, foram consideradas a área de concreto comprimida, as áreas de aço e a contribuição do concreto entre fissuras, sendo estas variáveis explicitadas pela fórmula empírica de BRANSON. O equacionamento utilizado para determinar a inércia dos elementos foi o seguinte:

$$X = \frac{-n \cdot (A_s + A_s')}{b_w} + \sqrt{\left[\frac{n \cdot (A_s + A_s')}{b_w} \right]^2 + \frac{2 \cdot n}{b_w} \cdot (d \cdot A_s + d' \cdot A_s')}$$

$$I_2 = \frac{b_w \cdot X^3}{3} + n \cdot A_s \cdot (d - X)^2 + n \cdot A'_s \cdot (X - d')^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad ; \quad I_0 = \frac{b_w \cdot h^3}{12}$$

Segundo BRANSON, tem-se a seguinte equação para determinar a inércia do elemento.

$$I_f = \left(\frac{M_R}{M_K} \right)^4 \cdot I_0 + \left[1 - \left(\frac{M_R}{M_K} \right)^4 \right] \cdot I_2 < I_0$$

Em ambos os modelos, foram considerados os esforços no estado em serviço. Vale salientar que as áreas de aço são calculadas com os esforços no estado limite último.

Uma vez determinadas as inércias dos elementos das vigas, as flechas das mesmas foram calculadas de duas formas distintas: através dos deslocamentos relativos dos nós para as seções antes de passar por um tratamento de otimização, e por analogia de Mohr durante o processo de otimização, com o qual foi aplicada a restrição de deslocamento.

Quando a restrição de deslocamento foi imposta ao problema, explicitada na formulação matemática para determinar um mínimo, surgiu uma equação de ordem elevada, dificultando a solução analítica do problema. Ciente de que não haverá mudança nos resultados, esta restrição foi imposta após encontrada a solução ótima. Determinada a altura ótima para cada viga, são verificadas suas respectivas flechas. Caso estas ultrapassem o valor limite, através do método dos intervalos encaixantes seguido do método da bisseção, determinam-se as alturas das vigas para que as flechas das mesmas sejam admissíveis satisfazendo um erro absoluto de 0,5% predeterminado internamente no programa.

12.5 Resolução do Problema

$$\text{Minimize: } F_{(x)} = b_w \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + (x_2 + x_3) \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2 \cdot x_1) \cdot C_F$$

Sujeito a:

$$K_1 \cdot x_1 + \sigma'_s \cdot x_3 - \sigma_s \cdot x_2 = 0$$

$$\sigma'_s \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') + k_1 \cdot k_2 \cdot x_1^2 - M_d = 0$$

$$x_3 + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot x_1 \leq 0$$

$$x_3 - 0,5 \cdot x_2 \leq 0$$

Para diminuir o número de restrições de igualdade, a variável x_3 é explicitada em função das demais.

$$x_3 = \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')}$$

Aplicando-se o Lagrangeano e substituindo-se x_3 pela expressão acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
F_{(x,\lambda,\mu)} &= b_w \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + \left(x_2 + \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} \right) \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2 \cdot x_1) \cdot C_F \\
&+ \lambda_1 \cdot \left[K_1 \cdot x_1 + \sigma'_s \cdot \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - \sigma_s \cdot x_2 \right] \\
&+ \mu_1 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot x_1 \right] \\
&+ \mu_2 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right]
\end{aligned}$$

Igualando-se o gradiente da função a zero, para determinar os pontos de mínimo locais:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx_1} F &= b_w \cdot C_c + \left(-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')^2} \right) \cdot \rho_s \cdot C_s + 2 \cdot C_F \\
&+ \lambda_1 \cdot \left[K_1 + \sigma'_s \cdot \left(-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')^2} \right) \right] \\
&+ \mu_1 \cdot \left[-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')^2} - P_{AC} \cdot b_w \right] \\
&+ \mu_2 \cdot \left[-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')^2} \right] = 0 \\
\frac{d}{dx_2} f &= \rho_s \cdot C_s - \lambda_1 \cdot \sigma_s + \mu_1 - 0,5 \cdot \mu_2 = 0 \\
\frac{d}{d\lambda_1} f &= K_1 \cdot x_1 + \sigma'_s \cdot \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - \sigma_s \cdot x_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\mu_1 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot x_1 \right] = 0$$

$$\mu_2 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right] = 0$$

Resolvendo-se o sistema de equações não lineares acima, e verificando-se se as soluções satisfazem às restrições inativas, encontram-se os pontos de mínimo local do problema.

12.6 Soluções possíveis:

Hipótese 01: $\mu_1 = 0$; $\mu_2 \neq 0$

Hipótese 02: $\mu_1 \neq 0$; $\mu_2 = 0$

Hipótese 03: $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0$

Quando se iguala o coeficiente μ a zero, ou seja, torna-se a restrição inativa, é necessário verificar se os resultados satisfazem a esta restrição. Sendo assim, devem ser verdadeiras as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \text{Hipótese 01: } & \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot x_1 \right] < 0 & ; & \quad \mu_2 > 0 \\ \text{Hipótese 02: } & \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right] < 0 & ; & \quad \mu_1 > 0 \\ \text{Hipótese 03: } & \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot x_1 \right] < 0 \\ & \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right] < 0 \end{aligned}$$

Devido à dificuldade de resolução do sistema de equações, foram substituídas algumas expressões constantes por K_i e expressões que variam em \mathbf{X}_1 por F_i .

$$K_3 = -K_1 \cdot K_2 - K_1$$

$$K_4 = K_1 \cdot d'$$

$$K_5 = b_w \cdot C_c + 2 \cdot C_F$$

$$K_6 = K_1 - P_{AC} \cdot b_w \cdot \sigma'_s$$

$$K_7 = K_6 - 4 \cdot K_1 \cdot K_2$$

$$K_8 = -K_6 \cdot d'$$

$$K_9 = 4 \cdot M_d$$

$$K_{10} = -K_5 \cdot \sigma'_s \cdot d' - \rho_s \cdot C_s \cdot K_1 \cdot d'$$

$$K_{11} = K_5 \cdot \sigma_s - 4 \cdot \rho_s \cdot C_s \cdot K_1 \cdot K_2 + \rho_s \cdot C_s \cdot K_1$$

$$K_{12} = -K_{10} \cdot d' - 2 \cdot \rho_s \cdot C_s \cdot M_d$$

$$K_{13} = K_{10} - K_{11} \cdot d'$$

$$K_{14} = K_{11} + 2 \cdot \rho_s \cdot C_s \cdot K_1 \cdot K_2$$

$$F_1 = \frac{1}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')}$$

$$F_2 = \frac{1}{\sigma'_s \cdot (x_1 - d')^2}$$

$$F_3 = M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2$$

$$F_4 = -2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot x_1 \cdot F_1 - F_3 \cdot F_2$$

$$F_5 = K_1 + \sigma'_s \cdot F_4$$

$$F_6 = F_4 - P_{AC} \cdot b_w$$

12.7 Solução do Sistema de Equações

As expressões abaixo descritas são soluções para cada hipótese considerada. Depois de encontrados valores numéricos para as variáveis, é necessário verificar a consistência dos resultados, verificando se estes satisfazem às restrições inativas.

Hipótese 01:

$$x_1 = \frac{-K_4 \pm \sqrt{K_4^2 - 4 \cdot K_3 \cdot M_d}}{2 \cdot K_3}$$

$$x_2 = \frac{K_1 \cdot x_1}{\sigma_s} + F_3 \cdot F_1$$

$$x_3 = F_3 \cdot F_1$$

$$\lambda_1 = \frac{-k_5 - 3 \cdot \rho_s \cdot C_s \cdot F_4}{F_5 - 2 \cdot \sigma'_s \cdot F_4}$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 2 \cdot (\rho_s \cdot C_s - \lambda_1 \cdot \sigma'_s) > 0$$

Hipótese 02:

$$x_1 = \frac{-K_8 \pm \sqrt{K_8^2 - 4 \cdot K_7 \cdot K_9}}{2 \cdot K_7}$$

$$x_2 = \frac{K_1 \cdot x_1}{\sigma_s} + F_3 \cdot F_1$$

$$x_3 = F_3 \cdot F_1$$

$$\lambda_1 = \frac{-k_5 - \rho_s \cdot C_s \cdot F_4 + \rho_s \cdot C_s \cdot F_6}{F_5 + \sigma'_s \cdot F_6}$$

$$\mu_1 = \lambda_1 \cdot \sigma'_s - \rho_s \cdot C_s > 0$$

$$\mu_2 = 0$$

Hipótese 03:

$$x_1 = \frac{-K_{13} \pm \sqrt{K_{13}^2 - 4 \cdot K_{14} \cdot K_{12}}}{2 \cdot K_{14}}$$

$$x_2 = \frac{K_1 \cdot x_1}{\sigma_s} + F_3 \cdot F_1$$

$$x_3 = F_3 \cdot F_1$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho_s \cdot C_s}{\sigma'_s}$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 0$$

13 SOLUÇÃO ESTENDIDA ÀS SEÇÕES TRANSVERSAIS DE GRELHAS

Sendo conhecida a formulação matemática para a otimização de uma seção transversal de concreto armado para uma determinada viga, pretende-se aplicar esta mesma formulação a seções transversais de grelhas. Como se sabe, uma grelha é um conjunto de vigas interligadas, e, de alguma forma, cada viga da grelha influencia nas características das demais. Esta interação entre as vigas de uma grelha é que diferencia o comportamento estrutural de uma grelha como elemento único de um conjunto de vigas. Ciente da diferença entre estes dois tipos estruturais (conjunto de vigas e grelha),

pensou-se num modo de aplicar às grelhas técnicas matemáticas já conhecidas para as vigas. Sendo assim, se a estrutura for processada ‘n’ vezes, e em cada passo de processamento for determinada a altura ótima para as vigas, com os esforços devidamente corrigidos, quando não houver mais redistribuição significativa dos esforços, e conseqüentemente variação da geometria das seções transversais das vigas, será coerente utilizar o modelo para vigas em grelhas. É importante salientar que os resultados obtidos com esse modelo não são necessariamente os mesmos que se obteriam se fosse feita a otimização da grelha como elemento único, mas espera-se que, para utilização prática, o modelo utilizado seja de precisão razoável. Acredita-se que não deve haver diferenças significativas entre a otimização da grelha como elemento único e como um somatório de vigas corrigidas iterativamente.

A redistribuição dos esforços de um pavimento está diretamente ligada à rigidez dos elementos estruturais; então, é de absoluta importância o uso de inércias coerentes para as vigas, pois isto é um fator decisivo no “caminho” das cargas, e conseqüentemente na precisão dos resultados obtidos.

13.1 Embasamento Matemático

Segundo KIRSCH (1993), os vários métodos aproximados de otimização de estruturas topológicas podem ser divididos nas seguintes partes:

- ◆ **Aproximações Globais** - As aproximações são obtidas ao analisar a estrutura como um todo, ou seja, a função objetivo é formulada em todos os pontos de projeto, sendo assim válidos os seus resultados para todos os pontos espaciais. Entretanto, aproximações globais podem requerer muito esforço computacional nos problemas com um grande número de variáveis de projeto. Um exemplo deste tipo de aproximação consiste em formular a função objetivo na grelha, não numa seção transversal de uma viga.
- ◆ **Aproximações Locais** - Estas aproximações, baseadas em informações calculadas em pontos isolados do projeto, são na maioria das vezes eficientes, mas elas são efetivas somente nos casos de pequenas alterações nas variáveis de projeto. Para grandes alterações nas variáveis, a precisão das aproximações é deteriorada, e elas podem tornar-se sem sentido. Para melhorar a qualidade dos resultados, podem-se utilizar variáveis intermediárias. Um exemplo deste tipo de aproximação consiste em formular a função objetivo na seção transversal de uma viga.
- ◆ **Aproximações Combinadas** - Com este tipo de aproximação, podem-se obter resultados com qualidades globais através de aproximações locais. Este tipo de aproximação pode ser exemplificado com o presente trabalho.

No trabalho do KIRSCH (1993), uma aproximação para introduzir Aproximações Combinadas é definir a ordem da matriz de rigidez inicial, pois é possível que um elemento finito deixe de existir, reduzindo-se a ordem da matriz. No presente trabalho, a matriz de rigidez tem ordem constante, e o que é variável ao longo das iterações são seus componentes, como será visto adiante. A vantagem de usar um método de Aproximações Combinadas é que nele, semelhante às Aproximações Locais, a solução baseia-se em resultados de análises locais exatas; portanto, utilizam-se de esforços matemáticos locais e obtêm-se resultados aproximados de qualidades globais. Este procedimento tem sido usado para vários tipos de variáveis de projeto e funções.

13.2 Formulação do Problema

Assume-se a seguinte nomenclatura:

\tilde{F} - vetor de cargas ou das ações externas;

\tilde{K} - matriz de rigidez global;

\tilde{K}_e - matriz de rigidez global dos elementos de barra;

\tilde{K}_p - matriz de rigidez global dos elementos de placa;

\tilde{U} - vetor dos deslocamentos nodais em relação ao sistema de referência;

$\tilde{\beta}^e$ - matriz de transformação de coordenadas globais para locais;

\tilde{k}_e - matriz de rigidez do elemento de barra, em coordenadas locais;

$\tilde{\delta}^e$ - vetor de deslocamentos nas coordenadas locais;

\tilde{P}^0 - vetor das ações de engastamento perfeito;

\tilde{p}^e - esforços nas extremidades dos elementos de barra.

Para o 1º passo de iteração, deve-se considerar o momento de inércia dos elementos no Estádio I.

Fazer $i = 0$, número máximo de iterações ou erro admissível.

1 - Dado um vetor de cargas, ou ações externas \tilde{F} , a correspondente matriz de rigidez \tilde{K} e os deslocamentos \tilde{U} são computados pelas equações de equilíbrio.

$$\tilde{K}_e = \sum_{j=1}^n \tilde{k}_e_j$$

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}_e + \tilde{K}_p \quad \rightarrow \quad \tilde{F} = \left[\begin{array}{c} \tilde{K}_e + \tilde{K}_p \\ \tilde{K}_e + \tilde{K}_p \end{array} \right] \cdot \tilde{U}_i$$

Como os elementos de placa não são variáveis da otimização, assume-se que $\tilde{K}_p =$ constante.

2 - Resolvendo o sistema de equações, obtém-se:

$$\tilde{U}_i = \tilde{K}_i^{-1} \cdot \tilde{F} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\delta}_i^e = \tilde{\beta}_i^e \cdot \tilde{U}_i$$

$$\tilde{p}_i^e = \tilde{P}_i^0 + \tilde{k}_e \cdot \tilde{\delta}_i^e$$

Assume-se que $\tilde{p}_i^e =$ constante.

3 - Aplica-se a rotina de otimização aos elementos finitos desejados; neste momento, todas as restrições do problema devem ser impostas. Uma vez definidas as dimensões dos elementos, calculam-se as inércias destes e segue-se o processo.

$$\left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_i^e \\ \tilde{k}_e \\ \tilde{U}_i \end{array} \right\} \rightarrow \text{otimiza} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tilde{h}_{i+1} \\ \tilde{U}_{i+1} \end{array} \right\} \rightarrow \text{rigidez} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tilde{p}_i^e \\ \tilde{k}_e \\ \tilde{U}_{i+1} \end{array} \right\}$$

Se $\frac{h_{i+1} - h_i}{h_{i+1}} \leq \text{erro}$, interrompe o “loop” e vai para o passo 5.

4 - Como a matriz de rigidez global é formada pela superposição da matriz de rigidez dos elementos, é necessário zerar seus termos.

$$K_{i+1} = 0$$

Volta-se ao passo 1, com novos valores para a matriz de rigidez. Este “loop” deve terminar quando um erro preestabelecido pelo usuário for satisfeito, ou quando atingir um número de iterações predefinido.

5 - Mostram-se ao usuário as alturas das vigas otimizadas; caso se deseje alterar algum desses valores, recomeça-se o processo de otimização, passo 1, e as vigas que estão livres continuam a ser otimizadas.

6 - Com as dimensões dos elementos já definidas, as inércias destes precisam ser corrigidas. Como elas dependem da área de concreto comprimida, do concreto entre fissuras e da área de aço, necessita-se de um processo iterativo para sua correção. Para isto, seguem-se os seguintes passos:

$$K_{e_i} = \sum_{j=1}^n k_{e_j}$$

$$K_i = K_{e_i} + K_p \quad \rightarrow \quad F = \begin{bmatrix} K_{e_i} + K_p \end{bmatrix} \cdot U_i$$

$$U_i = K_i^{-1} \cdot F \quad \Rightarrow \quad \delta_i^e = \beta^e \cdot U_i$$

$$p_i^e = P^0 + k_{e_i} \cdot \delta_i^e$$

$$\begin{cases} p_i^e \\ k_{e_i} \\ U_i \end{cases} \rightarrow \text{rigidez} \rightarrow \begin{cases} p_i^e \\ k_{e_{i+1}} \\ U_{i+1} \end{cases}$$

Se $\frac{\|U_{i+1}\|}{\|U_i\|} \leq \text{erro}$, finaliza o processamento do programa, com os elementos

devidamente dimensionados.

Este “loop” deve terminar quando um erro preestabelecido pelo usuário for satisfeito, ou quando se atingir um número de iterações predefinido.

Fim do processo.

14 ESFORÇOS SOLICITANTES

É importante frisar que, em ambos os modelos, não foi considerado o esforço cortante nem o momento de torção para a determinação da seção ótima. Cabe ao engenheiro de estruturas verificar estes esforços, e se os elementos estão devidamente dimensionados para absorvê-los. A respeito do momento de torção, no caso de torção de

equilíbrio (resistência à torção necessária à manutenção do equilíbrio em relação às cargas e às ações externas), a grande queda de rigidez à torção significa uma grande rotação, que facilmente pode atingir um valor capaz de prejudicar a capacidade de utilização. Nestes casos, é necessária a verificação da rotação, pois esta pode ser determinante para o dimensionamento. No programa, foi introduzido um coeficiente redutor de rigidez à torção. A utilização deste coeficiente tem um efeito favorável, desde que os momentos de torção, que surgem por efeito de coação (torção de compatibilidade), frequentes em pisos de edifícios, desapareçam rapidamente com o aumento da carga até a ruptura, e por conseguinte possam ser desprezados na verificação da capacidade resistente.

15 OBTENÇÃO DA SEÇÃO ÓTIMA

Para se determinar qual seção da viga é otimizada, faz-se uma pesquisa sobre quais as seções que possuem maior momento fletor positivo, maior momento fletor negativo e maior deslocamento. Otimiza-se cada uma destas seções, e assume-se para a viga a maior altura fornecida pelas três opções. Como se sabe, a maior altura satisfaz obrigatoriamente às três hipóteses, mas o contrário não é verdade. Fazendo este procedimento para todas as vigas, completa-se um passo de iteração. Em cada passo, é feita uma pesquisa em todos os nós da estrutura para determinarem-se as seções mais críticas de cada viga; desta forma, quando uma viga é otimizada, sua altura é suficiente para satisfazer às restrições impostas ao problema em todos os seus nós.

16 PRECISÃO DOS RESULTADOS

Como a maioria dos programas feitos com o método dos elementos finitos, é importante que a estrutura seja bem discretizada. Se for utilizada uma malha pobre, possivelmente os resultados não serão consistentes; entre outras variáveis, a rigidez dos elementos, e conseqüentemente da estrutura, será alterada, pois esta é determinada em função dos esforços nas extremidades dos elementos. Aconselha-se, para espaçamento da malha de estruturas padrão de pavimento, que estes tenham em torno de 50cm ou que os vãos das vigas sejam divididos de 8 a 12 partes. Ressalta-se que a divisão interna da malha para obter melhor precisão no cálculo das inércias dos elementos finitos utiliza-se de uma simplificação, que é a linearização do momento fletor. Sendo assim, se a malha não for refinada o suficiente, mesmo se o número de divisões internas dos elementos for grande, não haverá precisão desejável nos resultados.

O programa dispõe de um processo iterativo, um método secante, para otimizar a estrutura, no qual uma das principais variáveis para a convergência do modelo é a rigidez dos elementos, a qual é função dos esforços neles aplicados. Então, necessariamente as inércias dos elementos são dependentes dos esforços calculados no passo de iteração anterior, o que não causa variação significativa nos resultados, uma vez que estes se confundem na iminência da convergência. Se no instante em que se pede ao usuário para fixar as alturas das vigas estas têm módulos muito diferentes dos expostos pela otimização, e o número máximo de iterações for pequeno, poderá haver pouca precisão nas inércias dos elementos finitos. Aconselha-se para número máximo de iteração um valor igual ou superior a 20.

Existe uma pequena variação entre os resultados oferecidos pelos modelos de cálculo das flechas, como se pode ver no arquivo “*.OTI” explicitado por flecha inicial

e final. Pela diferença em módulo das flechas inicial e final das vigas, pode-se analisar a coerência do refinamento da malha lançada sobre a estrutura e a convergência do modelo. É natural que os resultados não coincidam exatamente, pois eles são calculados por modelos distintos com precisões diferentes. Não foram analisadas as flechas dos elementos de placa, que com certeza seria de extrema importância para o presente trabalho.

Devido à imposição da restrição de flecha máxima ser um processo iterativo, necessitou-se estabelecer um erro. Para tal, foi considerado um erro absoluto de 0,5%.

O módulo de elasticidade longitudinal do concreto é um dado de entrada do programa, o qual é considerado constante ao longo deste.

Na determinação do custo dos elementos estruturais, apresentados em arquivos de saída do SSPO, não foi considerado o referente ao aço, pois este é função do detalhamento, que não é o objetivo do presente trabalho. Para determinar o custo total da estrutura, as lajes foram consideradas independentes das vigas, exceto as vigas com altura semelhante à maior espessura das lajes. Ou seja, exceto para as vigas cujas alturas se confundem com a maior espessura das lajes, não foi descontado o volume de concreto e a área de forma em comum às vigas e lajes.

17 CONCLUSÕES DO TRABALHO

A otimização pode se tornar muito mais atraente e de fácil implementação quando se utilizam técnicas matemáticas associadas a conceitos físicos das variáveis envolvidas. Problemas práticos da engenharia podem limitar as variáveis, obtendo assim uma convergência mais rápida aos extremos das funções objetivo. Para a busca da otimalidade em estruturas, é necessário que se conheçam bem as variáveis envolvidas e quais são os objetivos práticos da otimização estrutural. Definido o problema fisicamente, busca-se um algoritmo matemático para extremar a função. Dentre as soluções possíveis apresentadas, volta-se a analisar fisicamente os resultados, e verifica-se o mais adequado para o problema. Embora para os engenheiros seja bem mais difícil, a busca da solução global do problema também pode ser feita exclusivamente pela análise matemática.

Para minimizar o custo das seções transversais das vigas de um pavimento de concreto armado, parte-se do princípio que o somatório dos mínimos locais interagidos representa o mínimo global da estrutura. Devido ao princípio de otimização escolhido, os valores ótimos para as alturas das vigas obtidos pelo método em questão podem não ser necessariamente os mesmos se a grelha for otimizada como uma função objetivo única. Não é conhecida a ordem de grandeza da diferença entre os resultados possíveis obtidos com os diferentes princípios, pois não foi encontrado na literatura programa que minimize as seções transversais de uma grelha de concreto armado. Através de exemplos, entre eles alguns apresentados nesta monografia, acredita-se que não haja diferença significativa entre os resultados dos diferentes modelos quando são analisadas estruturas-padrão.

O resultado obtido com o processo de otimização utilizado é independente dos valores iniciais adotados para as alturas das vigas. Entretanto, pode haver alguma perturbação nos resultados finais quando as alturas iniciais das vigas são muito discrepantes entre si. Para evitar esta possível perturbação, aconselha-se utilizar para as

alturas iniciais das vigas valores de igual módulo, garantindo assim a convergência do modelo para um resultado único.

Para casos particulares de geometria e solicitações, pode haver uma troca alternada na restrição dominante do problema a cada passo de iteração. Ou seja, suponha-se que para um passo i da iteração a restrição dominante seja a flecha, resultando assim numa altura grande da viga para o esforço solicitante. No passo $i + 1$, devido a altura da viga ser grande e conseqüentemente ter maior rigidez e por conseguinte os esforços solicitantes terem módulos mais elevados, a restrição predominante deixa de ser a flecha e passa a ser a tensão. Nesta situação, as alturas ótimas são reduzidas sensivelmente, e no próximo passo da iteração a restrição predominante volta a ser a flecha. Esta alternância da restrição dominante da otimização pode tornar a convergência do processo muito lenta. Mesmo lenta, a convergência ocorre na restrição de deslocamento, que satisfaz obrigatoriamente o restante das restrições.

A alternância das restrições descrita no parágrafo anterior ocorre mais frequentemente em estruturas pouco carregadas e quando o módulo de elasticidade longitudinal do concreto é mais alto, ou seja, a estrutura é menos deformável.

A convergência do processo é mais lenta para estruturas com menor grau de solicitação, pois, nesta situação, em geral a restrição predominante é a flecha, a qual exige maior esforço computacional para se chegar à solução. A restrição de flecha é imposta por um processo iterativo, enquanto as outras são impostas diretamente. Pelo mesmo fato, quando se considera a fluência, a convergência também é mais lenta. Todas as vezes em que a restrição de deslocamento é predominante, a convergência é mais lenta.

Em geral, o tempo de convergência necessário para a otimização de uma grelha é pequeno. O tempo gasto pela otimização das seções transversais representa cerca de 8% do tempo total utilizado pelo programa. A convergência dos modelos ocorre muito mais rapidamente no custo da estrutura, sendo um pouco mais lenta, em termos relativos, nas alturas das vigas.

Para a implementação do processo iterativo, foi utilizado um método secante. Tentou-se utilizar um método tangente, o de Newton-Raphson Puro, mas não houve convergência. O método de Newton Raphson Puro modifica a matriz de rigidez através de um vetor residual de cargas. Como as alturas das vigas são função dos esforços nelas aplicados, estas aumentam com o vetor residual de carga, deteriorando a convergência do método. Um outro motivo que pode explicar a não convergência do método de Newton-Raphson é que com a otimização há uma mudança brusca na matriz de rigidez.

Como todo programa que utiliza o método dos elementos finitos, é necessário que a malha esteja bem discretizada. A discretização da malha implica diretamente na rigidez dos elementos de barra, que, por sua vez, é uma variável de extrema importância para os resultados finais.

A concepção da rigidez dos elementos é de extrema importância para a solução do problema. Se se optar pelo cálculo dos momentos de inércia dos elementos no estágio I, os resultados são desfavoráveis à segurança. Pois, nesta situação, as alturas ótimas das vigas são, em geral, menores que as alturas encontradas quando consideram-se as inércias dos elementos no Estádio II. Sendo assim, quando se calculam as flechas das vigas da estrutura para inércia no estágio I e com alturas ótimas obtidas considerando as inércias dos elementos no estágio II, os resultados são coerentes, mas a recíproca não é verdadeira.

Quando se considera a inércia dos elementos no estágio II, estas são função da área de concreto comprimido, do concreto entre fissuras e das áreas de aço de tração e

de compressão. Os métodos aproximados para a concepção da inércia, CEB e ACI, propõem uma inércia constante para cada vão das vigas do pavimento, sendo esta inércia determinada para a seção mais solicitada. Através de uma análise feita em um trabalho paralelo, do programa de aperfeiçoamento ao ensino, PAE, verificou-se que nem sempre a inércia da seção mais solicitada é a menor do vão em análise, podendo ser, assim, desfavorável à segurança a adoção de um valor constante baseado nesta seção. Se se observar que o valor da inércia é proporcional à área de concreto comprimida, estaria coerente adotar a inércia da seção mais solicitada. Mas é importante lembrar que esta variável aumenta com a área de aço, que é maior na seção mais solicitada. Para uma melhor representação do momento de inércia dos elementos, evitando que este seja desfavorável à segurança ou conservador em excesso, indica-se que este seja variável em um mesmo vão, constante para cada elemento finito.

Pode haver uma pequena variação entre as flechas limites das vigas e as flechas calculadas pelo programa SSPO. Esta variação ocorre porque na imposição da restrição de deslocamento foi necessário um modelo para cálculo de flecha que dependesse de dados locais. Além disso, ainda na imposição da restrição da flecha na otimização, os esforços são considerados constantes no passo de iteração e as alturas das vigas mudam. Como há uma variação na flecha com as dimensões e esforços dos elementos, pode haver alguma interferência nos resultados. Os resultados finais apresentados pelo programa são obtidos por outro modelo, MEF, sendo estes os que melhor representam os valores reais das flechas.

Devido à possibilidade de incompatibilidade dos modelos, é necessária a verificação das alturas finais das vigas, sendo preciso modificá-las manualmente se for o caso.

Quando se está analisando um pavimento composto por elementos de placa e de barra, algumas vigas podem sumir no processo de otimização. À medida que estas vigas vão sumindo, os esforços solicitantes destas vão se redistribuindo pelas vigas e lajes adjacentes, verificando-se uma maior economia com a eliminação de algumas vigas.

Embora eventualmente o método apresente alguma incoerência, na grande maioria dos exemplos encontraram-se soluções adequadas para a prática da engenharia estrutural. Os resultados mostraram uma rápida convergência para uma solução única, reduzindo bastante o custo das estruturas.

Verificou-se que as estruturas mais econômicas têm uma maior taxa geométrica de armadura.

Na prática, as alturas das vigas são em geral padronizadas, o que a princípio faria com que as soluções expostas pelo SSPO fossem apenas teóricas. Mas, à medida que o programa apresenta as alturas ótimas, o engenheiro as padroniza o quanto mais perto do ótimo ele queira. Além do mais, possibilita a verificação da necessidade da existência de determinadas vigas.

Para a otimização das vigas, não foram considerados os esforços cortantes, momentos de torção, esforços normais às barras e esforços devido ao vento. Estas solicitações poderiam alterar os resultados.

Quando se otimiza uma estrutura, busca-se um melhor aproveitamento do material, mantendo-se as condições de equilíbrio e compatibilidade de deformações e permanecendo dentro das especificações feitas por Normas. Este procedimento, em geral, trabalha com as estruturas no limite, seja de utilização ou de ruína. Devido a estas características, quando é feita a otimização de um elemento ou uma parte dos elementos de uma estrutura, é necessário analisar os resultados considerando-se a estrutura como elemento único. No caso das grelhas, com a otimização muitas vezes desaparecem vigas ou estas ficam com alturas pequenas, e é preciso pensar na rigidez horizontal da

estrutura. As vigas são responsáveis pela formação de pórticos, e se estas não existem, podem deixar a edificação muito flexível a esforços horizontais.

18 BIBLIOGRAFIA

- AMIR, H.M.; HASEGAWA, T. (1989). Nonlinear mixed-discrete structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.3, p.626-646, Mar.
- ASHLEY, H. (1982). On making things the best - Aeronautical uses of optimization. *Aircraft*, v.19, n.1, p.5-28.
- BAZARAA, S.M.; SHETTY, C.M. (1979). *Nonlinear programming: theory and Algorithms*. New York, John Wiley.
- BORKOWSKI, A.; JENDO, S. (1990). Structural optimization. *Mathematical programming*, v.2, Plenum, New York, N.Y.
- CARVALHO, R.C. (1994). *Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CHAKRABARTY, B.K. (1992). A model for optimal design of reinforced concrete beam. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.118, n.11, p.3238-3242, Nov.
- CHAN, C.M.; GRIERSON, D.E.; SHERBOURNE, A.N. (1995). Automatic optimal design of tall steel building frameworks. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.121, n.5, p.838-847, May.
- COHN, M.Z. (1993). Theory and practice of structural optimization. *Proc. NATO-ASI Optimization of Large-Scale Structural Systems, G.I.N. Rozvany, ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands*, v.2, p.843-862.
- COHN, M.Z., FELLOW ; DINOVIETZ, A.S. (1994). Application of structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.120, n.2, p.617-650, Feb.
- COOK, R.D. (1995). *Finite element modeling for stress analysis*. Madison, John Wiley & Sons, Inc.
- COSTA, J.B. (1990). *Automação do dimensionamento do vigamento de pavimentos tipo de edifícios de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FRANGOPOL, D.M.; KLISINSKI, M. (1989). Material behavior and optimum design of structural systems. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.5, p.1054-1075, May.
- GELLATLY, R.A.; DUPRÉE, D.M. (1976). Examples of computer-aided optimal design of structures. *Introductory Report, 10th IABSE Congress, International Association for Bridge and Structural Engineering*, Zürich, Switzerland, p.77-105.
- GOLDBERG, D.E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. U.S.A., Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- GRAZIANO, F.P.; FRANÇA, R.L.S. (1993). Solicitações normais. Alguns tópicos. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 3., São Paulo - SP. *Anais*. p. 197-207.
- HAQUE, M.I. (1996). Optimal frame design with discrete members using the complex method. *Computer & Structures*, v.59, n.5, p.847-858.
- HASEGAWA, A.; SAKAMOTO, T.; SATO, N. (1992). Elastic and plastic designs for maximum load. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.6, p.1342-1356, Jun.
- HERSKOVITS, J. , comp (1993). *Structural Optimization 93: The World Congress on Optimal Design of Structural Systems*. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ. 2v.

- HÖRNLEIN, H. (1987). Take-off in optimum structural design. *Computer-Aided optimal Design*, C.A. Mota Soares, ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, p.901-927.
- HOROWITZ, B. (1993). Strength of slender concrete columns subjected to biaxial bending. In: THE WORLD CONGRESS ON OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURAL SYSTEMS, Rio de Janeiro, 1993. *Anais*. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. v.1, p. 395-402.
- JENKINS, W.M. (1992). Plane frame optimum design environment based on genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.118, n.11, p.3103-3112, Nov.
- KIRSCH, U. (1993). Effective approximations for topological optimization. In: THE WORLD CONGRESS ON OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURAL SYSTEMS, Rio de Janeiro, 1993. *Anais*. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. v.1, p. 3-10.
- KIRSCH, U.; TOPPING, B.H.V. (1992). Minimum weight design of structural topologies. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.118, n.7, p.1770-1785, Jul.
- KRISHNAMOORTHY, C.S. (1986). Nonlinear analysis and optimal design of concrete framed structures. In: NARAYANAN, R. *Concrete framed structures: stability and strength*. London, Elsevier Applied Science. p. 71-110.
- LASSEN, T. (1993). Optimum design of three-dimensional framework structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.119, n.3, p.713-727, Mar.
- LEV, O.; ed. (1981). *Structural optimization*. New York, N.Y., ASCE.
- LUENBERGER, D.L. (1989). *Programación lineal y no lineal*. Wilmington, Delaware, E.U.A., Addison-Wesley Iberoamericana.
- MACHADO, C.P. (1989). *Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido*. 3v. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- MEDRANO, M.S. (1994). *Aplicações de programação matemática em análise estrutural*. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- MENDES, P.T.C. (1983). *A influência da fissuração no comportamento das vigas de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MOHARRAMI, H.; GRIERSON, D.E. (1993). An optimality criteria method for the design of reinforced concrete frameworks. In: THE WORLD CONGRESS ON OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURAL SYSTEMS, Rio de Janeiro, 1993. *Anais*. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. v.1, p.403-413.
- MOHARRAMI, H.; GRIERSON, D.E. (1993). Computer-automated design of reinforced concrete frameworks. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.119, n.7, p.2036-2058, July.
- PEZESHK, S.; HJELMSTAD, K.D. (1991). Optimal design of planar frames on stability criterion. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.117, n.3, p.896-913, Mar.
- PRESS, W.H. et alli (1994). *Numerical recipes: the art of scientific computing*. 2. ed. New York, Cambridge University Press.
- RAMOS, A.L.T.; STANGE, P.; ING (1993). A system for optimal design of reinforced concrete structures. In: THE WORLD CONGRESS ON OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURAL SYSTEMS, Rio de Janeiro, 1993. *Anais*. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. v.1, p. 415-421.
- SALGADO, N.K. (1987). *Técnicas de otimização matemática no projeto de pórticos planos retangulares*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- SALLOUM, A.; SIDDIQI, G.H. (1994). Cost-optimum design of reinforced concrete beams. *ACI Structural Journal*, v.91, n.6, p.647-655, Nov-Dec.
- SAVE, M.; PRAGER, W. (1985). *Structural optimization*. Optimality Criteria, v.1, Plenum, New York, N.Y.
- SOARES, R.C. (1997). *Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação a pavimentos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOBIESKI, J. et alii (1987). Panel discussion: Trends in computer-aided optimal design. *Computer-Aided optimal Design*, C.A. Mota Soares, ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, p.1018-1029.
- SOUSA, J.BM.; VAZ, L.E. (1993). Otimização do dimensionamento de pilar padrão de concreto armado com seção retangular. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 3., São Paulo - SP. *Anais*. p. 393 - 405.
- SÜSSEKIND, J.C. (1974). *Curso de análise estrutural - deformações em estruturas, método das forças*. São Paulo, Brasil. Globo.
- THANEDAR, P.B.; VANDERPLAATS, G.N. (1995). Enhancing branch-and-bound method for structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.121, n.2, p.301-306, Feb.
- TSENG, C.H.; WANG, L.W.; LING, S.F. (1995). Enhancing branch-and-bound method for structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.121, n.5, p.831-837, May.
- VANDERPLAATS, G.N. (1984). *Numerical optimization techniques for engineering design*. New York, Mc.Graw - Hill.
- VANDERPLAATS, G.N.; MOSES, F. (1972). Automated design of trusses for optimum geometry. *Journal of Structural Division*, ASCE, v.98, n.6, p.671-690.
- WEI, Z.; YE, S. (1990). Optimal sectional design of frame structures using geometric programming. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.116, n.8, p.2292-2298, Aug.